



„MATEMATICA ESTE CEEA CE ÎNCEPE, CA ȘI NILUL  
ÎN MODESTIE ȘI SE TERMINĂ ÎN MAGNIFIC”  
CALVIN COLTON

## 1. Istoria matematicii

### 1. Scurt istoric – *Fibonacci*.

de Roxana Mihaela Stanciu

#### 1.1. Cine a fost *Fibonacci*?

*Fibonacci* (1175-1240) a fost unul dintre cei mai mari matematicieni ai evului mediu. S-a născut în Italia, în orașul Pisa, faimos pentru turnul său înclinat, care parcă stă să cadă.

Tatăl său, *Bonacci Pisano*, a fost ofițer vamal în orașul Bougie din Africa de Nord, astfel că *Fibonacci* a crescut în mijlocul civilizației nord-africane. A cunoscut astfel mulți negustori arabi și indieni (deoarece a făcut multe călătorii pe coastele Mediteranei) de unde a deprins știința lor aritmetică, precum și scrierea cifrelor arabe.

#### 1.2. Cărțile lui *Fibonacci*.

În 1202 revine în Italia unde publică un tratat de aritmetică și algebră intitulat “*Incipit Liber Abacci*” (compositus a *Leonardo filius Bonacci Pisano*). În acest tratat introduce pentru prima dată în Europa sistemul de numerație arab, cifre pe care le folosim și în zilele noastre: 0, 1, 2, 3, ..., 9.

În 1220 publică “*Practica Geometriae*”, un compendiu de rezultate din geometrie și trigonometrie, apoi în 1225 “*Liber Quadratorum*” în care studia calculul radicalilor cubici. Cărțile lui *Fibonacci* au cunoscut o largă răspândire așa încât timp de peste două secole au fost considerate sursele cele mai competente în domeniul numerelor.

#### 1.3. Șirul lui *Fibonacci*. Numele *Fibonacci*.

*Fibonacci* a rămas în memoria noastră prin șirul : 0, 1, 1, 2, 3, ... introdus în anul 1202, atunci matematicianul fiind sub numele de *Leonardo Pisano* (*Leonard din Pisa*).

Mai târziu, matematicianul însuși și-a spus *Leonardus Filius Bonacii Pisanus* (*Leonard fiul lui Bonaccio Pisanul*). În secolul al XIV-lea șirul prezentat mai sus a fost denumit șirul lui *Fibonacci* prin contracția cuvintelor *filius Bonacii*. Acest șir apare pentru prima dată în cartea menționată mai sus “*Liber Abaci*” (“*Cartea despre abac*”), fiind utilizat în rezolvarea unei probleme de matematică.

#### 1.4. Icusința lui *Fibonacci*. Problema iepurilor.

#### Originea șirului *Fibonacci*.

Potrivit obiceiului din acea epocă, *Fibonacci* a participat la concursuri matematice (adevărate dispute publice) pentru cea mai bună și mai rapidă soluție a unor probleme grele (ceva în genul Olimpiadelor Naționale). Icusința de care dădea dovadă în rezolvarea problemelor cu numere uimise pe toată



lumea, astfel că reputația lui *Leonardo* a ajuns până la împăratul Germaniei, *Frederik al II-lea*. La un concurs prezidat de acest împărat una din probleme date spre rezolvare a fost: “să se găsească un pătrat perfect, care să rămână pătrat perfect dacă este mărit sau micșorat cu 5”. După un timp scurt de gândire *Fibonacci* a găsit

numărul  $\frac{1681}{144} = \left(\frac{41}{12}\right)^2$ . Întradevăr:

$$\frac{1681}{144} - 5 = \frac{961}{144} = \left(\frac{31}{12}\right)^2 \text{ și}$$

$$\frac{1681}{144} + 5 = \frac{2401}{144} = \left(\frac{49}{12}\right)^2. \text{ Nu se știe raționamentul}$$

lui *Fibonacci* dar, toate încercările, chiar și cele mai ingenioase, de a rezolva această problemă cu ajutorul algebrei, duc în cel mai bun caz la o ecuație cu 2 necunoscute.

La un alt concurs prezidat de împărat problema propusă concurenților suna astfel:





“Plecând de la o singură pereche de iepuri și știind că fiecare pereche de iepuri produce în fiecare lună o nouă pereche de iepuri, care devine productivă la vârsta de o lună, calculați câte perechi de iepuri vor fi după n luni (se consideră că iepurii nu mor în decursul respectivei perioade de n luni)”.

*Soluție.* Din datele problemei rezultă că numărul perechilor de iepuri din fiecare lună este un termen al șirului lui **Fibonacci**. Într-adevăr, să presupunem că la 1 ianuarie exista o singură pereche fertilă de iepuri. Notăm cu 1 perechea respectivă. Ea corespunde numărului  $f_2$  din șirul lui Fibonacci:

$$f_2 = f_0 + f_1 = 0 + 1 = 1.$$

La 1 februarie, mai există o pereche pe care o notăm 1.1. Deci în acest moment sunt două perechi, ceea ce corespunde termenului:

$$f_3 = f_1 + f_2 = 1 + 1 = 2.$$

La 1 martie sunt 3 perechi, două care existau în februarie și una nouă care provine de la perechea numărul 1 (se ține seama că o pereche devine fertilă după două luni). Notăm cu 1.2 această nouă pereche. Numărul perechilor din această lună corespunde termenului:

$$f_4 = f_2 + f_3 = 1 + 2 = 3.$$

La 1 aprilie există 5 perechi și anume: trei perechi existente în luna martie, o pereche nouă care provine de la perechea 1 și o pereche nouă care provine de la perechea 1.1 care la 1 martie a devenit fertilă (pereche pe care o notăm cu 1.1.1). Numărul perechilor din această lună corespunde termenului:

$$f_5 = f_3 + f_4 = 2 + 3 = 5.$$

Termenii din această relație se interpretează astfel:

$$f_4 = \text{numărul perechilor existente în luna precedentă};$$

$f_3$  = numărul perechilor noi (provin de la perechile existente în luna anteprecedentă).

Procedând în continuare în acest fel, vom deduce că la data de 1 decembrie numărul perechilor este dat termenul:

$$f_{13} = f_{11} + f_{12} = 89 + 144 = 233,$$

iar la 1 ianuarie anul următor există:

$$f_{14} = f_{12} + f_{13} = 144 + 233 = 377 \text{ perechi de iepuri.}$$

Concluzia este următoarea:

Dacă notăm cu  $f_n$  numărul de perechi de iepuri după  $n$  luni, numărul de perechi de iepuri după  $n + 1$  luni, notat cu  $f_{n+1}$ , va fi  $f_n$  (iepurii nu mor niciodată!), la care se adaugă iepurii nou-născuți. Dar iepurașii se nasc doar din perechi de iepuri care au cel puțin o lună, deci vor fi  $f_{n-1}$  perechi de iepuri nou-născuți.

Obținem astfel o relație de recurență:

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \text{ care generează termenii șirului lui Fibonacci.}$$

**Observație.** Acest șir exprimă într-un mod naiv creșterea populației de iepuri. Se presupune că iepurii au câte doi pui o dată la fiecare lună după ce împlinesc vârsta de două luni. De asemenea, puii nu mor niciodată și sunt unul de sex masculin și unul de sex feminin.

**Bibliografie:**

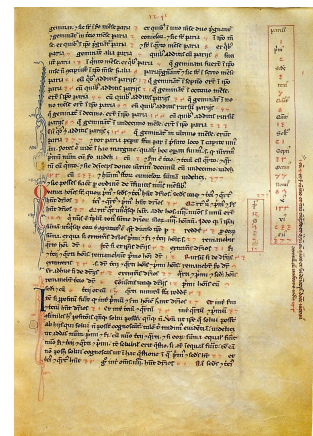
- [1] Gazeta matematică 1895 – 2007 (ediția electronică)

**Prof. ,  
Grup Școlar de Meserii și Servicii, Buzău**

**Știați că.....**

**Fibonacci** (Leonardo Pisano) a perfecționat regula de adunare a fracțiilor prin aducerea lor la cel mai mic multiplu comun și a dat criterii de divizibilitate pentru numerele 2, 3, 5, 9.

Sistemul zecimal de scriere arab a fost făcut cunoscut în Europa îndeosebi de lucrarea sa, **Liber Abaci**(1202), prin care a transpus din arabă în latină cunoștințele învățate de la matematicienii arabi în perioada cât a stat în nordul Africii. Tot el a introdus noțiunea de algoritm și denumirea pentru numărul zero.



Pagină din manuscrisul „Liber Abaci”





## 2. Articole și note matematice

### Câteva probleme de minim în geometrie

de prof. Adrian Stan

1. Definiție: **Distanța dintre două puncte** din plan A și B este dată de lungimea segmentului AB. (notăm AB sau  $d(A,B)$ ).

Proprietăți:

- $d(A, B) \geq 0$ , pentru orice A și B din plan.
- $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ .
- Pentru orice trei puncte din plan A, B, C, există relația:  $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$ .

2. Definiție: **Distanța de la un punct la o dreaptă** este lungimea segmentului determinat de punct și de piciorul perpendicularei dusă din punct pe dreapta respectivă.

Proprietăți.

Cea mai mică distanță de la un punct A la un punct oarecare B de pe o dreaptă este dată de distanța de la punct la proiecția lui ortogonală pe dreaptă.

Pentru a calcula distanța de la punctul A la dreapta BC se pot utiliza metodele:

- cu ajutorul relațiilor metrice;
- cu ajutorul relațiilor de congruență între triunghiuri;
- cu ajutorul ariei triunghiului din care face parte distanța, ca înălțime;
- cu ajutorul calculului minimului segmentului AM pentru M oarecare pe BC.

3. Definiție: **Distanța dintre un punct și un plan** este lungimea segmentului determinat de punct și de plan pe perpendiculara dusă din acel punct pe plan.

Proprietăți.

Cea mai mică distanță de la un punct A la un punct oarecare B din plan este dată de distanța de la A la proiecția lui ortogonală pe plan.

Pentru a calcula distanța de la un punct A la un plan (BCD) se pot utiliza metodele:

- cu ajutorul relațiilor metrice;
- cu ajutorul relațiilor de congruență între triunghiuri;
- cu ajutorul calculului înălțimii în tetraedrul ABCD;
- cu ajutorul calculului minimului segmentului AO pentru O oarecare pe planul (BCD).

4. Definiție: **Distanța dintre două drepte** (în plan respectiv spațiu) este dată de lungimea segmentului determinat pe perpendiculara comună celor două drepte.

Proprietăți:

- Dacă dreptele d, g sunt paralele, atunci distanța dintre ele este egală cu distanța de la un punct de pe d la cealaltă dreaptă.
- Dacă dreptele d, g sunt necoplanare, atunci distanța dintre ele este egală cu distanța de la d la un plan ce conține dreptele concurente g și h astfel încât h este paralelă cu d.
- Dacă  $d(d,g)=0$ , atunci dreptele g și h sunt secante.

Pentru a calcula distanța dintre două drepte necoplanare din spațiu se poate proceda :

- ținând cont de proprietatea b);
- calculând minimul distanței dintre un punct A de pe d și un punct B de pe g.

5. Definiție: **Distanța de la o dreaptă la un plan**, este distanța de la un punct oarecare de pe dreaptă la planul respectiv.

