

SCLIPAREA MINTII

REVISTĂ DE CULTURĂ MATEMATICĂ ; PUBLICATIE SEMESTRIALĂ, AN II, NR IV, 2009 * 10
LEI *



ISTORIA MATEMATICII
PROBLEME PROPUSE
PROBLEME REZOLVATE
TESTE



CALEIDOSCOP MATEMATIC

Societatea de Științe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

ISSN 1716-3615

GRUPUL ȘCOLAR " COSTIN NENITESCU" BUZĂU



EDITURA RAFET

Str. Gradistei, nr. 5, Râmnicu Sărat, Tel: 0238568085

ISSN 1716-3615



SCLIPAREA MINTII

Revistă de cultură matematică, publicație semestrială, An II, Nr. IV, NOIEMBRIE 2009, BUZĂU



COLECTIVUL DE REDACTIE



- Președinte de onoare:
Constantin Apostol
Lenuța Pârlog – Președinte Societatea de Științe Matematice,
Filiala Buzău;
- Constantin Rusu** – Președinte Societatea de Științe Matematice,
Filiala Rm. Sărat;
- Director:
Neculai Stanciu
- Redactor șef:
Adrian Stan
- Redactori principali:
Costică Ambrinoc **Tuță Luca**
Constantin Dinu **Ana Panaitescu**
Gabriela Nicoleta Lupșan

Membri colaboratori:

Natalia **Pleșu**, Florentina **Popescu**, Ciprian **Cheșcă**,
Monica **Mocanu**, Viorica **Mușetescu**, Rodica **Lupșan**,
Gheorghe **Manea**, Gheorghe **Struțu**, Roxana **Stanciu**,
Ion **Stănescu**, Simion **Marin**, Gherghina **Manea**,
Marcela **Marin**, Ligia **Struțu**, Ștefana **Ispas**, Grigori
Marin, Maria **Anton**, Felicia **Avrigeanu**, Daniela **Dibu**,
Daniela **Ion**, Ion **Lupșan**, Rodica **Ene**, Constantin
Lupșan, Marius **Ursache**, Gheorghe **Dârstaru**,
Marius **Stan**, Mariana **Apostol**, Elena **Cucu**, Gabriela
Toader, Viorel **Ignătescu**, Dumitru **Samoilă**, Ion **Radu**,
Manuela **Apostol**, Gabriel **Andrei**, Doina **Vizitiu**, Ovidiu
Țătan, Vasile **Prefac**, Maritanța **Prefac**, Marioara **Vrabie**,
Florica **Marchidanu**, Mirela **Axente**, Cristian Cosmin
Brânză, Gabriela **Marinescu**, Maria **Caloian**.

CUPRINS

ISTORIA
MATEMATICH.....1

ARTICOLE ȘI NOTE
MATEMATICE.....3

EXAMENE ȘI
CONCURSURI.....8

PROBLEME
REZOLVATE.....11

PROBLEME
PROPUSE25

CALEIDOSCOP
MATEMATIC.....31

POȘTA
REDACȚIEI..... 32



GÂNDEȘTE CORECT !



REDACTIA

Grupul Școlar „Costin Nenitescu”, Buzău,
Strada Transilvaniei, Nr. 134,
Cod. 120012, Tel. 0238725206
e-mail: ady_stan2005@yahoo.com



“Numerele sunt limba universală oferită de
divinitate oamenilor ca o confirmare a adevărului.”
Sf. Augustin din Hippo

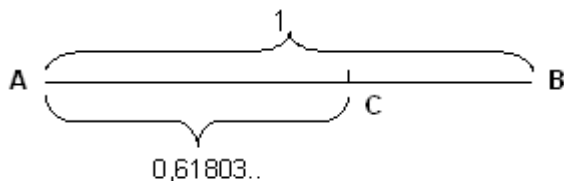
1. Istoria matematicii

Numărul de aur

de ¹⁾prof. Adrian Stan , ²⁾prof. Neculai Stanciu

Ideea că Universul și tot ceea ce ne înconjoară este guvernat de numere, i-a fascinat pe matematicienii, fizicienii și filozofii tuturor timpurilor chiar mai înainte ca adepții Școlii Pitagoreice să pună conceptul de număr în centrul Universului și până-n zilele noastre la adepții diverselor culte, fascinați de misticism.

Astfel, în cartea a X-a din celebra lucrare “Elementele” a lui **Euclid** (325-265 î.e.n) s-a găsit următoarea problemă : “ Se dă un segment AB. Să se găsească poziția punctului C pe acest segment, astfel încât raportul segmentelor AC și CB să fie egal cu raportul segmentelor AB și AC” .



Astfel, $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$, sau dacă notăm $AB=a$ și

$CB=b$ obținem $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ iar în urma notației

$\frac{a}{b} = x$, rezultă ecuația $x^2 - x - 1 = 0$ cu soluția

pozitivă $x_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,618033....$ Așadar,

acest număr irațional 1, 618033..., numit numărul de aur și cunoscut încă din antichitate a fost introdus abia în 1835 și notat cu litera grecească Φ (Phi) de către matematicianul german **Martin Ohm** (1792-1872), ca un omagiu adus sculptorului grec **Phidias**, care în lucrările sale precum Parthenonul a utilizat acest număr în stabilirea unor proporții între diferitele părți componente ale construcției. Proporția de mai sus, în care întregul împărțit la partea cea mai mare dă aceeași valoare cu raportul dintre partea cea mai mare și cea mai mică, se numește “**proporție de aur**” sau “**proporție divină**” și se întâlnește în foarte multe cazuri în natură sau în lucrări ale artiștilor, sculptorilor și arhitecților.



Numărul de aur a fost folosit chiar de către egipteni în construcția piramidelor, astfel raportul dintre înălțimea și apotema bazei este egală cu radicalul numărului de aur, iar unghiul făcut de o față laterală cu planul bazei este dat de $\arctg \sqrt{\Phi} = 51^{\circ}49'$, aceasta în cazul piramidei lui Keops. Euclid a mai întrebuințat acest număr în cazul construcțiilor poligoanelor regulate cu 5^k laturi ($k \in \mathbb{N}^*$). Studiat și în Școala lui Pitagora și amintit și în “Dialogurile lui Platon”, numărul de aur apare cel mai bine asociat cu șirul lui **Fibonacci** un matematician italian pe numele său **Leonardo Pisano** (1170-1250) care prin cartea sa “**Liber Abaci**” apărută în 1202 și care introducea cifrele arabe în Europa, dă o regulă de formare a termenilor unui șir $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ plecând de la o problemă practică de înmulțire a iepurilor, astfel în șirul 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... se poate observa că începând cu al doilea termen, fiecare este suma celorlalți doi termenii din față, iar raportul



dintre oricare doi termeni consecutivi este aproximativ numărul de aur, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$,

$(\frac{2}{1} = 2, \frac{3}{2} = 1,5, \frac{5}{3} = 1,67, \frac{55}{34} = 1,678...)$. Dacă notăm cu $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,618033...$ atunci șirul

$1 + \Phi + \Phi^2 + \Phi^3 + + \Phi^n + ...$, cu $\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$ are

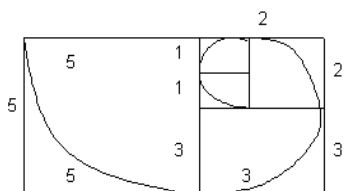
forma generală $(\Phi^n)_n = A \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} + B \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}$, $A, B \in R$.

Numărul de aur poate fi exprimat în ami multe moduri și anume: ca o fracție infinită $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = \dots$ sau ca un radical infinit $\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$ sau prin

$$\Phi = \left(1 + \frac{1}{1^2} \right) \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \dots \left(1 + \frac{(-1)^n}{F_n^2} \right) \text{ sau } \Phi = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{(-1)^n}{F_n \cdot F_{n+1}} + \dots$$

Un fapt interesant îl constituie și legătura dintre numerele iraționale Φ, π și e prin relația $\Phi = \frac{7}{5} \cdot \frac{\pi}{e}$.

Pentru un dreptunghi în care raportul dintre lungime și lățime este egal cu numărul de aur se folosește denumirea de “**dreptunghi de aur**” iar dacă asociem modul de formare a termenilor din șirul lui Fibonacci cu modul de construcție a unor dreptunghiuri se obține un șir de dreptunghiuri de aur, înscris într-o spirală logaritmică care nu-și modifică forma pe măsură ce crește.



Aceste spirale se regăsesc în modul de formare al galaxiilor, în forma cochiliei melcilor marini, în forma urechii umane sau în interiorul aparatului auditiv, precum și în modul de dispunere a semințelor de floarea soarelui sau a conurilor de pin ce cresc în spirale cu dimensiunile ce respectă numerele din șirul lui Fibonacci, sau chiar modul de înmulțire a familiilor de albine respectă aceste numere.

Cel mai bine a evidențiat principiul utilizării numărului de aur, arhitectul **Marcus Pollio Vitruvius** (80 î.e.n-15 e.n), în lucrările sale realizând acel raport între diferitele părți ale unei clădiri și clădirea însăși. El spunea: “...pentru ca un întreg împărțit în părți inegale să pară frumos, trebuie să existe între partea mică și cea mare același raport ca între partea mare și întreg”.

Arhitectura renascentistă a secolului al XVI-lea a pus în evidență utilizarea acestui raport prin lucrările lui **Michelangelo** (1475-1564) sau **Donato Bramante** (1444-1514).

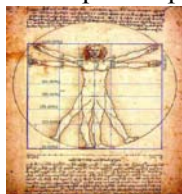
Arhitectul francez **Le Corbusier** (1887-1965) a promovat o arhitectură adaptată dimensiunilor umane, aplicând principiul că secțiunea de aur se regăsește în proporțiile formate de componentele corpului uman, astfel a determinat o serie de dimensiuni standard pentru anumite corpuri de mobilier în asigurarea confortului.



O legătură profundă a matematicii prin numărul de aur cu frumusețea exprimată în picturi și sculpturi a fost adusă de către opera matematică a lui **Luca Pacioli** (1446-1517) binecunoscuta lucrare “**Proporția divină**” apărută în **1509** și inspirată și de conlucrarea cu prietenul său Leonardo da Vinci care a realizat picturile “Mona Lisa”, “Madona între stânci” și “Omul vitruvian” plecând tocmai de la raportul de aur în realizarea picturilor.



Și frumusețea corpului uman stă sub incidența seriei Fibonacci, astfel, exemple de cum apare raportul de aur la corpul omenesc se pot găsi dacă împărțim lungimea brațului unui om cu lungimea de la cot la degete, sau prin faptul că ombilicul împarte corpul omenesc în raportul de aur. De asemenea, o serie de distanțe între ochi, nas sau dinți față de ele sau față de celelalte componente evidențiază existența acestui raport.



Astfel că, în lumea modei sau a concursurilor de miss se impune respectarea unor norme stricte ce au legătură cu realizarea unor proporții de aur între diversele părți ale corpului uman conducându-ne la ideea că și frumusețea este matematizată.

Bibliografie:

1. Florin Munteanu, Semințe pentru altă lume, Editura Nemira, București, 1999;
2. Solomon Marcus, Din gândirea matematică românească, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1975.
3. <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knot/Fibonacci/fib.html> ;

¹⁾Prof, Gr. Sc. « Costin Nenițescu », Buzău, ²⁾Prof, Școala “George Emil Palade”, Buzău

mult
șlefuiеști”.

„Ideile sunt ca diamantele: îți cer mai
timp să le găsești decât să le

Esquiros

Alphonse

2. Articole și note matematice

Rezolvarea unor ecuații exponențiale cu ajutorul sistemelor de numerație

de prof. Simion Marin¹⁾

Abstract. The article presents more applications of the integers numbers and decimal writing in other base numeral. That applications are dealt with exponential equations given in various competitions and contests school.

Keywords: base numeral, exponential equations.

MSC: 08A401, 03E011.

Ecuațiile ce conțin numai sume de puteri cu aceeași bază pot fi rezolvate și cu ajutorul sistemelor de numerație. Se transformă numărul ce reprezintă suma puterilor într-o bază de numerație egală cu baza comună a puterilor. Numărul astfel obținut se scrie apoi în baza zece, folosind cifrele sale și puterile cu baza egală cu cea a puterilor din ecuație. Vom prezenta în continuare câteva ecuații rezolvate prin această metodă dar și altfel:

1) Să se determine numerele naturale a și b știind că $2^a + 2^{a+b} = 1040$;

Soluția 1:

Scriem numărul 1040 în baza 2 (sistemul binar) și obținem $10000010000_{(2)}$. Scriem mai departe acest număr în baza 10 cu ajutorul cifrelor și puterilor cu baza 2 și obținem $2^4 + 2^{a+b}$. Deci $2^a + 2^{a+b} = 2^4 + 2^{10}$ de unde rezultă că $a=4$ și $a+b=10$. Cum $a=4$, înlocuind în relația $a+b=10$ se obține astfel că $b=6$.

Soluția 2:

Folosind descompunerea lui 1040 putem scrie: $2^a + 2^{a+b} = 2^a(1 + 2^b) = 2^4 \cdot 13 \cdot 5$. Rezultă că $a=4$ și $1 + 2^b = 13 \cdot 5 = 65$, de unde $2^b = 65 - 1 = 64 = 2^6$, obținându-se $b=6$ ca și la soluția anterioară.

2) Aflați $(x, y, z) \in N \times N \times N$ dacă $64^x + 16^y + 4^z = 321$. (Faza Locală, 2005, Clasa a V-a, Buzău,)

Soluția 1:

Scriem numerele 64 și 16 ca puteri cu baza 4 și obținem $(4^3)^x + (4^2)^y + 4^z = 321$, de unde rezultă că $4^{3x} + 4^{2y} + 4^z = 321$. Scrii $x, y, z \in N \times N \times N$ du-l pe 321 în baza 4 obținem $11001_{(4)} = 4^0 + 4^3 + 4^4$. De aici rezultă că : I) $3x=0$, $2y=4$ și $z=3$ de unde deducem că $x=0$, $y=2$ și $z=3$; II) $2y=0$, $3x=3$ și $z=4$ de unde deducem $x=1$, $y=0$ și $z=4$; III) $z=0$, $3x=3$ și $2y=4$ de unde deducem $x=1$, $y=2$ și $z=0$.

Soluția 2 :

Scriem numerele 64, 16, și 4 ca puteri cu baza 2 și vom obține $2^{6x} + 2^{4y} + 2^{2z} = 321$ ecuație pe care o putem rezolva transformându-l pe 321 în baza 2.

3) Să se rezolve ecuația $3^x + 3^y + 3^z + 3^t = 6840$, știind că x, y, z, t sunt numere naturale și $x > y > z > t$. (Faza locală, 1997, Clasa a V-a, Buzău).

Soluție :

Scriind numărul 6840 în baza 3 obținem $100101100_{(3)}$. Trecându-l în baza 10 obținem

$$3^2 + 3^3 + 3^5 + 3^8 = 3^x + 3^y + 3^z + 3^t \text{ de unde rezultă că } t=2, z=3, y=5 \text{ și } x=8 \text{ deoarece } x \rangle y \rangle z \rangle t.$$

4) Aflați x, y, z numere naturale care verifică egalitatea : $2^{3x+2} + 2^{2y+1} + 2^z = 416$. (Faza Județeană, 2004, clasa a V-a, Buzău).

Soluție :

Scriem numărul 416 în baza 2 și obținem $110100000_{(2)}$. Trecându-l din nou în baza 10 obținem $2^5 + 2^7 + 2^8$ care trebuie să fie egală cu $2^{3x+2} + 2^{2y+1} + 2^z$. Rezultă că :

- a) $z=5, 2y+1=7$ și $3x+2=8$, de unde $x=3, y=3$ și $z=5$;
- b) $2y+1=5, z=7$ și $3x+2=8$ de unde obținem că $x=2, y=2$ și $z=7$;
- c) $3x+2=5, 2y+1=7$ și $z=8$ de unde obținem $x=2, y=2$ și $z=8$.

5) Să se determine $x \in N$ din egalitatea $3^{2x} + 4 \cdot 3^x = 117$. (Problema 6937, RIM Brașov, 43/2000).

Soluția 1:

Scriem ecuația astfel: $3^{2x} + (3+1) \cdot 3^x = 117 \Rightarrow 3^{2x} + 3^{x+1} + 3^x = 117$. Scriindu-l pe 117 în baza 3 obținem $11100_{(3)} = 3^2 + 3^3 + 3^4$ de unde rezultă că $x=2$.

