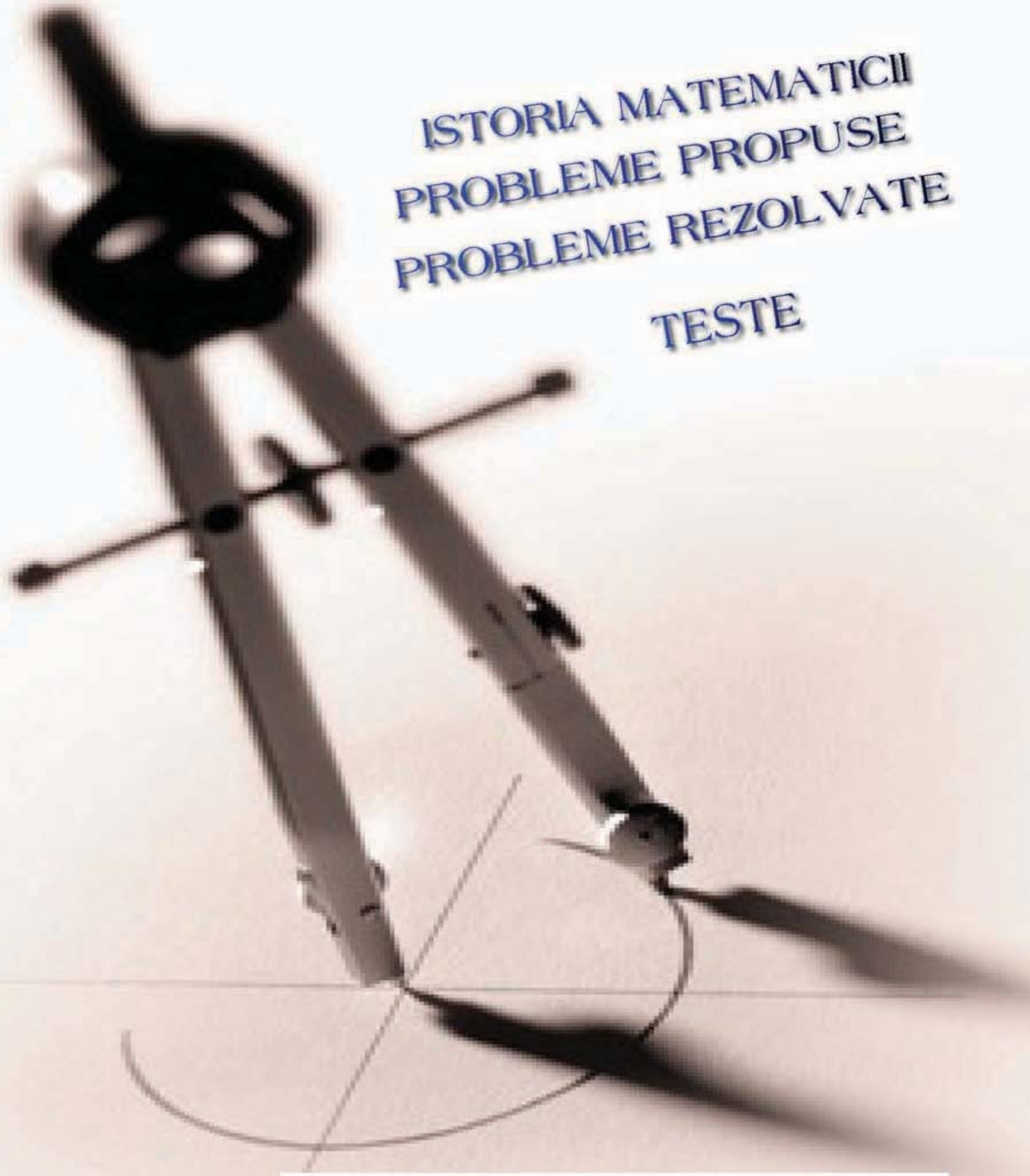
SCLIPIREA MINTII

REVISTĂ NAȚIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICĂ ; PUBLICAȚIE SEMESTRIALĂ, AN VII, NR XIII, 2014

SM



ISTORIA MATEMATICII

PROBLEME PROPUSE

PROBLEME REZOLVATE

TESTE

CALEIDOSCOP MATEMATIC

SM

Societatea de Ştiințe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

LICEUL TEHNOLOGIC " COSTIN NENIȚESCU ", BUZĂU

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601

SCLIPIREA MINȚII 13

Revistă națională de cultură matematică, publicație semestrială, An VII, Nr. XIII, APRILIE 2014, BUZĂU

CUPRINS

GÂNDEŞTE CORECT

REDACȚIA
Liceul Tehnologic „ Costin Nenițescu”,
Buzău, Strada Transilvaniei, Nr. 134,
Cod. 120012, Tel. 0238725206
e-mail: ady_stan2005@yahoo.com
Coordonator: Adrian Stan

Tipar: editgraph **Buzău, www.editgraph.ro**

’’ Oricare ar fi durata timpului, ştiinţa întrebuinţării lui îl va face lung’’
Seneca

1. Istoria Matematicii

Istoria calendarului

de prof. Adrian Stan

Etimologic, cuvântul ’’calendar ’’ vine de la latinescul ’’calendarium ’’ ce reprezenta primele zile din lună şi care se numeau ’’calende ’’ - zilele în care se plăteau datoriile. Calendarul astronomic reprezintă modul de divizare a timpului după observarea fenomenelor astronomice ciclice cum ar fi fazele Lunii – calendar lunar, sau după mişcarea aparentă a Soarelui – calendar solar.

În Egipt acum circa 2700 ani î.e.n a apărut primul calendar solar cu care se putea calcula cu exactitate anul, avînd 12 luni a câte 30 de zile, în total 360 de zile la care se adăuga la sfârşitul anului încă cinci zile. Până la acesta, egiptenii foloseau din anul 2776 î.e.n, un calendar lunar, în funcţie de fazele Lunii, ce începea o dată cu anotimpul inundaţiilor asociat cu răsăritul stelei Sirius la mijlocul lunii iulie. Este interesant că egiptenii au găsit cu o precizie uimitoare Nordul geografic(cu o deviaţie de cel mult un grad), orientând feţele marilor piramide în direcţia celor patru puncte cardinale.

Civilizaţia sumerienilor a realizat gruparea stelelor în constelaţii fapt ce a permis întocmirea unui calendar lunar si mai apoi unul lunisolar cu 12 luni avînd 354 de zile. Diferenţa de 11 zile faţă de anul solar se realiza prin adăugarea din trei în trei ani a unei luni.

Babilonienii folosind sistemul sexagesimal preluat de la sumerieni au fost primii din lume, acum circa 2000 de ani î.e.n, care au împărţit cercul în 360 de grade, gradul în 60 de minute iar minutul în 60 de secunde. Acestea au fost mai departe preluate de evrei, greci şi mai apoi de romani ajungând pînă în vremea noastră.

De asemenea, ei împărţeau şi anul în 360 de zile. Din sutele de mii de tăbliţe de lut descoperite, ştiinţa mesopotamiană a excelat în algebră şi astronomie, fiind primii care au făcut diferenţa dintre o stea şi o planetă, primii care au determinat solstiţiile şi echinocţiile, şi de asemenea ei au fost primii care au împărţit ecliptica în douăsprezece zodii. Prima hartă a boltei cereşti avea notate cu exactitate orbitele, conjuncţiile şi eclipsele principalelor planete. Uimitor este faptul cum au reuşit să prevadă foarte multe din eclipsele de lună.

În Mesopotamia acum circa 500 de ani î.e.n era folosit un calendar lunar dar la care pe parcursul a 19 ani se adăugau şapte luni suplimentare pentru a-l putea potrivi cu anul solar.

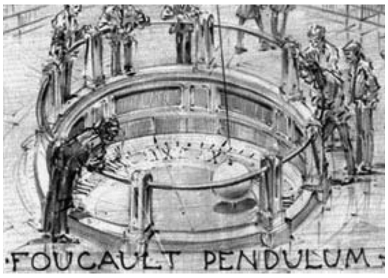
Şi în Europa , în zona de sud a Germaniei, la Ezelsdorf, s-a descoperit un corp conic din aur din perioada Bronzului, acum circa 970 ani î.e.n, având gravate pe el o serie de cercuri ce simbolizau zile. Adunate, acestea dădeau 354 respectiv 365 zile indicând de fapt un calendar lunar-solar.

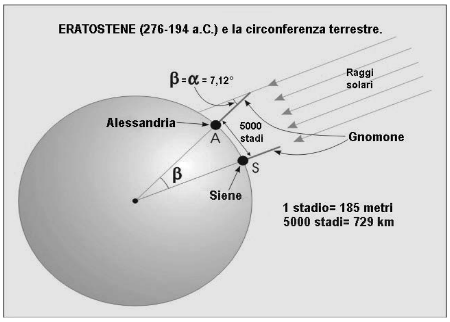
În mitologia greacă, transmisă de către poetul grec Hesiod, Timpul numit Cronos este fiul rezultat dintre Uranus –Cerul şi Geea – Pământul. Lumea zeităţilor este cât se poate de uman reprezentată, în scrierile păstrate ale Antichităţii, căci se aminteşte de Cronos ca cel care şi-a ucis tatăl şi şi-a înghiţit fraţii din care doar Zeus a scăpat.

Ştiinţa greacă îi are în prim plan pe **Aristarh din Samos**(310-230 î.e.n) care în sec. III î.e.n în tratatul “ Despre dimensiunile şi distanţele Soarelui şi Lunii ’’afirma că Pământul efectuează o mişcare de rotaţie de 24 de ore, în jurul axei sale. De asemenea, aminteşte faptul că stelele şi Soarele sunt fixe iar Pământul se învârte în jurul Soarelui descriind un cerc, gândire ce este premergătoare sistemului heliocentric al lui **Copernic** (1473 - 1543)şi care din păcate nu este împărtăşită de mai toţi savanţii Antichităţii. Chiar şi Copernic a trebuit să asiste la interzicerea în 1616 a operelor sale despre sistemul heliocentric de către Papa Paul al V-lea.

Heraclit din Pont (circa 350 ani î.e.n) discipol al lui **Platon** contribuie la formarea unei imagini astronomice despre Univers. Pentru el, bolta cu stele este fixă iar Pământul se roteşte o dată pe zi în jurul axei sale, mişcarea aceasta de rotaţie fiind sensul pentru succesiunea zi- noapte.

De abia în 1851, fizicianul francez **Jean Bernard Focault** (1819-1868) cu ajutorul unui pendul (pendulul lui Focault –o frânghie lungă de 67 m şi o bilă de 28 kg) prezintă publicului dovada științifică a rotirii Pământului în jurul propriei axe, demonstrând ideea heliocentrică a lui Copernic (Soarele în centrul Universului). Mişcarea spațiului de sub pendul reprezenta dovada rotirii Pământului.



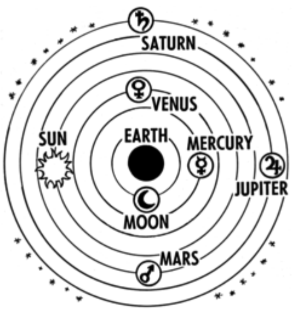


Un mare învățat al timpului său, **Eratostene din Cirene**(circa 240 î.e.n) consideră Pământul ca având formă sferică şi reuşeşte cu o precizie uimitoare pentru timpul său să deducă lungimea circumferinței Pământului de 39690 km foarte aproape de valoarea reală de 40075 km.

În anul 153 î.e.n anul oficial va începe la 1 ianuarie şi nu la 1 martie ca pînă atunci. Lunile septembrie (luna a şaptea), octombrie(luna a opta), noiembrie(luna a noua), decembrie(luna a zecea) ni s-au păstrat din acea perioadă.

Primul calendar cu an bisect este introdus prin decret de către regele egiptean **Ptolemeu al III-lea** , pentru a elimina decalajul de o zi la patru ani.

Un alt matematician şi astronom grec din sec. II î.e.n , **Hiparchos** , a fost primul care a introdus în ştiința greacă împărțirea cercului în 360 de grade, gradul în 60 de minute, şi minutul în 30 secunde şi de asemenea a construit o serie de instrumente astronomice folosite mult timp şi după el ce i-au permis să determine anul solar cu o precizie uimitoare, la o diferență de câteva secunde de cel real şi să determine precesia echinocțiilor-fenomenul de deplasare anuală a punctelor echinoxiale.



În sec. II e.n **Ptolemeu (87- 165 e.n)** creatorul sistemului geocentric a reprezentat vîrful ştiinței elenistice prin tratatele acestuia despre optică, astronomie, acustică, teoria planetelor şi stabilirea unui calendar al răsăritului şi apusului aştrilor.

Şi în Imperiul Roman, **Iulius Cesar** sfătuit de astronomul egiptean **Sosigene**, introduce în anul 46 î.e.n calendarul ce-i poartă numele, calendarul iulian, şi care intră în vigoare la 1 ianuarie 45 î.e.n, iar din trei în trei ani îi va fi adăugat un an bisect. El va fi corectat în anul 9 î.e.n de către împăratul Augustus care începând cu anul 8 î.e.n şi din patru în patru ani este introdus anul bisect. Denumirea lunii iulie provine de la latinescul Iulius dat în cinstea împăratului roman. Mai mult, o dată cu expansiunea creştinismului în Imperiul Roman, calendarul începe să calculeze timpul de la naşterea lui Isus Cristos şi nu de la întemeierea Romei, din sec. VIII, î.e.n.

O nouă reformă a calendarului care se păstrează până astăzi este realizată de către papa **Grigore al XIII-lea** în 1582 pentru a ajusta diferența de zece zile dintre data actuală conform calendarului iulian şi cea a anului solar. Astfel, calendarul gregorian numit aşa în cinstea papei, face ca ziua de 4 octombrie să devină 15 octombrie.

În Rusia, începutul anului se făcea la 1 septembrie, şi o dată cu trecerea de la calendarul bizantin la cel iulian data de 1 septembrie 1700 devine 1 ianuarie 1700.

Primul calendar oficial în China datează din anul 104 î.e.n şi se datorează observațiilor astronomice ce au permis chinezilor să asocieze constelațiilor observate, succesiunea anotimpurilor. Anul era împărțit în 365 de zile şi un sfert, atâtea grade având şi cercul. Primul mare observator din lume dotat cu un mecanism de orologerie a fost inventat de chinezi în anul 1088.

Calendarul mayaş aduce în prim plan divinitatea căreia populațiile precolumbiene începând cu sec 5 î. e. n îi datorează cunoaşterea scrierii iar înțelegerea cosmosului şi spiritualitatea însemna acelaşi lucru. Calendarul mayaş era împărțit în 18 perioade (numite uinal) a câte 20 de zile fiecare reprezentate de un caracter, în total 360 de zile, la care se adăuga 5 zile nefaste care nu aveau nume deoarece se considerau nefaste. Separat aveau şi un calendar pentru ritualurile divine şi de asemenea un calendar numit marele ciclu de 5200 tun (1 tun = 360 zile) ce cuprinde toată istoria lor şi care pleacă de la data de 13 august 3114 i.e.n şi care se încheie în 21 decembrie 2012 şi ar fi însemnat sfârşitul lumii după unii. Interesant este că la mayaşi spre deosebire de noi apare anul zero.

Bibliografie: 1. Istoria culturii şi civilizației. Ovidiu Drîmba. Ed. Saeculum . 1980.
2. Cronica ilustrată a omenirii. Editura Litera. Bucureşti, 2011.

Prof. Liceul Tenologic. Costin Nenițescu, Buzău

''Când rațiunea altuia izbutește să mă convingă pe deplin, devine propria mea rațiune".
Jonathan Swift

2. Articole si note matematice

Demonstrarea unor inegalități din Octogon Mathematical Magazine (II)

de D.M. Bătinețu-Giurgiu, Neculai Stanciu şi Titu Zvonaru

Acest articol este o continuare a celui din[1] şi vom demonstra unele inegalități enunțate în [2].

1. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{3}{x+y+z} \geq 2xyz \cdot \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}}{x^2+y^2+z^2}$, $x, y, z > 0$ (vezi [2], Teorema 38, p. 101).

Demonstrație. Inegalitatea de demonstrat se scrie succesiv:

$$\frac{(xy+yz+zx)(x+y+z)-3xyz}{xyz(x+y+z)} \geq \frac{2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)}{xyz(x^2+y^2+z^2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+z^2)(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+x^2z+xz^2) \geq$$

$$\geq 2(x+y+z)(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) \Leftrightarrow \sum x^4y+\sum xy^4+\sum x^3y^2+\sum x^2y^3+$$

$$+2\sum x^2y^2z \geq 2\sum x^3y^2+2\sum x^2y^3+2\sum x^2y^2z \Leftrightarrow \sum x^4y+\sum xy^4 \geq \sum x^3y^2+$$

$$+\sum x^2y^3 \Leftrightarrow \sum xy(x-y)^2(x+y) \geq 0. \blacksquare$$

2. $x+y+z+t-4\cdot\sqrt[4]{xyzt} \geq 3\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}+\sqrt[4]{z}}{3}\cdot\sqrt[4]{t}\right)^4$, $x, y, z > 0$ (vezi [2], Teorema 6, p. 81).

Demonstrație. Pentru uşurință notăm $x=a^4, y=b^4 z=c^4, t=d^4$, şi avem de demonstrat că $a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd \geq 3\cdot\left(\frac{a+b+c}{3}-d\right)^4$. Putem presupune (eventual renotând) că $d=\min\{a,b,c,d\}$. Dacă notăm $\alpha=a-d$, $\beta=b-d$, $\gamma=c-d$, avem $\alpha,\beta,\gamma \geq 0$. Nu este foarte greu de verificat identitatea:

$$a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd=2d^2[\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]+$$

$+4d(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)+8\alpha\beta\gamma d+\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$, şi atunci este suficient să demonstrăm că $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4 \geq \frac{(\alpha+\beta+\gamma)^4}{27}$. O demonstrație pentru ultima inegalitate se poate obține cu inegalitatea lui Radon, sau cu inegalitatea lui Cebâşev:

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=\alpha^3\cdot\alpha+\beta^3\cdot\beta+\gamma^3\cdot\gamma \geq \frac{1}{3}(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\alpha+\beta+\gamma) \geq$$

$$\geq \frac{1}{9}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha+\beta+\gamma)^2 \geq \frac{1}{27}(\alpha+\beta+\gamma)^4. \blacksquare$$

3. $\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \geq \frac{(x+y)^2(x+y+4z)^2}{48(x+y+z)} \geq xyz$, $x, y, z > 0$ (vezi [2], Teorema 41, p. 102).

Demonstrație. Inegalitatea din stânga se scrie succesiv
$16(x+y+z)^4 \geq 9(x+y)^2(x+y+4z)^2 \Leftrightarrow 4(x+y+z)^2 \geq 3(x+y)(x+y+4z)$
$\Leftrightarrow x^2+y^2+4z^2+2xy-4xz-4yz \geq 0 \Leftrightarrow (x+y-2z)^2 \geq 0$. Deoarece $(x+y)^2 \geq 4xy$,
pentru inegalitatea din dreapta este suficient să demonstrăm că
$(x+y+4z)^2 \geq 12z(x+y+z) \Leftrightarrow x^2+y^2+4z^2+2xy-4xz-4yz \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x+y-2z)^2 \geq 0$.■

4. $\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}} \leq \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$, $x,y,z>0$ (vezi [2], Teorema 39, p. 101).

Demonstrație. Notând $x=a^3$, $y=b^3$, $z=c^3$, avem de demonstrat că
$a^6c^3+a^3b^6+b^3c^6 \geq a^5b^2c^2+a^2b^5c^2+a^2b^2c^5$, care rezultă din adunarea următoarelor trei inegalități:
$\frac{a^6c^3+a^6c^3+a^3b^6}{3} \geq a^5b^2c^2$; $\frac{a^3b^6+a^3b^6+b^3c^6}{3} \geq a^2b^5c^2$;
$\frac{b^3c^6+b^3c^6+a^6c^3}{3} \geq a^2b^2c^5$.■

5. $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}-\sqrt{z})^2+(\sqrt{x}-\sqrt{t})^2+(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2+(\sqrt{y}-\sqrt{t})^2+(\sqrt{z}-\sqrt{t})^2 \geq$
$\geq x+y+z+t-4\cdot\sqrt[4]{xyzt}$, $x,y,z,t>0$ (vezi [2], Teorema 14, p. 90).

Demonstrație. Notând $x=a^4$, $y=b^4$, $z=c^4$, $t=d^4$, avem de demonstrat că
$a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd \geq a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2$.
Folosim inegalitatea din teorema 12 ([2]), adică
$3(a^4+b^4+c^4+d^4)+4abcd \geq (a+b+c+d)(a^3+b^3+c^3+d^3)$, rescrisă sub forma
$2a^4+2b^4+2c^4+2d^4+4abcd \geq a^3b+ab^3+a^3c+ac^3+a^3d+ad^3+b^3c+bc^3+$
$+b^3d+bd^3+c^3d+cd^3$. Rezultă că este suficient să arătăm că
$a^3b+ab^3+a^3c+ac^3+a^3d+ad^3+b^3c+bc^3+b^3d+bd^3+c^3d+cd^3 \geq$
$\geq 2a^2b^2+2a^2c^2+2a^2d^2+2b^2c^2+2b^2d^2+2c^2d^2$, care este echivalentă cu
$ab(a-b)^2+ac(a-c)^2+ad(a-d)^2+bc(b-c)^2+bd(b-d)^2+cd(c-d)^2 \geq 0$.■

6. $8\cdot\left(\frac{(x+y)(y+z)(z+x)+xyz}{x+y+z}\right)^3 \geq 27xyz(x+y)(y+z)(z+x)$, $x,y,z>0$ (vezi [2], Teorema 33, p. 99).

Demonstrație. Deoarece $(x+y)(y+z)(z+x)+xyz=(x+y+z)(xy+yz+zx)$,
inegalitatea de demonstrat se scrie succesiv:
$8(xy+yz+zx)^3 \geq 27xyz(x+y)(y+z)(z+x) \Leftrightarrow 8(\sum x^3y^3+3\sum x^3y^2z+3\sum x^2y^3z+$
$+6x^2y^2z^2) \geq 27xyz(\sum x^2y+\sum xy^2+2xyz) \Leftrightarrow 8\sum x^3y^3 \geq 3\sum x^3y^2z+3\sum x^2y^3z+$
$+6x^2y^2z^2 \Leftrightarrow 3(\sum x^3y^3+3x^2y^2z^2-\sum x^3y^2z-\sum x^2y^3z)+5(\sum x^3y^3-3x^2y^2z^2) \geq 0$;
prima paranteză este pozitivă conform inegalității lui Schur (aplicată numerelor xy, yz, zx), iar a doua paranteză este pozitivă conform inegalității mediilor.■

Bibliografie:

1. D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu, T. Zvonaru, *Demonstrarea unor inegalități din Octogon*, Sclipirea Minții, Nr. 12, 2013, 5-6.
2. Octogon Mathematical Magazine, Vol. 13, April, 2005.

Aplicații de analiza matematică

de prof. **Florin Stănescu** , Dâmbovița

(II)

În cele ce urmează prezentăm continuarea articolului din numărul 11 ce își propunea determinarea unor funcții, definite, în special, prin relații integrale, cu ajutorul inegalităților lui **Cebâşev** şi a lui **Jensen.**

Aplicația 4. Determinați funcțiile $f:[0,1]\to\mathbb{R}$,care au următoarele proprietăți:

a) f este derivabilă de trei ori cu $f'''(x)\geq 0,(\forall)x\in[0,1]$;

b) f' este crescătoare si strict pozitiva;

c) $f'(1)\left(2\left(f(1)-f(0)\right)-f'(1)\right)\cdot\int_0^1\frac{dx}{\left(f'(x)\right)^2}=1.$ *Mathproblems ,Volume 2, Issue 2 (2012)*

Rezolvare: Din

$$\left(\frac{x}{f'(x)}\right)'=\frac{f'(x)-xf''(x)}{\left(f'(x)\right)^2},(\forall)x\in[0,1]\Rightarrow\int_0^1\left(\frac{x}{f'(x)}\right)'dx=\int_0^1\frac{f'(x)-xf''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}dx\Rightarrow\frac{1}{f'(1)}=\int_0^1\frac{f'(x)-xf''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}dx.(5)$$

Considerăm funcția $g:[0,1]\to\mathbb{R},g(x)=f'(x)-xf''(x)\Rightarrow g'(x)=-xf'''(x)\leq 0\Rightarrow$ g este descrescătoare.