Proprietăți:

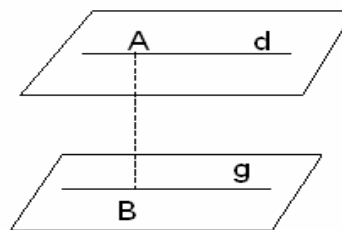
- problema distanței de la o dreaptă d la planul  $\alpha$  se pune atunci când d este paralelă cu planul;
- dacă  $d(A, \alpha)=0$ , atunci dreapta d este inclusă în planul  $\alpha$ .

Pentru a calcula distanța de la o dreaptă la un plan procedăm la a calcula distanța de la un punct oarecare de pe dreaptă la planul respectiv;

6. Definiție: **Distanța dintre două plane paralele**, este distanța dintre un punct aparținând unui plan și celălalt plan;

Proprietăți:

- dacă  $d(\alpha, \beta)=0$ , atunci planele sunt confundate;



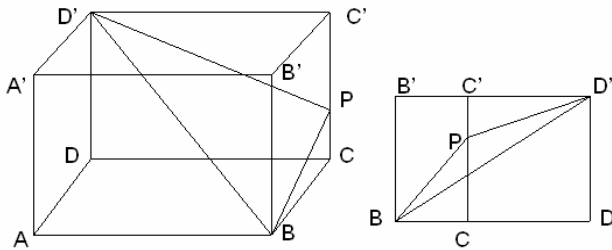


Pentru a calcula distanța dintre planele paralele  $\alpha, \beta$ , se ia un punct A pe planul  $\alpha$  și se calculează  $d(A, \beta)$ .

### Aplicații:

1. Într-un paralelipiped dreptunghic ABCDA'B'C'D' se cunosc AB=12, BC=6, AA'=8. Să se determine un punct P pe muchia CC' și să se calculeze lungimea segmentului PC astfel încât perimetrul triunghiului BPD' să fie minim.

Rezolvare:



$P_{BPD'} = BP + PD' + BD'$  e minim dacă suma  $BP + PD'$  e minimă, caz ce se întâmplă când B, P, D' sunt coliniare pe desfășurarea laterală a paralelipipedului. Desfășurând fețele laterale BCC'B' și CC'D'D se observă că  $BP + PD' \geq BD'$  (relația de inegalitate între laturile unui triunghi), cu egalitate  $BP + PD' = BD'$  dacă punctele B, P, D' sunt coliniare.

$$\triangle BCP \sim \triangle BDD' \Leftrightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{BP}{BD'} = \frac{PC}{CC'} \Rightarrow$$

$$\frac{6}{\sqrt{180}} = \frac{PC}{8} \Rightarrow PC = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

2. În piramida regulată VABC se știe muchia laterală de 10 cm și muchia bazei de 12 cm. determinați un punct P pe muchia VA astfel încât perimetrul triunghiului PBC să fie minim.

Rezolvare:

Fie  $P \in VA$ . Cum triunghiul PBC este isoscel ( $BP \equiv PC$ ), are perimetrul minim, dacă PB este minim.

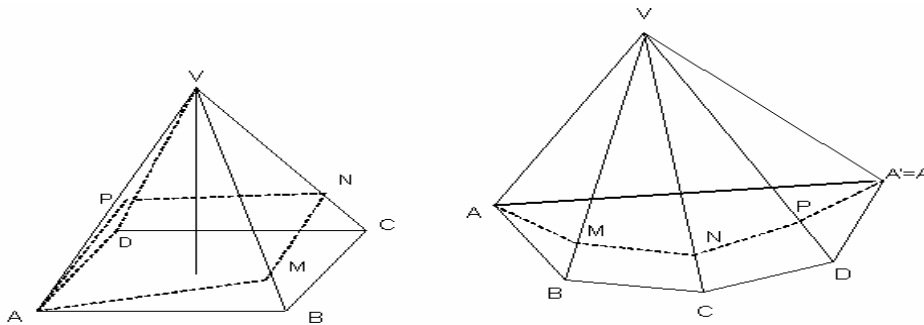
Triunghiul VAB este isoscel cu  $VA \equiv VB = 10$  și  $AB = 12$ ; BP este minim când  $BP \perp VA$ .

Exprimând aria triunghiului VAB în două moduri obținem:  $VA \cdot BP = AB \cdot VM$ , unde M este mijlocul lui AB.

Rezultă  $VM = 8$  și  $BP = \frac{48}{5}$ ,  $P_{PBC} = PB + PC + BC = \frac{96}{5} + 12 = \frac{156}{5}$ .

3. Fie VABCD o piramidă patrulateră regulată cu VA=12 cm, având aria laterală de  $144 \text{ cm}^2$ . Să se determine lungimea celui mai scurt drum ce pleacă din A, parcurge toate fețele laterale și ajunge tot în A.

Rezolvare:



Pe desfășurarea laterală a piramidei se poate evidenția cel mai scurt drum și anume, AA', cu  $A=A'$ .

Lungimea acestuia se poate calcula din triunghiul isoscel VAA', VA=12 cm. Cum aria laterală este 144 atunci aria triunghiului VAB este  $36 \text{ cm}^2$ . Exprimând aria triunghiului VAB și în alt mod se poate scoate

$$\sin(\angle AVB) \Rightarrow A_{VAB} = \frac{VA^2 \cdot \sin(\angle AVB)}{2} \Rightarrow \sin(\angle AVB) = \frac{2 \cdot 36}{144} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$m(\angle AVB) = 30^\circ$ , iar  $m(\angle VAA') = 4m(\angle AVB) = 120^\circ$ . Din V ducem înălțimea VE, unde E este mijlocul lui AA'.

$$AE = VA \cos(\angle VAA') = 12 \cdot \cos 30^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \Rightarrow AA' = 12\sqrt{3}$$





**4. Dacă în triunghiul ABC se cunosc aria sa și măsura unghiului A să se determine ce valori pot lua AB și AC astfel încât BC să fie minimă.**

Rezolvare:

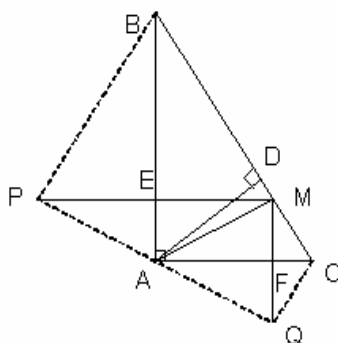
Vom nota cu  $a, b, c$ , lungimile laturilor BC, AC, respectiv AB iar cu  $S$  aria triunghiului. Utilizând Teorema cosinusului se obține:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = (b - c)^2 + 2bc(1 - \cos A)$ .

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A \Rightarrow bc = \frac{2S}{\sin A}; \text{ Rezultă } a^2 = (b - c)^2 + \frac{4S(1 - \cos A)}{\sin A}; \text{ această sumă este minimă când } b = c.$$

Așadar BC este minimă când  $AB = AC = \sqrt{\frac{2S}{\sin A}}$ .

**5. Se dă un triunghi dreptunghic ABC cu  $m(\hat{A}) = 90^\circ$ . Se ia un punct M pe BC și se duc  $ME \perp AB, MF \perp AC$ , și se construiesc simetricile lui M față de AB respectiv AC în punctele P respectiv Q ca în figura de mai jos. Să se determine poziția punctului M pe BC astfel încât perimetrul patrulaterului PQCT să fie minim.**

Rezolvare:



Perimetrul patrulaterului PQCB este minim suma lungimilor  $PB + PQ + QC + BC$  este minimă. Fie AD înălțimea corespunzătoare ipotenuzei.

Cum  $EM \equiv EP$  și  $AB \perp PM \Rightarrow$  triunghiul BPM este isoscel, așadar  $BP \equiv BD$ .

Analog,  $MF \equiv FQ$  și  $AC \perp MQ \Rightarrow MC \equiv QC$

Prin urmare,  $P_{BPQC} = BP + PQ + QC + BC = 2BC + PQ$ . Dar  $AP \equiv AM \equiv AQ \Rightarrow PQ = 2AM$ . Cum BC este fixă iar AM variabilă rezultă că perimetrul lui BPQC este minim când PQ este minimă adică AM este minimă, ceea ce se întâmplă atunci când M este piciorul înălțimii pe ipotenuză, adică atunci când M coincide cu D.

Bibliografie:

- [1]. Gazeta matematică 1895 – 2007 (ediția electronică)
- [2]. Petruș, Alexandrescu (coord.), Matematică, clasa a VIII-a, Editura Paralela 45, 2006.
- [3]. Adrian, Stan; Probleme alese de matematică pentru clasele V-VIII, Ed. Rafet, Rm. Sărat, 2007.
- [4]. I.C. Drăghicescu, V. Masgras, Probleme de geometrie, Editura tehnică București, 1987.

Profesor, GR. ȘC. TH. „Sf. Mc. SAVA”,  
BERCA, BUZĂU.

„Multă lume știe să citească, dar nu știe ce ar trebui să citească”.

M. Trevelyan







### 3. Examene și concursuri

#### TABĂRA INTERJUDEȚEANĂ DE MATEMATICĂ Ediția a XX-a, Bisoca, 22 – 28 august 2007

*Domnului Profesor Constantin Apostol,  
ca semn al stimei mai multor generații*

prezentare de **Neculai Stanciu**

A intrat în tradiția școlii buzoiene, ca, în fiecare an, la sfârșitul vacanței de vară, să se organizeze Tabăra de Matematică. Locul de desfășurare este unul dintre centrele de agrement ale Direcției Județene pentru Tineret Buzău, la Poiana Pinului, Arbănași, Monteoru, iar anul acesta în Campusul PC Pr. Prof. dr. Mihai Milea de la Bisoca. Aceste locuri sunt cu un pitoresc ieșit din comun, având capacități corespunzătoare de cazare și de susținere a lecțiilor de matematică.

Tabăra este deschisă tuturor elevilor interesați de matematică din județul Buzău, dar, în ultimii ani, am primit cu plăcere, și elevi din județele Galați, Brăila, Ilfov și București. Nivelul de predare este în conformitate cu Programa Olimpiadei de Matematică pentru clasele V – VIII.

Programul taberei este astfel întocmit, încât să se realizeze maximum de eficiență: cursurile se predau dimineața, în două ședințe a câte 90 de minute și pentru amiază, elevii au de rezolvat câte o temă. Soluția este notată de către profesorul propunător, și astfel se realizează un clasament cu cei mai buni rezolvatori, sub genericul “Problema Zilei”, aceștia primind diplome și premii. În timpul liber se fac drumeții, se organizează activități sportive, iar seara discotecă.

Activitatea desfășurată de-a lungul a 6-7 zile, se finalizează printr-un test, în urma căruia, jumătate dintre elevi primesc premii. Focul de tăbără, aprins în seara închiderii, lasă amintiri plăcute tuturor participanților, cu gândul revenirii și ... la anu’.

Eforturile mobilizatoare pentru organizarea și desfășurarea exemplară a cursurilor de pregătire intensivă aparțin domnului profesor *Constantin Apostol*.

Problemele date la concurs au fost următoarele:

#### Clasa a V-a,

1. Calculați valoarea lui  $x$ :  $[(x + 480 : 4) \cdot 3 + 8] \cdot 6 = 2370$ .

*Marcela Marin*

2. Într-o livadă sunt 207 pomi fructiferi: meri, peri și nuci. Dacă în livadă ar mai fi 3 nuci, atunci numărul merilor ar fi de două ori mai mare decât numărul nucilor. Numărul perilor este dublul numărului merilor. Câți pomi fructiferi din fiecare fel sunt în livadă?

