

SCLIPAREA MINTII

REVISTĂ NAȚIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICĂ ; PUBLICAȚIE SEMESTRIALĂ, AN IV, NR VIII, 2011

SM

ISTORIA MATEMATICII
PROBLEME PROPUSE
PROBLEME REZOLVATE
TESTE

SM

CALEIDOSCOP MATEMATIC

Societatea de Științe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

ISSN 2247 - 6601
ISSN-L 2247 - 6601

SCLIPAREA MINTII

Revistă națională de cultură matematică, publicație semestrială, An IV, Nr. VIII, NOIEMBRIE 2011, BUZĂU



COLECTIVUL DE REDACTIE



▪ Membrii onorifici:

Constantin Apostol – Președinte de onoare

Constantin Rusu - Președinte Filiala Ramnicu Sărat a
Societății de Științe Matematice

Lenuța Pîrlog – Președinte Filiala Buzău a Societății de
Științe Matematice

D. M. Băținețu – Giurgiu **Titu Zvonaru**
Nicolae Ivășchescu **Mihály Bencze**

▪ Director:

Neculai Stanciu

▪ Redactor șef:

Adrian Stan

▪ Redactori principali:

Constantin Dinu **Ana Panaitescu**
Andrei Octavian Dobre **Iuliana Trască**
Gabriela Nicoleta Lupșan

Membri :

Luca Tuță, **Lăcrimioara Năstase**, **Natalia Pleșu**, **Florentina Popescu**, **Ciprian Cheșcă**, **Gheorghe Dârstaru**, **Ligia Struțu**, **Gheorghe Struțu**, **Delia Naidin**, **Ion Stănescu**, **Simion Marin**, **Gherghina Manea**, **Marcela Marin**, **Maria Anton**, **Ion Lupșan**, **Constantin Lupșan**, **Ion Radu**, **Ovidiu Țătan**, **Marius Stan**, **Mirela Stanciu**, **Cristian Cosmin Brânză**, **Marioara Vrabie**, **Florică Marchidanu**, **Gabriela Marinescu**, **Florică Anton**, **Mirela Lupșan**, **Violeta Corbu**, **Cornelia Gurău**, **Valerica Roșu**, **Mariana Mitea**, **Laura Tănase**, **Doina Stoica**, **Mircea Mario Stoica**, **Jamel Ghanouchi**, **Jose Luis Diaz – Barrero**, **Florin Stănescu**, **Vasile Prefac**, **Maritanța Prefac**, **Roxana Stanciu**, **Daniela Ion**, **Florică Anton**, **Cornelia Drăgan**

CUPRINS

**ISTORIA
MATEMATICII..... 1**

**ARTICOLE ȘI NOTE
MATEMATICE..... 2**

**EXAMENE ȘI
CONCURSURI..... 13**

**PROBLEME
REZOLVATE..... 14**

**PROBLEME
PROPUSE 36**

**CALEIDOSCOPI
MATEMATIC..... 43**

**RUBRICA
REZOLVATORILOR..... 44**



GÂNDEȘTE CORECT !

Tipar: **editgraph**
www.editgraph.ro



REDACTIA

Grupul Școlar „Costin Nenitescu”, Buzău,
Strada Transilvaniei, Nr. 134,
Cod. 120012, Tel. 0238725206
e-mail: ady_stan2005@yahoo.com
Vizitați www.liceulnenitescu.rdsbz.ro



„Cel mai iscusit învățător este timpul ”.
Euripide

1. Istoria Matematicii

200 de ani de la nașterea lui Evariste Galois

de prof. Adrian Stan, Buzău



Pe **25 Octombrie** s-au împlinit 200 de ani de la nașterea matematicianului francez **Evariste Galois** (25 Octombrie 1811, Bourg – la – Reine – 31 Mai 1832, Paris) unul dintre fondatorii algebrei moderne prin introducerea în 1830 a conceptului de **grup**.

Elev fiind la Colegiul Royal de Louis – le – Grand nu se împacă cu rigorile școlii devenind plictisit de studii cu excepția matematicii pe care o studiază din cărțile lui Lagrange și Legendre sub îndrumarea profesorului său Louis Richard care îl apreciază foarte mult.

Încă de pe băncile școlii redactează o serie de lucrări ce îl determină să se înscrie la 16 ani la examenul de la prestigioasa școală Politehnică. În două rânduri însă, este picat la acest examen, probabil, din cauză că examinatorii nu i-au înțeles argumentarea ideilor sale originale, au spus unii comentatori mai târziu.

Mult timp matematicienii au fost preocupați să determine o ecuație algebrică de grad mai mare ca patru ce poate fi rezolvată cu ajutorul radicalilor și nu cu ajutorul funcțiilor trigonometrice sau a altor tipuri de funcții. În 1799, italianul **Paolo Ruffini** a încercat demonstrarea acestui fapt însă rezolvarea a venit de abia în 1824 de la un matematician norvegian **Niels Abel**(1802- 1829), (teorema Abel - Ruffini) un alt destin tragic, mort de tânăr din cauza tuberculozei.

Independent de Abel, studiul ecuațiilor polinomiale l-a condus pe **Galois** la noțiunea de grup. Teoria dezvoltată de el investighează conceptul de simetrie în mod abstract, făcând legătura între studiul structurii și al spațiului. El a dat un criteriu pentru existența soluțiilor unei ecuații algebrice în termeni de grup de simetrie al rădăcinilor polinomului.

Deși cercetările sale au fost trimise în două rânduri în 1829, și 1830, la Academia Franceză de Științe, acestea au fost pierdute se pare de către **Cauchy** și respectiv **Fourier**. De abia în 1831 la un memoriu asupra teoriei ecuațiilor a primit însă, un răspuns negativ din partea Academiei. Membrii comisiei din care făcea parte și ilustrul **Poisson** nu au înțeles ideile originale ale lui **Galois** și au crezut eronat că lucrarea conține o serie de greșeli și nu au acceptat-o ca atare.

Spirit revoluționar întrucât se trăgea dintr-o familie cu vederi liberale, pro republicane, a fost de multe ori implicat în conflicte cu susținătorii regelui și chiar arestat.

Cu o noapte înainte de un duel provocat de dușmanii politici și astfel înainte de moartea sa, **Galois** și-a redactat succint o serie de rezultate ale muncii sale pe care i le-a adresat prietenului său **Auguste Chevalier**. Manuscrisul ce conținea și o serie de noi teoreme și conjecturi a fost studiat mai târziu de către **Joseph Lioville** care l-a publicat în 1846 remarcând contribuția originală a lui **Galois**. În 1870, **Camille Jordan** a continuat munca de studiere a operei lui Galois publicând o carte în care îi face un elogiu activității acestuia. Începea era teoriei grupurilor.

Grupurile de permutări au început să fie studiate de către **Cauchy**, **Cayley** dădea în 1854 prima definiție abstractă pentru grupuri finite. **Felix Klein**, axiomatizează geometria pe baza grupurilor de simetrie în 1872, ca parte a programului de la Erlangen. În 1884, **Sophus Lie** pune bazele studiului grupurilor Lie. Printre alți matematicieni ce au dezvoltat teoria grupurilor amintim de **Camille Jordan** (1870), **Walther von Dyck**(1882) cel care a dat prima definiție modernă a grupurilor abstracte, **Frobenius**, **Burnside**. Aplicații ale grupurilor le întâlnim în geometria algebrică, în teoria numerelor, în criptografie, în fizică la înțelegerea teoriei relativității, în chimie în domeniul cristalografiei, în informatică. Plecând de la conceptul de grup s-au dezvoltat conceptele de inel, corp, creîndu-se astfel o întreagă teorie numită **Teoria lui Galois**. În onoarea matematicianului, astronomii au denumit un crater de pe lună cu numele său.

Bibliografie: Caleidoscop Matematic. Vasile Bobancu. Editura Niculescu. București. 2001.

„Toți ne priceam să dăm sfaturi, dar când
greșim noi înșine, nu băgăm de seamă”
Euripide

2. Articole si note matematice

Aspecte referitoare la locurile geometrice

de prof. Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

În această lucrare se prezintă noțiunea de *loc geometric*, etapele care trebuie urmate în rezolvarea unei probleme de loc geometric, se dă o listă de locuri geometrice fundamentale urmate de câteva surse bibliografice de aplicații.

Noțiunea de loc geometric. Un *loc geometric* este o mulțime de puncte M care au o proprietate comună. Punctele pot să aparțină planului pe care îl notăm cu P sau spațiului pe care îl notăm cu S .

Rezolvarea unei probleme de loc geometric constă în parcurgerea următoarelor trei etape și anume:

1) $M \neq \emptyset$; 2) Construirea mai multor puncte ale mulțimii M și intuirea unei figuri geometrice F care să le conțină. Se arată că $F \subset M$; 3) Se demonstrează că $M \subset F$. De aici rezultă că $M=F$ ceea ce încheie rezolvarea problemei.

Locuri geometrice fundamentale.

$L_1 = \{M \in P \mid MA = MB, A \neq B, A, B, \text{ puncte fixe}\} =$ mediatoarea segmentului AB ;

$L_2 = \left\{ M \in \text{Int}(\angle AOB) \mid \frac{d(M, a)}{d(M, b)} = k, k \in (0, \infty), a = (OA), b = (OB) \right\} =$ o semidreaptă inclusă în $\text{Int}(\widehat{AOB})$.

Pentru $k=1$, se obține bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$. Pentru $k = \frac{OA}{OB}$ se obține o semidreaptă ce conține simediana dusă din vârful O pe latura AB .

$L_3 = \{M \in P \mid A(\triangle MBC) = k, k \in (0, \infty), B \neq C, B, C, \text{ puncte fixe}\} =$ reuniunea a două drepte echidistante față de dreapta BC .

$L_4 = \{M \in \text{Int}(\widehat{BAC}) \mid A(\triangle MAB) = A(\triangle MAC), A, B, C, \text{ puncte fixe}\} =$ o semidreaptă inclusă în $\text{Int}(\widehat{BAC})$ ce conține mediana dusă din A .

$L_5 = \{M \in P \mid m(\widehat{AMB}) = \alpha, \alpha \in (0, \pi), A \neq B, \text{ puncte fixe}\} =$ reuniunea a două arce de cerc simetrice față de dreapta AB .

$L_6 = \{M \in P \mid MO = r, r \in (0, \infty), O = \text{punct fix}\} =$ cerc de centru O și rază r .

$L_7 = \{M \in P \mid MF_1 + MF_2 = 2a, a > 0, F_1 \neq F_2, \text{ puncte fixe}\} =$ elipsă.

$L_8 = \{M \in P \mid |MF_1 - MF_2| = 2a, a > 0, F_1 \neq F_2, \text{ puncte fixe}\} =$ hiperbolă.

$L_9 = \{M \in P \mid d(M, F) = d(M, d), M = \text{punct fix}, d = \text{dreapta fixa din plan}, F \notin d\} =$ parabolă.

$L_{10} = \{M \in P \mid MA^2 - MB^2 = k, k \in R, A \neq B, \text{ puncte fixe}\} =$ o dreaptă perpendiculară pe AB .

Lista acestor locuri geometrice, nu se încheie aici. Le-am numit fundamentale deoarece ele se folosesc în rezolvarea problemelor de loc geometric mai dificile.

Locurile geometrice $L_1 - L_{10}$ pot fi considerate și în spațiu. Astfel: L_1 este planul mediator al segmentului

AB ; L_2 este un semiplan inclus în unghiul diedru $(\widehat{\alpha, \beta})$; L_3 este reuniunea a două plane paralele

echidistante față de un plan π în care segmentul BC se mișcă păstrându-și lungimea și $(MBC) \perp \pi$;

L_4 este un semiplan m , $m \subset \text{Int}(\angle \alpha \beta)$, $A \in \alpha \cap \beta$, $B \in \alpha$, $C \in \beta$, planul (ABC) mobil și paralel cu un plan dat; L_5 este un toroid; L_6 este o sferă; L_7 este un elipsoid; L_8 este un hiperboloid; L_9 este un paraboloid și L_{10} este un plan perpendicular pe dreapta AB . Se observă că L_1 se obține din L_{10} pentru $k = 0$.

Remarcă. Pentru aprofundarea lui L_2 se recomandă [2] și [5]; pentru L_3 se recomandă [1], pag. 90; pentru L_5 și L_6 se recomandă [1] cap. IV și [4]; pentru L_6, L_7, L_8, L_9 se recomandă [1] cap. XXVIII, [2] pag. 190-201; pentru L_{10} și exemple de probleme în acăr rezolvare intervin locuri geometrice fundamentale recomandăm [3] pag. 8. Un loc special îl ocupă locurile geometrice care conduc la curbe algebrice plane (a se vedea [6] pag. 32-36, pag. 39-41, pag. 44-46).

- Bibliografie** [1] Gh. Țițeica, *Culegere de probleme de geometrie*, Editura Tehnică, București, 1965.
 [2] N. Mihăileanu, *Complemente de geometrie sintetică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1965.
 [3] M. Pimsner, S. Popa, *Probleme de geometrie elementară*, E. D. P. București, 1979.
 [4] A. Dafina, *Contribuții asupra locurilor geometrice*, Editura Premier, Ploiești, 2003.
 [5] C. Rusu, *O problemă de minim în poligoane convexe*, G.M.-B, 2/2011.
 [6] Al. Popescu-Zorica, *Curbe algebrice plane și invarianții lor topologici*, Editura Rafet, 2010.

O generalizare a problemei X.275 din RMT nr 4 / 2009

de Prof. Ovidiu Țătan, Râmnicu Sărat

În numărul 4 / 2009 al RMT este propusă spre rezolvare următoarea problemă.

X. 275 Fie $a, b, c \in (0; \infty)$, $a + b + c = 1$. **Demonstrați că** $a\sqrt[3]{a+2b} + b\sqrt[3]{b+2c} + c\sqrt[3]{c+2a} \leq 1$,

Călin Burdușel, Târgoviște

O generalizare a ei poate fi următoarea :

Fie $a, b, c \in (0; \infty)$, $a + b + c = 1$, $p, q, r \in \mathbb{R}_+$, $2p \leq q + r$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se arate că

$$a^n \sqrt[n]{pa + qb + rc} + b^n \sqrt[n]{pb + qc + ra} + c^n \sqrt[n]{pc + qa + rb} \leq \frac{p + q + r + 3(n-1)}{3n}.$$

Demonstrație : Folosind inegalitatea dintre media geometrică și media aritmetică se obține,

$$\sqrt[n]{pa + qb + rc} = \sqrt[n]{(pa + qb + rc) \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{n-1 \text{ de } 1}} \leq \frac{pa + qb + rc + n-1}{n} \text{ și analoagele ; Atunci, făcând suma}$$

$$\begin{aligned} \text{acestor relații se obține } & a^n \sqrt[n]{pa + qb + rc} + b^n \sqrt[n]{pb + qc + ra} + c^n \sqrt[n]{pc + qa + rb} \leq \\ & \leq a \frac{pa + qb + rc + (n-1)}{n} + b \frac{pb + qc + ra + (n-1)}{n} + c \frac{pc + qa + rb + (n-1)}{n} = \\ & = \frac{p(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) + (q + r - 2p)(ab + ac + bc) + (n-1)}{n} = \\ & = \frac{p(a+b+c)^2 + (q + r - 2p)(ab + ac + bc) + (n-1)}{n} = \frac{p + n - 1 + (q + r - 2p)(ab + ac + bc)}{n} \leq \\ & \leq \frac{p + n - 1 + (q + r - 2p) \cdot \frac{1}{3}}{n} = \frac{3p + 3n - 3 + q + r - 2p}{3n} = \frac{p + q + r + 3(n-1)}{3n}. \end{aligned}$$

S-a folosit faptul că $3(ab + ac + bc) \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2 = 1 \Rightarrow ab + ac + bc \leq \frac{1}{3}$.

Pentru $n = 3$, $p = 1$, $q = 2$, $r = 0$ se obține problema X 275.

Observații asupra unor noțiuni din geometria triunghiului

de Prof. Constantin Apostol, Rm. Sărat

Fiind dat un triunghi ABC, vom nota $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ și cu A' , B' , C' , mijloacele laturilor (BC) , (AC) și, respectiv, (AB) .

Triunghiul $A'B'C'$ se numește triunghiul medial sau complementar al triunghiului ABC. Evident, laturile acestui triunghi sunt liniile mijlocii ale triunghiului dat și, deci, cele două triunghiuri sunt asemenea. Segmentele (AA') , (BB') și (CC') sunt medianele triunghiului ABC.

Un triunghi ale cărui laturi sunt congruente cu medianele triunghiului ABC se numește triunghi median al triunghiului ABC. (în „Geometria Triunghiului” a lui Traian Lalescu, un triunghi median al triunghiului ABC este notat cu $\alpha\beta\gamma$).

Vom nota lungimile laturilor unui triunghi median : $AA' = m_a$, $BB' = m_b$ și $CC' = m_c$.

Cu teorema medianei, avem: $\left\{ m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}, m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}, m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \right.$.

În unele lucrări de geometrie, se afirmă că un triunghi median al unui triunghi dat este asemenea cu triunghiul dat. În general, un triunghi median, al unui triunghi dat, nu este asemenea cu triunghiul dat, dar, un triunghi median, al unui triunghi median, este asemenea cu triunghiul de referință.

În cele ce urmează, vom pune în evidență aceste afirmații :

Fie triunghiul dreptunghic ABC, cu $BC = a = 5$, $AC = b = 4$ și $AB = c = 3$. Astfel, avem :

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \Rightarrow m_a^2 = \frac{16 + 9}{2} - \frac{25}{4} = \frac{25}{2} - \frac{25}{4} = \frac{25}{4}, \text{ deci, } m_a = \frac{5}{2};$$

$$m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \Rightarrow m_b^2 = \frac{25 + 9}{2} - \frac{16}{4} = \frac{34}{2} - \frac{16}{4} = \frac{52}{4}, \text{ deci, } m_b = \frac{\sqrt{52}}{2};$$

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \Rightarrow m_c^2 = \frac{25 + 16}{2} - \frac{9}{4} = \frac{41}{2} - \frac{9}{4} = \frac{73}{4}, \text{ deci, } m_c = \frac{\sqrt{73}}{2}.$$

Din faptul că $a > b > c$, rezultă că $m_a < m_b < m_c$ și ar trebui să avem egalitățile :

$$\frac{\sqrt{73}}{2} = \frac{\sqrt{52}}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{73}}{10} = \frac{\sqrt{52}}{8} = \frac{5}{6} \text{ (fals)}.$$

Putem arăta și că numerele $\frac{5}{2}$, $\frac{\sqrt{52}}{2}$ și $\frac{\sqrt{73}}{2}$ nu verifică relația lui Pitagora ; într-adevăr,

$$\left(\frac{\sqrt{73}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{52}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{73}{4} = \frac{52}{4} + \frac{25}{4} \Leftrightarrow 73 = 52 + 25 \Leftrightarrow 73 = 77 \text{ (fals)}.$$

Deci, am arătat că un triunghi median al triunghiului dreptunghic ABC, nu este asemenea cu triunghiul ABC.

Să arătăm că un triunghi median al unui triunghi median este asemenea cu triunghiul de referință :

Dacă notăm cu m'_a , m'_b și, respectiv, m'_c , medianele unui triunghi median, al triunghiului ABC, vom

putea scrie egalitățile : $m_a'^2 = \frac{m_b^2 + m_c^2}{2} - \frac{m_a^2}{4}$ și analoagele. În plus, efectuând calculele, obținem :

$$m_a'^2 = \frac{\frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}{2} - \frac{\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}}{4} = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2}{8} - \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{16} =$$

$$= \frac{4a^2 + b^2 + c^2}{8} - \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{16} = \frac{8a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2b^2 - 2c^2 + a^2}{16} = \frac{9a^2}{16}, \text{ de unde rezultă : } m'_a = \frac{3a}{4}$$

și analoagele : $m'_b = \frac{3b}{4}$ și $m'_c = \frac{3c}{4}$. Din faptul că numerele $\frac{3a}{4}$, $\frac{3b}{4}$, $\frac{3c}{4}$ sunt proporționale cu numerele a , b , c , putem preciza că un triunghi median, al unui triunghi median, al triunghiului ABC, este asemenea cu triunghiul ABC. În plus, deducem că raportul de asemănare a celor două triunghiuri este egal

$$\text{cu } \frac{\frac{3a}{4}}{a} = \frac{3}{4}. \quad \text{Astfel, putem enunța următoarea observație : } „ \text{Un triunghi median, al unui triunghi}$$

median, al unui triunghi dat, este asemenea cu triunghiul dat. Raportul lor de asemănare este egal cu $\frac{3}{4}$ „

Bibliografie:

1. Lalescu Traian, *Geometria triunghiului*. Editura Tineretului, București, 1958 .
2. Lalescu Traian, *Geometria triunghiului*. Editura Apollo, Craiova, 1993 .

