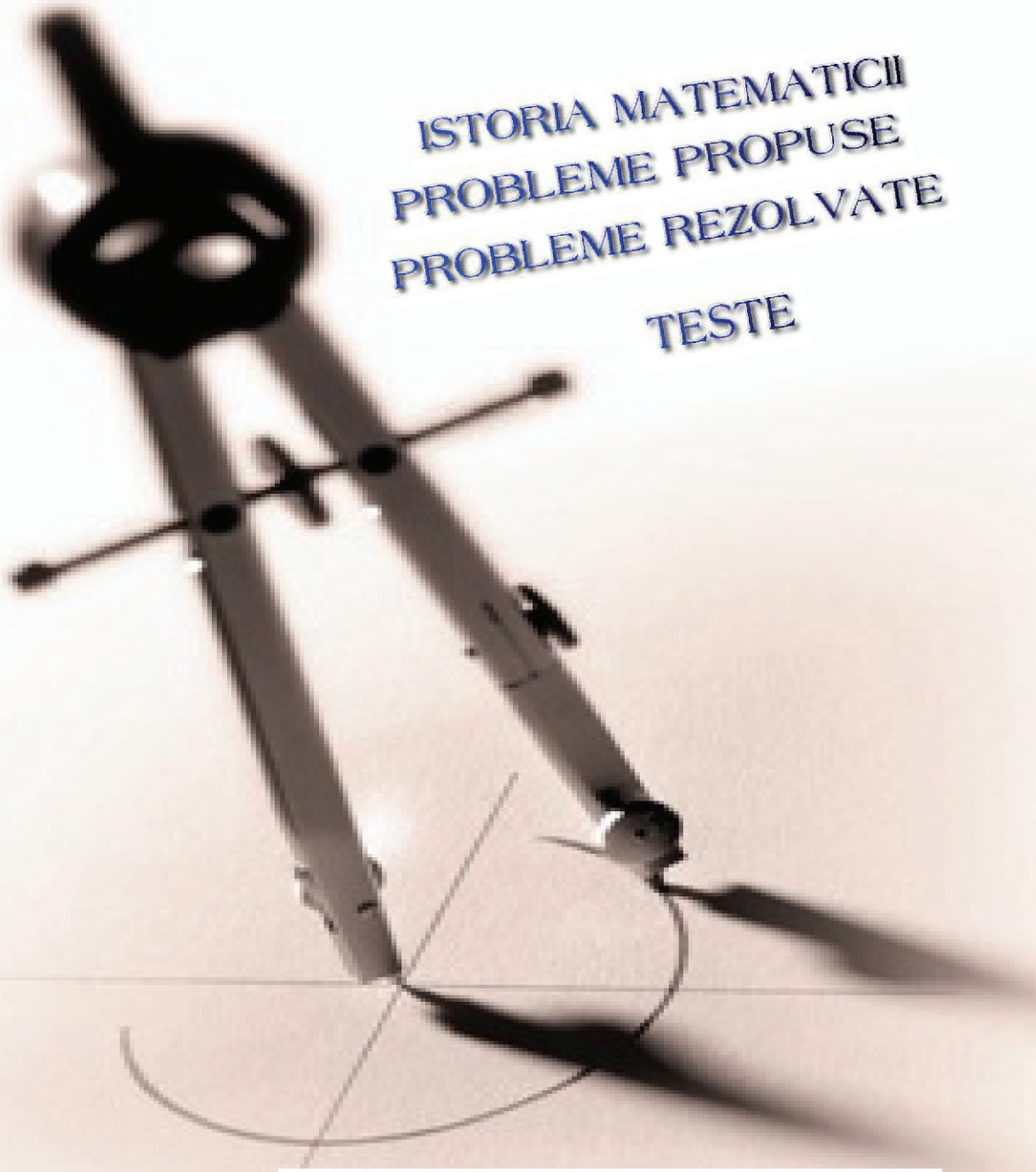
SCLIPIREA MINTII

REVISTĂ NATIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICĂ; PUBLICAȚIE SEMESTRIALĂ, AN VI, NR XI, 2013

SM



ISTORIA MATEMATICII
PROBLEME PROPUSE
PROBLEME REZOLVATE
TESTE

SM

CALEIDOSCOP MATEMATIC

Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

LICEUL TEHNOLOGIC " COSTIN NENIŢESCU ", BUZĂU

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601

SCLIPIREA MINTII 11

Revistă națională de cultură matematică, publicație semestrială, An VI, Nr. XI, APRILIE 2013, BUZĂU

COLECTIVUL DE REDACȚIE

- **Membrii onorifici:**

Constantin Apostol - Preşedinte de onoare

Constantin Rusu - Preşedinte de onoare a Filialei Ramnicu Sărat a Societății de Ştiințe Matematice

Costică Ambrinoc - Preşedinte Filiala Ramnicu Sărat a Societății de Ştiințe Matematice

Lenuța Pîrlog - Preşedinte Filiala Buzău a Societății de Ştiințe Matematice

D. M . Bătinețu – Giurgiu **Titu Zvonaru**
Nicolae Ivăşchescu **Mihály Bencze**

- **Director:**
  Neculai Stanciu

- **Redactor şef:**
  Adrian Stan

- **Redactori principali:**
  Constantin Dinu **Ana Panaitescu**
  Andrei Octavian Dobre **Iuliana Traşcă**
  Gabriel Tica **Ion Stănescu** **Lăcrimioara Năstase**

- **Membri :**

Jose Luis Diaz – **Barrero,** Dana **Camelia,** Ciprian **Cheşcă,** Marcel **Chiriță,** Nela **Ciceu,** Ileana **Didu,** Gheorghe **Dârstaru,** Jamel **Ghanouchi, Gheorghe Ghiță,** Cornelia **Gurău,** Ionuț **Ivănescu,** Simion **Marin,** Marcela **Marin,** Mariana **Mitea,** Ion **Nedelcu,** Delia **Naidin,** Andrei **Nicolaescu,** Dumitru **Panțuru,** Valerica **Pometescu,** Claudia **Popa,** Florentina **Popescu,** Petre **Păunescu,** Valerica **Roşu,** Dumitru **Săvulescu,** Roxana **Stanciu,** Liviu **Smarandache,** Andrei **Spătaru,** Florin **Stănescu,** Ligia **Struțu,** Gheorghe **Struțu,** Doina **Stoica,** Mircea Mario **Stoica,** Laura **Tănase,** Ionel **Tudor,** Luca **Tuță,** Lucian **Tuțescu,** Ovidiu **Țâțan**

CUPRINS

ISTORIA MATEMATICII..... 1

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE..... 3

EXAMENE ŞI CONCURSURI..... 16

PROBLEME REZOLVATE..... 25

PROBLEME PROPUSE 37

CALEIDOSCOP MATEMATIC..... 45

POŞTA REDACȚIEI..... 47

SCLIPIREA MINTII

GÂNDEŞTE CORECT !

REDACȚIA
Liceul Tehnologic „ Costin Nenițescu”, Buzău , Strada Transilvaniei, Nr. 134, Cod. 120012, Tel. 0238725206
e-mail: ady_stan2005@yahoo.com
Coordonator proiect Adrian Stan
Vizitați www. liceulnenitescu.rdsbz.ro

„ Pentru oameni există un singur bun: ştiinţa;
şi un singur rău: neştiinţa ”.
Socrate

1. Istoria Matematicii

Matematica Antichităţii

de prof. Adrian Stan, Buzău

Pe câmpiile Africii, începând de acum 7 milioane de ani, evoluţia a dat naştere unei fiinţe care a învăţat să confecţioneze unelte, să stăpânească focul şi să comunice cu semenii săi printr-un limbaj articulat. Primele civilizaţii ale omenirii s-au dezvoltat de-a lungul marilor fluvii acum 4000 de ani î.e.n în China, acum 3000 de ani î.e.n în Egipt, Mesopotamia, America de Sud.

Inventarea roţii şi a plugului de sumerieni au produs mari schimbări în agricultură, în dezvoltarea aşezărilor şi în schimbul de produse agricole şi meşteşugăreşti. Oraşele tind să devină aşezări complexe cu zeci de mii de locuitori.

Acum circa 3500 – 3000 de ani î. e. n. , în Mesopotamia, sumerienii consideraţi pionierii matematicii au dezvoltat scrierea cuneiformă pe tăbliţe de lut, pe când în Egipt în aceeaşi perioadă aproximativ s-a dezvoltat scrierea hieroglifică pe blocuri de piatră, pe papirusuri sau pe materiale asemănătoare hârtiei.

Acum circa 3200 de ani î. e. n., sumerienii au dezvoltat un sistem de numeraţie în baza 60; Din acest sistem, astăzi ne-a rămas ora de 60 de minute şi minutul de 60 de secunde. Pentru a scrie numere mari, foloseau puteri ale lui 60, de exemplu, pentru numărul 9548 ei scriau: 2x3600 + 3x600 + 9x60 + 8 iar pentru numerele de la 1 la 10 aveau simboluri corespunzătoare.

Acum circa 2750 de ani î. e. n. hinduşii au dezvoltat un sistem de numărare în baza 10 având asociate o serie de simboluri pentru cifrele de la 1 la 9 inclusiv pentru cifra 0 dar pe care nu o foloseau. Cu trecerea anilor simbolurile se transformă câte puţin şi sunt preluate de cultura arabă începând cu secolul al XI- lea după care ajung şi în Europa începând cu secolul al XV- lea într-o formă foarte asemănătoare cu ceea ce avem noi astăzi.

Prima civilizaţie avansată a Europei a apărut acum 2650 de ani î.e.n. în Creta, minoicii nelăsând însă foarte multe dovezi în urmă.

O dată cu inventarea alfabetului grec (circa 750 î.e.n) derivat din cel fenician, cultura greacă va ajunge la apogeu prin dezvoltarea propriilor oraşe şi începerea colonizării ţărmurilor Mării Mediterane, a Mării Negre şi a Mării Egee. Inevitabil, în lupta pentru supremaţie a oraşelor greceşti li se va opune marile imperii ale perşilor, etruscilor, Cartaginei şi Romei. Bazele culturii occidentale provin de la marii gânditori şi artişti ai Antichităţii care au adus inovaţii în sculptură, medicină, filozofie şi politică. Grecii înfiinţează numeroase colonii cum ar fi Siracuza în Sicilia, Miletul pe Coasta Asiei Mici, Cirene în nordul Africii. Actualele oraşe Reggio, Taranto, Istanbul, Marsilia, Odesa, Napoli, Malaga, Monaco, Nisa, Crotone sunt foste colonii greceşti. În secolele VI- V, î.e.n. Atena devine cea mai mare putere maritimă ca urmare a construirii galerelor.

În anul 546 î. e. n a murit filozoful grec **Thales din Milet**(~ 635 – 546, î.e.n). Considerat părintele ştiinţelor, întemeietor al şcolii ioniene, acesta a prezis eclipsa de soare din anul 585 î. e. n şi a avut mai multe contribuţii în geometrie. Prin studierea mişcării stelelor, în astronomie a adus contribuţii utile pentru navigaţie. De asemenea, a desenat prima hartă a Greciei şi a determinat înălţimea piramidelor . Un discipol al său, **Anaximandru din Milet(~610-546, î.e.n)** va fi întemeietorul geografiei ştiinţifice. Ideile sale vor influenţa lumea ştiinţifică. El era de părere că Pământul ar fi fost la început acoperit de apă, iar continentele s-ar fi format prin uscarea treptată a acestei mări primordiale.

Insula grecească Samos devine un oraş înfloritor în timpul domniei dictatorului Policrate(~538 – 522,î.e.n), care atrage mulţi oameni de valoare printre care şi matematicianul **Theodorus**(cca 530 î.e.n) care conform izvoarelor greceşti ar fi folosit pentru prima dată tehnica şlefuirii pietrelor preţioase, metoda turnării bronzului prin procedeul de topire a cerii, precum şi folosirea echerului şi strungului, deşi se ştie că acestea ar fi apărut mai întâi în Orient.

În anii aproximativ 525 î. e. n. filozoful grec **Pitagora** (~ 584 - ~ 497, î.e.n) care era originar tot din Samos nu suportă tirania lui Policrat şi se refugiază în sudul Italiei, în Crotona, Italia de astăzi, unde înfiinţează celebra sa şcoală a pitagoreilor(hemiciclul lui Pitagora) în care conceptul de număr devine principiu fundamental în învăţătura lor şi anume: „ numărul este esenţa tuturor lucrurilor" afirmau ei. El a îmbinat cu succes sistemele de gândire ale filozofilor egipteni, perşi şi indieni aducând împreună cu discipolii săi importante contribuţii la dezvoltarea sistemului filozofic grecesc. Introducerea numărului iraţional $\sqrt{2}$ ca raport dintre diagonala şi latura pătratului a revoluţionat concepţia despre numere. De asemenea, discipolii săi cunoşteau media aritmetică, geometrică şi armonică a două numere, şi au conceput numerele perfecte, prietene, numerele pare şi impare, numerele prime, noţiunile de cel mai mic multiplu comun şi cel mai mare divizor comun. Şi în domeniul acusticii, pitagoreii au stabilit o serie de legi ale consonanţei muzicale.

Acum circa 380 î.e.n moare marele filozof **Democrit** discipol al lui **Leucip** şi al teoriei atomiste a lucrurilor şi anume că lucrurile sunt formate din atomi; Scoala sa materialistă se continuă cu **Epicur** care în jurul anului 306 î.e.n crează celebra sa şcoală filozofică.

Învenţia abacului a fost făcută probabil în sec. al XI-lea î.e.n în spaţiul indo- chinez, dar pentru prima dată a fost identificat pe o pictură de pe un vas ce datează din sec. al IV-lea î.e.n.

În anul 387 î.e.n **Platon**(427- 347, î.e.n) înfiinţează în Atena celebra sa şcoală filozofică , aşa numita Academia lui Platon pentru a preda discipolilor astronomie, biologie, matematică, politică, filozofie. Denumirile de aritmetică şi geometrie provin din scrierile sale. Unul dintre discipolii săi a fost şi **Aristotel** (384-322,î.e.n) un adevărat spirit enciclopedic, cel care avea să devină învăţătorul lui Alexandru cel Mare.

În anii aproximativ 300 î.e.n a fost realizată de către eruditul grec **Euclid** (~330-275,î.e.n) celebra sa colecţie de cărţi de matematică „ **Elementele**" , baza geometriei euclidiene, considerată cea mai citită carte ştiinţifică. Lucrarea sa strânge toate cunoştinţele de matematică ale vremii aducând şi o serie de descoperiri proprii. A introdus noţiunile de semidreaptă, tangentă, paralelogram, poliedru, a enunţat teorema catetei şi a înălţimii în triunghiul dreptunghic precum şi teorema reciprocă a lui Pitagora, a dat algoritmul de împărţire cu rest pentru numere naturale.

În anul 287 î.e.n se naşte la Siracusa, în Sicilia de astăzi, **Arhimede**(287-212,î.e.n), unul din cei mai importanţi matematicieni şi fizicieni ai Antichităţii. El construieşte maşinării diverse, defineşte legea pârghiilor construind astfel un scripete, determină greutatea specifică a metalelor, concepe un glob pământesc, are preocupări de calcul infinitezimal. A fost ucis în 212 î.e.n în asaltul oraşului de către romani.

În anul 260 î.e.n apare prima concepţie heliocentristă despre lume (Soarele în centrul Universului) la astronomul grec **Aristarh din Samos** (~310-230,î.e.n) care spre sfârşitul vieţii publică ideea că Pământul se învârte în jurul Soarelui, teză ce avea să fie dovedită de abia în secolul al XVI-lea de către **Nicolaus Copernic**(1473-1543). După uciderea regelui Ptolemeu al VII-lea, noul rege Ptolemeu al VIII-lea expulzează din Alexandria pe Aristotel şi pe mulţi alţi învăţaţi, contribuind astfel la decăderea culturală a Alexandrei.

În anul 240 î.e.n. , matematicianul grec **Eratostene** calculează pentru prima dată în Alexandria circumferinţa Pământului de 39690 Km foarte aproape de cea reală 40075 km. Considerat unul din cei mai învăţaţi din timpul său, este numit şeful Bibliotecii din Alexandria şi responsabil cu educaţia princiară de la curtea faraonului Ptolemeu al III-lea . De asemenea, a avut contribuţii importante în obţinerea numerelor prime, în geografie şi astronomie.

În anul 170 î.e.n matematicianul şi astronomul **Hypsicles din Alexandria** introduce în geometrie împărţirea cercului în 360 de grade, studind poliedrele el pregăteşte calea pentru trigonometrie.
În anul 179 î.e.n, matematicianul grec **Nicomedes** introduce noţiunea de concoidă (curbă) iar în anul 138 î.e.n astronomul şi geograful **Hiparh** a introdus conceptele de longitudine şi latitudine în stabilirea poziţiei unui obiect.

Bibliografie:
1.Cronica ilustrată a omenirii, Editura Litera,2011, Bucureşti,

Prof. , Liceul Tehnologic „ Costin Neniţescu", Buzău

Continuarea materialului se poate citi pe **www.mateinfo.ro** în revista online mateinfo din Aprilie.

„ Dacă tu ai un măr şi eu am un măr şi facem schimb de mere, atunci tu şi eu vom avea în continuare un măr. Dar dacă tu ai o idee şi eu am o idee şi le schimbăm între ele atunci fiecare dintre noi va avea două idei."

George Bernard Shaw

2. Articole si note matematice

Observații asupra unor noțiuni din geometria triunghiului (III)

de prof. Constantin Apostol

În continuarea articolului din numărul 9, se analizează mai departe existența triunghiurilor cu laturile respectiv, congruente cu înălțimile unui triunghi dat.

Fie un triunghi ABC, în care notăm cu **a**, **b**, **c**, lungimile laturilor (BC), (AC) şi, respectiv, (AB) şi cu h_a, h_b, h_c, lungimile înălțimilor din A, din B şi, respectiv, din C.

Vom stabili, în ce condiții, numerele h_a, h_b, h_c pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

Dacă notăm cu **S**, aria triunghiului ABC, vom putea scrie : $S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$, de unde deducem :

$h_a = \frac{2S}{a}$, $h_b = \frac{2S}{b}$, $h_c = \frac{2S}{c}$. Pentru a exista un triunghi ale cărui laturi să aibă lungimile h_a, h_b, h_c,

trebuie ca $\begin{cases} h_a < h_b + h_c \\ h_b < h_c + h_a \\ h_c < h_a + h_b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2S}{a} < \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} \\ \frac{2S}{b} < \frac{2S}{c} + \frac{2S}{a} \\ \frac{2S}{c} < \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} < \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} < \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \\ \frac{1}{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc < ac + ab \\ ac < ab + bc \\ ab < bc + ac \end{cases}$ **(1) .** Aşadar, pentru a exista triunghiul precizat, trebuie să aibă loc inegalitățile (1) .

Exemple :1) Fie triunghiul ABC, cu $BC = a = 2$, $AC = b = 3$, $AB = c = 4$. Acest triunghi există, căci, $\begin{cases} a < b + c \\ b < c + a \\ c < a + b \end{cases}$ adică, $\begin{cases} 2 < 3 + 4 = 7 \\ 3 < 4 + 2 = 6 \\ 4 < 2 + 3 = 5 \end{cases}$ .Verificăm dacă au loc inegalitățile (1) : $\begin{cases} 3 \cdot 4 < 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 4 < 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 < 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \end{cases}$, adică,

$\begin{cases} 12 < 8 + 6 = 14 \\ 8 < 6 + 12 = 18 \\ 6 < 12 + 8 = 20 \end{cases}$. Deducem că există un triunghi ale cărui laturi sunt congruente cu înălțimile triunghiului ABC.

2) Considerăm triunghiul ABC, cu BC = a = 2, AC = b = 9, AB = c = 10 .

Acest triunghi există, deoarece, $\begin{cases} a < b + c \\ b < c + a \\ c < a + b \end{cases}$, adică, $\begin{cases} 2 < 9 + 10 = 19 \\ 9 < 10 + 2 = 12 \\ 10 < 2 + 9 = 11 \end{cases}$

Verificăm dacă au loc inegalitățile (1) :

$\begin{cases} 9 \cdot 10 < 2 \cdot 10 + 2 \cdot 9 \\ 2 \cdot 10 < 2 \cdot 9 + 9 \cdot 10 \\ 2 \cdot 9 < 9 \cdot 10 + 2 \cdot 10 \end{cases}$, adică, $\begin{cases} 90 < 20 + 18 = 38 \text{ (ceea ce este fals)} \\ 20 < 18 + 90 = 108 \\ 18 < 90 + 20 = 110 \end{cases}$.

Deoarece, inegalitățile (1) nu sunt verificate, concluzionăm că nu există un triunghi ale cărui laturi să fie congruente cu înălțimile triunghiului ABC.

În continuare, vom arăta că dacă există un triunghi ale cărui laturi sunt congruente cu înălțimile unui triunghi dat şi acest triunghi este asemenea cu triunghiul dat, atunci în fiecare din cele două triunghiuri, una dintre laturi este media geometrică a celorlalte laturi.

Considerăm triunghiul ABC, în care, **a, b, c** sunt lungimile laturilor (BC), (AC) şi, respectiv, (AB),iar h_a, h_b, h_c sunt lungimile înălțimilor din A, din B şi, respectiv, din C .

Presupunem că sunt verificate inegalitățile (1) şi că $a \le b \le c$. Se deduce, fără dificultate că, în acest caz, avem $h_a \ge h_b \ge h_c$.

Din asemănarea celor două triunghiuri, deducem că au loc egalitățile : $\frac{h_a}{c} = \frac{h_b}{b} = \frac{h_c}{a}$ (2) . În plus, avem şi $S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$, de unde rezultă : $h_a = \frac{2S}{a}$; $h_b = \frac{2S}{b}$; $h_c = \frac{2S}{c}$. Cu aceste egalități, relațiile (2), devin : $\frac{\frac{2S}{a}}{c} = \frac{\frac{2S}{b}}{b} = \frac{\frac{2S}{c}}{a} = \frac{2S}{ac} = \frac{2S}{b^2} = \frac{2S}{ca}$, de unde, rezultă $b^2 = ac$ sau $b = \sqrt{ac}$, egalitate care exprimă faptul că numărul b este media geometrică a numerelor a şi c ; evident, având asemănarea celor două triunghiuri, deducem că şi în triunghiul ale căror laturi au lungimile h_a, h_b, h_c, are loc egalitatea $h_b = \sqrt{h_a h_c}$

Probleme :

1) Numerele a, b, c pot fi lungimile laturilor unui triunghi. Ştiind că $ax = by = cz$**, stabiliți, în ce condiții, numerele x, y, z, pozitive, pot fi lungimile laturilor unui triunghi.**

Soluție :

Notăm cu k, cele trei produse egale şi, astfel obținem : $x = \frac{k}{a}$; $y = \frac{k}{b}$; $z = \frac{k}{c}$. Pentru a putea fi lungimile laturilor unui triunghi, trebuie să aibă loc relațiile : $\begin{cases} x < y + z \\ y < z + x \\ z < x + y \end{cases}$ sau $\begin{cases} \frac{k}{a} < \frac{k}{b} + \frac{k}{c} \\ \frac{k}{b} < \frac{k}{c} + \frac{k}{a} \\ \frac{k}{c} < \frac{k}{a} + \frac{k}{b} \end{cases}$,adică,

$\begin{cases} \frac{1}{a} < \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} < \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \\ \frac{1}{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \end{cases}$, de unde rezultă : $\begin{cases} bc < ac + ab \\ ac < ab + bc \\ ab < bc + ac \end{cases}$ (1) , care reprezintă condițiile de existență a unui triunghi ale cărui laturi să aibă lungimile x, y, z .