*Marcela Marin*

3. Produsul vârstelor a 3 frați este 18. Doi sunt gemeni. Cel mai mic are ochii verzi. Ce vârste au cei trei copii?

*Marcela Marin*

4. O orchestra formată din 6 instrumentiști cântă o melodie în 5 minute. În cât timp va cânta aceeași melodie o orchestră formată din 12 instrumentiști, respectând ritmul melodiei ?

*Marcela Marin*

#### Clasa a VI-a,

1. Să se afle suma primelor nouă zecimale ale numărului:

$$a = (5^{30} + 1^{30}) : 5^{30}$$

*Dumitru Mărgineanu*





2. Ionel are o monedă și un automat care returnează, la fiecare monedă introdusă, alte nouă monede. Ionel joacă oricare monedă pe care o are. Este posibil ca el să obțină, la un moment dat, 2007 monede?

Gabriela Toader

3. Comparați numerele  $a$  și  $b$ , știind că :

$$a = 3^{63} - 3^{62} - 3^{60} \text{ și } b = 17^{21}.$$

Simion Marin

**Clasa a VII-a,**

1. Să se determine mulțimea :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \begin{array}{l} x^2 - 9 \\ x + 2 \end{array} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Neculai Stanciu

2. Să se rezolve în  $N \times N$  ecuația :  $3x + 7y = 30$ ;

Luca Tuță

3. În triunghiul  $ABC$  măsura unghiului  $A$  este media aritmetică a măsurilor unghiurilor  $B$  și  $C$ . Fie  $B'$  și  $C'$  picioarele înălțimilor din  $B$ , respectiv din  $C$ , iar  $M$ , mijlocul laturii  $[BC]$ .

a) Determinați măsura unghiului  $A$

b) Arătați ca  $B'C' = B'M$ .

Grigori Marin

**Clasa a VIII-a,**

1. Să se determine lungimea maximă a razei cercului înscris în triunghiul  $ABC$ , cu  $m(\angle A) = 90^\circ$  și

$$BC = 2 + 2\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Constantin Apostol

2. Arătați că :

$$\frac{1}{7} < \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{27^2} < \frac{1}{3}$$

Valentina Ionescu

3. Arătați că oricare ar fi  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , are loc inegalitatea :  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2(x + 3y - 5)$ .

În cazul când are loc egalitatea, ordonați crescător numerele  $x, y, z$ .

Lucica Speciac

**Profesor,  
Grupul Școlar Tehnic "Sf. Mucenic Sava"  
Berca – Buzău**

**"Nu există carte de matematică cu citire ușoară așa după cum nu există nucă fără coajă"**

**O. A. Volberg**





## CONCURSUL DE MATEMATICĂ „SCLIPAREA MINTII”

de prof. Ana Panaitescu

Concursul „SCLIPAREA MINTII”, reprezintă un cadru și totodată un factor de antrenare, coeziune și stimulare a școlilor participante în sensul identificării, analizării promovării de soluții comune, inedite în vederea asigurării unor condiții optime de realizare a concursului antrenant și instructiv pentru elevi, care să pună în valoare cunoștințele obținute în procesul educațional.

Pregătirea unui elev pentru concursurile de matematică este o chestiune complexă, care se realizează în principal prin rezolvarea unui spectru cât mai larg de probleme. Randamentul este cu atât mai mare, cu cât dintr-o problemă, elevul reușește să obțină și să rețină cât mai multe informații. Soluția unei probleme nu trebuie privită ca o simplă înșiruire de implicații, ci ca o sursă de metode și idei care se vor dovedi utile și în alte împrejurări.

„SCLIPAREA MINTII”, are menirea descoperirii de olimpici prin valorificarea capacităților creatoare ale viitorilor performeri. Orice concurs presupune efort, incitare a spiritului, emoție și neliniște, bucuria reușitei și, uneori, necazul neîmplinirii. Indiferent de rezultat, fie elevi sau profesori intră în dialog se cunosc, se apreciază, se înfiripă prietenii durabile.

Început în anul 2006 cu elevii de clasa a V-a, la inițiativa doamnei profesoare Ana Panaitescu, primul concurs s-a desfășurat la școala Bâsca - Rozilei, Nehoiu, elevii gazdă împreună cu profesorii lor Vasile Prefac și Maritanța Prefac, au asigurat un cadru plăcut elevilor participanți de la

Grupul Școlar Tehnic „Sf. Mc. SAVA”, Berca și profesorilor lor Neculai Stanciu, Adrian Stan și de la Școala cu clasele I-VIII nr. 6, Școala cu clasele I-VIII, nr. 8, Rm. Sărat însoțiți de doamna prof. Ana Panaitescu, care au mai vizitat cu această ocazie împrejurimile, barajul de la Siriu, muzeul Chilimbarului de la Colți, mănăstirea Ciolanu, tabăra de sculptură de la Măgura.

Pe **24 noiembrie 2007**, a avut loc la Școala nr 8. „Valeriu Sterian”, Rm. Sărat, a doua ediție a concursului, cu elevii claselor a V-a și a VI-a de la școlile din Nehoiu, Grupul Școlar Tehnic, Sf. Mc. SAVA”, Berca, Școala nr. 5” Vasile Cristoforeanu”, Rm Sărat. După terminarea concursului, elevii au mers la Muzeul Municipal, au vizitat împrejurimile după care au fost premiați cu premii constând în cărți de literatură, culegeri de matematică, rechizite școlare.

Pentru anul 2008, elevii claselor a V-a, VI-a, și a VII-a vor fi așteptați la grupul Școlar Tehnic „Sf. Mc. SAVA”, Berca pentru a se desfășura ediția a treia a concursului, la care sunt așteptați să ni se alăture elevi și de la alte școli din județ.

Căutând să încurajăm participarea elevilor și să promovăm studiul matematicii în mijlocul elevilor s-au acordat suficiente premii pentru a răsplăti munca lor, și nu ne rămâne decât să-i felicităm pe toți pentru efortul depus.

Vom da în continuare subiectele propuse la clasa a V-a și la clasa a VI-a de către organizatorii acestui concurs, Ana Panaitescu, Adrian Stan, Vasile Prefac.







## Clasa a V-a

1. Să se calculeze:  $\left[ (2^{15} \cdot 2^7)^5 : (2^4)^2 - 2 \cdot (4^{25} \cdot 3)^2 : 9 \right] : 2^{100}$ .
2. Arătați că  $25 + 3 \cdot 25 + 5 \cdot 25 + 7 \cdot 25 + \dots + 13 \cdot 25$ , este pătrat perfect.
3. Un număr este cu 84 mai mare decât altul. Împărțind suma celor două numere la diferența lor, se obține câtul 15 și restul 14. Aflați cele două numere.
4. Din egalitățile  $ab - ac = bc - c^2$  și  $b = c + 1$  să se deducă:
  - a) o relație între a și c;
  - b) valoarea numerică a expresiei  $2b - a - c$ ;

## Clasa a VI-a

1. Fie mulțimile  $A = \left\{ n \in N \left| \frac{5}{6} < \frac{n+2}{4} < \frac{5}{3} \right. \right\}$ ,  $B = \left\{ n \in N \left| \frac{n^2 - 3n + 6}{n - 3} \in N \right. \right\}$ ;

Să se determine:  $A \cup B$ ;  $A \cap B$ .

2. Elevii unei școli plecați în excursie au trebuit să se încoloneze pentru a vizita un obiectiv turistic; Dacă ei se așezau câte 4, sau câte 5 sau câte 6, rămâneau de fiecare dată trei elevi pe dinafară. Câți elevi erau în excursie dacă se știe că numărul lor nu depășea 300?
3. Un unghi de măsură  $165^0$  este împărțit în 15 unghiuri diferite în așa fel încât începând cu al doilea, unghiurile cresc fiecare cu o măsură de  $u^0$  față de precedentul; Dacă primul are măsura de  $x^0$ , să se afle cele două măsuri  $x^0$  și  $u^0$ .

4. Să se determine numerele naturale prime a,b,c astfel încât:  $\frac{a}{8} + \frac{b}{8^2} + \frac{c}{8^3} = \frac{117}{256}$ .

5. Să se rezolve ecuația:  $5 \frac{1}{4} \cdot \left( 1 \frac{2}{3} + 1, (6) \cdot x \right) : \frac{12,0324 - 0,0018 \cdot 18}{4, (2) - 4,1(6)} = 0,07 : \frac{1}{1000} \cdot 6^3$ .

Profesor, Școala cu clasele I-VIII,  
nr. 8 Valeriu Sterian, Rm. Sărat

“ Nu pot să vă dau formula succesului. Dar pot să vă dau formula eșecului:  
încercați să-i mulțumiți pe toți”.

Herbert Bayrd Swope





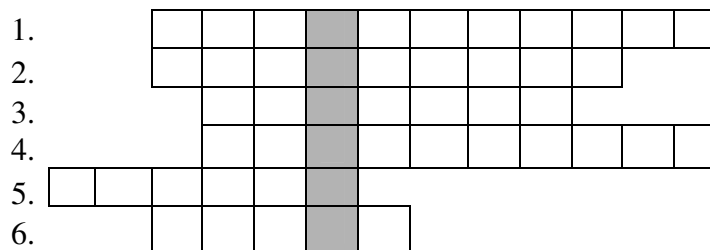


## 4. Probleme propuse

„Matematica se învață cu tenacitate și continuitate, zi de zi, după fiecare lecție, cu creionul în mână, rezolvând exerciții și probleme, căutând a lămuri fiecare amănunt. Dar ce perspectivă nebănuită oferă matematica celui care a depus efortul inițial de a înțelege și pătrunde! Frumusețea și marea utilitate a matematicii o descoperi după ce ai învățat cu adevărat matematica. Cine învață în școală matematica, n-o va uita niciodată.”

(Acad. Prof. Caius Iacob)

La început de drum vă urăm ....



1. Numerele care au diferența 1...
2. Înlocuirea unui număr prin altul, prin lipsă sau adaos...
3. Sistem de numerație în care numerele sunt grupate câte 10...
4. Numărul „a+1” este ..... numărului „a”
5. Numere care pot fi scrise sub forma „a+1”...
6. Fiecare grup de 3 ordine consecutive începând de la dreapta formează o .....

Inst. Lupșan Nicoleta - Gabriela, Berca , Buzău

Dar nu uitați!

 = MUNCĂ + PERSEVERENȚĂ + INTELIGENȚĂ

Înv. Avrigeanu Felicia , Berca , Buzău

**ÎNVĂȚĂMÂNT PRIMAR**

**Clasa a III-a**

**P:1.** Suma a trei numere este 843. Micșorat cu 3, primul număr devine un sfert din al doilea, iar al treilea reprezintă jumătate din suma primelor două. Să se afle numerele.

Înv. Marcela Marin, Rm. Sărat

**P:2.** Un alun are pe cele 6 crengi ale sale 432 de alune, numărul alunelor fiind același pe fiecare creangă. Puneți voi întrebarea și rezolvați problema.