Asupra problemei U 181. din Mathematical Reflections

de prof. D.M. Bătinețu – Giurgiu, București
prof. Neculai Stanciu, Buzău

Cel de al doilea autor, al prezentei note, a propus pentru revista internațională de matematică *Mathematical Reflections*, din SUA, editată de Titu Andreescu, o problemă(vezi [2]) dedicată profesorului D.M. Bătinețu – Giurgiu cu ocazia împlinirii acestuia, în luna ianuarie 2011, a frumoasei vârste de 75 de ani.

Scopul notei de față este de a prezenta alte două soluții(mai simple) pentru:

Problema U 181. Se consideră șirurile $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ și $(S_n)_{n \geq 0}$, unde $a_0 = b_0 = 1$, $a_{n+1} = a_n + b_n$, $b_{n+1} = (n^2 + n + 1)a_n + b_n$, $n \geq 1$. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, unde $S_n = \frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{a_n}}$.

Soluția 1 (Neculai Stanciu). Notăm $B_n = \left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}} \right)$ -șirul “D.M. Bătinețu-Giurgiu”.

Se procedează ca în [2] și se obține $a_n = n! \cdot 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Deci, $S_n = \left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{2(n+1)!}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{2n!}} \right)$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{2} - 1) = \ln 2$, avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{2n!}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\sqrt[n]{2n!}} (\sqrt[n]{2} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{2} - 1) = e \ln 2.$$

Fie $\theta_n = \frac{n^2}{\sqrt[n]{2n!}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}} + e \ln 2$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$ și $\frac{n^2}{\sqrt[n]{2n!}} = \frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}} - e \ln 2 + \theta_n$.

$$\text{Deci, } S_n = \frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} - e \ln 2 + \theta_{n+1} - \left(\frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}} - e \ln 2 + \theta_n \right) = B_n + \theta_{n+1} - \theta_n.$$

Așadar, $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - B_n) = 0$, prin urmare,

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} ((S_n - B_n) + B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - B_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 0 + e = e$. Am folosit faptul cunoscut că $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = e$ (vezi (1)).

Soluția 2 (D.M. Bătinețu – Giurgiu). Avem:

$$(1) S_n = \frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{a_n}} = \frac{n^2}{\sqrt[n]{a_n}} \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}} - 1 \right) = \frac{n^2}{\sqrt[n]{a_n}} (u_n - 1) = \frac{n^2}{\sqrt[n]{a_n}} \cdot \frac{u_n - 1}{\ln u_n} \cdot \ln u_n =$$

$$= \frac{n}{\sqrt[n]{a_n}} \cdot \frac{u_n - 1}{\ln u_n} \cdot \ln u_n^n, \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ unde am notat}$$

$$(2) u_n = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n! \cdot 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n! \cdot 2}} \stackrel{\text{Cauchy-D'Alembert}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)! \cdot 2} \cdot \frac{n! \cdot 2}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n = e, \text{ unde am notat}$$

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n. \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a_n}}{n} \right)^{(3)} = 1 \cdot e \cdot \frac{1}{e} = 1.$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^{2n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \sqrt[n+1]{(n+1)! \cdot 2} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e_n^2 \cdot \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)! \cdot 2}}{n+1} \right)^{(3)} = e^2 \cdot \frac{1}{e} = e.$$

Din (1), (3), (4), (5) și (6) rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = e \cdot 1 \cdot \ln e = e$.

În încheiere, vă propunem să rezolvați prin metodele de mai sus următoarele patru probleme.

Problema 1. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{a \cdot (n+1)!}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{a \cdot n!}} \right)$, unde $a > 0$.

Problema 2. Dacă $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!(2n+1)!!}}{n+1} - \frac{\sqrt[n]{n!(2n-1)!!}}{n} \right).$$

Problema 3. Dacă $(a_n)_{n \geq 1}, a_n \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{n^2 \cdot a_n} = b \in \mathbb{R}_+^*$, atunci calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}}{n+1} - \frac{\sqrt[n]{a_n}}{n} \right).$$

Problema 4. Dacă $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}, a_n, b_n \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{n^2 \cdot a_n} = a \in \mathbb{R}_+^*$ și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{n^3 \cdot b_n} = b \in \mathbb{R}_+^*, \text{ atunci calculați } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n+1]{\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}} - \sqrt[n]{\frac{b_n}{a_n}} \right).$$

Bibliografie

1. D.M. Bătinețu - Giurgiu, *Gazeta Matematică – seria B, nr. 4/1989, problema C:890*, pag. 139.
2. Neculai Stanciu. *Mathematical Reflections*, 1/2011, *Solutions, Undergraduate problems*, U181, pag.16 – 21.

Calculul unor integrale definite

de prof. Gheorghe Ghiță, Buzău

Acest articol propune o propoziție care permite calculul unor integrale definite ce fac obiectul unor probleme publicate în Gazeta Matematică.

Propoziție. Dacă $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, este o funcție integrabilă pe $[a;b]$,

atunci:
$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2} \int_a^b [f(x) + f(a+b-x)]dx.$$

Demonstrație. Avem:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2} \int_a^b f(x)dx + \frac{1}{2} \int_a^b f(a+b-x)dx \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

și utilizând schimbarea de variabilă $\varphi(x)=a+b-x, \varphi:[a;b] \rightarrow R$ în a doua integrală, obținem prima integrală, adică ceea ce trebuia demonstrat.

Observație. Dacă funcția f are un centru de simetrie $C(\frac{a+b}{2}, \frac{k}{2})$, adică funcția f are proprietatea că $f(x)+f(a+b-x)=k, \forall x \in [a,b]$, atunci conform relației de mai sus, obținem că :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{k(b-a)}{2}.$$

Aplicații rezolvate.

1) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că : $f(x) \cdot f(-x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Să se calculeze
$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(1+2\sin^2 x)(1+f(x))}.$$
 (26269,2/2010,Radu Ghenghiu,Oradea)

Soluție. Considerăm funcția $g: \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow R, g(x) = \frac{1}{(1+2\sin^2 x)(1+f(x))}$ și atunci

$$\begin{aligned} g(x)+g(-x) &= \frac{1}{(1+2\sin^2 x)(1+f(x))} + \frac{1}{(1+2\sin^2(-x))(1+f(-x))} = \\ &= \frac{1}{(1+2\sin^2 x)(1+f(x))} + \frac{1}{(1+2\sin^2 x)\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)} = \frac{1+f(x)}{(1+2\sin^2 x)(1+f(x))} = \frac{1}{1+2\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Conform **propoziției** de mai sus , avem:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+3\operatorname{tg}^2 x} dx = \frac{1}{6} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{3}} dx = \frac{1}{6} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{3}} dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

2) Să se calculeze
$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{2x}} \sin \pi x dx.$$
 (26254,1/2010, Vasile Berghea, Avrig, Sibiu)

Soluție. Deoarece

$$f(x)+f(-x) = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{2x}} \sin \pi x + \frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2(1-x)}} \sin \pi(1-x) =$$

$$\begin{aligned}
&= (\sqrt{x} + \sqrt{1-x}) \left(\frac{\sin \pi x}{1 + \sqrt{2x}} + \frac{\sin \pi(1-x)}{1 + \sqrt{2(1-x)}} \right) = (\sqrt{x} + \sqrt{1-x}) \left(\frac{1}{1 + \sqrt{2x}} + \frac{1}{1 + \sqrt{2(1-x)}} \right) \sin \pi x = \\
&= (\sqrt{x} + \sqrt{1-x}) \frac{\sqrt{2(1-x)} + \sqrt{2x} + 2}{1 + \sqrt{2(1-x)} + \sqrt{2x} + 2\sqrt{x(1-x)}} \sin \pi x = \\
&= (\sqrt{x} + \sqrt{1-x}) \frac{\sqrt{2}(\sqrt{1-x} + \sqrt{x} + \sqrt{2})}{\sqrt{2}(\sqrt{1-x} + \sqrt{x}) + (\sqrt{1-x} + \sqrt{x})^2} \sin \pi x = \sqrt{2} \sin \pi x,
\end{aligned}$$

și atunci integrala dată $I = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{2} \sin \pi x dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$.

3) Să se calculeze: $I = \int_a^b \ln(1 + \operatorname{tg}(a+b)\operatorname{tg}x) dx$, unde $0 \leq a < b < \frac{\pi}{2} - a$.

(24372 -7,8,9/2000 Marin Sandu și Mihai Sandu, București)

Soluție. Din faptul că

$$\begin{aligned}
f(x) + f(a+b-x) &= \ln[1 + \operatorname{tg}(a+b)\operatorname{tg}x] + \ln[1 + \operatorname{tg}(a+b)\operatorname{tg}(a+b-x)] = \\
&= \ln \left[(1 + \operatorname{tg}(a+b)\operatorname{tg}x) \left(1 + \operatorname{tg}(a+b) \frac{\operatorname{tg}(a+b) - \operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}(a+b)\operatorname{tg}x} \right) \right] = \ln[1 + \operatorname{tg}^2(a+b)],
\end{aligned}$$

rezultă că $I = \frac{b-a}{2} \ln[1 + \operatorname{tg}^2(a+b)]$.

4) Fie funcțiile continue $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, unde g este pară și funcția $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^* - \{-1\}$ astfel încât $h(x)h(-x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Dacă $a \in (0, \infty)$, să se arate că:

$$\int_{-a}^a \frac{(f \circ g)(x)}{1 + h(x)} dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a (f \circ g)(x) dx. \quad (24392, 10/2000 \text{ D. M. Băținețu-Giurgiu, București})$$

Soluție. Avem:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \left[\frac{(f \circ g)(x)}{1 + h(x)} + \frac{(f \circ g)(-x)}{1 + h(-x)} \right] dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a (f \circ g)(x) \left(\frac{1}{1 + h(x)} + \frac{1}{1 + \frac{1}{h(x)}} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a (f \circ g)(x) dx.$$

5) Să se calculeze: $\int_0^a \frac{\arcsin \sqrt{\frac{x}{a}}}{x^2 - ax + a^2} dx, a > 0$. (25714, 1/2007, Ilie Diaconu, Cluj Napoca)

Soluție. Deoarece

$$\begin{aligned}
f(x) + f(a-x) &= \frac{\arcsin \sqrt{\frac{a}{x}}}{x^2 - ax + a^2} + \frac{\arcsin \sqrt{\frac{a}{a-x}}}{(a-x)^2 - a(a-x) + a^2} = \frac{\arcsin \sqrt{\frac{a}{x}} + \arccos \sqrt{1 - \left(\frac{a}{a-x} \right)^2}}{x^2 - ax + a^2} = \\
&= \frac{\arcsin \sqrt{\frac{a}{x}} + \arccos \sqrt{\frac{a}{x}}}{x^2 - ax + a^2} = \frac{\frac{\pi}{2}}{x^2 - ax + a^2}, \text{ rezultă: } I = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{a}{2}}^a \frac{dx}{x^2 - ax + a^2} = \frac{\pi}{a\sqrt{3}} \operatorname{artg} \frac{2x-a}{a\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Bibliografie: [1] Gazeta Matematică 2000-2010 ;

Şase soluții pentru problema L:155 din Sclipirea Minții, nr. VII, 2011

de Titu Zvonaru, Comănești și Neculai Stanciu, Buzău

Scopul notei de față, așa cum reiese și din titlu, este de a prezenta șase soluții pentru problema:

L:155. Să se demonstreze că, dacă cel puțin două din numerele a, b, c, d sunt diferite de zero, are loc inegalitatea

$$\frac{a^2}{b^2 + c^2 + d^2} + \frac{b^2}{a^2 + c^2 + d^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2 + d^2} + \frac{d^2}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{4}{3}.$$

Prof. Violeta Corbu, Buzău

Este evident că inegalitatea este echivalentă cu

$$\frac{x}{y+z+t} + \frac{y}{x+z+t} + \frac{z}{x+y+t} + \frac{t}{x+y+z} \geq \frac{4}{3}, \text{ unde } x, y, z, t > 0.$$

Notăm $S = x + y + z + t$.

Soluția 1. Avem $\frac{x}{S-x} - \frac{1}{3} = \frac{x-y}{3(S-x)} + \frac{x-z}{3(S-x)} + \frac{x-t}{3(S-x)}$ și încă trei egalități similare.

Grupând fracțiile în funcție de numărătorii lor, obținem

$$\frac{x-y}{3(S-x)} + \frac{y-x}{3(S-y)} = \frac{(x-y)(S-y-S+x)}{3(S-x)(S-y)} = \frac{(x-y)^2}{3(S-x)(S-y)}, \text{ și împreună cu alte trei egalități}$$

similare rezultă identitatea $\frac{x}{S-x} + \frac{y}{S-y} + \frac{z}{S-z} + \frac{t}{S-t} - \frac{4}{3} = \frac{(x-y)^2}{3(S-x)(S-y)} + \frac{(y-z)^2}{3(S-y)(S-z)} + \frac{(z-t)^2}{3(S-z)(S-t)} + \frac{(t-x)^2}{3(S-t)(S-x)} + \frac{(x-z)^2}{3(S-x)(S-z)} + \frac{(y-t)^2}{3(S-y)(S-t)}$, de unde rezultă inegalitatea dorită. Avem egalitate dacă și numai dacă $x = y = z = t$.

Soluția 2. Avem inegalitatea (1) $\frac{x}{y+z+t} \geq \frac{15x-y-z-t}{9(x+y+z+t)}$, care este adevărată deoarece este echivalentă cu

$$9x^2 + 9x(y+z+t) \geq 15x(y+z+t) - (y+z+t)^2 \Leftrightarrow (3x - (y+z+t))^2 \geq 0.$$

Scriind încă trei inegalități similare cu (1) obținem

$$\frac{x}{y+z+t} + \frac{y}{x+z+t} + \frac{z}{x+y+t} + \frac{t}{x+y+z} \geq \frac{15(x+y+z+t) - 3(x+y+z+t)}{9(x+y+z+t)} = \frac{4}{3}.$$

Soluția 3. Rezolvând sistemul: $y+z+t=3a, x+z+t=3b, x+y+t=3c, x+y+z=3d$

obținem $x = -2a + b + c + d, y = a - 2b + c + d, z = a + b - 2c + d, t = a + b + c - 2d$ și atunci inegalitatea de demonstrat se scrie

$$\frac{-2a+b+c+d}{3a} + \frac{a-2b+c+d}{3b} + \frac{a+b-2c+d}{3c} + \frac{a+b+c-2d}{3d} \geq \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{a}{d} + \frac{d}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{b}{d} + \frac{d}{b}\right) + \left(\frac{c}{d} + \frac{d}{c}\right) \geq 12,$$

care este adevărată deoarece fiecare paranteză este ≥ 2 .

Soluția 4. Cu inegalitatea lui Bergström obținem $\frac{x}{S-x} + \frac{y}{S-y} + \frac{z}{S-z} + \frac{t}{S-t} =$

$$= \frac{x^2}{Sx - x^2} + \frac{y^2}{Sy - y^2} + \frac{z^2}{Sz - z^2} + \frac{t^2}{St - t^2} \geq \frac{(x+y+z+t)^2}{S(x+y+z+t) - (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)}, \text{ și}$$

rezultă că este suficient să demonstrăm că

$$\frac{(x+y+z+t)^2}{(x+y+z+t)^2 - (x^2+y^2+z^2+t^2)} \geq \frac{4}{3} \Leftrightarrow (2) 4(x^2+y^2+z^2+t^2) \geq (x+y+z+t)^2.$$

Inegalitatea (2) poate fi demonstrată în două moduri:

$$(i) 4(x^2+y^2+z^2+t^2) \geq (x+y+z+t)^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-z)^2 + (x-t)^2 + (y-z)^2 + (y-t)^2 + (z-t)^2 \geq 0, \text{ adevărată.}$$

(ii) Cu inegalitatea *Cauchy – Buniakovski – Schwarz* obținem

$$4(x^2+y^2+z^2+t^2) = (1+1+1+1)(x^2+y^2+z^2+t^2) \geq (x+y+z+t)^2.$$

Soluția 5. Datorită omogenității putem presupune $S = 1$. Se consideră inegalitatea

$$(3) \frac{\alpha}{1-\alpha} \geq \frac{16\alpha-1}{9} \Leftrightarrow (4\alpha-1)^2 \geq 0, \text{ adevărată pentru } 0 \leq \alpha < 1. \text{ Scriind inegalitatea (3) pentru } x, y, z, t$$

și adunând cele patru inegalități obținute rezultă

$$\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} + \frac{z}{1-z} + \frac{t}{1-t} \geq \frac{16x-1}{9} + \frac{16y-1}{9} + \frac{16z-1}{9} + \frac{16t-1}{9} = \frac{16(x+y+z+t)-4}{9} = \frac{4}{3}.$$

Soluția 6. Fără pierderea generalității putem presupune că $x \geq y \geq z \geq t$. Rezultă succesiv

$$-x \leq -y \leq -z \leq -t \Leftrightarrow S-x \leq S-y \leq S-z \leq S-t \Leftrightarrow \frac{1}{S-x} \geq \frac{1}{S-y} \geq \frac{1}{S-z} \geq \frac{1}{S-t} \text{ și}$$

aplicând inegalitatea lui *Cebâșev* și apoi inegalitatea dintre media aritmetică și media armonică obținem:

$$\begin{aligned} \frac{x}{S-x} + \frac{y}{S-y} + \frac{z}{S-z} + \frac{t}{S-t} &\geq \frac{1}{4} \cdot (x+y+z+t) \cdot \left(\frac{1}{S-x} + \frac{1}{S-y} + \frac{1}{S-z} + \frac{1}{S-t} \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{4} \cdot (x+y+z+t) \cdot \frac{16}{S-x+S-y+S-z+S-t} = \frac{1}{4} \cdot S \cdot \frac{16}{3S} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Observație. Soluțiile 4, 5 și 6 pot fi folosite și pentru demonstrarea următoarei generalizări a inegalității în

$$\text{discuție: } \frac{x_1}{S-x_1} + \frac{x_2}{S-x_2} + \dots + \frac{x_n}{S-x_n} \geq \frac{n}{n-1},$$

unde $n \geq 3, x_i \geq 0, i = \overline{1, n}$ și $S = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ (pentru $n = 3$ se obține bine cunoscuta inegalitate a lui *Nesbit*).

Two applications of rearrangement inequality

J.L. Díaz-Barrero and J. Gibergans-Báguena

Abstract: In this short note the well-known elementary permutation or rearrangement inequality is revisited and two applications of it are given.

Keywords: Classical inequalities, permutations, order.

1. Introduction. No doubt that one of the most fundamental principles in the theory of inequalities is the systematic employment of order relationship. An elementary application arises in natural way. In the following we will state and prove by induction the general case that appeared in 1934 in the famous book of *Hardy-Littlewood and Pólya* [1].

Theorem 1. Let $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ and $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ be sequences of real numbers and let

$$c_1, c_2, \dots, c_n \text{ be a permutation of } b_1, b_2, \dots, b_n. \text{ Then holds } \sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \sum_{k=1}^n a_k c_k \geq \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1}$$

with equality iff $(c_1, c_2, \dots, c_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ or $(c_1, c_2, \dots, c_n) = (b_n, b_{n-1}, \dots, b_1)$ respectively.

Inequality reverses if the two sequences are sorted oppositely, one increasing and other decreasing.

Proof. We argue by mathematical induction. First, we prove LHS inequality.

Indeed, let $P(n): \sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \sum_{k=1}^n a_k c_k$. The case when $n=1$ trivially holds. WLOG we can assume

that $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_i \leq \dots \leq a_j \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1}$, $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_i \leq \dots \leq b_j \leq \dots \leq b_n \leq b_{n+1}$

And suppose that $c_i = b_{n+1}$ and $c_{n+1} = b_j$ for some index i, j .

Since $(a_{n+1} - a_i)(b_{n+1} - b_j) \geq 0$, then $a_i b_j + a_{n+1} b_{n+1} \geq a_i c_i + a_{n+1} c_{n+1}$. Taking into account the inductive hypothesis and preceding inequality the proposition $P(n+1)$ immediately follows. The RHS inequality is obtained from the preceding replacing the sequence $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ by $-b_n \leq -b_{n-1} \leq \dots \leq -b_1$. This completes the proof.

Two special cases of the preceding are the following corollaries.

Corollary 1. Let $a_1, a_2, \dots, a_n$ be positive real numbers and let $c_1, c_2, \dots, c_n$ be any permutation of them. Then, holds $\sum_{k=1}^n a_k^2 \geq \sum_{k=1}^n a_k c_k$.

Corollary 2. Let $a_1, a_2, \dots, a_n$ be positive real numbers and let $c_1, c_2, \dots, c_n$ be any permutation of them. Then, holds $\sum_{k=1}^n \frac{c_k}{a_k} \geq n$.

In the famous Eötvös Competition of the year 1935 in Hungary was asked to proof the above Corollary [2]. From the above theorem and its corollaries it is possible to derive a lot of useful inequalities. For instance, all the classical inequalities used in this paper and derived in this way can be found in [3], [4].