Cum funcțiile $g(x)$ si $\frac{1}{\left(f'(x)\right)^2}$ sunt descrescătoare, conform $\alpha)-a)$,avem

$$\frac{1}{f'(1)}=\int_0^1\frac{f'(x)-xf''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}dx\geq\int_0^1\frac{dx}{\left(f'(x)\right)^2}\cdot\int_0^1\left(f'(x)-xf''(x)\right)dx=\int_0^1\frac{dx}{\left(f'(x)\right)^2}\left(f(1)-f(0)-f'(1)+\int_0^1 f'(x)dx\right)=$$

$\int_0^1\frac{dx}{\left(f'(x)\right)^2}\left(2\left(f(1)-f(0)\right)-f'(1)\right)$ **(6).** Relația din enunț mai poate scrisă sub forma

$\frac{1}{f'(1)}=\int_0^1\frac{dx}{\left(f'(x)\right)^2}\left(2\left(f(1)-f(0)\right)-f'(1)\right)$, deci $\frac{1}{f'(1)}=\int_0^1\frac{dx}{\left(f'(x)\right)^2}\left(2\left(f(1)-f(0)\right)-f'(1)\right)\geq\frac{1}{f'(1)}$.

Astfel, $\frac{1}{\left(f'(x)\right)^2}$ sau g sunt funcții constante.

1.Dacă $f'(x)=a,(\forall)x\in[0,1]\Rightarrow f(x)=ax+b,a,b\in\mathbb{R},a>0.$ **(7)**

2.Dacă

$$g(t)=c\Leftrightarrow f'(t)-tf''(t)=c,(\forall)t\in[0,1]\Rightarrow\int_0^x\left(f'(t)-tf''(t)\right)dt=cx,(\forall)x\in[0,1]\Rightarrow f(x)-f(0)-xf'(x)+$$

$$\int_0^x f'(t)dt=cx\Rightarrow 2(f(x)-f(0))-xf'(x)=cx\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{x}f(x)+\left(-\frac{f(0)}{x}-c\right),(\forall)x\in(0,1].$$ Ultima relație reprezintă o ecuație diferențială liniară de ordinul întâi: $y'=p(x)y+q(x)$, cu soluția $y=e^{P(x)}\int q(x)e^{-P(x)}dx,$ unde $P(x)$ reprezintă o primitiva fixata a funcției $p.$Cum

$$P(x)=2\ln x\Rightarrow f(x)=e^{2\ln x}\int\left(-\frac{f(0)}{x}-c\right)e^{-2\ln x}dx=x^2\int\left(-\frac{f(0)}{x}-c\right)\frac{1}{x^2}dx=x^2\left(\frac{f(0)}{2x^2}+\frac{c}{x}+d\right)=$$

$dx^2+cx+\frac{f(0)}{2}+e,(\forall)x\in(0,1].$ Deoarece f este continuă pe$[0,1]\Rightarrow f(x)=dx^2+cx+\frac{f(0)}{2}+e,(\forall)x\in[0,1].$ **(8).**

Din (**7**) si (**8**) şi respectând condițiile din enunț obținem că $f(x)=ax^2+bx+c,a\geq 0,b>0.$

Aplicația 5. Determinați funcțiile continue si crescătoare $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to[0,\infty)$, cu următoarele proprietăți:

a) $\cos^2 x\cdot\sqrt{f(\sin x)}+\sin^2 x\cdot\sqrt{f(\cos x)}\geq 1,(\forall)x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx\leq\frac{\pi}{2}$.

Soluție. Avem că $f\left(\sin x\right)$ este o funcție crescătoare, iar $f\left(\cos x\right)$ descrescătoare, deci ambele funcții sunt integrabile. Aplicând inegalitatea Cauchy-Schwarz, putem scrie:

$$1\leq\left(\cos x\cdot\cos x\cdot\sqrt{f(\sin x)}+\sin x\cdot\sin x\sqrt{f(\cos x)}\right)^2\leq$$

$$\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x\cdot\left(\sqrt{f(\sin x)}\right)^2+\sin^2 x\cdot\left(\sqrt{f(\cos x)}\right)^2\right)=\cos^2 x\cdot f\left(\sin x\right)+\sin^2 x\cdot f\left(\cos x\right),$$

$(\forall)x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Integrând pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ultima inegalitate, putem scrie:

$\frac{\pi}{2}\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot f(\cos x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot f(\sin x)dx.$ **(9)** .Pentru integrala $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot f(\cos x)dx$ cu schimbarea de variabila $x=\frac{\pi}{2}-t$, obținem $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot f(\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot f(\sin x)dx.$ Revenind in **(9)** avem

$\frac{\pi}{4}\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot f(\sin x)dx$ .Folosind ca: $\sin x\leq x,(\forall)x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, f crescătoare, deci

$f(\sin x)\leq f(x),(\forall)x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, si $\alpha)-b)$, avem:

$\frac{\pi}{4}\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot f(\sin x)dx\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot f(x)\leq\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx\leq\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$(am mai folosit ca $\cos^2 x$ este descrescătoare pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$), rezulta $f(x)=c,x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, iar din $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx\leq\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0\leq c\leq 1$.

Înlocuind $f=c$ in relația din enunț

$$\Rightarrow\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\sqrt{c}\geq 1\Rightarrow c\geq 1\Rightarrow c=1\Rightarrow f(x)=1,(\forall)x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

O altă aplicație în care se folosește egalitatea lui Young și inegalitatea lui Jensen este următoarea problemă

Aplicația 6. Determinați funcțiile integrabile $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, pentru care există $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $f\left(x^3+x\right)=\sin ax,(\forall)x\in[0,1]$ si $\int_0^2 f(x)dx=2\sin\frac{5a}{16}$.

Bibliografie

1. Boboc N. *Analiza matematica,* Editura Universității din București, 1999;
2. Ganga M. *Teme si probleme de matematica,* Editura Tehnica, București, 1991;
3. Mortici C. *600 de probleme de matematica pentru concursuri,* Editura Gil, Zalau, 2001.

Prof. , Școala Șerban Cioculescu, Găești, Dâmbovița

” Știința puțină îi face pe oameni pretențioși, în timp ce știința multă îi face modești: așa după cum spicele goale își înalță spre cer capetele lor trufașe, în timp ce spicele pline, se apleacă spre pământ sub greutatea lor. ’’

Leonardo da Vinci

A method for solving equations

by Mihály Bencze and Titu Zvonaru

Here, we present a method for solving algebraic equations, trigonometric, exponential, or combining these types of equations.
We must to solve the equation: $F(x)=0$, $x\in I$, $I\subset R$, (1),where $\mathbb{R}$ is the set of real numbers. We put the equation to solve in the form: $f(g(x))=f(h(x))$, $x\in I$, (2)
where $f:J\to\mathbb{R}$ is an injective function on J, and g respectively h are functions with values in J. By the injectivity of the function f, the equation (2) becomes $g(x)=h(x)$, $x\in I$, (3),which generally is easily solved. The difficulty is in choosing the function f. Here we present some illustrate examples ([2]) as follows:

Example 1. Solve in $\mathbb{R}$ the equation:

$$\log_3\frac{\cos 5x+8\cos^3 x}{\cos x}=8^{\cos x}+3\cos x-2^{\cos 5x+8\cos^3 x}-\cos 5x-8\cos^3 x+1.$$

Solution. Considering the injective function $f(t)=\log_3 t+2^t+t$, $t>0$, the equation to solve, it is written successively

$$f(\cos 5x+8\cos^3 x)=f(3\cos x)\Leftrightarrow \cos 5x+8\cos^3 x=3\cos x$$
$$\Leftrightarrow \cos 5x+4\cos x\cdot 2\cos^2 x-3\cos x=0\Leftrightarrow \cos 5x+4\cos x(1+\cos 2x)-3\cos x=0$$
$$\Leftrightarrow \cos 5x+\cos x+4\cos x\cos 2x=0\Leftrightarrow 2\cos 3x\cos 2x+4\cos x\cos 2x=0$$
$$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos 3x+2\cos x)=0\Leftrightarrow \cos 2x\left(\cos x(4\cos^2 x-3)+2\cos x\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \cos x\cos 2x(4\cos^2 x-1)=0\Leftrightarrow \cos x\cos 2x\left(2(1+\cos 2x)-1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \cos x\cos 2x(2\cos 2x+1)=0.$$

Hence, $\cos x=0$, or $\cos 2x=0$, or $\cos 2x=-\dfrac{1}{2}$.

We obtain the solutions $x\in\left\{\pm\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\middle| k\in Z\right\}\cup\left\{\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi\middle| k\in Z\right\}\cup\left\{\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi\middle| k\in Z\right\}$.

Example 2. Solve in $\mathbb{R}$ the equation:

$$x^4+3+2\cdot 3^{x^4-5x^2+3}+3\cdot 9^{x^4-5x^2+3}=5x^2+\frac{x(2x^2+3x+4)}{(x^2+2)^2}+\log_3\frac{x}{x^2+2}$$

Solution. Considering the injective function $f(t)=t+2\cdot 3^t+3\cdot 3^{2t}$, $t>0$, the given equation is written

$$f\left(\log_3\frac{x}{x^2+2}\right)=f(x^4-5x^2+3).$$

Therefore, it remains to solve the equation $\log_3\dfrac{x}{x^2+2}=x^4-5x^2+3$, $x>0$.

If $x\in(1,2)$, then $x^4-5x^2+3<-1$ and $\dfrac{x}{x^2+2}>\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow \log_3\dfrac{x}{x^2+2}>-1$;

If $x\in(0,1)\cup(2,\infty)$, then $x^4-5x^2+3>-1$ and $\dfrac{x}{x^2+2}<\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow \log_3\dfrac{x}{x^2+2}<-1$.

Yields that the only possible $x_1=1$ and $x_2=2$ which are indeed solutions.
This completes the proof.

Example 3. Solve in $\mathbb{R}$ the equation: $2x^4-9x^2-3x+10=\log_2\dfrac{3x}{x^2+2}$.

Solution. We consider the injective function $f(t)=\log_2 t+2t+2t^2, t>0$.

Then the equation to solve is written as $f(x^2+2)=f(3x)$.

So, $x^2-3x+2=0$, and we get the solutions $x_1=1, x_2=2$. The proof is complete.

Example 4. Solve in $\mathbb{R}$ the equation:

$$\log_6\frac{x^3+11x}{x^2+1}=121-22x-135x^2-2x^3+42x^4-3x^6$$

Solution. Considering the injective function $f(t)=\log_6 t+2t+3t^2, t>0$,

the equation to solve is written as $f(x^3+11x)=f(6x^2+6)$.

So we must to solve the equation $x^3+11x=6x^2+6$.

We get the solutions $x_1=1, x_2=2, x_3=3$. The proof is complete.

Example 5. Solve in $\mathbb{R}$ the equation:

$$x^2+7+\log_2\frac{x^2-5x+8}{\sqrt{x-2}}+\log_3\frac{x^2-5x+8}{2\sqrt{x-2}}=5x+2\sqrt{x-2}.$$

Solution. Considering the injective function $f(t)=\log_2 t+\log_3 t+t$, the equation to solve becomes $f(x^2-5x+8)=f(2\sqrt{x-2})$.

So we must to solve the equation $x^2-5x+8=2\sqrt{x-2}$,

which by squaring becomes $x^4-10x^3+41x^2-84x+72=0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2(x^2-4x+8)=0$. Hence $x=3$, and we are done.

Example 6. Solve in $\mathbb{R}$ the equation: $3x^3+\log_2\left(x^2+\frac{1}{3x}\right)+\log_3\left(x^2+\frac{1}{3x}\right)+1=3x$

Solution. Considering the injective function $f(t)=\log_2 t+\log_3 t+t$, the given equation becomes $f(3x^3+1)=f(3x)$. So it remains to solve the equation $3x^3+1=3x$, which has all roots real for e.g. $x_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right), x_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$. So, you find the solutions using Cardano' s formulas.

Example 7. Solve in $\mathbb{R}$ the equation:

$$\log_3\left(\frac{x}{6}+\frac{3}{2x}\right)=-819+6x-226x^2+216x^3-28x^4-x^6.$$

Solution. If we consider the injective function $f(t)=\log_3 t+t^3+t^2+t$,

the equation it is written in the form $f(x^2+9)=f(6x)$. So, $x^2+9=6x$, i.e. $x=3$, and we are done.

Example 8. Solve in $\mathbb{R}$ the equation: $2^{\cos^2 x}-2^{\sin^2 x}+(3-\sin^2 x\cos^2 x)\cos 2x=0$

Solution. We have $(3-\sin^2 x\cos^2 x)\cos 2x=\left(3(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-\sin^2 x\cos^2 x\right)\cos 2x$

$=(3\sin^4 x+3\cos^4 x+5\sin^2 x\cos^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)$

$=3\cos^6 x-3\sin^6 x-2\sin^4 x\cos^2 x+2\sin^2 x\cos^4 x$

$=3\cos^6 x+2\cos^4 x(1-\sin^2 x)-3\sin^6 x-2\sin^4 x(1-\sin^2 x)$

$=\cos^6 x+2\cos^4 x-\sin^6 x-2\sin^4 x$.

If we consider the injective function $f(t)=2^t+t^3+2t^2$, then the given equation becomes $f(\cos x)=f(\sin x)$ .Therefore, $\cos x=\sin x$, which yields $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$.

REFERENCES

[1] M. Bencze, *Utilizarea injectivității funcțiilor în rezolvarea ecuațiilor*, Recreații Matematice, **1**(2013), 27-28.

[2] Octogon Mathematical Magazine, 1993-2013.

Inegalităţi ciclice obţinute cu funcţii convexe

de prof. Marius Drăgan, Horaţiu Stoian, Bucureşti

Scopul acestui articol este de a demonstra că inegalitatea ciclică:

$$\sum x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \geq \sum x_1^{\frac{\alpha+\beta}{n+1}} \prod x_1^{\frac{\alpha+\beta}{n+1}} \qquad (1)$$

este adevărată pentru orice $x_1, x_2, ..., x_n$ pozitive, $n > 2$, $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ astfel încât $\alpha \geq n\beta$.

Substituind $x_i \to \dfrac{x_i}{\alpha+\beta}$, $i = \overline{1,n}$, şi considerând funcţia convexă $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, inegalitatea (1) este echivalentă sub forma mai generală cu:

Teoremă. Fie $x_1, x_2, ..., x_n \in (0, \infty)$, $n > 2$, $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ astfel încât $\alpha \geq n\beta$, şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă. Atunci are loc inegalitatea:

$$f\left(\frac{\alpha x_1 + \beta x_2}{\alpha+\beta}\right) + f\left(\frac{\alpha x_2 + \beta x_3}{\alpha+\beta}\right) + ... + f\left(\frac{\alpha x_n + \beta x_1}{\alpha+\beta}\right) \geq$$

$$\geq f\left(\frac{2x_1 + x_2 + ... + x_n}{n+1}\right) + f\left(\frac{x_1 + 2x_2 + ... + x_n}{n+1}\right) + ... + f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + 2x_n}{n+1}\right) \qquad (2).$$

Demonstraţie: Din inegalitatea Jensen căutam $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in (0,1)$ astfel încât:

$$\alpha_1 f\left(\frac{\alpha x_1 + \beta x_2}{\alpha+\beta}\right) + \alpha_2 f\left(\frac{\alpha x_2 + \beta x_3}{\alpha+\beta}\right) + ... + \alpha_n f\left(\frac{\alpha x_n + \beta x_1}{\alpha+\beta}\right) \geq$$

$$\geq f\left(\frac{\alpha_1(\alpha x_1 + \beta x_2)}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha_2(\alpha x_2 + \beta x_3)}{\alpha+\beta} + ... + \frac{\alpha_n(\alpha x_n + \beta x_1)}{\alpha+\beta}\right) = f\left(\frac{2x_1 + x_2 + ... + x_n}{n+1}\right)$$

şi analoagele

$$\alpha_n f\left(\frac{\alpha x_1 + \beta x_2}{\alpha+\beta}\right) + \alpha_1 f\left(\frac{\alpha x_2 + \beta x_3}{\alpha+\beta}\right) + ... + \alpha_{n-1} f\left(\frac{\alpha x_n + \beta x_1}{\alpha+\beta}\right) \geq$$

$$\geq f\left(\frac{\alpha_n(\alpha x_1 + \beta x_2)}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha_1(\alpha x_2 + \beta x_3)}{\alpha+\beta} + ... + \frac{\alpha_{n-1}(\alpha x_n + \beta x_1)}{\alpha+\beta}\right) = f\left(\frac{x_1 + 2x_2 + ... + x_n}{n+1}\right)$$

$$\alpha_2 f\left(\frac{\alpha x_1 + \beta x_2}{\alpha+\beta}\right) + \alpha_3 f\left(\frac{\alpha x_2 + \beta x_3}{\alpha+\beta}\right) + ... + \alpha_1 f\left(\frac{\alpha x_n + \beta x_1}{\alpha+\beta}\right) \geq$$

$$\geq f\left(\frac{\alpha_2(\alpha x_1 + \beta x_2)}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha_3(\alpha x_2 + \beta x_3)}{\alpha+\beta} + ... + \frac{\alpha_1(\alpha x_n + \beta x_1)}{\alpha+\beta}\right) = f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + 2x_n}{n+1}\right) \qquad (3)$$

Adunând inegalităţile (3) vom obtine inegalitatea (2). Ne rămâne să demonstrăm că $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sunt bine determinate. Prin identificarea coeficienţilor din (3) obţinem sistemul

$$\alpha\alpha_1 + \beta\alpha_n = \frac{2(\alpha+\beta)}{n+1}; \beta\alpha_1 + \alpha\alpha_2 = \frac{\alpha+\beta}{n+1}; \beta\alpha_2 + \alpha\alpha_3 = \frac{\alpha+\beta}{n+1}; ...;$$

$$\beta\alpha_{n-1} + \alpha\alpha_n = \frac{\alpha+\beta}{n+1} \qquad (4)$$

Deoarece determinantul sistemului $d = \alpha^n - (-\beta)^n \neq 0$, rezultă că sistemul este compatibil determinat. Adunând egalităţile (4) rezultă $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$.

Din: $\beta\alpha_{k-1}+\alpha\alpha_k=\frac{\alpha+\beta}{n+1}, \forall k=\overline{2,n}$ rezultă $a_k-\frac{1}{n+1}=-\frac{\beta}{\alpha}\left(\alpha_{k-1}-\frac{1}{n+1}\right)$, sau

$a_i-\frac{1}{n+1}=\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^{i-1}\left(\alpha_1-\frac{1}{n+1}\right), \forall i=\overline{1,n}$. Pentru $i=n$ obținem

$a_n-\frac{1}{n+1}=\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}\left(\alpha_1-\frac{1}{n+1}\right)$, iar apoi din prima ecuație a sistemului rezultă

$\frac{2(\alpha+\beta)}{\beta(n+1)}-\frac{\alpha}{\beta}\alpha_1-\frac{1}{n+1}=(-1)^{n-1}\frac{\beta^{n-1}}{\alpha^{n-1}}\alpha_1+\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}$, de unde rezultă

$a_1=\frac{2\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta-(-\beta)^n}{(n+1)[\alpha^n-(-\beta)^n]}$. Arătăm că $0<a_1<1$.

Cazul 1. $n=$ par. $a_1=\frac{2\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta-\beta^n}{(n+1)[\alpha^n-(-\beta)^n]}=\frac{2\alpha^n+(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})\beta}{(n+1)(\alpha^n-\beta^n)}$. Evident $\alpha\geq n\beta>\beta$.

Rezultă $\alpha_1>0$. Arătăm că $\alpha_1<1$ echivalent cu $\alpha^{n-1}\beta+n\beta^n<(n-1)\alpha^n$. Dar, $\beta\leq\frac{\alpha}{n}$, de unde

$\alpha^{n-1}\beta+n\beta^n<\frac{\alpha^n}{n}+n\cdot\frac{\alpha^n}{n^n}$, deci este suficient să arătăm că $\frac{\alpha^n}{n}+n\cdot\frac{\alpha^n}{n^n}<(n-1)\alpha^n \Leftrightarrow$

$\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{n-1}}<n-1$. Dar, $\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{n-1}}<2\leq n-1$, deci pentru $n=$ par $0<a_1<1$.

Cazul 2. $n=$ impar. $a_1=\frac{2\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\beta^n}{(n+1)(\alpha^n+\beta)^n}>0$. Arătăm că $\alpha_1<1$ echivalent cu

Arătăm că $\boldsymbol{\alpha_1<1}$ echivalent cu $\alpha^{n-1}\beta<n\beta^n+(n-1)\alpha^n$. Dar, $\alpha^{n-1}\beta\leq\alpha^{n-1}\cdot\frac{\alpha}{n}=\frac{\alpha^n}{n}$

Arătăm că $\frac{\alpha^n}{n}<n\beta^n+(n-1)\alpha^n$, inegalitate adevărată deoarece $\frac{1}{n}<n-1$.

În continuare demonstrăm inductiv că $0<a_i<1, \forall i=\overline{1,n}$.

Presupunem $0<a_{i-1}<1$, adevărat. Arătăm $0<a_i<1$. Deoarece $0<\beta a_{i-1}<\beta$, deducem că

$0<\frac{\alpha+\beta}{n+1}-\alpha\alpha_i<\beta$. Rezultă $\alpha_i<\frac{\alpha+\beta}{\alpha(n+1)}\leq\frac{\alpha+\frac{\alpha}{n}}{\alpha(n+1)}=\frac{1}{n}<1$.

De asemenea $\alpha_i>\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha+\beta}{n+1}-\beta\right)=\frac{\alpha-\beta n}{\alpha(n+1)}\geq 0$. Deci, $0<a_i<1, \forall i=\overline{1,n}$.

Corolar. Fie $x_1,x_2,...,x_n\in(0,\infty)$, $n>2$, $\alpha,\beta\in(0,\infty)$ astfel încât $\alpha\geq n\beta$. Atunci are loc inegalitatea: $x_1^\alpha x_2^\beta+x_2^\alpha x_3^\beta+...+x_n^\alpha x_1^\beta\geq\left(x_1^{\frac{\alpha+\beta}{n+1}}+x_2^{\frac{\alpha+\beta}{n+1}}+...+x_n^{\frac{\alpha+\beta}{n+1}}\right)(x_1x_2...x_n)^{\frac{\alpha+\beta}{n+1}}$.

Aplicații:

1)pentru $\alpha=3,\beta=1,n=3$, obținem inegalitatea $x_1^3x_2+x_2^3x_3+x_3^3x_1\geq x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2$;

2)pentru $\alpha=4,\beta=1,n=4$, obținem inegalitate $x_1^4x_2+x_2^4x_3+x_3^4x_4+x_4^4x_1\geq x_1x_2x_3x_4(x_1+x_2+x_3+x_4)$

Probleme de calendar

de prof. Ionel Tudor, Giurgiu

I. Matematica şi zilele săptămânii

În anii 1886-1887 , reverendul ***Cristian Zeller*** a stabilit o formulă matematică pentru aflarea zilei săptămânii unei date oarecare.

Pentru a înţelege formula lui Zeller , amintim că partea întreagă a unui real x , se notează $[x]$ şi reprezintă cel mai mare număr întreg care nu depăşeşte pe x . Mai exact , dacă scrierea zecimală a lui x este $x = a_0, a_1a_2a_3\cdots$ unde a_0 este număr natural iar $a_1, a_2, a_3, \cdots$ sunt cifre , atunci $[x]= a_0$.

Dacă z reprezintă ziua din luna l a unui an N , iar n este numărul format din ultimile două cifre ale lui N şi m este numărul format din celelalte cifre ale lui N , atunci

$S = z + n - 2m + \left[\frac{m}{4}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{26(l+1)}{10}\right] = M7 + r$, unde r < 7 indică ziua săptămânii, corespunzător lui 0-sâmbătă , 1-duminică , 2-luni , 3-marţi , 4-miercuri , 5-joi , 6-vineri .

Lunile ianuarie şi februarie se consideră ca *a 13-a şi a 14-a lună a anului precedent.*

Această formulă este valabilă în calendarul gregorian , adică cel folosit în mod obişnuit, „pe stil nou"

Pentru calendarul iulian , adică cel " pe stil vechi" , formula este:

$S = z + n - m - 2 + \left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{26(l+1)}{10}\right] = M7 + r$, unde $r < 7$.

Exemple:

1. În ce zi a săptămânii a căzut data de 2 iulie 1504 ?

Este data („pe stil vechi'') la care s-a stins din viaţă domnitorul Moldovei , *Ştefan cel Mare*.

z=2 , l=7 , N=1504 , m=15 , n=04=4. Deci,

$S = 2+4-15-2 + \left[\frac{4}{4}\right] + \left[\frac{26\cdot 8}{10}\right] = -10+20 = 10 = 1\cdot 7 + 3$, deci r = 3 care corespunde zilei de marţi.