Inst. Anton Maria , Berca ,Buzău

**P:3.** Suma a două numere diferite, dar care au cifrele egale, este 788. Care sunt numerele?

Înv. Avrigeanu Felicia, Berca ,Buzău





**P:4.** Suma a două numere este 24, iar diferența lor este 0. Care sunt cele două numere?

Înv. Avrigeanu Felicia, Berca - Buzău

**P:5.** Sfârșitul lunii acesteia este o zi cu număr fără soț, al lunii viitoare tot fără soț.

În ce lună ne aflăm? a) ianuarie b) mai c) iulie d) iunie e) decembrie

Înv. Avrigeanu Felicia, Berca, Buzău

**P:6.** La un concurs de matematică Ana a obținut 7 puncte, Doru cu 3 mai multe, Vlad tot atâtea puncte câte a obținut Doru, Mara de 10 ori mai multe decât Vlad, iar Irina cât Vlad și Mara la un loc.

Câte puncte a obținut Irina?

Înv. Ion Daniela, Berca, Buzău

**P:7.** Scrie întrebarea potrivită astfel încât problema să se rezolve:

a) prin 3 operații; b) prin 4 operații. Rezolvă în fiecare caz problema.

Într-o parcare sunt 53 de mașini albe, cu 13 mai multe mașini roșii, iar mașini albastre cu 31 mai puține decât mașini albe și roșii la un loc.

Înv. Ion Daniela, Berca, Buzău

**P:8.a)** Identifică datele care nu au legătură cu rezolvarea problemei, apoi rescrie și rezolvă.

b) Schimbă întrebarea, astfel încât să folosești toate datele problemei și rezolvă.

Într-o librărie erau 374 cărți cu poezii și 150 cărți cu povești. S-au mai adus 3 cutii a câte 54 cărți cu poezii fiecare și cu 75 mai multe cărți cu povești decât dublul cărților cu poezii.

Câte cărți s-au adus în total la librărie?

Înv. Ion Daniela, Berca, Buzău

**P:9.** Un număr este înmulțit cu 10. La rezultat adunăm dublul numărului 15, din noul rezultat scădem sfertul numărului 800 și obținem treimea numărului 300. Aflați numărul.

Înv. Lupșan Ion, Pleșcoi, Buzău

**P:10.** Un copil are 200 de lei, el cumpără cu o pătrime din sumă o geantă, cu o cincime din suma rămasă cumpără o carte, iar cu jumătate din noul rest un tricou.

Câți lei i-au rămas copilului?

Înv. Lupșan Ion, Pleșcoi - Buzău

### Clasa a IV-a

**P:11.** Suma dintre sfertul unui număr și dublul altuia este 625. Să se afle numerele, știind că primul este de două ori mai mare decât al doilea.

Înv. Marcela Marin, Rm. Sărat

**P:12.** La un magazin s-au adus într-un transport 196 paltoane și rochii, în valoare de 26057190 lei. Să se afle câte rochii și paltoane s-au adus, știind că un palton costă cât șase rochii și că un palton și o rochie costă 308630 lei?

Înv. Valeriu Marcu, Berca

**P:13.** La un magazine alimentar s-au vândut într-o zi 84 litri de ulei. A doua zi s-au vândut 192 l și s-au încasat cu 453600 lei mai mult ca în prima zi. Câți lei s-au încasat în total din vânzarea uleiului, în cele două zile?

Înv. Valeriu Marcu, Berca

**P:14.** Pentru hrana zilnică a 86 de vaci și 56 de viței sunt necesare 1488 kg nutreț. O vacă consumă cât 8 viței. Câte kg de nutreț consumă o vacă pe zi? Ce cantitate de nutreț este necesară pentru 100 de vaci și 80 de viței pentru aproximativ 120 de zile?

Înv. Rodica Ene, Berca

**P:15.** Într-un coșuleț sunt nuci. Mihăiță ia  $\frac{1}{3}$  din numărul lor și încă două nuci. Oana ia  $\frac{1}{4}$  din nucile

rămase și încă două. Doru ia  $\frac{1}{2}$  din rest și încă două nuci, iar în coșuleț rămân nouă nuci, Câte nuci au

fost la început în coșuleț și câte a luat fiecare copil?

Înv. Rodica Ene, Berca





**P:16.** Jumătate din numărul timbrelor lui Alexandru este egală cu o treime din numărul de timbre ale lui Mircea și cu o cincime din numărul timbrelor lui Andrei.

Câte timbre are fiecare copil dacă au în total 5500 de timbre?

**Inst. Lușan Nicoleta-Gabriela, Berca ,Buzău**

**P:17.** Un număr este de 6 ori mai mare decât alt număr. Dacă numărul cel mic se micșorează cu 4 și cel mare cu triplul numărului 4, atunci numărul mic este o zecime din numărul mare.

**Inst. Lușan Nicoleta-Gabriela, Berca ,Buzău**

**P:18.** Mama le lasă celor 3 copii ai săi o cutie cu bomboane, cerându-le ca atunci când se întorc de la școală să împartă bomboanele în mod egal. Primul copil care ajunge acasă împarte bomboanele în trei, luându-și partea lui, apoi pleacă la joacă. La fel procedează pe rând și ceilalți doi copii cu bomboanele pe care le găsesc, neștiind că acestea au fost deja împărțite. Când cei trei copii se întorc de la joacă se hotărăsc să împartă încă o dată bomboanele rămase, fiecare revinându-i 8 bomboane. Câte bomboane a avut cutia?

**Inst. Lușan Nicoleta-Gabriela, Berca ,Buzău**

**P:19.** Trei copii au împreună 225 de lei. Câți lei are fiecare, știind că al doilea are de două ori cât are primul și cu 25 de lei mai puțin decât al treilea?

**Înv. Lușan Ion, Pleșcoi ,Buzău**

**P:20.** Suma a trei numere consecutive impare este 783. Care sunt numerele?

**Înv. Lușan Ion, Pleșcoi ,Buzău**

## GIMNAZIU

## Clasa a V-a

**G:1.** Să se determine toate perechile de numere naturale, știind că împărțindu-l pe primul la al doilea și apoi pe al doilea la primul, obținem de fiecare dată, aceeași sumă dintre cât și rest, aceasta fiind egală cu 3.

**Prof. Constantin Apostol, Rm. Sărat**

**G:2.** Aflați numerele naturale scrise în baza 10, care împărțite la 90 dau un rest egal cu cubul câtului.

**Prof. Marin Simion, Rm. Sărat**

**G:3.a)** Să se determine cifra  $x$  astfel încât numărul  $\overline{1x0520}$  să se dividă cu 2008.

**b)** Să se arate că suma  $S = 10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n + 12n^2 + 11n$  este divizibilă cu 33.

**Prof. Adrian Stan, Berca, Buzău**

**G:4.** Arătați că diferența  $\overline{aaa} - \overline{bbb}$  este divizibilă cu 3.

**Prof. Lușan Rodica, Berca**

**G:5.** Aflați suma  $a + c$  știind că  $a - b = 20$  și  $b + c = 15$ .

**Prof. Lușan Rodica, Berca**

**G:6.** Suma a trei numere naturale este 270. Dacă din fiecare se scade același număr se obțin numerele 10, 55 și respectiv 154.

**Prof. Lușan Rodica, Berca**

**G:7.** Să se arate că numărul numerelor naturale mai mici sau egale cu 2008 care nu sunt divizibile cu 3, nici cu 5, nici cu 7 este multiplu de 17.

**Prof. Neculai Stanciu, Berca, Buzău**

**G:8.** Determinați baza de numerație  $x$  în care are loc egalitatea:  $2 \cdot 14_x = 33_x$ .

**Prof. Ana Panaitescu, Rm Sărat**



**Clasa a VI-a**

**G:9.** Se dă proporția  $\frac{x - 2y + 3z}{4x - 3y + 2z} = \frac{2}{3}$ . Știind că  $y \neq 2z$ , să se arate că:

$$\left( \frac{x - 2y + 3z}{4x - 3y + 2z} \right)^2 = \frac{7x - 4y + z}{7x - 9y + 11z}.$$

*Prof. Constantin Apostol, Rm. Sărat*

**G:10.** Să se calculeze suma a 20 de numere naturale consecutive știind că primul și al patrulea sunt direct proporționale cu numerele 11 și respective 12.

*Prof. Marin Simion, Rm. Sărat*

**G:11.** Să se determine numerele  $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{N}$ , știind că  $x > 2$  și  $\frac{x}{11} = \frac{3x + 1}{11y + 2}$ .

*Prof. Adrian Stan, Berca, Buzău*

**G:12.** Să se determine mulțimea  $A = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid \frac{3ab - 1}{abc + 1} \in \mathbb{N} \right\}$ .

*Prof. Neculai Stanciu, Berca, Buzău*

**G:13.** Să se găsească cu cât se modifica produsul a 4 numere dacă primul se mărește cu jumătatea lui, al doilea se mărește cu a treia parte din el, al treilea se micșorează cu a patra parte din el, iar al patrulea se micșorează cu a treia parte din el.

*Prof. Ana Panaitescu, Rm. Sărat*

**G:14.** Determinați numerele  $x, y, z$  știind că  $x + y + z = 45$ ;  $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}, \frac{y}{6} = \frac{z}{8}$ .

*Prof. Ana Panaitescu, Rm. Sărat*

**Clasa a VII-a**

**G:15.** Să se determine numerele întregi  $a$ , astfel încât numărul  $a^2 + 7a + 10$  să fie pătratul unui alt număr întreg.

*Prof. Adrian Stan, Berca, Buzău*

**G:16.** În triunghiul  $ABC$ , măsurile unghiurilor  $A, B$  și, respectiv  $C$ , sunt direct proporționale cu numerele 3, 7 și 2. Să se arate că unghiul dintre  $AB$  și înălțimea din  $A$  este congruent cu unghiul dintre  $AC$  și mediana din  $A$ .

*Prof. Constantin Apostol, Rm. Sărat*

**G:17.** În trapezul  $ABCD$  având bazele  $AB$  și  $CD$  avem:

$aria(BOC) = \frac{2}{7}$  din  $[aria(AOB) + aria(COD)]$ , unde  $O$  este intersecția diagonalelor. Știind că

$aria(BOC) = 10cm^2$ , să se determine aria trapezului.

*Prof. Marin Simion, Rm. Sărat*

**G:18.** Fie  $ABCD$  un pătrat,  $AB = a$ ,  $M \in (BC)$  și  $N \in (CD)$  astfel ca  $BM = DN = \frac{a}{4}$  și

$\frac{BM}{MC} = \frac{1}{3}$ . Calculați sinusul măsurii unghiului  $MAN$ .

*Prof. Tuță Luca, Buzău*

**G:19.**  $ABCD$  este un trapez dreptunghic ( $m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) = 90^\circ$  și  $DC \parallel AB$ ) în care  $[AD] \equiv [DC]$  și

$[AB] \equiv [AC]$ . Știind că  $[CM]$  este bisectoarea unghiului  $\widehat{ACD}$  arătați că:

1.  $CM \perp CB$
2.  $[CM] \equiv [CB]$
3.  $\frac{AD}{MA} - \frac{AN}{AB} = 1$

*Prof. Tuță Luca, Buzău*







- G:20.** Măsurile unghiurilor triunghiului ABC sunt direct proporționale cu numerele 5, 3 respectiv 4. Înălțimea  $AD = 10\sqrt{3}$  cm și intersectează bisectoarea CM în punctul N; ( $D \in BC, M \in AB$ ). Din M ducem perpendiculara MP pe latura BC; ( $P \in BC$ ). Aflați :
- perimetrul triunghiului ABC;
  - perimetrul patrulaterului MPDN;
  - aria triunghiului ANC.