2. Main Results

Hereafter, we present two applications of rearrangement inequality.

Application 1. Let $a, b, c > 0$. Then holds

$$\left(\frac{(4n+1)a-b}{b+c} \right)^2 + \left(\frac{(4n+1)b-c}{c+a} \right)^2 + \left(\frac{(4n+1)c-a}{a+b} \right)^2 \geq 12n^2, \text{ for any positive integer } n \geq 1.$$

Proof. WLOG we can assume that $a \geq b \geq c$, follows $a+b \geq a+c \geq b+c$ and

$$\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}. \text{ By applying rearrangement inequality we get}$$

$$2n \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \geq 2n \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \right), \quad 2n \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \geq 2n \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} \right),$$

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \geq \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \right). \text{ Adding up the preceding inequalities, yields}$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{(4n+1)a-b}{b+c} + \frac{(4n+1)b-c}{c+a} + \frac{(4n+1)c-a}{a+b} \right) \geq 2n.$$

Taking into account AM-QM inequality, we have

$$\sqrt{\frac{1}{3} \left[\left(\frac{(4n+1)a-b}{b+c} \right)^2 + \left(\frac{(4n+1)b-c}{c+a} \right)^2 + \left(\frac{(4n+1)c-a}{a+b} \right)^2 \right]} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{(4n+1)a-b}{b+c} + \frac{(4n+1)b-c}{c+a} + \frac{(4n+1)c-a}{a+b} \right) \geq 2n,$$

From which the statement follows. Equality holds when $a = b = c$ and we are done.

Remark. The particular case when $n=1$ has appeared recently in [5].

Application 2.

If $a, b, c, d > 0$ with $abcd = 1$, then holds $\frac{a^5 + b^3}{b + c + d} + \frac{b^5 + c^3}{c + d + a} + \frac{c^5 + d^3}{d + a + b} + \frac{d^5 + a^3}{a + b + c} \geq \frac{8}{3}$.

Proof. Since (a^5, b^5, c^5, d^5) and $\left(\frac{1}{b+c+d}, \frac{1}{c+d+a}, \frac{1}{d+a+b}, \frac{1}{a+b+c}\right)$ are sorted in the same way, as can be easily checked, then we have

$$\frac{a^5}{b+c+d} + \frac{b^5}{c+d+a} + \frac{c^5}{d+a+b} + \frac{d^5}{a+b+c} \geq \frac{b^5}{b+c+d} + \frac{c^5}{c+d+a} + \frac{d^5}{d+a+b} + \frac{a^5}{a+b+c}$$

and

$$\frac{a^5 + b^3}{b+c+d} + \frac{b^5 + c^3}{c+d+a} + \frac{c^5 + d^3}{d+a+b} + \frac{d^5 + a^3}{a+b+c} \geq \frac{b^5 + b^3}{b+c+d} + \frac{c^5 + c^3}{c+d+a} + \frac{d^5 + d^3}{d+a+b} + \frac{a^5 + a^3}{a+b+c}$$

Applying AM-GM inequality, we have

$$\frac{b^5 + b^3}{b+c+d} + \frac{c^5 + c^3}{c+d+a} + \frac{d^5 + d^3}{d+a+b} + \frac{a^5 + a^3}{a+b+c} \geq \frac{2b^4}{b+c+d} + \frac{2c^4}{c+d+a} + \frac{2d^4}{d+a+b} + \frac{2a^4}{a+b+c}$$

Now, we apply Cauchy's inequality to the vectors

$\vec{u} = \left(\frac{b^2}{\sqrt{b+c+d}}, \frac{c^2}{\sqrt{c+d+a}}, \frac{d^2}{\sqrt{d+a+b}}, \frac{a^2}{\sqrt{a+b+c}}\right)$ and $\vec{v} = (\sqrt{b+c+d}, \sqrt{c+d+a}, \sqrt{d+a+b}, \sqrt{a+b+c})$ to obtain

$$\frac{2b^4}{b+c+d} + \frac{2c^4}{c+d+a} + \frac{2d^4}{d+a+b} + \frac{2a^4}{a+b+c} \geq \frac{2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2}{3(a+b+c+d)}.$$

On account of AM-QM inequality, we have $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq \frac{(a+b+c+d)^2}{4}$ and

$$\begin{aligned} \frac{b^5 + b^3}{b+c+d} + \frac{c^5 + c^3}{c+d+a} + \frac{d^5 + d^3}{d+a+b} + \frac{a^5 + a^3}{a+b+c} &\geq \frac{2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2}{3(a+b+c+d)} \geq \\ &\geq \frac{2(a+b+c+d)^4}{3 \cdot 4^2(a+b+c+d)} = \frac{(a+b+c+d)^3}{24} \geq \frac{(4\sqrt[4]{abcd})^3}{24} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Equality holds when $a = b = c = d = 1$ and the proof is complete.

Acknowledgements. The authors would thank to Ministry of Education of Spain that has partially supported this research by grant MTM2009-13272.

References

1. G.Hardy, J.Littlewood and G.Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, (1988) 260-299.
 2. Liu, A, *Hungarian Problem Book III*, The Mathematical Association of America, (2001) 4-4.
 3. Kin-Yin Li, *Rearrangement Inequality*, Mathematical Excalibur, Vol. 4, No.3 (1999) 1-4.
 4. Engel, A, *Problem-Solving Strategies*, Springer, New York, (1998) 167-170
 5. J.L. Díaz-Barrero, *Problem 95.B*, The Mathematical Gazette, Vol.65, No.532 (2011) 133-133
- Applied Mathematics III Technical University of Catalonia (BARCELONA TECH)
Jordi Girona 1-3, C2, 08034 Barcelona, Spain ; jose.luis.diaz@upc.edu,
jose.gibergans@upc.edu

“Inteligenții se împart în două: buni și răi. Proștii se împart în una: răi”

G. Ibrăileanu

„Mulți nu-și pierd mintea, fiindcă nu o au”
Gracian

3. Examene și concursuri

Continuând tradiția școlii buzoiene de matematică, în perioada 11 – 18 august s-a desfășurat în Campusul „Sfântul Sava” de la Bisoca, la inițiativa domnului profesor Apostol Constantin și cu ajutorul unor renumiți profesori din județul Buzău, tabăra de matematică, care în data de 17 august, au organizat testul final pe care-l prezentăm și noi mai jos.

Concursul Taberei de Matematică 11- 18 august 2011, Bisoca

Clasa a IV-a

1) Rezolvați: $724: 4 + 23 \cdot 12 - 609:3 + 124 \cdot 7$;

2) Matei a rezolvat 142 de probleme. Mara a rezolvat cu 28 de probleme mai mult decât Matei. Geo a rezolvat cu 9 probleme mai puțin decât Matei. Simona a rezolvat cu 12 probleme mai mult decât Geo. Alex a rezolvat atâtea probleme, câte au rezolvat Geo și Simona împreună. Monica a rezolvat cu 8 probleme mai puțin decât Alex. Câte probleme au rezolvat, împreună, elevii ?

3) M-am gândit la un număr. La acest număr am adunat 1257. Din sumă am scăzut 389. Jumătatea diferenței am triplat-o și am obținut 3993. La ce număr m-am gândit ?

Subiecte propuse de d-na înv. Marcela Marin

Clasa a VI-a

1) Determinați toate numerele naturale nenule, care, împărțite la 8, dau câtul x și restul y și împărțite la 15, dau câtul y și restul x. Simion Marin

2) Arătați că numărul $A = 9 + 9^2 + 9^3 + \dots + 9^{99}$ este divizibil cu 13. Luca Tuță

3) Arătați că numărul $B = 1 + 2 + 3 + \dots + 2010 + 2011 + 2010 + 2009 + \dots + 3 + 2 + 1$ este pătrat perfect. Neculai Stanciu

Clasa a VII-a

1) Să se determine numerele naturale x și y, știind că: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot x + 58 = y^2$ Mihai Neagu

2) Se dă triunghiul ABC, cu $m(\hat{A}) = 90^\circ$. Pe (BC) se consideră punctul D, astfel încât, $(BD) \equiv (BA)$.

Știind că $m(\widehat{CAD})$ este cât a șaptea parte din $m(\hat{C})$, determinați $m(\hat{B})$. Constantin Apostol

3) a) Arătați că $\frac{1}{n(n+p)} = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \right)$, $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculați suma: $S = \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{2006 \cdot 2011}$. Gheorghe Struțu

Clasa a VIII-a

1) Știind că $a^2 = \sqrt{6} - \sqrt{7 - 2\sqrt{6}} + 2\sqrt{3} + 3$ și $b^2 = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{3}$. Calculați $\frac{1+ab}{a+b} - \frac{1-ab}{a-b}$. Luca Tuță

2) a) Arătați că există un triunghi ale cărui înălțimi să aibă lungimile egale cu $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{6}$ și $\sqrt{6}$ cm.

b) Determinați măsurile unghiurilor acestui triunghi. Constantin Apostol

3) Calculați numărul x din proporția: $\frac{2}{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \dots - \frac{1}{2^{2011}}} = \frac{16^{503}}{x}$. Simion Marin

„Nu munca este rușinoasă, ci lenea”.
Hesiod

4. Probleme rezolvate

▪ ÎNVĂȚĂMÂNT PRIMAR

P:193. Suma a trei numere este 575. Știind că jumătatea primului număr este dublul celui de-al doilea și împărțind al doilea număr la al treilea se obține câtul 5 și restul 11, să se afle numerele.

Prof. Lăcrimioara Năstase, Padina, Buzău

Rezolvare: Fie x, y, z , cele trei numere, $x+y+z=575$. Jumătatea lui x este dublul lui y , implică $x=4y$. Din datele problemei rezultă $y=5z+11$. Deci $x=4(5z+11)=20z+44$. Obținem: $20z+44+5z+11+z=575$

$\Leftrightarrow 26z=575-55 \Leftrightarrow z=20$. Înlocuind pe z în expresiile lui x și y , se obține $x=444, y=111$.

P:194. Diferența a două numere este 738. Primul număr se termină cu cifra zero. Dacă se taie cifra zero se obține al doilea număr. Care sunt cele două numere?

Prof. Lăcrimioara Năstase, Padina, Buzău

Rezolvare: Dacă a este al doilea număr, atunci primul număr este $10a$. Din $10a-a=738$ rezultă $a=82$ și $10a=820$.

P:195. Un biciclist pleacă din Buzău cu viteza constantă $v = 20 \text{ km / h}$ iar după patru ore pleacă în aceeași sens un motociclist cu viteza constantă $v = 60 \text{ km / h}$. După cât timp îl ajunge motociclistul pe biciclist și la ce distanță de Buzău.

Prof. Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: Pentru aceeași distanță parcursă, fie t timpul pe care l parcurge biciclistul. Atunci timpul motociclistului este $t - 4$. Din $D = v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$ rezultă $20t=60(t-4)$ adică $t = 6 \text{ h}$ iar $D = 20 \cdot 6=120 \text{ km}$. Așadar, motociclistul îl ajunge pe biciclist după $t - 4 = 6 - 4 = 2 \text{ h}$ la 120 km de Buzău.

P:196. O fermă a înșămânțat trei cincimi din terenul ei arabil cu grâu și restul cu porumb. Știind că grâul ocupă o suprafață cu 120 ha mai mare decât ocupă porumbul, să se afle câte hectare s-au înșămânțat cu cele două culturi.

Prof. Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: Diferența dintre cele trei cincimi ocupate cu grâu și cele două cincimi ocupate cu porumb adică o cincime înseamnă cele 120 ha ocupate cu grâu. Atunci, trei cincimi înseamnă $3 \cdot 120=360 \text{ ha}$ ocupate cu grâu și două cincimi înseamnă $2 \cdot 120=240 \text{ ha}$ ocupate cu porumb.

P:197. O cărare care înconjoară grădina bunicii are 112 metri . La o întrecere în timp ce Radu a înconjurat grădina de 3 ori , Andrei a înconjurat-o de 2 ori .

Ce distanță au parcurs cei doi copii împreună?

Inst. Anton Maria, Berca

Rezolvare: $(112 \times 3) + (112 \times 2) = 336 + 224 = 560 \text{ m}$

P:198. Dacă din dublul unui număr scădem sfertul său obținem numărul 98 . Care este numărul?

Inst. Anton Maria, Berca

Rezolvare: Notăm cu „ a ” valoarea unui sfert din numărul cerut. Atunci, conform datelor problemei obținem: $8a - a = 98$ de unde, $7a = 98$. Rezultă $a = 14$, iar numărul cerut este $4a$ adică 56 .

P:199. Într-un bol sunt 160 de baloane. Andreea, Bogdana, Cristi, Dan și Emilia hotărăsc să-și împartă baloanele astfel: Andreea va lua $\frac{1}{2}$ din numărul lor, Bogdana și Cristi vor lua $\frac{1}{4}$, respectiv

$\frac{1}{2}$ din rest, iar Dan și Emilia vor lua fiecare $\frac{1}{2}$ din noul rest. Câte baloane va lua fiecare copil?

Prof. Brânză Cristian, Buzău

Rezolvare: Andreea: $160 : 2 = 80$ (baloane), Bogdana: $(160 - 80) : 4 = 20$ (baloane),
Cristi: $(160 - 80) : 2 = 40$ (baloane), Dan: $(80 - 20 - 40) : 2 = 10$ (baloane), Emilia: 10 baloane.

P: 200. La cel mai mare număr de 6 cifre, adunați cel mai mic număr de 7 cifre și din sumă scădeți cel mai mic număr de 5 cifre în care se repetă de 2 ori cifra 9.

Prof. Drăgan Cornelia, Berca

Rezolvare: Cel mai mare număr de 6 cifre este 999 999 ; Cel mai mic număr de 7 cifre este 1 000 000 ;
Cel mai mic număr de 5 cifre în care se repetă de 2 ori cifra 9 este 10 099;
Așadar, $999\,999 + 1\,000\,000 - 10\,099 = 1\,989\,900$

P: 201. Determinați valorile lui a, b și c astfel încât egalitatea $(a - b) \times c = 0$ să fie adevărată.

Rezolvare: *Înv. Lupșan Ion, Pleșcoi*

I. $a = b$ (orice nr. natural) și $c \neq 0$; II. $c = 0$, $a \neq b$; III. $a = b$, $c = 0$.

P: 202. Calculați $3a + 4b + c + d$, dacă $a + b = 10$ și $b + c + d = 70$. *Prof. Lupșan Nicoleta, Berca*

Rezolvare: $3a + 4b + c + d = 3a + 3b + b + c + d = 3 \times (a + b) + b + c + d = 3 \times 10 + 70 = 100$

P: 203. Doi cicliști, care sunt separați prin distanța de 92 kilometri, pleacă în același timp unul către celălalt. Fiecare biciclist parcurge în medie câte 23 kilometri pe oră. După cât timp se vor întâlni?

Înv. Marchidanu Florica, Berca

Rezolvare: 1. Cu câți km se micșorează distanța pe oră? Răspuns: $23 \text{ km} \times 2 = 46 \text{ km}$

2. După cât timp se întâlnesc cei doi? Răspuns: $92 \text{ km} : 46 \text{ km} = 2 \text{ ore}$

P: 204. Dacă 5 saci cu grâu și 4 saci cu porumb cântăresc 490 kg, iar 5 saci cu grâu și 2 saci cu porumb cântăresc 370 kg, să se afle cât cântărește un sac cu grâu și cât cântărește unul cu porumb, toți sacii de grâu, respectiv de porumb fiind la fel de încărcăți.

Înv. Marchidanu Florica, Berca

Rezolvare:

5 saci cu grâu	4 saci cu porumb	490 kg
5 saci cu grâu	2 saci cu porumb	370 kg
0 saci cu grâu	2 saci cu porumb	120 kg

Deci, 2 saci cu porumb cântăresc 120 kg, ceea ce înseamnă că un sac cu porumb cântărește:

$120 \text{ kg} : 2 = 60 \text{ kg}$.

Din datele de mai sus știm că 5 saci cu grâu și 4 saci cu porumb cântăresc 490 kg. Deci cei cinci saci cu grâu cântăresc: $490 \text{ kg} - 4 \times 60 \text{ kg} = 250 \text{ kg}$

Un sac cu grâu cântărește 50 kg iar un sac cu porumb cântărește 60 de kg.

P: 205. Trei frați au împreună 34 de ani. Primii doi au împreună 23 de ani, iar al doilea și al treilea sunt gemeni. Câți ani are fiecare copil? *Prof. Marinescu Gabriela, Stăncești, Vadu-Pășii*

Rezolvare: Notez a, b, c vârstele celor 3 frați. Atunci, $a + b + c = 34$, $a + b = 23$, $c = 34 - 23$. Așadar, $c = 11$ ani, $b = c = 11$ ani, $a = 34 - (11 + 11)$, $a = 12$ ani.

P: 206. Aflați numărul care adunat cu 198939, dă același număr dacă adăugăm la dreapta lui, 48.

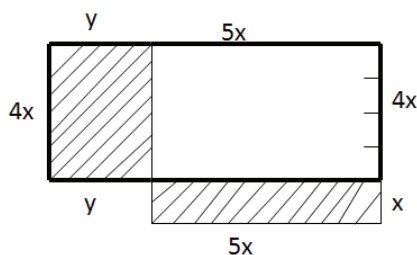
Prof. Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Notăm numărul cu $\overline{abcd}$. Atunci, $\overline{abcd48} = \overline{abcd} + 198939 \Leftrightarrow$
 $100\overline{abcd} + 48 = \overline{abcd} + 198939 \Leftrightarrow 100\overline{abcd} - \overline{abcd} = 198939 - 48 \Leftrightarrow$
 $99\overline{abcd} = 198891 : 99 \Rightarrow \overline{abcd} = 2009$. Numărul căutat este 2009.

P: 207. Un dreptunghi și un pătrat au ariile egale cu 2500 m^2 . Comparați perimetrele lor știind că lățimea dreptunghiului este cât patru cincimi din latura pătratului.

Prof. Marin Simion, Rm. Sărat

Rezolvare :



Notăm cu $5x$ lungimea laturii pătratului. Atunci lăţimea dreptunghiului conform datelor din problemă este $4x$. Cum cele două figuri au aceeaşi arie înseamnă că suprafeţele haşurate au aceeaşi arie şi anume $5x \cdot x = 4x \cdot y$ unde y este diferenţa dintre lungimea dreptunghiului şi latura pătratului. De aici, se obţine că $y = \frac{5}{4}x$. (y este cinci pătrimi din x)

Cum perimetrul dreptunghiului este $2 \cdot 4x + 2 \cdot (y + 5x) = 8x + 2 \cdot (\frac{5}{4}x + 5x) = 8x + \frac{5}{2}x + 10x = 20,5x$

iar perimetrul pătratului este $4 \cdot 5x = 20x$ rezultă că perimetrul dreptunghiului este mai mare.

▪ GIMNAZIU

Clasa a V – a

G:229. Să se scrie numărul $5^{2011} + 10$ ca suma de cinci numere naturale impare consecutive.

Prof. Iuliana Traşcă, Scorniceşti, Olt

Rezolvare: Fie $x, x+2, x+4, x+6, x+8$ cele cinci numere naturale impare consecutive. Atunci,

$$x + (x+2) + (x+4) + (x+6) + (x+8) = 5^{2010} + 10 \Rightarrow 5x + 20 = 5^{2011} + 10 \Rightarrow x = 5^{2010} - 2.$$

$$\text{Aşadar, } 5^{2011} + 10 = (5^{2010} - 2) + 5^{2010} + (5^{2010} + 2) + (5^{2010} + 4) + (5^{2010} + 6)$$

G:230. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ şi $A = 5a + 7b + 6c$, $B = 3a + 2b + 8c$. Se cere:

a) Calculaţi $A + 2B$ şi $3A - B$;

b) Dacă A este divizibil cu 11 demonstraţi că B este divizibil cu 11;

c) Dacă B este divizibil cu 11 este adevărat că A este divizibil cu 11 ?

Prof. Constantin Dinu, Buzău

Rezolvare:

$$\text{a) } A + 2B = 11(a + b + 2c) \text{ şi } 3A - B = 12a + 19b + 10c;$$

$$\text{b) } A : 11, (A + 2B) : 11 \Rightarrow 2B : 11 \text{ şi cum } (2; 11) = 1 \Rightarrow B : 11;$$

$$\text{c) da, } B : 11, (A + 2B) : 11 \Rightarrow A : 11;$$

G:231. Dintr-un carton se taie şase bucăţi dreptunghiulare pentru a se construi o cutie de chibrituri. Se măsoară perimetrele lor şi se obţine: 8 cm, 16 cm, 8 cm, 12 cm, 16 cm, 12 cm. Aflaţi suma ariilor celor şase bucăţi dreptunghiulare.