2) a) Arătați că există un triunghi ale cărui înălțimi au lungimile egale cu $2\sqrt{3}$ cm, $3\sqrt{2}$ cm **şi 6 cm ;**
b) Determinați lungimile laturilor acestui triunghi .

Soluție :

a) Fie un triunghi ABC, având AB = c, AC = b şi BC = a şi cu înălțimile $h_a = 2\sqrt{3}$ cm, $h_b = 3\sqrt{2}$ cm şi $h_c = 6$ cm . Din faptul că $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2} < 6$, deducem că $a > b > c$ şi au loc egalitățile :

$ah_a = bh_b = ch_c$, adică, $2a\sqrt{3} = 3b\sqrt{2} = 6c$ sau $\frac{a}{\frac{1}{2\sqrt{3}}} = \frac{b}{\frac{1}{3\sqrt{2}}} = \frac{c}{\frac{1}{6}} = k$, unde $k \in \mathbb{R}_+^*$. Astfel, avem :

$a=\frac{k}{2\sqrt{3}}$, $b=\frac{k}{3\sqrt{2}}$ şi $c=\frac{k}{6}$. Observând că $a^2=b^2+c^2$, căci, $\frac{k^2}{(2\sqrt{3})^2}=\frac{k^2}{(3\sqrt{2})^2}=\frac{k^2}{6^2}$ sau $\frac{k^2}{12}=\frac{k^2}{18}=\frac{k^2}{36}$, adică, $3k^2=2k^2+k^2$, deducem că există triunghiul ABC, care este dreptunghic, cu $m(\widehat{A})=90^0$.

b) Pentru a determina lungimile laturilor, precizăm că în orice triunghi dreptunghic, catetele sunt şi înălţimi; aşadar, $AB=h_b=3\sqrt{2}$ cm, $AC=h_c=6$ cm, iar ipotenuza, adică latura (BC), are lungimea egală cu $\sqrt{(3\sqrt{2})^2+6^2}=3\sqrt{6}$ cm.

Precizăm că triunghiul ABC este unic şi se obţine când $k=\frac{a}{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$ sau $k=\frac{3\sqrt{3}}{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$, deci, $k=6\sqrt{6}$.

3) a) Se dă triunghiul ABC, cu $BC=18$cm, $AC=12$cm, $AB=8$cm. Arătaţi că se poate construi un triunghi cu înălţimile triunghiului ABC ;

b) Arătaţi că triunghiul construit cu înălţimile triunghiului ABC este asemenea cu triunghiul ABC şi determinaţi raportul lor de asemănare ;

c) Arătaţi că dacă două triunghiuri sunt asemenea şi laturile unui triunghi sunt congruente cu înălţimile celuilalt triunghi, atunci în fiecare din cele două triunghiuri, una dintre laturi este media geometrică a celorlalte laturi.

Soluţie : Calculăm aria triunghiului ABC, unde $a=18$cm, $b=12$cm, $c=8$cm : $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{18+12+8}{2}=\frac{38}{2}=19 \Rightarrow$ $S=\sqrt{19(19-18)(19-12)(19-8)}=\sqrt{19\cdot 7\cdot 11}$. Din $S=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2}$, unde h_a, h_b, h_c sunt lungimile înălţimilor din A, din B şi, respectiv, din C în triunghiul ABC; $\Rightarrow$: $h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2\sqrt{19\cdot 7\cdot 11}}{18}=\frac{\sqrt{19\cdot 7\cdot 11}}{9}$, $h_b=\frac{2S}{b}=\frac{2\sqrt{19\cdot 7\cdot 11}}{12}=\frac{\sqrt{19\cdot 7\cdot 11}}{6}$, $h_c=\frac{2\sqrt{19\cdot 7\cdot 11}}{8}=\frac{\sqrt{19\cdot 7\cdot 11}}{4}$.

Se arată uşor că au loc inegalităţile : $h_a<h_b+h_c$, $h_b<h_c+h_a$, $h_c<h_a+h_b$ (celelalte se deduc din acestea) aşadar, cu înălţimile triunghiului ABC se poate construi un triunghi.

b) Având $a>b>c$, $\Rightarrow h_a<h_b<h_c$; verificăm dacă laturile omoloage sunt proporţionale :

$$\frac{h_a}{c}=\frac{h_b}{b}=\frac{h_c}{a}, \text{ adică, } \frac{\frac{\sqrt{19\cdot 7\cdot 11}}{9}}{8}=\frac{\frac{\sqrt{19\cdot 7\cdot 11}}{6}}{12}=\frac{\frac{\sqrt{19\cdot 7\cdot 11}}{4}}{18} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{19\cdot 7\cdot 11}}{72}=\frac{\sqrt{19\cdot 7\cdot 11}}{72}=\frac{\sqrt{19\cdot 7\cdot 11}}{72}.$$

Prin urmare, triunghiurile sunt asemenea şi raportul lor de asemănare este egal cu $\frac{\sqrt{19\cdot 7\cdot 11}}{72}$.

c) În general, dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi şi h_a, h_b, h_c sunt lungimile înălţimilor, iar triunghiurile sunt asemenea, $\Rightarrow \frac{h_a}{c}=\frac{h_b}{b}=\frac{h_c}{a} \Leftrightarrow \frac{\frac{2S}{a}}{c}=\frac{\frac{2S}{b}}{b}=\frac{\frac{2S}{c}}{a}$, deci, $b^2=ac$ sau $b=\sqrt{ac}$, adică, numărul b este media geometrică a numerelor a şi c. Din asemănarea triunghiurilor, deducem că are loc şi egalitatea $h_b=\sqrt{h_a\cdot h_c}$.

Bibliografie:

1. Lalescu Traian, *Geometria triunghiului*. Editura tineretului, Bucureşti, 1958 .
Geometria triunghiului. Editura Apollo, Craiova, 1993 .

Metode de obținere a unor inegalități

de Prof. Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

În această lucrare, se prezintă câteva căi de obținere a unor inegalități, se evidențiază situațiile de egalitate, precum şi folosirea lor în rezolvarea unor probleme.

O metodă des utilizată pentru obținerea de inegalități este studiul extremelor unor funcții, care se face cel mai adesea cu ajutorul derivatelor. Astfel, fie funcția $f:(0,\infty)\to R,\ f(x)=x^x+(1+\ln x)^2$.

Avem: $f'(x)=\dfrac{x^{x+1}+2}{x}(1+\ln x),\ f'(x)=0\Leftrightarrow 1+\ln x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{e}$.

Cum $f'(x)<0,\forall x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)\Rightarrow f$ este descrescătoare; $f'(x)>0,\forall x\in\left(\dfrac{1}{e},\infty\right)\Rightarrow f$ este crescătoare. Prin urmare, punctul $V\left(\dfrac{1}{e},\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}\right)$ este punct de minim absolut pentru graficul funcției f şi deducem

inegalitatea: $\mathbf{I}_1$**:** $x^x+(1+\ln x)^2\ge\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}},\forall x\in(0,\infty)$.

O altă cale de obținere a unor inegalități este pornind de la o egalitate în care se majorează (minorează) unul din membri. Iată un exemplu. Pornim de la egalitatea:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right),\text{ cu } a,b,c\in\mathbb{R}.$$

Cu inegalitatea mediilor minorăm membrul drept şi obținem:

$$a^3+b^3+c^3-3abc\ge 3\sqrt[3]{abc}\,\frac{3}{2}\sqrt[3]{((a-b)(b-c)(c-a))^2}\text{, de unde rezultă:}$$

$\mathbf{I}_2$**:** $a^3+b^3+c^3-3abc\ge\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{abc(a-b)(b-c)(c-a)}$, cu egalitate dacă $a=b=c$.

- În continuare, vom evidenția printr-un exemplu, un caz de egalitate, şi anume: dat fiind un triunghi ABC, să se deducă în ce condiții avem: $\sqrt{aA}+\sqrt{bB}+\sqrt{cC}=\sqrt{2p\pi}$.

Observăm că membrul stâng al egalității ne sugerează să aplicăm inegalitatea C-B-S. Astfel avem:

$$(\sqrt{aA}+\sqrt{bB}+\sqrt{cC})^2\le(a+b+c)(A+B+C)\Leftrightarrow\sqrt{aA}+\sqrt{bB}+\sqrt{cC}\le\sqrt{2p\pi}.$$

Egalitatea are loc dacă: $\dfrac{a}{A}=\dfrac{b}{B}=\dfrac{c}{C}$, adică condițiile cerute.

O altă metodă de obținere a unei inegalități este pornind de la altă inegalitate.

Vom arăta că pornind de la inegalitatea lui *Jensen*, se poate obține în anumite condiții inegalitatea C-B-S. Astfel, fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$. Cum $f''(x)=2>0$, rezultă că funcția este convexă. Aplicând inegalitatea lui *Jensen* obținem: $\left(\dfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)^2\le\dfrac{1}{n}(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)$, $x_i\in R,\forall i=\overline{1,n}$, de unde: $(1\cdot x_1+1\cdot x_2+...+1\cdot x_n)^2\le(1^2+1^2+...+1^2)(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)$, adică C-B-S într-un caz particular. Într-un caz mai larg, avem acest rezultat astfel: Fie două mulțimi de numere reale $\{a_1,a_2,...,a_n\},\{b_1,b_2,...,b_n\}$, pentru care $|a_i|\le|a_{i+1}|,|b_i|\ge|b_{i+1}|$, $i=\overline{1,n-1}$. Atunci din inegalitatea lui Jensen se obține C-B-S. Demonstrația se face prin inducție matematică şi o lăsăm ca exercițiu.

Nota redacției: De asemenea, *D.M. Bătinețu-Giurgiu* şi *N. Stanciu*, au demonstrat echivalența şi independența inegalităților C-B-S şi *Bergström* - arătând că este suficient să se lucreze în $\mathbb{R}_+^*$ - atât pentru inegalitatea C-B-S cât şi pentru inegalitatea lui *Bergström*. Lista căilor de obținere a inegalităților nu se încheie aici; ea poate continua, iar rezultatele ce decurg sunt uneori imprevizibile.

Bibliografie:1. Gazeta Matematică, 1972-2012.
2. Articole şi note matematice, Vol. II, Editura Rafet, 2007.

Aplicații de analiza matematică

de prof. Florin Stănescu, Dâmbovița

În cele ce urmează ne propunem determinarea unor funcții, definite, în special, prin relații integrale, cu ajutorul inegalităților. În principal, sunt vizate urmatoarele inegalitati:

α) **Inegalitatea lui Cebâşev:** Pentru două funcții $f, g:[a,b]\to\mathbb{R}$, au loc următoarele inegalități:

a) $(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx,$ dacă f şi g au aceeaşi monotonie;

b) $(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx \le \int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx,$ dacă f şi g sunt de monotonii diferite;

Egalitatea are loc dacă una din funcţiile f, g este constantă(cu excepţia,eventual, a unei mulţimi numărabile).

β) **Inegalitatea lui Jensen:**

Fie $f: I\to J, g: J\to\mathbb{R}$ două funcţii continue.

a)Dacă g este convexă, atunci $g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(x))dx;$

b) Dacă g este concavă, atunci $g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\ge\frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(x))dx;$

Egalitatea are loc dacă funcția f este constantă.

Aplicația 1. Fie $f:[-1,1]\to R$ o funcție derivabilă de două ori , cu derivata a doua continuă pe $[-1,1]$, crescătoare pe $[-1,0]$ si descrescătoare pe $[0,1]$. Dacă $f'(-1)-2f'(0)+f'(1)=2\big(f(-1)-2f(0)+f(1)\big)$, arătați că există $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $f(x)=ax+b, (\forall)x\in[-1,1]$.

Soluție. Definim funcția $g(x)=\begin{cases}x+1, daca\ x\in[-1,0]\\ -x+1, daca\ x\in(0,1].\end{cases}$ Cum g si f'' sunt funcții continue pe $[-1,1]$ rezultă ca $g\cdot f''$ este integrabilă pe $[-1,1]$. Calculăm, cu ajutorul formulei de integrare prin părți pe intervalele $[-1,0]$ si $[0,1]$:

$$\int_{-1}^{1} g(x)\cdot f''(x)dx=\int_{-1}^{0} g(x)\cdot f''(x)dx+\int_{0}^{1} g(x)\cdot f''(x)dx=\int_{-1}^{0}(x+1)f''(x)dx+\int_{0}^{1}(-x+1)f''(x)dx=$$

$$(x+1)f'(x)\Big|_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0} f'(x)dx+(-x+1)f'(x)\Big|_{0}^{1}+\int_{0}^{1} f'(x)dx=f'(0)-\big(f(0)-f(-1)\big)-f'(0)+f(1)-f(0)=$$

$$f(-1)-2f(0)+f(1).\ (\mathbf{1})$$

Pe de altă parte, din definiția funcției g şi din condițiile din enunț pentru f'', folosind $\alpha)-a)$,putem scrie:

$$\int_{-1}^{1} g(x)\cdot f''(x)dx=\int_{-1}^{0} g(x)\cdot f''(x)dx+\int_{0}^{1} g(x)\cdot f''(x)dx\ge\int_{-1}^{0} g(x)dx\cdot\int_{-1}^{0} f''(x)dx+\int_{0}^{1} g(x)dx\cdot\int_{0}^{1} f''(x)dx=$$

$$\big(f'(0)-f'(-1)\big)\int_{-1}^{0}(x+1)dx+\big(f'(1)-f'(0)\big)\int_{0}^{1}(-x+1)dx=\frac{f'(-1)-f'(0)}{2}+\frac{f'(1)-f'(0)}{2}=$$

$$\frac{f'(-1)-2f'(0)+f'(1)}{2}.\ (\mathbf{2})$$ Din (**1**), (**2**) şi enunt, putem scrie:

$$f(-1)-2f(0)+f(1)=\int_{-1}^{1} g(x)f''(x)dx \geq \frac{f'(-1)-2f'(0)+f'(1)}{2}=f(-1)-2f(0)+f(1)$$

Astfel , $\int_{-1}^{1} g(x)f''(x)dx=\frac{f'(-1)-2f'(0)+f'(1)}{2}$, deci inegalitatea lui Cebâşev devine egalitate pe cele două intervale, rezultă că f'' este constantă, pe cele două intervale ,eventual cu excepția unei mulțimi numărabile, pe cele două intervale, dar cum f'' este continuă pe $[-1,1]$ implică că $f''(x)=c,(\forall)x\in[-1,1]\Rightarrow f(x)=cx^2+ax+b,a,b,c\in R,(\forall)x\in[-1,1].$

Din $f'(-1)-2f'(0)+f'(1)=2\left(f(-1)-2f(0)+f(1)\right)\Rightarrow -2c+a-2a+2c+a=2\left(c-a+b-2b+c+a+b\right)\Rightarrow$ $c=0\Rightarrow f(x)=ax+b,(\forall)x\in[-1,1].$

Aplicația 2.Se consideră $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă şi strict convexă, iar $a,b\in[-1,1]$, astfel încât $a\int_0^b f(t)dt-b\int_0^{-a} f(x)dx=2ab\cdot f\left(\frac{b-a}{4}\right)$. Arătați ca $a\cdot b=0$

Soluție. Presupunem prin absurd că $a\cdot b<0.$ (analog se raționează si pentru $a\cdot b>0$). Egalitatea din enunț poate fi scrisă sub forma $f\left(\frac{b-a}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\int_{-a}^{0} f(x)dx+\frac{1}{b}\int_0^b f(x)dx\right)$.**(3)**

Definim funcția continuă $g(x)=\begin{cases} ax, x\in[-1,0) \\ bx, x\in[0,1]. \end{cases}$.Cum g nu este constantă, aplicand $\beta)-a)$, putem scrie: $f\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(x)dx\right)<\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(g(x))dx\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} axdx+\int_0^1 bxdx\right)\right)<\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} f(ax)dx+\int_0^1 f(bx)dx\right)\Rightarrow$

$f\left(\frac{b-a}{4}\right)<\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} f(ax)dx+\int_0^1 f(bx)dx\right)$. **(4) .** Pentru integralele din membrul drept facem schimbările de variabilă $ax=t$, respectiv $bx=y$, obținând : $f\left(\frac{b-a}{4}\right)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\int_{-a}^{0} f(x)dx+\frac{1}{b}\int_0^b f(x)dx\right)\Rightarrow f\left(\frac{b-a}{4}\right)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}\int_0^b f(x)dx-\frac{1}{a}\int_0^{-a} f(x)dx\right)$. Din **(3)** şi **(4),** obținem: $f\left(\frac{b-a}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\int_{-a}^{0} f(x)dx+\frac{1}{b}\int_0^b f(x)dx\right)>f\left(\frac{b-a}{4}\right)$, contradicție, deci $ab=0.$

Aplicația 3. Daca $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă de două ori ,cu f'' crescatoare pe $[0,2]$, demonstrați că: $\int_1^2 f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx=\frac{f(2)-f(0)}{2}$, dacă şi numai dacă există $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=ax^2+bx+c.$

Soluție. Conform unui rezultat cunoscut avem : dacă $f:I\to\mathbb{R}$ este o funcție convexă si $x<y<z<t\in I$, atunci are loc inegalitatea: $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq\frac{f(z)-f(y)}{z-y}\leq\frac{f(t)-f(z)}{t-z}$ **(5).**

De asemenea, este cunoscut că dacă f este o funcție derivabilă, atunci f este convexă dacă şi numai dacă f' este crescătoare. **(6) .** Din enunt si **(6)** avem ca f' este o funcție convexă. Fie $x,y\in[0,1],x<y\Rightarrow x<y<x+1<y+1\overset{(5)}{\Rightarrow}\frac{f'(y)-f'(x)}{y-x}<\frac{f'(x+1)-f'(y)}{x+1-y}<\frac{f'(y+1)-f'(x+1)}{y+1-(x+1)}\Rightarrow$ $f'(y)-f'(x)<f'(y+1)-f'(x+1)\Rightarrow f'(x+1)-f'(x)<f'(y+1)-f'(y)$, deci funcția $f'(x+1)-f'(x)$ este crescătoare pe $[0,1]$. Acum, folosind $\alpha)-a)$, putem scrie:

$$\int_0^1 x\left(f'(x+1)-f'(x)\right)dx \ge \int_0^1 xdx\cdot\int_0^1\left(f'(x+1)-f'(x)\right)dx = \frac{f(2)-f(1)-f(1)+f(0)}{2} = \frac{f(2)-2f(1)+f(0)}{2}.$$

Pe de altă parte, cu ajutorul formulei de integrare prin părți, avem:

$$\int_0^1 x\left(f'(x+1)-f'(x)\right)dx = \int_0^1 xf'(x+1)dx - \int_0^1 xf'(x)dx = f(2)-\int_0^1 f(x+1)dx - f(1)+\int_0^1 f(x)dx =$$

$= f(2)-f(1)-\int_1^2 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx.$ În continuare,

$$f(2)-f(1)-\int_1^2 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx \ge \frac{f(2)-2f(1)+f(0)}{2} \Rightarrow \frac{f(2)-f(0)}{2} \ge \int_1^2 f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx = \frac{f(2)-f(0)}{2}$$

$\Rightarrow f'(x+1)-f'(x)=c, (\forall)x\in[0,1], c\in\mathbb{R} \Rightarrow f''(x+1)=f''(x), (\forall)x\in[0,1] \Rightarrow f''(0)=f''(1)=f''(2)$ şi cum f'' este crescătoare obținem că f'' este constantă pe $[0,2]$, deci dacă există $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=ax^2+bx+c.$

Bibliografie
1. Boboc N. Analiza matematica, Editura Universitatii din Bucuresti, 1999;
2. Ganga M. Teme si probleme de matematica, Editura Tehnica, Bucuresti, 1991;
3. Mortici C. 600 de probleme de matematica pentru concursuri, Editura Gil, Zalau, 2001.

Identități remarcabile în triunghi

de prof. dr. Mihàly Bencze, Braşov

În acest articol prezentăm câteva identități remarcabile în triunghi.

Teoremă. Dacă $x,y,z\in C$ $(x\ne y\ne z)$, atunci avem identitatea:

$$\left(\frac{x-y}{z}+\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}\right)\left(\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}\right)=6-\frac{\left(\sum x\right)\left(\sum xy\right)-\sum x^3}{xyz}.$$

Demonstrație. Identitatea rezultă prin simplu calcul algebric.

Aplicația 1. În orice triunghi neisoscel ABC avem relația:

$$\left(\sum\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\right)\left(\sum\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}\right)=1-\frac{2r}{R}.$$

Demonstrație. În teoremă folosim substituțiile: $x=a, y=b, z=c$.

Aplicația 2. În orice triunghi neisoscel ABC avem relația:

$$\left(\sum\frac{\sin\frac{C-B}{2}tg\frac{A}{2}}{\cos\frac{C-B}{2}-\sin\frac{A}{2}}\right)\left(\sum\frac{\cos\frac{C-B}{2}-\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{C-B}{2}tg\frac{A}{2}}\right)=5-\frac{16R}{r}+\left(\frac{s}{r}\right)^2.$$

Demonstrație. În teoremă folosim substituțiile: $x=s-a, y=s-b, z=s-c$.

Aplicația 3. În orice triunghi neisoscel ABC avem relația:

$$\left(\sum\frac{h_a-h_b}{h_c}\right)\left(\sum\frac{h_c}{h_a-h_b}\right)=$$

$$=\frac{48R^3+16s^2Rr(s^2+r^2+4Rr)-(s^2+r^2+4Rr)^3-48s^2R^2r^2}{16s^2R^2r^2}.$$

Demonstrație. În teoremă folosim substituțiile: $x=h_a, y=h_b, z=h_c$.

Aplicația 4. În orice triunghi neisoscel ABC avem relația:

$$\left(\sum \frac{r_a - r_b}{r_c}\right)\left(\sum \frac{r_c}{r_a - r_b}\right) = \frac{(4R+r)\left((4R+r)^2 - s^2\right)}{s^2 r} - 6 .$$

Demonstrație. În teoremă folosim substituțiile: $x = r_a, y = r_b, z = r_c$.

Bibliografie:

1. Colecția Octogon Mathematical Magazine (1993-2012).

Consecințe numerice ale unei inegalități algebrice

de D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti, Nicolaie Ivăşchescu, Craiova şi Neculai Stanciu, Buzău

Propoziție. Dacă $x, z, u, v, w \in R_+^*$, şi $y \in R_+$, atunci:

(*) $(ux + vy + wz)(uz + vy + wx) \geq (ux + vy + wx)(uz + vy + wz)$.

Demonstrație: După desfacerea parantezelor şi reducerea termenilor asemenea obținem că inegalitatea enunțului este echivalentă cu: $uw(x^2 + z^2) \geq 2uwxz \Leftrightarrow (x - z)^2 \geq 0$, ceea ce este evident, cu egalitate dacă şi numai dacă $x = z$.

Aplicații:

A.1. Să se arate că: $\overline{a2012b} \times \overline{b2012a} \geq \overline{a2012a} \times \overline{b2012b}$.

Radu Ghenghiu, problema VIII.330. din RMT.