Soluția 2 :

Dând factor comun pe 3^x și descompunându-l pe 117 vom obține $3^x(3^x + 4) = 3^2 \cdot 13$ de unde rezultă că $x=2$.

Propunem în continuare o serie de exerciții asemănătoare :

6) Determinați $(x, y, z) \in N \times N \times N$ cu $x \langle y \langle z$, astfel încât $3^x + 3^y + 3^z = 21897$.

(E :13359, Gazeta Matematică. 1/2007, Tuță Luca, clasa a VIII-a).-

7) Să se afle $(x, y, z) \in N \times N \times N$ astfel încât $2^x + 2^y + 2^z = 104$.

(Olimpiada -Faza Județeană, 1995, Buzău, Clasa a V-a).

8) Rezolvați în $N \times N \times N$ ecuația $3^{2^x} + 3^{3^y} + 3^{4^z} = 43066413$.

(Problema 7408, RIM Brașov/2001, clasa a V-a).

9) Aflați $(a, b, c) \in N \times N \times N$ știind că $2^{a^2-a} + 2^{b^2+b+1} + 2^{c^2-c+2} = 385$.

(E: 13169. Gazeta Matematică. 4/2006, Clasa a VI-a).

10) Determinați toate numerelle naturale de forma $\overline{abc}$ cu proprietatea că $2^c + 3^b + 9^a = 811$.

(E :13544. Gazeta Matematică. 5-6/2007, Clasa a V-a).

11) Știind că pentru $(x, y, z) \in N \times N \times N$ are loc relația $3^x + 3^y + 3^z = 2457$, să se arate că numărul $2x+3y+4z-5$ este pătrat perfect doar dacă $x \langle y \langle z$.

(Ex. 1. Supliment Gazeta Matematică. Ianuarie 2009).

Bibliografie :

1. Arthur Bălăucă și colab. 2003. Aritmetică- clasa a V-a. Editura Taida . Iași.
2. Ion Pătrașcu, C. Preda.1990. Complemente de matematică pentru gimnaziu. Editura Cardinal.Craiova.
3. Dana Heuberger și colab. 2003. Matematica pentru grupele de performanță. Exerciții și probleme clasa a V-a. Editura Dacia Educațional. București.
4. Gazeta matematică- Seria B.
5. Revista RIM Brașov.

¹⁾ Profesor, Școala cu clasele I-VIII,
« Vasile Cristoforeanu », Rm. Sărat.

O problemă de minim

¹⁾de prof. Gherghina Manea

Articolul de față urmărește rezolvarea unor probleme de aplicare a matematicii în practică și anume în determinarea acelor distanțe minime utilizând o serie de rezultate matematice precum “Punctul lui Torricelli”.

Să se determine poziția T, de amplasare a unei uzine termoelectrice ce urmează a deservi trei localități A,B,C, nesituate în linie dreaptă, astfel încât lungimea conductelor care leagă uzina de cele trei localități să fie minimă.

Caz numeric: $BC=a=200$, $AC=b=300$, $AB=c=400$

Rezolvare:

$S_{\min} = TA+TB+TC$. Minimul acestei sume se obține, din demonstrația următoarei probleme :

Dacă ABC este un triunghi cu unghiurile mai mici de 120^0 , iar ABP, ACQ și BCR sunt triunghiuri echilaterale construite în exteriorul triunghiului ABC, atunci :

- 1) cercurile circumscrise triunghiurilor ABP, ACQ și BCR au un punct comun T.
- 2) dreptele AR, BQ și CP sunt concurente .
- 3) $AT+BT+CT=AR=BQ=CP$
- 4) pentru orice punct M din planul (ABC) se verifică inegalitatea:

$TA+TB+TC \leq MA+MB+MC$, adică T realizează minimul sumei distanțelor la vârfurile triunghiului ABC.

- 5) pentru orice punct M din planul triunghiului ABC are loc relația:

$$TA+TB+TC = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4S\sqrt{3}}{2}} \quad \text{unde } a=BC, b=AC, c=AB \text{ și } S \text{ suprafața triunghiului ABC.}$$

Demonstrație:

- 1). În figura 1, triunghiul ABC are unghiurile mai mici de 120^0 . Cercurile circumscrise triunghiului ABP, respectiv ACQ se întâlnesc în T.

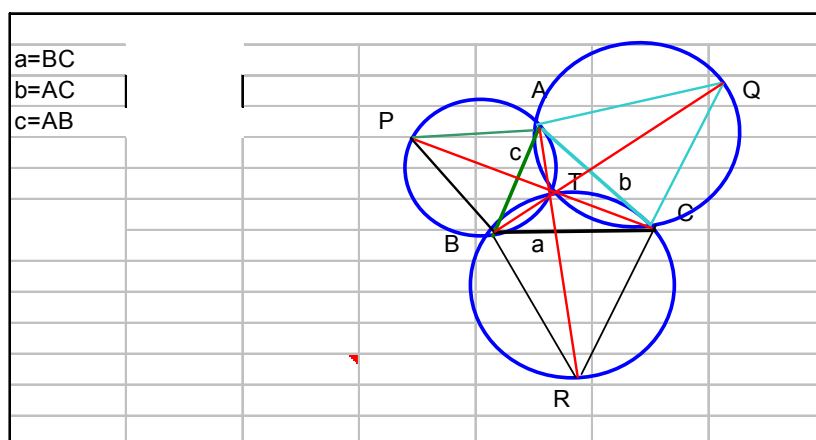


Fig.1

Patrulateralele TAPB, TAQC fiind înscrise în cercuri au loc egalitățile:

$$m(ATB)+m(ATC)=120^0, \text{ de unde rezultă ca } m(\hat{BTC}) = 120^0.$$

Și atunci patrulaterul BTCR este și el înscris într-un cerc.

Cele trei cercuri circumscrise patrulaterelor TAPB, TAQC, TBRC și punctul T se numesc cercurile, respectiv **punctul lui Torricelli**.

2). Patrulaterul BTCR este înscris în cerc și atunci rezultă că : $m(\hat{RBC}) = m(\hat{RTC}) = 60^0$ și

$m(\hat{ATC}) + m(\hat{CTR}) = 180^0$, de unde deducem că A, T, R sunt puncte coliniare . Analog B, T, Q respectiv C, T, P sunt puncte coliniare , de unde deducem ca AR, BQ, CP sunt concurente în T.

3). În patrulaterul înscris BTCR aplicăm teorema lui Ptolemeu (*Produsul diagonalelor într-un patrulater înscris în cerc este egal cu suma produselor laturilor opuse*) și avem : **$TR \cdot BC = TB \cdot RC + TC \cdot BR$** . Cum $BC=CR=BR$ rezultă că $TR = TB+TC$ iar de aici **$AR=TA+TB+TC$** . La fel $BQ=CP=TA+TB+TC$. Am demonstrat ca $AT+BT+CT=AR=BQ=CP$

4). Dacă M este punct în planul(ABC) cel puțin unul dintre patrulateralele MAPB, MAQC, MBRC este convex. Fie patrulaterul MBRC. Din teorema lui Ptolemeu (pentru patrulater convex) avem: $MR \cdot BC \leq MB \cdot CR + MC \cdot BR$ și prin împărțire cu $BC=CR=BR$ se obține $MR \leq MB+MC$ iar acum

$TA+TB+TC=AR \leq MA+MR \leq MA+MB+MC$ adică relația de demonstrat.

5). În triunghiul ARB folosind teorema cosinusului($AB=c$, $RB=BC=a$):

$$\begin{aligned} (*) \quad AR^2 &= AB^2 + RB^2 - 2AB \cdot RB \cdot \cos(B+60^0) = \\ &= a^2 + c^2 - 2ac(\cos B \cdot \cos 60^0 - \sin B \cdot \sin 60^0) = \\ &= a^2 + c^2 - ac \cdot \cos B + ac \sqrt{3} \cdot \sin B \end{aligned}$$

Din teorema cosinusului în triunghiul ABC: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(B)$ și din aria triunghiului ABC, $S = S_{ABC} = a \cdot c \cdot \sin(B)/2$, obținem :
 $a \cdot c \cdot \cos(B) = (a^2 + c^2 - b^2)/2$ și $a \cdot c \cdot \sin(B) = 2S$ și înlocuind în egalitatea(*), rezultă:

$$AR^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + 4S\sqrt{3})/2 \text{ de unde } AR = TA + TB + TC = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4S\sqrt{3}}{2}}$$

Cu această formulă se calculează suma minimă a distanțelor de la punctul T la vârfurile triunghiului ABC. Punctul T este la intersecția cercurilor circumscrise triunghiurilor ABP, ACQ, BCR.

$$\text{Folosind formula demonstrată, rezultă ca } S_{\min} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4S\sqrt{3}}{2}} = 495,6$$

Bibliografie:

1. Aplicații ale matematicii în practica sub Excel. Manea Gheorghe, Manea Gherghina. Editura Fair Partners. 2007.
2. Probleme practice de geometrie. Nicolaescu L. Boskoff V. Editura Tehnică. 1990.

1) **Profesor,**

Grup. Sc.Tehn.Dimitrie Filipescu, Buzau

Asupra unor probleme de determinare a unui unghi x

¹⁾de prof. Ion Radu

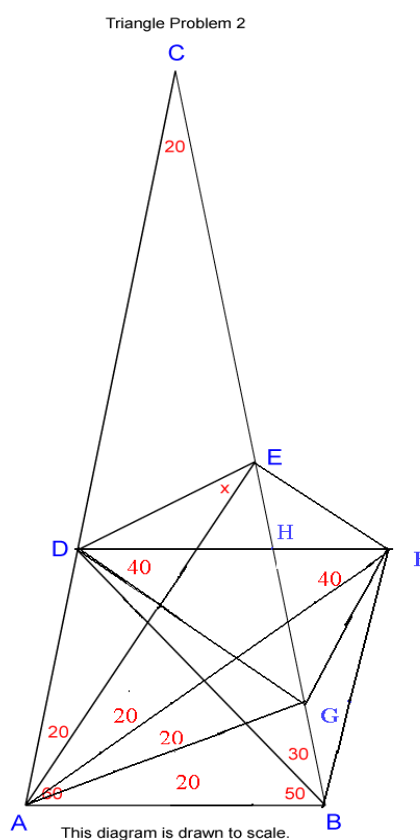
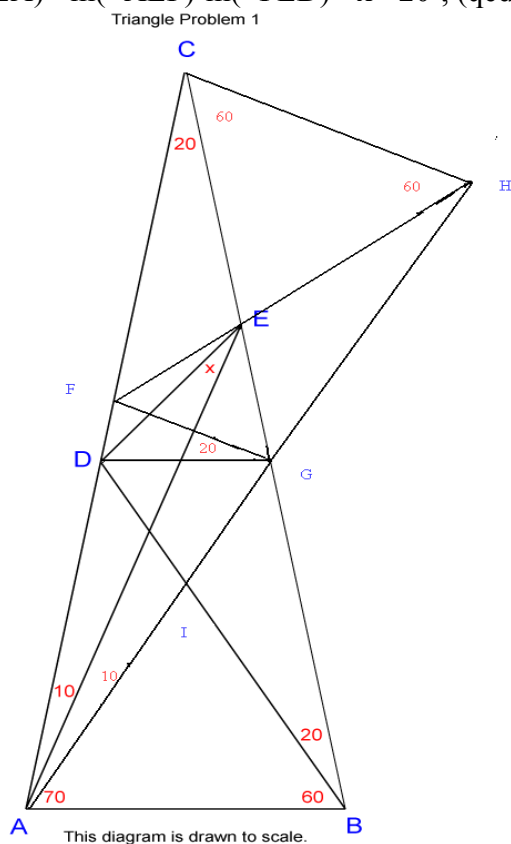
Problema 1. Determinați unghiul x din figura de mai jos “Triangle Problem1”.

Soluție. Construim triunghiul echilateral CEH , în exteriorul triunghiului ABC , rezultă că triunghiul $\triangle CEA \equiv \triangle HEA$ și $\triangle CAH \equiv \triangle ACB$.

Notăm cu $\{F\} = HE \cap AC$ și $\{G\} = HA \cap BC \Rightarrow FG \parallel CH$ și $DG \parallel AB$, de asemenea rezultă că în exteriorul triunghiului isoscel FGD avem triunghiurile echilaterale FGE și DGI , unde $\{I\} = HA \cap DB \Rightarrow m(\angle FDE) = 10^\circ$.

$m(\angle FEA) = 30^\circ$ deoarece AE este mediatoarea segmentelor FG și $CH \Rightarrow$

$m(\angle DEA) = m(\angle AEF) - m(\angle FED) = x = 20^\circ$, (qed).



Problema 2. Determinați unghiul x din figura de mai sus “Triangle Problem 2”.

Soluție. Construim rombul $ABFD$ și triunghiul echilateral DGA și notăm cu $\{H\} = BC \cap DF$, $\Rightarrow \triangle AEF$ isoscel, $DGEF$ trapez isoscel, $\triangle AGB$ isoscel, $\triangle DGF$ isoscel $\Rightarrow \triangle ADE \equiv \triangle AGF$ și $m(\angle AFG) = m(\angle DFA) - m(\angle AFD) = 70^\circ - 40^\circ = m(\angle DEA) = 30^\circ$, (qed).

Notă. Cele două probleme au fost propuse spre rezolvare de către un site de problem-solving.

¹⁾Prof., Școala cu clasele I-VIII, Cozieni, Buzău

3. Examene și concursuri

CONCURSUL JUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“SCLIPIREA MINTII”
Grupul Școlar “ Costin Nenitescu”, Buzău
28 NOIEMBRIE 2009

CLASA a V-a

1. a) Calculați: $2010 \cdot 2009 - 2009 \cdot 2008 + 2007 \cdot 2006 - 2009 \cdot 2008$;
b) Determinați a astfel încât să avem: $\overline{a2} + \overline{a4} + \overline{a6} = \overline{1a} + \overline{3a} + \overline{5a} + 30$.

Prof. Neculai Stanciu

2. Se consideră tabloul: .
- | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
- Aflați suma numerelor.

Prof. Neculai Stanciu

3. Să se compare numerele :

- a) $a = [2^5 \cdot 3^4 \cdot (2^{16} + 2^{17} + 2^{18})] : 16^5$ și $b = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10}$;
b) 2^a și 8^b ;

Prof. Adrian Stan

CLASA a VI-a

1. a) Fie $A = 10^{n+1} + 10^n - a$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ și a este cifră. Determinați a astfel încât A să fie divizibil cu 9.

Prof. Ana Panaitescu

- b) Să se determine numerele prime a și b din relația : $a \cdot b - 2a + 2b = 2013$.

Prof. Adrian Stan

2. Să se rezolve în $\mathbb{N}^*$ ecuația: $\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n} = \frac{1004}{1005}$.

(Revista “Sclipirea Mintii, nr.2) *Prof. Gheorghe Struțu, Prof. Ligia Struțu*

3. Raportul măsurilor a două unghiuri adiacente complementare este exprimat printr-un număr natural. Determinați acest număr știind că măsurile unghiurilor sunt numere naturale.

Prof. Simion Marin

CLASA a VII-a

1. Se dau numerele $x = 7$ și $y = 21$; Se cere:

- a) Să se arate că $x+y = (x;y) + [x;y]$, unde $(x;y)$, (respectiv $[x;y]$) reprezintă cel mai mare divizor comun (respectiv cel mai mic multiplu comun) al numerelor a și b ;

b) Să se arate că există o infinitate de perechi de numere naturale x și y care verifică proprietatea de la punctul a).

Prof. Constantin Apostol

2. Se dă proporția $\frac{x-2y+3z}{4x-3y+2z} = \frac{2}{3}$. Știind că $y \neq 2z$, să se arate că:

$$\left(\frac{x-2y+3z}{4x-3y+2z} \right)^2 = \frac{7x-4y+z}{7x-9y+11z}.$$

(Revista Sclipirea Mintii, nr. 1/ 2008) **Prof. Constantin Apostol**

3. Să se determine măsurile unghiurilor unui triunghi, știind că măsurile a două dintre unghiurile sale au complementele proporționale cu 11 și 13, iar suplementele lor, cu 29 și 31.

Prof. Constantin Apostol

CLASA a VIII-a

1. a) Să se calculeze: $|3 - \sqrt{108}| - |\sqrt{27} - 2| - |1 - \sqrt{3}| + |4 - \sqrt{12}|$;

b) Să se arate că expresia $E(x) = |x-1,5| + |x+3,2| + |x-2| + |x+5,3|$ este număr natural pentru orice $x \in [-2,0]$.

Prof. Gheorghe Dârstaru

2. Să se arate că $\frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca} = 1, \forall a, b, c \in R^*, \text{ cu } abc=1$.