Prof. Constantin Rusu, Rm. Sărat

Rezolvare: Notând cu a şi b dimensiunile dreptunghiului cu perimetrul de 8 cm; cu b şi c dimensiunile dreptunghiului cu perimetrul de 12 cm; cu c şi a dimensiunile dreptunghiului cu perimetrul de 16 cm, avem: $b + a = 4$; $b + c = 6$; $c + a = 8$. Adunând cele trei relaţii obţinem $2(a + b + c) = 18 \Rightarrow a + b + c = 9 \Rightarrow c = 5, a = 3, b = 1$. Suma ariilor va fi $2 \cdot (3 \cdot 1) + 2 \cdot (1 \cdot 5) + 2 \cdot (5 \cdot 3) = 46 \text{ cm}^2$.

G:232. Aflaţi numerele de patru cifre (diferite între ele) care se termină cu 2, sunt multiplii de 4 şi au suma cifrelor 2^4 .

Prof. Mariana Mitea, Cugir, Alba

Rezolvare: Fie $x = \overline{abc2}$ un număr din cele căutate, deci din $x = M_4$ rezultă $c \in \{1,3,5,7,9\}$, conform criteriului de divizibilitate cu 4.

Dacă $c=1$ rezultă $a+b=13$, iar $x \in \{4912,9412,5812,8512,6712,7612\}$;

Dacă $c=3$ rezultă $a+b=11$ și cum cifrele 2 și 3 sunt folosite deducem $x \in \{4732,7432,5632,6532\}$

Dacă $c=5$ rezultă $a+b=9$, iar $x \in \{1852,8152,3652,6352\}$;

Dacă $c=7$ rezultă $a+b=7$, iar $x \in \{1672,6172,3472,4372\}$;

Dacă $c=9$ rezultă $a+b=5$, iar $x \in \{1492,4192\}$. Prin urmare există 20 astfel de numere.

G:233. În două cupoane sunt $128\frac{1}{4}m$ de stofă. Câți metri sunt în fiecare cupon dacă $\frac{2}{5}$ din primul

este tot atât cât $\frac{4}{9}$ din al doilea.

Prof. Tuță Luca, Buzău

Rezolvare: Dacă $\frac{2}{5}$ din primul este $\frac{4}{9}$ din al doilea, atunci $\frac{1}{5}$ din primul este $\frac{2}{9}$ din al doilea, deci, primul

cupon este $5 \cdot \frac{2}{9} = \frac{10}{9}$ din al doilea iar suma lor este $\frac{10}{9} + \frac{9}{9} = \frac{19}{9}$ din al doilea; Așadar, $\frac{19}{9}$ din al doilea are

$128\frac{1}{4}m$. Atunci, $\frac{1}{9}$ din al doilea este $128\frac{1}{4} : 19 = 6,75m$. Primul cupon are $10 \cdot 6,75 = 67,5m$. Al doilea cupon are $9 \cdot 6,75 = 60,75m$.

G:234. Să se demonstreze că există un unic număr natural n astfel încât numărul $3^{10} + 88 \cdot 3^6 + 3^n$ să fie pătrat perfect.

Prof. Adrian Stan, Buzău

Rezolvare:

Cum numărul dat este pătrat perfect atunci îl vom nota cu a^2 , $a \in \mathbb{N}^*$.

$$3^{10} + 88 \cdot 3^6 + 3^n = a^2 \Rightarrow 3^n = a^2 - 3^6(3^4 + 88) \Rightarrow 3^n = a^2 - 3^6 \cdot 169 \Leftrightarrow 3^n = a^2 - (3^3 \cdot 13)^2 \Rightarrow$$

$$3^n = (a - 3^3 \cdot 13)(a + 3^3 \cdot 13) \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } a - 3^3 \cdot 13 = 3^p \text{ și } a + 3^3 \cdot 13 = 3^q \text{ cu } p+q=n.$$

Rezultă, $3^q - 3^p = a + 3^3 \cdot 13 - a + 3^3 \cdot 13 \Rightarrow 3^p(3^{q-p} - 1) = 2 \cdot 3^3 \cdot 13$. Conform unicității descompunerii în factori primi se obține $p=3$ și $q=6$. Așadar, numărul căutat este $n=p+q=3+6=9$.

G:235. La etapa pe centru a Olimpiadei de matematică au participat 90 de elevi la clasa a VIII-a. 80 de elevi au rezolvat prima problemă, 75 de elevi au rezolvat problema a doua, 70 de elevi au rezolvat problema a treia și 53 de elevi au rezolvat problema a patra. Arătați că cel puțin opt elevi au rezolvat toate cele patru probleme.

Prof. Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

Se presupune că niciun elev nu a rezolvat toate cele patru probleme. Deci, fiecare elev a rezolvat cel mult trei probleme. Dacă fiecare elev ar fi rezolvat trei probleme atunci cei 90 de elevi ar fi rezolvat în total 270 de probleme. Însă numărul de probleme rezolvate de cei 90 de elevi este $80 + 75 + 70 + 53 = 278$ cu 8 în plus față de cele 270. Aceasta înseamnă că cel puțin 8 elevi au rezolvat toate cele patru probleme.

G:236. Determinați numerele prime x, y, z astfel încât $x + 5y + 13z = 132$.

Prof. Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Dacă x, y, z sunt numere prime impare, atunci ar rezulta că $x + 5y + 13z$ este impar.

Se analizează pe rând următoarele cazuri:

$$x = 2 \Rightarrow y = 13, z = 5;$$

$$y = 2 \Rightarrow x = 31, z = 7 \text{ sau } x = 83, z = 3;$$

$$z = 2 \Rightarrow x = 11, y = 19 \text{ sau } x = 41, y = 13 \text{ sau } x = 71, y = 7;$$

G:237. Să se arate că numărul $N = \overline{ab61} + 22\overline{ab}$ este divizibil cu 61.

Prof. Violeta Corbu, Buzău

Rezolvare: $N = 100\overline{ab} + 61 + 22\overline{ab} = 122\overline{ab} + 61 = 61(2\overline{ab} + 1)$.

Clasa a VI - a

G:238. Să se rezolve în $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ecuația: $2x + 3y - xy = 0$.

Prof. Constantin Rusu, Rm. Sărat

Rezolvare: $2x + 3y - xy = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2x}{x-3}, x \neq 3 \Leftrightarrow y = 2 + \frac{6}{x-3} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x-3 \mid 6$.

Deci, trebuie să avem $x-3 \in \{-3, -2, 1, 2, 3, 6\}$. Rezultă $S = \{(0,0), (4,8), (5,5), (6,4), (9,3)\}$.

G:239. Determinați raportul $\frac{a}{b}$ știind că $\frac{a-13}{b} = \frac{a}{b+7}$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Prof. Constantin Dinu, Buzău

Rezolvare: $(a-13)(b+7) = ab \Leftrightarrow 7a = 13b + 91$. Deoarece $91 = 13 \cdot 7$, luăm $a = 13a'$; rezultă $7a' = b + 7$ și cu $b = 7b'$ obținem $a' = b' + 1$. Soluția în $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a ecuației $7a = 13b + 91$ este

$a = 13(k+1), b = 7k, k \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că $\frac{a}{b} = \frac{13(k+1)}{7k}, k \in \mathbb{N}^*$.

G:240. Fie $\frac{a}{4} = \frac{b}{6}$ și $\frac{b}{8} = \frac{c}{10}$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

a) Determinați numerele m și n astfel încât să avem: $\frac{a}{m} = \frac{b}{48} = \frac{c}{n}$

b) Determinați numerele a, b și c știind că $a + b + c = 105$.

Prof. Tuță Luca, Buzău

Rezolvare: a) Notăm $\frac{a}{4} = \frac{b}{6} = k \Rightarrow a = 4k$ și $b = 6k$. Deci, $\frac{6k}{8} = \frac{c}{10} \Rightarrow c = \frac{15k}{2}$. Obținem,

$\frac{4k}{m} = \frac{6k}{48} = \frac{15k}{2n}$, așadar $m = 32$ și $n = 60$.

b) Cum $a + b + c = 105 \Rightarrow 4k + 6k + \frac{15k}{2} = 105 \Rightarrow k = 6 \Rightarrow a = 24, b = 36, c = 45$.

G:241. Un obiect costă 3600 lei. Se majorează prețul produsului cu 20% și apoi se reduce cu $p\%$ din prețul majorat. Acum prețul produsului este de 3672 lei. Determinați procentul cu care s-a redus prețul.

Prof. Cornelia Gurău, Moinești, Bacău

Rezolvare: Prețul produsului după majorare este $\frac{20}{100} \cdot 3600 + 3600 = 4320$ lei.

$4320 - \frac{p}{100} \cdot 4320 = 3672 \Rightarrow \frac{p}{100} \cdot 4320 = 648 \Rightarrow p = 15\%$.

G:242. Determinați două numere întregi direct proporționale cu 2010 și 49 știind că suma pătratelor lor este 16170004.

Prof. Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Fie x și y cele două numere întregi. Atunci, $\frac{x}{2010} = \frac{y}{49} = k$, (1) și

$x^2 + y^2 = 16170004$, (2).

Din (1) rezultă $x = 2010k$, $y = 49k$ adică rezultă $x^2 = 4040100k^2$, $y^2 = 2401k^2$, (3).

Din relațiile (2) și (3) rezultă $x^2 + y^2 = 4042501k^2$, (4); Din (2) și (4) rezultă $4042501k^2 = 16170004$: $4042501 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$. În final se obțin două soluții $x = -4020$, $y = -98$ și $x = 4020$, $y = 98$.

G:243. Să se rezolve în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuația: $6x^2 + 7x - 3xy + 4y = 32$.

Prof. Mariana Mitea, Cugir, Alba

Rezolvare: Ecuația dată este echivalentă cu $6x^2 + 7x - 32 = y(3x - 4)$ sau

$$2x(3x - 4) + 5(3x - 4) - 12 = y(3x - 4) \text{ de unde } y = 2x + 5 - \frac{12}{3x - 4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3x - 4 \in D_{12}.$$

Rezultă $3x - 4 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12\}$. Mulțimea soluțiilor este $S = \{(1; 19), (2; 3), (0; 8)\}$.

G:244. Aflați numerele naturale x, y, z, t știind că suma lor este 2011 și $5x = 10y = \frac{z}{2} = t - 361$.

Prof. Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Relația dată se mai poate scrie de forma $\frac{x}{\frac{1}{5}} = \frac{y}{\frac{1}{10}} = \frac{z}{2} = \frac{t - 361}{1} = \frac{x + y + z + t - 361}{\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + 2 + 1} = 500$

întrucât știm că $x + y + z + t = 2011$ și atunci se găsesc ușor valorile: $x = 100$, $y = 50$, $z = 1000$, $t = 861$;

G:245. Se dă $\frac{x+y}{2x+z} = \frac{y+z}{2y+x} = \frac{z+x}{2z+y}$. **Calculați** $\frac{2x+3y+5z}{7x+11y+13z}$.

Prof. Gheorghe Dârstaru, Berca, Buzău

Rezolvare: Se aplică proprietatea șirului de rapoarte egale și anume

$$\frac{x+y}{2x+z} = \frac{y+z}{2y+x} = \frac{z+x}{2z+y} = \frac{2(x+y+z)}{3(x+y+z)} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x + 3y = 4x + 2z; \quad 3y + 3z = 4y + 2x;$$

$3z + 3x = 4z + 2y$ așadar, $x = 3y - 2z$ și înlocuind în a doua relație avem $3y + 3z = 4y + 6y - 4z \Rightarrow y = z =$

$$x \Rightarrow \frac{2x+3y+5z}{7x+11y+13z} = \frac{10}{31}.$$

G:246. Cu trei puncte distincte se poate construi un triunghi. Cu patru puncte distincte se pot construi două triunghiuri fără puncte interioare comune. Câte triunghiuri, fără puncte interioare comune, se pot construi cu 2010 puncte distincte ?

Prof. Ion Stănescu, Smeeni

Rezolvare: La 3 puncte avem $3 - 2 = 1$ triunghi, la 4 puncte avem $4 - 2 = 2$ triunghiuri, la 5 puncte avem $5 - 2 = 3$ triunghiuri, iar la 2010 puncte avem $2010 - 2 = 2008$ triunghiuri.

G:247. Determinați șase numere naturale a căror sumă este 2010 și sunt direct proporționale cu șase numere naturale consecutive.

Prof. Simion Marin, Râmnicu Sărat

Rezolvare : Notăm cu a, b, c, d, e, f cele șase numere naturale care au suma 2010 și cu x-2, x-1, x, x+1, x+2, x+3 cele șase numere naturale consecutive. Conform enunțului problemei putem scrie

$$\frac{a}{x-2} = \frac{b}{x-1} = \frac{c}{x} = \frac{d}{x+1} = \frac{e}{x+2} = \frac{f}{x+3} = \frac{a+b+c+d+e+f}{x-2+x-1+x+x+1+x+2+x+3} = \frac{2010}{6x+3} = \frac{670}{2x+1}.$$

Deci, $a = \frac{670(x-2)}{2x+1} = 335 - \frac{4 \cdot 5 \cdot 67}{2x+1}$ și cum $2x+1$ este impar (cu $x > 2$, deci $2x+1 > 5$) avem că

$$2x+1 \in \{67, 335\}.$$

Pentru $2x+1=67$ rezultă $x = 33$ și se obțin numerele (310, 320, 330, 340, 350, 360) direct proporționale cu (31, 32, 33, 34, 35, 36). Pentru $2x+1 = 335$ rezultă $x = 167$ și se obțin numerele (330, 332, 334, 336, 338, 340) direct proporționale cu (165, 166, 167, 168, 169, 170).

G:248. Fie unghiul $\angle XOY$ cu $m(\angle XOY) = 20^\circ$ și punctele $A, B, C \in (OX)$ în această ordine, $A \in (OB)$, $M, N \in (OY)$ astfel încât $M \in (ON)$ și $[OA] = [AM] = [MB] = [BN] = [NC]$. Arătați că $[OC] = [ON]$.

Prof. Valerica Roșu, Rm. Sărat

Rezolvare:

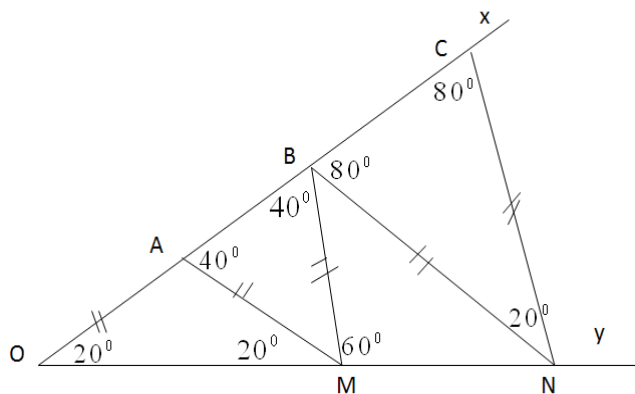
Fie unghiul $\angle XOY$, cu $m(\angle XOY) = 20^\circ$ și punctele $A, B, C \in (OX)$ în această ordine, $A \in (OB)$, $M, N \in (OY)$ astfel încât $M \in (ON)$ și $[OA] = [AM] = [MB] = [BN] = [NC]$. Arătați că $[OC] = [ON]$.

$[OA] = [AM]$ rezultă $\triangle AOM$ isoscel de bază $[OM]$, rezultă $m(\widehat{AOM}) = m(\widehat{AMO}) = 20^\circ$.

Unghiul $\widehat{MAC}$ este unghi exterior triunghiului $AOM \Rightarrow m(\widehat{MAC}) = 40^\circ$

$[MA] = [MB] \Rightarrow \triangle MAB$ isoscel de bază $[AB] \Rightarrow m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{MBA}) = 40^\circ$.

Unghiul $\widehat{BMN}$ este unghi exterior triunghiului $BOM \Rightarrow m(\widehat{BMN}) = 60^\circ$



$[BM] = [BN] \Rightarrow \triangle BMN$ isoscel de bază $[MN]$
 $\Rightarrow m(\widehat{MNB}) = m(\widehat{BMN}) = 60^\circ$

Unghiul $\widehat{NBC}$ este exterior triunghiului BON

$$\Rightarrow m(\widehat{NBC}) = m(\widehat{O}) + m(\widehat{BNO}) = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ$$

$[NB] = [NC] \Rightarrow \triangle NBC$ isoscel de bază $[BC] \Rightarrow m(\angle NBC) = m(\angle NCB) = 80^\circ$

Din suma masurilor unghiurilor unui triunghi în $\triangle NBC$,

$$m(\angle BNC) = 180^\circ - [m(\angle NBC) + m(\angle NCB)] = 180^\circ - (80^\circ + 80^\circ) = 20^\circ$$

$$m(\angle ONC) = m(\angle ONB) + m(\angle BNC) = 60^\circ + 20^\circ = 80^\circ \Rightarrow m(\angle ONC) = 80^\circ$$

Din $m(\angle ONC) = m(\angle OCN) = 80^\circ \Rightarrow \triangle ONC$ isoscel de bază $[NC] \Rightarrow [OC] = [ON]$

G:249. Arătați că dacă numerele (a, b, c, d) sunt direct proporționale cu numerele (3, 4, 5, 6) atunci are loc relația: $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$.

Prof. Nicolae Ivășchescu, Craiova

Rezolvare: Din relația de directă proporționalitate rezultă $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{d}{6}$ iar prin ridicarea la puterea a

treia a fiecărui raport se obține $\frac{a^3}{3^3} = \frac{b^3}{4^3} = \frac{c^3}{5^3} = \frac{d^3}{6^3} \Rightarrow \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3^3 + 4^3 + 5^3} = \frac{d^3}{6^3}$. Cum $3^3 + 4^3 + 5^3 = 216$ iar

$216 = 6^3$ rezultă relația din enunț.

G:250. Determinați numerele naturale nenule x, y, p și q ($p \geq 2, q - p \geq 1$) care verifică:

$$x^p - x^{q-p} = 2 \text{ și } y^p - x^q = 1.$$

Jamel Ghanouchi, Tunisia

Rezolvare: Din $x^p - x^{q-p} = 2$, prin împărțire la x obținem: $x^{p-1} - x^{q-p-1} = \frac{2}{x}$. Deoarece

$x^{q-p} = x^p - 2 \geq 2$, și $q - p - 1 \geq 0$, $p - 1 \geq 1$, deducem că $x^{p-1} - x^{q-p-1} = \frac{2}{x}$ este număr natural nenul cu

$x \geq 2$. Așadar, $x = 2$, și avem: $2^{q-p-1} + 1 = 2^{p-1}$, unde membrul stâng este număr impar iar membrul drept număr par. Deci, egalitatea este posibilă dacă $q - p - 1 = 0$.

Rezultă: $2 = 2^{p-1} \Rightarrow p = 2 \Rightarrow q = p + 1 = 3 \Rightarrow y^p = y^2 = x^q + 1 = 2^3 + 1 = 9 \Rightarrow y = 3$.

Obținem soluția: $(x, y, p, q) = (2, 3, 2, 3)$.

G:251. Să se determine măsurile unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic, știind că suma măsurilor a trei unghiuri exterioare ale acestui triunghi este egală cu 320° .

Prof. Constantin Apostol, Rm. Sărat

Rezolvare: Fie ABC triunghiul dat, $m(\hat{A}) = 90^\circ$. Deducem că cele șase unghiuri exterioare au următoarele măsuri: două au 90° , două au $180^\circ - C$, două au $180^\circ - B$;

Deosebim următoarele cazuri:

Cazul I: $90^\circ + (180^\circ - B) + (180^\circ - C) = 320^\circ \Leftrightarrow 360^\circ = 320^\circ$ ceea ce este fals, deci, acest caz nu poate avea loc.

Cazul II: $90^\circ + 90^\circ + (180^\circ - B) = 320^\circ \Leftrightarrow B = 40^\circ$, $C = 50^\circ$;

Cazul III: $90^\circ + (180^\circ - B) + (180^\circ - B) = 320^\circ \Leftrightarrow B = 65^\circ$, $C = 25^\circ$;

Cazul IV: $(180^\circ - B) + (180^\circ - B) + (180^\circ - C) = 320^\circ \Leftrightarrow B = 130^\circ$ ceea ce este fals căci unghiul $\hat{B}$ trebuie să fie ascuțit.

Clasa a VII - a

G:252. Să se demonstreze identitatea: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ și apoi dovediți că $n^2 + n + 2$ divide $n^6 - 5n^3 + 8$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Prof. Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Identitatea se demonstrează prin calcul direct. În identitatea de mai sus luăm $a = n^2$, $b = n$, $c = 2$ și obținem concluzia.

G:253. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{N}^3$ ecuația $xyz - 3xy + 2xz + yz - 6x - 3y + 2z = 12$.

Prof. Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Ecuația dată este echivalentă cu $xyz - 3xy + 2xz + yz - 6x - 3y + 2z - 6 = 6$ și dând factor comun pe $z - 3$ după ce grupăm termenii doi câte doi se obține: $(z - 3)(xy + 2x + y + 2) = 6$. Mai mult, putem scrie $(z - 3)(y + 2)(x + 1) = 6$ de unde dând valorile corespunzătoare se obține mulțimea soluțiilor $S = \{(0; 4; 4), (0; 0; 6), (0; 1; 5), (1; 1; 4), (2; 0; 4)\}$.