Rezolvare: În inegalitatea (*) luăm: $u = 10^5, v = 10, w = 1$ şi $x = a, y = 2012, z = b$,

şi atunci rezultă: $(10^5 a + 10 \times 2012 + b)(10^5 b + 10 \times 2012 + a) \geq$

$\geq (10^5 a + 10 \times 2012 + a)(10^5 b + 10 \times 2012 + a) \Leftrightarrow \overline{a2012b} \times \overline{b2012a} \geq \overline{a2012a} \times \overline{b2012b}$.

A.2. Să se arate că: $\overline{a_1 a_2 ... a_m b_1 b_2 ... b_n c_1 c_2 ... c_m} \times \overline{c_1 c_2 ... c_m b_1 b_2 ... b_n a_1 a_2 ... a_m} \geq$

$\geq \overline{a_1 a_2 ... a_m b_1 b_2 ... b_n a_1 a_2 ... a_m} \times \overline{c_1 c_2 ... c_m b_1 b_2 ... b_n c_1 c_2 ... c_m}$,

unde numerele sunt scrise în baza 10.

Rezolvare: Fie $A = \overline{a_1 a_2 ... a_m}$, $B = \overline{b_1 b_2 ... b_n}$, $C = \overline{c_1 c_2 ... c_m}$, şi atunci inegalitatea de demonstrat este succesiv echivalentă cu:

$\overline{ABC} \times \overline{CBA} \geq \overline{ABA} \times \overline{CBC} \Leftrightarrow (10^{m+n} A + 10^m B + C)(10^{m+n} C + 10^m B + A) \geq$

$\geq (10^{m+n} A + 10^m B + A)(10^{m+n} C + 10^m B + C)$, iar după efectuarea calculelor revine la:

$$10^{m+n}(A^2 + C^2) \geq 2 \cdot 10^{m+n} \cdot A \cdot C \Leftrightarrow (A - C)^2 \geq 0,$$

ceea ce este adevărat, cu egalitate dacă şi numai dacă $A = C$. O altă rezolvare se poate folosind propoziția.

A.3. Dacă $\beta \geq 2$ este baza unui sistem de numerație şi numerele naturale: $\overline{a_1 a_2 ... a_m}$, $\overline{b_1 b_2 ... b_n}$, $\overline{c_1 c_2 ... c_m}$ sunt scrise în baza β, atunci $\overline{a_1 a_2 ... a_m b_1 b_2 ... b_n c_1 c_2 ... c_m} \times \overline{c_1 c_2 ... c_m b_1 b_2 ... b_n a_1 a_2 ... a_m} \geq$

$\geq \overline{a_1 a_2 ... a_m b_1 b_2 ... b_n a_1 a_2 ... a_m} \times \overline{c_1 c_2 ... c_m b_1 b_2 ... b_n c_1 c_2 ... c_m}$.

Rezolvare: Fie $D = \overline{a_1 a_2 ... a_m}$, $E = \overline{b_1 b_2 ... b_n}$, $F = \overline{c_1 c_2 ... c_m}$, şi atunci inegalitatea de demonstrat devine:

$$\overline{DEF} \times \overline{FED} \geq \overline{DED} \times \overline{FEF} \Leftrightarrow (\beta^{m+n} D + \beta^m E + F)(\beta^{m+n} F + \beta^m E + D) \geq$$
$$\geq (\beta^{m+n} D + \beta^m E + D)(\beta^{m+n} F + \beta^m E + F).$$

Dacă în propoziție luăm $u = \beta^{m+n}, v = \beta^m, w = 1$ şi $x = D, y = E$ şi $z = F$, atunci deducem inegalitatea din enunț. Inegalitatea este echivalentă cu $(D - F)^2 \geq 0$, ceea ce este evident, cu egalitate, dacă şi numai dacă $D = F$.

Exercițiu. În orice sistem de numerație cu baza $\beta \geq 10$ are loc inegalitatea:

$$1936772013 \times 2013771936 > 1936771936 \times 2013772013$$

(N.R. Multă sănătate domnului profesor *D.M. Bătinețu-Giurgiu*, născut în 1936, care a împlinit 77 de ani în anul 2013).

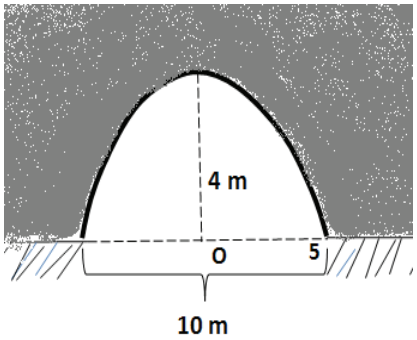
Aplicații practice ale funcției de gradul al doilea

de prof. Adrian Stan, Buzău

Funcția de gradul al doilea este des utilizată în foarte multe probleme de practică şi anume, în rezolvarea unor probleme din fizică, chimie, biologie, astronomie, economie,arhitectură, construcții, ce impun reprezentarea grafică a unor fenomene şi procese concrete fie ca utilitate în determinarea unor necunoscute cu ajutorul rezolvării unor ecuații de gradul al doilea.

Întrucât reprezentarea geometrică a funcțiilor de gradul al doilea este o parabolă, o putem întâlni deseori în lucrările de arhitectură şi construcții ca şi arcade sau diverse ornamente.

1. Se doreşte construcția unui tunel în care intrarea să aibă forma geometrică a unui arc de parabolă cu înălțimea maximă de 4 m şi lungimea intrării de 10 m. Să se găsească formula ce determină forma de parabolă a intrării în tunel.



Rezolvare: Ecuația parabolei are formula $f(x)=ax^2+bx+c$.

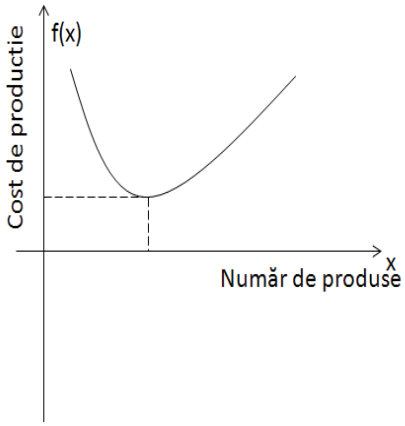
Dacă considerăm un sistem de axe cu originea în mijlocul segmentului de la baza intrării, atunci, înălțimea maximă de 4 m a intrării în tunel corespunde ordonatei vârfului parabolei: $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)=V(0,4)$

$-\frac{b}{2a}=0\Rightarrow b=0$. Din $f(0)=4\Rightarrow c=4\Rightarrow f(x)=ax^2+4$.

Cum lungimea segmentului determinat de intersecția parabolei cu axa OX este de 10 m, rezultă punctul de abcisă 5 este soluția ecuației asociată parabolei.

Din $f(5)=0\Rightarrow a=-\frac{4}{25}\Rightarrow f(x)=-\frac{4}{25}x^2+4=-0{,}16x^2+4$.

2. Funcția $f(x)=\frac{1}{4}x^2-2x+68$ reprezintă costul în mii de euro pentru producerea unui număr x (exprimat în sute) de telefoane mobile. Care este numărul minim de produse pentru a minimaliza costurile de producție ?



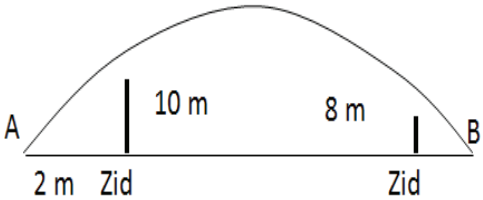
Rezolvare: Trebuie găsită acea valoare a lui x adică cel mai mic număr de telefoane astfel încât costul de producție al lor (adică f(x)) să fie cel mai mic.

Se calculează $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\cdot\frac{1}{4}}=4$ adică 400 de telefoane iar costul este $f(-\frac{b}{2a})=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{-64}{4\cdot\frac{1}{4}}=64$ adică 64000 de euro.

3. În figura alăturată, în punctul A este poziționat un tun a cărui obuz descrie o traiectorie dată de funcția $f(x)=-x^2+8x$, unde x reprezintă distanța în linie dreaptă față de punctul A.

a) Să se arate că obuzul trece peste zid de 10m aflat la 2 m de punctul A şi să se verifice dacă obuzul ar putea depăşi un zid înalt de 8 m aflat la o distanță de 1 m față de B;;

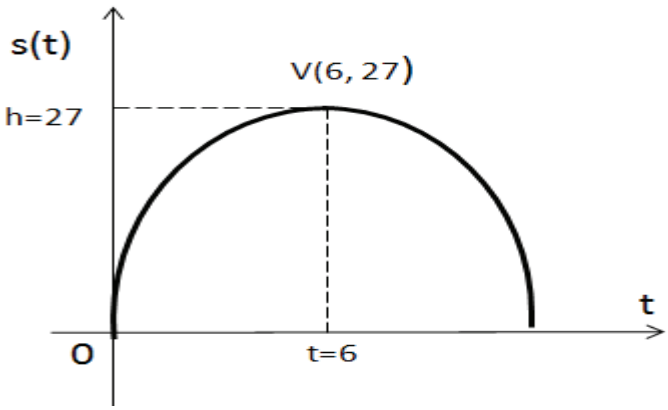
b) la ce înălțime maximă ajunge obuzul ?



Rezolvare:

a) f(2)= 12m si este mai mare decât cei 10 metri ai zidului, aşadar, obuzul trece peste zid. Dacă zidul ar fi la 1 m față de B atunci este la o distanță de 7 m față de A. Întrucât f(8)= 0 atunci distanța între A si B este de 8 iar f(7)= 7 care este mai mică decât lungimea zidului, prin urmare obuzul nu trece. b) Înălțimea maximă la care ajunge obuzul este $-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{64}{-4}=16m$.

4. Un obiect este aruncat oblic în aer cu o viteză inițială $v_0\ m/s$. Dacă distanța pe care o parcurge obiectul în aer este dată de funcția $s(t)=-3t^2+v_0t$, (t – timpul exprimat în secunde) să se găsească valoarea vitezei inițiale v_0 astfel încât obiectul să atingă o înălțime maximă de 27 m.



Rezolvare.

Cum înălțimea maximă la care ajunge obiectul este dată de valoarea maximului funcției de gradul al doilea $s(t)=-3t^2+v_0t$, rezultă $h_{\max}=-\frac{\Delta}{4a}=27 \Leftrightarrow -\frac{{v_0}^2}{4\cdot(-3)}=27 \Rightarrow {v_0}^2=18^2 \Rightarrow v_0=18m/s$.

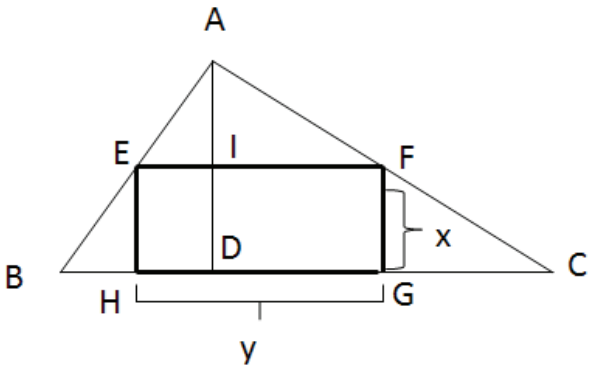
5. Dintr-o sârmă cu lungimea de 40 m se dorește realizarea un dreptunghi astfel încât aria acestuia să fie maximă. Cum trebuie să fie dimensiunile dreptunghiului ?

Rezolvare:

Notăm cu **x** respectiv **y** dimensiunile dreptunghiului. Atunci, din 2x + 2y = 40 rezultă x+y = 20 şi de aici se scoate y= 20- x.

Cum aria dreptunghiului este $A=x\cdot y=x(20-x)=20x-x^2$, acesteia îi asociem funcția de gradul al doilea $A(x)=-x^2+20x$ ce are maximul $A_{\max}=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{400}{-4}=100$. Această arie maximă se realizează pentru $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{20}{2\cdot(-1)}=10$, aşadar, x = 10 şi y = 10, adică trebuie să realizăm un pătrat.

6. Dintr-o bucată de tablă triunghiulară ca în figura alăturată având baza BC = 4 m şi înălțimea AD= 2 m se dorește obținerea unei suprafețe dreptunghiulare de arie maximă. Cum trebuie realizată tăierea astfel încât să se piardă cât mai puțină tablă.



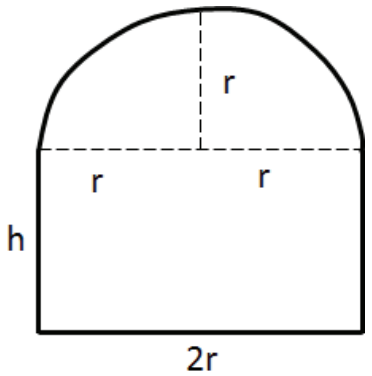
Rezolvare: Notăm $HG=EF=y$, $EH=FG=x$. Cum $\Delta ABC\sim\Delta AEF \Rightarrow \frac{EF}{BC}=\frac{AF}{AC}$ şi $\Delta AIF\sim\Delta ADC \Rightarrow \frac{AI}{AD}=\frac{AF}{AC}$. De aici, rezultă $\frac{EF}{BC}=\frac{AI}{AD}, \Rightarrow \frac{y}{4}=\frac{2-x}{2} \Rightarrow y=4-2x$. Atunci, aria suprafeței dreptunghiulare $A=x\cdot y=x(4-2x)=4x-2x^2$, devine o funcție de gradul al doilea în x, $A(x)=-2x^2+4x$ având maximul $-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{16}{4\cdot(-2)}=2$ care se realizează pentru $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\cdot(-2)}=1$.

Aşadar, pentru a se obține un dreptunghi de arie maximă ca să se piardă astfel cât mai puțină tablă trebuie ca dimensiunile dreptunghiului să fie de 1m şi respectiv 2 m.

7. Un constructor dorește realizarea unei ferestre ca în figura alăturată, baza fiind dreptunghiulară iar partea de sus un semicerc. Care ar trebui să fie lungimea totală de toc de fereastră astfel încât aceasta să lumineze maxim ?

Rezolvare: Vom nota cu h înălțimea ferestrelor până în semicerc şi cu 2r lungimea bazei. Atunci, lungimea totală a tocului este

$L = 2r + 2h + \pi r$ iar aria totală a ferestrei este $A = 2rh + \frac{\pi r^2}{2}$.

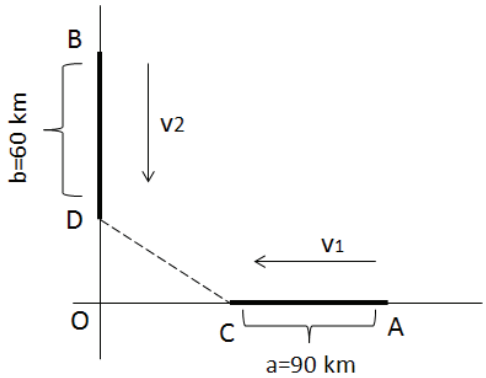


Rezultă, $A = r(L - 2r - \pi r) + \frac{\pi r^2}{2} = rL - 2r^2 - \pi r^2 + \frac{\pi r^2}{2}$.

$A = rL - \frac{(\pi + 4)r^2}{2}$.

Vom considera aria ferestrei, o funcție de gradul al doilea în variabila r, $A(r) = -\frac{(\pi+4)r^2}{2} + L \cdot r$ având maximul egal cu $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{L^2}{4 \cdot (-\frac{\pi+4}{2})} = \frac{L^2}{2(\pi+4)}$ care se realizează pentru $r = -\frac{b}{2a} = -\frac{L}{2 \cdot (-\frac{\pi+4}{2})} = \frac{L}{\pi+4}$. De aici, rezultă $L = r(\pi+4)$ şi cum $L = 2r + 2h + \pi r$ din egalarea celor două relații $r(\pi+4) = 2r + 2h + \pi r$ rezultă $h = r$. Aşadar, pentru a se obține o fereastră care să lumineze maxim, trebuie ca înălțimea bazei dreptunghiulare să fie egală cu raza semicercului.

9. Din două oraşe A şi B situate pe două şosele perpendiculare în O ca în figura alăturată pleacă în acelaşi timp două autoturisme cu viteze constante $v_1 = 100km/h$ şi $v_2 = 80km/h$. Ştiind că distanța $OA = 90km$ şi $OB = 60km$ şi că după un timp t cele două autoturisme ajung în punctele C respectiv D, să se determine distanța CD astfel încât aceasta să fie minimă.



Rezolvare:

Pentru a găsi distanța minimă CD, notăm $OA = a$ şi $OB = b$. Cum distanțele parcurse sunt $AC = v_1 \cdot t$, $BD = v_2 \cdot t$, atunci cele rămase sunt egale cu $OC = 90 - v_1 \cdot t = 90 - 100t$, $OD = 60 - v_2 \cdot t = 60 - 80t$.

CD se va găsi cu Teorema lui Pitagora în triunghiul OCD:

$CD^2 = OC^2 + OD^2 \Rightarrow CD = \sqrt{(a - v_1 t)^2 + (b - v_2 t)^2} = \sqrt{a^2 - 2av_1 t + v_1^2 t^2 + b^2 - 2bv_2 t + v_2 t^2} =$

$= \sqrt{(v_1^2 + v_2^2)t^2 - 2(av_1 + bv_2)t + a^2 + b^2}$. CD este minimă atunci când expresia de sub radical (care este o funcție de gradul al doilea în t) e minimă.

Minimul funcției de sub radical este $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{4(av_1 + bv_2)^2 - 4(v_1^2 + v_2^2)(a^2 + b^2)}{4 \cdot (v_1^2 + v_2^2)} = \frac{(av_2 - bv_1)^2}{v_1^2 + v_2^2}$.

Acesta se realizează pentru $t = -\frac{b}{2a} = -\frac{av_1 + bv_2}{v_1^2 + v_2^2}$. Pentru a=90, b= 60, v_1=100, v_2=80 obținem valoarea pentru distanța minimă CD: $CD = \sqrt{\frac{(av_2 - bv_1)^2}{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{|av_2 - bv_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{90 \cdot 80 - 60 \cdot 100}{\sqrt{100^2 + 80^2}} = \frac{60}{\sqrt{41}} \approx 10km$.

Bibliografie: Colecția de manuale de matematică de clasa a IX-a .

Prof. Liceul Tehnologic „ Costin Nenițescu”, Buzău

Some discrete inequalities

by José Luis Díaz-Barrero, Applied Mathematics III,
BARCELONA TECH, Spain

Abstract: In this paper discrete classical Jensen's inequality is applied to increasing convex functions to obtain some elementary numerical inequalities involving positive real numbers.

Introduction:

Theorem. Suppose that $f: I \subseteq R \to R$ is a convex function and suppose that the nonnegative real numbers $t_k, 1 \le k \le n$, satisfy $t_1 + t_2 + ... + t_n = 1$. Then for all $x_k \in I, 1 \le k \le n$, one has:

$f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k)$. If f is concave the preceding inequality is reversed.

Main Results:

Proposition 1. Let $a_1, a_2, ..., a_n$, be $n \ge 2$ positive real numbers. Then holds:

$$\frac{a_1}{3a_2 + 4\sqrt{a_1 a_2}} + \frac{a_2}{3a_3 + 4\sqrt{a_2 a_3}} + ... + \frac{a_n}{3a_1 + 4\sqrt{a_n a_1}} \ge \frac{n}{7} \qquad (1)$$

Proof. We consider the function $f: (0,\infty) \to R$, $f(t) = \frac{t^2}{3+4t}$, on account that f is increasing ($f'(t) > 0$) and convex ($f''(t) > 0$); we setting $t_k = \sqrt{\frac{a_k}{a_{k+1}}}$, $(1 \le k \le n-1)$ and $t_n = \sqrt{\frac{a_n}{a_1}}$, $a_{n+1} = a_1$, by theorem and AM-GM inequality we deduce:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_k) \ge f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t_k\right) \ge f\left(\left(\prod_{k=1}^{n} t_k\right)^{\frac{1}{n}}\right) = f(1) = \frac{1}{7}, \text{ which yields (1).}$$

Equality holds when $a_1 = a_2 = ... = a_n$, and the proof is complete.

Proposition 2. Let $a_1, a_2, ..., a_n$, be $n \ge 2$ positive real numbers. Then holds:

$$\frac{a_1}{a_2 + 4\sqrt[4]{a_1 a_2^3}} + \frac{a_2}{a_3 + 4\sqrt[4]{a_2 a_3^3}} + ... + \frac{a_n}{a_1 + 4\sqrt[4]{a_n a_1^3}} \ge \frac{n}{5} \qquad (2)$$

Proof. We consider the function $f: (0,\infty) \to R$, $f(t) = \frac{t^2}{1+4\sqrt{t}}$, on account that f is increasing ($f'(t) > 0$) and convex ($f''(t) > 0$); we setting $t_k = \sqrt{\frac{a_k}{a_{k+1}}}$, $(1 \le k \le n-1)$ and $t_n = \sqrt{\frac{a_n}{a_1}}$, $a_{n+1} = a_1$, by theorem and AM-GM inequality we deduce:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_k) \ge f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t_k\right) \ge f\left(\left(\prod_{k=1}^{n} t_k\right)^{\frac{1}{n}}\right) = f(1) = \frac{1}{5}, \text{ which yields (2).}$$

Equality holds when $a_1 = a_2 = ... = a_n$, and the proof is complete.

Proposition 3. Let $a_1, a_2, ..., a_n$, be $n \ge 2$ positive real numbers. Then holds:

$$\frac{a_1}{(\sqrt{a_2} + \sqrt[8]{a_1 a_2^3})^2} + \frac{a_2}{(\sqrt{a_3} + \sqrt[8]{a_2 a_3^3})^2} + ... + \frac{a_n}{(\sqrt{a_1} + \sqrt[8]{a_n a_1^3})^2} \ge \frac{n}{4} \qquad (3)$$

Proof. We consider the function $f: (0,\infty) \to R$, $f(t) = \frac{t^4}{(1+\sqrt{t})^2}$, on account that f is increasing ($f'(t) > 0$) and convex ($f''(t) > 0$); we setting $t_k = \sqrt[4]{\frac{a_k}{a_{k+1}}}$, $(1 \le k \le n-1)$ and $t_n = \sqrt[4]{\frac{a_n}{a_1}}$, $a_{n+1} = a_1$,

by theorem and AM-GM inequality we deduce:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_k) \geq f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t_k\right) \geq f\left(\left(\prod_{k=1}^{n} t_k\right)^{\frac{1}{n}}\right) = f(1) = \frac{1}{4}$$, than follows (3).

Equality holds when $a_1 = a_2 = ... = a_n$, and the proof is complete.

New proofs of Cauchy-Buniakovski-Schwarz' inequality and Bergström's inequality

by D.M. Bătinețu-Giurgiu and Neculai Stanciu

The inequality of H. Bergström.

If $n \in N^* - \{1\}, x_k \in R, y_k \in R_+^*, k = \overline{1,n}$, then: $$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} y_k} \qquad \text{(B)}$$

with equality if and only if there exists $t \in R^*$ such that $x_k = ty_k, \forall k = \overline{1,n}$.

The inequality Cauchy – Buniakovski – Schwarz.

If $n \in N^* - \{1\}, a_k, b_k \in R, k = \overline{1,n}$, then: $$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \qquad \text{(C-B-S)}$$

with equality if and only if there exists $t \in R^*$ such that $b_k = ta_k, \forall k = \overline{1,n}$.