Prof. Vasile Prefac, Maritanța Prefac

3. Fie cubul ABCDA'B'C'D', în care $AC \cap BD = \{O\}$, M este mijlocul lui [D'C'], N este mijlocul lui [CC'] și

$Q \in [DD']$ astfel încât $\frac{DQ}{DD'} = \frac{1}{4}$.

a) Arătați că $MN \parallel (A'AB')$;

b) Calculați sinusul unghiului dintre dreptele MO și D'B', respective dintre MO și AQ.

Prof. Gheorghe Dârstaru

CLASA a IX-a

1. a) Să se calculeze: $A = \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{6 - \sqrt{16 + 8\sqrt{3}}}}$.

Prof. Gheorghe și Ligia Struțu

b) Să se arate că dacă $\sqrt{\frac{x+y}{xy}} + \sqrt{\frac{1+x}{x}} + \sqrt{\frac{1+y}{y}} = 4, \forall x, y \in (0;1)$ atunci $xy > \frac{4}{81}$. **Prof. Adrian Stan**

2. Fie $a = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{16}}$. Să se determine $x \in Z$ astfel încât $x^2 \leq a$.

Prof. Daniela Dibu

3. Fie $(x_n)_n$ o progresie aritmetică.

a) Să se arate că $\frac{1}{x_1 \cdot x_2} + \frac{1}{x_2 \cdot x_3} + \frac{1}{x_3 \cdot x_4} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} \cdot x_n} = \frac{n-1}{x_1 \cdot x_n}$;

b) Dacă $x_1=1$ și rația $r > 0$ să se calculeze suma $S = \sum_{k=1}^{2009} \frac{1}{x_k \cdot x_{k+1}}$;

Prof. Natalia Pleșu

CLASA a X-a

1. Să se demonstreze că numărul $\left(\frac{\sqrt{11+4\sqrt{7}} - \sqrt{11-4\sqrt{7}}}{\sqrt{7-2\sqrt{10}} \cdot \sqrt{7+2\sqrt{10}}} \right)^k$ este rațional pentru $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Prof. Daniela Dibu

2. Fie $a = \sqrt[3]{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}} - \sqrt[3]{2\sqrt{7}-3\sqrt{3}}$ și $f(x) = \log_x \left(x + \frac{3}{x}\right) + \log_{6\sqrt{3}-3x} x + \log_x (6\sqrt{3}-3x) + \log_{\frac{1}{x}} (x^2 + 3)$

- a) Să se arate că $a = \sqrt{3}$ și să se raționalizeze numitorul fracției $\frac{1}{a - \sqrt[3]{2}}$;

- b) Să se calculeze $f(a)$.

Prof. Adrian Stan

3. Arătați că, dacă $\log_2 5 = a$, $\log_2 3 = b$ atunci $\log_8 75 = \frac{2a+b}{3}$ și $\log_{15} 12 = \frac{2+b}{a+b}$.

Prof. Natalia Pleșu

CLASA a XI-a

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Să se determine matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X^3 - X = 5A$.

Prof. Adrian Stan

2. Să se determine parametrii a și b astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} + 2ax + 3b) = 3$.

Prof. Constantin Dinu

3. Să se calculeze limita : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^3 x - \sin^3 x}{x^5}$;

Prof. Cheșcă Ciprian

CLASA a XII-a

1. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - 2009x - 2009y + 2009 \cdot 2010$.

- a) Să se arate că $x \circ x \geq 2009$;

- b) Să se calculeze $a = (-2010) \circ (-2009) \circ \dots \circ 0 \circ 1 \circ \dots \circ 2010$;

Prof. Popescu Florentina

2. Să se calculeze $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$;

Prof. Natalia Pleșu

3. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{x+1}$.

- a) Să se arate că $\int_0^1 (x^3 + 1) \cdot f_{2009}(x) dx = \frac{2011^2 + 1}{2010 \cdot 2011 \cdot 2012}$.

- b) Să se calculeze $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_0^{t^2} f_n(x) dx}{t^n}$.

Prof. Adrian Stan

Notă :

Toate subiectele sunt obligatorii;

Se acordă 7 puncte pentru fiecare exercițiu;

Timp de lucru: 2 ore.

„Logica te va duce din punctul A în punctul B.
Imaginația te va duce oriunde vei vrea”.
Albert Einstein

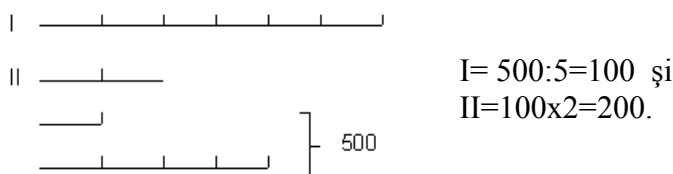
4. Probleme rezolvate

Învățământ primar

P:86 . Suma dintre o șesime dintr-un număr și dublul altuia este 500. Să se afle numerele știind că primul este de trei ori mai mare decât celălalt.

Inst. Marcela Marin, Rm. Sărat

Rezolvare: O șesime din primul număr este egală cu jumătate din al doilea. Avem cinci părți egale.



P:87 . Pe un lac sunt mai multe găște. Dacă ar mai fi încă pe atâtea, plus o jumătate, plus un sfert, plus una, ar fi 100 de găște. Câte găște se aflau pe lac?

Inst. Brânză Cristian Cosmin, Bădila, Pârscov

Rezolvare:

$$100 - 1 = 99$$

$\frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$, $99 : 11 = 9$ (o pătrime din numărul găștelor), $9 \times 4 = 36$ (numărul găștelor de pe lac)

P:88. Mama cumpără de două ori câte 15 baloane din care 10 i le dă fiului său, Matei, iar restul le împarte în mod egal celor două fiice, Ica și Ina. Câte baloane primește fiecare fată?

Înv. Ion Daniela, Berca

Rezolvare:

Câte baloane cumpără mama?

$$2 \times 15 = 30 \text{ (baloane)}$$

Câte baloane îi rămân mamei după ce îi dă 10 baloane fiului său?

$$30 - 10 = 20 \text{ (baloane)}$$

Câte baloane primește fiecare fată?

$$20 : 2 = 10 \text{ (baloane)}$$

P:89. Diferența a două numere este 61. Dacă le împărțim obținem câtul 3 și restul 1.
Care sunt numerele?

Înv. Lupșan Ion, Pleșcoi, Berca

Rezolvare: Să notăm cele două numere cu a și b. Atunci, conform datelor problemei se obțin relațiile:

$$a - b = 61$$

$a : b = 3$ cu $r = 1$. De aici putem scrie, $a = 3 \times b + 1$ și înlocuind în prima relație se obține:

$$3 \times b + 1 - b = 61 \text{ adică } 2 \times b + 1 = 61 \text{ . Mai mult, } 2 \times b = 61 - 1 \text{ adică } 2 \times b = 60 \text{ .}$$

Din această relație rezultă că $b = 60 : 2$ adică $b = 30$ iar mai departe, $a = 61 + 30$ adică $a = 91$.

P:90. Într-o zi 10 fete rezolvă 120 de probleme, lucrând fiecare același număr de probleme.

Dacă un băiat rezolvă a patra parte din numărul de probleme rezolvate de o fată, câte probleme rezolvă 3 fete și 3 băieți în 7 zile?

Inst. Lupșan Nicoleta - Gabriela, Berca

Rezolvare: $120 : 10 = 12$ (probleme rezolvă zilnic o fată)

$$12 : 4 = 3 \text{ (probleme rezolvă zilnic un băiat)}$$

$$7 \times 3 \times (12 + 3) = 315 \text{ (probleme rezolvă 3 fete și trei băieți în 7 zile)}$$

P:91. Un client a cumpărat dintr-un magazin obiecte în valoare de 40 lei, pentru care a dat o bancnotă de 100 lei. Vânzătoarea, neavând în acel moment banii pentru rest, s-a dus la un magazin apropiat și a schimbat bancnota. Apoi a dat clientului restul cuvenit, 60 lei. Curând după plecarea cumpărătorului a venit însă casierul vecin, spunând ca bancnota era falsă și a restituit-o vânzătoarei, aceasta trebuind să-i dea alta bancnotă de 100 lei. Care este paguba vânzătoarei?

Inst. Marinescu Gabriela, Școala Stăncești, Vadu Pașii

Rezolvare: Paguba este de 100 lei, deoarece au fost înstrăinați 200 lei (100 lei, bancnota bună dată casierului, 60 lei dați rest și 40 lei, contravaloarea mărfii vândute), dar s-au primit 100 lei mărunțiș la schimbarea bancnotei false.

P:92. Diana a făcut prietenei sale, Cristina, promisiunea că îi poate ghici ce sumă posedă după unele modificări ale acesteia, cu toate că nu-i cunoaște valoarea inițială. Cristina și-a numărat banii în taină, apoi a spus: „Putem începe!”

„Socotește câți lei vei avea dacă mama îți dă încă atâția, plus 10 pe care ți-i ofer eu, dacă cheltuiești jumătate din totalul rezultat, iar mama își retrage suma dată!”

Și, fără să aștepte răspunsul, Diana continuă: „Trebuie să-ți fi rămas 5 lei!”

Recunoscând, Cristina se întreabă: cum se poate ghici atât de exact?

Inst. Marinescu Gabriela, Școala Stăncești, Vadu Pașii

Rezolvare: Răspunsul este jumătatea numărului dictat de Diana, deoarece dacă x este numărul inițial folosit de Cristina și n cel spus de Diana, calculele menționate dau: $x + x + n - (x + x + n) : 2 - x = n : 2$

La clasa a IV-a se poate rezolva și prin metoda figurativă.

P:93. Un copil scrie, în joacă, cifrele de la 9 la 4, una după alta. Din numărul format scade numărul scris cu cifrele de la 7 la 2. Rezultatului îi adaugă numărul scris cu cifrele dintre 2 și 9.

Ce număr a obținut prin adunare?

Elevă Dogaru Ioana - Alexandra, Înv. Vrabie Marioara, Berca

Rezolvare:

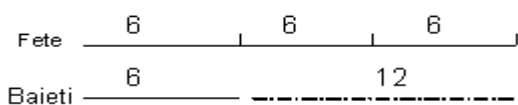
$$1) 987\ 654 - 765432 = 222\ 222$$

$$2) 222\ 222 + 345\ 678 = 567\ 900$$

P:94. Într-un grup de copii, numărul fetelor este de trei ori mai mare decât al băieților. Dacă ar mai veni 12 băieți, atunci numărul băieților ar fi egal cu numărul fetelor. Câți copii sunt în grup?

Înv. Doina Vizitiu, Măgura

Rezolvare:



2 băieți reprezintă două segmente, așadar, $12:2=6$ copii.

Numărul fetelor este dat de $6 \times 3 = 18$ și numărul total de copii este dat de $18 + 6 = 24$.

P:95. Dacă la restul 211 adaug 9, atunci unul din numere este de 11 ori mai mare decât celalalt. Aflați numerele.

Înv. Elena Cucu, Valea Părului, Beceni

Rezolvare : $211 + 9 = 220$ (acesta este impartitorul)

Din proba impartirii cu rest avem: $D = I \times C + R$ Deci, $220 \times 10 + 211 = 2411$

Numerele cautate sunt 2411 și 220, pentru ca $2411:220$ ne da catul 10 și restul 211.

▪ GIMNAZIU

Clasa a V – a

G:80. Determinați x astfel încât numerele $a = (3^{11})^{3^2} + (3^3)^{3^3} + (27^3)^{11} \cdot x$ și $b = 9^{50} + 81^{25} + 243^{20}$

să fie egale.

Prof. Simion Marin

Rezolvare: $a = (2 + x) \cdot 3^{99}$, $b = 9 \cdot 3^{99} \Rightarrow a = b \Leftrightarrow 2 + x = 9 \Rightarrow x = 7$.

G:81. Suma a două numere naturale în care unul este divizibil cu celălalt, este cu 56 mai mare decât cântul lor. Aflați numerele respective.

Prof. Ion Stănescu

Rezolvare: Notând numerele date cu ak și a , $a \neq 0$, rezultă $ak+k=k+56$ de unde se obține

$$a = \frac{k+56}{k+1} = 1 + \frac{55}{k+1} \in \mathbb{N} \Rightarrow k \in \{0;4;10;54\}. \text{ Rezultă, } (ak, a) \in \{(0;56), (48;12), (60;6), (108;2)\}.$$

G:82. Să se arate că nu există niciun număr natural n , astfel încât $2009^{2009} = 9^n + 2009$

Prof. Adrian Stan

Rezolvare: Se folosește ultima cifră: $u(2009^{2009})=u(9^{2009})=9$, pe când $u(9^n+2009)=\begin{cases} 1+9=0, & n \text{ impar} \\ 9+9=8, & n \text{ par} \end{cases}$.

G:83. Comparați numerele: $a = 3 \cdot 2^{88}$ și $b = 2 \cdot 3^{59}$.

Prof. Tuță Luca

Rezolvare: $a = 6 \cdot 8^{29} < 6 \cdot 9^{29} = b$.

G:84. Să se rezolve în $\mathbb{N}^8$ ecuația : $a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot \dots \cdot a_8^2 = 2008^8$.

Prof. Neculai Stanciu

Rezolvare: Se arată mai întâi că dacă $d_1, d_2, \dots, d_k$, sunt toți divizorii naturali ai numărului n atunci are loc relația $(d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_k)^2 = n^k$. Pentru demonstrație, se iau $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ de unde $d_1 = \frac{n}{d_k}$,

$d_2 = \frac{n}{d_{k-1}}, \dots, d_k = \frac{n}{d_1}$ care prin înmulțire dau relația din enunț. În cazul nostru, $2008 = 2^3 \cdot 251$ are opt

divizori și din $(d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_8)^2 = 2008^2$ rezultă divizorii $\{1, 2, 4, 251, 502, 1004, 2008\}$.

G:85. Să se arate ca suma cifrelor numărului $10^{2009} - 2008$ este un număr divizibil cu 2008.

Prof. Adrian Stan

Rezolvare: $10^{2009} - 2008 = \underbrace{999 \dots 997992}_{2009 \text{ de cifre}}$. Suma cifrelor numărului este

$$2007 \cdot 9 + 7 + 2 = 2008 \cdot 8 = 2008^2$$

G:86. Să se rezolve ecuația: $x \cdot [8!^{251} - 3^{4^5} : (3^4)^5 : 8!] : 80 = 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \dots + 2 \cdot 3^{999}$

prof. Vasile Prefac, prof. Maritanța Prefac

Rezolvare: Ecuația dată este echivalentă cu $x \cdot (3^{1004} - 3^{1000}) : 80 = 3^{1000} \Rightarrow x = 1$.

G:87. Știind că $\overline{abc} = \overline{bca} - \overline{acb}$, să se calculeze suma tuturor numerelor de trei cifre formate cu cifrele a, b, c , luate câte o singură dată.

Prof. Constantin Apostol

Rezolvare: Din $\overline{abc} + \overline{acb} = \overline{bca}$ deducem că singura relație posibilă este $b+c=10+a$ (nu putem avea $b+c=a$ căci nu putem avea $c+b=c$ și invers), prin urmare, rezultă $1+c+b=10+c$, așadar, $b=9$ și continuând adunarea pe coloană rezultă $1+a+a=9$ adică $a=4$ și în sfârșit $c=5$. Atunci, $\overline{abc} \in \{495, 459, 945, 954, 594, 549\}$ având suma de 3996.

G:88. Trei colegi au împreună 180 de lei. Dacă al treilea coleg dă celui de-al doilea 12 lei, iar al doilea dă primului 3 lei cei trei vor avea sume egale. Câți bani are fiecare copil?

Prof. Gheorghe Dârstaru

Rezolvare: $x+y+z=180$, $x+3=y+9=z-12=180:3$, rezultă $x=57$, $y=51$, $z=72$.

Clasa a VI – a

G:89. a) Să se arate că numărul $N = 4^{4n+2} \cdot 5^{3n+3} + 2^{8n+1} \cdot 5^{3n+1} - 2^{8n} \cdot 5^{3n}$ este divizibil cu 2009.

b) Să se determine numerele naturale n astfel încât ultima cifră nenulă a lui N să fie 6.

Prof. Adrian Stan

Rezolvare: a) $N = 4^{4n} \cdot 5^{3n} (16 \cdot 125 + 10 - 1) = 4^{4n} \cdot 5^{3n} \cdot 2009 : 2009.$

b) Cum $4^{4n} \cdot 5^{3n} = 4^{3n} \cdot 5^{3n} \cdot 4^n$, rezultă că ultima cifră nenulă a lui N este dată de ultima cifră a lui 4^n

înmulțită cu ultima cifră a lui 2009, prin urmare ultima cifră a lui 4^n este 4 dacă și numai dacă $n=2k+1$, k natural.