G:254. Determinați $x \in \mathbb{N}$ pentru care $\sqrt{x^2 + 27x + 160} \in \mathbb{N}$

Prof. Delia Ileana Basch - Naidin, Caracal, Olt

Rezolvare: Se observă că

$$\sqrt{x^2 + 24x + 144} < \sqrt{x^2 + 27x + 160} < \sqrt{x^2 + 28x + 196} \Leftrightarrow x + 12 < \sqrt{x^2 + 27x + 160} < x + 14.$$

Cum $x \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{x^2 + 27x + 160} = x + 13$, de unde rezultă că $x = 9$.

G:255. Rezolvați ecuația $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+x} = \frac{2000}{1001}$ în $\mathbb{N}^*$.

Prof. Constantin Dinu, Buzău

Rezolvare: Utilizând formulele $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ și $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ ecuația dată

este echivalentă cu $1 - \frac{1}{x+1} = \frac{1000}{1001} \Rightarrow x = 1000$;

G:256. Arătați că dacă $N = a^2 + b^2$ ($a, b \in \mathbb{Z}^*$), atunci $2N$ și N^2 sunt sume de pătrate perfecte.

Prof. Tuță Luca, Buzău

Rezolvare: Avem: $2N = 2(a^2 + b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2$ și $N^2 = (a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$.

G:257. Fie $A = \frac{1}{2011^2 + 1} + \frac{1}{2011^2 + 2} + \dots + \frac{1}{2011^2 + 2011}$. Să se arate că $2011 \langle \frac{1}{A} \langle 2012$.

Prof. Adrian Stan, Buzău

Rezolvare:

$$\text{Cum } \frac{1}{2011^2 + 2011} \langle \frac{1}{2011^2 + 1} = \frac{1}{2011^2 + 1}, \quad \frac{1}{2011^2 + 2011} \langle \frac{1}{2011^2 + 2} = \frac{1}{2011^2 + 1},$$

$$\frac{1}{2011^2 + 2011} \langle \frac{1}{2011^2 + 3} = \frac{1}{2011^2 + 1}, \dots, \frac{1}{2011^2 + 2011} = \frac{1}{2011^2 + 2011} = \frac{1}{2011^2 + 1} \Rightarrow$$

prin adunarea relațiilor de mai sus că $\frac{2011}{2011^2 + 2011} \langle A \langle 2011 \cdot \frac{1}{2011^2 + 1} \Rightarrow$

$$2011 \langle 2011 + \frac{1}{2011} \langle \frac{1}{A} \langle 2011 + 1 = 2012 \Rightarrow 2011 \langle \frac{1}{A} \langle 2012.$$

G:258. Pe diagonala [AC] a dreptunghiului ABCD cu AB = 16 cm și BC = 12 cm, se ia punctul E astfel încât AE = 3EC. Să se afle distanța de la E la BD.

Prof. Cornelia Gurău, Moinești, Bacău

Rezolvare: Se află ușor AC = 20 cm și din AE = 3EC și AC = 20 cm rezultă EC = 5 cm.

Fie DB ∩ AC = {O} ⇒ OE = EC = 5 cm. Din $A_{ABCD} = 4 \cdot A_{COB} \Rightarrow A_{COB} = 48 \text{ cm}^2$. În triunghiul Δ COB cum [BE] este mediană, rezultă aria $A_{EOB} = A_{COB} : 2 \Rightarrow A_{EOB} = 24 \text{ cm}^2$. Pe de altă parte

$$A_{EOB} = \frac{d(E, BD) \cdot OB}{2} \Rightarrow d(E, BD) = 4,8 \text{ cm}.$$

G:259. În triunghiul ABC, M este mijlocul înălțimii (AD), D ∈ (BC) și fie E ∈ (AC), astfel încât, EC = 2 AE. Să se arate că dacă B, M și E sunt coliniare, atunci triunghiul ABC este isoscel.

Prof. Constantin Apostol, Rm. Sărat

Rezolvare: Ducem prin D paralela la BE și fie F punctul de intersecție a acestei paralele cu dreapta AC. În triunghiul ADF, (ME) este linie mijlocie, căci M este mijlocul laturii (AD) și ME este paralelă cu DF;

Deducem că E este mijlocul laturii (AF) și deci, $(AE) \equiv (EF) \equiv (FC)$. În triunghiul BEC, avem

DF || BE și F, mijlocul laturii (EC). Deducem că (DF) este linie mijlocie adică D este mijlocul laturii (BC).

S-a obținut faptul că (AD) este atât mediană cât și înălțime, rezultă așadar, că triunghiul Δ ABC este isoscel, cu vârful A

Clasa a VIII – a

G:260. Să se aducă la o formă mai simplă $(9+8)(9^2+8^2)(9^4+8^4)(9^8+8^8)\dots(9^{1024}+8^{1024})$.

Prof. Delia Ileana Basch - Naidin, Caracal, Olt

Rezolvare: Se va înmulți cu $1 = 9 - 8$ și se va ajunge la $9^{2048} - 8^{2048}$.

G:261. Comparați numerele a și b unde:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2009}} + \frac{1}{\sqrt{2010}} + \frac{1}{\sqrt{2011}}, b = \frac{\sqrt{2009}}{\sqrt{2010} \cdot \sqrt{2011}} + \frac{\sqrt{2010}}{\sqrt{2011} \cdot \sqrt{2009}} + \frac{\sqrt{2011}}{\sqrt{2009} \cdot \sqrt{2010}}.$$

Prof. Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

Rezolvare : Calculăm diferența $b - a$. Vom nota $x = \sqrt{2009}, y = \sqrt{2010}, z = \sqrt{2011}$.

$$\begin{aligned} \text{Avem: } b - a &= \frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx}{xyz} = \\ &= \frac{2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)}{2xyz} = \frac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{2xyz} > 0. \text{ Inegalitatea este strictă deoarece} \\ &x \neq y, y \neq z, z \neq x. \text{ În concluzie } b > a. \end{aligned}$$

G:262. Determinați $x \in \mathbb{R}_+^*$ știind că $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

Prof. Tuță Luca, Buzău

Rezolvare:

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \Leftrightarrow x^{\sqrt{x}} = x^{\frac{x}{2}} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{x^2}{4} \Rightarrow 4x = x^2 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0.$$

Tot din $x^{\sqrt{x}} = x^{\frac{x}{2}}$ avem și cazul $x = 1$. Deci, $x = 1$ sau $x = 4$.

G:263. Determinați valoarea maximă a fracției $F(x) = \frac{46x^2 - 2392x + 31145}{x^2 - 52x + 677}$ și aflați valoarea reală a lui x pentru care se obține acest maxim.

Prof. Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Frația dată se sparge în două fracții de forma

$$F(x) = \frac{46(x^2 - 52x + 677)}{x^2 - 52x + 677} + \frac{3}{x^2 - 52x + 677} = 46 + \frac{3}{(x-26)^2 + 1} \Rightarrow F(x) \text{ are valoarea maximă atunci când } x - 26 = 0 \text{ adică pentru } x = 26 \text{ valoarea maximă este egală cu } F(26) = 49.$$

G:264. Arătați că nu există funcții f astfel încât $f(x) + f(5-x) = 4x-1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Prof. Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Presupunem că există astfel de funcții. Atunci, pentru $x = 0$ și $x = 5$ se obțin relațiile $f(0) + f(5) = -1$ și $f(0) + f(5) = 19$ de unde contradicția este evidentă.

G:265. Fie expresia $E(x) = |x| + |x-1| + |x-2| + \dots + |x-2011|, x \in \mathbb{R}$.

Să se determine $\min_{x \in \mathbb{R}} E(x)$ și pentru ce valori ale lui x se realizează acesta.

Prof. Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: În total sunt 2012 module din care jumătate au valoarea din modul pozitivă dacă luăm pe x din intervalul $[1005; 1006)$.

$$\text{Astfel, } E(x) = x + x-1 + x-2 + \dots + x-1005 - x+1006 - x+1007 - x+1008 \dots + x+2011 = 1006^2.$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}} E(x) = 1006^2, \forall x \in [1005; 1006).$$

Notă. O altă rezolvare a dat domnul **Titu Zvonaru** din Comănești, și anume:

$$\begin{aligned} \text{Avem: } 1006^2 &= -1 - 2 - \dots - 1005 + 1006 + 1007 + \dots + 2011 = \\ &= |x + (x-1) + (x-2) + \dots + (x-1005) + (-x+1006) + (-x+1007) + \dots + (-x+2011)| \leq \\ &= |x| + |x-1| + \dots + |x-1005| + |x-1006| + |x-1007| + \dots + |x-2011| = E(x). \end{aligned}$$

și deci $\min_{x \in \mathbb{R}} E(x) = 1006^2$. Se deduce ușor că $E(x) = 1006^2 \Rightarrow x \in [1005, 1006)$.

G:266. Arătați că numărul $A = 7^{2011} + 8^{2011} + 9^{2011}$ este divizibil cu 48.

(În legătură cu problema G : 165, propusă de Gheorghe Dârstaru.)

Titu Zvonaru, Comănești

Rezolvare: Din descompunerea $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n})$ rezultă că pentru

$m = \text{impar}$, $a^m + b^m$ se divide cu $a + b$. Avem:

$7^{2011} + 8^{2011}$ se divide cu $7 + 8$, deci și cu 3, și cum 9^{2011} se divide cu 3, rezultă că A se divide cu 3;

$7^{2011} + 9^{2011}$ se divide cu $7 + 9$ și cum 8^{2011} se divide cu 16, rezultă că A se divide cu 16.

Deoarece 3 și 16 sunt prime între ele, deducem că A se divide cu $3 \cdot 16 = 48$.

G:267. Să se rezolve în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuația: $x^2 y - 6 = 3x^2 + y$.

Prof. Gheorghe Dârstaru, Berca

Rezolvare:

$$x^2 y - 6 = 3x^2 + y \Leftrightarrow (x^2 - 1)(y - 3) = 9 \Rightarrow x^2 - 1 \in \{-1; 1; -3; 3; -9; 9\}.$$

Se obțin soluțiile: $S = \{(0, -6), (-2, 6), (2, 6)\}$.

G:268. Să se rezolve sistemul în $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$:

$$\begin{cases} x + y = \frac{109}{4} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{13}{2} \end{cases}.$$

Prof. Ion Stănescu, Smeeni

Rezolvare: Din a doua ecuație rezultă $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 \Rightarrow x + y + 2\sqrt{xy} = \frac{169}{4} \Rightarrow xy = \frac{225}{4}$. Mai

departe se formează ecuația de gradul al doilea cu rădăcinile x și y știind suma și produsul lor:

$$4t^2 - 109t + 225 = 0 \Rightarrow S = \left\{ \left(25; \frac{9}{4}\right), \left(\frac{9}{4}; 25\right) \right\}.$$

G:269. Să se găsească minimul expresiei $E = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{4}{3}(a + b + c)$.

Prof. Ligia și Gheorghe Struțu, Buzău

Rezolvare:

$$E = a^2 - \frac{4}{3}a + \frac{4}{9} + b^2 - \frac{4}{3}b + \frac{4}{9} + c^2 - \frac{4}{3}c + \frac{4}{9} - \frac{4}{3} = \left(a - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(b - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(c - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} \geq -\frac{4}{3}, \text{ așadar,}$$

minimul expresiei este $-\frac{4}{3}$ care se realizează pentru $a = b = c = \frac{2}{3}$.

Clasa a IX - a

L:150. Dacă $a, b \in \mathbb{R}^*$ și $9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) - 42\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 67 \leq 0$. Să se arate că $6a = b(7 + \sqrt{13})$ sau

$$6b = a(7 + \sqrt{13}).$$

Prof. Constantin Dinu, Buzău

Rezolvare: Inegalitatea dată este echivalentă cu

$$9\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 18 - 42\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 67 \leq 0 \Leftrightarrow \left[3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 7\right]^2 \leq 0 \Rightarrow 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 7 = 0. \text{ Se face notația}$$

$$\frac{a}{b} = t \Rightarrow t + \frac{1}{t} = \frac{7}{3} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{6} \Rightarrow 6a = b(7 + \sqrt{13}) \text{ sau } b = \frac{a(7 + \sqrt{13})}{6}.$$

L:151. Dacă $a, b > 0$ și $ab \leq 1$ arătați că $(a + b + 2)^2 \geq 4(a + b)(ab + 1)$.

Prof. dr. Mihály Bencze, Brașov

Rezolvare: $(a + b + 2)^2 \geq 4(a + b)(ab + 1) \Leftrightarrow (a + b)^2 - 4(a + b)ab + 4 \geq 0$

$$\Delta_{a+b} = 16(a^2b^2 - 1) \leq 0, \forall a, b > 0, ab \leq 1.$$

L:152. Fie funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 2010$. Determinați funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $f(g(x)) = -24x + 48191$.

Prof. Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Deoarece g este funcție de gradul întâi iar compunerea lui f cu g este tot funcție de gradul întâi vom considera prin urmare funcția $f(x) = ax + b$. Atunci,
 $f(g(x)) = -24x + 48191 \Leftrightarrow f(-x + 2010) = -24x + 48191 \Leftrightarrow a(-x + 2010) + b = -24x + 48191 \Rightarrow$
 $a = 24$ și $b = -49$. Așadar, $f(x) = 24x - 49$.

L:153. Determinați partea întreagă a numărului:

$$A = 3n + 2(\sqrt{n^2 - n} + \sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 + n}), n \in \mathbb{N}^*.$$

Prof. Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare. Vezi rezolvarea problemei 26371, din G.M.-B, nr. 11/2010 în G.M.-B nr. 5/2011, pag.258 și 259.

L:154. Fie $f: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $(f \circ f)(x) = \frac{3x+1}{x+3}$, $\forall x \in [-1; 1]$. Să se arate că $f(-1) + f(1) = 0$.

Prof. Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: Observăm că $(f \circ f)(-1) = -1$ și $(f \circ f)(1) = 1$ atunci facem transformarea $x \rightarrow f(x)$.

$$\text{Se obține } (f \circ f)(f(x)) = \frac{3f(x)+1}{f(x)+3} = \frac{10x+6}{6x+10}. \quad (*)$$

Pentru $x = -1$ se obține $f(f(f(-1))) = f(-1) = -1$ din (*) și pentru $x = 1$ rezultă $f(f(f(1))) = f(1) = 1$ din (*). Așadar, $f(-1) + f(1) = 0$.

L:155. Să se demonstreze că, dacă cel puțin unul din numerele a, b, c, d este diferit de zero, are loc

$$\text{inegalitatea } \frac{a^2}{b^2 + c^2 + d^2} + \frac{b^2}{a^2 + c^2 + d^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2 + d^2} + \frac{d^2}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{4}{3}.$$

Prof. Violeta Corbu, Buzău

Rezolvare: Se notează $b^2 + c^2 + d^2 = x$, $a^2 + c^2 + d^2 = y$, $a^2 + b^2 + d^2 = z$, $a^2 + b^2 + c^2 = t$. Se determină

$$a^2 = \frac{y+z+t-2x}{3}, b^2 = \frac{x+z+t-2y}{3}, c^2 = \frac{x+y+t-2z}{3}, d^2 = \frac{x+y+z-2t}{3}. \text{ Se înlocuiesc}$$

relațiile în inegalitatea de demonstrat obținând

$$\frac{y+z+t-2x}{3x} + \frac{x+z+t-2y}{3y} + \frac{x+y+t-2z}{3z} + \frac{x+y+z-2t}{3t} \geq \frac{4}{3}. \text{ Inegalitatea se transformă în}$$

$$\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{t}{x} - 2 + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{t}{y} - 2 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{t}{z} - 2 + \frac{x}{t} + \frac{y}{t} + \frac{z}{t} - 2 \geq 4 \text{ obținându-se}$$

$$\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{t}{x} + \frac{x}{t}\right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right) + \left(\frac{t}{y} + \frac{y}{t}\right) + \left(\frac{t}{z} + \frac{z}{t}\right) \geq 12 \text{ ceea ce este adevărat.}$$

Notă. Au mai dat șase soluții domnul **Titu Zvonaru**, din Comănești împreună cu domnul **Neculai Stanciu** din Buzău.

$$\textbf{L:156. Să se calculeze expresia: } E = \frac{2 \cos 14^\circ \sin 10^\circ - \sin 24^\circ}{\cos 86^\circ}.$$

Prof. Delia Ileana Basch- Naidin, Caracal, Olt

$$\textbf{Rezolvare: } E = \frac{2 \cos 14^\circ \sin 10^\circ - \sin 24^\circ}{\cos 86^\circ} = \frac{2 \cos 14^\circ \sin 10^\circ - \sin(14+10)^\circ}{\cos 86^\circ} =$$

$$= \frac{2\cos 14^\circ \sin 10^\circ - \sin 14^\circ \cos 10^\circ - \cos 14^\circ \sin 10^\circ}{\cos 86^\circ} = \frac{\cos 14^\circ \sin 10^\circ - \sin 14^\circ \cos 10^\circ}{\cos 86^\circ} = \frac{-\sin(14-10)^\circ}{\cos 86^\circ} =$$

$$= \frac{-\sin 4^\circ}{\cos 86^\circ} = \frac{-\cos(90^\circ - 4^\circ)}{\cos 86^\circ} = \frac{-\cos 86^\circ}{\cos 86^\circ} = -1.$$

Notă. O altă variantă de rezolvare a dat domnul **Titu Zvonaru**, din Comănești:

$$2\sin 10^\circ \cos 14^\circ = \sin(10^\circ + 14^\circ) + \sin(10^\circ - 14^\circ) = \sin 24^\circ - \sin 4^\circ = \sin 24^\circ - \cos 86^\circ, \text{ deci } E = -1.$$

L:157. Să se rezolve ecuațiile: a) $\cos x = y^2 - 2y + 2$; b) $\cos x = y^4 - 4y^2 + 5$.

Prof. Gherghina Manea, Buzău

Rezolvare: a) $\cos x = (y-1)^2 + 1$. Cum $|\cos x| \leq 1 \Rightarrow (y-1)^2 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) Asemănător, obținem $(y^2 - 2)^2 + 1 \leq 1 \Rightarrow y^2 - 2 = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

L:158. Arătați că dacă $a, b, c \in [1, \infty)$ sunt laturile unui triunghi, atunci

$$\frac{a^{\frac{1}{a}} \cdot b^{\frac{1}{b}} + b^{\frac{1}{b}} \cdot c^{\frac{1}{c}} + c^{\frac{1}{c}} \cdot a^{\frac{1}{a}}}{a^{\frac{2}{a}} + b^{\frac{2}{b}} + c^{\frac{2}{c}}} > \frac{1}{2}.$$

Prof. José Luis Díaz-Barrero, Polytechnical University of Catalonia, Barcelona, Spain

Rezolvare:

Observăm că dacă trei numere $x_1, x_2, x_3 \in [1, 2)$, atunci putem construi un triunghi cu lungimile laturilor x_1, x_2, x_3 , deoarece suma a două dintre ele este mai mare ca al treilea. Aceasta înseamnă că $x_{i_1} + x_{i_2} \geq 2 > x_{i_3}$. Mai observăm că $a^{\frac{1}{a}}, b^{\frac{1}{b}}$, și $c^{\frac{1}{c}}$ sunt în intervalul $[1, 2)$. Întradevăr, dacă $a \geq 1$, atunci $a^{\frac{1}{a}} \geq 1$. Așa că este suficient să dovedim că $a^{\frac{1}{a}} < 2 \Leftrightarrow a < 2^a$. Deoarece $[a] \leq a < a+1$, din inegalitatea lui Bernoulli, avem:

$2^a \geq 2^{[a]} = (1+1)^{[a]} \geq 1 + [a] > a$. Asemănător, pentru $b^{\frac{1}{b}}$ și $c^{\frac{1}{c}}$. Deci cu segmente de lungimi $a^{\frac{1}{a}}, b^{\frac{1}{b}}$, și $c^{\frac{1}{c}}$ putem forma un triunghi și avem: $a^{\frac{1}{a}} < b^{\frac{1}{b}} + c^{\frac{1}{c}}$, $b^{\frac{1}{b}} < c^{\frac{1}{c}} + a^{\frac{1}{a}}$, $c^{\frac{1}{c}} < a^{\frac{1}{a}} + b^{\frac{1}{b}}$. Înmulțim prima inegalitate cu $a^{\frac{1}{a}}$, a doua cu $b^{\frac{1}{b}}$ și a treia cu $c^{\frac{1}{c}}$, iar apoi prin adunarea inegalităților obținute obținem o inegalitate echivalentă cu inegalitatea de demonstrat.