Pe acoperământul de mormânt , de la Mânăstirea Putna , al marelui voievod , lucrat din porunca fiului său Bogdan al III-lea Vlad , este scris :

*„Io Bogdan Voievod din mila lui Dumnezeu , domnul Ţării Moldovei , a înfrumuseţat şi a acoperit cu acest acoperământ mormântul tatălui său , Io Ştefan Voievod , cel care a domnit în Ţara Moldovei 47 de ani şi trei luni , care s-a strămutat la lăcaşul de veci în anul 7012=1504 luna iulie , ziua 2 de **marţi** ,în ceasul al patrulea din zi „*

2. În ce zi a săptămânii a căzut data de 13 august 1595 (pe stil vechi , iar pe stil nou 23 august 1595) ?

Este data victoriei obţinute de marele voievod *Mihai Viteazul* , în lupta de la Călugăreni , împotriva armatei turceşti condusă de Sinan Paşa.

z=13 , l=8 , N=1595 , m=15 , n=95 iar $S = 13+95-15-2 + \left[\frac{95}{4}\right] + \left[\frac{26\cdot 9}{10}\right] = 108-17+23+23 = 137 = 7\cdot 19+4$,deci r = 4 care corespunde zilei de miercuri.

Cu formula pentru calendarul gregorian se obţine tot S=137 şi aceeaşi zi de miercuri.

Marele nostru patriot şi revoluţionar de la 1848, *Nicolae Bălcescu* în opera sa „Românii supt Mihai - Voievod Viteazul" consemna :

*„În sfârşit soarele veni să lumineze această mare zi de **miercuri** 13/23 august , menită a fi briliantul cel mai strălucit al cununei gloriei române."*

3. Să vedem în care zi a săptămânii s-a petrecut *Unirea Principatelor Române* la 24 ianuarie 1859.

z=24, l=13, N=1859 , n=58 , m=18

$$S = 24 + 58 - 36 + \left[\frac{18}{4}\right] + \left[\frac{58}{4}\right] + \left[\frac{26\cdot 14}{10}\right] = 46 + 4 + 14 + 36 = 100 = 7\cdot 14 + 2,$$

deci r=2 iar actul unirii s-a petrecut într-o zi de **luni**.

4. În ce zi a săptămânii a fost data de 1 Decembrie 1918 ? (Ziua „ *Marii Uniri''*)

z=1, l =12 , N=1918 , m=19 , n =18 şi obţinem :

S=1+18-38+$\left[\frac{19}{4}\right]+\left[\frac{18}{4}\right]+\left[\frac{26\cdot 13}{10}\right]=-19+4+4+33=22=3\cdot 7+1$, deci $r=1$ şi corespunde zilei de duminică.

5. Menţionăm că formulele rămân valabile şi pentru anii bisecţi.
Să vedem în ce zi din săptămână a căzut 29 februarie, în anul bisect 2012.
z=29,l=14,N=2012,m=20,n=11

$$S=29+11-40+\left[\frac{20}{4}\right]+\left[\frac{11}{4}\right]+\left[\frac{26\cdot 15}{10}\right]=5+2+39=46=7\cdot 6+4,$$

deci r = 4 care corespunde zilei de **miercuri**.

II. Matematica şi Paştele

Problema aflării datei unei anumite zile este legată de unele fenomene astronomice. De exemplu, **data Duminicii Paştelui , în religia ortodoxă pe stil vechi**, a preocupat şi pe marele matematician şi astronom german ***Karl Gauss***.
În anul **325 , la Conciliul de la Niceea** , la care au participat şi **Sfinţii împăraţi Constantin şi Elena,** s-a stabilit ca *prima zi de Paşti să fie prima duminică după luna plină, după ziua echinocţiului de primăvară* ***(21 martie)****, sau într-o zi următoare acestuia.* Această zi cade la date diferite în diferiţi ani , repetându-se într-un ciclu de 28 ani.
Cum fazele lunii se repetă cu o perioadă de **19 ani** , Duminica Paştelui ortodox pe stil vechi, îşi schimbă data în calendar la un interval de $28\cdot 19=532$ ani. Stabilirea ei revine la rezolvarea în numere întregi a unor ecuaţii liniare diofantice , sau mai pe scurt , după procedeul lui Gauss, la folosirea resturilor unor împărţiri. Cum anume?
Iată răspunsul :

Pentru a afla data x a primei zi de Paşti ortodox pe stil vechi într-un anumit an **n** , trebuie să calculăm resturile unor împărţiri şi anume :

$r_1=n \bmod 19$ (adică restul împărţirii lui n la 19) ;

$r_2=n \bmod 4$ (restul împărţirii lui n la 4) ;

$r_3=n \bmod 7$ (restul împărţirii lui n la 7);

$r_4=(19r_1+15) \bmod 30$ (restul împărţirii lui $19r_1+15$ la 30) şi

$r_5=(2r_2+4r_3+6r_4+6) \bmod 7$ (restul împărţirii lui $2r_2+4r_3+6r_4+6$ la 7).

Calculăm apoi $x=r_4+r_5+4$.

Dacă $x\le 30$, atunci această dată cade într-o duminică din luna aprilie .
Dacă $x>30$, atunci cifra unităţilor lui x reprezintă data Duminicii Paştelui în luna mai.
Paştele ortodox pe stil vechi cade cel mai devreme pe 4 aprilie şi cel mai târziu pe 8 mai.
Paştele catolic pe stil nou cade cel mai devreme pe 22 martie şi cel mai târziu pe 25 aprilie.
Exemple:
1.În ce dată de duminică va fi Paştele in 2014?

$r_1=2014 \bmod 19=0$; $r_2=2014 \bmod 4=2$; $r_3=2014 \bmod 7=5$;

$r_4=(19r_1+15) \bmod 30=(19\cdot 0+15) \bmod 30=15$;

$r_5=(2r_2+4r_3+6r_4+6) \bmod 7=(2\cdot 2+4\cdot 5+6\cdot 15+6) \bmod 7=120 \bmod 7=1$

$x=r_4+r_5+4=15+1+4=20<30$, deci , în 2014 , Paştele ortodox cade duminică 20 aprilie(la fel ca şi Paştele catolic pe stil nou) .

2.Să găsim în ce dată va fi Paştele ortodox din anul 2078.

$r_1=2078 \bmod 19=7$; $r_2=2078 \bmod 4=2$; $r_3=2078 \bmod 7=6$;

$r_4=(19r_1+15) \bmod 30=(19\cdot 7+15) \bmod 30=(133+15) \bmod 30=148 \bmod 30=28$;

$r_5=(2r_2+4r_3+6r_4+6) \bmod 7=(2\cdot 2+4\cdot 6+6\cdot 28+6) \bmod 7=202 \bmod 7=6$;

$x=r_4+r_5+4=28+6+4=38>30$ şi **în 2078 , Paştele ortodox cade în duminica de 8 mai.**

Interesant este faptul că 2078 , este singurul an în perioada 2000-2100 , când Paştele ortodox cade cel mai târziu , anume în 8 mai.

Prezentăm în continuare **data Sfintelor Paşti (ortodox stil vechi) pe perioada anilor 2008-2025** (Pascalia) :

2008-27 aprilie;	2014-20 aprilie ;	2020-19 aprilie ;
2009-19 aprilie;	2015-12 aprilie ;	2021- 2 mai ;
2010- 4 aprilie;	2016- 1 mai ;	2022-24 aprilie ;
2011-24 aprilie;	2017-16 aprilie ;	2023-16 aprilie ;
2012-15 aprilie;	2018- 8 aprilie ;	2024- 5 mai ;
2013- 5 mai ;	2019-28 aprilie ;	2025-20 aprilie.

Bibliografie: 1. Colecţia Revistei de Matematică din Timişoara(R.M.T.)
2. Wikipedia.

Prof., Lic. Tehn. „Mihai Viteazul " Călugăreni, Giurgiu

O metodă de calcul al unor integrale definite

de Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

Scopul acestui articol este de a da o metodă de calcul al unor integrale definite. Această metodă a fost obţinută prin generalizarea unor probleme publicate în Gazeta Matematică. În final se propun probleme care se rezolvă aplicând metoda dată.

Teoremă. Dacă $f:[a,b]\to R$, $g:[a,b]\to R^*$, $h:[a,b]\to R$ sunt funcţii continue cu $f(x)+f(s-x)=h(x)$, $g(x)=g(s-x)$, $\forall x\in[a,b], s=a+b$, atunci:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx=\frac{1}{2}\int_a^b\frac{h(x)}{g(x)}dx.$$

Demonstraţie. Cu subsituţia $x=s-t$, avem succesiv: $I=\int_a^b\frac{f(x)}{g(x)}dx=\int_b^a\frac{f(s-t)}{g(s-t)}(-dt)=$

$$=\int_a^b\frac{h(t)-f(t)}{g(t)}dt=\int_a^b\frac{h(t)}{g(t)}dt-\int_a^b\frac{f(t)}{g(t)}dt\Rightarrow 2I=\int_a^b\frac{h(x)}{g(x)}dx\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_a^b\frac{h(x)}{g(x)}dx. \blacksquare$$

Observaţie. Metoda este eficientă dacă se poate calcula $\int_a^b\frac{h(x)}{g(x)}dx$.

Aplicaţii:

A1. Cazul $g(x)=1$. Calculaţi $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+tgx)dx$ (N. Boboc şi I. Colojoară, Manual de Analiză Matematică, 1980)

Soluţie. Considerăm, $f(x)=\ln(1+tgx)$, $f:\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to R$, $s=\frac{\pi}{4}$ şi avem:

$f(x)+f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln(1+tgx)+\ln\left[1+tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]=\ln 2$. Aplicând teorema, obţinem: $I=\frac{\pi\ln 2}{8}$.

A2. Cazul $h(x)\neq k$. Calculaţi $I=\int_0^1\frac{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{2x}}\cdot\frac{\sin\pi x}{\cos^2\pi x}dx$.

Soluție. Luăm $f(x)=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{2x}}\cdot\sin\pi x$, $f:[0,1]\to R$, $g(x)=\cos^2\pi x$, $g:[0,1]\to R^*$ şi avem $h(x)=f(x)+f(1-x)=\sqrt{2}\cdot\sin\pi x$. Din teoremă, obținem $I=-\frac{\sqrt{2}}{\pi}$.

A3. Cazul $h(x)=k$.

3.1. Calculați $I=\int_{-1}^{1}\frac{\arccos x}{1+x^2}dx$ (Problema 22430, din G.M-B/1991, autor Alexandru Constantinescu, Bucureşti).

Soluție. Deoarece $\arccos x+\arccos(-x)=\pi$, cu teorema obținem:

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{\arccos x}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}arctgx\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}\left(arctg1+arctg1\right)=\frac{\pi^2}{4}.$$

3.2. Fie funcția $f:R\to R$, continuă pe $\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x)+f(-x)=k$, $\forall x\in R$.

Să se calculeze $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)}{\cos^2 x}dx$ (Problema 24132 din G.M.-B, 5-6/1999, autor Vasile Gorgotă, Rm. Vâlcea).

Soluție. Aplicând teorema avem: $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)}{\cos^2 x}dx=\frac{k}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx=k$.

3.3. Calculați: $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\sin x+\cos x}dx$. (Publicată în G.M.-B, 12/2002, autor Manuela Prăjea, Drobeta Tr. Severin).

Soluție. Cu teorema avem $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\sin x+\cos x}dx=\frac{\pi}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$ şi de aici calculul integralei se face cu substituția $tg\frac{x}{2}=t$.

Obținem $I=\frac{\pi}{4}\int_{0}^{1}\frac{dt}{1+t}=\frac{\pi}{4}\ln(1+t)=\frac{\pi}{4}\ln 2$.

3.4. Să se calculeze: $I=\int_{0}^{1}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{x^2-x+1}dx$ (Problema 25332 din G.M.-B, nr. 6/2005, autor Nicolae Pavelescu, Rm. Vâlcea).

Soluție. Deoarece $\arcsin\sqrt{x}+\arcsin\sqrt{1-x}=\frac{\pi}{2}$ rezultă $k=\frac{\pi}{2}$ şi aplicând teorema găsim:

$$I=\int_{0}^{1}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{x^2-x+1}dx=\frac{\pi}{4}\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2-x+1}=\frac{\pi}{4}\int_{0}^{1}\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx=$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big|_{0}^{1}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left(arctg\frac{1}{\sqrt{3}}+arctg\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}.$$

Generalizarea unei probleme date la Olimpiada Balcanică de Matematică pentru juniori , Antalya-Turcia 21-26 iunie 2013

Prof. Şerban George-Florin, Brăila

La această olimpiadă de matematică a fost propusă următoarea problemă :

"**Determinaţi toate perechile ordonate de numere naturale nenule (a,b) pentru care numerele $\frac{a^3b-1}{a+1}$ şi $\frac{b^3a+1}{b-1}$ sunt simultan numere naturale nenule** . "

Propun generalizarea acestei probleme :

"**Determinaţi toate perechile ordonate de numere naturale nenule (a,b) pentru care numerele $\frac{a^nb-1}{a+1}$ şi $\frac{b^na+1}{b-1}$ sunt simultan numere naturale nenule , unde n este număr natural impar**. "

Soluţie : Folosesc formulele : $\frac{a^n+1}{a+1}=a^{n-1}-a^{n-2}+...-a+1\in\mathbb{N}$, n impar şi $a\in\mathbb{N}$.

$$\frac{a^n-1}{a-1}=a^{n-1}+a^{n-2}+....+a+1\ ,\ \frac{a^n\cdot b-1}{a+1}=\frac{(a^n+1)b-b-1}{a+1}=\frac{(a^n+1)b}{a+1}-\frac{b+1}{a+1}$$

Dar $\frac{(a^n+1)b}{a+1}\in\mathbb{N}$, atunci $\frac{b+1}{a+1}\in\mathbb{N}$

$\frac{ab^n+1}{b-1}=\frac{(b^n-1)a+a+1}{b-1}=\frac{(b^n-1)a}{b-1}+\frac{a+1}{b-1}$, dar $\frac{(b^n-1)a}{b-1}\in\mathbb{N}$ atunci $\frac{a+1}{b-1}\in\mathbb{N}$ şi $\frac{b+1}{a+1}\in\mathbb{N}$

rezultă că şi produsul lor este număr natural adică

$$\frac{b+1}{b-1}\in\mathbb{N}\ ,\ \frac{b+1}{b-1}=\frac{b-1}{b-1}+\frac{2}{b-1}=1+\frac{2}{b-1}\in\mathbb{N}\ ,\ \frac{2}{b-1}\in\mathbb{N}\ ,\quad b-1\in\{1,2\}\Rightarrow b\in\{2,3\}.$$

Dacă b=2 atunci $\frac{2a^n-1}{a+1}\in\mathbb{N}$ şi $2a^n+1\in\mathbb{N}$ (A)

$\frac{2a^n-1}{a+1}=\frac{2(a^n+1)-3}{a+1}=\frac{2(a^n+1)}{a+1}-\frac{3}{a+1}\in\mathbb{N}$, dar $\frac{2(a^n+1)}{a+1}\in\mathbb{N}$

rezultă că $a+1\in\{1,3\}\Rightarrow a\in\{0,2\}$, a nenul , deci (2,2) este soluţie.

Dacă b=3 atunci $\frac{3a^n-1}{a+1}\in N$ şi $\frac{a\cdot 3^n+1}{2}\in N$, $\frac{3a^n-1}{a+1}=\frac{3(a^n+1)-4}{a+1}=\frac{3(a^n+1)}{a+1}-\frac{4}{a+1}\in N$,

dar $\frac{3(a^n+1)}{a+1}\in\mathbb{N}$ rezultă că $\frac{4}{a+1}\in\mathbb{N}$, $a+1\in\{1,2,4\}\Rightarrow a\in\{0,1,3\}$, a nenul deci (1,3) ,(3,3) sunt soluţii. Dacă a=3 , verificăm şi cealaltă condiţie $\frac{3\cdot 3^n+1}{2}\in\mathbb{N}$ $\frac{3^{n+1}+1}{2}=\frac{(2u+1)+1}{2}=u+1\in\mathbb{N}$. Dacă a=1 si b=3 , verificăm şi cealaltă condiţie $\frac{3^n+1}{2}=\frac{2v+1+1}{2}=v+1\in\mathbb{N}$, (A) . Analog se analizează şi cazul n=1 .

S={ (1,3) ,(3,3) , (2,2) } .

Bibliografie : "Olimpiada Balcanică de Matematică pentru juniori ,Antalya-Turcia 2013"

Prof., Liceul Pedagogic " D. P . Perpessicius " Brăila

Comentarii despre câteva probleme din Gazeta Matematică

de Nela Ciceu, Bacău şi Roxana Mihaela Stanciu, Buzău

În această notă dorim să prezentăm câteva comentarii şi soluţii inedite pentru unele probleme apărute în G.M.-B nr. 5/2013, ale căror soluţii au fost publicate în nr. 11/2013.

E:14495. Determinaţi numerele naturale x şi numerele întregi y, prime între ele, ştiind că $\frac{5y^2}{x^2-xy}$ este număr întreg. (*D.M. Bătineţu-Giurgiu şi Neculai Stanciu*)

Deoarece $(x,y)=1$, este evident că perechea $(1{,}0)$ nu este soluţie. Iată o soluţie ceva mai directă:

Cum $(x,y)=1$, rezultă $(x-y,y)=1$ şi atunci $\frac{5y^2}{x(x-y)}$ este număr întreg dacă şi numai dacă $\frac{5}{x(x-y)}$ este număr întreg. Obţinem posibilităţile $x(x-y)=1$, $x(x-y)=-1$, $x(x-y)=5$, $x(x-y)=-5$. Din prima relaţie deducem $x=1, y=0$ care nu convine, iar din celelalte trei relaţii rezultă soluţiile $(1{,}2)$, $(1,-4)$, $(5{,}4)$, $(1{,}6)$, $(5{,}6)$.

E:14496. Arătaţi că fracţia $F=\frac{149^{941}+184^{481}}{297^{792}+73^{37}}$ este reductibilă.

Grigore Dumitru

Soluţia din revistă este scurtă şi uşor de urmărit:

'' Putem scrie $F=\frac{(4\cdot 37+1)^{941}+(5\cdot 37-1)^{481}}{(8\cdot 37+1)^{792}+(2\cdot 37-1)^{37}}=\frac{M_{37}+1+M_{37}-1}{M_{37}+1+M_{37}-1}=\frac{M_{37}}{M_{37}}$,

deci fracţia se poate simplifica cu 37.''

Un elev care nu a rezolvat problema şi vede această soluţie se întreabă în mod natural: am înţeles, dar cum trebuia să mă gândesc la numărul 37?

Folosind o descompunere în factori, ştim că dacă a şi b sunt numere naturale, iar t e un număr natural impar, atunci a^t+b^t se divide cu $a+b$. Deoarece avem puteri diferite, cel mai simplu mod de a folosi acest rezultat este să alegem $b=1$.

Scriind $149^{941}+184^{481}=149^{941}-1+184^{481}+1=149^{941}+1+184^{481}-1$, rezultă că avem posibilităţile:

- $149^{941}-1$ se divide cu 148 şi $184^{481}+1$ se divide cu 185;
- $149^{941}+1$ se divide cu 150 şi $184^{481}-1$ se divide cu 183.

Cum $150=2\cdot 3\cdot 5^2$, $183=3\cdot 61$, $148=2^2\cdot 37$, $185=5\cdot 37$, putem încerca să vedem dacă fracţia dată se simplifică cu 3 sau cu 37. Deoarece 297^{792} se divide cu 3, dar 73^{37} nu se divide cu 3, ne rămâne doar varianta 37. Avem

$$F=\frac{149^{941}-1+184^{481}+1}{297^{792}-1+73^{37}+1}=\frac{M_{148}+M_{185}}{M_{296}+M_{74}}$$ şi cum $296=8\cdot 37$, $74=2\cdot 37$, rezultă că fracţia se simplifică cu 37.

E:14497. Fie triunghiul ABC ($AB<AC$), $m(\angle A)=90^0$ şi (AE bisectoarea unghiului A ($E\in(BC)$). Punctul D se află pe (AC) astfel încât dreptele DE şi BC sunt perpendiculare. Dacă $\{M\}=DE\cap AB$ şi $\{N\}=BD\cap MC$, demonstraţi că triunghiul BNC este isoscel.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică

Prezentăm două soluţii, diferite de cea publicată.

I. Triunghiurile CDE şi ABC sunt asemenea (sunt dreptunghice şi au un unghi ascuţit comun) şi atunci

$$\frac{DE}{AB}=\frac{EC}{AC}\Leftrightarrow\frac{DE}{EC}=\frac{AB}{AC}, (1).$$

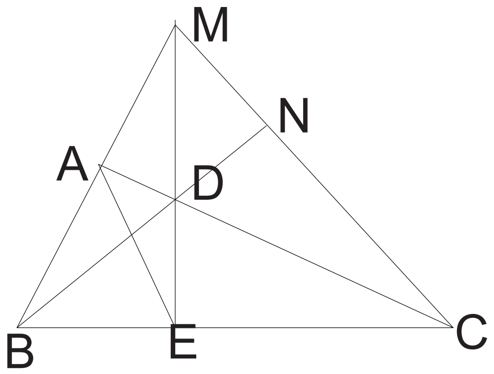
Analog, din asemănarea triunghiurilor MBE şi ABC obținem

$$\frac{ME}{AC}=\frac{BE}{AB}\Leftrightarrow\frac{BE}{ME}=\frac{AB}{AC}, (2).$$

Folosind teorema bisectoarei avem

$$\frac{BE}{EC}=\frac{AB}{AC}, (3).$$

Din (1), (2), (3) rezultă că $BE=ED$ şi $CE=ME$ şi atunci din triunghiurile dreptunghice BDE şi CME deducem că $m(\angle EBD)=m(\angle ECM)=45^0$, adică triunghiul BCN este dreptunghic isoscel.



II. Din $AC\perp BM$ şi $ME\perp BC$ rezultă că D este ortocentrul triunghiului BCM, deci $m(\angle BNC)=90^0$.

Folosind patrulaterul inscriptibil $BEDA$, deducem că $m(\angle DBE)=m(\angle EAD)=45^0$; rezultă că triunghiul BNC este dreptunghic şi are un unghi de 45^0, deci este isoscel.

E:14500. Să se arate că un patrulater cu lungimile laturilor $4,5,6$ respectiv x nu poate avea aria egală cu $\sqrt{2013}$, oricare ar fi x număr real pozitiv.

Gabriel Sitaru

Prezentăm o soluție care nu foloseşte faptul că patrulaterul de arie maximă cu laturi de lungimi date este inscriptibil, şi nici formula pentru aria unui patrulater inscriptibil.

Notăm cu $[XY...Z]$ aria poligonului $XY...Z$.

Considerăm patrulaterul $ABCD$, cu laturile $AB=a, BC=b, CD=c$. Fie A' proiecția punctului A pe dreapta BC şi D' proiecția punctului D pe dreapta AC.

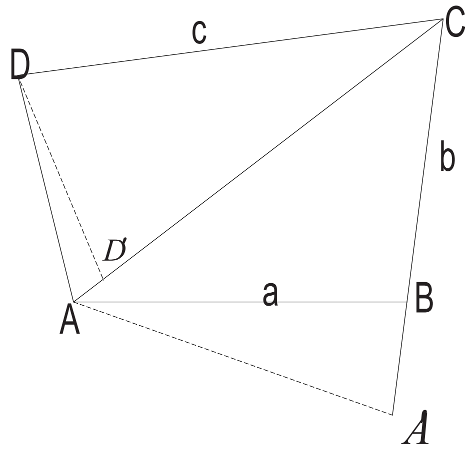
Din inegalitatea triunghiului avem $AC<AB+BC$.

Obținem succesiv:

$$[ABCD]=[ABC]+[ACD]=$$

$$\frac{BC\cdot AA'}{2}+\frac{AC\cdot DD'}{2}\le$$

$$\le\frac{BC\cdot AB}{2}+\frac{AC\cdot DC}{2}\langle$$



$$<\frac{BC\cdot AB}{2}+\frac{(AB+BC)\cdot DC}{2}=\frac{ab+bc+ca}{2}.$$

Deoarece am obținut o expresie simetrică în a,b,c, rezultă că oricare ar fi ordinea laturilor, avem $[ABCD]<\frac{ab+bc+ca}{2}$.

Pentru $\{a,b,c\}=\{4,5,6\}$ obținem $[ABCD]<37$; cum $37<\sqrt{2013}$, rezultă că un patrulater cu laturile $4,5,6,x$ nu poate avea aria egală cu $\sqrt{2013}$.