G:90. Arătați că dacă $19|2a+12b+7c$ și $19|a+b+c$ atunci $19|a+5b+3c$, unde a, b și c sunt numere naturale.

Prof. Neculai Stanciu

Rezolvare: Din $\begin{cases} 19|2a+12b+7c \\ 19|a+b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 19|2a+12b+7c \\ 19|2a+2b+2c \end{cases} \xrightarrow{(-)} 19|10b+5c \Rightarrow 19|5(2b+c) \Rightarrow 19|2b+c,$

$(19,5) = 1.$

Din $\begin{cases} 19|2b+c \\ 19|a+b+c \\ 19|2a+12b+7c \end{cases} \xrightarrow{(+)} 19|3a+15b+9c \Rightarrow 19|3(a+5b+3c) \Rightarrow 19|a+5b+3c$, deoarece $(19,3) = 1.$

G:91. Să se determine numerele prime a, b, c , astfel încât $81^{3a} \cdot 9^{3b} \cdot 3^{3c} = 27^{28}$

Prof. Adrian Stan

Rezolvare: Relația dată este echivalentă cu $3^{12a+6b+3c} = 3^{84}$, de unde rezultă $4a+2b+c=28$. De aici rezultă că $c=2$, fiind singurul număr prim par, și mai departe se obține $4a+2b=26$ adică $2a+b=13$ care se verifică pentru $a=5$ și $b=3$, $a=3$ și $b=7$, $a=1$, $b=11$. Așadar, $(a,b,c) \in \{(3,7,2), (5,3,2), (1,11,2)\}$.

G:92. Să se determine numerele naturale prime a și b din relația $a \cdot b - 2a + 2b = 2013$

Prof. Adrian Stan

Rezolvare: Ecuația dată se poate scrie sub forma $(a+2)(b-2)=2009$ de unde $a=47$ și $b=43$.

G:93. Calculați cel mai mare divizor comun al numerelor $a = 9^{n+2} + 9^n$ și $b = 8^{n+2} - 8^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Prof. Simion Marin

Rezolvare: $a = 3^{2n} \cdot 2 \cdot 41 \cdot 41$ și $b = 2^{3n} \cdot 3^2 \cdot 7$. Dacă $n=0$ atunci, $(a,b)=1$. Dacă $n \geq 1 \Rightarrow (a,b) = 18$.

G:94. Să se rezolve în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuația: $\frac{x}{3} - \frac{3}{y} = 2$.

Prof. Vasile Prefac, Prof. Maritanta Prefac

Rezolvare:

$$\frac{x}{3} - \frac{3}{y} = 2 \Rightarrow xy - 9 = 6y \Leftrightarrow (x-6) \cdot y = 9 \Rightarrow (x,y) \in \{(7,9), (5,-9), (15,1), (-3,-1), (9,3), (3,-3)\}$$

G:95. Arătați că numărul $A = 176^{1005} + 121^{2008} + 239^{2009} + 62^{2010}$ este divizibil cu 60.

Prof. Gheorghe Dârstaru

Rezolvare: $A = (180-4)^{1005} + (120+1)^{2008} + (240-1)^{2009} + (60+2)^{2010} =$

$= M_{60} \cdot 2^{2010} + M_{60} + 1 + M_{60} \cdot 1 + M_{60} + 2^{2010} = 1$

$= M_{60}$ care este divizibil cu 60, unde M_{60} reprezintă un multiplu de 60.

G:96. Două drepte, d_1, d_2 , se întâlnesc în punctul O. Fie punctele A pe d_1 și B pe d_2 , astfel încât punctul O să se afle pe mediatoarea lui [AB]. Comparați distanța de la A la d_2 și de la B la d_1 .

Prof. Ion Stănescu

Rezolvare: Fie A_1 piciorul perpendicularei dusă din A pe d_2 și B_1 piciorul perpendicularei dusă din B pe d_1 . Dacă punctul O se află pe mediatoarea segmentului [AB], atunci $OA=OB$. Triunghiul AOA_1 este congruent cu triunghiul BOB_1 (ipotenuză - unghi), rezultând că $AA_1=BB_1$.

G:97. Perimetrul triunghiului ABC este de 40 cm iar raportul a două laturi este $\frac{3}{4}$. Știind că bisectoarele interioare ale unghiurilor B și C sunt congruente, aflați lungimea laturilor triunghiului.

Prof. Tuță Luca

Rezolvare: Se cunoaște faptul că triunghiul în care două bisectoare sunt congruente este isoscel, așadar, $AB=AC$. Se analizează cazurile $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{4}$ și $\frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}$ și se verifică enunțul dat întrucât $AB - AC < BC < AB + AC$.

G:98. Pe laturile [OA și [OB ale unghiului AOB se duc perpendicularele [CO pe [OA și [DO pe [OB. Știind că [OF este bisectoarea unghiului AOD, [OE este semidreapta opusă laturii [OA și $m(\hat{DOE}) = 3m(\hat{AOB})$, calculați măsurile unghiurilor $\hat{DOE}$ și $\hat{EOF}$.

Prof. Tuță Luca

Rezolvare: Se arată că $m(\hat{AOB}) = m(\hat{DOC})$ și $4m(\hat{DOC}) = 90^\circ$ de unde $m(\hat{DOE}) = 67^\circ 30'$. $m(\hat{EOF}) = m(\hat{EOD}) + m(\hat{DOF}) = 123^\circ 45'$.

Clasa a VII – a

G:99. Să se calculeze $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}\right)^{2009}$.

Prof. Tuță Luca

Rezolvare: Se notează cu a numărul $\sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}}$ iar prin ridicare la a doua rezultă $a^2=12$, de unde $a = \pm 2\sqrt{3}$. Cum a este negativ, se ia $a = -2\sqrt{3}$, și rezultă în final $-(4\sqrt{3})^{2009}$.

G:100. Să se rezolve ecuația: $3x + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2007 \cdot 2008} = \frac{1005}{1004}$.

Prof. Ion Stănescu

Rezolvare: $3x + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2007} - \frac{1}{2008} = 1 + \frac{1}{1004} \Rightarrow x = \frac{1}{2008}$.

G: 101. Rezolvați în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuația: $x^2 - 4018y + y^2 + 4016x + 8062145 = 0$.

Prof. Ion Stănescu

Rezolvare: După gruparea termenilor, ecuația dată este echivalentă cu $(x+2008)^2 + (y-2009)^2 = 0$ de unde se obține soluția $(x, y) \in \{(-2008; 2009)\}$

G:102. Să se afle aria triunghiului ABC, știind că A,I,G sunt coliniare, $AI=9\text{cm}$ și $IG=1\text{cm}$. (I este centru cercului înscris în triunghi, iar G este centrul de greutate).

Prof. Constantin Apostol

Rezolvare: Din faptul că dreapta AI, care include bisectoarea din A, coincide cu dreapta AG, care include mediana din A, deducem că triunghiul ABC este isoscel cu vârful A. Distingem două cazuri:

Cazul I. $G \in (AI)$. Fie $\{M\} \in AG \cap BC$. Atunci, $AG=2\text{ GM}$, și cum $AG=AI-IG=8\text{ cm}$ rezultă $GM=4\text{ cm}$

și $IM=GM-IG=3\text{ cm}$. În triunghiul ABM, din teorema bisectoarei, $\frac{AB}{BM} = \frac{AI}{IM} = \frac{9}{3} = 3 \Rightarrow AB = 3BM$ și

din teorema lui Pitagora rezultă $AB^2 - BM^2 = AM^2 \Rightarrow BM = 3\sqrt{2} \Rightarrow S_{ABC} = 3\sqrt{2} \cdot 12 = 36\sqrt{2}$.

Cazul II. $I \in (AG)$ $AG=10\text{ cm}$, $GM=5\text{ cm}$, $IM=6\text{ cm}$, $AM=15\text{ cm}$.

G:103. Un trapez dreptunghic ABCD, $AB \perp BC$ are $BC=a$, $CD=a+b$ și $DA=b$. Fie M mijlocul laturii [AB].

Arătați că : a) aria trapezului este egală cu $(a+b) \cdot \sqrt{ab}$; b) triunghiul DMC este dreptunghic.

Prof. Tuță Luca

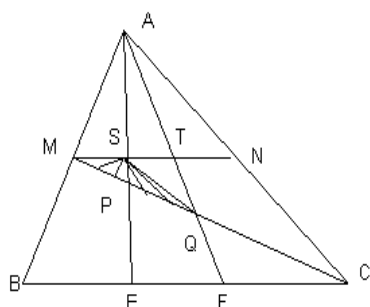
Rezolvare: a) Se arată că $DN=2\sqrt{ab}$ și $A_{ABCD} = \frac{(BC+AD)DN}{2} = (a+b)\sqrt{ab}$.

b) din triunghiurile dreptunghice MAD și MBC se obțin: $MD^2=b^2+ab$ și $MC^2=a^2+ab$ de unde rezultă conform reciprocei teoremei lui Pitagora că $DC^2=(a+b)^2 = MD^2 + MC^2$ adică tocmai cerința problemei.

G:104. În triunghiul ABC, [CM] este mediană, punctele E și F se află pe latura [BC] astfel încât $BE=EF=FC$. Dacă [CM] intersectează pe [AE] și [AF] în punctele P și respectiv Q, calculați cât la sută din aria triunghiului ABC este aria patrulaterului PQFE.

Prof. Gheorghe Dârstaru

Rezolvare: AF respectiv AE sunt mediane în triunghiurile AEC respectiv ABF. Atunci, $A_{ABE}=A_{AEF}=A_{AFC}$.



Construim linia mijlocie [MN] care va trece prin mijloacele segmentelor [AE] respectiv [AF]. Fie S respectiv T punctele respective de intersecție. Atunci, $A_{AMS}=A_{AST}=A_{ATN}$. MT linie mijlocie în $\triangle ABF \Rightarrow \triangle MTQ \equiv \triangle CFQ \Rightarrow TQ = FQ$, $MQ = CQ$. Notăm $A_{QTN}=x$ și cum QT respectiv QS mediane în triunghiurile QNS respectiv QTM, rezultă $A_{QTN}=A_{QTS}=A_{QSM}=x$. [NQ] mediană în NMC. Atunci, $A_{NMQ}=A_{NQC}=3x$. QN mediană în QAC, rezultă $A_{QNA}=A_{QCN}=3x$ și $A_{ANT}=2x$. Cum $\triangle MTQ \equiv \triangle CFQ \Rightarrow A_{MTQ} = A_{CFQ} = 2x$, $A_{AFC} = 8x$, $A_{ABC} = 24x$.

Din aproape în aproape se ajunge la faptul că aria lui PQFE reprezintă

18,3% din aria triunghiului ABC.

G:105. Se consideră triunghiul ABC cu lungimile laturilor a , b și c care verifică relația:

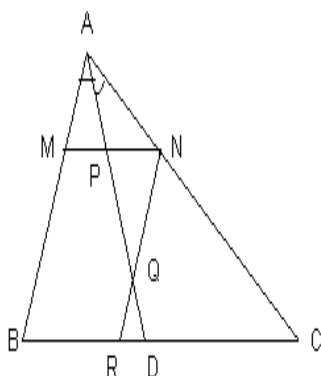
$2a + 3b + 4c = 4\sqrt{2a-2} + 6\sqrt{3b-3} + 8\sqrt{4c-4} - 20$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.

Prof. Neculai Stanciu

Rezolvare: Relația din enunț este echivalentă cu $(\sqrt{2a-2}-2)^2 + (\sqrt{3b-3}-3)^2 + (\sqrt{4c-4}-4)^2 = 0$. Se obține $a=3$, $b=4$ și $c=5$. Conform reciprocei Teoremei lui Pitagora, triunghiul este dreptunghic.

G:106. Fie ABC un triunghi și fie [AD] o bisectoare astfel încât la o treime față de vârf, prin punctul P de pe bisectoare se duce o paralelă [MN] la [BC]. Din $N \in [AC]$ se duce o paralelă la [AB] care intersectează pe [AD] în Q și pe [BC] în R. Dacă $AB=18$, $BC=16$ și $AC=6$, aflați perimetrul triunghiului QDR.

Prof. Adrian Stan



$$BD = \frac{AB \cdot BC}{AB + AC} = \frac{18 \cdot 16}{24} = 12. \text{ Analog } DC=4$$

Cum $MN \parallel BC$, rezultă:

$$\frac{AP}{AD} = \frac{1}{3} = \frac{MP}{BD} = \frac{PN}{DC} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{MP}{12} = \frac{PN}{4} \Rightarrow MP = 4, PN = \frac{4}{3}$$

$$MN = MP + PN = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3} \Rightarrow BR = MN = \frac{16}{3} \Rightarrow RD = BD - BR = 12 - \frac{16}{3} = \frac{20}{3}$$

Cum $PN \parallel RD$ atunci triunghiurile PQN și DQR sunt asemenea:

$$\frac{QN}{QR} = \frac{PN}{RD} = \frac{4}{20} \Rightarrow \frac{QN + QR}{QR} = \frac{4 + 20}{20} \Rightarrow \frac{BM}{QR} = \frac{24}{20} \Rightarrow QR = \frac{20BM}{24}$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow AM = 6 \Rightarrow BM = 12 \Rightarrow QR = 10.$$

Din formula lungimii bisectoarei, $AD^2 = \frac{b \cdot c}{(b+c)^2} [(b+c)^2 - a^2] \Rightarrow AD = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$

$$\frac{AP}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow AP = \frac{2\sqrt{15}}{3} \Rightarrow PD = 2\sqrt{15} - \frac{2\sqrt{15}}{3} = \frac{4\sqrt{15}}{3}$$

$$\frac{QN}{QR} = \frac{PQ}{QD} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{PQ+QD}{QD} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{PD}{QD} = \frac{6}{5} \Rightarrow QD = \frac{5 \cdot 4\sqrt{15}}{3 \cdot 6} = \frac{10\sqrt{15}}{9}$$

$$P_{QRD} = QR + QD + RD = 10 + \frac{10\sqrt{15}}{9} + \frac{20}{3} = \frac{150 + 10\sqrt{15}}{9}$$

G:107. Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic cu un unghi de 30° , lungimea bisectoarei unghiului drept este jumătate din lungimea bisectoarei unghiului de 30° .

Prof. Simion Marin

Rezolvare: Fie unghiul B de 30° , [AE] bisectoarea unghiului A și [BF] bisectoarea unghiului B. Se arată că triunghiul BAF este asemenea cu triunghiul ADE conform cazului unghi-unghi, de unde se obține

$$\frac{BA}{DA} = \frac{BF}{AE}. \text{ Cum } BA = 2DA, \text{ rezultă din relația de mai sus că } BF = 2AE, \text{ și în final } AD = \frac{BF}{2}.$$

G:108. În triunghiul ABC, fie $M \in [AB], N \in [AC]$ astfel încât $MN \parallel BC$ și $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{3}$. Dacă $BN \cap CM = \{O\}$ și aria triunghiului MNO este egală cu a, arătați că $S_{AMN} = 2a$.

Prof. Ion Radu

Rezolvare: Din $MN \parallel BC$, conform Teoremei fundamentale a asemănării, rezultă că triunghiurile MNO și

BOC sunt asemenea, iar de aici $\frac{S_{MON}}{S_{BOC}} = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{BOC} = 9S_{MON} = 9a$. Pe de altă parte, $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{1}{9}$ și cum

$$S_{NOC} = S_{MOB} \text{ și } \frac{MO}{OC} = \frac{1}{3}, \text{ rezultă } S_{NOC} = 3a. \text{ Atunci, } \frac{S_{AMN}}{S_{ABC} - S_{AMN}} = \frac{1}{9-1} \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{MNCB}} = \frac{1}{8} \Rightarrow$$

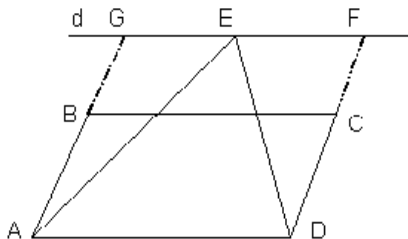
$$S_{AMN} = \frac{9a + 3a + 3a + a}{8} \Rightarrow S_{AMN} = 2a.$$

G:109. Dacă în exteriorul paralelogramului ABCD se ia un punct E, să se arate că are loc relația:

$$S_{AED} = S_{ABE} + S_{EBC} + S_{ECD}.$$

Prof. Ion Radu

Rezolvare:



În paralelogramul ADFG obținut prin construcția paralelei d la BC prin punctul E și notând cu $d \cap AB = \{G\}, d \cap DC = \{F\}$ se obține:

$$S_{AED} = \frac{1}{2} S_{ADFG} \text{ și } S_{ADFG} = 2(S_{AGE} + S_{DEF}) \text{ de unde rezultă}$$

$$S_{AED} = S_{AGE} + S_{DEF} \quad (1).$$

Din relațiile $S_{AGE} = S_{ABE} + S_{BGE}$, $S_{DEF} = S_{DCE} + S_{CEF}$,

$$S_{EBC} = S_{BGE} + S_{CEF} \text{ rezultă că}$$

$$S_{AGE} + S_{DEF} = S_{ABE} + S_{DCE} + S_{EBC} \quad (2).$$

Din (1) și (2) rezultă $S_{AED} = S_{ABE} + S_{EBC} + S_{ECD}$.