*Prof. Ana Panaitescu, Rm. Sărat*

### Clasa a VIII-a

- G:21.** Să se determine funcțiile cu proprietatea:  $(x+1)f(x-1) - xf(x+2) = -4x+3$  și să se determine n natural astfel încât  $f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(n)=2010$ ;

*Prof. Adrian Stan, Berca, Buzău*

- G:22.** Prin centrul triunghiului echilateral ABC ducem paralela la BC pe care luăm, în interiorul triunghiului, punctul M. În M ridicăm perpendiculara pe planul (ABC) pe care luăm un punct N și fie  $A_1, B_1$  și  $C_1$  picioarele perpendicularelor din N pe BC, pe AC și, respectiv pe AB. Să se arate că dacă  $NA_1^2$  este media aritmetică a numerelor  $NB_1^2$  și  $NC_1^2$ , atunci M coincide cu centrul triunghiului.

*Prof. Constantin Apostol, Rm. Sărat*

- G:23.** Știind că  $x, y \in R_+^*$  și  $x < y$ , să se compare numerele:  $a = \frac{y^3}{x}$  și  $b = 2x^2 + xy + y^2$ .

*Prof. Constantin Apostol, Rm. Sărat*

- G:24.** Graficul unei funcții liniare care trece prin punctul  $A(-3;0)$  intersectează paralela la Oy prin  $B(2;0)$  în punctul C. Știind că aria triunghiului ABC este 10 u.a. (unități de arie), să se determine funcția liniară.

*Prof. Marin Simion, Rm. Sărat*

- G:25.** Pătratele ABCD și ABMN sunt situate în plane perpendiculare. Calculați măsura unghiului diedru format de planele (MAD) și (MND).

*Prof. Tuță Luca, Buzău*

- G:26.** Fie ABCDA'B'C'D' un paralelipiped dreptunghic având muchiile bazei  $AB = 2\sqrt{6}$  cm și  $BC = 4\sqrt{3}$  cm iar înălțimea  $CC' = 8\sqrt{2}$  cm. Fie M mijlocul lui BC și F mijlocul lui AA' astfel încât  $DM \cap AB = \{F\}$ . Se cere:

- Măsura unghiului format de planul FED cu planul bazei;
- Măsura unghiului format de dreptele CC' și EF;

*Prof. Adrian Stan, Berca, Buzău*

## LICEU

### Clasa a IX-a

- L:1.** Demonstrați că volumul unui tetraedru este mai mic sau egal cu a 162-a parte din cubul sumei muchiilor care pornesc din același vârf.

*Prof. Constantin Apostol, Rm. Sărat*

- L:2.** Aflați numerele reale a și b astfel încât ecuația:

$$|x^4 + bx + a| + |x^2 - 3x + 2| = 0 \text{ să aibă un număr maxim de soluții.}$$

*Prof. Constantin Rusu, Rm. Sărat*

- L:3.** Știind că x, y, z, u reprezintă numere întregi și pozitive diferite, scrise în ordinea

$$1 \langle x \langle y \langle z \langle u, \text{ să se arate că: } xyz + xyu + xzu + yzu \leq \frac{31}{24}xyzu - 1$$

*Prof. Daniela Chiricioiu, Berca, Buzău*





**L:4.** Dacă  $x_i \in R_+^*$ ,  $i = \overline{1, n}$ , cu  $\prod_{i=1}^n x_i = 1$ , să se arate că:  $\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \geq \frac{n(n+1)}{2}$ .

Prof. Neculai Stanciu, Berca, Buzău

**L:5.** Să se arate că:

$$\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1} \leq 3, \forall a, b, c \in R, \text{ astfel încât } a + b + c = 2 \text{ și } ab + ac + bc = 2.$$

Prof. Adrian Stan, Berca, Buzău

**L:6.** Să se calculeze suma:  $S_n = \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{6}$ .

Prof. Neculai Stanciu, Berca, Buzău

**L:7.** Se dă numărul  $n \in N^*$ , care poate fi scris ca produs de  $k$  numere naturale consecutive. Să se arate că  $n$  poate fi scris ca sumă de  $k$  numere naturale consecutive, când  $k$  este impar și nu poate fi scris, când  $k$  este par.

Prof. Constantin Apostol, Rm. Sărat

### Clasa a X-a

**L:8.** Să se arate că  $\frac{n-k}{n+k} C_{n+k}^k$  este număr întreg.

Prof. Răducan Maria, Călărași

**L:9.** Să se afle volumul tetraedrului  $MABC$ , știind că înălțimea din  $M$  este de 1 cm și are piciorul în mijlocul laturii ( $BC$ ),  $m(\angle BAC) = 90^\circ$  și măsurile unghiurilor  $\angle AMB, \angle AMC$ , și  $\angle BMC$  sunt proporționale, respectiv cu 2, 3, 4.

Prof. Constantin Apostol, Rm. Sărat

**L:10.** Rezolvați inecuația:

$$(\sqrt{x} - 1)\sqrt{1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}} \leq (\sqrt{x})^{n^2-n} - 1, x \geq 0, n \in N, n \geq 2$$

Prof. Constantin Rusu, Rm. Sărat

**L:11.** Se consideră suma:  $S_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2)$ . Să se arate că  $\frac{n^4}{4} \leq S_n \leq \frac{(n+3)^4}{4}$ .

Prof. Constantin Rusu, Rm. Sărat

**L:12.** Să se arate că  $\frac{5}{9} < \frac{\lg 6}{\lg 17} < \frac{13}{20}$

Prof. Daniela Chiricioiu, Berca, Buzău

### Clasa a XI-a

**L:13.** Se consideră funcția  $f : R - \{1, 2\} \rightarrow R$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ .

Calculați  $\sum_{k=3}^n f^{(n)}(k)$  unde  $f^{(n)}(x)$  semnifică derivata de ordinul  $n$  a funcției  $f(x)$ .

Prof. Constantin Rusu, Rm. Sărat

**L:14.** Se dă matricea  $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Să se arate că  $X^3 = X^2 - X + I_3$ , (unde  $I_3$  este matricea unitate de

ordinul 3), și să se calculeze  $X^{2008}$ .

Prof. Adrian Stan, Berca, Buzău





**L:15.** Să se calculeze ( $n \in \mathbb{N}$ ):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \dots + n(n+3)}{C_{n+3}^n}$

*Prof. Daniela Chiricioiu, Berca, Buzău*

**L:16.** Fie funcțiile  $f, g, h: R \rightarrow R$ , derivabile cu  $f(x_0) = a, g(x_0) = b, h(x_0) = c$  și  $(fg)'(x_0) = c_1$ ,  $(gh)'(x_0) = a_1, (hf)'(x_0) = b_1$ . Să se calculeze  $(fgh)'(x_0)$ .

*Prof. Neculai Stanciu, Berca, Buzău*

### Clasa a XII-a

**L:17.** Să se calculeze:  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(x - \sin x) \cos^{n-2} x}{x^2 \sin^n x} dx, n \in \mathbb{N}$ .

*Prof. Constantin Rusu, Rm. Sărat*

**L:18.** Să se arate că funcția următoare nu are primitive pe  $\square$ :  $f(x) = \begin{cases} e^x + x - 1, & x \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x-1}}, & x > 1 \end{cases}$ .

*Prof. Daniela Chiricioiu, Berca, Buzău*

**L:19.** Fie  $f: R \rightarrow R$ , o funcție impară cu proprietatea:  $f(x) + 3f(x-3) = x - 4$ ; Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .

*Prof. Adrian Stan, Berca, Buzău*

**L:20.** Fie  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2008}$ , coeficienții polinomului  $(x^4 - 3x^3 + x - 2)^{502}$ . Să se arate că  $a_0 + a_2 + a_4, \dots, a_{2008}$  este un număr par.

*Prof. Adrian Stan, Berca, Buzău*

**L:21.** Fie polinomul  $(1 + x^2 + x^4)^{502}$  cu rădăcinile  $x_1, x_2, \dots, x_{2008} \in C$ ; Să se calculeze suma  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2008}^2$ .

*Prof. Adrian Stan, Berca, Buzău*

**L:22.** Să se calculeze:  $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{(x-2)(4-x)}} dx$ .

*Prof. Neculai Stanciu, Berca, Buzău*

**L:23.** Să se calculeze:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2008} \frac{e^{nx} \cdot \sin x^n + e^{-nx} \cdot \cos x^n}{e^{nx} + e^{-nx}} dx$ .

*Prof. Adrian Stan, Berca, Buzău*





## 5. Probleme rezolvate

### Clasa a III-a

**P:21.** Câte zile are azi un pui de arici știind că ieri a împlinit 3 săptămâni de la ziua în care el a împlinit 20 de zile.

Rezolvare:  $20 + 3 \times 7 + 1 = 20 + 21 + 1 = 42$  (de zile)

Inst. Anton Maria , Berca, Buzău

**P:22.** O veveriță a adunat pentru iarnă 6000 de alune, pe care le-a depozitat în trei cămăruțe.

Aflați câte alune se află în fiecare cămăruță dacă în primele două sunt 3600 de alune, iar în ultimele două cămăruțe sunt 3630 de alune.

Rezolvare:

1. Câte alune sunt în prima cămăruță?  $6000 - 3630 = 2370$  (de alune)
2. Câte alune sunt în a treia cămăruță?  $6000 - 3600 = 2400$  (de alune)
3. Câte alune sunt în a doua cămăruță?  $3600 - 2370 = 1230$  (de alune)

Inst. Anton Maria , Berca ,Buzău

**P:23.** Aflați suma dintre zece zeci, zece sute și zece unități. Verificați dacă suma obținută se împarte exact la 3 și la 5.

Rezolvare:

zece zeci - 100                       $100 + 1000 + 10 = 1110$   
zece sute - 1000                     $1110 : 3 = 370$   
zece unități - 10                     $1110 : 5 = 222$

Răspuns: Suma este 1110.            1110 se împarte exact și la 3 și la 5.

Înv. Avriganu Felicia, Berca - Buzău

**P:24.** Găsiți valorile lui a și b din egalitățile: a)  $\overline{ab} \times b = 129$  ; b)  $a \times \overline{ab} = 497$

a)  $\overline{ab} \times b = 129$

$b \times b = 9$

$3 \times 3 = 9$

Dacă  $b = 3$

$129 : 3 = 43$ , deci  $a = 4$

$\overline{ab} = 43$  Verificare:  $43 \times 3 = 129$

b)  $a \times \overline{ab} = 497$

$a \times a = 49$  ,  $7 \times 7 = 49$ ,  $a=7$ .

$a \times b = 7$  ,

$7 \times b = 7$ ,  $b=1$

$b=1$

Verificare:  $7 \times 71 = 497$

Înv. Avriganu Felicia, Berca ,Buzău

**P:25.** La cel mai mare număr natural de 3 cifre diferite adăugați cel mai mic număr de patru cifre și din sumă scădeți cel mai mic număr de 4 cifre în care cifra 1 se repetă de 2 ori.