„ **Nu am eşuat. Doar am găsit 10000 de situaţii care nu merg.”.**
Thomas Edison

3. Probleme rezolvate

▪ Învăţământ primar

P:282. Determinaţi numerele naturale de două cifre ştiind că diferenţa dintre suma cifrelor şi 7 este egală cu produsul cifrelor. ***Prof.*** **Gheorghe Dârstaru**, Buzău

Rezolvare: Fie numărul căutat de forma $\overline{ab}$. Din problemă rezultă

$a+b-7=a\cdot b \Leftrightarrow a(1-b)-(1-b)=6 \Rightarrow (1-b)(a-1)=6$. Se obţine $a=7, b=0 \Rightarrow \overline{ab}=70$.

P:283. Determinaţi cifra a astfel încât: $(a+\overline{aa}+\overline{aaa}+...+\overline{aa...a}):a=123456789$.
D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare. Observăm că:

$\dfrac{9+99+999+...+999999999}{9}=1+11+111+...+111111111=123456789$. Aşadar, $a=9$.□

P:284. În liftul unei clădiri cu 10 etaje urcă de la parter cinci persoane. În câte moduri pot coborî din lift persoanele astfel încât pe un etaj să nu coboare mai mult de o persoană.
Prof. **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: Din cele cinci persoane, prima are 10 posibilităţi de coborîre. La fiecare din acestea, a doua persoană are 9 posibilităţi de coborîre. A treia persoană poate coborî în 8 moduri, etc. Cele cinci persoane vor coborî în $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=3024$ moduri.

P:285. Se scriu numerele naturale în ordine crescătoare începând cu 1. Să se determine cifra de pe poziţia 2900. **Prof. Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare:

Primele 999 de numere sunt scrise cu 9 + 2·90 + 3·900 = 2889 cifre. Restul de cifre până la 2900 este de 2900 – 2889 = 11 cifre. Acestea evident, vor face parte din numere de patru cifre, care sunt în număr de trei: 1000, 1001, 1002. A 11-a cifră din numerele de patru cifre este 0, prin urmare, a 2900-a cifră este 0.

P:286. Determinaţi toate numerele naturale care împărţite la 1961 dau restul de 400 de ori mai mare decât câtul.
Prof. Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

Se foloseşte teorema împărţirii cu rest, d=î·c+r, Cum $r\langle \hat{\imath}=1961$ rezultă $r\in\{0;1;2;..........;1960\}$.

Din $r=400\cdot c\Rightarrow c\in\{0;1;2;3;4\}$.

În final, numerele căutate sunt $\{0;2361;4722;7083;9444\}$.

P:287. Aflaţi numărul care se măreşte cu 198939, dacă adăugăm, la dreapta lui, numărul 48.
Prof. Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Fie (x) numărul care trebuie aflat (îl scriem între paranteze, căci, nu ştim câte cifre are);

$\Rightarrow \overline{(\mathrm{x})48}=(\mathrm{x})+198939 \Rightarrow (\mathrm{x})\cdot 100+48=(\mathrm{x})+198939 \Rightarrow (\mathrm{x})\cdot 99=198891 \Rightarrow (\mathrm{x})=2009$.

▪ Clasa a V-a

G:386. Determinați toate numerele naturale a pentru care există exact 2014 numere naturale b care verifică relația: $2 \le \frac{a}{b} \le 5$.

Prof. **D.M. Bătinețu-Giurgiu,** București **și Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: (dată de Dl. Titu Zvonaru):

Avem $2 \le \frac{a}{b} \le 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ge \frac{b}{a} \ge \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{a}{5} \le b \le \frac{a}{2}$.

- Dacă a este multiplu de 5, atunci b poate lua una dintre valorile $\frac{a}{5}, \frac{a}{5}+1, ..., \left[\frac{a}{2}\right]$; adică b poate lua $\left[\frac{a}{2}\right] - \frac{a}{5} + 1$ valori;
- Dacă a nu este multiplu de 5, atunci b poate lua una dintre valorile $\left[\frac{a}{5}\right]+1, \left[\frac{a}{5}\right]+2, ..., \left[\frac{a}{2}\right]$; adică b poate lua $\left[\frac{a}{2}\right] - \left[\frac{a}{5}\right]$ valori.

Avem de analizat 10 cazuri, în funcție de restul împărțirii lui a la 10 ; fie $k \in N$; Sunt bune doar situațiile :
$a = 10k \Rightarrow 5k - 2k + 1 = 2014 \Rightarrow k = 671$ și $a = 6710$;
$a = 10k + 2 \Rightarrow 5k + 1 - 2k = 2014 \Rightarrow k = 671$ și $a = 6712$;
$a = 10k + 3 \Rightarrow 5k + 1 - 2k = 2014 \Rightarrow k = 671$ și $a = 6713$; În celelalte situații, nu se obține $k \in \mathbb{Z}$
Deci $a \in \{6710, 6712, 6713\}$.

G:387. Fie $B = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ...... \cdot 49$ și $C = 24 \cdot 14641$. Arătați că C divide B.

Prof. **Petre Păunescu,** Roșiorii de Vede

Rezolvare: 14641 nu este divizibil cu 2, 3, 5, 7, dar este divizibil cu 11 deoarece $14641 = 11^4$.
Cum C=(1·2·3·4)·(11·11·11·11)=(1·11)·(2·11)·(3·11)·(4·11) rezultă că C divide B.

G:388. Calculați :

$$\left\{\left\{\left\{\left[(1+2+3+...+200):201\right]^{888} \cdot 10^{231} : 100000^{401}\right\} - 19\right\} : 3^4 - 1\right\} \cdot (101 \cdot 102 \cdot 103)^{104} + (2007-1997)^0 \cdot 100.$$

Prof. **Simion Marin ,** Rm. Sărat

Rezolvare: Știm că : $1+2+3+4+....+200 = \frac{200 \cdot 201}{2} = 100 \cdot 201$

$100 \cdot 201 : 201 = 100 = 10^2$; $(10^2)^{888} = 10^{1776}$; $10^{1776} \cdot 10^{231} = 10^{2007}$, $10^{2007} : 100000^{401} = 10^{2007}$:
$(10^5)^{401} = 10^2 = 100$; (100-19) :81-1=0 ; $(2007-1997)^0 = 1$; $1 \cdot 100 = 100$. Expresia dată este 100.

G:389. Arătați că numărul $A = 100^{2013}$ se poate scrie ca o sumă de două pătrate perfecte.

Prof. **Gheorghe Struțu ,** Buzău

Rezolvare:

$A = 100^{2013} = (10^2)^{2013} = 10^{2 \cdot 2013} = 10^{2 \cdot 2013 - 2} \cdot 10^2 = = (10^{2012})^2 (6^2 + 8^2) = (6 \cdot 10^{2012})^2 + (8 \cdot 10^{2012})^2$.

G:390. Aflați restul împărțirii numărului $287^{289} + 4017$ la 2009.

Prof. **Mircea Mario Stoica,** Arad

Rezolvare: $287^{289} + 4017 = 287^2 \cdot 287^{287} + 2009 + 2008 = 82369 \cdot 287^{287} + 2009 + 2008 =$
$= 2009(41 \cdot 287^{287} + 1) + 2008 \Rightarrow$ restul împărțirii lui $287^{289} + 4017$ la 2009 este 2008.

G:391. Arătaţi că dacă S este suma divizorilor naturali ai numărului 2010 atunci 34S este pătrat perfect şi 1734S este cub perfect. ***Prof.*** **Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare: Cum $2010 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67 \Rightarrow$ suma divizorilor lui 2010 este

$S = \dfrac{2^{1+1}-1}{2-1}\cdot\dfrac{3^{1+1}-1}{3-1}\cdot\dfrac{5^{1+1}-1}{5-1}\cdot\dfrac{67^{1+1}-1}{67-1} = 3\cdot 4\cdot 6\cdot 68$. Atunci, $34S = (2^3\cdot 3\cdot 17)^2$ şi $1734S = \left(2^2\cdot 3\cdot 17\right)^3$.

G:392. 60 de muncitori, lucrând câte 8 ore pe zi, au pavat un drum de lungime 900 m în 12 zile. Câţi muncitori pot pava în 10 zile, lucrând câte 6 ore pe zi, un drum lung de 1200 metri?

Prof. **Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare:

1) 60 muncitori ....8h/zi..............12 zile ....900 m

2) x ? muncitori ....6h/zi ....10 zile ....1200 m

Din 1) rezultă că un muncitor lucrează $\dfrac{900}{60\cdot 12}\,{}^{m}\!/\!_{zi}$ sau $\dfrac{900}{60\cdot 12\cdot 8} = \dfrac{5}{6\cdot 8}\,{}^{m}\!/\!_{h}$.

Acelaşi muncitor dar în situaţia de la 2) va lucra în 10 zile câte 6h/zi un număr de $\dfrac{5}{6\cdot 8}6\cdot 10 = \dfrac{50}{8}$ m.

Aşadar, la $\dfrac{50}{8}m$ …….1 muncitor, atunci 1200 m ……. x muncitori, $x = \dfrac{1200}{\frac{50}{8}} = 192$ muncitori.

G:393. Aflaţi numărul natural $\overline{xy}$, astfel încât $\left(\dfrac{\overline{xy}+\overline{yx}}{x+y}\right)^2 .\overline{xy} = 1573$.

Prof. **Iuliana Traşcă,** Scorniceşti, Olt

Rezolvare: $\left[\dfrac{11(x+y)}{x+y}\right]^2\cdot\overline{xy} = 1573;\ 121\overline{xy} = 1573 \Rightarrow \overline{xy} = 13.$

G:394. a) Găsiţi trei numere naturale nenule şi diferite care să verifice egalitatea $5a-11b+6c=0$; b) Arătaţi că oricare ar fi numerele naturale nenule şi diferite a, b, c, astfel încât, să aibă loc egalitatea $5a-11b+6c=0$, numărul $A=(a-c)(b-c)$ se divide cu 55 .

Prof. **Constantin Apostol**, Rm. Sărat

Rezolvare: a) Fie $m,n\in\mathbb{N}^*, m\neq n$ şi fie $c=11m, a=11n$. Din $5\cdot 11n-11b+6\cdot 11m=0$. Se obţine $b=5n+6m$. Pentru m =2, n=3 rezultă a=33, b=27, c=22.

b) Din egalitatea $5a-11b+6c=0$, obţinem $5a+6c=11b$ sau $5a+6c=5b+6b$, de unde, $5(a-b)=6(b-c)$. Deducem că 5 divide $b-c$ şi 6 divide $a-b$.

Tot din egalitatea $5a-11b+6c=0$, adică din $5a+6c=11b$, adun□nd 6a □n ambii membri, obţinem 11a + 6c = 11b + 6a, de unde, 11(a – b) = 6(a – c). Rezultă că 11 divide a – c şi 6 divide a – b , ceea ce ştiam . Aşadar, A se divide, şi cu 11, şi cu 5, deci se divide cu 55 .

G:395. Determinaţi numerele naturale x şi y dacă $7x^5+39y^3=2013$.

Prof. **Gheorghe Dârstaru**, Buzău

Rezolvare: Cum $7x^5$ este un termen al sumei, rezultă $7x^5\le 2013 \Rightarrow x^5\le 287 \Rightarrow x\in\{1,2,3\}$.

Singura soluţie bună este $x=3$ şi $y=2$. $S=\{(3;2)\}$.

G:396. Aflaţi toate numerele de forma $\overline{abc}$ ştiind că $\overline{abc}$=(a+b+c-9)(a+b+c-8)(a+b+c-7)

Prof. **George-Florin Şerban**, Brăila

Rezolvare: Folosim faptul că produsul a trei numere consecutive e divizibil cu 6.

$3\,|\,\overline{abc}$, adică $a+b+c$ este multiplu de 3; dar $a+b+c>9 \Rightarrow (a+b+c)\in\{12,15,18,21,24,27\}$.

Dacă a+b+c =12 atunci $\overline{abc} = 3\cdot 4\cdot 5 = 60$ ceea ce e fals;

Dacă a+b+c =15 atunci $\overline{abc} = 6\cdot 7\cdot 8 = 336$, a=b=3 si c=6 , fals;

Dacă a+b+c =18 atunci $\overline{abc}$=9*10*11=990 , a=b=9 si c=0 ; În celelalte cazuri nu obținem soluții deoarece $\overline{abc}$=(a+b+c-9)(a+b+c-8)(a+b+c-7)≥(21-9)(21-8)(21-7)=2184. Numărul căutat este 990 .

G:397. Un număr natural de trei cifre împărțit la răsturnatul său dă câtul 3 şi restul 175. Aflați numărul. (În legătură cu problema S:E13.90 din SE al G.M.-B.– martie 2013).

Titu Zvonaru, Comăneşti

Rezolvare: Fie $\overline{abc}$ numărul căutat , cu $a \neq 0$. Deoarece $\overline{abc} = 3\cdot\overline{cba} + 175$, deducem că $c \le 2$ (dacă $c \ge 3$, atunci $3\cdot\overline{cba}+175$ are mai mult de trei cifre), deci $c \in \{0,1,2\}$

-dacă $c = 0$, atunci $\overline{abc} = 3\cdot\overline{cba} + 175 \Leftrightarrow 97a - 175 = 20b$; trebuie ca $97a - 175$ să se termine cu cifra 0, deci $a = 5$. Avem $20b = 310$ şi nu obținem soluție;

-dacă $c = 1$, atunci $\overline{abc} = 3\cdot\overline{cba} + 175 \Leftrightarrow 97a - 474 = 20b$; ca mai sus, $97a - 474$ se termină cu 0 --dacă $97a$ se termină cu 4; obținem $a = 2$ şi cum $97\cdot 2 < 474$ nu avem soluții nici în acest caz ;

-dacă $c = 2$, atunci $\overline{abc} = 3\cdot\overline{cba} + 175 \Leftrightarrow 97a - 773 = 20b$; obținem $a = 9, b = 5 \Rightarrow$ $\overline{abc} = 952$.

▪ Clasa a VI-a

G:398. Rezolvați în $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ ecuația $x + 48 + |25 - y| = 2009 - 10^{y-1}$.

***Prof.* Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: Evident, $2009 - 10^{y-1} \ge 0 \Leftrightarrow 10^{y-1} \le 2009 \Rightarrow y - 1 \in \{1,2,3,4\}$. Înlocuind pe y în relația din enunț se obțin soluțiile $(x, y) \in \{(940;4),(1839;3),(1928;2),(1936;1)\}$.

G:399. Aflați restul împărțirii numărului $x = 2074^{2013} - 94^{2013} + 2046^{2013}$ la 2013.

***Prof.* Gheorghe Dârstaru**, Buzău

Rezolvare: Restul este zero deoarece $x = (2013+61)^{2013} - (61+33)^{2013} + (2013+33)^{2013} =$
$= M_{2013} + 61^{2013} - 61^{2013} - M_{61\cdot 33} - 33^{2013} + M_{2013} + 33^{2013} = M_{2013}$.

Altă rezolvare dată de Dl. Titu Zvonaru:

Vom demonstra mai întâi că dacă a şi b sunt prime între ele, atunci $(a+b)^n - a^n - b^n$ se divide cu ab .

Folosind descompunerea în factori, avem:

$(a+b)^n - a^n - b^n = M(a+b-a) - Mb = Mb$; $(a+b)^n - b^n - a^n = M(a+b-b) - Ma = Ma$ şi atunci $(a+b)^n - a^n - b^n = Mab$.

Numărul dat se scrie $x = 2074^{2013} - 61^{2013} + 2046^{2013} - 33^{2013} - [(61+33)^{2013} - 33^{2013} - 61^{2013}] =$
$= M(2074-61) + M(2046-33) - M61\cdot 33 = M2013$, deci restul împărțirii lui x la 2013 este zero.

G:400. Raportul a două numere este egal cu $\frac{1}{4}$, iar suma lor este tot $\frac{1}{4}$.

a) Aflați cele două numere ;

b) Împărțiți numărul $\frac{1}{4}$ în părți invers proporționale cu numerele determinate la punctul a)

c) Împărțiți numărul $\frac{1}{4}$ în părți direct proporționale cu numerele determinate la punctul a)

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

Rezolvare: a) Fie a şi b cele două numere . Din datele problemei avem : $\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$ şi $a + b = \frac{1}{4}$. Din prima egalitate deducem că $b = 4a$ şi, astfel, din a doua egalitate, obținem $a + 4a = \frac{1}{4}$, adică $5a = \frac{1}{4}$, de unde, $a = \frac{1}{20}$ şi, deci, $b = \frac{1}{5}$;

b) Fie x şi y, cele două părți ale numărului. $\frac{x}{20} = \frac{y}{5} = \frac{x+y}{20+5} = \frac{\frac{1}{4}}{25} = \frac{1}{100}$; deducem că $x = \frac{1}{5}$ şi $y = \frac{1}{20}$.

c) Fie u şi v, cele două părți ale lui $\frac{1}{4}$. $\frac{u}{\frac{1}{20}} = \frac{v}{\frac{1}{5}} = \frac{u+v}{\frac{1}{20}+\frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{20}} = 1$; deducem că $u = \frac{1}{20}$ şi $v = \frac{1}{5}$.

G:401. Arătați că printre orice 305 numere naturale, două câte două coprime cuprinse între 2 şi $2010 \cdot 2011$ există cel puțin un număr prim.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare: Presupunem prin reducere la absurd că toate cele 305 numere $n_1, n_2, ..., n_{305}$ care, verifică ipoteza sunt compuse. Fie p_i cel mai mic divizor prim al lui n_i şi p cel mai mare dintre p_i.

Deoarece $n_1, n_2, ..., n_{305}$ sunt coprime, factorii $p_1, p_2, ..., p_{305}$ sunt distincți. Rezultă $p \geq 2011$ (al 305-lea număr prim este 2011). Deci, pentru acel n care are cel mai mic factor prim p avem $n \geq p^2 \geq 2011^2 > 2010 \cdot 2011$. Contradicție!□

G:402. Fie numerele *a, b, c, d, e, f* astfel încât $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+e} + \frac{e}{e+f} + \frac{f}{f+a} = \frac{15}{13}$, aflați numărul $m = \frac{a}{a+f} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{d}{c+d} + \frac{e}{d+e} + \frac{f}{e+f}$.

***Prof.* Iuliana Traşcă**, Scorniceşti, Olt

Rezolvare: Notăm $n = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+e} + \frac{e}{e+f} + \frac{f}{f+a}$, avem

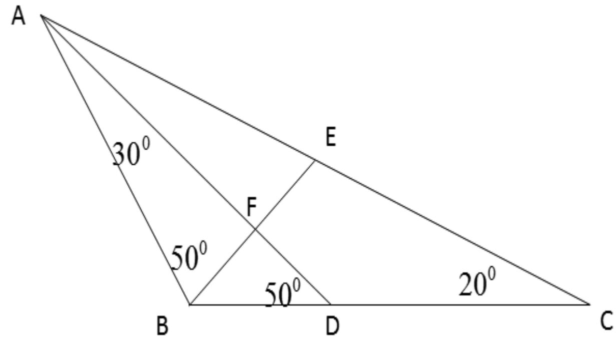
$$m + n = \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}\right) + \left(\frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c}\right) + \left(\frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d}\right) + \left(\frac{d}{d+e} + \frac{e}{d+e}\right) + \left(\frac{e}{e+f} + \frac{f}{e+f}\right) +$$
$$+ \left(\frac{f}{f+a} + \frac{a}{f+a}\right) \Rightarrow m + \frac{15}{13} = 6 \Rightarrow m = \frac{63}{15}.$$

G:403. Fie triunghiul ABC cu $BC = 1$, $AB = a$, $AC = b$ unde $a, b \in \mathbb{N}^*$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

***Prof.* Mariana Mărculescu**, Craiova

Rezolvare: Din inegalitatea triunghiului $a + 1 \rangle b \Rightarrow a \geq b$ şi $b + 1 \rangle a \Rightarrow b \geq a \Rightarrow a = b$, adică triunghiul este isoscel.

G:404. În triunghiul ABC avem : $D \in (BC)$ astfel încât m($\measuredangle BAD$) = 30^0 şi m($\measuredangle ADB$) $= 50^0$, $E \in (AC)$ astfel încât m($\measuredangle ABE$) $= 50^0$. Ştiind că {F} = AD ∩ BE şi m($\measuredangle ACB$) $= 20^0$, arătați că m($\measuredangle$ FCB) = 10^0.



***Prof.* Simion Marin** , Rm. Sărat

Rezolvare: $\widehat{BFD}$ este unghi exterior triunghiului ABF $\Rightarrow$m($\measuredangle BFD) = 30^0 + 50^0 = 80^0$. În ΔBFD calculăm m($\measuredangle FBD) = 180^0 - (80^0 + 50^0) = 50^0$ $\Rightarrow \measuredangle ABE \equiv \measuredangle EBD \Leftrightarrow$ (BE este bisectoare în ΔABC. ADB este unghi exterior triunghiului ADC $\Rightarrow$m($\measuredangle ADB$) = m($\measuredangle DAC$) + m($\measuredangle DCA$)
$\Rightarrow 50^0$= m($\measuredangle DAC$) +$20^0 \Rightarrow$ m($\measuredangle DAC) = 30^0$ $\Rightarrow \measuredangle BAD \equiv \measuredangle DAC \Rightarrow$ (AD este bisectoare în ΔABC.
Bisectoarele (AD şi (BE sunt concurente în F $\Rightarrow$(CF este a treia bisectoare ; dar m($\measuredangle ACB) = 20^0$ $\Rightarrow$ $m(\sphericalangle FCB) = 10^0$.

▪ Clasa a VII-a

G:405. Să se scrie numărul $6033 \cdot 2012$ ca diferenţă de două produse de câte trei factori, numere naturale consecutive. *Prof.* **Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare: $6033 \cdot 2012 = 3 \cdot 2011 \cdot (2011+1) = 2011\left(2011^2 + 3 \cdot 2011 + 2 - 2011^2 + 1\right) =$
$= 2011 \cdot (2011+1)(2011+2) - 2011(2011+1)(2011-1) = 2011 \cdot 2012 \cdot 2013 - 2010 \cdot 2011 \cdot 2012$

G:406. Arătaţi că $\left(\frac{2010}{1001}\right)^4 + \left(\frac{2010}{1009}\right)^4 \rangle 32$. *Prof.* **Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: $\left(\frac{2010}{1001}\right)^4 + \left(\frac{2010}{1009}\right)^4 = \left(1+\frac{1009}{1001}\right)^4 + \left(1+\frac{1001}{1009}\right)^4 > 2 \cdot \sqrt{\left(1+\frac{1009}{1001}\right)^4 \left(1+\frac{1001}{1009}\right)^4} =$
$= 2 \cdot \sqrt{\left(1+1+\frac{1001}{1009}+\frac{1009}{1001}\right)^4} > 2 \cdot \sqrt{(2+2)^4} = 32$, deoarece $\frac{1001}{1009}+\frac{1009}{1001} \rangle 2$.

G:407. Determinaţi $x \in \mathbb{N}$ pentru care $\sqrt{4x^2+9x+7} \in \mathbb{N}$.

Prof. **Iuliana Traşcă,** Scorniceşti, Olt

Rezolvare: Observăm că : $\sqrt{4x^2+4x+1} < \sqrt{4x^2+9x+7} < \sqrt{4x^2+12x+9}$ sau
$2x+1 < \sqrt{4x^2+9x+7} < 2x+3$, x fiind natural$\Rightarrow \sqrt{4x^2+9x+7} = 2x+2$,adică
$4x^2+9x+7 = 4x^2+8x+4 \Leftrightarrow x = 3$.

G:408. În primul an, din lotul de n seminţe al unei staţiuni de cercetare agricolă, nu a încolţit o sămânţă. În anul următor, din n – 1 seminţe de acelaşi fel, nu a încolţit o sămânţă. Situaţia se repetă x ani, după care experimentul înregistrează încolţirea 100 %.

Aflaţi x, dacă suma seminţelor încolţite în intervalul respectiv este $3\left(n-\frac{x+1}{2}\right)$.

Prof. **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

Rezolvare: Fie n-1 numărul de seminte încolţite în primul an, n-2, numărul de seminţe încolţite în al doilea, n-3 , numărul de seminţe încolţite în al treilea an, ..., n-x, numărul de seminţe încolţite în al x-lea an. Suma tuturor seminţelor devine

$$S = nx - (1+2+3+\cdots+x) = x\left(n-\frac{x+1}{2}\right) = 3\left(n-\frac{x+1}{2}\right) \quad \Rightarrow x = 3.$$

G:409. Aflaţi numerele naturale x, y şi numărul prim p care verifică relaţia: $x^2 - p^y = 1$.