Proof of (C-B-S)

If in inequality (B) we take $x_k = a_k b_k$ and $y_k = b_k^2, \forall k = \overline{1,n}$ we obtain that:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} y_k} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2 b_k^2}{b_k^2} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2$$, i.e **(C-B-S).**

Proof of (B)

If in inequality **(C-B-S)** we take $a_k = \sqrt{y_k}$ and $b_k = \frac{x_k}{\sqrt{y_k}}$ $\forall k = \overline{1,n}$ we obtain that:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k}\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{y_k} \cdot \frac{x_k}{\sqrt{y_k}}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} y_k}$$, i.e. **(B).**

Remarks. 1) By above yields that (C-B-S) and (B) are equivalent;

2) Because (C-B-S) can be demonstrated independently of (B) and vice versa we deduce that (C-B-S) and (B) are independent of each other;

3) It well known that for (C-B-S) and (B) it is sufficient to work in R_+^* (e.g. **D.M. Bătinețu-Giurgiu and I. Dina**, *Inegalitatea lui Bergström. Aplicații*, Caleidoscop Matematic, Nr. 2, November 2010, pp.4-10 - which is also free at the address http://basarab.ro/reviste/Rmatematica.pdf) , therefore in the proofs by above $x_k, y_k, a_k, b_k \in R_+^*$.

„ În şcoală înveți o lecție, apoi dai un test;
În viață, ai de dat un test care te învață o lecție”.
Tom Bodett

3. Examene şi concursuri

CONCURSUL JUDETEAN DE MATEMATICA „SCLIPIREA MINTII”

Ediția a VII- a, 03.11.2012

În acest număr vă sunt prezentate subiectele date elevilor de liceu din cadrul Concursului Județean de Matematică „ Sclipirea Minții”, desfășurat în data de 3 noiembrie 2012 la Liceul Tehnologic „ Costin Nenițescu” Buzău.

Clasa a IX- a

1. a) Se consideră $x \in [-2;5]$ **astfel încât** $\sqrt{5-x}+\sqrt{2+x}=3$**. Să se calculeze** $\sqrt{5-x}\cdot\sqrt{2+x}$

b) Dacă $a^2+b^2+2a+4b+5=0$**. Să se calculeze** $a^{2013}-(b-a)^{2013}$**.**

***

2. a) Fie $a,b \in \mathbb{R}$ **astfel încât a+b = 7 şi ab= 9. Să se calculeze** $\frac{a^2+1}{a+1}+\frac{b^2+1}{b+1}$**.**

b) Să se arate că numărul $A=\sqrt{(x-\sqrt{12})^2}+\sqrt{(x-\sqrt{48})^2}+\sqrt{(\sqrt{108}-2x)^2}\in\mathbb{N}$**, pentru orice** $x\in(-\infty;2\sqrt{3}]\cup[4\sqrt{3};\infty)$**.**

Prof. Adrian Stan

3. a) Să se arate că $a(a-b+c)+b(a+b-c)+c(b+c-a)\ge ab+bc+ac,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}$**.**

Prof. Nicolae Ivăşchescu, Craiova

b) Fie $x,y,z,t\in\mathbb{R}_+$ **astfel încât** $x\cdot y=z\cdot t=2012$**. Să se arate că**

$\frac{1}{16}(x+1)(y+1)(z+1)(t+1)\ge 2012$**.**

Prof. Elena Râmniceanu, Revista Alpha , nr.1 /2012

Clasa a X- a

1. Aduceți la o formă mai simplă expresiile:

a) $A=\dfrac{\dfrac{\sqrt[3]{a^{-1}}-\sqrt[3]{a}}{1+a}}{1+\sqrt[3]{a}}-\sqrt[3]{a^2}-\dfrac{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}-\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^4}}$**,** $a\in\mathbb{R}_+$**;** **b)** $B=3^{1-\log_3 4}+\dfrac{\log_{\sqrt[3]{5}}243}{\log_{25}3\sqrt{3}}-\dfrac{\log_5 0,04}{\log_{0,5}2}$

2. a) Se consideră numerele

$$A=\lg\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(n-1)(n+1)}\right),\ n\in\mathbb{N},n\ge 2\quad B=\lg\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+...+\lg\left(1-\frac{1}{n^2}\right),\ n\in\mathbb{N},n\ge 2.$$

Să se arate că $A+B+\lg 4=0$**.**

3. a) Fie $x, y, z \geq 0$**, numere reale cu proprietatea** $x+y+z=3$**. Să se arate că**
$\lg(1+x)\cdot\lg(2+y)\cdot\lg(3+z)\leq\lg 3$**.**

b) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ **astfel încât logaritmul** $\log_3\left[\left(m^2+1\right)x^2-2(m+4)x+2\right]$ **să fie definit pentru orice x număr real.** **Prof. Adrian Stan**

Clasa a XI- a

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 3 & 0\end{pmatrix}$**.**

a) Să se determine toate matricele $X\in M_2(\mathbb{R})$ **astfel încât** $A\cdot X=X\cdot A$ **;**

b) Să se rezolve ecuația $X^2=A.$ **Prof. Adrian Stan**, Buzău

2. Să se calculeze limitele: a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-5x+4}{x-1}$; **b)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$; ***

3. a) Determinaţi $a,b\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+3}-ax-b\right)=5$**;**

b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}|a|\cdot\sqrt{x-1}, x\geq 2\\ 3x+1-\sqrt{a^2-ax+1}, x\langle 2\end{cases}$**. Să se determine** $a\in\mathbb{R}$ **astfel încât f să aibă limită în punctul 2.**

Clasa a XII- a

1. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ **definim legea** $x*y=3xy-6x-6y+14$**.**

a) Arătaţi că legea este asociativă şi determinaţi elementele simetrizabile.

b) Calculaţi $\sqrt{1}*\sqrt{2}*....*\sqrt{2012}$ **;**

c) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ **ecuaţia:** $x*x*x=x$**.** **Prof. Gheorghe Dârstaru**

2. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ **astfel încât funcția F să fie o primitivă a funcției f unde**
$f:(-3;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{2x+6}$**,** $F:(-3;\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=(ax+b)\sqrt{2x+6}$**;** ***

3 . Să se calculeze:

a) $\int x\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\ln x dx,\ x\in(0;\infty)$**; b)** $\int\dfrac{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^3 x-\cos^2 x+1}dx,\ x\in\mathbb{R}-\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{3\frac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$

Prof. Adrian Stan

Prezentăm în continuare rezultatele elevilor obținute în urma concursului:

Clasa a V-a : **Premiul I**: **Nițu Mădălina, Ştefan Alexandru**, Scoala nr. 1 Rm. Sărat; **Premiul II**: **Enache Andrei, Mihai Raluca**, Scoala nr. 1 Rm. Sărat, **Popa Mădălina, Sibu Alexandru**, Grup Şcolar Tehnic „ Sfântul Mucenic Sava”, Berca; **Premiul III**: **Carp Bogdan George, Codreanu Maria Diana**, **Serea Roxana**, Scoala nr. 1 Rm. Sărat, **Răduca Răzvan Constantin**, Scoala „ Bâsca Rozilei” Nehoiu, **Ilie Cosmin Marius, Rusu Andrada**, Scoala „ George Emil Palade”, Buzău;

Clasa a VI-a : **Premiul I**: **Tănasă Andreea Maria**, Scoala nr. 1, Rm Sărat, **Zota Mădălina**, Scoala „ George Emil Palade”; **Premiul II**: **Ciocan Cristian**, Scoala George Emil Palade”, **Popa Sânziana**, Colegiul

„ Mihai Eminescu”; **Premiul III**: **Grigore Andreea, Vasile Iulia, Maftei Beatrice**, Colegiul „ Mihai Eminescu”, **Sava Daniel**, Scoala nr. 1, Rm. Sărat;

Clasa a VII-a : **Premiul I**: **Gheorghe Laura Elena**, Scoala „ V. Cristoforeanu”, Rm. Sărat; **Premiul II**: **Sava Teodor**, Scoala „ V. Cristoforeanu”, Rm. Sărat; **Premiul III**: **Pavel Silviu Cristian**, Scoala „ V. Cristoforeanu”, Rm. Sărat, **Cîrlan Andrei Nicolae**, Liceul cu Program Sportiv „ I. Balaş, Soter”, **Nica Camelia**, Scoala Smeeni.

Clasa a VIII-a: **Premiul I**: **Iaru Ioana**, Scoala nr. 1 Rm. Sărat; **Premiul II**: **Vasile Dragoş**, Scoala nr. 1, Rm.Sărat, **Sava Diana**, Scoala Smeeni; **Premiul III**: **Ilie Ionuț Florentin**, Scoala nr. 1, Rm. Sărat, **Mihai Andrei, Albu Andreea**, Scoala Nehoiu;

Clasa a IX-a : **Premiul I**: **Tăbăcaru Iulian**, Colegiul „ B. P. Haşdeu”; **Premiul II**: **Riciu Diana**, Colegiul „ B. P. Haşdeu”, **Andrei Aurica**, Colegiul „ M. Eminescu” ; **Premiul III**: **Blăjanu Ioana**, Liceul Tehnologic „ Costin Nenițescu”, **Chitic Eduard**, **Badea Andreea**, Colegiul „ Mihai Eminescu”.

Clasa a X-a : **Premiul I**: **Morogan Andreea**, Colegiul „ Mihai Eminescu”; **Premiul II**: **Antofie Alexandra**, Colegiul Economic, **Stoian Cristina**, Liceul Tehnologic „ Costin Nenițescu”; **Premiul III**: **Iacob Andreea**, **Costache Bogdan**, Colegiul „ Mihai Eminescu”, **Ene Sorin Florinel**, Liceul Tehnologic „ Grigore C. Moisil”.

Clasa a XI-a : **Premiul I**: **Pascu Georgiana**, Colegiul Economic; **Premiul II**: **Dragomir Liviu**, Colegiul Economic; **Premiul III**: **Lică Adriana**, Liceul Tehnologic „ Costin Nenițescu”.

Clasa a XII-a : **Premiul I**: **Modoran Mădălina**, Grup Şcolar Tehnic „ Sfântul Mucenic Sava”; **Premiul II**: **Ispas Elena**, **Sârbu Raluca**, Colegiul Economic; **Premiul III**: **Nicolae Elena**, Colegiul Economic, **Pavel Claudia**, Liceul Tehnologic „ Costin Nenițescu”.

Concursul de Matematică al Liceelor Maghiare, ediția XXIII.
Salonta, 31.ian. - 3.febr. 2013. jud. Bibor

Selecțiuni din subiectele date în cele două etape

1. Determinați toate soluțiile reale ale sistemului. $\begin{cases} x^{2013}+y^{2011} = 2z^{2009} \\ y^{2013}+z^{2011} = 2x^{2009} \\ z^{2013}+x^{2011} = 2y^{2009} \end{cases}$

(Clasa a IX-a , Etapa I) Dávid Géza, Odorheiul Secuiesc

2. În patrulaterul convex $ABCD$ se consideră punctele M şi N, mijloacele segmentelor (AB) respectiv (BC) . Fie $\{E\} = AN \cap BD$ şi $\{F\} = DM \cap AC$. Demonstrați că $ABCD$ este un paralelogram dacă şi numai dacă are loc relația: $\frac{BE}{BD} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{3}$.

(Clasa a IX-a , Etapa a II-a) Bencze Mihály, Braşov

3 Să se determine numerele $x, y \in [a,b]$ pentru care are loc relația:
$\sqrt{(x-a)(b-y)} + \sqrt{(y-a)(b-x)} = b-a$, unde $a,b \in \mathbb{R}$ sunt numere fixate şi $a < b$.

(Clasa a IX-a , Etapa a II-a) Longáver Lajos, Baia Mare

4. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_1 = a \geq 1$ şi $\frac{2}{a_1+a_2+\ldots+a_n} = \frac{3}{a_n} - \frac{3}{a_{n+1}}$,
pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine termenul general al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$.

(Clasa a IX-a , Etapa a II-a) Kovács Béla, Satu Mare

5. Un triunghi are perimetrul $12m$. Suma ariilor pătratelor construite pe laturile triunghiului este $48m^2$. Să se calculeze aria triunghiului.

(Clasa a IX-a , Etapa a II-a) Olosz Ferenc, Satu Mare

6. Pe o tablă scriem numerele naturale de la 1 la 2013. În primul pas alegem două numere, a şi b, le ştergem şi scriem în locul lor rezultatul expresiei $ab-3a-3b+12$, şi repetăm aceşti paşi până va rămîne un singur număr. Determinaţi acest număr.

(Clasa a X-a , Etapa I) Mikó Ágnes, Sfîntu Gheorghe

7. Determinaţi toate rădăcinile reale ale ecuaţiei $2^x+9^x+2=3^{x+1}+4^x$.

(Clasa a X-a , Etapa a II-a) Longáver Lajos, Baia Mare

8. Considerăm triunghiul neregulat ABC. Simetricele vârfurilor A , B , C , faţă de punctele B,C respectiv A sunt A_1,B_1 şi C_1. Demonstraţi că dacă punctele O,M, O_1,M_1 sunt centrele cercurilor cicumscrise respectiv ortocentrele triunghiurilor ABC şi $A_1B_1C_1$, atunci OO_1MM_1 este trapez!

(Clasa a X-a , Etapa a II-a) Bencze Mihály, Braşov

9. Considerăm un număr de n^2 poligoane regulate cu $2n^2$ laturi. Studiaţi posibilitatea împărţirii acestor poligoane în bucăţi din care să se poată construi un poligon regulat cu $2n^2$ laturi. În caz afirmativ prezentaţi această împărţire.

(Clasa a X-a , Etapa a II-a) Nagy Örs, Târgu Mureş

10. Între clădirea unei şcoli şi clădirea internatului se amenajează o alee în fomă dreptunghiulară de dimensiune $1m\times 10m$. Se folosesc pentru aceasta plăci de beton pătrate cu laturile de 1m, de culori albe, roşii, verzi şi gri. Câte variante diferite de proiecte se pot întocmi pentru pavarea aleii, dacă se cere, ca numărul plăcilor roşii să fie un număr par.

(Clasa a XI-a , Etapa I) Mátéfi István, Târgu Mureş

11. Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix} 1+a^2+a^4 & 1+ab+a^2b^2 & 1+ac+a^2c^2 \\ 1+ab+a^2b^2 & 1+b^2+b^4 & 1+bc+b^2c^2 \\ 1+ac+a^2c^2 & 1+bc+b^2c^2 & 1+c^2+c^4 \end{pmatrix}$ unde $a,b,c\in\mathbb{R}$ Aflaţi valoarea determinantului matricei A , scriind rezultatul ca produsul unor expresii de gradul întâi în a,b,c.

(Clasa a XI-a , Etapa a II-a) Longáver Lajos, Baia Mare

12. Considerăm în plan punctele $A_n(x^n,y^n)$, $x\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}^*$ şi şirul $(t_n)_{n\ 2}$, unde t_n reprezintă aria triunghiului $A_{n-1}A_nA_{n+1}$. Să se determine coordonatele punctului A_1 , dacă şirul $(t_n)_{n\ 2}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=\frac{3}{8}$.

(Clasa a XI-a , Etapa a II-a) Mikó Ágnes, Sfântu Gheorghe

13. Considerăm funcţia injectivă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că funcţiile $P\circ f$ şi $Q\circ f$ sunt primitivabile, unde $P,Q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $P(x)=x^3-x+2$ şi $Q(x)=x^2+5x+6$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Demostraţi, că funcţia f este continuă.

(Clasa a XII-a , Etapa a II-a) Bencze Mihály, Braşov

14. Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $a_1=6, a_2=2, a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n^2-3a_n+3}, n\geq 2.$

a) Determinaţi partea întreagă al termenului de rang 2013 .

b) Studiaţi existenţa unei legi de compoziţie $\oplus: X\times X\to X$ pe mulţimea $X=\{a_n \mid n\geq 1\}$, pentru care $(X,\oplus)$ formează o structură de grup izomorf cu grupul $(\mathbb{Z},+)$

(Clasa a XII-a , Etapa a II-a) Kovács Béla, Satu Mare

Traducere din limba maghiară de către prof. Mastan Eliza, Baia Mare şi prof. Kovács Béla, Satu Mare.

„ Două lucruri sunt infinite: universul şi prostia umană.
Şi nu sunt chiar sigur în legătură cu universul”.
Albert Einstein

4. Probleme rezolvate

▪ Clasa a V-a

G:352. Fără să se cunoască suma pe fiecare linie, coloană sau diagonală si care este aceeaşi , să se pună în pătrat numerele prime 1, 13, 31, 37, 43, 73 astfel încât să se obţină un pătrat magic.

67		
		61
		7

***Prof*. Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare:

67	1	43
13	37	61
31	73	7

Dacă notăm cu a_{ij} numărul aflat pe rândul i, coloana j, atunci, 67 +a_{22} +7 = a_{13} +61+7 de unde se obţin situaţiile: i) a_{22} =31, a_{13} = 37. Din 37 +31+a_{31}=37+61+7, rezultă a_{31} =37 care nu este soluţie; ii) Pentru a_{22} = 37, a_{13} = 43 se obţine soluţia bună.

G:353. Găsiţi cel puţin patru numere naturale $\overline{cd}$ şi a şi b corespunzătoare astfel încât să avem:
$a^2+b^2+c^2=\overline{cd}$. ***Prof*. Nicolae Ivăşchescu,** Craiova

Rezolvare: $\overline{cd}=94,\ a=2,b=3;\ \ \overline{cd}=61,\ a=3,b=4;\ \overline{cd}=78,\ a=2,b=5;\ \ \overline{cd}=50,\ a=3,b=4;$

G:354. Să se arate că nu există numerele naturale a şi b astfel încât $a^4+b^4=2019$.
***Prof*. Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare: Cum ultima cifră a fiecărei puteri a^4 sau b^4 este una din cifrele mulţimii $\{0,1,5,6\}$ rezultă că ultima cifră a sumei $u(a^4+b^4)\in\{0,1,2,5,6,7\}$, aşadar, diferită de u(2019)= 9.

G:355. Determinaţi numerele naturale care admit 6 divizori, ştiind că produsul divizorilor este 5832.
***Prof*. Mircea Mario Stoica,** Arad

Rezolvare: Dacă notăm numărul cu n şi divizorii lui cu $d_1=1,d_2=n,d_3,d_4,d_5,d_6$ **atunci rezultă:**
$d_1\cdot d_2\cdot d_3\cdot d_4\cdot d_5\cdot d_6=5832$. Cum $5832=2^3\cdot 3^6$ şi din $d_1\cdot d_2=d_3\cdot d_4=d_5\cdot d_6\Rightarrow n=18$.

G:356. Rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ecuaţia:
$(x-1961)(x-1960)+(y-24)(y-23)+(z-49)(z-48)=0$. ***Prof*. Mircea Mario Stoica,** Arad

Rezolvare: Cum fiecare termen al sumei este un produs de numere naturale, prin urmare, numere pozitive, atunci suma este egală cu zero dacă fiecare termen al produsului este zero. Există posibilităţile
$(x;y;z)\in\{(1960;23;48),(1960;23;49),(1960;24;48),(1960;24;49),(1961;23;49)$
$(1961;24;48),(1961;24;49),(1961,23,48)\}$.

G:357. Se consideră numărul : A = $25^{n+3}\cdot 4^{n+2}+25^{n+2}\cdot 4^{n+3}$; n este număr natural. Să se aducă numărul A la forma cea mai simplă şi să se scrie ca o sumă de două pătrate perfecte.
***Prof*. Cornelia Gurău**,Moineşti,Bacău

Rezolvare : A = $25^{n+2}\cdot 4^{n+2}\cdot 29=100^{n+2}\cdot 29$. A = $(10^{n+2})^2\cdot 5^2+4\cdot(10^{n+2})^2$.

G:358. Determinaţi numerele $\overline{abcd}$ formate din cifre prime pentru care a(d + 1) + bd + 2cd = 16d.
***Prof.* Gheorghe Ghiţă,** Buzău

Rezolvare: Scriind relația dată sub forma ad + a + bd + 2cd= 16d, deducem că d divide pe a, şi cum a şi d sunt numere prime rezultă că a = d. Astfel, relația dată devine: $a^2 + a + ab + 2ac = 16a \Leftrightarrow a + b + 2c = 15$.

Cum c este o cifră număr prim avem cazurile:

1). c = 2 $\Rightarrow$ a + b = 11, egalitate falsă cu a şi b numere prime;

2). c = 3 $\Rightarrow$ a + b = 9, de unde se obține că a = 2, b = 7 şi a = 7, b = 2;rezultă 2732, 7237;

3). c = 5 $\Rightarrow$ a + b = 5, de unde a = 2, b = 3 şi a = 3, b = 2; rezultă numerele 2352, 3253;

4). c = 7 $\Rightarrow$ a + b =1 relație falsă pentru a şi b numere prime.

In concluzie, numerele cerute sunt: 2732, 7237, 2352 şi 3253.

G:359. Să se afle numerele de trei cifre care împărțite la răsturnatele lor dau câtul 5 şi restul un număr prim. **Titu Zvonaru,** Comăneşti

Rezolvare: Fie $\overline{abc}$ numerele căutate şi r - restul.Din $\overline{abc} = 5 \cdot \overline{cba} + r$ rezultă uşor $c = 1$ şi atunci avem: $100a + 10b + 1 = 500 + 50b + 5a + r \Leftrightarrow 95a = 499 + 40b + r$.

- dacă $a \le 5$, atunci $95a \le 475$ şi nu obținem soluții;
- dacă $a = 6$, atunci $71 = 40b + r$ şi obținem soluțiile $b = 0, r = 71$ şi $b = 1, r = 31$;
- dacă $a = 7$, atunci $166 = 40b + r$, cum r este prim, ar trebui ca $r = 2$ şi nu obținem soluții;
- dacă $a = 8$, atunci $261 = 40b + r$ şi obținem soluțiile $b = 4, r = 101$ şi $b = 5, r = 61$ (pentru $b \le 3$ obținem $r \ge 141$, dar ar trebui să avem $r < \overline{cba} \le \overline{13a} < 140$);
- dacă $a = 9$, atunci $356 = 40b + r$ şi nu obținem soluții.

Numerele căutate sunt 601 $(601 = 106 \cdot 5 + 71)$, 611 $(611 = 116 \cdot 5 + 31)$, 841 $(841 = 148 \cdot 5 + 101)$ şi 851 $(851 = 158 \cdot 5 + 61)$.

G:360. Determinați mulțimea $A = \left\{ n \in \mathbb{N} / n^2 + 2011n - 3^{2012} + 3^{2011} - 3^{2010} + 3^{2009} - 1 = 2 + 4 + 6 + ... + 2012 \right\}$

***Prof.* Delia Ileana Basch- Naidin,** Caracal, Olt

Rezolvare: Cum $3^{2012} - 3^{2011} + 3^{2010} - 3^{2009} = 20 \cdot 3^{2009}$ şi 2+4+6+…+2012=1006 · 1007,

Obținem că $n \cdot (n + 2011) = 20 \cdot 3^{2009} + 1006 \cdot 1007 + 1$.

Membrul stâng este un număr par, iar membrul drept este impar(imposibil), rezultă $A = \varnothing$.

▪ Clasa a VI-a

G:361. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ **ecuația:** $xy - 3x + y = 17$.

***Prof.* Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica,** Arad

Rezolvare: Ecuația dată este echivalentă cu $(x+1)(y-3) = 14$. Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{(-15;2), (-8;1), (-3;-4), (-2;-11), (0;17), (1;10), (6;5)(13;4)\}$.