Clasa a VIII- a

G:110. Arătați că 2009 divide numărul $1^3 + 2^3 + \dots + 2008^3$.

Prof. Neculai Stanciu

Rezolvare: Din identitatea $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$, avem că $x+y$ divide $x^3 + y^3$. Acum, deoarece fiecare dintre numerele $1^3 + 2008^3, 2^3 + 2007^3, \dots, 1004^3 + 1005^3$ se divide cu 2009 rezultă concluzia.

G:111. Dacă $2a(a-2)+2b(b-4)+10=0$, $a, b \in \mathbb{R}$, să se calculeze $(a-2)^{2009} + (a+b-4)^{2009}$.

Prof. Adrian Stan

Rezolvare: Din relația dată în enunț obținem $(a+b-3)^2 + (a-b+1)^2 = 0$, de unde rezultă $a=1$ și $b=2$;
Rezultă $(a-2)^{2009} + (a+b-4)^{2009} = -2$

G: 112. Arătați că numărul $A=3^{n+2}-8n-9$ este divizibil cu 64 oricare ar fi n , număr natural impar.

Prof. Tuță Luca

Rezolvare: $A = 3^{2n} \cdot 9 - 9 - 8n = 9(9^n - 1) - 8n = 9(9-1)(1+9+9^2+\dots+9^{n-1}) - 8n =$
 $= 8(9+9^2+9^3+\dots+9^n - n) = 8[(9-1) + (9^2-1) + (9^3-1) + \dots + (9^n-1)] =$
 $= 8[8 + 8(1+9) + 8(1+9+9^2) + \dots + 8(1+9+9^2+\dots+9^{n-1})] = M_{64} : 64.$

G:113. Să se determine toate funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $f(x-5)=1-2f(4)+\frac{x-3}{3}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Prof. Adrian Stan

Rezolvare: Pentru $x=9$ rezultă $f(4)=1 \Rightarrow f(x-5)=\frac{x-6}{3}$. Mai departe, facem notația

$$x-5=t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)=\frac{t-1}{3} \text{ sau } f(x)=\frac{x-1}{3}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

G:114. Să se determine $\max(x+y)$ știind că: $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{x^2+y^2}{xy} = 1007; x, y \in (0, +\infty)$

Prof. Ligia Struțu, prof. Gheorghe Struțu

Rezolvare: Pentru a obține maximum considerăm $x, y \geq 1$, și aplicăm inegalitatea

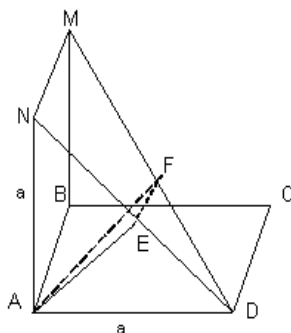
$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \frac{x+y}{2}, \forall x, y \geq 1. \Rightarrow 1007 = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{x^2+y^2}{xy} \geq \sqrt{\frac{x+y}{2}} + 2, \text{ de unde}$$

$$1005 \geq \sqrt{\frac{x+y}{2}} \Rightarrow x+y \leq 2 \cdot 1005^2 \Rightarrow \max(x+y) = 2 \cdot 1005^2.$$

G:115. Pătratele ABCD și ABMN sunt situate în plane perpendiculare. Calculați măsura unghiului diedru format de planele (MAD) și (MND).

Prof. Tuță Luca

Rezolvare:



$$NA \perp (ABC)$$

$$\left. \begin{array}{l} AD \perp DC \\ DC \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow ND \perp DC, DC \mid MN \Rightarrow MN \perp ND. \text{ Din faptul}$$

că $MN \perp NA$, rezultă $(MND) \perp (NAD)$. Fie E mijlocul lui $[ND]$, atunci

$AE \perp ND$. Cum $AE \perp MN$ rezultă din cele două relații de mai sus că

$AE \perp (MND)$. Fie $EF \perp MD$ și cum $AE \perp (MND)$ și

$MD \subset (MND) \Rightarrow AF \perp MD$ (conform Teoremei celor trei perpendiculare).

Se arată astfel că unghiul diedru format de planele (MAD) și (MND) este unghiul format de dreptele AF și AE și are măsura unghiului AFE. Din

$$\sin(\widehat{AFE}) = \frac{AE}{AF} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m(\widehat{AFE}) = 60^\circ.$$

G:116. Fie ABCD un tetraedru în care $AB=BC=AD=2$ cm și $BD=CD=AC=\sqrt{5}$ cm. Dacă M,N,P,Q,R,T sunt mijloacele muchiilor [AB], [AD], [AC], [DC], [BC] și respectiv [BD], calculați: a) distanța dintre dreptele AB și DC; b) volumul piramidei MNPRT;

Prof. Gheorghe Dârstaru

Rezolvare: a) În triunghiul BDC, [BQ] mediană și $BQ^2 = \frac{2(BD^2 + BC^2) - DC^2}{4} = \frac{13}{4}$, în triunghiul

ADC, [AQ] mediană și $AQ^2 = \frac{2(AD^2 + AC^2) - DC^2}{4} = \frac{13}{4} \Rightarrow$ că triunghiul QAB este isoscel și QM

$\perp AB$. În mod analog se arată că triunghiul MDC este isoscel și $MQ \perp DC$. Astfel, [MQ] este distanța dintre AB și DC și se află din triunghiul QMB cu teorema lui Pitagora: $QM^2 = BQ^2 - MB^2$. $QM = 1,5$ cm.

b) [MP], [PQ], [QT], [MT] sunt linii mijlocii de lungime 1 cm, rezultă MPQT este romb și $MQ \perp PT$.

[MN], [NQ], [QR], [RM] sunt linii mijlocii de lungime $\sqrt{5}/2$, rezultă MNQR este romb și $MQ \perp NR$. Din cele de mai sus rezultă că MQ este perpendiculară pe planul (PTN) iar înălțimea piramidei MNPRT este

$MQ/2$ adică $3/4$. Cum $A_{NPRT} = 2A_{TNR} = \frac{\sqrt{19}}{4} \text{ cm}^2$, rezultă $V_{MNPRT} = \frac{\sqrt{19}}{16} \text{ cm}^3$.

G:117. Pe planul triunghiului ABC având $m(\hat{A}) = 90^\circ$, $AB=6$ cm și $m(\hat{C}) = 30^\circ$ se ridică perpendiculara AM. Să se determine lungimea acestei perpendiculare știind că măsura unghiului diedru format de planele (MBC) și (ABC) este de 60° .

Prof. Simion Marin

Rezolvare: Deoarece $AM \perp (ABC) \Rightarrow \Delta MAD$ este dreptunghic, unde $AD \perp BC$ și aplicând Teorema celor trei perpendiculare, rezultă $MD \perp BC$ și $m(\hat{MDA}) = m((MBC), (ABC))$. Se află, $BC=12$ cm ,

$AC = 6\sqrt{3}$ și $AD = 3\sqrt{3}$. Din $\Delta MAD \Rightarrow tg \hat{D} = \frac{AM}{AD} \Leftrightarrow tg 60^\circ = \frac{AM}{3\sqrt{3}} \Rightarrow AM = 9 \text{ cm}$.

G:118. Fie cubul ABCDA'B'C'D' cu $AB=1$ dm. Alegem punctul M pe dreapta DC (C între D și M). $DC=CM$.

Fie N intersecția dintre [MA] și [BC] iar P este intersecția dintre [MD'] și [CC']. Dacă [NP] are valoarea $\frac{\sqrt{2}}{2}$, aflați distanța de la D la planul (AD'M).

Prof. Ion Stănescu

Rezolvare: Din triunghiul D'DR se află $DR = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ și $D'R = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, atunci $d(D, (AD'M)) = DS = \frac{2}{3}$.

▪ LICEU

Clasa a IX-a

L:45. Fie $f: N \rightarrow R$, astfel încât $f(n+1) = \frac{2f(n)+3}{f(n)+3}, \forall n \geq 0$; Știind că $f(0)=1$, să se studieze monotonia lui f.

Prof. Adrian Stan

Rezolvare: Fie $g: [0, \infty) \rightarrow R, g(x) = \frac{2x+3}{x+3}$; Observăm că $f(n+1)=g(f(n))$.

Studiem monotonia lui g. Fie $x_1, x_2 \in [0, \infty)$

$\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{3}{(x_1 + 3)(x_2 + 3)} > 0, \forall x_1, x_2 \in [0, \infty) \Rightarrow g$ este strict crescătoare;

Din $f(1)=g(f(0))=g(1)=\frac{5}{4}=f(0)$, rezultă $f(1)>f(0)$ și cum g este strict crescătoare, rezultă

$g(f(1))>g(f(0)) \Rightarrow f(2)>f(1)$. Presupunem că $f(n)>f(n-1)$, pentru n fixat și cum g strict crescătoare rezultă: $g(f(n))>g(f(n-1)) \Rightarrow f(n+1)>f(n) \Rightarrow f$ este strict crescătoare, pentru orice număr natural n .

L:46. Se consideră mulțimea $A = \{1;3;6;10;15;21;\dots\}$. Să se arate că există $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2004} \in A$, distincte, astfel încât $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2003} = a_{2004}$. **Prof. Ștefana – Mirela Ispas**

Rezolvare: Se observă că $A = \{1 + 2 + 3 + \dots + k | k \in \mathbb{N}^*\}$ și se demonstrează prin inducție că există $a_1, a_2, \dots, a_n = a_{n+1}$ din A astfel încât $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_{n+1}, \forall n \geq 2$. Pentru $n=2$, se verifică faptul că $6+15=21$.

Presupunem că $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_{n+1}$, unde $a_{n+1} = 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Fie $a = 1 + 2 + \dots + \frac{k(k+1)}{2} - 1$. Atunci, $a + \frac{k(k+1)}{2} = a + a_{n+1} \in A \Rightarrow a_1 + \dots + a_n + a = a + a_{n+1} \in A$

L:47. Să se rezolve ecuația: $[x^{2009}] - [2x] - 3 = \{x\} - 4$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x , iar $\{x\}$, partea fracționară a lui x . **Prof. Adrian Stan**

Rezolvare: $[x^{2009}] - [2x] - 3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{x\} - 4 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{x\} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{x\} = 0 \Rightarrow x^{2009} - x - x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^{2008} + x^{2007} + \dots + x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1$

L:48. Un număr pozitiv x satisface relația $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$. Să se demonstreze că numărul $x^5 + \frac{1}{x^5}$ este întreg și să se găsească valoarea sa. **Prof. Gabriel Andrei**

Rezolvare: Din $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3$ după care se ajunge la $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$ și apoi din

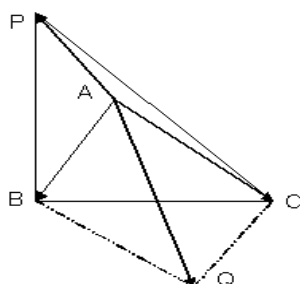
$$(x^2 + \frac{1}{x^2})(x^3 + \frac{1}{x^3}) = x^5 + \frac{1}{x^5} + x + \frac{1}{x} \Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = 123.$$

L:49. Să se arate că triunghiul dreptunghic $ABC(\widehat{A} = 90^\circ)$ are un unghi de 15° dacă și numai dacă $p = (2 + \sqrt{6}) \cdot h_a$. **Prof. Ovidiu Țătan, Prof. Constantin Apostol**

Rezolvare: Dacă $\widehat{C} = 15^\circ \Rightarrow c = a \cdot \sin 15^\circ = a \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, b = a \cdot \sin 75^\circ = a \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, h_a = \frac{a}{4}$ și

rezultă relația din enunț. Dacă $p = (2 + \sqrt{6}) \cdot h_a$ să presupunem fără a restrânge generalitatea că $\widehat{C} < \widehat{B}$. Cum I este centrul cercului înscris în triunghi, r raza și E, F, G picioarele perpendiculelor duse din I pe $[BC], [AC], [AB]$ și notând cu $BC=a, AC=b, AB=c$, rezultă: $a=b-r+c-r$ de unde $b+c=a+2r$ (1). Ridicând la pătrat ultima relație, rezultă $bc=2ar+2r^2$ (2). Rezolvând sistemul dat de relațiile (1) și (2) și ținând cont că $a=2R$, se obține că $\sin C = \frac{c}{a} = \frac{r(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2r(2+\sqrt{6})} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \widehat{C} = 15^\circ$.

L:50. Se dă triunghiul ABC . Să se determine punctul P , exterior triunghiului ABC , pentru care patrulaterul concav $PABC, PBCA$ și $PCAB$ sunt echivalente. **Prof. Constantin Apostol**



Rezolvare: Din faptul că $S_{PABC} = S_{PBCA} = S_{PCAB}$, se deduce că A este centrul de greutate al triunghiului PBC , având loc egalitatea: $\vec{AP} + \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AP} = -(\vec{AB} + \vec{AC})$. Cu regula paralelogramului se

construiește vectorul $\vec{AQ}$, astfel încât $\vec{AQ} = \vec{AB} + \vec{AC}$ și se determină punctul P, construind vectorul $\vec{AP}$, opus vectorului $\vec{AQ}$.

În mod analog, se deduce că B poate fi centrul de greutate al triunghiului PAC și de asemenea C poate fi centrul de greutate al triunghiului PAB existând astfel trei puncte pentru care cele trei patrulatere să fie echivalente.

L:51. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$. Arătați că $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} \geq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$. Prof. Gabriel Andrei

Rezolvare: $(a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$. Analog și pentru celelalte. Rezultă:

$$2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 4\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) : 4 \Rightarrow \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} \geq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

L:52. Dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi, să se determine minimul expresiei:

$$E(a, b, c) = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c}. \quad \text{Prof. Gheorghe Struțu, Prof. Ligia Struțu}$$

Rezolvare: Notăm $b+c-a=x > 0$, $c+a-b=y > 0$, $a+b-c=z > 0$. Luând două câte două relațiile, se obțin:

$$a = \frac{y+z}{2}, \quad b = \frac{x+z}{2}, \quad c = \frac{x+y}{2}. \text{ Atunci, } E(a, b, c) = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} \geq \frac{1}{2}(2+2+2) \geq 3.$$

Minimul expresiei este 3.

L:53. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

$$\text{a) } \left[\frac{x+2008}{4} \right] + \left[\frac{x+2009}{7} \right] = \frac{x}{8} + 2010. \quad \text{b) } [x^2 + 3x + 2010] = \frac{x}{2} + 2009$$

Prof. Ligia Struțu

Rezolvare: a) $\frac{x}{8} + 2010 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{8k | k \in \mathbb{Z}\}$. Ecuația dată este echivalentă cu

$$\left[\frac{x}{4} + 502 \right] + \left[\frac{x}{7} + 287 \right] = \frac{x}{8} + 2010 \Leftrightarrow \left[\frac{x}{4} \right] + \left[\frac{x}{7} \right] = \frac{x}{8} + 1221. \text{ Cum } x=8k \text{ cu } k \text{ întreg, rezultă}$$

$$\left[\frac{8k}{4} \right] + \left[\frac{8k}{7} \right] = \frac{8k}{8} + 1221 \Rightarrow \left[\frac{k}{7} \right] = 1221 - 2k. \text{ Din rezolvarea acestei ecuații, se obține } k=570 \text{ de unde } x=4560. \quad \text{b) } x=-2;$$

Clasa a X-a

L:54. Să se determine numărul de cifre din care este compus numărul 7^{2009} .