Neculai Stanciu, Buzău **şi Titu Zvonaru,** Comăneşti

Rezolvare: Vom arăta că $(x,y,p) \in \{(3,3,2);(2,1,3)\}$. Evident $x \neq 0$, şi de asemenea $y \neq 0$ deoarece 2 nu este pătrat perfect. Avem: $p^y = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, de unde rezultă că există numerele naturale a şi b astfel încât $0 < a < b$ cu $x-1 = p^a$ şi $x+1 = p^b$. Atunci $p^b - p^a = 2$ sau $p^a(p^{b-a}-1) = 2$.

avem două posibilități:

- $p^a = 1, p^{b-a} - 1 = 2 \Rightarrow a = 0, p^b = 3 \Rightarrow a = 0, b = 1, p = 3 \Rightarrow (x, y, p) = (2,1,3)$;
- $p^a = 2, p^{b-a} - 1 = 1 \Rightarrow p = 2, a = 1, 2^{b-1} = 2 \Rightarrow a = 1, b = 2, p = 2 \Rightarrow (x, y, p) = (3,3,2)$.

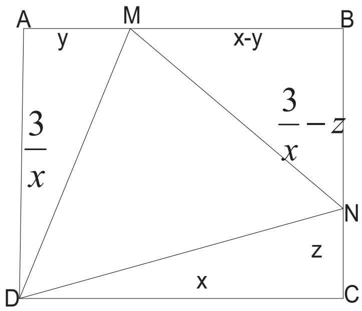
G:410. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu aria 3 (u.a.) şi punctele M, respectiv N cu $M \in (AB), N \in (BC)$ astfel încât aria triunghiului MND este 1 (u.a). Determinați minimul sumei $AM + CN$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Avem figura de mai jos.

Din relațiile: (1) $[ABCD] - [MND] = 3 - 1 = 2$;
(2) $[MBN] + [MAD] + [NCD] = [ABCD] - [MND]$,

rezultă: $\dfrac{(\frac{3}{x} - z)(x - y)}{2} + \dfrac{3y}{2x} + \dfrac{xz}{2} = 2 \Leftrightarrow 3 - \dfrac{3y}{x} - zx + zy + \dfrac{3y}{x} + xz = 4 \Leftrightarrow yz = 1$.



Din inegalitatea mediilor avem că $y + z$ este minim dacă şi numai dacă $y = z$.

Deoarece $\begin{cases} yz = 1 \\ y = z \end{cases}$, rezultă $y = z = \sqrt{1} = 1$. Obținem aşadar $\min(y + z) = 2$.

G:411. Într-un triunghi ABC, M $\in$ (BC) şi $m(\widehat{BAM}) = 25^0$, iar $m(\widehat{CAM}) = 30^0$, $N \in (AC)$ şi $m(\widehat{ABN}) = 45^0$, iar $m(\widehat{CBN}) = 55^0$. Arătați că latura (AB) este media geometrică a segmentelor (AM) şi (BN).

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

Rezolvare: Din datele problemei, rezultă

$m(\widehat{ACB}) = 180^0 - [m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{ABC})] = 180^0 - (55^0 + 100^0) = 25^0$.

Deducem că Δ ABM ~ Δ CBA, av□nd unghiul $\widehat{ABC}$, comun şi $\widehat{BAM} \equiv \widehat{ACB}$. Scriind proporționalitatea laturilor, $\Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BM}{AB} = \dfrac{AM}{AC}$; $\Rightarrow AM = \dfrac{AB \cdot AC}{BC}$ (1)

Din $m(\widehat{BAN}) = m(\widehat{CBN}) = 55^0$, deducem că Δ CBN ~ Δ CAB, av□nd unghiul $\widehat{ACB}$, comun şi $\widehat{BAN} \equiv \widehat{CBN}$. Din proporționalitatea laturilor, $\Rightarrow \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{BN}{AB} = \dfrac{CN}{BC} \Rightarrow BN = \dfrac{AB \cdot BC}{AC}$ (2)

□nmulțind relațiile (1) şi (2), membru cu membru, obținem : $AM \cdot BN = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} \cdot \dfrac{AB \cdot BC}{AC}$, de unde, după simplificări, rezultă $AM \cdot BN = AB^2$, relație care arată că latura (AB) este media geometrică a segmentelor (AM) şi (BN).

Clasa a VIII-a

G:412. Scrieți numărul numărul $2011^{2012}+4^{2013}$ ca produs de doi factori.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, București **și Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare:

Observăm că : $2011^{2012}+4^{2013}=2011^{4\cdot 503}+4\cdot 4^{2012}=((2011)^{503})^4+4\cdot(4^{503})^4=a^4+4b^4$.

Dar, $a^4+4b^4=a^4+4a^2b^2+4b^4-4a^2b^2=(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2=$

$=(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab)$, care reprezintă identitatea ***Sophiei Germain.***

Deci $2011^{2012}+4^{2013}=(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab)$, unde $a=2011^{503}$, $b=4^{503}$.

G:413. Determinați $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care este adevărată egalitatea:

$$\left(3^{2^n}+2^{2^n}\right)\cdot\left(3^{2^{n-1}}+2^{2^{n-1}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(3^{2^2}+2^{2^2}\right)\cdot\left(3^2+2^2\right)\cdot(3+2)=6561^{256}-256^{256}.$$

***Prof.* Iuliana Trașcă,** Scornicești, Olt

Rezolvare: Amplificând membrul din stânga al egalității cu 1=3-2 și utilizând produsul sumei cu diferența, se obține $3^{2^{n+1}}-2^{2^{n+1}}$. De asemenea, $6561=81^2=\left(3^4\right)^2=3^8;256=2^8$.

$6561^{256}=\left(3^{2^3}\right)^{2^8}=3^{2^{11}}$. $256^{256}=\left(2^8\right)^{2^8}=2^{8\cdot 2^8}=2^{2^3\cdot 2^8}=2^{2^{11}}$.

Am obținut: $3^{2^{n+1}}-2^{2^{n+1}}=3^{2^{11}}-2^{2^{11}}\Leftrightarrow n+1=11\Leftrightarrow n=10$.

G:414. Se consideră o funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(f(x))=2009x-2008$. Arătaţi că $f(1)=1$.

***Prof.* Doina şi Mircea Mario Stoica,** Arad

Rezolvare: Din $f(f(x))=2009x-2008$ (1), pentru x=1 se obține $f(f(1))=1$. (2). Înlocuim în (1) pe x cu f(1) se obține $f(f(f(1)))=2009f(1)-2008$ (3). Din (2) și (3) se obține $f(1)=2009f(1)-2008\Rightarrow f(1)=1$.

G:415. Cercetați dacă max $\max(-x^2+5x+7)$ aparține intervalului $\left(-1;\frac{1}{2}\right]$.

***Prof.* Ion Stănescu**, Smeeni,Buzău

Rezolvare:

$-x^2+5x+7=-(x^2-2\cdot\frac{5}{2}x+\frac{25}{4})+\frac{25}{4}+7=\frac{53}{4}-(x-\frac{5}{2})^2$. Rezultă că maximul expresiei este $\frac{53}{4}$ și nu aparține $\left(-1;\frac{1}{2}\right]$.

G:416. Să se arate că pentru nici o valoare întreagă a lui n, raportul $\frac{n^3+n^2+n+2}{n^3-n+3}$, nu este număr întreg.

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm.Sărat

Rezolvare: Observăm că oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}$, la numitor obținem numărul a^3-a+3, care se divide cu 3, căci, $a^3-a+3=a(a-1)(a+1)+3$, unde $a(a-1)(a+1)$ este un produs de trei numere întregi consecutive.

Să arătăm că pentru nici un număr $a\in\mathbb{Z}$, numărul de la numărător, nu se divide cu 3.

În raport cu împărțirea la 3, un număr întreg este de forma 3k, $3k+1$ sau $3k+2$, $k\in\mathbb{Z}$.

Pentru $a=3k$, obținem : $(3k)^3+(3k)^2+3k+2=M_3+2$;

Pentru $a=3k+1$, obținem : $(3k+1)^3+(3k+1)^2+(3k+1)+2=M_3+2$

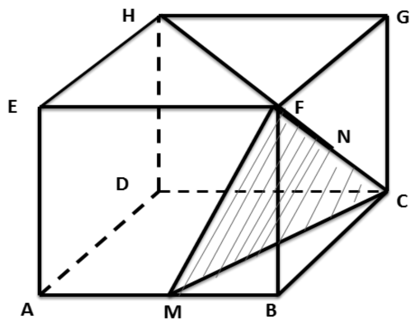
Pentru $a=3k+2$, obținem : $(3k+2)^3+(3k+2)^2+(3k+2)+2=M_3+1$

Dacă numărătorul nu este divizibil cu un divizor al numitorului, deducem că numărătorul nu este divizibil cu numitorul şi, deci, raportul nu este număr întreg.

G:417. În cubul ABCDEFGH de muchie a se consideră M mijlocul lui $[AB]$. Să se determine distanţa de la H la planul (FMC).

Prof. **Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare:
Fie $\{N\} = GB \cap FC$. N este mijlocul lui $[FC]$
şi din triunghiul echilateral HFC rezultă $HN \perp FC$ (1)



$HG = a,\ GN = NB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2},\ MB = \dfrac{a}{2}$.

Deoarece $\dfrac{HG}{NB} = \dfrac{GN}{MB} = \sqrt{2}$ şi

$m(\widehat{G}) = m(\widehat{B}) = 90^0$ rezultă $\Delta\ HGN \sim \Delta\ NBM \Rightarrow \widehat{HNG} \equiv \widehat{NMB}$

$\Rightarrow m(\widehat{HNG}) + m(\widehat{MNB}) = 90^0 \Rightarrow\ HN \perp MN$ (2).

Din (1) şi (2) rezultă $HN \perp (FMC)$, iar $d\left(H,(FMC)\right) = HN = \sqrt{HG^2 + GN^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

G:418. Fie cubul ABCDA'B'C'D' şi $M \in (BB')$. Precizaţi poziţia lui M pe muchia (BB') dacă $\cos\left(m\left[\widehat{(ADM),(ABC)}\right]\right) = \dfrac{4}{5}$.

Prof. **Gheorghe Dârstaru,** Buzău

Rezolvare: Deoarece $MA \perp AD$ şi $AB \perp AD$, unghiul dintre planele (ADM) şi (ABC) este $\sphericalangle MAB$.

Avem: $\cos\left(m\left[\widehat{(ADM),(ABC)}\right]\right) = \dfrac{AB}{AM} \Rightarrow \dfrac{l}{\sqrt{l^2 + BM^2}} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow BM = \dfrac{3l}{4}$.

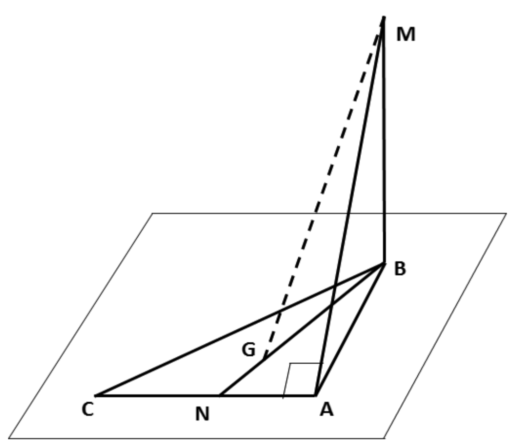
G:419. Pe planul triunghiului dreptunghic ABC având cateta AB = 12 cm şi ipotenuza BC = 6 $\sqrt{13}$ cm , se ridică perpendiculara BM = 10 cm . Calculaţi :
a) Distanţa de la M la AC ;
b) Distanţa de la M la centrul de greutate al triunghiului .

Prof. **Simion Marin** , Rm. Sărat

Rezolvare: Deoarece MB $\perp (ABC)$ şi AB $\perp$ AC rezultă MA $\perp$ AC (t . 3 $\perp$) ; deci MA = d(M , AC) . Din triunghiul dreptunghic MBA obţinem MA = $\sqrt{10^2 + 12^2} = 2\sqrt{61}$ cm .
Din triunghiul ABC obţinem
AC= $\sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{468 - 144} = \sqrt{324} = 18$ cm.
Fie N mijlocul lui $[AC]$.

Rezultă că AN= $\dfrac{AC}{2} = 9$ cm. Din ΔABN calculăm lungimea medianei BN =15 cm . BG = $\dfrac{2}{3}$ din BN =10 cm.

Din ΔMBG obţinem MG = 10$\sqrt{2}$ cm .



▪ Clasa a IX-a

L:268. **Să se determine** $a, b \in \mathbb{R}$ **astfel încât ecuațiile** $(4a-10)x^2+(a-8)x+3=0$ **şi** $(b+8)x^2-(2b+19)x+9=0$ **să aibă aceleaşi soluții.** *Prof.* **Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare:

Din condiția $\dfrac{4a-10}{b+8}=\dfrac{a-8}{-(2b+19)}=\dfrac{1}{3}$ rezultă $12a-30=b+8$ şi $3a-24=-2b-19$. De aici, prin rezolvarea sistemului $\begin{cases}12a-b=38\\3a+2b=5\end{cases}$ rezultă $a=3$ şi $b=-2$.

L:269. **Determinaţi mulţimea** $A=\left\{x\in\mathbb{R}\left|\dfrac{x}{x^2+3x+3}\in\mathbb{Z}\right.\right\}$**.** *Prof.* **Constantin Dinu,** Buzău

Rezolvare: $\dfrac{x}{x^2+3x+3}=p\in\mathbb{Z}\Rightarrow px^2+(3p-1)x+3p=0$. Pentru $p\neq 0, x\in\mathbb{R}\Rightarrow\Delta\geq 0 \Leftrightarrow$ $-3p^2-6p+1\geq 0\Rightarrow\ p\in\{-2;-1;0\}$.

Pentru $p=-2\Rightarrow x\in\left\{-2;-\dfrac{3}{2}\right\}$; $p=-1\Rightarrow x\in\{-3;-1\}$; $p=0\Rightarrow x\in\{0\}$; În concluzie,

$A=\left\{-3;-2;-\dfrac{3}{2};-1;0\right\}$;

L:270. **Fie** x, y, z **numere reale,** $z<0, x\neq 0$**, astfel încât** $|y|<2\sqrt{xz}$**. Să se demonstreze inegalitatea:** $x(x^2+y^2+z^2)+y(x+y+z)+3z<0$**.**

Prof. **Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

Rezolvare: Deoarece $xz>0$, avem $x<0$. Asociem numerelor reale x, y, z funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată prin $f(t)=xt^2+yt+z$. Dar $|y|<2\sqrt{xz}\Leftrightarrow y^2-4xz<0$. Deducem că $f(t)<0, \forall t\in R$. Deci $f(x)<0, f(y)<0, f(z)<0$. Adunând aceste trei inegalități obținem cerința din enunț.

L:271. Fie $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $\dfrac{\sin^3 x}{5}+\dfrac{\cos^3 x}{12}\geq\dfrac{1}{13}$. *Prof.* **Ana Cismaru,** Malu Mare, Dolj

Rezolvare:

$$\frac{\sin^3 x}{5}+\frac{\cos^3 x}{12}=\frac{\sin^4 x}{3\sin x}+\frac{\cos^4 x}{12\cos x}\geq\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2}{3\sin x+12\cos x}\geq\frac{1}{\sqrt{(3^2+12^2)(\sin^2 x+\cos^2 x)}}=\frac{1}{13}.$$

L:272. **Arătați că** $\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{25}+.........+\dfrac{1}{2n^2+2n+1}\langle\dfrac{1}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$**.**

Prof. Nicoleta Bran, Craiova

Rezolvare: Deoarece $2n^2+2n+1=n^2+(n+1)^2\rangle 2n(n+1)\Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k^2+2k+1}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k(k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n+1}<\frac{1}{2}.$$

L:273. **Ştiind că** $x, y\in\mathbb{R}_+^*$ **şi** $x<y$**, să se compare numerele :** $a=\dfrac{y^3}{x}$ **şi** $b=2x^2+xy+y^2$**.**

Prof. **Constantin Apostol**, Rm. Sărat

Rezolvare: Fie ® relația dintre cele două numere, care poate fi „ $>$”, „ $=$ ” sau „ $<$ ”.

Aşadar, $\frac{y^3}{x}$ ® $2x^2+xy+y^2 \,|\cdot x \Leftrightarrow y^3$ ® $2x^3+x^2y+xy^2 \Leftrightarrow y^3-x^3$ ® $x^3+x^2y+xy^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y-x)(y^2+xy+x^2)$ ® $x(x^2+xy+y^2) \Leftrightarrow y-x$ ® $x \Leftrightarrow y$ ® $2x$. Obţinem cazurile :

I) Dacă $y<2x$, $\Rightarrow$ ® este „ $<$ ”;

II) Dacă $y=2x$, $\Rightarrow$ ® este „ $=$ ”;

III) Dacă $y>2x$, ® este „ $>$ ”;

L:274. Să se arate că dacă x, y, u, v $\in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2+y^2=9$ şi $u^2+v^2=36$, atunci $xu+yv\in[-18;18]$. ***Prof.*** **Iuliana Traşcă,** Scorniceşti, Olt

Rezolvare:

Metoda 1: Alegem x=3cosa, y=3sina, u=6cosb , v=6sinb (care verifică egalităţile de mai sus)

Atunci, xu+yv= 18cos(a- b) $\in[-18,\ 18]$.

Metoda 2: Conform inegalităţii Cauchy-Buniakowski-Schwarz rezultă

$(xu+yv)^2 \le (x^2+y^2)(u^2+v^2)$=324, adică xu+yv $\in[-18,\ 18]$.

L:275. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, se consideră numerele în progresie aritmetică: $1+\sqrt{\sqrt{\sqrt{n+1}}}$, $2+2\sqrt{\sqrt{n+1}}$, $1+\sqrt{n+1}$. Să se determine raţia progresiei.

Prof. **Ionel Tudor,** Călugăreni,Giurgiu

Rezolvare: Numerele date sunt în progresie aritmetică dacă şi numai dacă

$$2+2\sqrt{\sqrt{n+1}}=\frac{(1+\sqrt{n+1})+(1+\sqrt{\sqrt{\sqrt{n+1}}})}{2} \Rightarrow 4+4\sqrt{\sqrt{n+1}}=2+\sqrt{n+1}+\sqrt{\sqrt{\sqrt{n+1}}}.$$

Notăm $x=\sqrt{\sqrt{\sqrt{n+1}}}\rangle 0 \Rightarrow \sqrt{\sqrt{n+1}}=x^2$ şi $\sqrt{n+1}=x^4$. Se obţine, ecuaţia $2+4x^2=x^4+x$ de unde $x^4-4x^2+x-2=0$. Descompunând, rezultă $x^2(x^2-4)+x-2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^3+2x^2+1)=0$.

Pentru x>0 avem $x^3+2x^2+1\rangle 1\rangle 0$. Rezultă x=2 şi atunci $\sqrt{n+1}=x^4=16 \Rightarrow n=1=256 \Rightarrow n=255$.

Am găsit progresia aritmetică $\div 3,10,17$ care are raţia r = 7.

L:276. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $m\cdot f(x-1)+n\cdot f(-x)=3x+7$. Determinaţi $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(2)=-5,\ f(-3)=4$. ***Prof.*** **Claudia Popa**, Berca, Buzău

Rezolvare: Pentru $x=-2$ respectiv $x=3$ rezultă $\begin{cases}4m-5n=1\\-5m+4n=16\end{cases} \Rightarrow n=-\frac{23}{3},\ m=-\frac{28}{3}.$

L:277. Dacă $x_k\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right), \forall k=\overline{1,n}$, atunci arătaţi că $\left(\sum_{k=1}^{n}(\sin x_k+2tgx_k)\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}>3n^2$.

D.M. Bătineţu – Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Este evident că : $\frac{\sin x+2tgx}{3}>2tg\frac{x}{2}>x, \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ (1)

Într-adevăr, notând $tg\frac{x}{2}=t\in(0,1)$ avem de demonstrat că:

$$\frac{2t}{1+t^2}+\frac{4t}{1-t^2}>6t, \forall t\in(0,1) \Leftrightarrow \frac{1}{1+t^2}+\frac{2}{1-t^2}>3, \forall t\in(0,1) \Leftrightarrow 1-t^2+2+2t^2>3(1-t^4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3t^4+t^2>0, \forall t\in(0,1)\text{, ceea ce este evident.}$$

Prin urmare,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sin x_k + 2tgx_k\right) > 3\sum_{k=1}^{n} x_k, \forall x_k \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), k = \overline{1,n} \qquad (2)$$

Înmulțind inegalitatea (2) cu $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k} > 0$ și ținând seama că: $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right) \geq n^2$, inegalitatea (2)

devine: $\left(\sum_{k=1}^{n}(\sin x_k + 2tgx_k)\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k} > 3\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right) \geq 3n^2$, ceea ce demonstrează enunțul.

L:278 Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare (cu notațiile obişnuite) au loc relațiile:

a) $GI^2 = \frac{2}{9(a+b+c)}[(a-b)(a-c)(p-a)+(b-a)(b-c)(p-b)+(c-a)(c-b)(p-c)]$.

b) $GI^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr)$.

***Prof.* Marcel Chiriţă**, Bucuresti

Rezolvare: Soluție. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{AI} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC} \Rightarrow$

$\overrightarrow{GI} = (\frac{b}{a+b+c} - \frac{1}{3})\overrightarrow{AB} + (\frac{c}{a+b+c} - \frac{1}{3})\overrightarrow{AC}$. Dar $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\cdot(b^2+c^2-a^2)$

$$GI^2 = \overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{GI} = [(\frac{b}{a+b+c} - \frac{1}{3})\overrightarrow{AB} + (\frac{c}{a+b+c} - \frac{1}{3})\overrightarrow{AC}][(\frac{b}{a+b+c} - \frac{1}{3})\overrightarrow{AB} + (\frac{c}{a+b+c} - \frac{1}{3})\overrightarrow{AC}]$$

$$= \left(\frac{a+c-2b}{3(a+b+c)}\right)^2 c^2 + \left(\frac{a+b-2c}{3(a+b+c)}\right)^2 b^2 + \left(\frac{a+c-2b}{3(a+b+c)}\right)\left(\frac{a+b-2c}{3(a+b+c)}\right)(b^2+c^2-a^2) =$$

$$= \frac{1}{9(a+b+c)^2}[(a+c-2b)^2c^2 + (a+b-2c)^2b^2 + (a+c-2b)(a+b-2c)(b^2+c^2-a^2)]$$

$$= \frac{1}{9(a+b+c)}(-a^3 - b^3 - c^3 + 2a^2b + 2a^2c + 2ab^2 + 2b^2c + 2ac^2 + 2bc^2 - 9abc).$$

Se verifică uşor că : $-a^3 - b^3 - c^3 + 2a^2b + 2a^2c + 2ab^2 + 2b^2c + 2ac^2 + 2bc^2 - 9abc =$
$= 2[(a-b)(a-c)(p-a) + (b-a)(b-c)(p-b) + (c-a)(c-b)(p-c)]$

Ținând cont de formulele: $p = \frac{a+b+c}{2}$, $r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$, $S = \frac{abc}{4R}$ avem

$$\frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr) = \frac{1}{9}[\frac{(a+b+c)^2}{4} + \frac{5(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4(a+b+c)} - \frac{8abc}{a+b+c}] =$$

$$\frac{1}{9(a+b+c)}[\frac{(a+b+c)^2 + 5(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) - 32abc}{4(a+b+c)}] =$$

$$\frac{1}{9(a+b+c)}(-a^3 - b^3 - c^3 + 2a^2b + 2a^2c + 2ab^2 + 2b^2c + 2ac^2 + 2bc^2 - 9abc) = GI^2.$$

L:279. Fie a,b,c numere reale pozitive. Să se demonstreze inegalitatea:
$48(a+b+c) \leq (a^2+b^2+c^2+9)^2$ **.**

***Prof.* Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

Rezolvare: Cu inegalitatea mediilor avem:

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\cdot 1} \leq \frac{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}+1}{2} = \frac{a^2+b^2+c^2+3}{6} \qquad (1)$$

Dar, $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+3}{6}\cdot 1} \le \frac{\frac{a^2+b^2+c^2+3}{6}+1}{2} = \frac{a^2+b^2+c^2+9}{12} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2+c^2+3}{6} \le \left(\frac{a^2+b^2+c^2+9}{12}\right)^2 \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă concluzia. Egalitatea se obține dacă $a=b=c$, $\frac{a^2+b^2+c^2}{3}=1$, adică $a=b=c=1$.

▪ Clasa a X-a

L:280. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+14x+42$. **Rezolvați în** $\mathbb{C}$ **ecuația** $f(f(f(f(f(x)))))=0$.