G:362. Determinați toate numerele naturale n **astfel încât numărul** $\frac{n}{2012 - n}$ **să fie pătrat perfect.**

D.M. Bătinețu – Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare: Din $\frac{n}{2012 - n} = k^2, k \ge 0 \Rightarrow n = \frac{2012k^2}{k^2 + 1}$. Deoarece k^2 şi $k^2 + 1$ sunt prime între ele rezultă $k^2 + 1 \in D_{2012} = \{1, 2, 4, 503, 1006, 2012\}$. Din posibilitățile de mai sus convine doar $k = 0$ şi $k = 1$. Deci, $n \in \{0, 1006\}$.

G:363. Găsiți numerele naturale $\overline{abc}$ **cu proprietatea că** $\sqrt{\overline{abc}} = a^2 + b - c$.

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare: Singurul număr $\overline{abc}$ care să fie pătrat perfect şi să verifice relaţia dată este 576.

G:364. Găsiţi numerele naturale $n_1, n_2, n_3, ..., n_{2011}, n_{2012}$ **astfel încât** $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+...+\frac{1}{n_{2012}}=1$.

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare: Se calculează mai întâi suma $S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{2010\cdot 2011}$ care este egală cu $S=\frac{2010}{2011}$. Observăm că $S+\frac{1}{2011}=1$ aşadar,

$n_1=1\cdot 2, n_2=2\cdot 3, n_3=3\cdot 4, ..., n_{2011}=2010\cdot 2011, n_{2012}=2011$.

G:365. Să se arate că fracţia $E=\frac{2^{2n+1}\cdot 5^{2n+3}-1}{2^{2n+3}\cdot 5^{2n+1}+2^{2n+1}\cdot 5^{2n+2}}$ **este reductibilă pentru orice n număr natural nenul**.

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: $E=\frac{2^{2n+1}\cdot 5^{2n+3}-1}{2^{2n+3}\cdot 5^{2n+1}+2^{2n+1}\cdot 5^{2n+2}}=\frac{10^{2n+1}\cdot 25-1}{2^{2n+1}\cdot 5^{2n+1}(4+5)}=\frac{24999....9}{9\cdot 10^{2n+1}}$ care se simplifică prin 3.

G:366. Comparaţi fracţiile: $\frac{n^{k+1}+(n+1)^k}{n^k+(n+1)^{k+1}}$ **şi** $\frac{(n+1)^k+(n+2)^{k+1}}{(n+1)^{k+1}+(n+2)^k}$, **unde** $n\in\mathbb{N}^*, k\in\mathbb{N}$.

***Prof.* Gheorghe Ghiţă,** Buzău

Rezolvare: Demonstrăm că prima fracţie este subunitară, iar cea de-a doua este supraunitară.

$\frac{n^{k+1}+(n+1)^k}{n^k+(n+1)^{k+1}}<1 \Leftrightarrow n^{k+1}+(n+1)^k<n^k+(n+1)^{k+1} \Leftrightarrow n^{k+1}-n^k<(n+1)^{k+1}-(n+1)^k \Leftrightarrow$

$n^k(n-1)<n(n+1)^k$, adevărată, deoarece $n^k\le(n+1)^k$ şi $n-1<n$.

Cea de-a doua fracţie se scrie $\frac{1}{\frac{(n+1)^{k+1}+(n+2)^k}{(n+1)^k+(n+2)^{k+1}}}$ şi este supraunitară, deoarece fracţia de la numitor se obţine din prima fracţie înlocuind pe n cu n + 1.

▪ Clasa a VII-a

G:367. Să se arate că ecuaţia $x^2-y^2+x-3y=3$ **nu are soluţii în** $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: Ecuaţia dată este echivalentă cu $(x-y-1)(x+y+2)=1$, de unde rezultă

$\begin{cases}x-y-1=1\\x+y+2=1\end{cases}\Rightarrow x=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$ sau $\begin{cases}x-y-1=-1\\x+y+2=-1\end{cases}\Rightarrow x=\frac{-3}{2}\notin\mathbb{Z}$. Aşadar, ecuaţia nu are soluţii în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

G:368. Să se determine $x,y,z\in\mathbb{Q}$ **ştiind că** $\frac{2012}{x+y}=\frac{4024}{x+z}=\frac{6036}{y+z}$ **şi** $(x+y)(x+z)(y+z)=6$.

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare: Egalând şirul de rapoarte egale cu k rezultă $x+y=\frac{2012}{k}$, $x+z=\frac{4024}{k}$, $y+z=\frac{6036}{k}$.

Înlocuindu-le în produs, rezultă k = 2012 , de unde rezultă x = 0, y = 1, z = 2.

G:369. Să se rezolve ecuaţia $\frac{x^2}{4022}=x-1005,5$ **în** $\mathbb{R}$.

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare: $\frac{x^2}{4022} = x - 1005,5 \Leftrightarrow x^2 = 2\cdot 2011x - 2\cdot 2011\cdot 1005,5 \Leftrightarrow (x-2011)^2 = 0 \Rightarrow x = 2011$.

G:370. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât numerele 3n+18 şi 7n+7 să fie două pătrate perfecte consecutive.

***Prof*. Mircea Mario Stoica,** Arad

Rezolvare: Numerele 3n+18 şi 7n+7 sunt pătrate perfecte consecutive dacă există $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $3n+18 = x^2$ şi $7n+7 = (x+1)^2$. Din fiecare relație de mai înainte se scoate n şi se egalează valorile obținute: $\frac{x^2-18}{3} = \frac{x^2+2x-6}{7} \Rightarrow (x-6)(2x+9) = 0$. Alegem x= 6 de unde rezultă n=6. Aşadar, numerele consecutive sunt 36 şi 49.

G:371. Aflați numerele $0 < x_i \le 1$, $i = \overline{1,2012}$, care satisfac relația:

$$\frac{2011x_1+1}{x_1} + \frac{2011x_2+1}{x_2} + \ldots + \frac{2011x_{2012}+1}{x_{2012}} = 2012^2.$$

***Prof*. D.M. Bătinețu – Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Este suficient să se observe că (*) $\frac{2011x+1}{x} \ge 2012$, pentru orice $0 < x_i \le 1$. Întradevăr,

$\frac{2011x+1}{x} \ge 2012 \Leftrightarrow 2011x+1 \ge 2012x \Leftrightarrow x \le 1$. Deci,

$$2012^2 = \frac{2011x_1+1}{x_1} + \frac{2011x_2+1}{x_2} + \ldots + \frac{2011x_{2012}+1}{x_{2012}} \ge 2012+2012+\ldots+2012 = 2012\cdot 2012 = 2012^2.$$

Aşadar, în inegalitatea de mai sus avem egalitate. Acest lucru este posibil dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2012} = 1$.

G:372. Aflați valorile lui $a \in \mathbb{N}$ pentru care numărul: $A = 1^2 + 2^3 + 3^4 + \ldots 99^{100} + 100^{101} + a^{a+1}$, este divizibil cu 3.

***Prof*. Rusu Constantin,** Râmnicu Sărat

Rezolvare:

Avem: $A = (M_3+1) + (M_3+2) + M_3 + (M_3+1)^5 + (M_3-1)^6 + M_3 + (M_3+1)^8 + (M_3-1)^9 + M_3 +$

$+ (M_3+1)^{11} + (M_3-1)^{12} + M_3 + \ldots.. + (M_3+1)^{92} + (M_3-1)^{93} + M_3 + (M_3+1)^{95} + (M_3-1)^{96} + M_3 +$

$+ 97^{98} + 98^{99} + 99^{100} + 100^{101} + a^{a+1} =$

$= 16(1+2+M_3+1+1+M_3) + (M_3+1)^{98} + (M_3-1)^{99} + M_3 + (M_3+1)^{101} + a^{a+1} =$

$= 16(M_3+2) + M_3 + 1 - 1 + 1 + a^{a+1} = M_3 + a^{a+1}$. Aşadar, $a = 3p$, $p \in \mathbb{N}$.

G:373. Fie a, b, c, d, numere raționale. Se ştie că

$\frac{3b-2a}{3b-3a} = 4$; $\frac{3d+2c}{3d+3c} = \frac{16}{19}$; $\frac{5a+b}{5c+d} = 2$. **Calculati:** $\frac{3a+b}{3c+d}$.

***Prof*. Valerica Roşu**, Rm. Sărat

Rezolvare :

$\frac{3b-2a}{3b-3a} = 4 \Leftrightarrow 3b-2a = 12b-12a \Leftrightarrow 10a = 9b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{9}{10} \Rightarrow \frac{a}{9} = \frac{b}{10} = k, k \in \mathbb{Q}$, (1)

$\frac{3d+2c}{3d+3c} = \frac{16}{19} \Leftrightarrow 57d+38c = 48d+48c \Leftrightarrow 9d = 10c \Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{9}{10} \Rightarrow \frac{c}{9} = \frac{d}{10} = t, t \in \mathbb{Q}$, (2)

Din (1) şi (2) rezultă $a = 9k$, $b = 10k$, $c = 9t, d = 10t$, şi din $\frac{5a+b}{5c+d} = 2$ rezultă

$\frac{5\cdot 9k+10k}{5\cdot 9t+10t}=2 \Leftrightarrow \frac{55k}{55t}=2 \Leftrightarrow \frac{k}{t}=2$. Atunci, $\frac{3a+b}{3c+d}=\frac{3\cdot 9k+10k}{3\cdot 9t+10t}=\frac{37k}{37t}=\frac{k}{t}=2$.

G:374. Să se determine numărul $\overline{abcd}$ (a, b, c, d fiind cifre în baza 10) şi n$\in\mathbb{N}^*$, ştiind că:

$$\frac{\overline{abcd}}{4}+\frac{\overline{abcd}}{5^2}+\frac{\overline{abcd}}{5^3}+...+\frac{\overline{abcd}}{5^n}=\frac{5^{n+1}+5^n-5}{4}.$$

***Prof.* Iuliana Traşcă,** Scorniceşti-Olt

Rezolvare: Relația dată este echivalentă cu $\overline{abcd}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+...+\frac{1}{5^n}\right)=\frac{5^{n+1}+5^n-5}{4}$ (*)

Înlocuind $\frac{1}{4}$ cu $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{1}{20}+\frac{1}{5}$ şi folosind faptul că $\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+...+\frac{1}{5^n}=\frac{5^n-1}{4\cdot 5^n}$, din (*)

$\Rightarrow \overline{abcd}\left(\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{5^n-1}{4\cdot 5^n}\right)=\frac{5^{n+1}+5^n-5}{4} \Rightarrow \overline{abcd}\left(\frac{5^n+5^{n-1}-1}{5^n}\right)=5^{n+1}+5^n-5$, $\Rightarrow \overline{abcd}=5^{n+1}$,

$n+1=5 \Leftrightarrow n=4$, $\Rightarrow \overline{abcd}=3125$.

G:375. Să se determine măsurile unghiurilor ascuţite ale unui triunghi dreptunghic ştiind că înălţimea din vârful unghiului drept împarte ipotenuza în două segmente, dintre care, unul are lungimea de trei ori mai mare decât a celuilalt.

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

Rezolvare: Fie D piciorul înălțimii din A pe [BC]. Din DC= 3·BD şi luând E, mijlocul laturii [BC] rezultă $[AB]\equiv[AE]\equiv[EC]$ deoarece $\Delta ADB\equiv\Delta ADE(catetă-catetă)$. În plus,

$m(\widehat{ABE})=m(\widehat{AEB})=2\cdot m(\widehat{ACE})$ deoarece unghiul $\widehat{AEB}$ este exterior triunghiului AEC.

Aşadar, în triunghiul dreptunghic ABC rezultă că $m(\widehat{ABC})=60^0$ şi $m(\widehat{ACB})=30^0$.

G:376. Să se arate că dacă A şi B sunt două numere formate din 2n respectiv n cifre identice egale cu a atunci numărul $N=\frac{a(A+16B)+9a^2}{9}$ este pătrat perfect.

***Prof.* Gheorghe Ghiță,** Buzău

Rezolvare: Numerele A şi B se scriu: A = $\underbrace{aaa...a}_{2n-cifre}$, B = $\underbrace{aaa...a}_{n-cifre}$, de unde A =

$\underbrace{aaa...a}_{n-cifre}\cdot 10^n+\underbrace{aaa...a}_{n-cifre}=10^n\cdot B+B$.

Numărul N se scrie: N = $\frac{a}{9}(A+16B)+a^2=\frac{a}{9}(10^nB+17B)+a^2=\frac{a}{9}\left[\left(10^n-1\right)B+18B\right]+a^2=$

$$\frac{a}{9}\underbrace{aaa...a}_{n-cifre}B+2aB+a^2=a\cdot\underbrace{111...1}_{n-cifre}\cdot B+2aB+a^2=B\cdot B+2aB+a^2=(B+a)^2.$$

▪ Clasa a VIII-a

G:377. Să se arate că $\sqrt{x^2+6x+13}+\sqrt{(y-2)^2}+|z+3|\geq 2$, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: Evident, $\sqrt{x^2+6x+13}+\sqrt{(y-2)^2}+|z+3|=\sqrt{(x+3)^2+2^2}+|y-2|+|z+3|\geq 2$.

G:378. Arătaţi că $\frac{a+1}{\sqrt{a}}+\frac{a+2}{\sqrt{a+1}}+\frac{a+3}{\sqrt{a+2}}+\frac{a+1006}{\sqrt{a+1005}}\rangle 2012$. ***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare: Se folosește inegalitatea dintre media geometrică și cea aritmetică: $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \frac{x+y}{\sqrt{xy}} \ge 2$. Dând lui x valorile a, a+1, a+2, …a+1005 și lăsându-l pe y = 1 rezultă cerința dată.

G:379. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ecuația:
$x+y+z-5886 = 2\sqrt{x-2008}+6\sqrt{y-1952}+10\sqrt{z-1961}$. ***Prof.* Mircea Mario Stoica,** Arad

Rezolvare: Ecuația dată este echivalentă cu

$$\left[(x-2008)-2\sqrt{x-2008}\cdot 1+1\right]+\left[(y-1952)-2\sqrt{y-1952}\cdot 3+9\right]+\left[(z-1961)-2\sqrt{z-1961}\cdot 5+25\right]=0 \Rightarrow$$

$\left(\sqrt{x-2008}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-1952}-3\right)^2+\left(\sqrt{z-1961}-5\right)^2=0$. De aici rezultă, $(x,y,z)\in\{2009;1961;1986\}$

G:380. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale inecuația: $2(x-3) \le 5(x-4) < 3(x-1)$.
***Prof.* Mircea Mario Stoica,** Arad

Rezolvare: Dubla inecuație este echivalentă cu sistemul de inecuații format din

$$\begin{cases}2x-6\le 5x-20\\ 5x-20<3x-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3x\le -14\\ 2x<17\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in\left[\frac{14}{3};\infty\right)\\ x\in\left(-\infty;\frac{17}{2}\right)\end{cases}.$$ Rezultă, $x\in\left[\frac{14}{3};\infty\right)\cap\left(-\infty;\frac{17}{2}\right)\cap\mathbb{N}=\{5,6,7,8\}$.

G:381. Demonstrați că $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+...+\frac{1}{100}$. **Generalizare.**
***Prof.* Constantin Dinu,** Buzău

Rezolvare: Se consideră egalitățile: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}$ **.(1)**

și $\frac{2}{2}+\frac{2}{4}+\frac{2}{6}+...+\frac{2}{100}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{49}+\frac{1}{50}$. **(2)** Din scăderea **(1)- (2)** rezultă cerința problemei.

Generalizare: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

G:382. Arătați că dacă $a,b\in\mathbb{R}_+^*$, atunci: $\frac{a^3}{a+b}\le\frac{5a^2-b^2}{8}$.
***Prof.* D.M. Bătinețu – Giurgiu, București și Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Inegalitatea din enunț este echivalentă cu:

$$8a^3\ge 5a^3-ab^2+5a^2b-b^3 \Leftrightarrow 3a^3+ab^2-5a^2b+b^3\ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3a^3-6a^2b+3ab^2+a^2b-2ab^2+b^3=3a\left(a^2-2ab+b^2\right)+b\left(a^2-2ab+b^2\right)=$$
$$=3a(a-b)^2+b(a-b)^2=(3a+b)(a-b)^2\ge 0,$$ ceea ce este evident adevărat.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b$.

G:383. Să se rezolve ecuația: $\frac{2005}{x-2009}+\frac{2006}{x-2008}+\frac{2007}{x-2007}+\frac{2008}{x-2006}=4.$
***Prof.* Gheorghe Ghiță,** Buzău

Rezolvare: Ecuația dată este echivalentă cu

$$\frac{2005}{x-2009}-1+\frac{2006}{x-2008}-1+\frac{2007}{x-2007}-1+\frac{2008}{x-2006}-1=0 \Leftrightarrow (4014-x)\left(\frac{1}{x-2009}+\frac{1}{x-2008}+\frac{1}{x-2007}+\frac{1}{x-2006}\right)=0,$$

de unde 4014 - x = 0 şi x_1 = 4014 , iar pe de altă parte:

$$\frac{1}{x-2009}+\frac{1}{x-2008}+\frac{1}{x-2007}+\frac{1}{x-2006}=0\Leftrightarrow\frac{2x-4015}{(x-2009)(x-2006)}+\frac{2x-4015}{(x-2008)(x-2007)}=0\Leftrightarrow$$

$$(2x-4015)\left(\frac{1}{(x-2009)(x-2006)}+\frac{1}{(x-2008)(x-2007)}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$(2x-4015)\cdot\frac{2x^2-8030x+8060110}{(x-2009)(x-2008)(x-2007)(x-2006)}=0,$$

de unde rezultă: $x_2=\frac{4015}{2}$ şi $x_{3,4}=\frac{4015\pm\sqrt{5}}{2}$.

In concluzie, mulțimea soluțiilor $S=\left\{4014,\frac{4015}{2},\frac{4015\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

G:384. a) Să se arate că $\sqrt{\frac{k-1}{k}}<\frac{2k-1}{2k}<\sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}}$**, k număr natural nenul.**

b) Să se arate că: $\frac{1}{2\sqrt{1006}}<\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot2011}{2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot2012}<\frac{1}{\sqrt{2013}}$.

***Prof.* Valerica Roşu**, Rm.Sărat

Rezolvare:

a) $\sqrt{\frac{k-1}{k}}<\frac{2k-1}{2k}\Big|^2 \Rightarrow 4k^2(k-1)<(2k-1)^2\cdot k\,\big|:k\Rightarrow\quad 4k^2-4k<4k^2-4k+1$ (adevarat) (1)

$\frac{2k-1}{2k}<\sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}}\Big|^2 \Rightarrow (2k-1)^2(2k+1)<4k^2(2k-1)\Rightarrow\quad 4k^2-1<4k^2$ (adevarat) (2)

Din (1) si (2) obținem relația cerută în enunț.

b) Folosim rezultatul de la subpunctul a) obținem :

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<\sqrt{\frac{1}{3}},\quad \sqrt{\frac{1}{2}}<\frac{3}{4}<\sqrt{\frac{3}{5}},\quad \sqrt{\frac{2}{3}}<\frac{5}{6}<\sqrt{\frac{5}{7}},\ ....,\ \sqrt{\frac{1005}{1006}}<\frac{2011}{2012}<\sqrt{\frac{2011}{2013}}.$$

Înmulțim inegalitățile membru cu membru , obținem:

$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot...\cdot\frac{1005}{1006}}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2011}{2012}<\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot...\cdot\frac{2011}{2013}}$. Dupa simplificare obținem:

$$\frac{1}{2\sqrt{1006}}<\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot2011}{2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot2012}<\frac{1}{\sqrt{2013}}.$$

G:385. Determinați numerele naturale m,n **, astfel încât să avem:** $\sqrt{2m-1}=\sqrt{7m+2n}-\sqrt{2m+2}$.

***Prof.* Florin Stănescu,Găeşti,** Dâmbovița

Rezolvare:

$\sqrt{2m-1}=\sqrt{7m+2n}-\sqrt{2m+2}\Rightarrow\sqrt{2m-1}+\sqrt{2m+2}=\sqrt{7m+2n}\Rightarrow$

$(\sqrt{2m-1}+\sqrt{2m+2})^2=(\sqrt{7m+2n})^2\Rightarrow 2m-1+2m+2+2\sqrt{(2m-1)(2m+2)}=7m+2n\Rightarrow$

$2\sqrt{(2m-1)(2m+2)}=3m+2n-1\Rightarrow 4(2m-1)(2m+2)=(3m+2n-1)^2\Rightarrow 16m^2+16m-8m-8=$

$(3m+2n-1)^2\Rightarrow 16m^2+8m+1-9=(3m+2n-1)^2\Rightarrow(4m+1)^2-(3m+2n-1)^2=9\Rightarrow$

$(7m+2n)(m-2n+2)=9\Rightarrow\begin{cases}7m+2n=9\\ m-2n+2=1\end{cases}\Rightarrow m=n=1$, celelalte variante nu convin.

▪ Clasa a IX - a

L:237. Să se rezolve ecuația $\left[x^{2012}\right]-[2x]-2=\{x\}-3$**, unde** $[x]$ **reprezintă partea întreagă a lui x iar** $\{x\}$ **reprezintă partea fracționară a lui x.** ***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: Cum $\left[x^{2012}\right]-[2x]-2\in\mathbb{Z}\Rightarrow\{x\}-3\in\mathbb{Z}\Rightarrow\{x\}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}\Rightarrow\{x\}=0.$ Rezultă,

$x^{2012}-x-x+1=0\Leftrightarrow x(x^{2011}-1)-(x-1)=0\Rightarrow\ (x-1)(\underbrace{x^{2011}+x^{2010}+....+x-1}_{\neq 0})=0\Rightarrow x=1.$

L:238. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**, astfel încât** $f(x+y)+f(3x-y)=8048x+3888,\forall x,y\in\mathbb{R}.$

Să se determine f şi să se arate că $f\left(\frac{x}{2012}+\frac{2012}{x}\right)\rangle\ 5968.$ ***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare: Pentru y = 0 rezultă $f(x)+f(3x)=8048x+3888$ (*) . Dacă se consideră funcția $f(x)=ax+b$, atunci, $f(3x)=3ax+b$ şi din (*) rezultă

$4ax+2b=8048x+3888\Rightarrow f(x)=2012x+1944.$

$$f\left(\frac{x}{2012}+\frac{2012}{x}\right)=2012\left(\frac{x}{2012}+\frac{2012}{x}\right)+1944\rangle 2012\cdot 2+1944=5968.$$

L:239. Se consideră ecuația $2x^2-2(m+1)x+m^2-1=0,\ m\in\mathbb{R},x_1,x_2$ **rădăcinile reale ale ecuației date. Aflați mulțimea valorilor pe care le poate lua expresiile:** $x_1+x_2;\ x_1x_2;\ x_1^2+x_2^2.$

***Prof.* Constantin Dinu,** Buzău

Rezolvare: Ştiind că rădăcinile $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, rezultă $\Delta=4(-m^2+2m+3)\geq 0\Leftrightarrow m\in[-1:3]$.