Rezolvare:

a) Scriem cel mai mare număr natural de 3 cifre diferite:  $\overline{SZU} \rightarrow 987$

b) Scriem cel mai mic număr de 4 cifre:  $\overline{MSZU} \rightarrow 1000$

c) Aflăm suma celor două numere  $987 + 1000 = 1987$

d) Scriem cel mai mic număr de 4 cifre în care cifra 1 se repetă de două ori:  $\overline{MSZU} \rightarrow 1001$

e) Din suma celor două numere scădem 1001:  $1987 - 1001 = 986$

$(987 + 1000) - 1001 = 986$

Înv. Ion Daniela, Berca - Buzău

**P:26.** Suma dintre un număr dat și răsturnatul său este 66. Să se afle numărul știind că produsul cifrelor care îl compune este 5.

Rezolvare:

$\overline{ab} + \overline{ba} = 66$

$a \times b = 5$

Scriem numerele care înmulțite dau produsul 5.







$$a \times b = 5 \quad 1 \times 5 = 5 \quad 5 \times 1 = 5$$

Scrim toate numerele de forma  $\overline{ab}$  care se pot forma cu cifrele 1 și 5.

$$\overline{ab} \rightarrow 15, 51 \quad \overline{ab} + \overline{ba} = 66$$

$$15 + 51 = 66 \text{ sau } 51 + 15 = 66 \quad \text{Răspuns: Numerele sunt } 15 \text{ și } 51.$$

Înv. Ion Daniela, Berca - Buzău

**P:27.** Trei garoafe costă 18 lei. Cinci crini costă de 10 ori mai mult. Câți lei va costa un buchet de flori format din 2 garoafe și 3 crini? Rezolvă problema sub forma unui singur exercițiu!

Rezolvare:

Câți lei va costa un buchet de flori format din 2 garoafe și 3 crini?

$$(18 : 3) \times 2 + (18 \times 10 : 5) \times 3 =$$

$$6 \times 2 + 36 \times 3 =$$

$$12 + 108 = 120 \text{ (de lei)}$$

Înv. Lușan Ion, Pleșcoi, Buzău

**P:28.** Tata a cumpărat 3 kg de cireșe și 4 kg de vișine, plătind 54 de lei. Cât a costat un kg de vișine, dacă unul de cireșe a costat 6 lei? Rezolvă problema sub forma unui singur exercițiu!

Rezolvare:

Cât a costat un kg de vișine?

$$(54 - 6 \times 3) : 4 =$$

$$(54 - 18) : 4 =$$

$$36 : 4 = 9 \text{ (lei)}$$

Înv. Lușan Ion, Pleșcoi, Buzău

**P:29.** Mă gândesc la un număr, îl împart la 3, iar rezultatul îl înmulțesc cu 3 și obțin un număr de 3 cifre în care cifra zecilor este 3, cifra sutelor este dublul acesteia, iar a unităților este triplul cifrei zecilor.

La ce număr m-am gândit?

Rezolvare:

$$z = 3 \quad s = 2 \times 3 = 6 \quad u = 3 \times 3 = 9 \quad \overline{szu} = 639$$

$$(a : 3) \times 3 = 639, \quad a : 3 = 639 : 3, \quad a : 3 = 213, \quad a = 213 \times 3 \text{ rezultă } a = 639$$

Înv. Lușan Ion, Pleșcoi, Buzău

### Clasa a IV-a

**P:30.** Șase fete au primit fiecare un număr de flori reprezentate de numere impare consecutive.

Câte flori a primit fiecare fată, știind că a treia și ultima au primit împreună 36 de flori?

Rezolvare:

Notăm cu „a” numărul de flori primite de I fată, „a + 2” numărul de flori primite de a II-a fată,

„a + 4” numărul de flori primite de a III-a fată, „a + 6” numărul de flori primite de a IV-a fată,

„a + 8” numărul de flori primite de a V-a fată, „a + 10” numărul de flori primite de a VI-a fată.

Adunăm numărul florilor primite de a III-a fată cu numărul celor primite de ultima fată:

$$a + 4 + a + 10 = 36, \quad 2 \times a + 14 = 36, \quad 2 \times a = 36 - 14, \quad 2 \times a = 22, \quad a = 22 : 2, \text{ rezultă } a = 11$$

Răspuns:

Prima fată a primit 11 flori, a doua a primit 13 flori, a treia a primit 15 flori, a patra a primit 17 flori, a cincia a primit 19 flori, iar a șasea fată a primit 21 de flori.

Inst. Lușan Nicoleta- Gabriela, Berca, Buzău

**P:31.** Baza mică a unui trapez este o treime din numărul 63. Baza mare este dublul bazei mici. Lungimea fiecărei laturi neparalele este jumătate din lungimea laturilor unor pătrate ce au perimetrul de 48 m, respectiv 72 m. Aflați perimetrul trapezului.

Rezolvare:

$$\text{Aflăm lungimea bazei mici } 63 : 3 = 21$$

$$\text{Baza mică are } 21 \text{ m.}$$

$$\text{Aflăm lungimea bazei mari } 21 \times 2 = 42$$

$$\text{Baza mare are } 42 \text{ m.}$$

$$\text{Aflăm lungimile laturilor neparalele } (48 \text{ m} : 4) : 2 = 6 \text{ m}; \quad (72 \text{ m} : 4) : 2 = 9 \text{ m}$$

$$\text{Lungimile laturilor neparalele sunt } 6 \text{ m, respectiv } 9 \text{ m. } P = 6\text{m} + 9\text{m} + 21\text{m} + 42\text{m}; \quad P = 78\text{m}$$

Inst. Lușan Nicoleta- Gabriela, Berca, Buzău





**P:32.** Doi fii și doi tați au mâncat trei mere, câte un măr fiecare.

- Este posibilă această situație?
- Dar dacă 3 fii și 3 tați au mâncat 4 mere, câte un măr fiecare?

Rezolvare:

- tata, fiul și nepotul
- tata, fiul, nepotul, strănepotul

Înv. Lușan Ion, Pleșcoi, Buzău

### Clasa a V-a

**G:27.** Suma a patru numere naturale este  $\frac{3}{4}$  din  $10^2$ . Dacă se adună numărul 4 la primul, se scade 4 din al doilea, se împarte al treilea la 4 și se înmulțește al patrulea cu 4, se obțin numere egale. Aflați numerele.

Prof. Lușan Rodica, Berca, Buzău

Rezolvare: (soluția autor)

$$a + b + c + d = \frac{3}{4} \cdot 10^2, \text{ de unde rezultă } a + b + c + d = 75;$$

Cum  $a + 4 = b - 4 = c : 4 = 4 \cdot d$ , putem scrie  $a = 4d - 4$ ,  $b = 4d + 4$ ,  $c = 4d \cdot 4$ , rezultă,  
 $4d - 4 + 4d + 4 + 4d \cdot 4 + d = 75$  adică  $25d = 75$ , rezultă  $d = 3$ ; atunci  
 $a = 4 \cdot 3 - 4 = 8$ ,  $b = 4 \cdot 3 + 4 = 16$ ,  $c = 4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$ .

### Clasa a VI-a

**G:28.** Se știe că  $3a+4b+5c=42$  iar  $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{7}{3}$ ; Să se determine  $x, y, z$  știind că sunt invers

proporționale cu 6, 8, 10.

Prof. Adrian Stan, Berca, Buzău

Rezolvare: (Soluția autorului) Relația dată este echivalentă cu

$$\frac{3a}{3x} = \frac{4b}{4y} = \frac{5c}{5z} = \frac{3a + 4b + 5c}{3x + 4y + 5z} = \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{42}{3x + 4y + 5z} = \frac{7}{3} \Rightarrow 3x + 4y + 5z = 18 \quad (*); \text{ Cum } (x, y, z) \text{ sunt}$$

invers proporționale cu (6,8,10) rezultă:  $6x=8y=10z=k$ ;  $k$  este coeficientul de proporționalitate;

$$\Rightarrow x = \frac{k}{6}; y = \frac{k}{8}; z = \frac{k}{10}.$$

Din relația (\*) rezultă  $3k=36$ ,  $k=12$ , rezultă  $x=2$ ;  $y = \frac{3}{2}$ ;  $z = \frac{6}{5}$ .

### Clasa a VII-a

**G:29.** Care număr este mai mare,  $31!$  sau  $16^{31}$ ? (unde  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ , produsul primelor  $n$  numere naturale).

Prof. Adrian Stan, Berca, Buzău

Rezolvare: (soluția autorului)

$$\text{Fie } a=31! \text{ și } b=16^{31}, \text{ atunci } \frac{a}{b} = \frac{16-15}{16} \cdot \frac{16-14}{16} \cdot \dots \cdot \frac{16-1}{16} \cdot \frac{16}{16} \cdot \frac{16+1}{16} \cdot \dots \cdot \frac{16+14}{16} \cdot \frac{16+15}{16} =$$

$$= (1 - \frac{15}{16})(1 - \frac{14}{16}) \dots (1 - \frac{1}{16}) (1 + \frac{1}{16}) \dots (1 + \frac{15}{16}) = (1 - (\frac{15}{16})^2)(1 - (\frac{14}{16})^2) \dots (1 - (\frac{1}{16})^2) (1 \Rightarrow \frac{a}{b} < 1 \Rightarrow a < b).$$

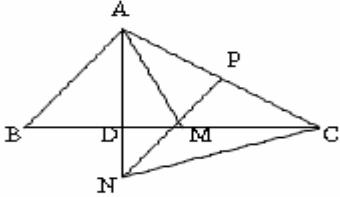




**G:30.** În triunghiul  $ABC$   $m(\hat{BAC}) = 90^\circ$ , prin punctul  $M$ , mijlocul ipotenuzei  $[BC]$ , se duce  $MP \parallel AB$ ,  $P \in (AC)$  și  $MP$  intersectează înălțimea  $[AD]$  în  $N$ . Arătați că:

$$AM \perp NC; \quad \text{b) } AM = \frac{MN \cdot MP}{MD}.$$

Prof: Tuță Luca, Buzău



Rezolvare: (Soluția autorului)

a) În triunghiul  $ANC$  avem:  $NP \perp AC$  și  $CD \perp AN$ ;

$NP \cap CD = \{M\} \Rightarrow M$  este ortocentrul triunghiului

$ANC \Rightarrow AM \perp NC$

b)  $\hat{DMN} \equiv \hat{PMC}$  (opuse la vârf),  $\hat{NDM} \equiv \hat{CPM}$  (drepte)

$$\stackrel{(U.U)}{\Rightarrow} \Delta MND \sim \Delta MCP \Rightarrow \frac{MN}{MC} = \frac{MD}{MP} \Rightarrow MC = \frac{MN \cdot MP}{MD}$$

$$\text{Dar } AM = \frac{BC}{2} = MC \Rightarrow AM = \frac{MN \cdot MP}{MD}.$$

### Clasa a VIII-a

**G:31.** Să se arate că numărul  $N = 7^{12} - 5^{12}$  Se divide cu 1776.

Prof. Tuță Luca, Buzău

Rezolvare: (Soluția autorului):

$$\begin{aligned} \text{Avem } N &= 7^{12} - 5^{12} = (7^4)^3 - (5^4)^3 = (7^4 - 5^4) \cdot A = (7^2 + 5^2) \cdot (7^2 + 5^2) \cdot A = \\ &= (7 - 5) \cdot (7 + 5) \cdot (7^2 + 5^2) \cdot A = 2 \cdot 12 \cdot 74 \cdot A = 1776 \cdot A \Rightarrow 1776 / N. \end{aligned}$$

### Clasa a IX-a

**L:24.** Fie  $\alpha > 0$ , rădăcina ecuației  $x^2 - 527x + 1 = 0$ . Să se găsească numerele naturale  $a$ ,  $b$  și  $c$

diferite de zero astfel încât  $\sqrt[8]{\alpha} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{c}$ .