L:159. Calculați suma: $7 + 19 + 37 + \dots + (3n^2 + 3n + 1)$ **prin două metode.**

Prof. Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Metoda 1.

$$S_n = \sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1) = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + n = 3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n = n(n^2 + 3n + 3).$$

Metoda 2.

$$S_n = \sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1) = \sum_{k=1}^n [(k^2 + 2k + 1) + (k^2 + k) + k^2] = \sum_{k=1}^n (k+1-k)[(k+1)^2 + k(k+1) + k^2] =$$

$$= \sum_{k=1}^n [(k+1)^3 - k^3] = 2^3 - 1^3 + 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \dots + (n+1)^3 - n^3 = (n+1)^3 - 1^3 = n(n^2 + 3n + 3).$$

Notă. O variantă mai scurtă pentru metoda 2 a dat domnul **Titu Zvonaru**, din Comănești.

$$\textbf{L:160. Calculați: } S = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{9} - \frac{4}{27} + \dots - \frac{2010}{3^{2009}}.$$

Prof. Mariana Mitea, Cugir, Alba

Rezolvare: Împărțind suma dată la 3 se obține $\frac{S}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{3}{27} - \frac{4}{81} + \dots - \frac{2010}{3^{2010}}$. Adunând această relație

cu cea din enunțul problemei obținem: $\frac{4S}{3} = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots - \frac{1}{3^{2009}}\right) - \frac{2010}{3^{2010}}$; Se calculează mai întâi suma din paranteză care este suma unei progresii geometrice cu $a_1 = 1$ și rația $q = -\frac{1}{3}$. Atunci

$$\frac{4S}{3} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{2010}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} - \frac{2010}{3^{2010}} \Rightarrow \frac{4S}{3} = \frac{1 - \frac{1}{3^{2010}}}{\frac{4}{3}} - \frac{2010}{3^{2010}} \Rightarrow S = \frac{9}{16} \cdot \left(1 - \frac{2681}{3^{2010}}\right).$$

L:161. Demonstrați că dacă a, b și c sunt laturile unui triunghi, atunci au loc relațiile:

$$\begin{aligned} \text{i)} & \left(\sum \frac{a}{b+c-a}\right) - 3 = 2 \cdot \sum \frac{(a-b)^2}{(b+c-a)(c+a-b)}; \\ \text{ii)} & \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3 + 2 \left[\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{c+a}\right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Titu Zvonaru, Comănești și prof. Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare:

i) Notăm $b+c-a = x, c+a-b = y$ și $a+b-c = z$. Ținând cont de inegalitățile triunghiulare, avem $x, y, z > 0$. Atunci, identitatea care trebuie demonstrată este echivalentă cu :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \sum \frac{y+z}{x} - 3 &= \frac{1}{2} \cdot \sum \frac{(x-y)^2}{xy} \Leftrightarrow \sum \frac{y+z}{x} - 6 = \sum \frac{(x-y)^2}{xy} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \sum \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) = \sum \frac{(x-y)^2}{xy} \\ \Leftrightarrow \sum \frac{(x-y)^2}{xy} &= \sum \frac{(x-y)^2}{xy}, \text{evident.} \end{aligned}$$

ii) Folosind identitatea de la punctul i) inegalitatea din enunț se mai scrie

$$\sum \frac{(a-b)^2}{(b+c-a)(c+a-b)} \geq \sum \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}, \text{ iar pentru a demonstra ultima inegalitate, este suficient să arătăm}$$

că $\frac{1}{(b+c-a)(c+a-b)} \geq \frac{1}{(a+b)^2}$, care este echivalentă cu

$$(a+b)^2 \geq c^2 - (a-b)^2 \Leftrightarrow (a+b+c)(a+b-c) + (a-b)^2 \geq 0, \text{ și este adevărată deoarece } a, b \text{ și } c \text{ sunt laturile unui triunghi. Avem egalitate dacă și numai dacă } a = b = c.$$

L:162. Fie $x = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{2010 \cdot 2011}$, $y = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2009 \cdot 2010}$. **Arătați că** $x < \frac{1005}{2011} < y$

Prof. Ligia și Gheorghe Struțu, Buzău

Rezolvare: Observăm că $\frac{1}{2 \cdot 3} < \frac{1}{1 \cdot 2}$, $\frac{1}{4 \cdot 5} < \frac{1}{3 \cdot 4}$, ..., $\frac{1}{2010 \cdot 2011} < \frac{1}{2009 \cdot 2010} \Rightarrow x < y$;

Din $x < y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2} < y$ (1). Pe de altă parte se calculează $x+y$ și se obține

$$x+y = \frac{2010}{2011} \Rightarrow \frac{x+y}{2} = \frac{1005}{2011}. \quad (2)$$

Din (1) și (2) se obține relația cerută.

Clasa a X - a

L:163. Determinați funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ **care îndeplinește simultan condițiile:**

1) $f(2012) = 2013$;

2) $f(x+1) = f(x) + \frac{1}{1006} \cdot x$.

Prof. Constantin Dinu, Buzău

Rezolvare: Dând valori lui x de la 1 la $x-1$ în relația de la punctul b) după care adunând relațiile obținute rezultă $f(x) = f(1) + \frac{1}{1006}(1 + 2 + 3 + \dots + x - 1)$. Pentru $x = 2012$ știm că $f(2012) = 2013$ atunci

$$f(1) = 2013 - \frac{2011 \cdot 2012}{2 \cdot 1006} \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow f(x) = 2 + \frac{x(x-1)}{2012}.$$

L:164. Fie n **și** m **numere naturale. Calculați suma:** $\frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n+m} 3^k \sum_{i+j=k} C_n^i C_m^j$.

Prof. José Luis Díaz-Barrero, Polytechnical University of Catalonia, Barcelona, Spain

Rezolvare: Dezvoltând suma a doua avem:

$$\frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n+m} 3^k \sum_{i+j=k} C_n^i C_m^j = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n+m} 3^k [C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \dots + C_n^k C_m^0]. \text{ Apoi, ținem cont de relația}$$

$$C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \dots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k \text{ și obținem:}$$

$$\frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n+m} 3^k \sum_{i+j=k} C_n^i C_m^j = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n+m} 3^k C_{n+m}^k = \frac{1}{2^{2n}} (1+3)^{n+m} = 4^m.$$

L:165. Rezolvați în $\mathbb{R}$ **ecuația:** $\sin x = \sum_{k=0}^6 \cos \frac{2k\pi}{7}$.

Prof. Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Se consideră ecuația $x^7 - 1 = 0$, care are soluțiile $x_k = \cos \frac{2k\pi}{7} + i \sin \frac{2k\pi}{7}$ ($k = \overline{0,6}$).

Atunci, $\sum_{k=0}^6 x_k = \sum_{k=0}^6 \cos \frac{2k\pi}{7} + i \sum_{k=0}^6 \sin \frac{2k\pi}{7} = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^6 \cos \frac{2k\pi}{7} = 0$ și ecuația devine $\sin x = 0$, cu mulțimea soluțiilor $\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

L:166. Dacă $0 < a_k \leq b_k$ **și** $x_k \in [a_k, b_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$) **arătați că:**

$$\log_{x_1}((a_2 + b_2)x_2 - a_2 b_2) + \log_{x_2}((a_3 + b_3)x_3 - a_3 b_3) + \dots + \log_{x_n}((a_1 + b_1)x_1 - a_1 b_1) \geq 2n.$$

Prof. dr. Mihály Bencze, Brașov

Rezolvare: Dacă $x_k \in [a_k, b_k] \Rightarrow (x_k - a_k)(b_k - x_k) \geq 0 \Leftrightarrow (a_k + b_k)x_k - a_k b_k \geq x_k^2$,

Așadar avem: $\sum_{cyclic} \log_{x_1}((a_2 + b_2)x_2 - a_2 b_2) \geq \sum_{cyclic} \log_{x_1} x_2^2 = 2 \sum_{cyclic} \log_{x_1} x_2 \geq 2n \sqrt[n]{\prod_{cyclic} \log_{x_1} x_2} = 2n$.

L:167. Să se rezolve în $\mathbb{R}^*$ **ecuația** $5^{\log_2(x^2 + \frac{1}{x^2})} + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 9$;

Prof. Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: Notăm $x^2 + \frac{1}{x^2} = t > 0$. Atunci, ecuația data devine: $5^{\log_2 t} + t = 7$.

Cum funcția $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = 5^{\log_2 t} + t$ este strict crescătoare pe $(0; \infty)$, rezultă că ecuația $f(t) = 7$ are soluție unică și anume, $t = 2$ adică

$x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$ de unde se obțin soluțiile: $x=1$, $x=-1$; $S = \{-1; 1\}$.

L:168. Dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive, să se demonstreze inegalitățile:

$$1) 1 + \frac{4}{27abc} \geq \frac{3}{a+b+c}; 2) 1 + \frac{2}{27abc} \geq \frac{1}{ab+bc+ca}.$$

Titu Zvonaru, Comănești

Rezolvare: Folosind inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică, obținem:

$$1) 1 + \frac{4}{27abc} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{4}{27abc} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{27abc}} = \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{3}{a+b+c};$$

$$2) 1 + \frac{2}{27abc} = 1 + \frac{1}{27abc} + \frac{1}{27abc} \geq 3\sqrt[3]{1 \cdot \frac{1}{27abc} \cdot \frac{1}{27abc}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} \geq \frac{1}{ab+bc+ca}.$$

Avem egalitate în primul caz dacă și numai dacă $abc = \frac{8}{27}$ și $a = b = c$, adică $a = b = c = \frac{2}{3}$.

În al doilea caz avem egalitate dacă și numai dacă $abc = \frac{1}{27}$ și $ab = bc = ca$, adică $a = b = c = \frac{1}{3}$.

L:169. Să se rezolve ecuația: $2 \cdot 343^x - 3 \cdot 98^x + 10 \cdot 28^x - 14 \cdot 8^x = 0$

Prof. Iuliana Trașcă, Scornicești, Olt

Rezolvare: $2 \cdot 343^x - 3 \cdot 98^x + 10 \cdot 28^x - 14 \cdot 8^x = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{3x} - 3 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{2x} - 10 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^x - 14 = 0.$

Notăm $\left(\frac{7}{2}\right)^x = y > 0$ și avem $2y^3 - 3y^2 - 10y - 14 = 0 \Leftrightarrow (2y-7)(y^2+2y+2) = 0$, ecuația

$y^2 + 2y + 2 = 0$ nu are rădăcini reale, rămâne $2y-7=0$, adică $y = \frac{7}{2}$, deci $\left(\frac{7}{2}\right)^x = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = 1$.

Clasa a XI – a

L:170. Fie matricea $A_{a,b} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 2 \\ 4a & b & b \end{pmatrix}$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât determinantul matricei

$B = x \cdot A_{a,b} + yI_3$ să nu depindă de x .

Prof. Florentina Popescu, Buzău

Rezolvare:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 4x+y & x & x \\ 8x & 2x+y & 2x \\ 4ax & 8x & bx+y \end{vmatrix} = x^2y(4b-4a) + xy^2(6+b) + y^3. \text{ Se pun condițiile } 4b-4a=0 \text{ și}$$

$6+b=0$ de unde rezultă $a=b=-6$;

L:171. Se consideră un triunghi ABC . Determinați mulțimea punctelor M din interiorul triunghiului ABC pentru care $\text{Aria}(\triangle AMB) = \text{Aria}(\triangle BMC) = \text{Aria}(\triangle CMA)$.

Prof. Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

Rezolvare : Asociem triunghiului ABC reperul ortogonal xOy în care $A(a,b), C(c,0), B(0,0)$ cu $a, b, c > 0$. Ecuațiile dreptelor AB și AC sunt:

$AB : bx - ay = 0; AC : bx - (a - c)y - bc = 0$. Distanțele de la $M(x, y)$ la AB respectiv

$$AC \text{ sunt: } d(M, AB) = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad d(M, AC) = \frac{|bx - (a - c)y - bc|}{\sqrt{b^2 - (a - c)^2}}.$$

Prin urmare : $A_{AMB} = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} = \frac{|bx - ay|}{2};$

$$A_{AMC} = \frac{|bx - (a - c)y - bc|}{\sqrt{b^2 - (a - c)^2}} \cdot \frac{\sqrt{b^2 - (a - c)^2}}{2} = \frac{|bx - (a - c)y - bc|}{2}; \quad A_{BMC} = \frac{yc}{2}. \text{ Condiția din enunț se}$$

scrie în mod echivalent: $|bx - ay| = cy = |bx - (a - c)y - bc| \Leftrightarrow S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$, unde

$$S_1 : \begin{cases} bx - ay = cy \\ bx - (a - c)y - bc = yc \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} bx - ay = cy \\ bx - (a - c)y - bc = -yc \end{cases};$$

$$S_3 : \begin{cases} bx - ay = -cy \\ bx - (a - c)y - bc = yc \end{cases}, \quad S_4 : \begin{cases} bx - ay = -cy \\ bx - (a - c)y - bc = -yc \end{cases}.$$

Rezolvând aceste sisteme, soluția problemei este dată de soluția sistemului S_2 , care este $x = \frac{a + c}{3}, y = \frac{b}{3}$,

care sunt de fapt coordonatele centrului de greutate al $\triangle ABC$, plus soluțiile sistemelor S_1, S_3 și S_4 .

Notă. O soluție sintetică (pe care o prezentăm mai jos) a fost dată de domnul **Titu Zvonaru**, din Comănești.

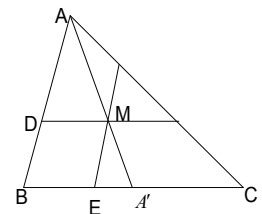
Din enunț rezultă că $Aria(\triangle BMC) = Aria(\triangle AMB) = \frac{1}{3} Aria(\triangle ABC)$.

Deducem că distanța de la punctul M la dreapta BC , este o treime din distanța de la punctul A la dreapta BC , și analog pentru punctul C și dreapta AB .

Paralela prin M la BC intersectează latura $[AB]$ în D , iar paralela prin M la AB intersectează latura $[BC]$ în E . Notăm $A' = AM \cap BC$. Folosind asemănări putem scrie:

$$\frac{1}{3} = \frac{DB}{AB} = \frac{MA'}{AA'} = \frac{EA'}{BA'} \Rightarrow EA' = \frac{BA'}{3} \Rightarrow BA' - BE = \frac{BA'}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} BA' = BE \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{2}{3} BA' = \frac{1}{3} BC \Rightarrow BA' = \frac{BC}{2}$, deci AA' este mediană. Rezultă că punctul căutat, M este centrul de greutate al triunghiului ABC .



L:172. Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației $x^3 = 1$, arătați că:
 $\det(x_1 I_3 - A) + \det(x_2 I_3 - A) + \det(x_3 I_3 - A) = 3(1 - \det A), \forall A \in M_3(C).$

Prof. dr. Mihály Bencze, Brașov

Rezolvare: Avem $\det(xI_3 - A) = x^3 - \text{Tr}(A)x^2 + \text{Tr}(A^*)x - \det A$.

Din $x^3 = 1$, rezultă $\sum_{cyclic} x_1 = 0, \sum_{cyclic} x_1 x_2 = 0, \sum_{cyclic} x_1^2 = 0$. Atunci,

$$\sum \det(x_1 I_3 - A) = \sum x_1^3 - \text{Tr}(A) \sum x_1^2 + \text{Tr}(A^*) \sum x_1 - \sum \det(A) = 3 - 3 \det(A).$$

L:173. Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot (3 \ln(x+3) + 5 \ln(x+2) - 8 \ln(x+1))$.

Prof. Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: Limita dată este echivalentă cu $\lim_{x \rightarrow \infty} \{3x[\ln(x+3) - \ln(x+1)] + 5x[\ln(x+2) - \ln(x+1)]\} =$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x \ln \frac{x+3}{x+1} + 5x \ln \frac{x+2}{x+1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} [3 \ln \left(1 + \frac{2}{x+1}\right)^x + 5 \ln \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^x] =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}} \right)^{\frac{2x}{x+1}} + 5 \ln \left(\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x+1}} \right)^{\frac{x}{x+1}} \right] = 3 \cdot \ln e^2 + 5 \cdot \ln e^1 = 6 + 5 = 11.$$

S-a utilizat formula $\lim_{u(x) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)} = e$.

L:174. Fie şirurile $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ exprimate prin $a_k = \log_{\frac{1}{2}} \frac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)-k-1}$, $k \in \mathbb{N}$ şi $b_n = \sum_{i=1}^n a_i$.

a) Să se arate că şirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit şi strict crescător.

b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Prof. Iuliana Traşcă, Scorniceşti, Olt

Rezolvare: a) $b_{n+1} = a_{n+1} + b_n \Leftrightarrow b_{n+1} - b_n = a_{n+1}$. Avem :

$$a_n = \log_{\frac{1}{2}} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \Leftrightarrow a_{n+1} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{n^2 + 4n + 3}{n^2 + 4n + 4}, \text{ dar } 0 < \frac{n^2 + 4n + 3}{n^2 + 4n + 4} < 1, \text{ iar din monotonia funcţiei}$$

$$\text{logaritmice avem: } \log_{\frac{1}{2}} \frac{n^2 + 4n + 3}{n^2 + 4n + 4} > \log_{\frac{1}{2}} 1 \Leftrightarrow a_{n+1} > 0, \text{ deci } b_{n+1} - b_n > 0 \Rightarrow \text{şirul } (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ este strict}$$

crescător. Deoarece b_n este o sumă de logaritmi, putem scrie:

$$b_n = \log_{\frac{1}{2}} \left[\frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \cdot \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \right] = \log_{\frac{1}{2}} \frac{n+2}{2(n+1)} > 0$$

$$\text{Dar } \frac{n+2}{2(n+1)} > \frac{1}{2}, \text{ folosind monotonia funcţiei logaritmice avem } \log_{\frac{1}{2}} \frac{n+2}{2(n+1)} < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$$

Deci $0 < b_n < 1 \Rightarrow$ şirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit.

$$\text{b) Conform a) avem că şirul } (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ este convergent şi } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \log_{\frac{1}{2}} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2(n+1)} \right] = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$$

L:175. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f: [0; 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2, & x \in [0; 1) \\ 2x^2 - 5x + c, & x \in [1; 3] \end{cases}$

să verifice teorema lui Rolle.

Prof. Laura Tănase, Buzău

Rezolvare: Se impun condiţiile: f continuă pe $[0; 3]$, f derivabilă pe $(0; 3)$ şi $f(0) = f(3)$. Din acestea rezultă relaţiile: $a + b - c = -5$; $2a + b = -1$; $c = -1$. Aşadar, $a = 5$, $b = -11$, $c = -1$;

L: 176. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculaţi $A^3 - 3A^2 + 2I_2$;

b) Calculaţi A^{2010} ;

c) Aflați matricele X pentru care $AX=XA$;

Rezolvare:

a) $A^3 - 3A^2 + 2I_2 = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$; b) $A^{2010} = \begin{pmatrix} 1 & -2010 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) Din $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ rezultă $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R}$.

Clasa a XII - a

L:177. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care numărul $N = 10^n - 2^n - 8$ este divizibil cu 21.

Prof. Ovidiu Țătan, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Cum $21=3 \cdot 7$, stabilim forma numerelor $n \in \mathbb{N}$ pentru care N este divizibil cu 3 și cu 7.

Avem succesiv: $(10^n - 2^n - 8) \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow (1 - (-1)^n + 1) \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow (2 - (-1)^n) \equiv 0 \pmod{3}$.

$\Leftrightarrow n = 2 \cdot k + 1, k \in \mathbb{N}$. Pentru $n = 2 \cdot k + 1, k \in \mathbb{N}$, obținem:

$$(10^{2k+1} - 2^{2k+1} - 8) \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow (3^{2k+1} - 2^{2k+1} - 1) \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow (9^k \cdot 3 - 2^{2k} \cdot 2 - 1) \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2^k \cdot 3 - 2^{2k} \cdot 2 - 1) \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow (2^k - 1) \cdot (-2 \cdot 2^k + 1) \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow (2^k - 1) \equiv 0 \pmod{7} \text{ sau}$$

$$(2 \cdot 2^k - 1) \equiv 0 \pmod{7}.$$

$$\text{Din } (2^k - 1) \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow n = 3 \cdot p, p \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 6 \cdot p + 1, p \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Din } (2 \cdot 2^k - 1) \equiv 0 \pmod{7} \text{ considerând eventual, } k = 3 \cdot t + r, r \in \{0, 1, 2\}, t \in \mathbb{N} \text{ rezultă}$$

$$(2 \cdot 2^{3t+r} - 1) \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow (2^{3t} \cdot 2^{r+1} - 1) \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow ((2^3)^t \cdot 2^{r+1} - 1) \equiv 0 \pmod{7}$$

$$\Leftrightarrow (2^{r+1} - 1) \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow (r+1) \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow r = 2. \text{ Atunci,}$$

$$k = 3 \cdot t + 2 \Rightarrow n = 2 \cdot (3 \cdot t + 2) + 1 \Rightarrow n = 6 \cdot t + 5, t \in \mathbb{N}.$$

În concluzie, forma numerelor $n \in \mathbb{N}$ pentru care N este divizibil cu 21 este $n = 6 \cdot k + 1$ sau $n = 6 \cdot k + 5, k \in \mathbb{N}$.