Atunci, $x_1+x_2=m+1\in[0;4]$, $x_1\cdot x_2=\frac{m^2-1}{2}\in\left[-\frac{1}{2};4\right]$,

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=2m+2\in[0;8]$

L:240. Calculați suma: $S=1\cdot 7+2\cdot 13+3\cdot 21+4\cdot 31+...+n(n^2+3n+3),\ n\geq 1.$

***Prof.* Petre Păunescu**, Roşiorii de Vede,Teleorman

Rezolvare:

$$S=\sum_{k=1}^{n}k(k^2+3k+3)=\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$

L:241. Fie $a,b,c\in(0;1]$**. Arătați că** $a\cdot\sqrt{\frac{c}{1+a+bc}}+b\cdot\sqrt{\frac{a}{1+b+ca}}+c\cdot\sqrt{\frac{b}{1+c+ab}}\leq\sqrt{3}.$

José Luis Díaz-Barrero, Barcelona Tech, Spania

Rezolvare. Din inegalitatea Cauchy-Buniacovski-Schwarz rezultă că:

$$\left(b\cdot\sqrt{\frac{a}{1+b+ca}}+c\cdot\sqrt{\frac{b}{1+c+ab}}+a\cdot\sqrt{\frac{c}{1+a+bc}}\right)^2\leq\left(\frac{a}{1+b+ca}+\frac{b}{1+c+ab}+\frac{c}{1+a+bc}\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\leq$$

$\leq 3\left(\frac{a}{1+b+ca}+\frac{b}{1+c+ab}+\frac{c}{1+a+bc}\right)$, unde s-a ținut cont că $a^2+b^2+c^2\leq 3$.

Aşadar, este suficient să arătăm că: $\frac{a}{1+b+ca}+\frac{b}{1+c+ab}+\frac{c}{1+a+bc}\leq 1.$ Într-adevăr, deoarece

$1+ab=(1-a)(1-b)+a+b$, atunci $1+c+ab=(1-a)(1-b)+a+b+c\geq a+b+c$.

Asemănător, rezultă că: $1+a+bc=(1-b)(1-c)+a+b+c\geq a+b+c$,
$1+b+ca=(1-c)(1-a)+a+b+c\geq a+b+c$.

Aşadar, $\frac{a}{1+b+ca}+\frac{b}{1+c+ab}+\frac{c}{1+a+bc}\leq\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=1$, cu egalitate în cazul în care cel puţin două dintre numerele a,b,c sunt egale cu 1.

Observăm că avem egalitate în inegalitatea iniţială când $a=b=c=1$.

L:242. **Dacă** $\sin x+\sin y+\sin z=1, \sin^3 x+\sin^3 y+\sin^3 z=1$, **atunci** $\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z=0$.

***Prof.* Ovidiu Ţâţan ,** Râmnicu Sărat

Rezolvare: Din cunoscuta egalitate $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3\cdot(a+b)(b+c)(c+a), \forall a,b,c\in\mathbb{R}$ pentru $a=\sin x, b=\sin y, c=\sin z$ se obţine:

$(\sin x+\sin y+\sin z)^3=\sin^3 x+\sin^3 y+\sin^3 z+3(\sin x+\sin y)(\sin y+\sin z)(\sin z+\sin x)\Rightarrow$

$\Rightarrow 1=1+3(\sin x+\sin y)(\sin y+\sin z)(\sin z+\sin x)\Rightarrow(\sin x+\sin y)(\sin y+\sin z)(\sin z+\sin x)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\sin x+\sin y=0$ sau $\Rightarrow\sin y+\sin z=0$ sau $\Rightarrow\sin z+\sin x=0$. Rezultă, $\sin z=0\Rightarrow\cos z=0$.

L:243. **Arătaţi că dacă** $0<a\leq b$ **şi** $x_k\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\forall k=\overline{1,n}$, **atunci:**

$$\sum_{k=1}^{n}(a\cdot\sin x_k+b\cdot tgx_k)>(a+b)\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k .$$

***Prof.* D.M. Bătineţu – Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Avem $\frac{a\cdot\sin x+b\cdot tgx}{a+b}>x, \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ (1)

Într-adevăr notând $t=tg\frac{x}{2}\in(0,1), \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$a\cdot\sin x+b\cdot tgx>2(a+b)tg\frac{x}{2}>(a+b)x, \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{2at}{1+t^2}+\frac{2bt}{1-t^2}>2(a+b)t, \forall t\in(0,1)\Leftrightarrow(a+b)t^2+(b-a)>0$, $\forall t\in(0,1)$ ceea ce este evident, şi deoarece avem $tg\frac{x}{2}>\frac{x}{2}, \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, relaţia (1) este demonstrată.

Din (1) rezultă imediat $\sum_{k=1}^{n}(a\cdot\sin x_k+b\cdot tgx_k)>(a+b)\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k$.

L:244. **Se dă şirul** $u_n=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}, n\in\mathbb{N}, n\geq 1$. **Interpretaţi geometric termenii acestui şir şi rezolvaţi ecuaţia:** $|u_n-1|<\frac{1}{10}$.

***Prof.* Rusu Constantin,** Râmnicu Sărat

Rezolvare: a) Considerăm un triunghi dreptunghic OP_nP_{n+1} cu $\widehat{O}=90^0, OP_{n+1}=1$,

$OP_n=\sqrt{n}$, atunci $P_nP_{n+1}=\sqrt{1^2+(\sqrt{n})^2}=\sqrt{n+1}$ şi $u_n=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=\cos P_n$.

Aşadar, fiecărui termen al şirului şi corespunde un triunghi dreptunghic, el fiind egal cu $\cos P_n$. Mai observăm că unghiurile $\widehat{P_n}$ au măsurile din ce în ce mai mici, apropiindu-se de zero când $\cos P_n=1$.

b) $|u_n - 1| < \frac{1}{10} \Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right| < \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n+1+\sqrt{n(n+1)} > 10 \Leftrightarrow \sqrt{n(n+1)} > 9-n.$$

Pentru $n > 9$, inecuația este verificată imediat, deoarece membrul drept este număr negativ. Ea mai este verificată şi pentru $n \in \{5,6,7,8,9\}$. Deci, soluția este: $n \in [5,+\infty) \cap \mathbb{N}$.

L:245. Fie a,b,c numere reale nenule astfel încât $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$. Să se demonstreze inegalitatea: $\frac{a}{(1+a^2)^2}+\frac{b}{(1+b^2)^2}+\frac{c}{(1+c^2)^2} \le \frac{3\sqrt{3}}{16}$.

Titu Zvonaru, Comăneşti, Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare: Vom demonstra inegalitatea (*) $\frac{x}{(1+x^2)^2} \le \frac{3\sqrt{3}}{16}\cdot\frac{1}{x^2}$. Aceasta se scrie succesiv:

$$3\sqrt{3}\left(x^4+2x^2+1\right) \ge 16x^3 \Leftrightarrow 3\sqrt{3}\cdot x^4 - 16x^3 + 6\sqrt{3}\cdot x^2 + 3\sqrt{3} \ge 0 \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{3}\right)^2\left(3\sqrt{3}\cdot x^2+2x+\sqrt{3}\right) \ge 0$$

care este adevărată deoarece ecuația de gradul doi $3\sqrt{3}\cdot x^2+2x+\sqrt{3}=0$ are discriminantul negativ.
Scriem inegalitatea (*) pentru a,b,c şi adunând, obținem inegalitatea de demonstrat. Avem egalitate dacă şi numai dacă $a=b=c=\sqrt{3}$.

▪ Clasa a X - a

L:246. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea $f(\log_5 x+2)=5x,\ \forall x\in(0;\infty)$. Să se calculeze suma $S=f(1)+f(2)+...+f(100)$.

Prof. Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: Notăm $\log_5 x+2$ cu t de unde rezultă

$\log_5 x = t-2 \Rightarrow x=5^{t-2} \Rightarrow f(t)=5\cdot 5^{t-2} \Rightarrow f(t)=5^{t-1}$.

Atunci, $S=f(1)+f(2)+...+f(100)=1+5+5^2+...+5^{99}=\frac{5^{100}-1}{4}$.

L:247. Să se rezolve ecuația: $\sqrt[4]{x+13}+2^{\sqrt[4]{x+78}}+\log_2\sqrt[4]{x+253}=12$.

***Prof.* Rusu Constantin,** Râmnicu Sărat

Rezolvare: Condiția de existență a ecuației este: $x \ge -13$. Asociem acestei ecuații funcția: $f:[-13,+\infty)\to\mathbb{R}$, dată prin $f(x)=\sqrt[4]{x+13}+2^{\sqrt[4]{x+78}}+\log_2\sqrt[4]{x+253}$. Deoarece funcția f este strict crescătoare (sumă de funcții strict crescătoare), rezultă că f este injectivă.
Se observă că $f(3)=12$. De aici avem unica soluție $x=3$.

L:248. Ştiind că $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}-1\ne 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ să se determine x, y, z $\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+abxy+bcyz+acxz+\frac{x^2+y^2+z^2}{2}=xy(a+b)+yz(b+c)+xz(a+c).$$

***Prof.* Iuliana Trașcă,** Olt

Rezolvare:

Relația $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+abxy+bcyz+acxz+\frac{x^2+y^2+z^2}{2}=xy(a+b)+yz(b+c)+xz(a+c)$ este

echivalentă cu : $(ax+by-z)^2+(ax-y+cz)^2+(-x+by+cz)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by-z=0 \\ ax-y+cz=0 \\ -x+by+cz=0 \end{cases}$

Relația $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}-1\neq 0$ se mai poate scrie: $1-ab-ac-bc-2abc\neq 0$.

Acest număr este chiar determinantul sistemului, deci x = y = z = 0

L:249. Să se arate că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea: $\sum \frac{\sqrt{\cos\frac{A-B}{2}}}{\sin\frac{C}{2}} \geq 6.$

***Prof.* Gheorghe Ghiță,** Buzău

Rezolvare: (Soluție dată de dl. Titu Zvonaru).

$$\sum \frac{\sqrt{\cos\frac{A-B}{2}}}{\sin\frac{C}{2}} = \sum \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos\frac{A-B}{2}}} \geq \sum \frac{2\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}} = \sum \frac{2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}}{\sin C} =$$

$$= \sum \frac{\sin A+\sin B}{\sin C} = \sum \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b} \geq 6.$$

Evident, egalitatea are loc pentru cazul triunghiului echilateral.

L:250. Arătați că dacă $x_k \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$**, atunci:**

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin x_k}{\cos^2 x_k\left(1+\sin^2 x_k\right)}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos x_k}{\sin^2 x_k\left(1+\cos^2 x_k\right)}\right) \geq \frac{25\sqrt{5}}{16}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin^2 x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\cos^2 x_k\right).$$

***Prof.* dr. Mihály Bencze,** Braşov

Rezolvare:

Pentru orice $t\in(0,1)$, avem inegalitatea

$$\frac{t}{1-t^4} \geq \frac{5\sqrt[4]{5}}{2}t^2 \Leftrightarrow \left(t\sqrt[4]{5}-1\right)^2\left(t(\sqrt[4]{5})^3+(2t\sqrt[4]{5})^2+3t\sqrt[4]{5}+4\right)\geq 0.$$

Dacă $t=\sin x_k$, atunci $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin x_k}{\cos^2 x_k\left(1+\sin^2 x_k\right)} \geq \frac{5\sqrt[4]{5}}{4}\sum_{k=1}^{n}\sin^2 x_k$.

Dacă $t=\cos x_k$, atunci $\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos x_k}{\sin^2 x_k\left(1+\cos^2 x_k\right)} \geq \frac{5\sqrt[4]{5}}{4}\sum_{k=1}^{n}\cos^2 x_k$.

După înmulțirea celor două inegalități de mai sus obținem concluzia.

L:251. Arătați că în orice triunghi ABC **avem** $\prod r_a^{\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}} \leq (R+r)^{\frac{2}{r}}$**.**

***Prof.* dr. Mihály Bencze,** Braşov

Rezolvare:

Avem $R+r=\frac{\sum r_a\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)}{\sum\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)} \geq \left(\prod r_a^{\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}}\right)^{\frac{1}{\sum\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)}} = \left(\prod r_a^{\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}}\right)^{\frac{r}{2}}$, aşadar $(R+r)^{\frac{2}{r}} \geq \prod r_a^{\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}}$.

L:252. Să se arate că $\sin\frac{\pi}{n} \geq \frac{1}{n-1}$ unde $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

***Prof.* Costică Ambrinoc,** Rm. Sărat

Rezolvare: Fie z o radacină de ordinul n a unității. Atunci:

$1+z+z^2+...+z^{n-1}=0 \Leftrightarrow 1-1+z-1+z^2-1+...+z^{n-1}-1=-n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z-1)(1+z+1+z^2+z+1+...+z^{n-2}+z^{n-3}+...+z+1)=-n$ de unde rezultă că:

$\frac{n}{|z-1|}=\left|1+z+1+z^2+z+1+...+z^{n-2}+z^{n-3}+...+z+1\right| \le 1+|z+1|+\left|1+z+z^2\right|+...+\left|1+z+...+z^{n-2}\right| \le$

$\le 1+2+...+n-1=\frac{n(n-1)}{2}$ iar de aici rezultă că $|z-1| \ge \frac{2}{n-1}$. Luând în această inegalitate $z=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ avem:

$\left|1-\cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n}\right| \ge \frac{2}{n-1} \Leftrightarrow \left|2\sin^2\frac{\pi}{n}-2i\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\right| \ge \frac{2}{n-1} \Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{n}\left|\sin\frac{\pi}{n}-i\cos\frac{\pi}{n}\right| \ge \frac{2}{n-1}$

de unde rezultă inegalitatea din enunț.

▪ Clasa a XI - a

L:253. Se consideră funcția $f:E\to\mathbb{R},\ f(x)=x\sqrt{\frac{x-1}{9x+1}}-mx$ **. Se cere:**

a) Aflați domeniul maxim de definiție, E; **b) Calculați limita funcției în punctul** $x=-\frac{1}{9}$**;**

c) Determinați m astfel încât f să aibă limită finită la $+\infty$ **; calculați limita pentru m determinat.**

***Prof.* Constantin Dinu,** Buzău

Rezolvare: a) $\frac{x-1}{9x+1}\ge 0 \Leftrightarrow x\in\left[-\infty;\frac{-1}{9}\right)\cup[1;\infty)$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{9}\\ x\langle-\frac{1}{9}}}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{9x+1}}-mx\right)=-\infty$; c)

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{\frac{x-1}{9x+1}}-m\right)=\infty\left(\frac{1}{3}-m\right)=\begin{cases}+\infty, m\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\\ -\infty, m\in\left(\frac{1}{3},+\infty\right)\\ \infty\cdot 0, m\in\frac{1}{3}.\end{cases}$$

. Pentru $m=\frac{1}{3}$,limita cerută este egală cu $-\frac{5}{27}$

L:254. Fie şirul $(x_n)_{n\ge0}$ **,** $x_{n+1}=e^{x_n}-1, x_0<0.$ **Să se arate că şirul este convergent şi să se calculeze** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ **şi** $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot x_n$ **.**

***Prof.* Ovidiu Țâțan,** Rm.Sărat

Rezolvare: Studiem monotonia şirului $(x_n)_{n\ge0}: x_{n+1}-x_n=e^{x_n}-1-x_n\ge0, \forall x_n\in\mathbb{R}\Rightarrow$ şirul este crescător.

Cercetăm mărginirea şirului $(x_n)_{n\ge0}$: $x_1=e^{x_0}-1<e^0-1=0.$

Arătăm prin inducție matematică faptul că $x_n<0, \forall n\in\mathbb{N}.$

$P(n): x_n<0, \forall n\in\mathbb{N}.$

$P(0): x_0<0$ evident adevărat. Demonstrăm că $P(k)\Rightarrow P(k+1)$ unde $P(k+1): x_{k+1}<0, \forall k\in\mathbb{N}$.

$x_{k+1}=e^{x_k}-1<e^0-1=0.$ Conform metodei inducţiei matematice rezultă că $P(n)$ este adevărată $\forall n\in\mathbb{N}$

Şirul $(x_n)_{n\ge0}$ este monoton crescător şi mărginit superior deci convergent (Weierstrass).

Notăm $l=\lim\limits_{n\to\infty}x_n, l\le0.$ Trecem la limită în relaţia de recurenţă:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{x_n}-1\right) \Rightarrow l = e^l - 1 \Rightarrow l = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0.$

Pentru calculul limitei $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot x_n$ (nedeterminarea $0\cdot\infty$) procedăm astfel:

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}} \underset{Stolz-Cesaro}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{x_n-x_{n+1}}{x_{n+1}\cdot x_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}\cdot x_n}{x_n-x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(e^{x_n}-1\right)\cdot x_n}{x_n-e^{x_n}+1}.$$ Cum

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ avem o nedeterminare de tip $\frac{0}{0}$. Trecem pentru calculul limitei într-o limită de funcţii:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\left(e^x-1\right)}{x-e^x+1} \underset{l'Hospital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+x\cdot e^x}{1-e^x} \underset{l'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^x+x\cdot e^x}{-e^x} = -2$$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot x_n = -2.$

L:256. Să se arate, fără a folosi calculatorul sau tabele trigonometrice,că $0{,}7 < \sin 50^0 < 0{,}77$ **.**

***Prof*. Costică Ambrinoc,** Rm. Sărat

Rezolvare: Aplicăm Teorema lui Lagrange pe intervalul $[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{18}]$ pentru funcția sinus şi obținem

$\sin\frac{5\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{4} = \left(\frac{5\pi}{18}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\alpha$,unde $\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{18})$ şi ținând seama ca $\cos\alpha \le \cos\frac{\pi}{4}$ obținem

$0 < \sin\frac{5\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{4} < \frac{2\pi}{72}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{72} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\frac{5\pi}{18} < \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi\sqrt{2}}{72}$ de unde :

$$0{,}7 < 0{,}705 = \frac{1{,}41}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\frac{5\pi}{18} = \sin 50^0 < \frac{1{,}415}{2}+\frac{3{,}15\cdot 1{,}415}{72} = \frac{1{,}415}{2}(1+\frac{3{,}15}{36}) < \frac{1{,}415}{2}\cdot\frac{39{,}15}{36} =$$
$$= 0{,}7075\cdot 1{,}0875 = 0{,}76940625 < 0{,}77$$

L:257. (Problemă propusă în memoria lui Traian Lalescu – 130 de ani de la naştere)

Fie $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*$ **o funcție cu** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x)}{x} = a\in R_+^*, (b_n)_{n\ge 1}$ **o progresie aritmetică în care** $b_1, r\in\mathbb{R}_+^*$ **şi** $u,v\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $u+v=1$**. Să se calculeze:**

$$\lim_{n\to\infty}\left((n+1)^u\sqrt[n+1]{\left(f(b_1)f(b_2)...f(b_n)f(b_{n+1})\right)^v} - n^u\sqrt[n]{\left(f(b_1)f(b_2)...f(b_n)\right)^v}\right).$$

***Prof*. D.M. Bătinețu – Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău**

Rezolvare: Notăm $f(b_1)f(b_2)...f(b_n) = f(b_n)!, \forall n\in N^*$

şi $B_n = (n+1)^u\sqrt[n+1]{\left(f(b_{n+1})!\right)^v} - n^u\sqrt[n]{\left(f(b_n)!\right)^v} = n^u\sqrt[n]{\left(f(b_n)!\right)^v}\left(w_n-1\right) =$

$$= n^{u-1}\sqrt[n]{\left(f(b_n)!\right)^v}\cdot\frac{w_n-1}{\ln w_n}\cdot\ln w_n^n = \left(\frac{\sqrt[n]{f(b_n)!}}{n}\right)^v\cdot\frac{w_n-1}{\ln w_n}\cdot\ln w_n^n, \forall n\ge 2$$, unde

$w_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^u\left(\frac{\sqrt[n+1]{f(b_{n+1})!}}{\sqrt[n]{f(b_n)!}}\right)^v, \forall n\ge 2$ .Avem: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(b_n)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(b_n)}{b_n}\cdot\frac{b_n}{n} = ar$ şi

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(b_{n+1})!}{nf(b_n)!} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(b_{n+1})}{n} = ar$. De asemenea,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{f(b_n)!}}{n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{f(b_n)!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(b_{n+1})!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{f(b_n)!}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e_n}\cdot\frac{f(b_{n+1})}{n+1}\right) = \frac{ar}{e},$$

unde $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$. Totodată avem:

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^u \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{f(b_{n+1})!}}{\sqrt[n]{f(b_n)!}}\right)^v = 1\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{f(b_{n+1})!}}{n+1}\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{f(b_n)!}}\cdot\frac{n+1}{n}\right)^v =$$

$$= \left(\frac{ar}{e}\cdot\frac{e}{ar}\cdot 1\right)^v = 1, \text{ deci } \lim_{n\to\infty}\frac{w_n-1}{\ln w_n} = 1.$$ Rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} w_n^n = \lim_{n\to\infty} e_n^u \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(b_{n+1})!}{f(b_n)!}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{f(b_{n+1})!}}\right)^v = e^u \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(b_{n+1})}{n+1}\cdot\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{f(b_{n+1})!}}\right)^v =$$

$$= e^u\left(ar\cdot\frac{e}{ar}\right)^v = e^u e^v = e.$$

Atunci, $\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{f(b_n)!}}{n}\right)^v \cdot 1\cdot \ln e = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{f(b_n)!}}{n}\right)^v = \left(\frac{ar}{e}\right)^v$.

L:258. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ **şi** $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$**. Să se determine toate matricele** $X \in M_2(\mathbb{R})$ **astfel încât** $A\cdot X = X\cdot A$ **şi să se rezolve ecuaţia** $X^2 = A$.

***Prof*. Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Din $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ rezultă $c = -b, d = a+b$. Aşadar, forma matricelor X este $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+b \end{pmatrix}$.

Din $X^2 = A \,|\cdot X \Rightarrow X^3 = A\cdot X$ şi din $X\cdot|\, X^2 = A \Rightarrow X^3 = X\cdot A$ rezultă $A\cdot X = X\cdot A$, aşadar, X este de forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+b \end{pmatrix}$. Din $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ b=1 şi a = -2 sau b= - 1 şi a = 2.

Aşadar, $X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ *sau* $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

L:259. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$**. Calculaţi** A^n**.**

***Prof*. Rusu Constantin,** Râmnicu Sărat

Rezolvare: Avem $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B + I_2$. Din ecuaţia Hamilton-Cayley obţinem: $B^2 = 8B$ şi în continuare prin inducţie găsim $B^n = 8^{n-1}B$. Prin urmare: $A^n = (B+I_2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k I_2^{n-k} =$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_n^k 8^{k-1} B + I_2 = \frac{1}{8}\left(C_n^1 8 + C_n^2 8^2 + \ldots + C_n^n 8^n\right)B + I_2 = \frac{1}{8}\left[\left(1 + C_n^1 8 + \ldots + C_n^n 8^n\right) - 1\right]B + I_2 =$$

$$= \frac{9^n-1}{8}B + I_2 = \begin{pmatrix} \frac{9^n-1}{4} & \frac{(9^n-1)3}{8} \\ \frac{9^n-1}{2} & \frac{(9^n-1)3}{4} \end{pmatrix}.$$

L:260. Să se calculeze A^n**, unde** $A=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ c & d & a \end{pmatrix}$. ***Prof.* Gheorghe Ghiță,** Buzău

Rezolvare:

Matricea A se scrie $A=aI_3+B$, unde: $B=\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix}$, cu $B^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & bc & 0 \end{pmatrix}, B^3=O_3, B^k=O_3, \forall k\geq 3.$

şi atunci: $A^n=(aI_3+B)^n=a^nI_3+na^{n-1}B+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}B^2=$

$$\begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & na^{n-1}b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ na^{n-1}c & na^{n-1}d & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}bc & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ na^{n-1}c & na^{n-1}d+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}bc & a^n \end{pmatrix}.$$

L:261. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ **ecuația:** $\begin{vmatrix} x-2010 & x-2011 & x-2012 \\ x-2011 & x-2012 & x-2010 \\ x-2012 & x-2010 & x-2011 \end{vmatrix}=0$. ***Prof.* Laura Tănase**, Buzău

Rezolvare: Se folosesc proprietățile determinanților şi se obține x = 2011.