Prof. Adrian Stan

Rezolvare: Cum $10^2 \leq \overline{abc} < 10^3$, $10^3 \leq \overline{abcd} < 10^4$,, $10^{p-1} \leq N < 10^p$, unde p reprezintă numărul de cifre ale lui N. Logaritmând ultima relație se obține: $p-1 \leq \lg N < p$. Pentru $N=7^{2009}$ rezultă $\lg N = 2009 \lg 7 \approx 1697,8$. Rezultă, că numărul dat este compus din $p=1698$ cifre.

L:55. Să se rezolve ecuația: $2009^x - 2008^x = 3(2008^{\frac{2x}{3}} + 2008^{\frac{x}{3}}) + 1$ **Prof. Adrian Stan**

Rezolvare: Ecuația dată este echivalentă cu $2009^x = (2008^{\frac{x}{3}} + 1)^3 \mid \left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow 2009^{\frac{x}{3}} = 2008^{\frac{x}{3}} + 1$

$\Rightarrow 2009^{\frac{x}{3}} - 2008^{\frac{x}{3}} = 1$. Din monotonia funcției $f(x) = (1+a)^x - a^x$ care este strict crescătoare, rezultă că ecuația dată are soluția unică $x=3$.

L:56. Dacă patru numere complexe distincte au proprietatea că produsul oricăror trei dintre ele este cubul celui de-al patrulea, atunci imaginile lor geometrice sunt vârfurile unui pătrat.

Prof. Ștefana – Mirela Ispas

Rezolvare: Fie z_1, z_2, z_3, z_4 cele patru numere complexe distincte. Atunci, conform ipotezei, $z_1 z_2 z_3 = z_4^3$,

$z_1 z_2 z_4 = z_3^3$, $z_1 z_3 z_4 = z_2^3$, $z_2 z_3 z_4 = z_1^3$. Notând $z_1 z_2 z_3 z_4 = z$, rezultă:

$$z_1^4 = z, z_2^4 = z, z_3^4 = z, z_4^4 = z$$

Așadar, cele patru numere sunt rădăcinile de ordin patru ale numărului complex z , prin urmare imaginile lor geometrice sunt vârfurile unui pătrat.

L:57. Să se compare numerele a și b unde:

$$a = \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + 2(\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[6]{3} + \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[6]{2})} \text{ și } b = \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}}. \text{ Prof. Constantin Rusu}$$

Rezolvare: $b = \sqrt{\sqrt[4]{9} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[6]{9} + \sqrt[6]{4}} = |\sqrt[4]{3} + i\sqrt[4]{2}| + |\sqrt[6]{3} + i\sqrt[6]{2}|$ și

$$a = |\sqrt[4]{3} + \sqrt[6]{3} + i(\sqrt[4]{3} + \sqrt[6]{2})|. \text{ Cum } |z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2| \Rightarrow b \geq a.$$

L:58. Fie $f : [0;1] \rightarrow R$, o funcție cu proprietățile: (i) $f(1)=1$; (ii) $f(x) \geq 0, \forall x \in [0;1]$; (iii) Dacă x, y și $x+y \in [0;1]$, atunci $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$. Demonstrați că $f(x) \leq 2x, \forall x \in [0;1]$

Prof. Gabriel Andrei

Rezolvare: Se arată mai întâi că funcția f este crescătoare: Fie $x < y, \forall x, y \in [0,1] \Rightarrow y-x > 0$. Conform iii)

rezultă $f(y-x) + f(x) \leq f(y) \Rightarrow 0 \leq f(y-x) \leq f(y) - f(x)$, adică f este crescătoare. Pentru a

arăta că $f(x) \leq 2x, \forall x \in [0;1]$ se folosește metoda reducerii la absurd prin presupunerea că există

$$x_0 \in [0,1] \text{ a.i. } f(x_0) > 2x_0 \Leftrightarrow f(0) > 0. \text{ Contradicția rezultă din } f(0+0) \geq f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) \leq 0,$$

L:59. Fie $x, y, z \in C$ astfel încât
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ xyz=1 \\ |x|=|y|=|z|=1 \end{cases} \text{ . Să se demonstreze că } \{x, y, z\} = \{1, i, -i\}$$

Prof. Gabriel Andrei

Rezolvare: $|x|=1 \Leftrightarrow x \cdot \bar{x} = |x|^2 = 1 \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{x}$ și analoagele. Din $x+y+z=1$ rezultă

$$\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow xy + yz + xz = xyz = 1 \Big| \cdot z \Rightarrow x + y = \frac{z-1}{z^2} \text{ și prin înlocuire în prima}$$

ecuație a sistemului, rezultă $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$ având soluțiile $1, -i, i$. Soluțiile sistemului în număr de șase, corespund permutărilor elementelor mulțimii $\{1, -i, i\}$.

Clasa a XI-a

L:60. Să se demonstreze inegalitatea $\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \chi \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$, unde α, β, χ sunt unghiurile interioare unui triunghi.

Prof. Constantin Dinu

Rezolvare: Cum funcția $f : [0, \pi] \rightarrow R, f(x) = \sin x$ este concavă întrucât $f''(x) = -\sin x$ care este

negativă pe $[0, \pi]$, rezultă în baza inegalității lui Jensen că $\sin\left(\frac{\alpha + \beta + \chi}{3}\right) \geq \frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \chi}{3} \Rightarrow$

$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \chi \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ și aplicând inegalitatea mediilor

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \chi \leq \left(\frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \chi}{3} \right)^3$$

rezultă ceea ce trebuia demonstrat

L:61. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[2]{1 + \sin 2x} + \sqrt[3]{1 + \sin 3x} + \dots + \sqrt[n+1]{1 + \sin(n+1)x} + x - n}{x} \right)$

Prof. Constantin Rusu

Rezolvare:
$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sqrt[2]{1 + \sin 2x} - 1}{x} + \dots + \frac{\sqrt[n+1]{1 + \sin(n+1)x} - 1}{x} \right) \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{(1 + \sin 2x)^{\frac{1}{2}} - 1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 + \dots + \frac{(1 + \sin(n+1)x)^{\frac{1}{n+1}} - 1}{\sin(n+1)x} \cdot \frac{\sin(n+1)x}{(n+1)x} \cdot (n+1) \right) \right) = e$$

L:62. Fie $a \in (0;1)$ **un număr real și** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, **o funcție cu proprietățile:** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$;

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(ax)}{x} = 0$. **Să se arate că există** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ **și să se calculeze această limită.**

Prof. Ștefana – Mirela Ispas

Rezolvare: Din a doua relație, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ a.i. $|x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(ax)| < \varepsilon |x|$. Mai departe,

$\forall x \in (-\delta, \delta), n > 0$ rezultă

$$|f(x) - f(a^n x)| \leq |f(x) - f(ax)| + |f(ax) - f(a^2 x)| + \dots + |f(a^{n-1} x) - f(a^n x)| <$$

$$< \varepsilon |x| (1 + a + \dots + a^{n-1}) = \varepsilon |x| \frac{a^n - 1}{a - 1} < \varepsilon |x| \frac{1}{a - 1}. \text{ Prin trecere la limită, rezultă}$$

$$-\varepsilon \frac{1}{b-a} \leq \frac{f(x)}{|x|} \leq \varepsilon \frac{1}{b-a} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{|x|} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

L:63. Calculati: $L(n) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos^2 2x \cos^3 3x \dots \cos^n nx}{x^2}$.

Prof. Apostol Manuela

Rezolvare: Se vor folosi formulele $2 \sin^2 \frac{u(x)}{2} = 1 - \cos u(x)$ și $\lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$.

$$L(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}; \quad L(2) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x \cdot \cos^2 2x}{x^2} \right) = L(1) + 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = \frac{1^3 + 2^3}{2};$$

$$L(3) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x \cdot \cos^2 2x \cdot \cos^3 3x}{x^2} \right) = L(2) + 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{3x}{2}}{x^2} = \frac{1^3 + 2^3 + 3^3}{2};$$

Prin inducție matematică se demonstrează că $L(n) = \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{8}$.

L:64. Să se scrie care este perpendiculara comună a dreptelor date de ecuațiile:

$d_1: x-1=y-2=z-3; \quad d_2: -x-1=y+2=z$

Prof. Neculai Stanciu

Rezolvare: În prealabil se află $\vec{v}_1(1,1,1)$ vectorul director al dreptei d_1 și $M_1(1,2,3)$ un punct al dreptei. Analog,

$\vec{v}_2(-1, -1, 1)$ și $M_2(-1, 2, 0)$ pentru d_2 , după care vectorul director al perpendicularei comune este dat de

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} \quad \text{Mai departe se află ecuația planelor determinate de perpendiculara}$$

comună și de d_1 respectiv d_2 :

$$P_1: \vec{v} \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y - 2z + 3 = 0, \quad P_2: \vec{v} \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y + 2z - 1 = 0.$$

Ecuția perpendicularei comune este
$$\begin{cases} x + y - 2z + 3 = 0 \\ x + y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Clasa a XII-a

L:65. Fie x_1, x_2, x_3 , rădăcinile ecuației $x^3 - x^2 - 2 = 0$. Să se calculeze: $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$.

Prof. Gheorghe Dârstaru

Rezolvare: Se înmulțește ecuația inițială cu x^2 după care se pun condițiile ca x_1, x_2, x_3 să verifice ecuația obținută, iar prin însumarea celor trei ecuații obținute se ajunge la $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = \sum_{i=1}^3 x_i^4 + 2 \sum_{i=1}^3 x_i^2$.

Folosind relațiile lui Viète se obține în final, $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 11$.

L:66. Fie polinomul $P(X) = X^n + 2X - 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, \dots, x_n$. Să se calculeze $\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2 + 1}{x_k - 1}$.

Prof. Adrian Stan

Rezolvare: Cum $\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2 + 1}{x_k - 1} = \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - 1)(x_k + 1) + 2}{x_k - 1}$ și $\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - x_k} = \frac{P'(1)}{P(1)}$ atunci, $\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2 + 1}{x_k - 1} = -2$.

L:67. Să se arate că funcția $F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2})$ este o primitivă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = \frac{1}{2 \cos x}$ pe intervalul $(-\pi, \pi)$ și să se calculeze integrala $I = \int_0^{2\pi} f(x) dx$. Generalizare.

Prof. Apostol Manuela

Rezolvare: Se arată că F este funcție derivabilă și $F'(x) = f(x)$, pentru orice x din $(-\pi, \pi)$. Deoarece F nu este definită în $x = \pi$, F nu este o primitivă a lui f pe $[0, 2\pi]$, dar se folosește teoria integralelor improprii:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pi-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi-\varepsilon}^{2\pi} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi-\varepsilon}{2}\right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi-\varepsilon}^0 \frac{-1}{2 + \cos(2\pi - t)} dt = \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pi-\varepsilon} \frac{1}{2 + \cos(-t)} dt = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, \text{ unde, în a doua integrală s-a făcut schimbarea de } \\ &\text{variabilă } t = 2\pi - x \end{aligned}$$

L:68. Să se arate că există un morfism surjectiv de grupuri $f: Q_+^* \rightarrow Q$ între grupurile $(Q_+^*, \cdot)$ și $(Q, +)$

Prof. Ștefana - Mirela Ispas

Rezolvare: Grupul $(Q_+^*, \cdot)$ este generat de mulțimea P a numerelor prime ($P = \{p_1 \langle p_2 \langle \dots \langle p_n \langle \dots \rangle \rangle \rangle\}$). Grupul

$(Q, +)$ este generat de mulțimea $M = \left\{ \frac{1}{n!} \mid n \in \mathbb{Z}^* \right\}$. Funcția f va acționa astfel:

$f(p_i) = \frac{1}{i!}$, $f(1) = 0, \forall i \in \mathbb{Z}^*$. Dacă $r \in Q_+^*, r \neq 1, r = p_{i_1}^{k_1} \dots p_{i_n}^{k_n}$ unde $p_{i_1}^{k_1}, \dots, p_{i_n}^{k_n}$ sunt prime

și $r \in Q_+^*, r \neq 1, r = p_{i_1}^{k_1} \dots p_{i_n}^{k_n}$, atunci $f(r) = \frac{k_1}{i_1!} + \dots + \frac{k_n}{i_n!}$. Dacă $r \in Q, r = \frac{p}{q} = \frac{p(q-1)!}{q!}$.

De aici, $r = f(p_q^{p(q-1)!})$, adică f este morfism surjectiv de grupuri.

*„Fiecare copil pe care-l instruim este un
om pe care îl câștigăm”.*
Victor Hugo

5. Probleme propuse

• ÎNVĂȚĂMÂNT PRIMAR

P:95. Calculați diferența a-b, știind că a poate fi 78, 98, 38 și 99, iar b poate fi 34, 58, 18 și 55.

Inst. Anton Maria, Berca

P:96. Ana a mâncat cu 6 mere mai mult decât Mihai. Cu câte mere a mâncat Ana mai mult decât fratele său, dacă Mihai i-a dat Anei 2 mere?

Inst. Anton Maria, Berca

P:97. Câți ani are moș Ion dacă: a șasea parte din viață o formează copilăria minunată, a douăsprezecea parte este tinerețea luminoasă; după încă a șaptea parte din viață s-a căsătorit, iar la 5 ani după aceea, a avut un fiu, care a trăit jumătate din cât a trăit tatăl său, iar acum, cu mare mahnire, bătrânul se află la 4 ani de la moartea fiului său?

Inst. Brânză Cristian Cosmin, Bădila, Pârscov

P:98. Maria are de 9 ori mai multe cărți decât Dan. Dacă Maria îi dă lui Dan 30 de cărți, atunci Dan ar avea cât un sfert din numărul cărților Mariei. Câte cărți are fiecare?

Inst. Brânză Cristian Cosmin, Bădila, Pârscov

P:99. Un număr de o cifră se împarte la 3. La câtul obținut se adaugă 18. Din rezultat se taie ultima cifră și se obține 2. Se cere:

a) Să se afle numărul. b) Câte soluții sunt?

Înv. Ion Daniela, Berca

P:100. Mama cumpără pentru 3 fete, 3 rochii și 3 perechi de pantofi de aceeași talie și mărime și a plătit 1080 lei. Cunoscând că o rochiță costă cu 80 de lei mai puțin decât o pereche de pantofi, să se afle cât costă o rochiță și cât costă o pereche de pantofi.

Înv. Lupșan Constantin, Berca

P:101. Pe o pășune sunt mai multe animale mici. Un copil, trecând pe acolo, îl întreabă pe paznic: „Sunt 100 de animale pe pășune?”. „Nu, răspunse paznicul. Ca să fie 100 ar mai trebuie un animal mic.” Ele sunt o parte mânji, de 4 ori mai mulți viței decât mânji și de 6 ori mai mulți miei decât mânji.

Câți mânji și câți miei sunt?

Înv. Lupșan Constantin, Berca

P:102. Un tată de 42 de ani are trei copii de 12, 8 și 6 ani. După cât timp tatăl va avea vârsta egală cu suma vârstelor copiilor la acea dată?

Înv. Lupșan Ion, Pleșcoi, Berca

P:103. Maria, fiind întrebată câte probleme a rezolvat în vacanță, răspunde că nu cunoaște numărul exact, dar dacă le numără câte 2, câte 3, câte 4, câte 5, îi rămâne întotdeauna o problemă, însă dacă le numără câte 7, nu rămâne niciuna.

Câte probleme a rezolvat Maria, știind că numărul lor este cel mai mic număr care îndeplinește condițiile spuse de Maria?

Inst. Lupșan Nicoleta - Gabriela, Berca

P:104. Mama avea 27 de ani când i s-a născut fiica și 30 de ani când i s-a născut fiul.

Câți ani are acum fiecare dintre ei, dacă peste 2 ani, însumând vârstele lor se obțin 60 de ani.

Înv. Marchidanu Florica, Berca

P:105. Împarte un segment de 15 în trei părți astfel: prima parte plus 2 cm, a doua parte minus 2 cm și a treia parte înmulțită cu 2 să dea același rezultat. Care sunt cele trei părți?

Înv. Marchidanu Florica, Berca

P:106. Un soț a lăsat prin testament soției sale suma de 56000 lei pentru a fi împărțită astfel: dacă va naște un băiat, acesta să primească de 2 ori cât mama, iar dacă va naște o fată, ei să i se dea cât jumătate din partea mamei. Femeia a născut însă un băiat și o fată. Cum se va face în acest caz împărțirea moștenirii testamentare?

Inst. Marinescu Gabriela, Școala Stăncești, Vadu Pașii

P:107. Diferența a două numere este 1275. Care este suma lor, dacă primul este de 6 ori mai mare decât al doilea?