***Prof.* Dana Camelia, Didu Ileana,** Craiova

Rezolvare: $f(x)=(x+7)^2-7 \Rightarrow f(f(x))=(f(x)+7)^2-7=(x+7)^{2^2}-7$. Analog, $f(f(f(x)))=(x+7)^{2^3}-7$, etc. $f(f(f(f(f(x)))))=(x+7)^{2^5}-7 \Rightarrow$

$(x+7)^{2^5}=7=7(\cos 0+i\sin 0) \Rightarrow x_k=\sqrt[32]{7}\left(\cos\frac{2k\pi}{32}+i\sin\frac{2k\pi}{32}\right),\ k=\overline{0,31}$.

L:281. Fie $x,y,z\rangle 0$. **Arătați că** $\frac{(x+1)^2}{3\cdot\sqrt[3]{(yz)^2}+1}+\frac{(y+1)^2}{3\cdot\sqrt[3]{(xz)^2}+1}+\frac{(z+1)^2}{3\cdot\sqrt[3]{(xy)^2}+1}\ge 3.$

În ce caz avem egalitate ?

***Prof.* Gabriel Tica,** Băileşti, ***Prof.* Lucian Tuțescu,** Craiova

Rezolvare:

$\sum\frac{(x+1)^2}{3\cdot\sqrt[3]{(yz)^2}+1}\ge\sum\frac{(x+1)^2}{(y+1)(z+1)}\ge 3\cdot\sqrt[3]{\prod\frac{(x+1)^2}{(y+1)(z+1)}}=3$. Egalitate pentru $x=y=z=1$.

S-a aplicat inegalitatea mediilor: $3\cdot\sqrt[3]{(yz)^2}+1=3\cdot\sqrt[3]{yz(yz)}+1\le y+z+yz+1=(y+1)(z+1)$.

L:282. Să se rezolve ecuația $\log_x{}^2 7-\log_{\sqrt7}\frac{1}{x}-\log_{\frac17}\sqrt[3]{x}+\frac43=0$.

***Prof.* Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare: Din condițiile de existență rezultă $x\rangle 0$ **şi** $x\ne 1$.

$Avem:\log_x 7=\frac{1}{\log_7 x};\ \log_{\sqrt7}\frac1x=-\log_{\sqrt7}x=-\frac{1}{\frac12\log_x 7}=-2\log_7 x.\ \ \log_{\frac17}\sqrt[3]{x}=-\frac13\log_7 x.$

Notând $\log_7 x=t$ ecuația dată devine $7t^3+4t^2+3=0 \Leftrightarrow (t+1)(7t^2-7t+3)=0\Rightarrow$

$t_1=-1, t_{2,3}\notin\mathbb{R}$. Așadar, din $\log_7 x=-1\Rightarrow x=\frac17$.

L:283. Folosind eventual identitatea $x^3-13x+12=(x-1)(x-3)(x+4)$, **rezolvaţi ecuaţiile:**

a) $3^{3x}-13\cdot 3^x+12=0;$

b) $\lg x+\lg(x^2+25x)=\lg(x+1)+\lg(25x-12)$.

***Prof.* Constantin Dinu,** Buzău

Rezolvare: a) Cu notația $3^x=y>0$, ecuația devine $y^2-13y+12=0 \Leftrightarrow (y-1)(y-3)(y+4)=0$ rezultă $y=1, y=3, y=-4$. De aici se obține că $x\in\{0;1\}$;

b) Din condițiile de existență ale logaritmilor $x\rangle 0,\ x^2+25x\rangle 0,$

$x+1\rangle 0,\ 25x-12\rangle 0,$ rezultă $x\in\left\{\frac{12}{25};+\infty\right\}$; Ecuația devine $\lg x\cdot(x^2+25x)=\lg(x+1)\cdot(25x-12)\Rightarrow$

$x^3-13x+12=0\Rightarrow x\in\{1;3\}$.

$\boxed{\text{L:284}}$. **Să se rezolve sistemul:** $\begin{cases}2^x+2^{x+y}+2^y=5\\2^y+2^{y+z}+2^z=7\\2^z+2^{x+z}+2^x=11\end{cases}$. *Prof.* **Struțu Gheorghe,** Buzău

Rezolvare: Notăm: $2^x=a>0;2^y=b>0;2^z=c>0$. Astfel, sistemul devine:

$$\begin{cases}a+ab+b=5\\b+bc+c=7\\c+ac+a=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+1)(b+1)=6\\(b+1)(c+1)=8\\(a+1)(c+1)=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}a=2\Rightarrow x=1\\b=1\Rightarrow y=0\\c=3\Leftrightarrow z=\log_2 3\end{matrix}.$$

L:285. Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ **ecuația:** $7^x=3^y+100$.

Prof. **Ovidiu Țâțan,** Râmnicu Sărat

Rezolvare: Arătăm mai întâi că ecuația nu are soluții întregi negative.

Dacă $x<0,y<0\Rightarrow 7^x\in(0,1),3^y\in(0,1)\Rightarrow 3^y+100\in(100,101)$, deci nu avem soluții.

Dacă $x<0,y>0\Rightarrow 7^x\in(0,1),3^y+100>100$, deci nu există soluții.

Dacă $x>0,y<0\Rightarrow 7^x>1,3^y+100\in(100,101)$, dar nu există $x\in\mathbb{Z}$ cu $7^x\in(100,101)$ deci din nou nu avem soluții. Aşadar $x\geq 0,y\geq 0$. Cazurile x=0 sau y=0 nu conduc nici ele la soluții.

Pentru $x>0,y>0$ scriem ecuația sub forma: $7^x-343=3^y-243\Rightarrow 7^3(7^{x-3}-1)=3^5(3^{y-5}-1)$.

Cum $(7^3,3^5)=1$ şi observând că ecuația nu are soluții $x<3,y<5$ rezultă $7^3/(3^{y-5}-1)$.

Dacă $y>5,y\in\mathbb{N}\Rightarrow 3^{y-5}-1\equiv-1(\text{mod }3)$. Dar $7^3=343\equiv 1(\text{mod }3)$ deci $-1\equiv 1(\text{mod }3)$, fals.

Rămâne deci $y=5$ şi apoi $x=3$. În concluzie, ecuația admite soluție unică, $S=\{(3;5)\}$.

L:286. Fie $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$ **şi numerele reale** $a\rangle b\rangle 0$ **pentru care** $(a-b)^n=a+b$**.**

Să se arate că: a) $\sqrt[n+1]{a^2-b^2}=\sqrt[n]{a+b}$; **b)** $\dfrac{(a-b)^{2n+1}}{\sqrt[n+1]{a^2-b^2}}$ **este pătratul unui binom.**

Prof. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Mai întâi facem observația că există numerele a>b>0 şi n care verifică condițiile din ipoteză, de exemplu a=3,b=1 şi n=2.

$(a-b)^n=a+b\Rightarrow\sqrt[n]{a+b}=\sqrt[n]{(a-b)^n}=a-b\rangle 0$.

Atunci $\sqrt[n+1]{a^2-b^2}=\sqrt[n+1]{(a+b)(a-b)}=\sqrt[n+1]{(a-b)^n(a-b)}=a-b=\sqrt[n]{a+b}$.

$$\frac{(a-b)^{2n+1}}{\sqrt[n+1]{a^2-b^2}}=\frac{(a-b)^{2n+1}}{\sqrt[n]{a+b}}=\frac{(a-b)^{2n+1}}{a-b}=(a-b)^{2n}=\left[(a-b)^n\right]^2=(a+b)^2.$$

$\boxed{\text{L:287}}$. **Rezolvați ecuația** $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{\ln x(x-1)}}-2=\dfrac{\sqrt{\ln x(x-1)}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

Prof. **Petre Păunescu**, Roşiorii –de –Vede

Rezolvare: Se face notația $\sqrt{\ln x(x-1)} = a\rangle 0$ şi $\sqrt{3}-\sqrt{2}=b$, atunci

$\frac{b}{\sqrt{3}-a}-2=\frac{a-\sqrt{3}}{b} \Rightarrow y+\frac{1}{y}=2$ unde s-a făcut notația $\frac{b}{\sqrt{3}-a}=y$. Se obține y =1 după care

$a=\sqrt{2} \Rightarrow \ln x(x-1)=2 \Rightarrow x^2-x=e^2$ cu soluțiile $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4e^2}}{2}$ care respectă condițiile de existență x^2-x>o , $\ln(x^2$-x)>0 şi numitorul diferit de zero.

L:288. Se consideră mulțimile $A_1=(-\infty,\alpha]$ şi $A_2=[\beta,+\infty)$, unde $\alpha=x^2y^2+9x^2+4y^2+36$, $\beta=(xy+6)^2$, iar x,y numere reale. Să se arate că:
1) a) $A_1\bigcap A_2 \neq$ mulțime vidă, $\forall x,y\in R$; b)Precizați relația dintre x şi y pentru care $\alpha=\beta$;
2) Aflați valorile lui x şi y pentru care $A_1\bigcap A_2=[49,50]$.

***Prof.* Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

Rezolvare: 1) Demonstrăm că $\alpha\geq\beta$. În adevăr, α se scrie succesiv astfel $\alpha=x^2y^2+9x^2+4y^2+36=x^2(y^2+9)+4(y^2+9)=(x^2+2^2)(y^2+3^2)$. Avem de arătat că $(x^2+2^2)(y^2+3^2)\geq(x\cdot y+2\cdot 3)^2$, ceea ce este adevărat conform inegalității C-B-S.

Sau $\alpha\geq\beta \Leftrightarrow (3x-2y)^2\geq 0$. Egalitatea se obține dacă $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$. Pentru punctual 2) avem de rezolvat sistemele: $S_1:\begin{cases}xy+6=7\\ x^2y^2+9x^2+4y^2+36=50\end{cases}$ şi $S_2:\begin{cases}xy+6=-7\\ x^2y^2+9x^2+4y^2+36=50\end{cases}$.

Sistemul S_2 nu are soluții reale deoarece a doua ecuație devine $9x^2+4y^2=50-36-169<0$. Se obțin soluțiile: $S=\left\{(-1,-1),(1,1),\left(\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right),\left(-\frac{2}{3},-\frac{3}{2}\right)\right\}$.

L:289. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

$$\begin{cases}\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}+\sqrt{4z+1}=15\\ 3^{2x+\sqrt{3y+1}}+3^{3y+\sqrt{4z+1}}+3^{4z+\sqrt{2x+1}}=3^{30}\end{cases}.$$

***Prof.* Marcel Chiriță**, Bucureşti

Rezolvare: Ridicând la pătrat prima ecuație şi ținând cont de inegalitatea mediilor obținem:
(2x+1) + (3y+1) + (4z+1) = 225 $-2\sqrt{(2x+1)(3y+1)}$ $-2\sqrt{(3y+1)(4z+1)}$ $-2\sqrt{(4z+1)(2x+1)} \Rightarrow$
2x + 3y + 4z + 3 $\geq$ 225 – (2x+1 + 3y + 1) – (3y + 1 + 4z +1) – (4z + 1 + 2x + 1)
$\Longrightarrow$ 6x + 9y + 12z $\geq$ 216 $\Longrightarrow$ 2x + 3y + 4z $\geq$ 72.
În ecuația a doua ținând cont de inegalitatea mediilor şi de inegalitatea precedentă obținem:

$$3^{30}=3^{2x+\sqrt{3y+1}}+3^{3y+\sqrt{4z+1}}+3^{4z+\sqrt{2x+1}}\geq 3\cdot\sqrt[3]{3^{2x+\sqrt{3y+1}+3y+\sqrt{4z+1}+4z+\sqrt{2x+1}}}=3\cdot\sqrt[3]{3^{2x+3y+4z+15}}3\cdot\sqrt[3]{3^{87}}=3^{30}$$

Se obține egalitate atunci când $\sqrt{2x+1}=\sqrt{3y+1}=\sqrt{4z+1}$.Ținând cont de prima ecuație obținem x=12, y=8 şi z=6.

▪ Clasa a XI-a

L:290. Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, suma primilor n termeni este $S_n=\frac{4n^2+8n}{3}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n\cdot a_n}$.

***Prof.* Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare: Cum $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{8n+4}{3}, \forall n \geq 1$, iar $a_1 + a_2 + ... + a_n = S_n = \frac{4n^2+8n}{3}$, rezultă,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n \cdot a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n^2+8n}{3}}{n \cdot \frac{8n+4}{3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+8n}{8n^2+4n} = \frac{1}{2}.$$

L:291. **Fie** $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_1 = 3, x_2 = 2$, $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1} + x_n}$, $n \geq 1$.

a) Arătați că $x_n \leq 2 + \frac{1}{n}, \forall n \geq 1$;

b) Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ **este convergent şi** $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$;

Prof. Ion Nedelcu, Ploieşti, ***Prof.*** **Lucian Tuțescu,** Craiova

Rezolvare: a) Se arată prin inducție.

$$x_{n+2} \leq \sqrt{2 + \frac{1}{n} + 2 + \frac{1}{n+1}} \leq 2 + \frac{1}{n+2} \Leftrightarrow \frac{2n+1}{n^2+n} \leq \frac{4n+9}{n^2+4n+4} \Leftrightarrow 2n^3 + 4n^2 - 3n - 4 \geq 0, \forall n \geq 2.$$

b) Se arată prin inducție că $x_n \geq 2$. $x_n \in \left[2; 2 + \frac{1}{n}\right], \forall n \geq 1; \lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

L:292. **Se consideră dezvoltarea** $(X-3)^{10} = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... + a_{10} X^{10}$. **Să se calculeze** $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + ... + 10a_{10}$.

Prof. **Florentina Popescu,** Buzău

Rezolvare: Derivând relația din enunț, se obține $10(X-3)^9 = a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2 + ... + 10a_{10} X^9$ şi pentru $X = 1$, rezultă $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + ... + 10a_{10} = -10 \cdot 2^9$.

L:293. **Se consideră funcţia** $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{3+|x-3|}{3-|x-3|}}$.

a) Să se determine domeniul maxim de definiţie a funcţiei şi să se studieze continuitatea lui f pe această mulţime.

b) Calculaţi $\lim_{x\to 3} \left(f(x)\right)^{\frac{2}{|x-3|}}$.

Prof. **Constantin Dinu,** Buzău

Rezolvare:

a) $3 - |x-3| > 0 \Rightarrow D = (0;6)$; După explicitarea modulului, rezultă $f(x) \begin{cases} \sqrt{\frac{6-x}{x}}, & x \in (0;3] \\ \sqrt{\frac{x}{6-x}}, & x \in (3;6) \end{cases}$,

Deoarece $\lim_{\substack{x\to 3 \\ x<3}} \sqrt{\frac{6-x}{x}} = \lim_{\substack{x\to 3 \\ x>3}} \sqrt{\frac{x}{6-x}} = f(3) = 1$, atunci f este continuă pe D.

b) $\lim_{\substack{x\to 3 \\ x<3}} \left(\frac{6-x}{x}\right)^{\frac{1}{3-x}} = e^{\frac{2}{3}}$, $\lim_{\substack{x\to 3 \\ x>3}} \left(\frac{x}{6-x}\right)^{\frac{1}{x-3}} = e^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \lim_{x\to 3} \left(f(x)\right)^{\frac{2}{|x-3|}} = e^{\frac{2}{3}}$.

L:294. **Fie** $n \in \mathbb{N}^*$ **şi** $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ **inversabilă. Arătați că:**

a) Dacă $AB^{-1} = I_n + BA^{-1}$ **atunci** $A - B$ **este inversabilă.**

b) Dacă $BA^{-1} = I_n + AB^{-1}$ **atunci** $A + B$ **este inversabilă.**

Prof. **Otilia Drăgan,** ***Prof.*** **Ovidiu Cioponea,** Craiova

Rezolvare:

a) Din $(A-B)(A^{-1}-B^{-1})=I_n-BA^{-1}+AB^{-1}-I_n=I_n \Rightarrow$ $\det(A-B)\neq 0 \Rightarrow A-B$ este inversabilă.

b) Din $(A+B)(A^{-1}-B^{-1})=I_n+BA^{-1}-AB^{-1}-I_n=I_n \Rightarrow$ $\det(A+B)\neq 0 \Rightarrow A+B$ este inversabilă.

L:295. **Fie** $x,y,z\rangle 0$ **cu** $x+y+z=1$. **Arătați că:**

a) $(x+y)^z\cdot(y+z)^x\cdot(z+x)^y\leq\frac{2}{3}$;

b) $x^{y+z}\cdot y^{z+x}\cdot z^{x+y}\leq\frac{1}{9}$;

Prof. Ion Nedelcu, Ploieşti, **Prof. Lucian Tuțescu,** Craiova

Rezolvare:

a) Fie $f:(0;1)\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln(1-x)$, atunci, $f''(x)=\frac{x+2}{(x-1)^2}\langle 0, \forall x\in(0;1)\Rightarrow$ f este concavă pe $(0;1)$ de unde rezultă conform inegalității $f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\geq\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}$ ceea ce trebuia arătat.

b) Fie $g:(0;1)\to\mathbb{R}, g(x)=(1-x)\ln x$, atunci, $g''(x)=\frac{-x+1}{x^2}\langle 0, \forall x\in(0;1)\Rightarrow$ g este concavă pe $(0;1)$ de unde rezultă conform inegalității $g\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\geq\frac{g(x)+g(y)+g(z)}{3}$ ceea ce trebuia arătat.

L:296. **Fie** $f:[a;b]\to\mathbb{R},\ 0\langle a\langle b$ **de două ori derivabilă şi** $\sqrt{a}f(b)+\sqrt{b}f(a)=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)f(\sqrt{ab})$. **Arătați că există** $c\in(a;b)$ **astfel încât** $f''(c)=0$.

Prof. **Liviu Smarandache, Ramona Puchiu**, Craiova

Rezolvare:

$\exists\ c_1\in\left(a;\sqrt{ab}\right)$ astfel încât $\frac{f(\sqrt{ab})-f(a)}{\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}=f'(c_1)$ şi $\exists\ c_2\in\left(\sqrt{ab};b\right)$ astfel încât $\frac{f(b)-f(\sqrt{ab})}{\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}=f'(c_2)$. Din enunț şi $c_1\langle c_2\Rightarrow f'(c_1)=f'(c_2)\Rightarrow\exists c\in(c_1,c_2)\subset(a;b)$ astfel încât $f''(c)=0$.

L:297. **Să se rezolve în** $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ **sistemul** $\begin{cases}2^x+x=3^y\\2^y+y=3^x\end{cases}$.

Prof. **Aurel Chiriță,** Slatina

Rezolvare:

Pentru $x\langle y\Rightarrow 3^y=2^x+x\langle 2^y+y\langle 3^x\Rightarrow y\langle x$, fals. Analog pentru $y\langle x$. Atunci, $x=y\Rightarrow$ $2^x+x=3^x$. Fie $f:[2;3]\to\mathbb{R},\ f(t)=t^x$. Conform teoremei lui Lagrange, $\exists c\in(2;3)$ astfel încât $3^x-2^x=x\cdot c^{x-1}\Rightarrow x=x\cdot c^{x-1}\Rightarrow x\in\{0;1\}\Rightarrow\ (x;y)\in\{(0;0),(1;1)\}$.

L:298. **Fie curba de ecuație** $\alpha x^2y=2x-2,\ \alpha\rangle 0$. **Prin punctul de inflexiune se duce o perpendiculară pe o dreaptă variabilă ce trece prin origine. Să se afle locul geometric al intersecției.**

Prof. **Claudia Popa**, Berca, Buzău

Rezolvare:

$y=f(x)=\frac{2x-2}{\alpha x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-2x+4}{\alpha x^3}\Rightarrow f''(x)=\frac{4x-12}{\alpha x^4}$. Din $f''(x)=0\Rightarrow x_0=3$. Punctul de inflexiune este $I\left(3;\frac{4}{9\alpha}\right)$ iar ecuația locului geometric este ecuația cercului

$\left(x^2-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{2}{9\alpha}\right)^2=\frac{9}{4}+\frac{4}{81\alpha^2}$ de centru $C\left(\frac{3}{2};\frac{2}{9\alpha}\right)$ şi raza $R=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{4}{81\alpha^2}}$.

▪ Clasa a XII-a

L:299. Fie $f:M_2(\mathbb{Z})\to M_2(\mathbb{Z})$, $f(x)=\begin{pmatrix} a+1 & 3 \\ -1 & a+4\end{pmatrix}\cdot X$. Să se determine $a\in\mathbb{Z}$ astfel încât f să fie automorfism al grupului $\left(M_2(\mathbb{Z}),+\right)$.

***Prof.* Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare:

Fie f automorfism al grupului $\left(M_2(\mathbb{Z}),+\right)$, rezultă f e bijectivă $\Rightarrow\begin{pmatrix} a+1 & 3 \\ -1 & a+4\end{pmatrix}$ e inversabilă, deci,

$\Rightarrow(a+1)(a+4)+3\neq 0.$

$\begin{pmatrix} a+1 & 3 \\ -1 & a+4\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{a^2+5a+7}\cdot\begin{pmatrix} a+4 & -3 \\ 1 & a+1\end{pmatrix}\Rightarrow a+4,\ -3,\ 1,\ a+1$ trebuie să fie divizibile cu a^2+5a+7 adică $a^2+5a+7=1$ sau -1.

Din $a^2+5a+7=1\Rightarrow a\in\{-2;-3\}$ şi din $a^2+5a+7=-1\Rightarrow a\notin\mathbb{Z}$.

L:300. Se consideră funcţiile $f,F:(1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x+1}-\ln(1-\frac{1}{x})\right)$, iar $F(x)=\frac{1}{x}\ln(1-\frac{1}{x})$.

a) Demonstraţi că F(x) este o primitivă a lui f(x);

b) Calculaţi $\int_2^e f(x)\cdot F(x)dx$.

***Prof.* Constantin Dinu,** Buzău

Rezolvare: a) F este o primitivă a lui f deoarece $F'x)=\left(\frac{1}{x}\right)'\ln(1-\frac{1}{x})+\frac{1}{x}\left[\ln(1-\frac{1}{x})\right]'=f(x).$

b) $\int_2^e f(x)\cdot F(x)dx=\frac{1}{2}F^2(x)\Big|_2^e=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}\ln(1-\frac{1}{x})\right]^2\Big|_2^e==\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{e}\ln\frac{e-1}{e}\right)^2-\frac{1}{2}(\ln\frac{1}{2})\right]^2=$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{e^2}\left(\ln(e-1)-1\right)^2-\frac{1}{2}\ln^2 2\right].$

L:301. Să se calculeze: $I(a)=\int\frac{2x+1}{x^4+2x^3+4x^2+3x+2+a}dx, a\in\mathbb{R}$.

***Prof.* Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

Rezolvare: $I(a)$ se mai scrie $\int\frac{(x^2+x)'}{x^4+2x^3+4x^2+3x+2+a}dx$, ceea ce sugerează scrierea numitorului după puterile lui x^2+x. Astfel:

$x^4+2x^3+4x^2+3x+2+a=\alpha(x^2+x)^2+\beta(x^2+x)+\gamma$, iar prin identificarea coeficienților găsim $\alpha=1,\beta=3,\gamma=2+a$. Cu substituția $x^2+x=t$, avem $I(a)=\int\frac{dt}{t^2+3t+2+a}$.

Dacă $\Delta=9-8-4a>0 \Leftrightarrow a<\frac{1}{4}$, atunci $t^2+3t+2+a=\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2+a=\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{1}{4}-a}\right)^2=$

$=\left(t+\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-a}\right)\left(t+\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-a}\right)$ şi $I(a)=\frac{1}{\sqrt{1-4a}}\ln\left|\frac{2t+3-\sqrt{1-4a}}{2t+3+\sqrt{1-4a}}\right|+C=$

$=\frac{1}{\sqrt{1-4a}}\ln\left|\frac{2(x^2+x)+3-\sqrt{1-4a}}{2x^2+2x+3+\sqrt{1-4a}}\right|+C$.

Dacă $\Delta=1-4a=0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$, atunci: $I(a)=\int\frac{dt}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2}=-\frac{1}{t+\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{2x^2+2x+3}+C$.

Dacă $\Delta<0 \Leftrightarrow a>\frac{1}{4}$, atunci $I(a)=\int\frac{dt}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a-\frac{1}{4}}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{4a-1}}arctg\frac{t+\frac{3}{2}}{\sqrt{a-\frac{1}{4}}}+C=$

$=\frac{2}{\sqrt{4a-1}}arctg\frac{2x^2+2x+3}{\sqrt{4a-1}}+C$.

L:302. Să se calculeze: $\int_{-1}^{1}\frac{a+\arccos x}{1+x^2}dx$, unde $a>0$.