▪ Clasa a XII - a

L:262. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ **se defineşte legea de compoziție internă notată „** $x\circ y$ **”astfel:**

$x\circ y=\frac{1}{2}(x+y-xy+1), \forall x,y\in\mathbb{R}$. **Se cere:**

a) Determinați mulțimea elementelor simetrizabile;
b) Determină legea $x\circ y$ **structură de grup pe** $\mathbb{R}$ **?**
c) Stabiliți mulțimea pe care legea dată determină structură de grup.

***Prof.* Constantin Dinu,** Buzău

Rezolvare: a) $u(\mathbb{R})=\mathbb{R}-\{1\}$.

b) Pe $\mathbb{R}$, legea nu determină structură de grup ci doar pe mulțimea $\mathbb{R}-\{1\}$.

L:263. i)Prin considerații de arii asupra subgraficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$ **demonstrați inegalitatea:** $n\ln n-n+1<\sum_{k=1}^{n}\ln k<(n+1)\ln(n+1)-n$ **.**

ii) folosind i) calculați $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$**.** **Ion Ambrinoc,student,**Oxford

Rezolvare:

i) Considerăm diviziunea $\Delta=(1<2<3<...<n)$ a intervalului $[1,n]$.Luând suma Darboux superioara pe acest interval avem: $\int_1^n \ln x dx<(2-1)\ln 2+(3-2)\ln 3+(4-3)\ln 4+...+(n-(n-1))\ln n \Leftrightarrow$

$n\ln n-n+1<\ln 2+\ln 3+...+\ln n=\sum_{k=1}^{n}\ln k$.

Considerăm diviziunea $\Delta_1=(1<2<3<...<n<n+1)$ a intervalului $[1,n+1]$.

Luând suma Darboux inferioară pe acest interval avem:

$$\int_1^{n+1} \ln x dx > (2-1)\ln 1 + (3-2)\ln 2 + (4-3)\ln 3 + ... + (n-(n-1))\ln(n-1) + (n+1-n)\ln n \Leftrightarrow$$

$(n+1)\ln(n+1) - n > \ln 2 + \ln 3 + ... + \ln n = \sum_{k=1}^{n} \ln k$, de unde rezultă inegalitatea din enunț.

ii) Din inegalitatea de la i) rezultă că : $n\ln n - n + 1 < \ln n! < (n+1)\ln(n+1) - n \Leftrightarrow$

$$\ln n - 1 + \frac{1}{n} < \ln \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{n}\ln(n+1) - 1 \Leftrightarrow -1 + \frac{1}{n} < \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{n+1}{n}\ln(n+1) - 1 - \ln n =$$

$= \ln \frac{n+1}{n} + \frac{\ln(n+1)}{n} - 1$. Cum limitele capetelor sunt -1 rezultă că limita cerută în enunț este $\frac{1}{e}$.

L:264. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ **şi funcțiile continue** $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **astfel încât:**

$f(x)f(a+b-x) = 1, g(x) = g(a+b-x), \forall x \in \mathbb{R}$ **. Să se arate că:** $\int_a^b \frac{g(x)}{1+f(x)} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b g(x)dx$.

***Prof.* D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Fie: $I = \int_a^b \frac{g(x)}{1+f(x)} dx$, în care facem schimbarea de variabilă $x = u(t) = a + b - t$, cu $u'(t) = -1, u(a) = b, u(b) = a$ şi obținem:

$$I = \int_a^b \frac{g(a+b-t)}{1+f(a+b-t)} dt = \int_a^b \frac{g(x)}{1+\frac{1}{f(x)}} dx = \int_a^b \frac{f(x)g(x)}{1+f(x)} dx \text{ şi atunci:}$$

$2I = I + I = \int_a^b \frac{g(x)}{1+f(x)} dx + \int_a^b \frac{f(x)g(x)}{1+f(x)} = \int_a^b \frac{(1+f(x))g(x)}{1+f(x)} dx = \int_a^b g(x)dx$, şi deci: $I = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b g(x)dx$.

L:265. Să se calculeze integrala: $I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \ln\left(1 + a^{\sin^n x}\right) dx,\ a > 0, a \neq 1, n \in N$ **impar.**

***Prof.* Gheorghe Ghiță,** Buzău

Rezolvare: Cu schimbarea de variabilă x = - t, avem:

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \sin^n t \ln\left(1 + a^{-\sin^n t}\right) dt = -I_n - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \ln a^{\sin^n x} dx \Rightarrow 2I_n = (\ln a) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = (2\ln a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx \Rightarrow$$

$I_n = (\ln a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{\pi \ln a}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, ştiind, rezultatul cunoscut că: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$.

L:266. Să se arate că: $\int_0^1 e^{2x^2} dx > \frac{4}{\pi}\left(\int_0^1 \frac{e^{x^2}}{\sqrt{x^2+1}} dx\right)^2$. ***Prof.* Rusu Constantin,** Râmnicu Sărat

Rezolvare: Cu inegalitatea Cauchy-Buniacovski-Schwarz obținem:

$$\left(\int_0^1 e^{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx\right)^2 < \int_0^1 \left(e^{x^2}\right)^2 dx \cdot \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_0^1 e^{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx\right)^2 < \left(\int_0^1 e^{2x^2}dx\right)\cdot\left(arctgx\Big|_0^1\right)$$, adică concluzia.

L:267. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**, definită prin:** $f(x)=\begin{cases}2^{-1}\cdot\left[\left(e^x-1\right)^2+\left(e^x+1\right)^2-2\right], & x\le 0\\ 3x^2+2x+m,\ x>0,\ m\in\mathbb{R}\end{cases}$

a) Determinați $m\in\mathbb{R}$**, astfel încât rădăcinile ecuației** $3x^2+2x+m=0$ **să fie reale şi negative.**
b) Pentru ce valori ale lui m funcția f este continuă?
c) Aflați primitivele funcției f pe $\mathbb{R}$**.**

***Prof.* Iuliana Traşcă,** Olt

Rezolvare: a)Pentru ecuația $3x^2+2x+m=0$, avem $\Delta=4-12m$
Se impun condițiile $\Delta\ge 0$, $P>0$, $S<0$ şi anume,

$4-12m\ge 0,\ \frac{m}{3}>0,\ -\frac{2}{3}<0$ de unde rezultă $m\in\left(0,\frac{1}{3}\right]$.

b) $2^{-1}\cdot\left[\left(e^x-1\right)^2+\left(e^x+1\right)^2-2\right]=e^{2x}$. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^{2x}=e^0=1$,

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(3x^2+2x+m\right)=m$, f(0)=1 Din condiția $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=$ f(0), avem m=1

c) Dacă m=1, funcția f devine: $f(x)=\begin{cases}e^{2x}, & x\le 0\\ 3x^2+2x+1,\ x>0\end{cases}$

$\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx=\frac{1}{2}\int\left(e^{2x}\right)'dx=\frac{1}{2}e^{2x}+c_1$ $\qquad\int\left(3x^2+2x+1\right)dx=x^3+x^2+x+c_2$

Deci o primitivă a lui f(x) este: $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{2x}+c_1, & x\le 0\\ x^3+x^2+x+c_2, & x>0\end{cases}$ F este o primitivă $\Leftrightarrow c_2=c_1+\frac{1}{2}$.

ŞTIAȚI CĂ..... ?

Statuia lui Imhotep de la Muzeul din Luvru

Din perioada 2705 – 2640 de ani î.e.n datează cea mai veche construcție monumentală egipteană şi anume prima piramidă din piatră construită de faraonul Djoser (Zoser) la Saqqara, avându-l ca arhitect pe **Imhotep**. Piramida era una în trepte, avea 69 de metri şi adăpostea mormântul faraonului.

Imhotep pe lângă faptul că era un bun arhitect, astrolog, poet, mai era şi medic, fiind foarte mult apreciat de faraon care îl lua ca sfetnic şi păstrător al sigiliului regal.

Imhotep a fost considerat ca fiind primul dintre geniile din întreaga istorie a omenirii, piramida sa fiind o dovadă a ingeniozității sale iar faptul ca generațiile următoare de egipteani l-au venerat ca pe un zeu dă dovadă de cât de multă influență a avut acesta față de regat.

"Educația este cheia care deschide uşa de aur a libertății".
George Washington

5. Probleme propuse

▪ Clasa a V-a

G:386. Determinați mulțimile A, B, C ştiind că îndeplinesc simultan următoarele condiții:
1) $C \setminus A = \{a;b\}$; 2) $A \cup C = \{a;b;c;d;g;h\}$; 3) $A \cap B = \{c;g;h\}$; 4) $(B \setminus C) \cup (C \setminus B) = \{c;d;e;f\}$

***Prof.* Mircea Mario Stoica**, Arad

G:387. Scrieți numărul 536^{2011} ca sumă de trei pătrate perfecte, distincte, nenule.

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

G:388. Să se arate că numărul 2^{96} are 28 de cifre.

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Neculai Stanciu, Buzău

G:389. Media aritmetică a vârstelor membrilor familiei Escu este 26, mama are 44 de ani, şi media aritmetică a vârstelor tatălui şi copiilor este 20. Câți copii are familia Escu?

D.M. Bătinețu – Giurgiu, Bucureşti, şi Neculai Stanciu, Buzău

G:390. Fie $a,\ b,\ c \in \mathbb{N}$ şi $A = 2^{2013} \cdot a + 3^{2013} \cdot b + 3^{2014} \cdot c$. Dacă A este par, să se arate atunci şi că $2012 \cdot a + 2013 \cdot b + 2011 \cdot c$ este par.

***Prof.* Iuliana Traşcă**, Olt

G:391. Găsiți numerele $\overline{ab}$ ştiind că $\overline{ab} = (a+b)ab + b$.

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

G:392. Arătați că orice număr de forma $\overline{xyxyxy}$ se divide cu 13.

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

G:393. Să se simplifice fracția $E = \dfrac{3^n \cdot 7^{n+2} + 3^{n+1} \cdot 7^{n+1}}{5^{n+1} + 5^n}, n \in \mathbb{N}$.

***Prof.* Claudia Popa**, Berca

G:394. Găsiți numerele naturale $n_1 \langle n_2 \langle n_3 \langle n_4 \langle n_5 \langle n_6$ care verifică relația:
$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2 + n_6^2 = 3224$

***Prof.* Ionel Tudor, Călugăreni**, Giurgiu

▪ Clasa a VI-a

G:395. Aflați numerele naturale de două cifre pentru care diferența dintre număr şi răsturnatul său să fie egală cu triplul cifrei zecilor

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

G:396. La un centru de excelență profesorul are 5n+17 probleme pe care le împarte în mod egal la cei 3n+3 elevi $(n \in \mathbb{N})$. Aflați numărul elevilor de la centrul de excelență, ştiind că acesta e mai mare decât 15 şi mai mic decât 36.

***Prof.* Iuliana Traşcă**, Olt

G:397.Arătați că
$\left[(-1)(-2)-(-3)(-1-2+3)+(-2)(-3)-(-1)(-2-3+1)+(-1)(-3)-(-2)(-3-1+2)\right](-1-2-3)=$
$=(-1)^3+(-2)^3+(-3)^3-3(-1-2-3)$

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

G:398. Arătați că numărul $a=2^n\cdot 5^{n+2}+4^n\cdot 25^{n-2}+31$ este divizibil cu 9.

***Prof.* Gheorghe Dârstaru**, Berca, Buzău

G:399. Să se determine numărul natural n astfel încât $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,6\cdot 7^n\langle x\langle 49^n\right\}$ să aibă 6 elemente.

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

G:400. Determinați toate perechile (x,y) de numere naturale care satisfac relația: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2011}$.

D.M. Bătinețu – Giurgiu, Bucureşti, şi Neculai Stanciu, Buzău

G:401. Fie proporțiile $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}$ şi $\frac{y}{4}=\frac{7}{9}$. Determinați x, y, z ştiind că $x\cdot y\cdot z=10800$, unde $x,y,z\in\mathbb{Q}^*$.

***Prof.* Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica**, Arad

G:402. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuația $\left(3^x+4^x+5^x\right)^{671}=6^{2013}$.

***Prof.* Ionel Tudor, Călugăreni**, Giurgiu

G:403. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația: $2013^{n^2+n}=(1+2+3+...+62+63-3)^{72}$.

***Prof.* Ion Stănescu, Smeeni**, Buzău

G:404. Determinati numerele naturale x,p pentru care avem: $3\cdot 2^x+1=7^p$.

***Prof.* Florin Stănescu,** Găeşti,Dâmbovița

▪ Clasa a VII-a

G:405. Se consideră numerele $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $a+b+c=8$, $a^2+b^2+c^2=20$ şi $abc\geq 11$. Să se determine maximul expresiei $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Prof**. Adrian Stan**, Buzău

G:406. a) Determinați numerele naturale nenule a_1,a_2,a_3,a_4 astfel încât $\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}+\frac{1}{a_4^2}=1$;

b) Determinați numerele naturale nenule $a_1,a_2,....,a_8$ astfel încât $\frac{1}{a_1^3}+\frac{1}{a_2^3}+...+\frac{1}{a_8^3}=1$.

Prof**. Lucian Tuțescu, Craiova, Prof. Dumitru Săvulescu**, Bucureşti

G:407. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $a\cdot b=1$. Arătați că $\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}\geq\frac{2}{3}$. În ce caz avem egalitate?

***Prof.* Ileana Didu, Dana Camelia**, Craiova

G:408. Determinați $m \in \mathbb{Q}$ astfel încât $\frac{8}{5}$ să fie soluție a ecuației $\frac{4x-m}{3} = m + \frac{x}{2}$.

***Prof*. Nicolae Ivăşchescu,** Craiova

G:409. Să se descompună în factori expresia $3^{2012} + 4 \cdot 5^{2012}$. ***Prof*. Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

G:410. Fie **a** un număr natural nenul care are 2013 divizori şi numărul b= 111...14444...4 în care cifra 1 se repetă de 1006 ori iar cifra 4 se repetă de 2012 ori. Să se arate că $\sqrt{a \cdot b}$ este număr irațional.

***Prof*. Valerica Pometescu**, Craiova

G:411. Să se arate că dacă A şi B sunt două numere formate din 2n respectiv n cifre identice egale cu a atunci numărul N = $\frac{a(A+16B)+9a^2}{9}$ este pătrat perfect.

***Prof*. Gheorghe Ghiță,** Buzău

G:412. Gigel, desenează pe o coală de hârtie punctele A, B, C, D, E astfel încât:
$AB = BE = 6$ cm, $DE = 2$ cm, $AB = 10$ cm, $EC = 8$ cm şi $AE = 16$ cm.
a) Determinați lungimea segmentului BC fără să vedeți punctele desenate de Gigel;
b) Executați desenul făcut de Gigel.

D.M. Bătinețu – Giurgiu, Bucureşti, şi Neculai Stanciu, Buzău

▪ Clasa a VIII-a

G:413. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $|2a+2b+c| \le 1$, $|6a+3b+2c| \le 1$, $|15a+10b+6a| \le 1$. Să se arate că $|a+b+c| \le 15$. Când avem egalitate ?

***Prof*. Marcel Chiriță,** Bucureşti

G:414. Arătați că numărul $2011^{2013}+1$, este compus.

D.M. Bătinețu – Giurgiu, Bucureşti, şi Neculai Stanciu, Buzău

G:415. Fie x, y numere reale cu proprietatea $\sqrt{x^2+y^2-2y+1} + \sqrt{x^2+y^2-6x+9} = \sqrt{10}$.
Aflați mulțimea valorilor pe care o ia expresia x^2+y^2.

***Prof*. Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

G:416. Determinați reprezentarea grafică a funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \max(2008x-1, 2010x+7)$, $x \in \mathbb{R}$.

***Prof*. Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica**, Arad

G:417. Două întreprinderi economice au acelaşi număr de salariați . Prima îşi măreşte efectivul cu zece membri , urmare a sporirii capacității de producție, a 2- a, cu 15 membri, urmare a extinderii

pieței de desfacere. Media geometrică a efectivelor ulterioare este $5\sqrt{506}$. Aflați numărul inițial de salariați.

***Prof.* Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

▪ Clasa a IX - a

L:268. Dacă $x^2+y^2=8xy,\ x,y\in\mathbb{R}_+^*$ atunci, să se calculeze $\left[\frac{x}{y}\right]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a.

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

L:269. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația $\left[\frac{2x-1}{100}\right]=1961$, unde [x] reprezintă partea întreagă a lui x.

***Prof.* Mircea Mario Stoica**, Arad

L:270. Suma a $2n$ numere întregi consecutive este înmulțită cu suma următoarelor $2n$ numere. Arătați că produsul obținut dă mereu acelaşi rest la împărțirea cu $4n^2$. (O extindere a unei probleme de concurs, Ungaria, 2010)

***Prof.* Nela Ciceu, Roşiori**, Bacău

L:271. Se dau cinci numere reale strict pozitive şi distincte. Calculând toate produsele formate din câte două dintre numerele date, obținem şapte produse distincte. Să se arate că, luate într-o anumită ordine, cele cinci numere formează o progresie geometrică.

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Neculai Stanciu, Buzău

L:272. Rezolvați în $\mathbb{R}^3$ sistemul de ecuații: $[x]-y=[y]-x=2[z]-x=\frac{2010}{2011}$, unde prin $[x]$ am notat partea întreagă a numărului real x.

D.M. Bătinețu – Giurgiu, Bucureşti, şi Neculai Stanciu, Buzău

L:273. Se consideră numerele reale x, y şi z care verifică sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ xy+yz+xz=2 \end{cases}.$$ Calculați $\max(x)+\min(x)$.

***Prof.* Roxana Mihaela Stanciu**, Buzău

L:274. Să se rezolve în $\mathbb{R}^n$ sistemul:

$$\begin{cases} 2x_1^2+2^2x_2^2+...+2^nx_n^2=\dfrac{2^{n+2}}{2^n-1} \\ |x_1+x_2+...+x_n|=2 \end{cases}.$$

***Prof.* Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

L:275. Fie $x_1,x_2,...,x_n\in(0;\infty), n\geq 2$ şi $x_1^2+x_2^2+....+x_n^2=S$. Arătați că

$$\frac{x_1^3}{S-x_1^2}+\frac{x_2^3}{S-x_2^2}+...+\frac{x_n^3}{S-x_n^2}\geq\frac{\sqrt{nS}}{n-1}.$$ În caz avem egalitate?

***Prof.* Lucian Tuțescu,Craiova, *Prof.* Ion Nedelcu**, Ploieşti

L:276. Să se reprezinte într-un sistem de axe xOy mulțimea $A=\{P(x,y)\,\|x+y|+|x-y|=1\}$.

***Prof.* Costică Ambrinoc**,Rm. Sărat

L:277. Dacă triunghiul ABC este dreptunghic, atunci:

a) $\left(\sum a^2\right)^3 = 4\left(\sum a^6\right)+12a^2b^2c^2$; b) $\left(\sum a\right)\left(\sum a^2\right)\left(\sum a^3\right) \rangle\ 4\left(\sum a^6\right)+12a^2b^2c^2$.

***Prof*. Marcel Chiriță**, Bucureşti

L:278. Să se rezolve ecuația: $\frac{a_1}{x-a_5}+\frac{a_2}{x-a_4}+\frac{a_3}{x-a_3}+\frac{a_4}{x-a_2}=4$, ştiind că numerele a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 sunt în progresie aritmetică.

***Prof*. Gheorghe Ghiță,** Buzău

L:279. Să se arate că pentru orice trei numere reale pozitive a,b,c cu $abc=1$ are loc inegalitatea:

$$\frac{a^{1005}b^{1005}}{a^{2013}+a^{1005}b^{1005}+b^{2013}}+\frac{b^{1005}c^{1005}}{b^{2013}+b^{1005}c^{1005}+c^{2013}}+\frac{c^{1005}a^{1005}}{c^{2013}+c^{1005}a^{1005}+a^{2013}}\le 1.$$ Generalizare.

***Prof*. Ovidiu Ţâţan**, Râmnicu Sărat

L:280. Se dă triunghiul ABC în care AC=2AB şi fie $D\in(AB)$, $E\in(AC)$ astfel încât $\frac{AD}{AB}=\frac{1}{3}$ şi $\frac{AE}{AC}=\frac{3}{4}$. Să se determine raportul în care dreapta DE împarte bisectoarea unghiului A.

***Prof*. Liviu Smarandache, *Prof*. Ionuț Ivănescu**, Craiova

L:281. În exteriorul triunghiului echilateral ABC se construieşte triunghiul BDC astfel încât $m(\widehat{BCD})=10^0$ şi $m(\widehat{CBD})=20^0$. Să se demonstreze că triunghiul ABD este isoscel.

***Prof*. Nela Ciceu,** Roşiori, Bacău

▪ Clasa a X - a

L:282. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația: $x^4+12x^2-36=7x^2\sqrt{x^2-3}$.

***Prof*. dr. Mihály Bencze,** Braşov

L:283. Rezolvați în $\mathbb{R}^2$ ecuația: $x^2-2x-3\sin y-4\cos y+6=0$.

D.M. Bătinețu – Giurgiu, Bucureşti, şi Neculai Stanciu, Buzău

L:284. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $2^{x^2-2x}+x^4-4x^3+4x^2+x-2=2^{x-2}$.

***Prof*. dr. Mihály Bencze,** Braşov

L:285. Fie x un număr strict pozitiv diferit de 1. Să se demonstreze că triunghiul ABC este echilateral dacă şi numai dacă are loc egalitatea $x^{2\sin^2\frac{A}{2}}+x^{2\sin^2\frac{B}{2}}+x^{2\sin^2\frac{C}{2}}=3\sqrt{x}$

***Prof*. Marcel Chiriță**, Bucureşti

L:286. Rezolvați în $\mathbb{R}_+^*$ sistemul de ecuații : $\begin{cases}\frac{1}{x+y+x}=1\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xyz}=36\end{cases}$

***Prof*. Roxana Mihaela Stanciu,** Buzău

L:287. Se consideră numerele $a,b,c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a+b+c=4$, $a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a=4$ şi $a\cdot b\cdot c \geq 2$. Să se arate că $(a^3+a^2+1)(b^3+b^2+1)(c^3+c^2+1) \leq 11^3$.

***Prof*. Adrian Stan**, Buzău

L:288. Să se demonstreze inegalitatea:

$$C_n^1 + 2\sqrt{2}C_n^2 + ... + n\sqrt{n}C_n^n < n\cdot\sqrt{\frac{n+1}{2}}\cdot 2^{n-1}, \forall n \in N, n>1.$$

***Prof*. Constantin Rusu**, Râmnicu Sărat

L:289. Fie $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ numere strict pozitive astfel încât $x_1+x_2+x_3+...+x_n \geq 1$ şi $a\rangle 1$ un număr real fixat. Să se arate că $x_1a^{x_1}+x_2a^{x_2}+x_3a^{x_3}+...+x_na^{x_n} \geq \sqrt[n]{a}$.

***Prof*. Marcel Chiriță**, Bucureşti

▪ Clasa a XI - a

L:290. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & -10 & * \\ -5 & * & 3 \end{pmatrix}$. Înlocuind asteriscurile cu numere întregi astfel încât după completare, suma tuturor numerelor de pe fiecare linie, fiecare coloană şi pe cele două diagonale să fie egale. Este posibil ?