Elevă Dogaru Ioana - Alexandra, Înv. Vrabie Marioara, Berca

P:108. Descoperă numărul natural $\overline{abc}$ (SZU), știind că sunt îndeplinite simultan condițiile: numărul sutelor este triplul numărului zecilor, numărul unităților este jumătate din numărul sutelor și suma numerelor sutelor, zecilor și unităților este 11.

Elevă Dogaru Ioana - Alexandra, Înv. Vrabie Marioara, Berca

P:109. Diferența a două numere naturale este 2. Aflați numerele știind că suma dintre dublul primului număr și triplul celui de-al doilea este 104.

Inst. Marcela Marin, Rm. Sărat

P:110. Irina, Tudor și Ramona au împreună 1260 de timbre. Dacă Tudor va primi de la Irina 50 de timbre și de la Ramona 120 de timbre, atunci ei vor avea timbre în mod egal. Câte timbre are fiecare?

Înv. Doina Vizitiu, Măgura

P:111. “ $\frac{3}{9}$ din păsările din ograda bunicii sunt rațe, curci $\frac{3}{6}$ din numărul rațelor, iar restul găini. Câte păsări are bunica în ogradă, știind că 12 sunt rațe? Câte sunt din fiecare fel?”

Înv. Maria Caloian, Valea Părului, Beceni

P:112. Calculați: $(\overline{ab} + \overline{cd}) \times 3 + 105 = 423$ și aflați numerele naturale care îndeplinesc condiția :

$(\overline{ab} : \overline{cd})$ ne dă câtul 4 și restul 1.

Înv. Elena Cucu, Valea Părului, Beceni

▪ GIMNAZIU

Clasa a V – a

G:119 . Să se împartă numărul 900 în patru părți astfel încât dacă la prima parte se adaugă 2, din a doua se va scădea 2, a treia parte se va înmulți cu 2 iar a patra parte se va împărți la 2 părțile obținute vor fi egale.

Prof. Simion Marin

G:120 . a) Să se determine restul împărțirii numărului $a = 5^{1990} + 5^{1991} + 5^{1992} + \dots + 5^{2009}$ la numărul 39;

b) Să se arate că a este divizibil cu 10.

Prof. Adrian Stan

G:121 . Arătați că orice putere naturală nenulă a lui 13 se poate scrie ca o sumă de două pătrate perfecte .

Prof. Simion Marin

G:122 . Aflați numerele naturale $\overline{abc}$ dacă $\overline{abc} - \overline{cba} = 693$, unde a, b, c sunt cifre distincte.

Dârstaru

G:123. Arătați că fracția $\frac{a^2b + ab^2}{c^2d + cd^2}$, ($\forall a, b, c, d \in N^*$) este reductibilă. Generalizați rezultatul.

Prof. Neculai Stanciu

G:124. Determinați cifrele a,b,c în sistemul zecimal astfel încât a și c să fie diferite de zero iar numerele $\overline{aab}$ și $\overline{caab}$ să fie simultan pătrate perfecte.

Prof. Luca Tuță

G:125. Știind că: $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 1221$. Calculați a + b + c.

Prof. Rodica Lupșan

G:126. Calculați în două moduri: $(2+4+6+\dots+1000) - (1+3+5+\dots+999)$.

Prof. Rodica Lupșan

G:127. Mulțimile A și B au ca elemente numere naturale nenule și distincte. Elementele mulțimii B sunt succesivele elementelor mulțimii A. Dacă suma tuturor elementelor este 21, determinați aceste mulțimi.

Prof. Ion Stănescu

Clasa a VI – a

G:128. Să se determine toate perechile (a;b), de cifre din sistemul zecimal, știind că au loc, simultan, egalitățile: $a = \frac{\overline{a6}}{\overline{1b}}$ și $b = \frac{\overline{b6}}{\overline{1a}}$. (Dată la concursul taberei de matematică de la Poiana Pinului, 4 septembrie 2009)

Prof. Constantin Apostol

G:129. Numerele naturale a+6, b+10 respectiv c+12 sunt direct proporționale cu numerele 3, 5 respectiv 6. Aflați numerele a, b, c știind că $3a+5b+6c=699930$.

Prof. Ion Radu

G:130. Aflați șapte numere naturale care au suma 2009 și sunt direct proporționale cu șapte numere naturale consecutive.

Prof. Simion Marin

G:131. Fie numărul $n = 2006^{2006} + 2007^{2007}$. Determinați restul împărțirii lui n prin 5.

Prof. Neculai Stanciu

G:132. Împărțind numerele naturale a și b la 502 și respectiv la 402, se obțin cături egale și resturile 375, respectiv 300. Aflați restul împărțirii numărului $4a + 5b$ la 2009. (Dată la concursul taberei de matematică de la Poiana Pinului, 4 septembrie 2009)

Prof. Nicoleta Iordache și prof. Cătălin Iordache

G:133. Măsura unghiului format de bisectoarea complementului și bisectoarea suplementului unui unghi ascuțit dat nu depinde de măsura acestuia.

Prof. Ion Stănescu

G:134. Raportul măsurilor a două unghiuri complementare este $\frac{2,(3)}{3,(6)}$. Să se afle măsurile celor două unghiuri.

Prof. Luca Tuță

G:135. Fie segmentul $AB=2^{2009}$ cm. Dacă A_1 este mijlocul segmentului $[AB]$, A_2 mijlocul lui $[BA_1]$, A_3 mijlocul lui $[AA_1]$, A_4 mijlocul lui $[BA_2]$, A_5 mijlocul lui $[AA_3]$ și așa mai departe. Se cere:

a) Să se calculeze lungimea segmentului $[BA_{2008}]$;

b) Să se arate că $AA_{2009} + AA_{2007} + AA_{2005} + \dots + AA_1 = AB - A_{2009}A_{2007}$.

Prof. Gheorghe Dârstaru

Clasa a VII – a

G:136. Să se demonstreze că numărul $2009^{2009} + 2011^{2011}$ este divizibil cu 2010. Generalizare.

Prof. Adrian Stan

G:137. Determinați media aritmetică a numerelor naturale nenule, x, y, z, știind că $\frac{x}{z+1} = \frac{x-1}{y} = \frac{z}{11}$.

(Dată la concursul taberei de matematică de la Poiana Pinului, 4 septembrie 2009)

Prof. Valerica Roșu

G:138. Aflați $n \in \mathbb{N}$, astfel încât fracția $\frac{n-3}{2n+7}$ să se poată simplifica. **Prof. Ion Stănescu**

G:139. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}_+^*$ astfel încât a, b sunt invers proporționale cu c, d .

Să se arate că $m_a(a, b) \cdot m_g(c, d) - m_a(c, d) \cdot m_g(a, b) = 0$, unde prin $m_a(.,.)$ respectiv, $m_g(.,.)$ am notat media aritmetică respectiv, media geometrică a două numere din $\mathbb{Q}_+^*$. **Prof. Neculai Stanciu**

G:140. Arătați că, dacă un număr este suma a două pătrate, atunci dublul și pătratul lui sunt de asemenea suma a două pătrate. **Prof. Luca Tuță**

G:141. În triunghiul ABC, M este mijlocul laturii [BC] și D un punct oarecare pe latura [AC]. Arătați că

$$A_{ABD} = 2A_{AMD}.$$

Prof. Ion Radu

G:142. Arătați că orice patrulater convex în care măsurile unghiurilor, luate în ordine, sunt direct proporționale cu patru numere naturale consecutive, este trapez. **Prof. Simion Marin**

G:143. Pe segmentul [AB] se ia punctul C și de aceeași parte a dreptei AB se iau punctele D, E, F astfel încât, triunghiurile ACD, BCE și ABF să fie echilaterale.

a) Arătați că triunghiurile DCE și EFD sunt congruente

b) Stabiliți valoarea raportului $\frac{AC}{CB}$, știind că $DE \parallel AB$. (Dată la concursul taberei de matematică de la Poiana Pinului, 4 septembrie 2009)

Prof. Grigori Marin

G:144. Arătați că dacă în triunghiul ABC măsurile unghiurilor exterioare cu vârfurile în A, B și C sunt direct proporționale cu numerele 15, 20 și respectiv 25, atunci $BC = 2AB$. **Prof. Simion Marin**

G:145. În triunghiul ABC, [AM] și [BN] sunt mediane astfel încât triunghiul GBM este echilateral de latură 6 cm unde {G} este centrul de greutate al triunghiului. a) Calculați perimetrul și aria triunghiului ABC;

b) Arătați că $A_{GMCN} = \frac{A_{ABC}}{3}$.

Prof. Gheorghe Dârstaru

Clasa a VIII-a

G:146. Arătați că următoarea egalitate este adevărată pentru orice a număr real:

$$\frac{1+2+\dots+2008}{1004} + a^2 + 2a\sqrt{2009} + (3+a+\sqrt{2009})^2 + (5+a+\sqrt{2009})^2 + (6+a+\sqrt{2009})^2 = (1+a+\sqrt{2009})^2 + (2+a+\sqrt{2009})^2 + (4+a+\sqrt{2009})^2 + (7+a+\sqrt{2009})^2.$$

Prof. Ion Radu

G:147. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Să se arate că $(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1) \geq 27abc$. **Prof. Adrian Stan**

G:148. Să se arate că $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} \cdot (4+2\sqrt{3}) \cdot (6-2\sqrt{5}) \cdot 8^{-1} \in \mathbb{N}$.

Prof. Simion Marin

G:149. Să se rezolve în $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sistemul: $\frac{x(y+1)}{x-1} = \frac{y(z+1)}{y-1} = \frac{z(x+1)}{z-1} = 6$.

Prof. Neculai Stanciu

G:150. Determinați mulțimea $A = \left\{ x \mid x = \sqrt{n^2 + 7n + 10} \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N} \right\}$ (dată la concursul taberei de matematică de la Poiana Pinului, 4 septembrie 2009).

Prof. Dumitru Samoilă

G:151. Aflați $x \in \mathbb{Z} - \{1\}$, știind că $\left[\frac{2x}{3} \right] = \frac{x+1}{x-1}$, unde [a] este partea întreagă a numărului a. (dată

la concursul taberei de matematică de la Poiana Pinului, 4 septembrie 2009).

Prof. Gabriela Toader

G:152. În tetraedrul ABCD se cunosc $AC=CB=BD=DA=10$ cm, M mijlocul lui $[AB]$, măsura unghiului diedru format de planele (ACD) și (MCD) este de 30° și distanța dintre dreptele AB și CD este de $4\sqrt{3}$ cm. Se cere:

a) Aria și volumul tetraedrului; b) $\sin[m(\widehat{ABC}, \widehat{ABD})]$. **Prof. Gheorghe Dârstaru**

G:153. Pe planul triunghiului echilateral ABC cu latura de lungime $2a$ se ridică în punctul A o perpendiculară pe care se ia punctul S astfel ca $SA=a$. Să se calculeze:

a) distanța de la punctul A la planul (SBC);
b) Măsura unghiurilor diedre formate de planele (SBD) și (SBC) cu planul bazei. **Prof. Luca Tuță**

G:154. Considerăm tetraedrul VABC și tetraedrul determinat de centrele de greutate ale fețelor sale, $G_1G_2G_3G_4$. Aflați raportul lungimilor muchiilor corespunzătoare celor două tetraedre.

Prof. Ion Stănescu

▪ LICEU

Clasa a IX-a

L:69. Dacă $a, b \in \mathbb{R}^*$ și $9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) - 60\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 118 \leq 0$ atunci, să se arate că $a=3b$ sau $b=3a$.

Prof. Adrian Stan

L:70. Arătați că 2009 divide $1^{2007} + 2^{2007} + \dots + 2008^{2007}$.

Prof. Neculai Stanciu

L:71. Fie numărul $a = \underbrace{111\dots11^2}_{2010 \text{ cifre}} + \underbrace{222\dots22^2}_{2010 \text{ cifre}} + \dots + \underbrace{999\dots99^2}_{2010 \text{ cifre}}$. Să se demonstreze că $(2a+100):2010$.

Prof. Adrian Stan

L:72. Pentru fiecare număr $x \in \mathbb{R}$, se consideră în planul raportat la un sistem de coordonate XOY punctele $A_x(0, x+1)$, $B_x(0, -2x-3)$, $C_x(x-2, 0)$. Se cere:

a) Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{aria } A_x B_x C_x$;
b) Aflați aria triunghiului $A_1 B_1 C_1$.

Prof. Constantin Dinu

L:73. Să se demonstreze că primele n cifre de după virgulă ale numărului $\sqrt{\underbrace{999\dots9}_{n \text{ cifre}} \underbrace{c_1 c_2 \dots c_n}_{n \text{ cifre}}}$, unde $c_1, c_2,$

$\dots, c_n$ poate fi orice cifră nenulă, se pot calcula cu relația $\frac{c_i + 9}{2}, 1 \leq i \leq n$.

Prof. Ciprian Cheșcă

L:74. Să se rezolve ecuația $\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-bc}{b+c} + \frac{x-ca}{c+a} = a+b+c, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

Prof. Gabriel Andrei

Clasa a X-a

L:75 Să se rezolve în mulțimea numerelor reale sistemul:
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x+z} = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 64 \\ 3^{\lg|y| - \lg z} = 1. \end{cases}$$
 Prof. Constantin Dinu

L:76. Pentru $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, arătați că $(1 + \cos x)^{2009} + (1 - \cos x)^{2009} \leq 2^{2009}$.

Prof. Constantin Dinu

L:77. Să se arate că $(a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 \geq 48(\sqrt[3]{abc})^4, \forall a, b, c \in \mathbb{R}_+$.

Prof. Adrian Stan

L:78. Să se arate că în orice triunghi ascuțit unghic există relația $\sin A + \sin B + \sin C > 2$.

Prof. Ciprian Cheșcă

L:79. În reperul cartezian XOY se consideră punctul $A(4;0)$ și dreptele de ecuații:

(d1): $2x+y+2=0$ și (d2): $3x-y-2=0$. Să se găsească punctele $B \in d_1$, $C \in d_2$ astfel încât d_1 să fie înălțime iar d_2 să fie mediană în triunghiul ABC.

Prof. Gabriel Andrei

L:80. Fie $f: R \rightarrow R$, $f\left(\frac{1}{1-10^{x-1}}\right) = x-1$, $\forall x \in R - \{1\}$. Să se calculeze $f(2)+f(3)+\dots+f(100)$.

Prof. Adrian Stan

L:81. Să se calculeze expresia $E = \frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-3} + b^{-3}} : \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2 - 3ab} \cdot \left(\frac{a^2 - b^2}{a \cdot b}\right)^{-1}$ pentru $a = 1 - \sqrt{2}$ și $a = 1 + \sqrt{2}$.

Prof. Natalia Pleșu

L:82. Să se rezolve în R^+ : $\sqrt{2 \cdot x} + \sqrt{3 \cdot (x+1)} + \sqrt{4 \cdot (x+2)} + \dots + \sqrt{2010 \cdot (x+2008)} = \frac{2009}{2}(x+2010)$.

Prof. Gheorghe Strutu, Ligia Struțu

Clasa a XI-a

L:83. Fie $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \in M_2(R)$ și mulțimea $E = \{X(a) | X(a) = I_2 + aA\}, \forall a \in R$.

a) Să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X((a+1)(b+1)-1), \forall a, b \in R$.

b) Să se calculeze $X(1) \cdot X(2) \cdot X(3) \cdot \dots \cdot X(2009)$.

Prof. Adrian Stan

L:84. Un determinant de ordinul trei are -1 pe diagonala principală, iar suma elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană este -2. Determinați valoarea maximă posibilă a acestui determinant.

Prof. Constantin Dinu

L:85. Să se scrie ecuațiile laturilor unui pătrat ABCD știind că punctul A este de coordonate A(2;0), B este situat pe dreapta OY și centrul său este situat pe prima bisectoare.

Prof. Manuela Apostol

L:86. Un triunghi are un vârf A(0;2) și două mediane de ecuații $2x+y-2=0$ și $5x+4y+1=0$. Să se scrie ecuațiile laturilor triunghiului.

Prof. Manuela Apostol

L:87. Fie funcția $f: D \subset R \rightarrow R$, $f(x) = \frac{3-x}{5-3x}$, unde x este ales astfel încât să aibă sens

$f_n(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ factori}}(x), \forall n \in N^*$. Să se determine $f_n(x)$.

Prof. Neculai Stanciu

L:88. Fie A, B două matrice pătratice de ordinul trei cu proprietatea că $A+B=A \cdot B$. Să se demonstreze că $A \cdot B = B \cdot A$.

Prof. Daniela Dibu

L:89. Să se calculeze limita: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 4k + 5}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+2)!}$.