D.M. Bătinețu – Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Fie $I=\int_{-1}^{1}\frac{a+\arccos x}{1+x^2}dx$, în care facem schimbarea de variabilă $x=u(t)=-t$, cu $u'(t)=-1, u(1)=-1, u(-1)=1$ şi obţinem:

$$I=\int_{1}^{-1}\frac{a+\arccos(-t)}{1+t^2}\cdot(-1)\cdot dt=\int_{-1}^{1}\frac{a+\pi-\arccos t}{1+t^2}dt=(a+\pi)\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t^2}dt-I.$$

Deci, $2I=(a+\pi)arctgt\Big|_{-1}^{1}=(a+\pi)\cdot\frac{\pi}{2}$, de unde $I=\frac{\pi(\pi+a)}{4}$.

L:303. Aflați primitivele funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\cos 2x}{(\sin x+\cos x+2010)^{2011}}$.

***Prof.* Liviu Smarandache, Ivănescu Ionuț,** Craiova

Rezolvare: Se face substituţia $\sin x+\cos x=t \Rightarrow (\cos x-\sin x)dx=dt \Rightarrow \int\frac{\cos 2x}{(\sin x+\cos x+2010)^{2011}}dx=$

$\int\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x+2010)^{2011}}dx=\int\frac{tdt}{(t+2010)^{2011}}=\int\frac{dt}{(t+2010)^{2010}}-2010\int\frac{dt}{(t+2010)^{2011}}=$

$=-\frac{1}{2009}\cdot\frac{1}{(t+2010)^{2009}}+\frac{1}{(t+2010)^{2010}}=-\frac{\sin x+\cos x+1}{2009(\sin x+\cos x+2010)^{2010}}+C.$

L:304. **Să se calculeze integrala** $\int_0^2 \frac{4x^3+6x^2+8x+3}{(x^2+x+1)^3}dx$. *Prof.* **Constantin Dinu,** Buzău

Rezolvare:

$$\int_0^2 \frac{4x^3+6x^2+8x+3}{(x^2+x+1)^3}dx = \int_0^2 \frac{2(x^2+x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^3}dx + \int_0^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}dx = -2\cdot\frac{1}{x^2+x+1}\Big|_0^2 - \frac{1}{2(x^2+x+1)^2}\Big|_0^2 = \frac{108}{49}.$$

L:305. **Fie** $a \in \mathbb{R}_+$. **Să se arate că** $\int_{-a}^{a} \lg(\sqrt{9x^2+1}+3x)dx = 0$. *Prof.* **Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare: Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\lg(\sqrt{9x^2+1}+3x)$. Se arată că f este impară:

$$f(-x)=\lg(\sqrt{9x^2+1}-3x)=\lg\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=\lg 1-\lg(\sqrt{9x^2+1}+3x)=-f(x).$$

L:306. **Să se rezolve în** $\mathbb{R}$ **ecuația:** $8x^6-3x\sqrt{x}-1=0$.

Prof. **Ionel Tudor,**Călugăreni,Giurgiu

Rezolvare: Impunem condiția $x \geq 0$. Valoarea x=0 nu verifică ecuația.

Pentru x>0 notăm $y = x\sqrt{x} > 0$ şi ecuația devine succesiv:

$$8y^4-3y-1=0 \Leftrightarrow 8y^4-4y^3-2y^2+4y^3-2y^2-y+4y^2-2y-1=0 \Leftrightarrow$$

$$2y^2(4y^2-2y-1)+y(4y^2-2y-1)+(4y^2-2y-1)=0 \Rightarrow$$

$(4y^2-2y-1)(2y^2+y+1)=0 \Rightarrow$ Pentru ecuația $4y^2-2y-1=0 \Rightarrow \Delta=20 \Rightarrow y_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$. Convine doar $y=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Avem $x^3=y^2=\frac{3+\sqrt{5}}{8} \Rightarrow x=\frac{\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}}{2} > 0$, de unde $x=\frac{\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}}{2}$.

Pentru ecuația $2y^2+y+1=0 \Rightarrow \Delta=-7 \Rightarrow$ ecuația nu are soluții reale.

Deci , în $\mathbb{R}$,ecuația dată are doar soluția $x=\frac{\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}}{2}$.

Ştiați că .....?

Pe 28 mai 585 î.e.n este observată o eclipsă de soare şi datată cu exactitate pentru prima dată, eveniment ce avea să rămână în istoriografie ca fiind momentul în care conducătorul mezilor Cyaxares trebuie să întrerupă lupta cu oştile lidianului Alyattes deoarece ziua devenise noapte. Evenimentul a fost prevestit de Thales din Milet care încă din secolul VI î.e.n calculează şi viitoarea eclipsă din 14 martie 190 î.e.n.

Cometa Halley ce poartă numele astronomului englez Edmund Halley (1656 – 1742) este observată şi consemnată pentru prima dată de către chinezi acum circa 239 î.e.n. Mişcarea sa periodică în jurul Soarelui devine vizibilă în jurul Pămîntului la circa 77 de ani şi de obicei oamenii de rând considerau că aceasta prevestea ceva rău ca şi în 160 î.e.n odată cu răzvrătirea iudeilor împotriva dominației seleucide sau în 1066 în bătălia de la Hastings a lui William Cuceritorul (1027 – 1087)în care acesta a crezut că e de bun augur pentru el . Ultima dată, cometa a fost vizibilă în 1986 şi va mai fi vizibilă următoarea dată în 2061.

Construirea observatorului astronomic de la Greenwich începe în 1675 la inițiativa regelui Charles al II-lea (1630 — 1685) pentru a veni în sprijinul navigatorilor şi pentru a defini meridianul zero care este marcat printr-o bandă de alamă ce trece prin curtea institutului. Vizitatorii care calcă pragul institului pot vedea acest meridian şi chiar pot călca pe el.

„ Este o problemă simplă să faci lucrurile să fie complicate,
dar e foarte complicat să le faci simple”.
Legea Lui Meyer

4. Probleme propuse

▪ Învăţământ primar

P:288. Priviti cu atenție următorul tablou cu numere:

12	46	58	62
2	24	40	**?**

Descoperiți regula după care sunt aşezate numerele şi completați spațiul lipsa.

Prof. **Gabriela Stoenescu si Florin Stanescu**, Dâmbovița

P:289. Suma a trei numere este 19. Dacă primul număr adunat cu triplul celui de-al doilea este 19 , iar al doilea adunat cu al treilea este 15 , să se afle numerele .

Elevă. **Alexia Dragan,** Bucureşti

P:290. Suma a cinci numere naturale este 416 . Aflați numerele ştiind că primele patru numere sunt impare consecutive , iar al cincilea este o treime din suma celorlalte .

Prof. **Marcela Marin,** Rm. Sărat

P:291. Un elev a citit o carte în 3 zile. În prima zi a citit jumătate din numărul paginilor, în a doua zi un sfert din rest, iar în a treia zi 24 de pagini. Câte pagini are cartea?

Prof. **Anton Maria**, Berca

P:292. Dacă împărțim diferența numerelor 528 şi 179 la suma dintre 7 şi un număr necunoscut, obținem câtul 7 şi restul 6. Află numărul necunoscut.

Prof. **Lupşan Cristian-Cosmin ,** Buzău

P:293. Aflați numărul necunoscut din $\{[(x + 3) \times 3 + 3] \times 3 + 3\} \times 3 + 3 = 309$

Înv. **Lupşan Ion**, Pleşcoi, Berca

P:294. Suma a patru numere este 700. Să se afle numerele ştiind că suma dintre primul şi al treilea este de două ori mai mare decât al doilea, iar al patrulea este jumătate din al doilea şi cu 6 mai mare decât primul.

Prof. **Lupşan Nicoleta-Gabriela**, Berca

P:295. Diana şi mama ei au împreună 30 de ani. Peste 6 ani, Diana va avea o cincime din vârsta mamei sale. Câți ani are fiecare acum?

Prof. **Marinescu Gabriela,** Vadu Paşii, Buzău

P:296. Într-un săculeț sunt 20 de baloane galbene şi roşii. Dacă scot 10 baloane fără să le văd, sigur este unul roşu, iar dacă scot 12 baloane, sigur unul este galben. Câte baloane sunt de fiecare culoare în săculeț?

Prof. **Ticea Daniela,** Buzău

P:297. Diferența dintre vârsta corbului mare şi vârsta corbului mic este de 51 de ani, iar o jumătate din vârsta corbului mare este de două ori mai mare decât vârsta corbului mic.
Cât mai are de trăit fiecare, ştiind că un corb, dacă ar trăi 10 ani şi încă 20, ar trăi a zecea parte dintr-un mileniu?

Prof. **Vrabie Marioara ,** Berca

▪ Clasa a V-a

G:420. Se dă numărul $A=\{[5:(2\cdot 3-1)+14]:15+3:[1+2\cdot(45:15-2)]\}:2+2008$.
Să se calculeze suma divizorilor numărului A.

Prof. **Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

G:421. Determinați cele mai mici numere naturale $\overline{abcde}$, respectiv $\overline{fghij}$ astfel încât: $2\cdot\overline{abcde}=\overline{fghij}$ şi cele două numere împreună să utilizeze toate cifrele de la 0 la 9.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

G:422. Aflați numărul natural n, astfel încât $2013\cdot 4024+2\cdot 2013\cdot 4024+...+n\cdot 2013\cdot 4024$ să fie pătrat perfect.

Prof. **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

G:423. a) Să se arate că fracția $F=\frac{544}{225}$ este ireductibilă.

b) Determinați $n\in\mathbb{N}$ care verifică egalitatea $\left(\frac{5}{3}\right)^n-\left(\frac{3}{5}\right)^n=\frac{544}{225}$.

Prof. **Ionel Tudor, Viorica Dogaru**, Călugăreni, Giurgiu

G:424. Determinați numerele naturale a şi b astfel încât fracția $\frac{1961}{ab-7a+3b-21}$ să fie echiunitară.

Prof. **Mircea Mario Stoica**, Arad

G:425. Să se gasească numerele naturale m şi n ştiind că : $1^n+2^n+.....+2013^n=45^m-12$.

Prof. **Şerban George-Florin**, Brăila

G:426. Determinați perechile de numere naturale (a,b), pentru care $2ab+3a+b=21$.

Prof. **Constantin Apostol**, Rm. Sărat

G:427. Determinați numerele $\overline{ab}$, şi trei numere naturale consecutive cu primul număr prim, ştiind că prin împărțirea lui $\overline{ab}$ la cele trei numere numere, se obțin ca resturi precedentele celor trei numere.

Prof. **Gheorghe Ghiță,** Buzău

G:428. Mulțimile A şi B sunt astfel încât $card(A\cup B)=140$, $card(A-B)=50$ şi $card(B-A)=60$.
Să se calculeze $card(A\cap B)$.

Prof. **Adrian Stan**, Buzău

G:429. Prin împărțirea numărului a la numărul b $(a,\ b\in\mathbb{N}^*)$ obținem câtul 7 şi restul 12.
Arătați că $70\cdot a-490\cdot b-111$ este pătrat perfect şi cub perfect.

Prof. **Iuliana Traşcă,** Olt

G:430. Simplificați fracția: $\dfrac{\overline{1a}+\overline{1aa}+\overline{1aaa}+...+\overline{1\underbrace{aaa...a}_{9\ cifre}}}{9}$.

Prof. **Sorina Văcărean**, Cluj-Napoca

▪ Clasa a VI-a

G:431. Numerele $x\rangle y\rangle 0$ şi $n\in\mathbb{N}^*$ verifică egalitatea $x^{2n+1}-y^{2n+1}=x+y$. Arătați că numărul $x^{2n}-y^{2n}$ este supraunitar.

Prof. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

G:432. Să se arate că pentru orice număr natural n numărul $N=2011^n+2013^{n+1}+2015^{n+2}$ nu poate fi pătrat perfect.

Prof. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

G:433. Determinați numerele naturale x,y,z ştiind că $\frac{x}{9}=\frac{y}{18}=\frac{12}{z}$.

Prof. **Doina şi Mircea Mario Stoica**, Arad

$\boxed{\text{G:434}}$. Aflați toate numerele de forma $\overline{abca}$ care verifică simultan condițiile :

a) $\overline{abca} \,\vdots\, 11$

b) Restul împărțirii numărului $\overline{abca}$ la numărul $\overline{ab}$ este un număr cu trei divizori .

c) b <a .

***Prof.* Şerban George-Florin**, Brăila

$\boxed{\text{G:435}}$. Dacă $x_1, x_2, ..., x_{2010} \in \mathbb{R}^*$ şi $\frac{x_1 + x_2}{x_1 + 2010x_2} = \frac{x_2 + x_3}{x_2 + 2010x_3} = ... = \frac{x_{2010} + x_1}{x_{2010} + 2010x_1}$ atunci avem $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_{2010}$.

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

$\boxed{\text{G:436}}$. Determinați cel mai mic număr natural n ştiind că împărțit la 108, 75, şi 90 se obțin resturile 57, 63 respectiv 48.

***Prof.* Gheorghe Dârstaru**, Buzău

$\boxed{\text{G:437}}$. a) Calculați numărul $m = \frac{2014^{n+3} - 2014^{n+1}\left(1 + 2013 \cdot 2015\right)}{2014^n \cdot 2013 \cdot 2015} + 161$;

b) Să se afle numerele $\overline{xyz}$ scrise în baza zece ştiind că $\frac{m}{a \cdot b + c \cdot \left(a + c^7\right)} \in \mathbb{N}$, unde m este numărul determinat la a).

Prof. Iuliana Traşcă, Olt

$\boxed{\text{G:438}}$. Determinați o infinitate de cvadruple (a, b, c, d) care sunt soluții ale ecuației $a^2 + b^3 + c^4 = d^5$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

$\boxed{\text{G:439}}$. Calculați câtul împărțirii numărului $a = \overline{1i,01} + \overline{4i,05} + \overline{7i,09} + ... + \overline{43i,57}$ la 3.

***Prof.* Sorina Văcărean**, Cluj-Napoca

$\boxed{\text{G:440}}$. Fie A produsul primelor 100 de numere naturale nenule. Determinați numărul B^2 astfel încât B^2 să fie maxim, să dividă numărul A şi să nu fie divizibil cu 6.

***Prof.* Petre Păunescu**, Roşiorii de Vede

$\boxed{\text{G:441}}$. În pătratul ABCD, se consideră punctele E pe (AB) şi F pe (BC), astfel încât, $\frac{AE}{EB} = \frac{BF}{FC} = \frac{1}{2}$. Arătați că $m(\widehat{ADE}) + m(\widehat{BEF}) = 45^0$.

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

$\boxed{\text{G:442}}$. Arătați că dacă măsurile unghiurilor unui triunghi sunt direct proporționale cu trei numere naturale cu proprietatea că unul dintre ele este egal cu media aritmetică a celorlalte două , atunci triunghiul are un unghi cu măsura de 60^0.

***Prof.* Simion Marin,** Rm. Sărat

▪ Clasa a VII-a

$\boxed{\text{G:443}}$. Găsiți $x \in \mathbb{N}$ astfel ca $x^2 + 2x + 2012$ să fie pătrat perfect.

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu,** Craiova

$\boxed{\text{G:444}}$. Arătați că $|x - 2009| + |x - 2010| + |2x - 4015| \geq 4, \forall x \in \mathbb{R}$.

***Prof.* Doina şi Mircea Mario Stoica**, Arad

$\boxed{\text{G:445}}$. Dacă a, b şi c sunt numere reale pozitive să se arate inegalitatea :

$(a + b + c)^2 \geq 2\sqrt{2}(ab + bc + ac)$.

***Prof.* Şerban George-Florin**, Brăila

$\boxed{\text{G:446}}$. Fie $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\sqrt{\frac{25}{x^2+1}}\in\mathbb{N}\right\}$. Determinați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea A, acesta să fie irațional şi strict negativ. ***Prof.* Sorina Văcărean**, Cluj-Napoca

$\boxed{\text{G:447}}$. Folosind formule de calcul prescurtat, descompuneti în factori numărul $A=\sqrt{420}$.

***Prof.* Petre Păunescu**, Roşiorii de Vede

$\boxed{\text{G:448}}$. În triunghiul ABC, $[AM]$ este mediană, iar $P\in(AB)$ astfel încât $\frac{AP}{PB}=\frac{1}{2}$. Dacă $AM\cap CP=\{N\}$,arătați că $A_{ABC}=4\cdot A_{CMN}$. ***Prof*. Gheorghe Dârstaru**, Buzău

$\boxed{\text{G:449}}$. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu aria a (u.a.) şi punctele M, respectiv N cu $M\in(AB), N\in(BC)$ astfel încât aria triunghiului MND este b (u.a). Determinați minimul sumei $AM+CN$ în cazul în care $a>2b$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

$\boxed{\text{G:450}}$. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC, în care bisectoarea (BD) este cât (DC) şi $BA+AD=BC$. ***Prof.* Constantin Apostol**,Rm. Sărat

$\boxed{\text{G:451}}$. Să se arate că nu există numere naturale nenule şi distincte pentru care suma inverselor cuburilor lor să fie egală cu $\frac{5}{4}$. ***Prof.* Gheorghe Ghiță**, Buzău

$\boxed{\text{G:452}}$. Arătați că în orice trapez isoscel ortodiagonal (cu diagonalele perpendiculare) , avem relația : h $=\frac{d\sqrt{2}}{2}$, unde h este lungimea înălțimii iar d lungimea diagonalei trapezului.

***Prof.* Marin Simion**, Rm. Sărat

▪ Clasa a VIII-a

$\boxed{\text{G:453}}$. Dacă numerele reale nenule a,b, c, d verifică relațiile $a+b+c+d=16$ şi $ab+ac+ad+bc+bd+cd=96$, să se arate că $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ este număr natural.

***Prof.* Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

$\boxed{\text{G:454}}$. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $a(a-6)+2b(b+4)+17=0$. Să se calculeze $2\cdot(a-b)^{2015}+(b-a)^{2015}$.

***Prof.* Adrian Stan**,Buzău

$\boxed{\text{G:455}}$. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{1}{x^2+4x}+\frac{1}{x^2+12x+32}+\frac{1}{x^2+20x+96}=\frac{3}{13}$.

Prof. Gheorghe Dârstaru, Buzău

$\boxed{\text{G:456}}$. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x+2010$. Determinați funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(g(x))=-7x+4020$.

Prof. Mircea Mario Stoica, Arad

$\boxed{\text{G:457}}$. Dacă x,y şi z sunt numere reale nenule astfel încât $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$ atunci arătați că: $\left(x^{2011}+y^{2011}+z^{2011}\right)(x+y+z)^{2013}=\left(x^{2013}+y^{2013}+z^{2013}\right)(x+y+z)^{2011}$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

$\boxed{\text{G:458}}$. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{x-2}{2016}\right]+\left[\frac{x-4}{2016}\right]+\left[\frac{x-6}{2016}\right]+...+\left[\frac{x-2014}{2016}\right]=1$. unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x. **Prof. Gheorghe Ghiță,** Buzău

G:459. Arătați că $\dfrac{26\underbrace{99...9}_{3n}}{2\underbrace{99...9}_{n}} \in \mathbb{N}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. *Prof.* **Şerban George-Florin**, Brăila

G:460. Pe perpendiculara în A, pe planul dreptunghiului ABCD, se consideră punctul M. Ştiind că laturile triunghiului MBD sunt proporționale cu numerele $\sqrt{34}$, $\sqrt{25}$ şi $\sqrt{41}$ şi că $MC = 15\sqrt{2}$ cm, calculați dimensiunile dreptunghiului şi lungimea segmentului (MA).

Prof. **Constantin Apostol**, Rm. Sărat

G:461. Pe planul triunghiului ABC având m($\widehat{A}$) = 90^0, AB = 6 cm şi m($\widehat{C}$) = 30^0 se ridică perpendiculara AM. Să se determine lungimea acestei perpendiculare ştiind că măsura unghiului diedru format de planele (MBC) şi (ABC) este de 60^0. *Prof.* **Marin Simion**, Rm. Sărat

▪ Clasa a IX-a

L:307. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{(m+1)x^2+(2m-1)x+m-1}{x^2+2mx+m+1}$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)\geq 0$ pentru orice x număr real. *Prof.* **Adrian Stan**, Buzău

L:308. Dacă în triunghiul ABC avem m(A) ≤ m(B) ≤ m(C) şi $a^2 + b^2 = 2Rc$ să se calculeze m(C).

Prof. **Marcel Chiriță**, Bucureşti

L:309. Arătați că în orice triunghi ABC, are loc inegalitatea $\sum \dfrac{a^2}{p-a} \geq 4p$.

Prof. **dr. Mihály Bencze, Braşov**

L:310. Dacă: $2^a = 3{,}3^b = 4{,}4^c = 5{,}5^d = 6{,}6^e = 7{,}7^f = 8$, cât este valoarea produsului $abcdef$?

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

L:311. Să se arate că în orice triunghi ABC, are loc inegalitatea: $\cos\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{C}{2}\leq\sqrt{\dfrac{3(r+4R)}{2R}}$, cu notațiile cunoscute. (In legătură cu problema C;2742, GM nr. 4/2004,Dinu Teodoresu, Pucioasa)

Prof. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

L:312. În interiorul triunghiului ABC se consideră un punct K. Arătați că dacă:

$A(\Delta BKC)=\dfrac{R^2\sin 2A}{2}$ şi $A(\Delta CKA)=\dfrac{R^2\sin 2B}{2}$, atunci K aparține mediatoarei segmentului $[AB]$.

Prof. **Constantin Rusu**, Rm. Sărat

L:313. Să se arate că există $x\in\mathbb{R}$, pentru care $\dfrac{\cos 25^0 + x\cdot\sin 25^0}{\cos 35^0}\in\mathbb{N}$.

Prof. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

L:314. Fie triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A = 90^0)$ şi l_a, m_a, h_a sunt bisectoarea , mediana respectiv înălțimea corespunzatoare ipotenuzei . Dacă $l_a^2 \geq m_a\cdot h_a$ atunci ΔABC este dreptunghic isoscel .

Prof. **Şerban George-Florin ,** Brăila

▪ Clasa a X-a

L:315. Să se arate că dacă a_1, a_2, a_3, a_4 sunt termenii unei progresii aritmetice cu termenii strict pozitivi şi cu raţia pozitivă atunci : $\frac{1}{\sqrt[n]{a_1}}+\frac{1}{\sqrt[n]{a_4}}<\frac{1}{\sqrt[n]{a_2}}+\frac{1}{\sqrt[n]{a_3}}$, oricare ar fi $n\in N$, $n \geq 2$.

***Prof.* Chiriţă Marcel**, Bucureşti

L:316. Pentru $p\in\mathbb{N}^*$, se consideră suma $S(p)=\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}\cdot C_{n+3}^{k+3}$. Să se rezolve ecuaţia $S(p)+2p=15$.

Prof. Ionel Tudor, Prof. Stelian Pişcan, Călugăreni, Giurgiu

L:317. Dacă şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este definit prin $a_0=1$, $a_{503}=0$ şi pentru orice $n\geq 1$, termenii a_{n-1}, a_1a_n şi a_{n+1} sunt în progresie aritmetică, atunci determinaţi a_{2012}.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

L:318. Fie $a,b,c\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ astfel încât $arctga+arctgb+arctgc=\frac{\pi}{2}$.

Să se demonstreze că : $8abc\geq 3\sqrt{3}(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)$.

***Prof.* Constantin Rusu,** Rm. Sărat

L:319. Dacă $x_i,\alpha_i>0, i=\overline{1,n}, n\in N^*, m\in N, m\geq 3$, atunci are loc inegalitatea:

$$\frac{x_1^m}{\alpha_1}+\frac{x_2^m}{\alpha_2}+...+\frac{x_n^m}{\alpha_n}\geq\frac{(x_1+x_2+...+x_n)^m}{\left(\sqrt[m-1]{\alpha_1}+\sqrt[m-1]{\alpha_2}+...+\sqrt[m-1]{\alpha_n}\right)^{m-1}}.$$

***Prof.* Gheorghe Ghiţă,** Buzău

L:320. Să se arate că $\sqrt{3n+5}+\sqrt{5n+15}\leq 2\sqrt{4n+10}, \forall n\in\mathbb{N}$.

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

L:321. Fie $a,b\in\mathbb{R}_+$ cu suma 1. Arătaţi că $a^2\cdot b\leq\frac{4}{27}$, precizând când are loc egalitatea.

***Prof.* Constantin Dinu**, Buzău

▪ Clasa a XI-a

L:322. Determinaţi matricile $A,B\in M_n(Z)$ pentru care $A+B=AB$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

L:323. Să se studieze convergenţa şirului : $a_n=\frac{(-1)^n n^2+1}{n^2+(-1)^n n^\alpha+1}$, $\alpha\in R$.