***Prof*. Constantin Dinu**, Buzău

L:291. Fie mulțimea $G=\left\{X \in M_2(\mathbb{C}) \middle| X^8 = O_2\right\}$. Arătați că dacă $X \in G$ atunci $X^2 = O_2$.

***Prof*. Gheorghe Dârstaru**, Berca, Buzău

L:292. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 9}\left(x^{\sqrt{\log_x 5}} - 5^{\sqrt{\log_5 x}}\right)$.

***Prof*. Adrian Stan**, Buzău

L:293. Fie şirul $(a_k)_{k\geq 1}$, definit prin $a_{n+m} = a_n + a_m + mn$ şi $a_1 = 1$. Calculați :

a) a_{2013} ; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{2n^3+3n^2+n}$.

D.M. Bătinețu – Giurgiu, Bucureşti**, şi Neculai Stanciu,** Buzău

L:294. Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$a_n = \lim_{x\to-\infty}\frac{n\left(\sqrt[2n+1]{\frac{x^2}{3}+\sqrt{\frac{x^3}{27}+\frac{x^4}{4}}}+\sqrt[2n+1]{\frac{x^2}{3}-\sqrt{\frac{x^3}{27}+\frac{x^4}{4}}}\right)}{\sqrt[2n+1]{x^2}}$$ este convergent.

***Prof*. Ionel Tudor,Călugăreni,** Giurgiu

▪ Clasa a XII - a

L:295. Fie $A=\{leu\ ;tigru\ ;urs\}$. Pe A definim o lege de compoziție asociativă notată " $\circ$ " definită prin tabelul alăturat:

0	leu	tigru	urs
leu	tigru	urs	leu
tigru	urs	leu	tigru
urs	leu	tigru	urs

a) Câte legi de compoziție comutative se pot defini pe A?
b) Care este elementul neutru al legii ?
c) Calculați $leu^{2013}=leu\circ\ leu\circ....\circ leu;\ (2013\ de\ leu)$;
d) Rezolvați ecuația $tigru\circ x\circ leu=urs$.

***Prof.* Constantin Dinu**, Buzău

L:296. Determinați numerele prime p astfel încât numărul $5^{p^2}+6^{p^2}$ să se dividă cu p.

Elevi Spătaru Andrei, Nicolaescu Andrei, Craiova

L:297. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel în care $1\neq 0$ şi din $xy=1$ rezultă $yx=1$. Dacă $a,b\in A$, şi există $u\in A$, u inversabil cu $ua=au, ub=bu$ astfel încât $uab+a+b=0$ atunci: $ab=ba$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

L:298. Fie x_1,x_2,x_3 rădăcinile ecuației $x^3-10x^2+28x-18=0$. Să se arate că $\sqrt{x_1}+\sqrt[3]{x_2}+\sqrt[4]{x_3}>3$.

***Prof.* Ovidiu Ţâţan**, Râmnicu Sărat

L:299. Să se calculeze: $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x+\cos x}{(1+\sin x+\cos x)^n}dx,\ n\in N$.

***Prof.* Constantin Rusu**, Râmnicu Sărat

L:300. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2 & ,x\langle 1\\ \sqrt{x^2-6x+9}, & x\geq 1\end{cases}$ admite primitive. Să se scrie o primitivă a lui f pe $\mathbb{R}$.

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

ŞTIAŢI CĂ .....?

...celebrele cuvinte „ Dubito ergo cogito. Cogito ergo sum" (Mă îndoiesc, deci cuget. Cuget deci exist") aparțin matematicianului Rene Descartes (1596-1650).

Matematicianul şi filozoful francez **Rene Descartes** publică în 1637 lucrarea sa **„ Discurs despre metoda de a-şi conduce rațiunea şi de a căuta adevărul în ştiințe"**, punând astfel bazele filozofiei moderne bazate pe cunoaştere şi pe certitudini matematice.

Cuvintele de mai sus reprezintă chiar esența sistemului său filozofic, şi anume, în demersul său de a găsi adevărul filozofic el supune percețiile senzoriale şi afirmațiile despre om şi despre lume unui proces elementar de scepticism cum ar fi că „ simțurile pot înşela, lumea exterioară poate fi stimulată, adevărat este însă numai ceea ce poate fi clar recunoscut".

QUICKIES

A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader's name, full address, and an e-mail address. Submited solutions should arrive before August 31, 2013.

PROPOSALS - QUICKIES

Q1. Proposed by: Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania.
Let $v_1 = 1, v_2 = 1, v_{n+1} = 8v_n - v_{n-1}$, for $n \in \{2,3,4,...\}$. Prove that v_n is divisible by 7 if and only if n is divisible by 3.

Q2. Proposed by: Mihály Bencze, Braşov, Romania.
Solve in positive real numbers the equation:

$$\log_2\left(\frac{\log_2\left(x+\frac{1}{x}\right)}{3x^2-2x^3}\right) = 2^{3x^2-2x^3} - x - \frac{1}{x}.$$

Q3. Proposed by: D.M. Bătinețu-Giurgiu, ''Matei Basarab'' National College, Bucharest, Romania and Neculai Stanciu, ''George Emil Palade'' General School, Buzău, Romania.
Let $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, d_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \forall n \in N^*$. Calculate : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{d_n - e}{e_n - e}$.

Q4. Proposed by: Adrian Stan, ''Costin Nenițescu'' Tehnological College, Buzău, Romania.
Determine the area of a right angled triangle in the function of its semiperimeter and the length of hypotenuse.

Pionierat Matematic : Inegalitatea IONESCU – WEITZENBÖCK

Pionierii descoperirii: D. M. Bătinețu-Giurgiu şi Neculai Stanciu.
Inegalitatea: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$, valabilă în orice triunghi ABC, cu notațiile obişnuite, a fost cunoscută în matematica internațională ca inegalitatea lui *Weitzenböck* , pentru că a apărut în anul 1919, când *Roland Weitzenböck* a publicat în *Mathematische Zeitschrift*, Vol. 5, Nr. 1-2, pp. 137-146 articolul *Uber eine Ungleichung in der Dreiecksgeometrie*.
D. M. Bătinețu-Giurgiu şi N. Stanciu, au găsit aceeaşi inegalitate, ca problema 273, în Gazeta Matematică, Vol. III (15 Septembrie 1897 – 15 August 1898), Nr. 2 , Octombrie 1897, la pagina 52, autor *Ion Ionescu* - unul dintre cei patru ''stâlpi'' ai Gazetei Matematice. Prin urmare, inegalitatea de mai sus, o vom numi **Inegalitatea IONESCU – WEITZENBÖCK.**

„ Realitatea este diferită pentru fiecare dintre noi. Un obiect frumos, văzut de un spirit mediocru, produce asupra acestuia un efect mediocru".

Arthur Schopenhauer

„ Matematicianul e îmblânzitorul ce a domesticit infinitul” .
Lucian Blaga

6. Caleidoscop matematic

1. Curiozități aritmetice

Continuare din numărul trecut

11. $\frac{10^{11}-1}{9}=11.111.111.111$, număr compus. $267444^2-245795^2=11.111.111.111$;

$5.555.555.556^2-5.555.555.555^2=11.111.111.111$; $21649\times 513239=11.111.111.111$

12. $\frac{10^{12}-1}{9}=111.111.111.111$, număr compus.

$18518518520^2-18518518517^2=111.111.111.111$; $5050505056^2-5050505045=111.111.111.111$;

$55.555.555.556^2-55.555.555.555^2=111.111.111.111$; $3\times 7\times 11\times 13\times 37\times 101\times 9901=111.111.111.111$.

13. $\frac{10^{13}-1}{9}=1.111.111.111.111$, număr compus. $132687920^2-132683733^2=1.111.111.111.111$;

$53\times 79\times 265371653=1.111.111.111.111$

$555.555.555.556^2-555.555.555.555^2=1.111.111.111.111$;.

14. $\frac{10^{14}-1}{9}=11.111.111.111.111$, număr compus.

$505050505056^2-505050505045^2=11.111.111.111.111$; $11\times 239\times 4649\times 909091=11.111.111.111.111$

$5.555.555.555.556^2-5.555.555.555.555^2=11.111.111.111.111$;

15. $\frac{10^{15}-1}{9}=111.111.111.111.111$, număr compus.

$185185185185520^2-185185185185517^2=111.111.111.111.111$;

$55.555.555.555.556^2-55.555.555.555^2=111.111.111.111.111$;

$3\times 37\times 41\times 271\times 90090991=111.111.111.111.111$.

16. $\frac{10^{16}-1}{9}=1.111.111.111.111.111$, număr compus.

$50505050505056^2-50505050505045^2=1.111.111.111.111.111$;

$555.555.555.555.556^2-555.555.555.555.555^2=1.111.111.111.111.111$;

$11\times 17\times 73\times 101\times 137\times 5882353=1.111.111.111.111.111$;

17. $\frac{10^{17}-1}{9}=11.111.111.111.111.111$, număr compus;

$2682647040^2-2680575317^2=11.111.111.111.111.111$;

$5.555.555.555.555.556^2-5.555.555.555.555.555^2=11.111.111.111.111.111$;

$2071723\times 5363222357=11.111.111.111.111.111$.

18. $\frac{10^{18}-1}{9}=111.111.111.111.111.111$, număr compus;

$185185185185185520^2-185185185185185517^2=111.111.111.111.111.111$;

$5050505050505056^2 - 5050505050505045^2 = 111.111.111.111.111.111;$
$55.555.555.555.555.556^2 - 55.555.555.555.555.555^2 = 111.111.111.111.111.111;$
$3^2 \times 7 \times 11 \times 13 \times 19 \times 37 \times 52579 \times 333667 = 111.111.111.111.111.111.$

19. $\frac{10^{19}-1}{9} = 1.111.111.111.111.111.111$, număr prim;

$555.555.555.555.555.556^2 - 555.555.555.555.555.555^2 = 1.111.111.111.111.111.111.$

20. $\frac{10^{20}-1}{9} = 11.111.111.111.111.111.111$, număr compus;

$505050505050505056^2 - 505050505050505045^2 = 11.111.111.111.111.111.111$
$5.555.555.555.555.555.556^2 - 5.555.555.555.555.555.555^2 = 11.111.111.111.111.111.111;$
$11 \times 41 \times 101 \times 271 \times 9091 \times 99009901 = 11.111.111.111.111.111.111.$

prof. dr. ing. Dumitru Panțuru

2. Înmulțirea unui număr de două cifre cu 11

Rezultatul înmulțirii unui număr de 2 cifre cu 11 este un număr de 3 cifre format din cel de 2 cifre în care se intercalează la mijloc cifra formată din suma celor două cifre ale numărului dat.

$$\begin{array}{r} a\ b\bullet \\ \underline{1\ 1} \\ a\ b \\ \underline{a\ b\ \ } \\ a(a+b)b \end{array}$$

Exemple: $62 \cdot 11 = 6(6+2)2 = 682$; $54 \cdot 11 = 5(5+4)4 = 594$;

Dacă suma celor două cifre este mai mare decât 9 atunci cifra unităților acestuia se va păstra la mijlocul rezultatului iar cifra sutelor noului număr va crește cu o unitate

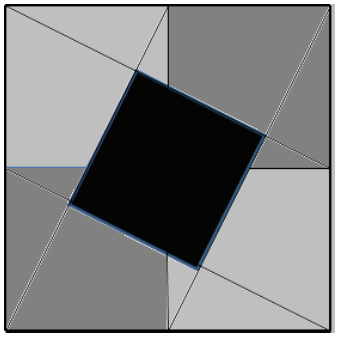
Exemple: $67 \cdot 11 = 6(6+7)7 = 6(13)7 = 737$; $78 \cdot 11 = 7(7+8)8 = 7(15)8 = 858$

3. Domnul Goe

Mam'mare, mamița și tanti Mița au plecat cu trenul să-l ducă pe Goe în vizită la București. În compartimentul în care au bilete, din cele 8 locuri s-a ocupat doar un loc la fereastră. În câte moduri se pot așeza cele trei doamne pe locurile rămase libere dacă domnul Goe stă mai mult pe hol.

4. Cântarul

Mai mulți copii se află în fața unui cântar ce indică doar greutăți mai mari de 200 kg. Cum poate fiecare copil să se cântărească totuși ?

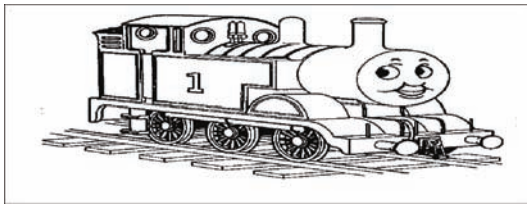


5. Aria pătratului

Fără să se calculeze, doar privind figura alăturată să se exprime aria pătratului negru din mijloc.

6. Trenul

Un tren este format din 7 vagoane din care unul este restaurant și unul de poștă. În câte moduri poate fi format trenul astfel încât vagonul restaurant să fie lângă locomotivă și cel de poștă să fie ultimul.



„ Secretul succesului: cazi de şapte ori; te ridici de opt ori ”.
Proverb chinez

7. Poşta redacţiei

Dragi cititori, elevi şi profesori, a apărut **numărul 11** al revistei de matematică „ **SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noştri, şi care, sperăm noi, va aduna tot mai mulţi elevi şi profesori împreună, din judeţul Buzău şi nu numai, pentru a face din obiectul matematicii o activitate performantă.

Profesorii şi elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciţii şi probleme cu enunţ şi rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătăţii calitatea acestei reviste, o pot face trimiţând materialele membrilor colectivului de redacţie sau pe adresa de e_mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate(**salvate în Word 2003**) , fie scrise de mână şi scanate. **Materialele primite trebuie să fie originale şi să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise şi către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparţine redacţiei.

Elevii care doresc să trimită rezolvările problemelor, trebuie să ia legătura cu profesorii lor şi să respecte condiţiile ca fiecare problemă să fie rezolvată pe o singură foaie cu specificarea numărului problemei, şi a autorului ei, iar la sfârşitul soluţiei să-şi treacă numele şi prenumele, clasa şi profesorul său, şcoala şi localitatea.(Indicativele **G** şi **L** sunt pentru diferenţierea pe invăţământ gimnazial respectiv liceal) Fiecare elev poate rezolva şi trimite problemele destinate clasei în care se află şi pe cele ale ultimelor două clase imediat inferioare precum şi pe cele din clasele superioare către profesorul clasei. Fiecare rezolvare corectă şi completă se va nota cu un punct iar în funcţie de posibilităţi, elevii cu cele mai mari punctaje ale profesorilor care colaborează cu revista vor fi premiaţi cu diplome şi cărţi.

Facem pe această cale o invitaţie către toţi profesorii de matematică care apar în revistă, de a sprijinii şi promova în continuare revista în rândul elevilor, iar cei cărora li se publică articole să comande un număr mai mare de exemplare.

Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările şi comenzile pentru **numărul 12** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **1 Octombrie 2013**. Vă urăm succes şi vă aşteptăm.

Răspunsuri la Caleidoscop matematic:

3. Mam-mare se poate aşeza în 7 moduri. Pentru fiecare din acestea, mamiţa se poate aşeza pe celelalte 6 locuri rămase libere iar tanti Miţa pe celelalte 5 locuri, aşadar împreună în acelaşi timp se pot aşeza în $7\cdot 6\cdot 5=210$ **moduri.**

4. Se pun toţi pe cântar şi coboară cel ce vrea să-şi găsească greutatea. Diferenţa dintre greutatea iniţială şi cea de pe urmă este de fapt greutatea copilului.

5. După cum se observă, figura este formată din cinci pătrate identice, prin urmare, aria pătratului negru reprezintă o cincime din aria pătratului mare.

6. Cele 5 vagoane care mai rămân să fie aranjate între ele ne dă un număr de $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$ **de posibilităţi de formare a trenului.**

Rubrica rezolvitorilor de probleme

Şcoala cu clasele I-VIII, Smeeni
Clasa a V-a: 40p. Bunea Sidonia; 38p.Vasilescu Răzvan; 25p.Popescu Răzvan; 20p. Dumitru Ştefan;
Clasa a VI-a : 36p. Ion Mălina; 35p. Bucur Rebeca; 30p. Bănică Georgiana, Păun Andreea;
Clasa a VII-a: 50p. Chiriacescu Roxana, 45p. Nica Camelia; 40p.Tescan Irina;
Clasa aVIII-a: 70p. Bulgarea Alexandra; 60p. Neacsu Laura; Ionaşcu Daniel; **Prof. Stanescu Ion.**
Şcoala cu clasele I-VIII nr. 1, Padina
Clasa a V-a: 65p. Năstase Teodora; **Clasa a VI-a**: 55p. Drăghici George, 49 p. Mircescu Corina, Jega Cristian, Herța Adelina 46p. Drăghici Silvan, 43p. Dumitroiu Andreea, 39p. Nica Ionuț, 38 p. Balica Gabriela, Călin Elena; **Clasa a VII-a**: 65p. Bocioacă Andreea, 60p. Dumitru Georgiana, 40p. Cuzuma Claudia, Negulescu Cristina, 35p Dumitru Georgiana, Ilie Ionuț; **Clasa a VIII-a**: 60p. Năstase Daniel; 48p. Fleoarcă Andreea, Dumitrache Diana, 45p. Ciocan Mirela Vasilica. **Prof. Lăcrimioara Năstase.**
Scoala cu clasele I-VIII, "Tristan Tzara" Moinești, Bacău
Clasa a V-a : 20p. Ailincai Iulian, Ciubotariu Costin, Păduraru Cătălin, Munteanu Diana, Dobrovat Alina ;
Clasa a VI-a: 32p. Gherman Andrada ; 31p. Merla Andrei, Maziliu Alexandra ;
Clasa a VII-a: 37p. Lila Ionut, David Alexandra, Munteanu Gheorghe; **Prof. Cornelia Gurău;**
Şcoala cu clasele I-VIII "Gh. Popescu " Mărgineni –Slobozia, Olt
Clasa a VI-a: 35p. Traşcă Ionuț- Vlăduț, Ene Daniela- Iuliana, Vochin Ioan – David, Moisescu Denis, Costea Nicoleta, Nedelea Adrian Ilie, Mămularu Cristina, Fuior Daniela; **Prof. Iuliana Traşcă.**
Liceul Tehnologic „Costin Nenițescu", Buzău
Clasa a IX-a : 20p. Stroe Ionuț, Blăjanu Ioana, Dogaru Ana Maria, Croitoru Andrei.
Clasa a X-a: 40p. Tureac Andrei, Dragomir Ionuț, Grozea Cosmin, Pîrnog Georgiana, Ciopec Corina, Dobrin Iulian, Picu Elena Daniela, Stoian Cristina, Sterpu Denisa; **Clasa a XI-a**: 52p. Marcu Cristina, Lică Adriana, Naghi Carmen, Gheorghiță Dinel; Constantin Nuți. **Prof. Stan Adrian.**
Şcoala cu clasele I-VIII "George Emil Palade " Buzău
Clasa a VI-a: 40p.Ciocan Cristian, Vasile Rucsandra, Zota Mădălina, Bordei Valentina, Neagu Bianca, Dumitrache Radu. **Clasa a VII-a**: 45p. Burada Andrei, Stan Eduard, Marin Cristian, Văceanu Ramona, Duca Miruna, Mutuligă Teodor, Sandu Alexandra, Şerban Ionuț, Ştefănescu Raluca.
Clasa a VIII-a: 49p. Mardale Cosmin, Mântoiu Antoniu, Răican Mihaela. **Prof. Neculai Stanciu.**
Scoala cu clasele I-VIII, nr. 1 Rm Sărat
Clasa a VII-a: 40p. Jercan Adrian, Nacu Cătălin.
Clasa a VIII-a: 57p. Iaru Ioana Victoria, Vasile Dragoş Mitruț, Răpeanu Miruna. **Prof. Valerica Roşu.**
Scoala cu clasele I-VIII, nr. 2 Cugir, Alba
Clasa a VI-a: 46p. Codrea Maria, Codrea Marian, Muntean Ioan, Molodeț Dragoş, Sideriaş Alexandru; **Prof. Mariana Mitea.**
Colegiul Economic Buzău.
Clasa a XI-a : 20p. Pascu Georgiana, Dragomir Liviu.**Clasa a XII-a** : 30p. Sarbu Raluca. **Prof. Dârstaru Gheorghe.**
Liceul Tehnologic „ Sf. Mc. Sava", Berca
Clasa V-a: 17p. Păpătoiu Andrei; **Clasa a VI-a**: 29p. Neacşu Teodor. **Prof. Dârstaru Gheorghe.**
Colegiul Național „ Frații Buzești", Craiova
Clasa a V-a: 20p.Ciornei Andreea, **Prof. Maria Ionescu**; **Clasa a VI-a:**24p. Drăghici Răzvan, **Prof. Maria Ionescu**. 24p. Andrei Tudosie, Trandafir Marius, **Prof. Puchiu Ramona**.
Clasa a VII-a : 29p. Andrei Bulmaci, **prof. Maria Ionescu**; **Clasa a VIII-a**:30p. Badea Cristina, **Prof. Grama Daniela**;
Colegiul National „ Elena Cuza", Craiova
Clasa a V-a: 20p.Bălan Roberta, **Prof. D. Ciurcea**;
Scoala nr. 1 Traian, Craiova
Clasa a VII-a: 30p. Gulin Cătălin, Prof. M. Mărculescu.
Scoala nr. 21, „ Gheorghe Titeica", Craiova
Clasa a VIII-a : 30p. Burada Alexandru, Prof. Ion Mizaru.
Scoala nr. 22 „ Mircea Eliade", Craiova
Clasa a VI-a : 25p. Gîrlea Radu; **Clasa a VII-a**: 30p. Gheonea Cristina, **Prof. Florin Banea**.
Scoala nr. 24, Craiova, Clasa a V-a , 20p. Moisă Radu, **Prof. M. Pătraşcu**;
Liceul Pedagogic „ Carmen Sylva", Timişoara, 34p**.** Tulea Antonia, Prof. **Babişca Marioara**.

CONCURSUL JUDEȚEAN DE MATEMATICĂ " SCLIPIREA MINȚII "
EDITIA a VII- a, 03.11.2012

SELECȚIUNI DE IMAGINI DE LA CONCURS

REVISTA SCLIPIREA MINȚII
NR. 11 ANUL VI - 2013

Cuprins

1. Istoria matematicii
- Matematica Antichității de prof. Adrian Stan 1

2. Articole și note matematice
- Observații asupra unor noțiuni din geometria triunghiului de prof. Constantin Apostol 3
- Metode de obținere a unor inegalități de prof. Constantin Rusu 6
- Aplicații de analiză matematică de prof. Florin Stănescu 7
- Identități remarcabile în triunghi de prof. dr. Mihaly Bencze 9
- Consecințe numerice ale unei inegalități algebrice de prof. D. M. Batinetu Giurgiu, prof. Nicolae Ivăşchescu, prof. Neculai Stanciu 10
- Aplicații practice ale funcției de gradul al doilea de prof. Adrian Stan 11
- Some discrete inequalities de prof. José Luis Díaz-Barrero 14
- New proofs of Cauchy-Buniakovski-Schwarz' inequality and Bergström's inequality de D.M. Bătinețu-Giurgiu and Neculai Stanciu 15

3. Examene și Concursuri 16

4. Probleme rezolvate 25

5. Probleme propuse 37

6. Caleidoscop matematic 45

7. Poșta redacției 47

VIZITATI SI REVISTA ONLINE DE MATEMATICA MATEINFO.RO

editgraph

LEI 10 RON

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601