L:178. Să se calculeze: $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x + \sin^2 x}{1 + \sin x + \cos x} dx$.

Prof. Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Cu substituția $t = \frac{\pi}{2} - x$, obținem: $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\frac{\pi}{2} - t + \cos^2 t}{1 + \cos t + \sin t} (-dt) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\pi}{2} - t + \cos^2 t}{1 + \cos t + \sin t} dt = J$.

$$I + J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\pi}{2} + 1}{1 + \cos x + \sin x} dx. \text{ Cu substituția } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = u \text{ obținem } dx = \frac{2}{1+u^2} du \text{ și}$$

$$2I = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \int_{\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}}^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \frac{1-u^2}{1+u^2} + \frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2} du = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \int_{\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}}^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+u} du = (\pi + 2) \cdot \ln \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}}.$$

Așadar, $I = \frac{\pi+2}{2} \cdot \ln \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}$.

L:179. Să se arate că $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k a^{n-k} b^k = \frac{(a+b)^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)b}, \forall a, b \in C^*.$

Prof. dr. Mihály Bencze, Braşov

Rezolvare: Avem $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k x^{k+1} = \int_0^x \sum_{k=0}^n C_n^k x^k dx = \int_0^x (x+1)^n dx = \frac{(x+1)^{n+1} - 1}{n+1}$, de unde rezultă:

$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k x^k = \frac{(x+1)^{n+1} - 1}{(n+1)x}$. Înlocuim $x = \frac{b}{a}$ şi rezultă cerinţa problemei.

L:180. Să se calculeze $\int_0^1 \frac{e^{2x} + 5x + 3}{e^{2x} + x} dx$.

Prof. Laura Tănase, Buzău

Rezolvare: Vom scrie numărătorul în funcţie de numitor astfel, $e^{2x} - 5x + 3 = a(e^{2x} + x)' + b(e^{2x} + x) \Rightarrow e^{2x} - 5x + 3 = a(2e^{2x} + 1) + b(e^{2x} + x) \Rightarrow e^{2x} - 5x + 3 = e^{2x}(2a + b) + bx + a \Rightarrow a = 3$ şi $b = -5$;

$\int_0^1 \frac{e^{2x} + 5x + 3}{e^{2x} + x} dx = 3 \int_0^1 \frac{(e^{2x} + x)'}{e^{2x} + x} dx - 5 \int_0^1 dx = 3 \ln |e^{2x} + x| \Big|_0^1 - 5x \Big|_0^1 = 3 \ln(e^2 + 1) - 5$;

Completări la problemele rezolvate din numerele trecute:

Clasa a VI-a :

1. Arătaţi că $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2007}{2008} > \frac{1}{1005}$.

(În legătură cu problema G : 168 , propusă de *Neculai Stanciu*)

Titu Zvonaru, Comăneşti

Rezolvare: Vom folosi inegalitatea (*) $\frac{4k+1}{4k+2} \cdot \frac{4k+3}{4k+4} > \frac{2k+1}{2k+3}$, adevărată pentru orice număr pozitiv k .

Într-adevăr, inegalitatea (*) este echivalentă succesiv cu

$(16k^2 + 16k + 3)(2k + 3) > (16k^2 + 24k + 8)(2k + 1) \Leftrightarrow 16k^2 + 14k + 1 > 0$.

Scriind inegalitatea (*) pentru $k = 0, 1, 2, \dots, 501$ obţinem

$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} > \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} > \frac{3}{5} \cdot \frac{2001}{2002} \cdot \frac{2003}{2004} > \frac{1001}{1003} \cdot \frac{2005}{2006} \cdot \frac{2007}{2008} > \frac{1003}{1005}$

şi prin înmulţire rezultă că $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2007}{2008} > \frac{1}{1005}$.

2. Să se arate că în şirul $x_n = \underbrace{55\dots 51}_n, n \in N$ există o infinitate de numere compuse nedivizibile cu 3.

(În legătură cu problema G : 169 , propusă de *Ovidiu Țăţan*)

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare: Numărul 17 este prim şi $51 = 3 \cdot 17$. Cu mica teoremă *Fermat* obţinem că $10^{17-1} - 1$ este divizibil cu 17. Deducem că numărul $\underbrace{99\dots 9}_{16}$ este divizibil cu 17 şi cum $\underbrace{99\dots 9}_{16} = 9 \cdot \underbrace{11\dots 1}_{16}$, rezultă că

$x_{17} = \underbrace{55\dots 51}_{17} = 100 \cdot \underbrace{55\dots 5}_{16} + 51$ este divizibil cu 17; deducem că numerele $x_{16k+1}, k \in N$ sunt divizibile cu

17. Suma cifrelor numărului x_{16k+1} este $80k + 6$, și dacă k nu este multiplu de 3, atunci nici x_{16k+1} nu este multiplu de 3.

3. Să se arate că $3,5 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{25} < 4,6$.

(În legătură cu problema G:208, propusă de *Lăcrimioara Năstase*)

Titu Zvonaru, Comănești

Rezolvare: Fie $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{25}$. Folosind inegalitatea cunoscută $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$,

inegalitatea dintre media armonică și media aritmetică obținem:

$$S = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{23} + \frac{1}{24} + \frac{1}{25}\right) \geq 1 + \frac{9}{9} + \frac{9}{18} + \dots + \frac{9}{72} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 2,5 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 2,5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3,5.$$

$$\text{Mai avem: } S = 1,5 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{23}\right) + \frac{1}{24} + \frac{1}{25} < 1,5 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{6}\right)}_{6\text{ori}} + \underbrace{\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{12}\right)}_{12\text{ori}} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = 1,5 + 1 + 1 + 1 + \frac{1}{10} = 4,6$$

Observație. Procedând similar, inegalitatea din stânga se poate generaliza astfel:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3 \cdot 2^t + 1} > 2 + \frac{t}{2}, \text{ unde } t \in \mathbb{N}.$$

Clasa a IX-a

4. Să se demonstreze că în orice triunghi ascuțitunghic avem:

$$\frac{(p-b)(p-c)}{a^2} + \frac{(p-c)(p-a)}{b^2} + \frac{(p-a)(p-b)}{c^2} \leq \frac{bc}{2(b^2+c^2)} + \frac{ca}{2(c^2+a^2)} + \frac{ab}{2(a^2+b^2)}.$$

(În legătură cu problema L:135, propusă de *Constantin Rusu*.)

Titu Zvonaru, Comănești

Rezolvare:

După înmulțirea cu 4, inegalitatea de demonstrat se poate scrie

$$\frac{a^2 - (b-c)^2}{a^2} + \frac{b^2 - (c-a)^2}{b^2} + \frac{c^2 - (a-b)^2}{c^2} \leq \frac{2bc}{b^2+c^2} + \frac{2ca}{c^2+a^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2} \quad (1) \quad \text{Avem:}$$

$$\frac{2bc}{b^2+c^2} - \frac{a^2 - (b-c)^2}{a^2} = \frac{(b-c)^2}{a^2} - \left(1 - \frac{2bc}{b^2+c^2}\right) = \frac{(b-c)^2}{a^2} - \frac{(b-c)^2}{b^2+c^2} =$$

$$= \frac{(b-c)^2(b^2+c^2-a^2)}{a^2(b^2+c^2)} \geq 0, \text{ deoarece triunghiul este ascuțitunghic.}$$

Scriind încă două relații similare, prin adunare obținem inegalitatea (1).

Avem egalitate dacă și numai dacă $a = b = c$.

5. Fie x, y, z numere reale astfel încât $\frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2} + \frac{9}{z^2} = 4$ și $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Să se demonstreze că

$$|xyz| = \frac{9}{2}. \quad (\text{În legătură cu problema L:118, propusă de } \textit{Neculai Stanciu})$$

Titu Zvonaru, Comănești

Rezolvare: Folosind inegalitatea *Cauchy-Buniakovski-Schwarz*, avem:

$$(x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2} + \frac{9}{z^2} \right) \geq \left(\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 \cdot \frac{4}{y^2}} + \sqrt{z^2 \cdot \frac{9}{z^2}} \right)^2, \text{ adică } 9 \cdot 4 \geq 36,$$

$$\text{așadar avem egalitate, ceea ce înseamnă că } \frac{x^2}{\frac{1}{x^2}} = \frac{y^2}{\frac{4}{y^2}} = \frac{z^2}{\frac{9}{z^2}} \Leftrightarrow x^4 = \frac{y^4}{4} = \frac{z^4}{9} \Leftrightarrow x^2 = \frac{y^2}{2} = \frac{z^2}{3}.$$

Înlocuind în relația $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ deducem că $x^2 + 2x^2 + 3x^2 = 9$

și în final $(x^2, y^2, z^2) = \left(\frac{3}{2}, 3, \frac{9}{2} \right)$; rezultă imediat $x^2 y^2 z^2 = \frac{81}{4}$, adică $|xyz| = \frac{9}{2}$.

Erată

1) SM, nr. VI/2010

-Soluția corectă pentru problema L : 101 (pag.22) este următoarea:

avem $x + y + z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 20 - \sqrt{30} - \sqrt{35} - \sqrt{42}$ (*), și atunci

$$\min(x + y + z) = 20 - \sqrt{30} - \sqrt{35} - \sqrt{42}, \text{ atins pentru } x = y = z = \frac{1}{3}(20 - \sqrt{30} - \sqrt{35} - \sqrt{42})$$

(deoarece atunci avem egalitate în inegalitatea (*)).

2) SM, nr. VII/2011

- În articolul de la pagina 3, se va citi $\alpha_i \in R_+^*$, deci relația (2) este inegalitatea mediilor nu o extindere a sa;

- Soluția corectă pentru problema L:140 este următoarea:

$$2^{1-y^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} = 2 \Rightarrow 1 - y^2 \geq 1 \Rightarrow y^2 \leq 0, \text{ deci } S = \{(1,0), (-1,0)\}$$

Vizitați www.mateinfo.ro

**MATEmatică și INFOrmații din învățământul
ROmânesc**

Reviste, sinteze teorie, probleme rezolvate, concursuri și olimpiade, programe
școlare,
proiecte didactice, metodologii și documente școlare, cărți de matematică, teste,
fișe de lucru, jocuri de logică, softuri educaționale, modele subiecte BAC.

„Știința nu este urâtă decât de ignoranți”,
Oxenstierna

5. Probleme propuse

▪ ÎNVĂȚĂMÂNT PRIMAR

P: 208. Bunicul are în ferma lui rațe, curci și vaci, 90 de capete în total. Dacă numărul curcilor este de două ori mai mare decât al rațelor, iar numărul vacilor este cu 10 mai mic decât al curcilor, aflați numărul total al picioarelor animalelor din ferma bunicului.

Inst. Anton Maria , Grup Școlar Berca

P: 209. Suma dintre jumătate din vârsta unui lup și un sfert din această vârstă este 18. Câți ani are lupul?

Inst. Anton Maria , Grup Școlar Berca

P: 210. Într-un parc sunt 382 de tei, castani și stejari. Să se afle câți pomi sunt de fiecare fel în parc, dacă stejarii și castanii la un loc sunt 258, iar stejarii sunt de 2 ori mai mulți decât castanii.

Prof. Brânză Cristian , Buzău

P: 211. Mama a cumpărat 6 boluri mari și 6 boluri mici. Ea a plătit vânzătoarei 714 lei. Cât costă un bol mare, dacă unul mic costă 67 de lei? Rezolvați în două moduri.

Prof. Drăgan Cornelia , Berca

P: 212. Calculați $5a + 7b + 5c + 7d$ știind că $a + b + c + d = 50$ și $a + c = 20$.

Înv. Lupșan Ion , Pleșcoi

P: 213. Reconstituiți adunarea: $MAC + AC + C = 5M8$.

Prof. Lupșan Nicoleta, Berca

P: 214. Un tată are 48 de ani și 4 copii care au vârstele de 6, 8, 10, respectiv 12 ani. După cât timp tatăl va avea vârsta egală cu suma vârstelor copiilor la acea dată?

Prof. Lupșan Nicoleta, Berca

P: 215. O carte de matematică costă 54 de lei, iar una de lectură cu 23 de lei mai puțin. Dacă se cumpără câte una din fiecare fel, ce rest se va primi de la 86 de lei?

Înv. Marchidanu Florica, Berca

P: 216. Un număr se înmulțește cu 10, la rezultat se adaugă 532, apoi rezultatul obținut se împarte la 2 și se obține 501. Care este numărul căutat?

Înv. Marchidanu Florica, Berca

P: 217. Media aritmetică a trei numere este 75. Al doilea număr este cu 25 mai mare decât primul și cu 25 mai mic decât al treilea număr. Aflați numerele.

Prof. Marinescu Gabriela, Stăncești, Vadu-Pașii

P: 218. Lungimea unui teren este 369 m, iar lățimea reprezintă cinci noimi din lungime. Știind că 1 m de sârmă costă 20 de lei, care este costul sârmei necesare împrejurării terenului?

Prof. Marinescu Gabriela, Stăncești, Vadu-Pașii

P: 219. Georgeta a cumpărat de la piață 5 kg de mere și 8 kg de struguri, plătind în total 29 lei. 1 kg de mere costă de 3 ori mai puțin decât 1 kg de struguri. Cât costă împreună 1 kg de mere și 1 kg de struguri?

Prof. Marinescu Gabriela, Stăncești, Vadu-Pașii

P: 220. Perimetrul unui dreptunghi este de 90 de metri. Știind că lungimea sa este de 4 ori mai mare decât lățimea sa, aflați dimensiunile dreptunghiului.

Înv. Anton Florica, Rm. Sarat

P: 221. Suma dintre sfertul unui număr și dublul altuia este 625. Să se afle numerele știind că primul este de două ori mai mare decât al doilea.

Inst. Marin Marcela, Rm. Sărat

Clasa a V-a

G: 270. Arătați că fracția $\frac{2011n+41}{50n+1}$ este reductibilă, unde $n \in \mathbb{N}$.

Prof. Doina Stoica, Mircea Mario Stoica, Arad

G: 271. Aflați numerele de patru cifre (diferite între ele) care se termină cu 2, sunt multipli de 4 și au suma cifrelor 2^4 .

Prof. Mariana Mitea, Cugir, Alba

G: 272. Aflați restul împărțirii la 97 a numărului $N = 1648 \underbrace{99 \dots 9}_{2007 \text{ cifre}}$.

Prof. Tuță Luca, Buzău

G: 273. Să se afle numerele prime de două cifre care împărțite la răsturnatele lor care sunt prime dau câtul și restul tot numere prime.

Prof. Gheorghe Ghiță, Buzău

G: 274. a) Precizați câte numere naturale sunt divizori ai numărului 1225. Scrieți mulțimea divizorilor naturali ai acestui număr.

b) Arătați că numărul $\overline{1a05}$ are un număr par de divizori naturali.

Prof. Constantin Apostol, Rm. Sărat

G: 275. Fie numărul $a = 7 + 21 + 35 + 49 + \dots + 1421$.

a) Arătați că $3 \mid a$

b) Să se determine cel mai mic număr natural de două cifre b , astfel încât produsul $a \cdot b$ să fie pătrat perfect.

Prof. Valerica Roșu, Rm. Sărat

G: 276. Să se arate că există numerele naturale nenule, x, y, z astfel încât $x^3 + y^3 + z^3 = 2016^3$.

Prof. Ana Panaitescu, Rm. Sărat

G: 277. Fie numărul $a = 1234567891011 \dots 2012$, unde cifrele sunt obținute, scriind numerele naturale de la 1 la 2012. Care este a 2012-a cifră?

Prof. Cornelia Gurău, Moinești, Bacău

G: 278. Aflați $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ astfel încât să avem $a^3 + b^3 + c^3 = \overline{dd}$.

Prof. Nicolae Ivășchescu, Craiova

Clasa a VI-a

G: 279. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuația $xy + 7x - 6y = 52$.

Prof. Doina Stoica, Mircea Mario Stoica, Arad

G: 230. Să se arate că $\frac{2a+2b+7^{42}}{2a+2b+3^{63}} > \frac{b^a+2^{388}}{b^a+3^{291}}, \forall a, b \in \mathbb{N}^*$

Prof. Iuliana Trașcă, Scornicești, Olt

G: 231. Într-o lună oarecare, diferită de luna februarie, trei duminici cad la date cu soț. În ce zi a săptămânii cade data de 25?

Prof. Tuță Luca, Buzău

G: 232. Să se determine cel mai mare număr natural n pentru care următoarea problemă are soluție unică: "Bogdan, Nicu și Titu au împreună n mere. Aflați câte mere are fiecare dintre ei, știind că Nicu are de trei ori mai multe mere decât Bogdan, iar Titu are mai multe mere decât Bogdan și mai puține decât Nicu."

Titu Zvonaru, Comănești și Neculai Stanciu, Buzău

G: 233. Să se rezolve ecuația:

$$x + (x-1)x + (x-1)x^2 + \dots + (x-1)x^n = 2011^{n+1}, n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{N}^* - \{1\}.$$

Prof. Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

G : 234. Arătați că numărul $a = \underbrace{444\dots4}_{n \text{ cifre}} \underbrace{222\dots2}_{n \text{ cifre}} - \underbrace{666\dots6}_{n \text{ cifre}} 444$ este pătrat perfect, $n \in \mathbb{N}^*$.

Prof. Marin Simion, Rm. Sărat

G: 235. Găsiți $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a > b$ astfel încât $2011 = a^2 - b^2$.

Prof. Nicolae Ivășchescu, Craiova

G: 236. Un muncitor poate executa o lucrare în 6 zile, iar altul în 9 zile. Ei lucrează împreună un număr oarecare de zile la lucrare, după care al doilea muncitor termină lucrarea în 4 zile. Câte zile au lucrat împreună muncitorii?

Prof. Lăcrimioara Năstase, Padina, Buzău

G: 237. În triunghiul ascuțitunghic ABC, în care $m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$ și M este mijlocul laturii (BC), mediatoarea laturii (BC) intersectează dreptele AB și AC în E, respectiv, F. Să se arate că dacă

$$\frac{EM}{EF} = \frac{1}{2}, \text{ atunci } \frac{EA}{EB} = \frac{1}{3} \text{ și } \frac{AF}{AC} = \frac{1}{4}.$$

Prof. Constantin Apostol, Rm. Sărat

G: 238. Se dau punctele A, B, C, D, E coliniare luate în această ordine, iar a, b, c, d lungimile segmentelor [AB], [BC], [CD], [DE].

a) Dacă $a - 2011 = b + 2010 = c - 2012 = d + 2009$, scrieți în ordine crescătoare a lungimile segmentele date.

b) Dacă $AE = 100m$, aflați lungimile segmentelor exprimate în cm.

c) Aflați lungimea segmentului [MN], respectiv [PQ], unde M, N, P, Q sunt respectiv mijloacele segmentelor [AB], [BC], [CD], [DE].

Prof. Mariana Mitea, Cugir, Alba

Clasa a VII-a

G: 239. Arătați că $1959 + \frac{1}{2!} + \frac{5}{3!} + \frac{11}{4!} + \dots + \frac{49^2 + 49 - 1}{50!} < 1961$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Prof. Mircea Mario Stoica, Arad

G: 240. Să se arate că dacă $a + b + c + d = 2011$ unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$ atunci

$$\frac{2011}{a} + \frac{2011}{b} + \frac{2011}{c} + \frac{2011}{d} \geq 16.$$

Prof. Gheorghe Struțu, Buzău

G: 241. Arătați că numărul $\sqrt{2009^{2010} + 2010^{2011} + 2011^{2012} + 2012^{2013} + 2013^{2014}}$ este irațional.

Prof. Gheorghe Dârstaru, Buzău

G: 242. Determinați o proporție în care suma extremilor este 23, suma mezilor este 17 și suma pătratelor tuturor termenilor este 578.

Prof. Marin Simion, Rm. Sărat

G: 243. Să se determine valorile lui x, numere întregi, pentru care fracția $\frac{2012x + 1}{2013x + 2}$ este ireductibilă.

Prof. Valerica Roșu, Rm. Sărat

G: 244. Comparați numerele $a = \sqrt{2009} + \sqrt{2010}$ și $b = \sqrt{2008} + \sqrt{2011}$.

Prof. Nicolae Ivășchescu, Craiova

G: 245. Aflați aria triunghiului ABC știind că $AB + AC = 20$ cm și că distanța de la intersecția dreptei BC cu bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$ la dreapta AB este egală cu 8 cm.

Prof. Lăcrimioara Năstase, Padina, Buzău

G : 246. În interiorul dreptunghiului ABCD luăm punctul P și construim în exteriorul său $BT \perp PB$, $AR \perp AP$ cu $AR = PC$ și $BT = DP$. Arătați că $PR = PT$.