Prof. Neculai Stanciu, Berca, Buzău

Rezolvare: (soluția autorului). Folosim următoarea lemă: "dacă  $\alpha$  este rădăcina pozitivă a ecuației  $x^2 - bx + 1 = 0$ , atunci  $\sqrt{\alpha}$  este cea mai mare rădăcină a ecuației  $x^2 - x\sqrt{b+2} + 1 = 0$ " (se demonstrează ușor). Cu această lemă obținem că  $\sqrt{\alpha}$  este cea mai mare rădăcină a ecuației  $x^2 - 23x + 1 = 0$ , mai departe  $\sqrt[4]{\alpha}$  este cea mai mare rădăcină a ecuației  $x^2 - 5x + 1 = 0$ , și  $\sqrt[8]{\alpha}$  este cea mai mare rădăcină a ecuației  $x^2 - \sqrt{7}x + 1 = 0$ . Obținem  $\sqrt[8]{\alpha} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{2}$  și valorile:  $a=7, b=3$  și  $c=2$  sau  $a=3, b=7$  și  $c=2$ .

### Clasa a X-a

**L:25.** Să se rezolve ecuația:  $3^x + 3^y + 3^z = 1980$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, 2 \leq x < y < z$ .

Prof. Adrian Stan, Berca, Buzău

Rezolvare:

$3^x(1 + 3^{y-x} + 3^{z-x}) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$ ; Datorită unicității descompunerii în factori primi rezultă  $x=2$ ; mai

departe  $3^{y-2} + 3^{z-2} = 219$ ;  $3^{y-2}(1 + 3^{z-y}) = 3 \cdot 73 \Rightarrow 3^{y-2} = 3 \Rightarrow y=3$  și  $1 + 3^{z-3} = 73$

$3^{z-3} = 72$   $3^{z-5} = 8$  rezultă  $z-5 = \log_3 8$ ;  $x=2, y=3, z=5 + \log_3 8$ .





**L:26. Rezolvați ecuația:**  $2^{x^2+x} + \log_2 x = 2^{x+1}$ .

O.N.M, Pitești, 2007

Rezolvare: Din condiția de existență a radicalului se obține  $x > 0$ . Adunând în ambii membri ai ecuației pe  $\log_2(x+1)$  se obține:  $2^{x(x+1)} + \log_2(x+1) + \log_2 x = 2^{x+1} + \log_2(x+1)$ . Notând cu  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}, f(x) = 2^x + \log_2 x$ , și cum  $f$  este suma a două funcții strict crescătoare, atunci  $f$  este strict crescătoare iar din relația  $f(x^2+x) = f(x+1)$  se obține  $x^2+x = x+1 \Rightarrow x = 1$ .

**Clasa a XI-a**

**L:27. Să se calculeze:**  $\max_{1 \leq k \leq n} 3^k (n-k+1), \text{ unde } n \in \mathbb{N}$ .

Prof. Neculai Stanciu, Berca, Buzău

Rezolvare (soluția autorului): Considerăm funcția:  $f(x) = 3^x(n-k+1)$ .

Derivata  $f'(x) = 3^x[(n-x+1)\ln 3 - 1]$  se anulează în punctul  $x_0 = n + 1 - \frac{1}{\ln 3}$ . Avem

$1/\ln 3 < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{\ln 3} < 1 \Rightarrow n < x_0 < n + \frac{1}{2} < n + 1$ . Rezultă următorul tabel de variație:

X	1	n	$x_0$	$n+(1/2)$	n+1
$f'$	+++++	+++++	0	-----	-----
f	Crescătoare descrescătoare				

**Clasa a XII-a**

**L:28. Fie funcția polinomială**  $f(x) = x^n - 2008x^{n-2} - x^3 + 2007x + 1$ .

Să se calculeze  $f(\sqrt{2008})$ .

Prof. Adrian Stan, Berca, Buzău

Rezolvare:(soluția autorului)

Fie trinomul de gradul doi cu rădăcinile  $\sqrt{2008}$  și  $-\sqrt{2008} \Rightarrow g(x) = x^2 - 2008$  și se împarte  $f$  la  $g$ , rezultă  $f(x) = (x^2 - 2008)(x^{n-2} - x) - x + 1$ , rezultă  $f(\sqrt{2008}) = 1 - \sqrt{2008}$ .

**L:29. Calculați :**  $\int_{-1}^1 \frac{2x^{1006} + x^{3020} + x^{2006} \sin x^{2007}}{1 + x^{2014}} dx$ .

Prof. Neculai Stanciu, Berca, Buzău

Rezolvare: (soluția autorului). Termenul  $\frac{x^{2006} \sin x^{2007}}{1 + x^{2014}}$  este impar în  $x$ , așa că

$$\int_{-1}^1 \frac{x^{2006} \sin x^{2007}}{1 + x^{2014}} dx = 0$$

Mai departe facem substituția  $x^{1007} = y \Rightarrow 1007x^{1006} dx = dy$  și calculăm

$$\int_{-1}^1 \frac{2x^{1006} + x^{3020}}{1 + x^{2014}} dx = \int_{-1}^1 \frac{x^{1006} (2 + x^{2014})}{1 + x^{2014}} dx = \frac{1}{1007} \int_{-1}^1 \frac{2 + y^2}{1 + y^2} dy =$$

$$= \frac{1}{1007} \int_{-1}^1 (1 + \frac{1}{1 + y^2}) dy = \frac{2}{1007} \int_0^1 (1 + \frac{1}{1 + y^2}) dy = \frac{2}{1007} (1 + \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + y^2}) = \frac{2}{1007} (1 + \arctg 1) = \frac{2}{1007} (1 + \frac{\pi}{4})$$







## 6. Teste pregătitoare pentru tezele cu subiect unic și bacalaureat



Model - Teză cu subiect unic la matematică  
Clasa a VII-a, semestrul II, 16.05.2008

Prof. Neculai Stanciu,

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.
- Se acordă 10 puncte din oficiu.

**SUBIECTUL I (50 puncte) – Pe foaia de teză se trec numai rezultatele.**

- 4p 1. a) Dintre numerele  $a = 2\sqrt{3}$  și  $b = 3\sqrt{2}$ , mai mare este numărul .....
- 3p b) Media geometrică a numerelor 9 și 49 este egală cu .....
- 3p c) Rezultatul calculului  $\sqrt{8} + \sqrt{18}$  este egal cu .....
- 4p 2. a) Soluția negativă a ecuației  $x^2 = 4$  este .....
- 3p b) O soluție naturală a inecuației  $x - 2 < 0$  este numărul .....
- 3p c) Dacă  $a\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ , atunci valoarea numărului  $a$  este egală cu .....
- 4p 3. a) Valoarea expresiei  $\cos 60^\circ \cos 30^\circ - \sin 60^\circ \sin 30^\circ$  este egală cu .....
- 3p b) Desenați linia mijlocie într-un trapez oarecare ...
- 3p c) Desenați un triunghi dreptunghiuc și înălțimea corespunzătoare ipotenuzei.
- 4p 4. a) Un dreptunghi cu lungimile laturilor 8 cm și 6 cm, are lungimea diagonalei ... cm
- 3p b) Un pătrat cu lungimea diagonalei  $8\sqrt{2}$  cm are lungimea laturii ... cm
- 3p c) Dacă triunghiul  $ABC$  este dreptunghic isoscel și este asemenea cu triunghiul  $MNP$ , atunci măsura unui unghi ascuțit al triunghiului  $MNP$  este de ...<sup>0</sup>.
- 4p 5. a) Înălțimea unui triunghi echilateral cu lungimea laturei 2 cm, are lungimea ... cm
- 3p b) Aria unui triunghi isoscel de laturi 10 cm, 8 cm, 8 cm, este ...  $cm^2$ .
- 3p c) Aria unui triunghi echilateral de latură  $\sqrt{3}$  cm este ...  $cm^2$ .

**SUBIECTUL II (40 puncte) – Pe foaia de teză scrieți rezolvările complete.**

- 5p 1. a) Rezolvați ecuația  $|x - 2| + |x^2 - 4x + 4| = 0$ .
- 5p b) Calculați  $|3 - \sqrt{8}| - |2 - \sqrt{2}| + \sqrt{3}$ .
- 5p c) Calculați  $3 - \sqrt{5} - \sqrt{14} - 6\sqrt{5}$ .
- 5p 2. a) Determinați numerele de forma  $\overline{ab}$  astfel încât:  $\sqrt{\frac{ab}{4}} \in Z$ .
- 5p b) Determinați numărul  $x$  pentru care expresia  $x^2 + 4x + 5$  are valoare minimă.
3. Se consideră trapezul dreptunghic  $ABCD$ , cu bazele  $AB$  și  $CD$  ( $AB < CD$ ), în care  $DB \perp BC$ ,  $AB = 15$  cm și  $CD = 20$  cm.
- 5p a) Calculați lungimea înălțimii trapezului.
- 5p b) Calculați lungimea segmentului  $BC$ .
- 5p c) Calculați distanța de la punctul  $A$  la dreapta  $BC$ .





Model - Teză cu subiect unic la matematică  
Clasa a VIII-a, semestrul II, 16.05.2008

Prof. Vasile Berca,

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.
- Se acordă 10 puncte din oficiu.

**SUBIECTUL I (48 puncte) – Pe foaia de teză se trec numai rezultatele.**

- 4p 1. Soluția ecuației  $2x+3=-4$  este...
- 4p 2. Cubul cu latura de 4 cm are volumul ...
- 4p 3. Este  $2(2+\sqrt{3})$  soluție a ecuației  $2x+1=x\sqrt{3}+1$  ?.....
- 4p 4. Prisma triunghiulară cu latura de 4 cm și aria laterală de  $72 \text{ cm}^2$  are înălțimea de.....
- 4p 5. Soluțiile ecuației  $x^2-3x-10=0$  sunt....
- 4p 6. Un cilindru cu înălțimea de 5 cm și volumul de  $45 \text{ cm}^3$  are raza de....
- 4p 7. Este (2;3) soluție a sistemului  $5x-2y=4$  ?.....  
 $3x+4y=18$
- 4p 8. Cel mai mare con ce se poate "scoate" dintr-un cub de latură 6cm, va avea  $V=.....$
- 4p 9. Descompunerea în factori a trinomului  $x^2+4x-12$  este.....
- 4p 10. Numarul muchilor unui paralelipiped dreptunghic este .....
- 4p 11. Care sunt numerele întregi pentru care  $3x+7 \geq 4$  ?.....
- 4p 12. Dacă latura tetraedrului regulat este 6 cm, aria sa totală este de.....

**SUBIECTUL II (42 puncte) – Pe foaia de teză scrieți rezolvările complete.**

- 7p 13. a) Dacă suma a doua numere este cât de 4 ori numărul mic și numărul mare 18, aflați numerele.
- 7p b) Pentru a deveni de 2 ori mai mare unul ca altul, avem voie să le mărim cu același număr. Cât la sută este acesta din numărul mic?
- 7p 14. a) Rezolvați ecuația:  $(2x+1)^2-3(2x+1)-10=0$ .
- 7p b) Rezolvați inecuația:  $1+\sqrt{2} < 7+2x$  în  $\mathbb{Z}$ .
15. Se considera un con circular drept având raza, înălțimea și generatoarea exprimate prin trei numere pare consecutive.
- 5p a) Aflați dimensiunile conului.
- 5p b) Aflați aria laterală și volumul conului.
- 4p c) Aflați înălțimea unui trunchi de con, ce s-ar putea obține din conul dat cu aria laterală cât 75% din aria laterală a conului.