Prof. Gheorghe Strutu, Ligia Struțu

Clasa a XII-a

L:90. Fie $N = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2008 - 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2007$. Arătați că 2009 divide pe N. Generalizați rezultatul.

Prof. Neculai Stanciu

L:91. Se consideră funcția continuă $f: [1;9] \rightarrow R$, care satisface egalitatea $\int_1^3 f^2(x^2)dx - 2 \int_1^3 f(x^2)dx = \int_1^9 f(x)dx - \frac{56}{3}$. Să se calculeze $\int_1^3 [f(x^2) - (x+1)]^2 dx$.

Prof. Constantin Dinu

L:92. Fie a un număr real pozitiv și nenul. Să se demonstreze că $\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0$. **Prof. Ciprian Cheșcă**

L:93. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $2f(x^2-3x+2) - f(x^2+3x+2) = 4x^2-12x+7, \forall x \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $f(1) \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^{-1}$. **Prof. Adrian Stan**

L:94. Să se calculeze: $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \cos 2x}{(1 + \sin^2 x)(1 + \sin^2 2x)} dx$. **Prof. Neculai Stanciu**

L:95. Să se calculeze integralele: a) $\int_1^e \left(2 - \frac{1}{x} \right) \cdot e^{2\ln x + \frac{1}{x}} dx$; b) $\int_0^1 \frac{25^x}{(5+5^x)^{2009}} dx$; **Prof. Adrian Stan**

L:97. Se dă funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{8+x-6\sqrt{x-1}}, x \in D$.

a) Să se determine D ; b) Să se găsească o primitivă F a funcției f cu proprietatea $3F(2)+F(13)=1+16\sqrt{3}$.

Prof. Daniela Dibu

**O glumă matematică bună este totodată și
matematica cea mai bună”.**
Jhon E. Littlewood

6. Caleidoscop matematic

1. Trecerea peste râu.

Un mic detașament de militari trebuia să treacă peste un râu. Podul era rupt, iar râul adânc. Ce era de făcut ? Deodată ofițerul zări lângă mal doi copii care se jucau cu o barcă. Barca era însă tare mică și nu putea să țină decât un singur soldat, sau pe cei doi copii. Totuși, soldații au trecut râul cu ajutorul acestei luntrișoare. Cum au trecut râul soldații ?

(Din cartea „Matematici K-N Povești” de Ana Panaitescu)

2. Ridicarea la pătrat a unui număr format din două cifre.

Orice număr îl putem ridica la pătrat dacă respectăm următorii pași:

Exemplu: $57^2 = \dots 3249$

Pasul I: ridicăm la puterea a doua cifra zecilor, $5^2 = 25$

Pasul II: ridicăm la puterea a doua cifra unităților, $7^2 = 49$

Pasul III: înmulțim cifrele numărului întrec ele, $5 \cdot 7 = 35$

Pasul IV: rezultatul de mai sus se înmulțește cu doi, $35 \cdot 2 = 70$

Acest număr se înmulțește cu 10 și se adună cu numărul format prin alipirea numerelor de la pașii 1 și 2. $700 + 2549 = 3249$

3. Bertrand Russell și Papa de la Roma.

Un filozof îl întreabă pe marele matematician Bertrand Russell cum este posibil ca dintr-o afirmație falsă se poate deduce oricare altă afirmație.

- Dumneavoastră considerați, într-adevăr, că din afirmația $2+2=5$, înseamnă că sunteți Papa de la Roma?

- Desigur!, răspunse cu fermitate matematicianul.

- Să presupunem, că $2+2 = 5$. Atunci, să scădem din ambele părți un doi. Se obține $2=3$; Cum relația de egalitate este una simetrică, putem scrie $3=2$ și scăzând câte o unitate din fiecare parte se obține $2=1$.

- Așadar, Papa de la Roma și eu, împreună suntem doi. Deoarece $2=1$, atunci Papa de la Roma și eu suntem una și aceeași persoană. Deci eu sunt Papa de la Roma.

4. $1 = 2 ?$

$$a = x$$

$$a+a = a+x$$

$$2a = a+x$$

$$2a-2x = a+x-2x$$

$$2(a-x) = a+x-2x$$

$$2(a-x) = a-x \quad | : (a-x) \Rightarrow$$

$$2 = 1$$

16	3	2	
		11	8
9	6	7	12
4			1

5. Completați spațiile libere din pătratul magic de mai sus al lui **Albrecht Durer(1471-1528)**, inclus în gravura sa „Melancolia”.



“Concluzia este un orizont adus aproape
și privit de departe”.

7. Poșta redacției

Dragi cititori, elevi și profesori, a apărut al patrulea număr al revistei de matematică „**SCLIPAREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noștri, și care, sperăm noi, va aduna tot mai mulți elevi și profesori împreună, din județul Buzău și nu numai, pentru a face din obiectul matematicii o activitate performantă.

Toți aceia care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, exerciții și probleme cu enunț și rezolvare completă, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătăți calitatea acestei reviste, o pot face trimițând materialele membrilor colectivului de redacție sau pe adresa redacției Grupul Școlar „Costin Nenițescu”, Buzău, Str. Transilvaniei, nr. 134, Cod. 120012, Tel. 0238725206, cu mențiunea Pentru revista de matematică „SCLIPAREA MINTII”. De asemenea se pot trimite pe adresa de mail: **ady_stan2005@yahoo.com**, fie materiale tehnoredactate, fie scrise de mână și scanate.

Elevii care doresc să trimită rezolvările problemelor trebuie să ia legătura cu profesorii lor și să respecte condițiile ca fiecare problemă să fie rezolvată pe o singură foaie cu specificarea numărului problemei, și a autorului ei, iar la sfârșitul soluției să-și treacă numele și prenumele, clasa și profesorul său, școala și localitatea. (Indicativele **P**, **G** și **L** sunt pentru diferențierea pe învățământ primar, gimnazial respectiv liceal) Fiecare elev poate rezolva și trimite problemele destinate clasei în care se află și pe cele ale ultimelor două clase imediat inferioare precum și pe cele din clasele superioare. Fiecare rezolvare corectă și completă se va nota cu un punct iar elevii cu cele mai mari punctaje vor fi menționați în revistă, urmând să fie premiați cu diplome și cărți.

Data finală până când profesorii și elevii pot trimite materialele și rezolvările complete pentru **numărul 5** al revistei „**SCLIPAREA MINTII**” va fi **1 Martie 2010**. Vă urăm succes și vă așteptăm.

Redacția

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Scoala cu clasele I-VIII "Vasile Cristoforeanu" Rm. Sărat:

Clasa a V-a: 10p- Pațurcă Florina, Haraniță Bianca, Stan Andra, Șteafă Natalia, Istrate Adriana, Sandu Andrei, Abdulac Alexandru, **Prof. Miconi Elena;**

Clasa a VI-a : 20p-Buterez David, Sirbu Claudiu, 15p- Chiriac Andrei,Doni Alina, 14p- Pârlog Valentin, Baci Diana Valentina, Tudorache Alina, Neagu Daniela, Lazăr Elena ,Vlad Oana Andreea, Tașcă Valentin, 10p- Banu Calinuț , Radu Miruna , Puiu Nicolae, Drăghici Adrian Sorin ,Constantin Alexandra, Pastramă Mihai, Prof. Marin Simion, Vlădoi Daniel, Solomon Miruna, Șerbu Liviu, Drăghici Mădălin, **Prof. Lungu Viorica;**

Clasa a VII-a : 12p- Sitaru Bogdan, Andronescu Alexandra, 11p- Tatu Horațiu Ștefan, Ursică Bogdan, Chiriac Corina, Barbu Ionelia, Bedereag Valentina, Liciu Sabrina, Iaru Manea, Rîpeanu Andra, 10p- Marcu Ana Maria, Pelin Geanina, Railenu Mirel, Marcu Iulian, Matei Relu, Durbacă Florin, Dumitru Ovidiu, Iancu Silviu, Popescu Alexandru, Pîslaru Diana, Pleșa Adina Nicoleta, Lăcustă Denisa, Căldararu Andreea, Andronache Cristina, Petreanu George, Panaete Andrei Costel, Taraze Andreea, Stoian Adriana, Calcan Robert, Manea Cosmin,

Clasa a VIII-a : 8p- Iuga Alexandru Costin, Alexandrescu Mihai, Țurloiu Sergiu, Zamfir Ionuț, Tatu Alexandru, Potcoavă Patrik, Răduță Denisa, Tănase Diana, Andronache Ionuț, Zidaru Mădălina Cristina, Bălescu Valentin, 7p-Andronache Lorena, Ion Cristian, Grosu Daniel, Stanciu Ionuț, Onică David, Jipianu Alexandra Andreea, Stan Daniel, Toma Iulian, Manolescu Paula, Pucleanu Elena. **Prof. Marin Simion, Târhoacă Mădălin, Prof. Miconi Elena.**

Scoala cu clasele I-VIII, nr. 8, " Valeriu Sterian" Rm. Sărat:

Clasa a VII-a: 14p-Alecu Cristian, Dumitru Dragoș, 12p-David Alexandra, Ionescu Cătălin, Dinică Mariana, Ion Adina, Stoian Ionela, 10p-Gheorghe Denisa, Necula Cătălina, Preda Gabriela, Dobroiu Nadia;

Clasa a VIII-a: 16p-Aktug Nebahad, Untea Alice, **Prof Panaitescu Ana.**

Scoala cu clasele I-VIII, nr.6, Buzău:

Clasa a VII-a: 10p-Anton Bogdan, Bolovan Mihaela, Erimia Razvan, Ionita Mihai, Mălinache Nicolae, Manea Costin, Manolache Adina, Tătuțescu Robert, Diaconu Nicolae, Galan Lorena, Zăinescu Alexandra, Grigore Ana Maria, Grigore Marius, Lalu Marina, Manailă Ionuț, Mesca Vladuț, Milea Marius Augustin, Musat Alin, Popescu Letitia, Scurtui Alexandru, **Prof. Stanciu Neculai.**

Scoala cu clasele I-VIII nr. 15, „George Emil Palade”, Buzău:

Clasa a VII-a: 10p-Adam Anca Nicoleta, Aldea Teodora, Clinceanu Loredana, Enică Sebastian, Grozea Cosmin, Lișman Simona, Marin Andrei, Rînciog Cătălina, Sterea George, Țiru Maria, Mocanu Daniel; **Clasa a VIII-a:** 12p-Ene Cătălin, Radu Jonathan, Roșu Florin, Drăgușin Gabriela, Marin Iuliana, Marin Larisa, Panait Alexandru, **Prof. Stanciu Neculai.**

Scoala cu clasele I-VIII Smeeni:

Clasa a V-a: 9p- Ciurea Monica; 8p- Bulgărea Alexandra, Dumitrașcu Nicu, Păun Dragoș, Oprea Gabriela, Ionașcu Daniel;

Clasa a VI-a: 14p- Scarlat Roxana ; 12p- Marin Valentina, Vasile Cristina, Costică Alexandra, Velicu Gabriel, Popa Ramon, Minea Diana. **Clasa a VII-a:** 13p- Dragomir Alexandru; 12p- Bărzoii Mădălina, Cristea Maria, Chivu Gabriela, Horneț Andreea. **Clasa a VIII-a:** 14p- Buzatu Camelia, 10p- Marin Ana, Dumitru Cristina, Lică Silviu, Damian Daniel. **Prof. Stănescu Ion.**

Scoala cu clasele I-VIII, nr.1 Nehoiu:

Clasa a VIII-a: 12p- Petre Antonia; **Clasa a VI-a:** 12p- Irimia Mălina, **Prof. Prefac Vasile.** Petre Andreea, **Prof. Prefac Maritanța.**

Liceul de Artă „Margareta Sterian”, Buzău:

Clasa a V-a: 10 p- Constantin Alexandra, Țuclea Laura, Argăseală Gabriela, Velea Roxana, Stanciu Georgian, **Clasa a VI-a:** 11p- Cristea Irina, Stanciu Adelina; **Clasa a IX-a:** 12 p- Dumitrache Emanuel, Mititelu Aurora, Enescu George, Vasile Smaranda, **Clasa a X-a:** 10p- Ciomag Alina, Costache Raluca, **Prof. Dibu Daniela.**

Scoala cu clasele I-VIII Potoceni:

Clasa a V-a: 8p- Anton Cristina, Bereveanu Anca, Catinca Andreea, Uancu Răzvan, Păduraru Bianca,;
Clasa a VI-a: 12p- Câmpeanu Bianca Andreea, Lunțaru Denisa, Păduraru Alexandra, Scânteii Bianca, Caloian Bogdan;
Clasa a VII-a: 13p- Câmpeanu Iulian, Popescu Mirela, Sava Ionuț, Soare Anelis, Trentea Daniel, **Prof. Moise Violeta**

Colegiul Economic Buzău:

Clasa a IX-a: 10 p- Marin Adina, Mândruță Alina; **Clasa a XII-a:** 12 p- Păduraru Georgiana, **Prof. Dinu Constantin.**

Grupul Școlar „ Costin Nenitescu”, Buzău:

Clasa a IX-a: 12p- Zaharia Mădălina, Șolcă Claudia, Bisocanu Aura, 10p- Sava Mihai, Potârniche Iancu, Scarlat Sabina, Banu Monalisa, Neagoe Tatiana, Barbu Adriana, Crăciun Alexandru, Soare Manuela, Caravan Raluca, Radu Mihai, Stănilă Andreea, Duță Giorgia, Aliman Roxana, Grecu Violeta, **Prof. Stan Adrian.** Borcău Georgiana, **Prof.**

Pleșu Natalia; Cristian Daniel, Poteraș Luca, **Prof. Cheșcă Ciprian,** Olteanu Robert, Frățiloiu Adrian, Bucur Liviu, Feraru Viorel, **Prof. Popescu Florentina.**

Clasa a X-a: 10p- Vlad Iulian, Cojanu Maria, Dinu Alin, Vlad Ana Maria, Dima Octavian, Hurloi Maria, Anghel Sorin, Baicu Babriel, Nica Elena, Sandu Elena, Bucur Marilena, Lalu Marusia, Ionescu Mirela, Antemir George, Ion Adriana, Ungureanu Cristina, Ilie Mădălina, Ionescu Mirela, Glăvan Roxana, Berechet Ionuț, Șerban Nicoleta, Pârvan Elena, Sterian Georgeta, Grigore Mariana, Coman Cătălin, Grigore Mariana, Deliu Ana Maria, Budea Claudiu, Drăgulin Elena, Vărlan Alexandra, Modoran Georgiana, Avram Andreea, Radu Nicoleta, Mocanu Mihai, Mărăcineanu Ionuț, Trandafir Elena, Andrei Cosmin, Stroe Bogdănel, **Prof. Stan Adrian.**

Clasa a XI-a: 9p- Bunea Ana Maria, 8p- Pascociu Alina, Vintileanu Violeta, Mihai Andreea, Toma Remus, Popa Octavian, Vlad Cristinel, Arcan Marius, Mintoiu Mădălina, Ghican Elena, **Prof. Stan Adrian.** Iordache Mariana, Ispas Alina, Semian Ionela, Iordache Ioana, Anghel Cristina, **Prof. Pleșu Natalia;** **Clasa a XII-a:** 12p-Burlacu Alexandra, Tudor Maria, Ungureanu Florin, **Prof. Pleșu Natalia;**

Grupul Școlar Tehnic „ Sfântul Mucenic Sava”, Berca:

Clasa a V-a: 8p- Neacșu Teodor, Dascălu Andreea, Vlad Mădălin, Pascu Bianca, Țiboacă Doina, Neagu Cezar, Bratu Raluca, Bahudu Roxana, Vasile Nichi, Panaete Alexandra, Dinu Andrei, Alecsandrescu Daniel, Leițoiu Elena, Leițoiu Adrian, Zidar Maria, Dascălu Denisa, Diaconu Otilia, Dinu Raluca, Iancu Alexandra, Iolea Alexandru, Pascu Maria, Răican Iuliana, **Prof. Lușan Rodica,** Pascu Alin, Mușat Cătălin, **Prof. Berca Vasile.**

Clasa a VII-a: 12p- Dinu Cristian, Dodan Anca, Ștefan Denisa, Neacșu Iuliana, Pascu Miruna, Șeremet Alin, **Prof. Berca Vasile.**

Clasa a VIII-a: 18p- Dragomir Florin, Anton George, Dogaru Iulian, Coman Eleonora, Ciocan Marian **Prof. Dârstaru Gheorghe,** Dodan Bogdan, **Prof. Berca Vasile.**