***Prof.* Constantin Rusu,** Rm. Sărat

L:324. Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea $x_n\rangle 0$ şi

$$x_1+x_2+x_3+....+x_n=\frac{x_n(x_n+2)-x_1}{4}, \forall n\geq 1.$$

a) Să se determine $x_1,x_2,x_3,.....x_n$;

b) Să se arate că $\sqrt{x_1+x_2+x_3+....+x_n+1}\in\mathbb{N}$. ***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

L:325. Într-un sistem de coordonate XOY se consideră punctele $A(2;3)$, $B(-3;-2)$, $C(0;c), c\in\mathbb{R}$. Să se găsească poziţia punctului C astfel încât suma AC + BC să fie minimă.

***Prof.* Constantin Dinu**, Buzău

L:326. Dacă $A \in M_2(\mathbf{R})$ şi $\det(A + I_2) = \det(A^2 + I_2)$ atunci det(A) şi Tr(A) iau valori în intervale de aceeaşi lungime, unde det(A) şi Tr(A) sunt determinantul, respectiv, urma matricei A.

Prof. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

L:327. Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, inversabile şi care verifică relația $A + B = AB$ atunci $\left(A^{-1} + B^{-1}\right)^{-1} = I_n$.

Prof. **Marcel Chiriță**, Bucureşti

L:328. Fie $A \in M_2(\mathbb{Q})$ o matrice astfel încât $A^2 = O_2$. Arătați că $\forall B \in M_2(\mathbb{Q})$, numărul $N = \sqrt{\det(A + AB + BA)}$ este rațional.

Prof. **Florin Stănescu**, Găeşti, Dâmbovița

▪ Clasa a XII-a

L:329. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x + 5$.

a) Să se rezolve ecuația f(x)=0;

b) Arătați că există $a \in \mathbb{R}$ pentru care $f(1 + a) = f(1 - a) = 1$;

Prof. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

L:330. Calculați: $\int_0^1 x^{2013}(1 - x)^{2014}\,dx$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

L:331. Se consideră o funcție $f : [0, a] \to [0, \infty)$, derivabilă cu derivata continuă. Să se arate că există $c \in [0, a]$ astfel încât să avem: $\int_0^a f(x)dx \geq a\left(f(a) - \frac{af'(c)}{2}\right)$.

Prof. **Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

L:332. Să se calculeze integrala: $\int \frac{tg\,2015x \cos 2013x}{\cos x \cos 2014x}dx$, pe un interval I pe care are sens funcția de integrat.

Prof. **Gheorghe Ghiță,** Buzău

L:333. Ştiind că $a \rangle 0$ şi $c \langle 0$, stabiliți care este numărul de rădăcini reale pozitive ale polinomului $P = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$.

Prof. **Constantin Dinu**, Buzău

L:334. Fie $f : [a; b] \to \mathbb{R}_+^*$ o funcție derivabilă de două ori, cu $f''(x)$ continuă şi pozitivă pe $[a; b]$. Dacă f este strict crescătoare, arătați că:

$$2\int_a^b \frac{\sqrt{f''(x)}}{f(x)}dx \leq \min\left\{\frac{f(b) - f(a)}{f(a)\cdot f'(a)} + \frac{f'(b) - f'(a)}{f(b)}, \frac{f(b) - f(a)}{f(a)\cdot f(b)} + \frac{f'(b) - f'(a)}{f'(a)}\right\}.$$

Prof. **Florin Stănescu**, Găeşti, Dâmbovița

L:335. Să se determine un polinom P(X) cu coeficienți întregi astfel încât $3^n + P(n)$ să fie divizibil cu 32 pentru orice $n \in N^*$.

Prof. **Marcel Chiriță**, Bucureşti

5. QUICKIES

A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader's name, full address, and an e-mail address. Submited solutions should arrive before September 30, 2014.

PROPOSALS - QUICKIES

Q9. Proposed by Nela Ciceu, Roşiori, Bacău, Romania.
Let A,B,C be three collinear points and M be any point in the plane of the points A,B,C. The symmedian from A in triangle ABM intersect MB in the point P, and the symmedian from A in triangle ACM intersect MC in the point Q. Prove that the line PQ passes through a fixed point.

Q10. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, and Neculai Stanciu, Romania.
If $a,b,x,y \in R_+^*$ and $m \in R_+$, then prove that $\frac{x^{m+2}}{(ax+by)^m} + \frac{y^{m+2}}{(ay+bx)^m} \ge \frac{x^2+y^2}{(a+b)^m}$.

Q11. Proposed by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania.
Prove that if a,b and c are the lenghts of the sides of a triangle, then

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} - 2\left[\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{c+a}\right)^2\right] \ge 3.$$

Q12. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania.
Prove that in all acute triangle ABC, holds

$$\sqrt{3}\left(\sum tgA\right)\left(\sum ctgA\right) \ge 9\sqrt{3} \ge 4\left(\sum \sin A\right)\left(\sum \cos A\right).$$

SOLUTIONS – QUICKIES

Q5. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, and Neculai Stanciu, Romania.
Show that: if $m \in [0,\infty)$, $x,y,z,t \in (0,\infty)$, then in any triangle ABC, with usual notations holds the inequality $\sum_{cyclic} \frac{\left(xa^2 + ym_b^2\right)^{m+1}}{\left(zh_c^2 + th_a^2\right)^m} \ge \frac{(4x+3y)^{m+1}}{3^{m-\frac{1}{2}}(z+t)^m} S$.

Solution of Q5 by authors. By $h_a \le m_a, h_b \le m_b, h_c \le m_c$, *J. Radon's* inequality and $\sum_{cyclic} m_a^2 = \frac{3}{4}\sum_{cyclic} a^2$ we obtain

$$\sum_{cyclic} \frac{\left(xa^2 + ym_b^2\right)^{m+1}}{\left(zh_c^2 + th_a^2\right)^m} \ge \sum_{cyclic} \frac{\left(xa^2 + ym_b^2\right)^{m+1}}{\left(zm_c^2 + tm_a^2\right)^m} \overset{RADON}{\ge} \frac{\left(\sum_{cyclic}(xa^2 + ym_b^2)\right)^{m+1}}{\left(\sum_{cycclic}(zm_c^2 + tm_a^2)\right)^m} =$$

$$= \frac{\left(x\sum_{cyclic} a^2 + y\sum_{cyclic} m_b^2\right)^{m+1}}{(z+t)^m\left(\sum_{cycclic} m_a^2\right)^m} = \frac{\left(x\sum_{cyclic} a^2 + \frac{3y}{4}\sum_{cyclic} a^2\right)^{m+1}}{\left(\frac{3}{4}\right)^m (z+t)^m \left(\sum_{cycclic} a^2\right)^m} = \frac{(4x+3y)^{m+1}\left(\sum_{cyclic} a^2\right)^{m+1}}{4^{m+1}\left(\frac{3}{4}\right)^m (z+t)^m \left(\sum_{cycclic} a^2\right)^m} =$$

$\frac{(4x+3y)^{m+1}\left(\sum_{cyclic} a^2\right)}{4\cdot 3^m\cdot(z+t)^m}$. By *Ionescu-Weitzenböck* inequality, i.e. $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$ and from above we obtain $\sum_{cyclic}\frac{\left(xa^2+ym_b^2\right)^{m+1}}{\left(zh_c^2+th_a^2\right)^m}\geq\frac{(4x+3y)^{m+1}}{3^{m-\frac{1}{2}}(z+t)^m}S$, q.e.d.■

Also solved by Marius Drăgan, Bucharest, Romania.

Q6. Proposed by Titu Zvonaru, Comăneşti, and Neculai Stanciu, Romania.

How many digit has the number 2^{96}?

Solution of Q6 by authors. Using the inequality $2^{10}=1024>1000=10^3$ we obtain that:

$$2^{96}=2^6\cdot\left(2^{10}\right)^9>64\cdot 10^{27}>10^{28}.$$

We have succesively:

$$2^{10}=1024<1025=5^2\cdot 41\Rightarrow 2^{20}<5^4\cdot 1681<5^4\cdot 1700=5^6\cdot 2^2\cdot 17$$
$$\Rightarrow 2^{18}<5^6\cdot 17\Rightarrow 2^{36}<5^{12}\cdot 289<5^{12}\cdot 290=5^{13}\cdot 2\cdot 29$$
$$\Rightarrow 2^{35}<5^{13}\cdot 29\Rightarrow 2^{70}<5^{26}\cdot 841<5^{26}\cdot 850=5^{28}\cdot 34$$
$$\Rightarrow 2^{69}<5^{28}\cdot 17<5^{28}\cdot 20=5^{29}\cdot 2^2\Rightarrow 2^{67}<5^{29}$$

and then $2^{67}\cdot 2^{29}<5^{29}\cdot 2^{29}\Rightarrow 2^{96}<10^{29}$.

From $10^{28}<2^{96}<10^{29}$ we deduce that 2^{96} has 28 digits.■

Also solved by Marius Drăgan, Bucharest, Romania.

Q7. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania.

Solve in positive real numbers the equation

$$\log_2^2\left(x+\frac{4}{x}\right)+x+\frac{4}{x}=(-x^2+4x-2)^2+2^{-x^2+4x-2}.$$

Solution of Q7 by Titu Zvonaru and Daniel Văcaru, Romania.

Using the function $f(t)=2^t+t^2, t>0$, the given equation becomes $f\left(\log_2\left(x+\frac{4}{x}\right)\right)=f(-x^2+4x-2)$ and because the function f is increasing ($f'(t)>0$ for any $t>0$), so f is injective we obtain $\log_2\left(x+\frac{4}{x}\right)=-x^2+4x-2$. We have $x+\frac{4}{x}\geq 4$ and $-x^2+4x-2\leq 2\Leftrightarrow(x-2)^2\geq 0$. Hence, we find one solution, and this is $x=2$.■

Also solved by author.

Q8. Proposed by Babis Stergiou, Greece

Find two even and continuous functions $f,g:R\to R$ with $f(1)=g(1)$ and in addition with the properties: $3\int_0^x f(t)dt=xg(x)$ and $3\int_0^x g(t)dt=xf(x)$ for all $x\in R$.

Solution of Q8 by Daniel Văcaru, Piteşti, Romania

Consider two primitives $F:R\to R, G:R\to R$ such that $F'(x)=f(x), G'(x)=g(x)$, $\forall x\in R$ and $F(0)=G(0)=0$. So, $3F(x)=xg(x), 3G(x)=xf(x), \forall x\in R$. Therefore we get $3F(x)f(x)=3G(x)g(x)$ and multiplying by $\frac{2}{3}$ we deduce that $(F^2)'(x)=(G^2)'(x)$, so $F^2(x)-G^2(x)=k, \forall x\in R$. Then $(F(x)-G(x))(F(x)+G(x))=0$, which yields $F(x)=G(x)\Rightarrow f(x)=g(x)\Rightarrow 3F(x)=xf(x)\Rightarrow f(x)=g(x)=x^2, \forall x\in R$

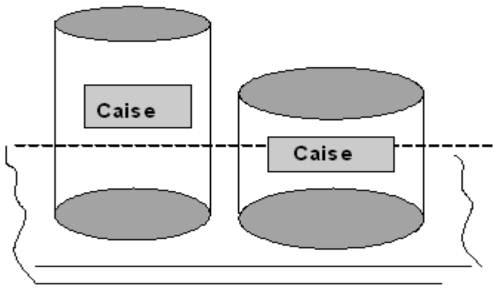
Also solved by Marius Drăgan, Bucharest and Babis Stergiou, Greece.

**"Nimic nu este mai agil ca gândul ,
el te poartă prin întregul univers."
Thales**

6. Caleidoscop matematic

1. Aranjează cele patru fructe în toate modurile posibile. Câte astfel de moduri există ?

2. Două borcane cu gem de caise de aceeaşi calitate stau pe raftul unui magazin. Borcanul mai înalt este cu două treimi mai înalt decât celălalt şi are diametrul jumătate din diametrul borcanului mai scurt. Dacă borcanul mai înalt costă 5 lei iar cel mai scurt, 9 lei, care cumpărătură este mai avantajoasă ?

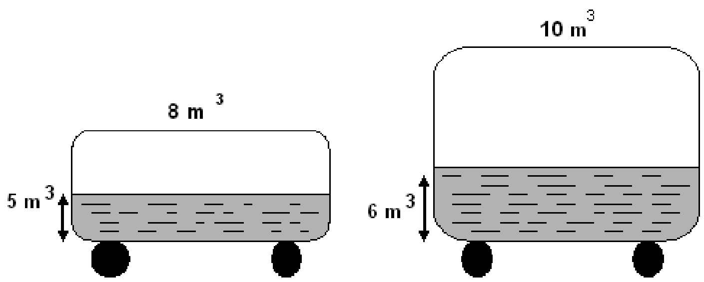


3. Din vârful A al pătratului ABCD de latură 16 m, pleacă simultan un melc şi o furnică. Dacă viteza melcului este de 2,5 cm/s şi a furnicii de 320 mm/s, să se găsească ce distanţă va fi între cei doi după 3 minute.

4. Am mai multe pixuri care scriu colorat: 3 cu roşu, 4 cu albastru, 5 cu verde şi 2 cu negru. În câte moduri pot scrie o scrisoare doar cu două culori.

5. Într-o grădină zoologică trăiesc 4 lei, 5 tigri şi 6 pantere. Dacă vrem să alegem un leu, un tigru şi două pantere, în câte moduri o putem face ?

6. Două cisterne au capacitatea de 8 m^3, respectiv 10 m^3 şi sunt încărcate cu 5 m^3, respectiv 6 m^3 de benzină pentru a fi transportate la o staţie. Să se determine care cisternă este mai bine folosită în raport cu capacitatea sa.



7. Cinci bărbaţi îşi lasă la garderobă pălăriile care seamănă între ele însă doamna de la garderobă nu le aranjează în ordinea în care le-a primit. Care este probabilitatea ca fiecare dintre cei cinci să-şi primească propria pălărie ?

8. Avem un dulap cu opt sertare încuiate iar cheile nu sunt numerotate ca să ştim cărui sertar îi corespunde fiecare cheie. Câte încercări trebuie să facem pentru a deschide toate sertarele?

9. Într-un şifonier se află 18 mănuşi: 4 perechi negre, 3 perechi verzi şi 2 roşii. Pe întuneric, câte mănuşi trebuie să alegi ca să fii sigur că printre acestea se află cel puţin două de aceeaşi culoare ?

Răspunsuri: 1) 24; 2) borcanul mai scurt; 3) 1,9 m; 4) 6 situaţii; 5) 300 moduri; 6) prima cisternă; 7) $P=\frac{1}{120}$; 8) 36 încercări; 9) 4 mănuşi; (Rezolvările detaliate vor fi puse în numărul următor.)

„ Şcoala va fi şcoală când omul va fi om şi statul va fi stat ”.
Mihai Eminescu

7. Poşta redacţiei

Dragi cititori, elevi şi profesori, a apărut **numărul 13** al revistei de matematică „ **SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noştri, şi care, sperăm noi, va aduna tot mai mulţi elevi şi profesori împreună, din judeţul Buzău şi nu numai, pentru a face din obiectul matematicii o activitate performantă.

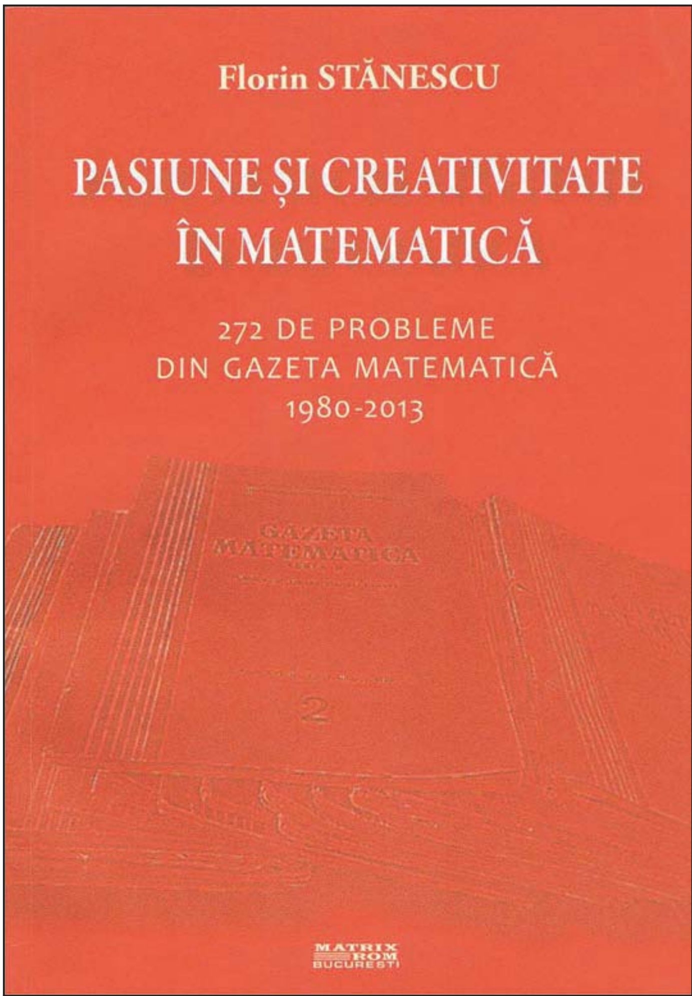
Profesorii şi elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciţii şi probleme cu enunţ şi rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătăţii calitatea acestei reviste, o pot face trimiţând materialele membrilor colectivului de redacţie sau pe adresa de e_mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate(**salvate în Word 2003**) , fie scrise de mână şi scanate. **Materialele primite trebuie să fie originale şi să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise şi către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparţine redacţiei.

Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările şi comenzile pentru **numărul 14** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **1 Octombrie 2014**. Vă urăm succes şi vă aşteptăm.

Rubrica rezolvitorilor de probleme

Şcoala cu clasele I-VIII, Smârdan, Brădeanu
Clasa V-a: 15p. Anghel Mihaela; 9p. Neagu Alina, Furtună Aurelian, Grigore Denisa, Zoican Bogdan;
Clasa a VI-a: 19p. Şerban Larisa, Drugea Elena, Florea Mădălina, Andrei Florentina, Oprea Elisa.
Clasa a VII-a: 20p. Furtună Elena, Neagu Andra, Stanciu Catrinel, Ilie Adina. **Prof. Stanescu Ion.**
Şcoala cu clasele I-VIII, “Tristan Tzara” Moineşti, Bacău
Clasa a V-a : 18p. Paduraru Catalin, Dobrovat Alina, Munteanu Diana, Ailincai iulian, Ciubotariu Costin.
Clasa a VI-a: 45p.Maziliu Alexandra, Gherman Andrada, Faraoneanu Madalina.
Clasa a VII-a : 55p. Munteanu Gheorghe, Lila Ionut. **Prof. Cornelia Gurău;**
Şcoala cu clasele I-VIII, nr. 2 Cugir, Alba
Clasa a V-a: 25p**.** Bel Luana;
Clasa a VII-a: 65p. Codrea Maria, Codrea Marian, Muntean Ioan, Molodeţ Dragoş, Sideriaş Alexandru;
Prof. Mariana Mitea.
Şcoala cu clasele I-VIII “Gh. Popescu “ Mărgineni –Slobozia, Olt
Clasa a VII-a: 53p. Traşcă Ionuţ- Vlăduţ, Ene Daniela- Iuliana, Vochin Ioan – David, Moisescu Denis, Costea Nicoleta, Nedelea Adrian Ilie, Mămularu Cristina, Fuior Daniela; **Prof. Iuliana Traşcă.**
Liceul Tehnologic „Costin Neniţescu”, Buzău
Clasa a X-a :35p. Stroe Ionuţ, Blăjanu Ioana, Dogaru Ana Maria, Croitoru Andrei.
Clasa a XI-a: 59p. Tureac Andrei, Stoian Cristina, Sterpu Denisa, Sandu Cristina, Pirnog Georgiana, Ciopec Corina, 53p. Dobrin Iulian, Dragomir Ionuţ , Picu Elena Daniela,; **Prof. Stan Adrian.**
Şcoala Şerban Cioculescu, Găeşti, Dâmboviţa.Clasa a VII-a: 10p. Maierean Alex, Petre Adriana, Tudor Georgiana, Mihalache Alexandra, Badea Valeria;
Clasa a VIII-a: 15p. Păun Alexandra, Bucur Diana, Serafim Laurenţiu; **Prof. Florin Stănescu.**

Apariţii editoriale



Cartea "Pasiune şi creativitate în matematică" scrisă de bine cunoscutul profesor Florin Stănescu, autor a numeroase probleme şi articole în revistele de specialitate, încântă ochii şi dezvoltă simţurile gândirii prin realizarea unei sinteze bine structurată a unora dintre cele mai frumoase probleme de matematică personale sau a unor autori celebri, apărute pe o perioadă de 30 de ani în Gazeta Matematică. Autorul oferă soluţii ingenioase problemelor apărute aici de nivel gimnazial sau liceal insistând pe nivelul liceal şi pe metode care să suscite atenţia cititorului.

Apărută la Editura Matrix Rom din Bucureşti în anul 2013, sub atenta îndrumare a domnului prof. univ. dr. habil. Cristinel Mortici, lucrarea de faţă este una deosebită, remarcându-se prin claritatea explicaţiilor şi stilul de lucru detaliat al domnului profesor.

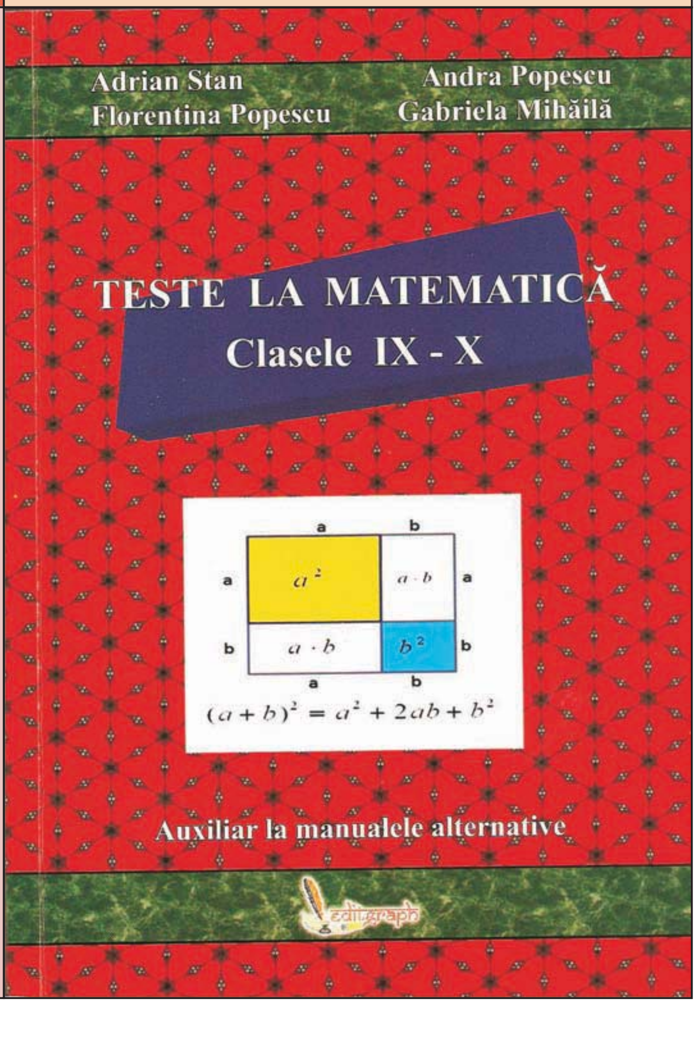
Pentru mai multe informaţii, domnul profesor vă stă la dispoziţie la adresa de e_mail:
florin.florinstanescu@yahoo.com

Cartea Teste la matematică scrisă de profesorii Adrian Stan, Andra Popescu, Florentina Popescu şi Gabriela Mihăilă, apărută în 2013 în condiţii excelente la Editura Editgraph, reuneşte sub forma unor teste, cunoştinţele la matematică din clasele a IX-a şi a X-a.

Prima parte a cărţii este alcătuită dintr-o sinteză completă de cunoştinţe teoretice la care elevii pot face oricând apel atunci când încearcă să rezolve problemele.

Partea a doua conţine teste din materia de clasa a IX-a şi a X-a de nivel mediu şi peste mediu, organizate pe fiecare lecţie în parte pentru a fi un sprijin pentru elevi în aprofundarea lecţiei respective întrucât la sfârşitul cărţii există şi rezolvarea completă a testelor.

Partea a treia conţine un număr de 50 de teste recapitulative pentru bacalaureat-subiectul I, putând fi de folos atât elevilor de clasa a X-a care fac o recapitulare finală cât şi elevilor de clasa a XII –a care se pregătesc pentru bacalaureat.



REVISTA SCLIPIREA MINȚII

NR. 13 ANUL VII - 2014

Cuprins

LEI 10 RON

ISSN 2247 – 6601

ISSN-L 2247 – 6601