**Model**  
**EXAMENUL DE BACALAUREAT-2008**  
 Proba scrisă la **MATEMATICĂ, M 1**

**Prof. Daniela Chiricioiu**

Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Se acordă 10 puncte din oficiu. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete.

**SUBIECTUL I (30 p)**

1. Să se calculeze modulul numărului complex  $\sqrt{5} + i\sqrt{3}$ . 5p
2. Să se calculeze distanța de la punctul  $D(4, 3, 2)$  la planul  $x + 2y + 3z + 6 = 0$ . 5p
3. Să se scrie ecuația cercului cu centrul în  $A(1, 3)$  și de rază 1. 5p
4. Să se determine  $a, b \in \mathbf{R}$ , astfel încât punctele  $A(6, 7)$  și  $C(7, 6)$  să fie pe dreapta de ecuație  $x + ay + b = 0$ . 5p
5. Fie mulțimea  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii  $A$  care conțin cel puțin un număr par. 5p
6. Să se determine cel mai mare element al mulțimii  $\{\cos 1, \cos 2, \cos 3\}$ . 5p

**SUBIECTUL II (30 p)**

1. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , mulțimea  $C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$  și funcția

$$f: C(A) \rightarrow C(A), f(X) = X^6.$$

- a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei  $A$ . 5p
  - b) Să se arate că dacă  $P, Q \in C(A)$ , atunci  $P + Q \in C(A)$  și  $P \cdot Q \in C(A)$ . 5p
  - c) Să se arate că dacă  $X \in C(A)$  și  $f(X) = O_3$ , atunci  $X = O_3$ . 5p
2. Fie  $f \in \mathbf{R}[X]$  un polinom astfel încât  $f(X^2 + 3X + 1) = f(X) \cdot f(X) + 3f(X) + 1$  și  $f(0) = 0$ .
- a) Să se determine  $f(-1)$ . 5p
  - b) Să se determine restul împărțirii polinomului  $f$  la  $X - 5$ . 5p
  - c) Să se demonstreze că  $f = X$ . 5p



**SUBIECTUL III ( 30 p )**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = e^x - 1 - x$ .

a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . 5p

b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ . 5p

c) Să se arate că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbf{R}$ . 5p

2. Se consideră șirurile  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ ,  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n + \frac{2}{3})$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ ,

$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n + \frac{1}{2})$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$  și funcțiile

$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  și  $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln(x + \frac{3}{2}) + \ln(x + \frac{1}{2})$  și

$g(x) = \frac{1}{x+1} - \ln(x + \frac{5}{3}) + \ln(x + \frac{2}{3})$ ,  $\forall x \in (0, \infty)$ .

a) Să se calculeze  $f'(x)$  și  $g'(x)$ ,  $x > 0$ . 5p

b) Să se verifice că  $f'(x) > 0$ ,  $\forall x > 0$  și  $g'(x) < 0$ ,  $\forall x > 0$ . 5p

c) Să se arate că șirul  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  este strict crescător și șirul  $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  este strict descrescător. 5p

“ Ceeace cunoastem este prea puțin .Ceeace nu stim este imens ” .  
Laplace







## EXAMENUL DE BACALAUREAT-2008

Proba scrisă la MATEMATICĂ

Proba D -Model -

Prof. Adrian Stan,

M 2 Filiera tehnologică , Profilul tehnic

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- Se acordă 10 puncte din oficiu.

## SUBIECTUL I (30 p)

- 5p 1) Să se calculeze:  $z = \frac{1+2i}{4+3i}$ .
- 5p 2) Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\sqrt{1+2x} = x+3$ ;
- 5p 3) Să se rezolve ecuația:  $\log_3(5-2x) = 2$ .
- 5p 4) Să se rezolve ecuația:  $2^x + 4^x + 8^x = 84$ .
- 5p 5) Să se calculeze lungimea segmentului determinat de punctele A(1;3), B(3;1).
- 5p 6) Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât aria triunghiului determinat de punctele A, B și C(5,m) să fie egală cu  $5 \text{ cm}^2$ .

## SUBIECTUL II (30 p)

1. Pe  $\mathbb{R}$  se definește legea de compoziție  $x * y = xy - 5x - 5y + 30$ 

- 5p a) Să se determine simetricul lui 10 față de legea de compoziție.
- 5p b) Să se rezolve ecuația  $x * x * x * x * x = 248$
- 5p c) Să se determine cel mai mic număr natural  $n \in \mathbb{N}^*$  cu proprietatea  $6 * 7 * \dots * n \geq 2008$ .

2. În  $M_2(\mathbb{R})$  se consideră matricea  $X(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & -a \\ 4a & 1-2a \end{pmatrix}, \forall a \in \mathbb{R}$ .

- 5p a) Să se arate că  $\forall a \in \mathbb{R}, X(a)$  e inversabilă și să se determine inversa sa;
- 5p b) Pentru  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , să se arate că  $X(a) \cdot X(b) = X(a+b)$ ;
- 5p c) Să se calculeze  $[X(1)]^{2008}$ .

## SUBIECTUL III (20 p)

1. Fie  $f: \mathbb{R} - \{1,3\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$ .

- 5p a) Să se calculeze  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x) - 1}} f(x)$ .
- 5p b) Să se studieze monotonia funcției f.
- 5p c) Să se scrie ecuația tangentei la graficul lui f în punctul  $x=0$ ;

2. Pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , se consideră funcțiile  $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^n}{x+1}$ 

- 5p a) Să se calculeze  $\int_0^1 (x+1) f_{2008}(x)$ .
- 5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $f_1$ , axa OX și dreptele de ecuații  $x=0, x=1$ .
- 5p c) Să se calculeze  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_0^t f_n(x) dx}{t^{n-1}}$ .





## 7. Caleidoscop matematic

### CURIOZITĂȚI MATEMATICE

1. Dacă  $9^2=81$ ,  $99^2=9801$ ,  $999^2=998001$ , atunci cât face  $9999^2$ .
2. Dacă  $1^2=1$ ,  $11^2=121$ ,  $111^2=12321$ , atunci cât face  $1111^2$ .
3. Dacă  $5^2=25$ ,  $15^2=225$ ,  $25^2=625$ ;  $35^2=1225$ ;  $45^2=2025$ , cât face  $95^2$ .

### UNDE ESTE GREȘEA?

1.  $-1=1$ ?  $(-1)^2 = 1 \Rightarrow 2\lg(-1) = \lg 1, \lg(-1) = 0 \Rightarrow -1 = 10^0 \Rightarrow -1 = 1$ ?. Unde este greșea?
2.  $i=0$ ?  $\cos \pi + i \sin \pi = -1 \Rightarrow i = \frac{-1 - \cos \pi}{\sin \pi}$ . Cum  $\cos \pi = -1, \sin \pi = 0$ , aplicăm regula lui

L'Hospital, de unde rezultă,  $i = \frac{\sin \pi}{\cos \pi} = \operatorname{tg} \pi = 0$ . ? Unde este greșea?

3.  $i \in \mathbb{C}$  sau  $i \in \mathbb{R}$ ?

$i^4=1$   $\lg i^4=\lg i$ , rezultă  $4\lg i = \lg 1=0$  de unde  $\lg i = \lg 1$ , rezultă  $i=1$ ? Unde este greșea ?

Să ghicim numere.

(1)

1	9	17	25
3	11	19	27
5	13	21	29
7	15	23	31

(2)

2	10	18	26
3	11	19	27
6	14	22	30
7	15	23	31

(3)

4	12	20	28
5	13	21	29
6	14	22	30
7	15	23	31

(4)

8	12	24	28
9	13	25	29
10	14	26	30
11	15	27	31

(5)

16	20	24	28
17	21	25	29
18	22	26	30
19	23	27	31

Cereți unei persoane să aleagă un număr de la 1 la 31 și să vă spună în ce tabele se găsește numărul respectiv. Plecând de la acest fapt, și făcând un calcul simplu, poți găsi cu ușurință numărul ales. Cum crezi că se procedează ?

Exemplu: Să alegem numărul 25 și să observăm că acesta se găsește în tabelele 1, 4 și 5, prin urmare vom aduna numărul din prima căsuță din aceste tabele și ne dă  $1+8+16$ , este egal cu .....25.

**Au colaborat elevii:** Dragomir Florin, Neagu Ancuța, Popa Andreea, Castravete Miruna, Minea Elena, (clasa a VI-a), Ilie Aura, Luca Marius, Morteciuc Adelina, Săraru Raluca, Sava Bogdan, Răureanu Mădălin, Crevelescu Cristian, Lemnar Lucian, Lazăr Lucian, Spânoche Mircea (clasa a XI-a).





„Plantele se transformă prin cultură  
iar oamenii prin educație”

Rousseau



## 8. Poșta redacției

Dragi cititori, elevi și profesori, iată-ne la primul număr al apariției revistei de matematică „SCLIPIREA MINTII”, o revistă care sperăm noi vrea să adune împreună cât mai mulți profesori de matematică din județul Buzău și nu numai, împreună cu elevii acestora pentru a face din obiectul matematicii o activitate performantă.

Deaceea, sperăm că vă veți alătura și dumneavoastră proiectului nostru, pentru a promova matematica în rândul elevilor, și vă așteptăm cu sugestii pentru a îmbunătăți calitatea acestei reviste, deasemenea, așteptăm din partea profesorilor, materiale pentru viitorul număr, articole, exerciții și probleme cu enunț și rezolvare completă pe adresa redacției, Grup Școlar Tehnic „Sf. Mc. SAVA”, localitatea Berca, jud. Buzău, str. Calea Șoimului, nr. 412, cod 127035 cu mențiunea Pentru revista de matematică „SCLIPIREA MINTII” de asemenea prin intermediul membrilor redacției sau direct pe adresa de mail: [sclipireamintii@yahoo.com](mailto:sclipireamintii@yahoo.com) ;

Informații suplimentare se pot obține la tel (fax) 0238 / 527829 sau vizitând pagina Web:

[www.sclipireamintii.110mb.com](http://www.sclipireamintii.110mb.com)

Elevii care doresc să trimită rezolvările problemelor trebuie să ia legătura cu profesorii lor și să respecte condițiile ca fiecare problemă să fie rezolvată pe o singură foaie cu specificarea numărului problemei, și a autorului ei, iar la sfârșitul soluției să-și treacă numele și prenumele, clasa și profesorul său, școala și localitatea. (Indicativele **P**, **G** și **L** sunt pentru diferențierea pe învățământ primar, gimnazial respectiv liceal) Fiecare elev poate rezolva și trimite problemele destinate clasei în care se află și pe cele ale ultimelor două clase imediat inferioare precum și pe cele din clasele superioare. Fiecare rezolvare corectă și completă se va nota cu un punct iar elevii cu cele mai mari punctaje vor fi menționați în revistă, urmând să fie premiați cu diplome și cărți.

Data finală până când profesorii și elevii pot trimite materialele și rezolvările pentru numărul 2 al revistei „SCLIPIREA MINTII” va fi **30 Noiembrie 2008**. Vă urăm succes și vă așteptăm.

Redacția