Prof. Ion Radu, Bozioru, Buzău

G: 247. Să se determine măsurile unghiurilor unui triunghi, știind că trei dintre unghiurile sale exterioare au măsurile proporționale cu numerele 11, 11 și 14 și suma măsurilor celorlalte trei, egală cu 330°

Prof. Constantin Apostol, Rm. Sărat

G: 248. Se consideră un segment $[BC]$ pe care luăm un punct D . În punctul D se ridică perpendiculara pe segmentul $[BC]$. Fie M un punct variabil pe această perpendiculară. Dacă $BD = 3$ cm, $DC = 12$ cm, $DM = x$ cm, atunci se cere:

- Pentru $x = 6$ cm să se afle raza cercului circumscris triunghiului BMC ;
- Să se afle valoarea lui x pentru care $m(\sphericalangle BMC) < 90^\circ$;
- Să se afle valoarea lui x pentru care $m(\sphericalangle BMC) > 90^\circ$.

Prof. Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

G: 249. Fie triunghiul ABC cu $m(\hat{A}) = 60^\circ$. Să se arate că lungimea înălțimii din vârful A este dată de relația $h_a = \frac{bc\sqrt{3}}{2a}$, unde notațiile sunt cele obișnuite.

Prof. Tuță Luca, Buzău

Clasa a VIII-a

G: 250. Rezolvați ecuația $||x-1|-2|-2009| = 2008$, $x \in \mathbb{N}$.

Prof. Doina Stoica, Mircea Mario Stoica, Arad

G: 251. Să se arate că $x(x-10)(x^2-10x+36)+324 > 0$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.

Prof. Ligia Struțu, Buzău

G: 252. Să se determine funcția liniară $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât să aibă loc relația :

$f(3u+v) + f(5u+3v) = 8u+8v+6$, în cazurile : I) u este argument și $v \in \mathbb{R}$; II) v este argument și $u \in \mathbb{R}$.

Prof. Constantin Apostol, Rm. Sărat

G: 253. Să se arate că numărul $a = 20102011^4 + 2 \cdot 20102010^2 + 4 \cdot 20102011 - 1$ este pătrat perfect.

Prof. Valerica Roșu, Rm. Sărat

G: 254. Arătați că dacă $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $n \geq 10^{k+2}$ ($k \in \mathbb{N}^*$), și $M = \{\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{(n+1)\alpha\}\}$, unde $\{\cdot\}$ reprezintă partea fracționară, atunci mulțimea M conține cel puțin două elemente diferite care au primile k zecimale aceleași.

Prof. dr. Mihály Bencze, Brașov

G: 255. Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghi și $a^2 + b^2 + c^2 \leq ab + bc + ca$, atunci triunghiul este echilateral.

Prof. Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

G : 256. Volumul unei piramide triunghiulare regulate este $288\sqrt{3} \text{ dm}^3$, iar distanța de la centrul bazei la o față laterală este de 48 dm. Să se determine aria laterală a piramidei.

Prof. Marin Simion, prof., Rm. Sărat

G: 257. Un rezervor are forma unui paralelipiped dreptunghic cu una din dimensiuni egală cu media aritmetică a celorlalte două, Știind că suma celor trei dimensiuni este 27 m și aria totală de 428 m^2 aflați capacitatea în hectolitri a rezervorului.

Prof. Tuță Luca, Buzău

Clasa a IX-a

L: 181. Să se demonstreze că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea:

$$\sqrt{2ap+bc} + \sqrt{2bp+ac} + \sqrt{2cp+ab} \leq 2P_{ABC}, \text{ unde notațiile sunt cele obișnuite.}$$

Prof. Mariana Mitea, Cugir, Alba

L: 182. Dacă $x_k \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $k = \overline{1, n}$, atunci, arătați că $\sum_{k=1}^n (\sin x_k + \tan x_k) > 2n \cdot \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$.

Prof. D.M. Băținețu – Giurgiu, București

L: 183. Arătați că dacă $a, b, c, d > 0$, atunci: $1 + \frac{1}{8} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \right) > \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

José Luis Díaz-Barrero, Polytechnical University of Catalonia, Barcelona, Spain

L: 184. Arătați că există numerele naturale x_i ($i = \overline{1, n}$) distincte astfel încât $\sum_{k=1}^n x_k^2$ este o $4p+1$ putere

perfectă, și $\sum_{k=1}^n x_k^3$ un pătrat perfect.

Prof. dr. Mihály Bencze, Brașov

L: 185. Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghi care nu este obtuzunghic și

$$a^4b^2 + a^4c^2 + b^4a^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + c^4b^2 \leq a^6 + b^6 + c^6 + 2a^2b^2c^2,$$

atunci triunghiul este dreptunghic.

Prof. Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

L: 186. Fie $f: [2; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-2} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}$.

Să se determine funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $(f \circ g)(x) = 2x+1, \forall x \geq 1$.

Prof. Adrian Stan, Buzău

Clasa a X-a

L: 187. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât inegalitatea $\log_2 \left(\log_{x^2+2} [(m-1)x^2 + 2(2m-3)x + 5m-4] \right) > 0$ să fie adevărată pentru orice x real.

Prof. Florentina Popescu, Buzău

L:188. Dacă $a, b, c \in (1, \infty)$ și $bc < a^2$, atunci arătați că
$$\frac{\left(\log_a \frac{a}{b}\right)^2}{\log_a ab} + \frac{\left(\log_a \frac{a}{c}\right)^2}{\log_a ac} + \frac{(\log_a bc)^2}{\log_a \frac{a^2}{bc}} \geq 1.$$

Prof. D.M. Băținețu – Giurgiu, București

L: 189. Fie un șir $(x_n)_{n \geq 3}$ de numere în progresie aritmetică în care $x_1 \geq 1$ și rație pozitivă. Să se arate că:
 $\lg^2 x_2 + \lg^2 x_3 + \lg^2 x_4 + \dots + \lg^2 x_{n-1} \geq \lg x_1 \lg x_3 + \lg x_2 \lg x_4 + \lg x_3 \lg x_5 + \dots + \lg x_{n-2} \lg x_n.$

Prof. Gheorghe Ghiță, Buzău

L:190. Arătați că dacă $z \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $\left|z + \frac{1}{z}\right| = \sqrt{5}$, atunci $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \leq |z| \leq \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$.

Prof. dr. Mihály Bencze, Brașov

L: 191. Să se calculeze partea întreagă a numărului $a = \log_7 8 + \log_8 2 \cdot \log_2 7$.

Prof. Adrian Stan, Buzău

L: 192. Să se rezolve ecuația: $\frac{x+y}{2} - \frac{1005}{x} - \frac{1005}{y} + 2011 = \sqrt{2011x-2010} + \sqrt{2011y-2010}.$

Prof. Mitea Mariana, Cugir, Alba

L: 193. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{12x} = \left(\frac{1}{125}\right)^x + \left(\frac{1}{16}\right)^x.$

Prof. Delia Ileana Basch- Naidin, Caracal, Olt

Clasa a XI-a

L: 194. Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{Z})$ și $\det(A + 1936 \cdot B) = 0$, atunci arătați că 75 divide $\det(A + 2011 \cdot B)$.

Prof. D.M. Băținețu – Giurgiu, București și Neculai Stanciu, Buzău

L:195. Să se arate că dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^2 = 2A - I_n$, atunci $\det(A^{2011} + 2010I_n) = 2011^n \det(A).$

Prof. Gheorghe Ghiță, Buzău

L: 196. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ două matrice pentru care avem $\det(A^{2011} + AB - BA) = (\det A)^{2011}$. Arătați că :

a) $(AB - BA)^2 \in O_2.$

b) $\det(A + B + AB - BA) = \det A + \det B + \det(AB - BA), \quad \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(A) \cdot \text{Tr}(B)$

Prof. Florin Stănescu, Găești, Dâmbovița

L: 197. Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + 3x - 10}.$

Prof. Adrian Stan, Buzău

L:198. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Știind că f este o funcție pară, iar

$g(x) = \left(\frac{2x^5}{5} + 3\right) \cdot f(x) + 2x$, să se calculeze $g'(0).$

Prof. Iuliana Trașcă, Scornicești, Olt

Clasa a XII-a

L:199. Rezolvând ecuația $x^3 - x - \frac{1}{3\sqrt{3}} = 0$ să se demonstreze relațiile:

a) $\cos \frac{\pi}{9} \cdot \cos \frac{5\pi}{9} \cdot \cos \frac{7\pi}{9} = \frac{1}{8}$; b) $\cos^2 \frac{\pi}{9} + \cos^2 \frac{5\pi}{9} + \cos^2 \frac{7\pi}{9} = \cos^4 \frac{\pi}{9} + \cos^4 \frac{5\pi}{9} + \cos^4 \frac{7\pi}{9} = \frac{3}{2}$;

c) $\cos^3 \frac{\pi}{9} + \cos^3 \frac{5\pi}{9} + \cos^3 \frac{7\pi}{9} = \frac{3}{8}$.

Prof. Ovidiu Țățan, Râmnicu Sărat

L:200. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$) și $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă cu proprietatea că

$$\int_a^b f(x) dx = 2011, \text{ atunci calculați: } \int_a^b x(f(x) + f(a+b-x)) dx.$$

Prof. D.M. Băținețu – Giurgiu, București

L: 201. Să se calculeze: $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{x^2+1}{x^{2011}+x^{2007}+x^4+1} dx$.

Prof. Gheorghe Ghiță, Buzău

L: 202. Fie $f: [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât $\int_0^x f(t) dt \leq \frac{x}{2}, \forall x \in [0;1]$. Arătați că

$$\int_0^1 (f(x)-1)^2 dx \geq \frac{1}{6}$$

Prof. Florin Stănescu, Găești, Dâmbovița

L: 203. Să se demonstreze inegalitatea: $e^{\frac{n+1}{2n}} < e - 1, \forall n \geq 2$.

Prof. Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

L: 204. Fie f o funcție polinomială cu proprietatea $\int_n^{n+1} f(x) dx = 2n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze

suma $S = \sum_{k=1}^n f(k)$.

Prof. Adrian Stan, Buzău

L: 205. În planul XOY un melc pleacă din punctul $A(2;2)$ și merge până în $B(3; \frac{27}{4})$ străbătând

graficul unei funcții continue $f: [2;3] \rightarrow (0; \infty)$. Melcul constată că în orice punct $M(x;y)$ ar fi el, situat pe graficul funcției, diferența dintre o pătrime din produsul coordonatelor punctului M și aria subgraficului funcției f pe $[2;x]$ este egală cu 1. Demonstrați că:

a) f este derivabilă pe $[2;3]$ și că $x \cdot f'(x) = 3f(x)$;

b) Determinați funcția f ;

Prof. Constantin Dinu, Buzău

“Învățătura nu se obține prin șansă; trebuie căutată cu ardoare și frecventată cu sârguință”

Abigail Adams



„ Un prost nu spune lucruri inteligente,
dar un inteligent spune multe prostii”.
G.Ibrăileanu

6. Caleidoscop matematic

1. “Folosiți două cifre de 4 și operații/funcții matematice pentru a obține rezultatul 10. Aceeași problemă pentru două cifre de a , unde $a \in \{6,7,8,9\}$.”

Titu Zvonaru, Comănești

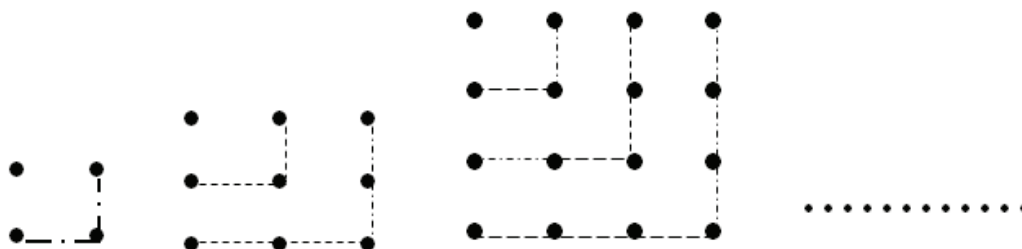
2. Am două lumânari care ard la fel de repede, pe toata lungimea lor, fiecare timp de câte o oră. Cum putem măsura cu ajutorul celor două lumânări (fără să le măsurăm, îndoim sau rupe) trei sferturi de oră?



3. Cum se poate să iei 1 din 19 și să rămână totuși 20?

4. Într-o tigaie încap numai două chiftele. Știind că pentru a prăji o chiftea este nevoie de a fi pusă câte un minut pe fiecare parte, care este timpul minim în care se pot prăji trei chiftele?

5.



$$1+3=2^2 \quad 1+3+5=3^2 \quad 1+3+5+7=4^2 \dots 1+3+5+7+\dots+2011=\dots?$$

Răspunsuri: 1. Dacă $[x]$ este partea întreagă a lui x și $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, avem:

$$-[-\sqrt{4! \cdot 4}] = 10; [\sqrt{6! : 6}] = 10; 7 - [-\sqrt{7}] = 10; 8 + [\sqrt{8}] = 10; -[-9,9] = 10.$$

2. Aprindem în același moment ambele lumânări, una la un capăt și cealaltă la ambele. Când aceasta din urmă se stinge, a trecut o jumătate de oră. Aprindem lumânarea rămasă, care a ars pe jumătate, la ambele capete. Când aceasta se stinge a trecut încă un sfert de oră. Deci, din momentul aprinderii și până ce a doua lumânare se stinge, au trecut trei sferturi de oră.

3. Scriu 19 cu cifre romane XIX.. îl iau pe I ... și rămâne XX adică 20 !

4. Timpul este de 3 minute. Se prăjesc două chiftele un minut pe o parte, se scoate una, se pune cealaltă, iar cea rămasă în tigaie se întorțe. Se prăjesc un minut. Se scoate chifteaua prăjită pe ambele părți, se întorțe cea rămasă și se pune la prăjit cea scoasă după primul minut. Se prăjesc încă un minut și astfel sunt toate prăjite pe ambele părți.

5. Cum, $3=2 \cdot 2-1$, $5=2 \cdot 3-1$, $7=2 \cdot 4-1$,, $2011=2 \cdot 1006-1$, atunci, $1+3+5+\dots+2011=1006^2$.

Rubrica rezolvitorilor de probleme

Scoala cu clasele I-VIII "Vasile Cristoforeanu" Rm. Sărat:

Clasa a VIII-a : 45p-Buterez David, Sîrbu Claudiu, 40p- Chiriac Andrei, Doni Alina, 32p- Pârlog Valentin, Baci Diana Valentina, Tudorache Alina, Neagu Daniela, Lazăr Elena, Vlad Oana Andreea, Tașcă Valentin, Banu Calinuț ; **Prof. Marin Simion;**

Scoala cu clasele I-VIII, Smeeni.

Clasa a VI-a: 20p. Chiriacescu Roxana, 18p. Nica Camelia, Tescan Irina;

Clasa a VII-a: 35p. Bulgarea Alexandra; 30p. Neacsu Laura.

Clasa a VIII- a. 40p.Scarlat Roxana; 34p.Vasile Cristina, Marin Valentina; **Prof. Stanescu Ion.**

Scoala cu clasele I-VIII nr. 1, Padina.

Clasa a IV-a: 35p. Năstase Teodora;

Clasa a V-a: 20p. Drăghici George, 18p. Drăghici Silvan, 16p. Dumitroi Andreea, 12 p. Mircescu Corina, 10 p. Balica Gabriela, Jega Cristina, Herța Adelina, Călin Elena;

Clasa a VI-a: 22p. Bocioacă Andreea, 26p. Dumitru Georgiana;

Clasa a VII-a: 36p. Năstase Daniel; 28p. Fleoarcă Andreea, Dumitrache Diana, 25p. Ciocan Mirela Vasilica **Prof. Lăcrimioara Năstase.**

Scoala cu clasele I-VIII, "Tristan Tzara" Moinești, Bacău. .

Clasa a V-a: 16p. Munteanu Gheorghe, Lila Ionuț, Olaru George, Ulia Maria;

Clasa a VI-a: 10p. Bobocea Laurențiu;

Clasa a VII-a: 22p. Armeanu Ana, Martin Adrian, Manea George, Murariu Vlad, Ciobanu Eduard;

Clasa a VIII-a : 34p. Agavriloaie Bianca, Macadan Ioana, Dudău Codruța, Botezatu Georgiana, Ciobotaru Alexandru, Cuceac Vicentiu. **Prof. Cornelia Gurău.**

Scoala cu clasele I-VIII "Gh. Popescu " Mărgineni –Slobozia, Olt

Clasa a V-a: 12p. Trașcă Ionuț- Vlăduț, Ene Daniela- Iuliana, Vochin Ioan – David, Moisesescu Denis, Costea Nicoleta, Nedelea Adrian Ilie; **Prof. Iuliana Trașcă.**

Grupul Scolar „Costin Nenitescu”, Buzău:

Clasa a IX-a: 10p. Tudor Mădălin, Tureac Andrei, Dragomir Ionuț, Grozea Cosmin, Pîrnog Georgiana, Neagu Costin, Ciopec Corina, Dobrin Iulian, Picu Elena Daniela, Borcea Eduard, Sterpu Denisa, Stoian Cristina, Toader Florinel, Toma Ionuț, Brînzoiu Maria, Marinescu Mădălin, Sicaru Gabriela,

Clasa a X-a: 24p. Feraru Andreea, Perțea Larisa, Marcu Cristina, Lică Adriana, Gheorghită Dinel, Dinu Mădălina ;

Clasa a XI-a: 35p- Zaharia Mădălina, Bisoceanu Aura, Soare Manuela, Lixeanu Daniela, Tabără Ștefan;

Clasa a XII-a: 40p- Vlad Iulian, Dinu Alin, Antemir George, Dima Octavian, Anghel Sorin; **Prof. Stan Adrian.**

Scoala cu clasele I-VIII "George Emil Palade " Buzău

Clasa a VI-a: 10p. Burada Andrei, Stan Eduard, Marin Cristian, Văceanu Ramona, Duca Miruna, Mutuligă Teodor, Sandu Alexandra, Șerban Ionuț, Ștefănescu Raluca.

Clasa a VII-a: 16p. Mardale Cosmin, Mântoiu Antoniu, Răican Mihaela.

Clasa a VIII-a: 24p. Radu Bogdan, Zwak Eduard, Dima Lucian, Apostol Alice, Cojanu Elena. **Prof. Neculai Stanciu.**

Scoala cu clasele I-VIII, nr. 1 Rm Sărat.

Clasa a VI-a: 10p. Jercan Adrian, Nacu Cătălin.

Clasa a VII-a: 26p. Iaru Ioana Victoria, Vasile Dragoș Mitruț, Răpeanu Miruna. **Prof. Valerica Roșu.**

Scoala cu clasele I-VIII, nr. 2 Cugir, Alba.

Clasa a V-a: 16p. Codrea Maria, Codrea Marian, Muntean Ioan, Molodeț Dragoș, Sideriaș Alexandru;

Clasa a VIII-a: 20p. Bortoc Adrian, Codeanu Andrei, Dan Andreea, Vinersar Cătălin; **Prof. Mariana Mitea.**

Grup Scolar Tehnic „Sf. Mucenic Sava”, Berca, Buzău.

Clasa a IV-a: 19p. Badea Teodora, Bratosin Cosmina, Ciupag Alin, Dinu Alexandru, Ioniță Lorena, Moldoveanu Andreea, Păpătoiu Andrei, Popa Mădălina, Șolcă Roxana, Tătulescu Răzvan, **Prof. Lușan Nicoleta.**

Profesorii și elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciții și probleme cu enunț și rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătăți calitatea acestei reviste, o pot face trimițând materialele membrilor colectivului de redacție sau pe adresa de e_mail: **ady_stan2005@yahoo.com**, fie materiale tehnoredactate(**salvate în Word 2003-2007**), fie scrise de mână și scanate. **Materialele primite trebuie să fie originale și să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise și către alte reviste.**

Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările și comenzile pentru numărul 9 al revistei „SCLIPAREA MINTII” va fi **1 Martie 2012.**

Cuprins

1. Istoria Matematicii

200 de ani de la nașterea matematicianului

Evariste Galois , de prof. Adrian Stan 1

2. Articole și note matematice

- Aspecte referitoare la locurile geometrice de prof. Constantin Rusu 2
- O generalizare a problemei X.275 din RMT nr 4 / 2009 de prof. Ovidiu Țătan, 3
- Observații asupra unor noțiuni din geometria triunghiului de Prof. Constantin Apostol, 4
- Asupra problemei U 181. din Mathematical Reflections de prof. D.M. Bătinețu – Giurgiu, prof. Neculai Stanciu 5
- Calculul unor integrale definite, de prof. Gheorghe Ghiță 7
- Șase soluții pentru problema L:155 din SM, nr. VII, 2011 de Titu Zvonaru, Comănești și Neculai Stanciu 9
- Two applications of rearrangement inequality de J.L. Díaz-Barrero and J. Gibergans Báguena 10

3. Examenе și Concursuri 13

4. Probleme rezolvate 14

5. Probleme propuse 36

6. Caleidoscop matematic 43

editograph

