# SCLIPIREA MINTII

REVISTĂ NAȚIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICĂ. PUBLICAȚIE SEMESTRIALĂ, AN XVIII, NR. XXXV, 2025

SM

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEME PROPUSE

ISTORIA MATEMATICII

CALEIDOSCOP MATEMATIC

SM

35



Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

LICEUL TEORETIC DE INFORMATICĂ "ALEXANDRU MARGHILOMAN" , BUZĂU

APRILIE 2025

# SCLIPIREA MINTII 35

Revistă națională de cultură matematică, publicație semestrială, An XVIII, Nr. XXXV APRILIE 2025, BUZĂU

## COLECTIVUL DE REDACTIE



## CUPRINS



GÂNDEȘTE CORECT


**REDACȚIA**
**Liceul Teoretic de Informatică „Alexandru Marghiloman" , Buzău,**
**Strada Ivănețu , Nr. 7, Cod. 120114,**
**Tel. 0238714902**
**E_mail: ady_stan2005@yahoo.com**
**Coordonator proiect: Adrian Stan**


**Tipar: editgraph Buzău, www.editgraph.ro**

„Litera **e** nu se va mai folosi pentru nimic altceva decât pentru această constantă universală pozitivă ( soluția ecuației lnx = 1)”.
**Edmund Landau ( 1837- 1938)**

# 1. Istoria matematicii

## Un număr celebru „ e ”
## și un matematician și ... „mai celebru”, Leonhard Euler

de **Adrian Stan**, Buzău, **Ionel Tudor**-Călugăreni, Giurgiu

Explicația numărului „**e**”- **numărul lui Euler**, denumire dată în cinstea matematicianului, fizicianului și astronomului elvețian **Leonhard Euler** (15.04.1707 – 18.09.1783) este în strânsă legătură cu apariția calculului diferențial și totuși acest număr folosit ca bază a logaritmului natural ar fi fost observat mai întâi la calculul unei sume N la care se adaugă o dobândă anuală **d** de **n** ori pe o perioadă de **t** ani, iar când **n** crește oricât de mult, suma rezultată $S = N \cdot \left(1+\frac{d}{n}\right)^{n\cdot t}$, se apropie de o anumită valoare și anume 2,718 ( când N=1, d=1, t=1). De asemenea, problema studierii ariei de sub hiperbola $y=\frac{1}{x}$ a condus tot la același număr, rolul important al lui „**e**” avea să fie dat în sec. al XVIII-lea de către **Leonhard Euler** ca urmare a importanței pe care a jucat-o funcția exponențială $e^x$ în calculul diferențial.

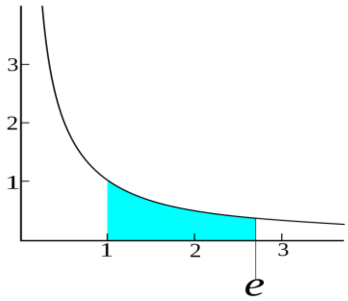
În **1614**, **John Neper** ( 1550 – 1617) ( sau Napier) introducea conceptul de logaritm în cartea „Mirifici logarithmorum canonis descriptio”, „Descrierea minunatului canon al logaritmilor”, după 20 de ani de calcule în care dădea tabele de calcul și proprietăți ale acestui număr, L din relația $N=10^7\cdot\left(1-10^{-7}\right)^L$. John Neper, nu a putut descoperi numărul „**e**” ca bază a logaritmilor deoarece el nu s-a gândit la o bază, conceptul acesta apărând mai târziu la logaritmii zecimali introduși în **1624** de către **Henry Brigss** ( 1561- 1631), dar modul cum Neper a definit el logaritmii, îl putea conduce la descoperirea numărului $\frac{1}{e}$ care era în principiu baza logaritmilor săi.

Invenția logaritmilor a adus enorme beneficii întregii lumi științifice iar următorul pas a fost realizarea unui dispozitiv mecanic care să faciliteze calculul diverselor operații cu logaritmi, aceasta reușindu-i lui **William Oughtread** ( 1574-1660) care a introdus rigla gradată cu două scale logaritmice și folosită peste 350 de ani până la apariția calculatoarelor electronice în 1945 sau a celor de buzunar la începutul anilor 1970.

Pornind de la calculul cuadraturii curbelor de ecuație generală $y=x^n$, ( pentru n =2 avem parabola), **Piere Fermat**( 1607- 1665), continuând metoda exhaustivă a lui **Arhimede** ( cca. 287-212 î.e.n) introduce o serie de dreptunghiuri care să acopere suprafața căreia îi calcula aria. Suma ariilor acestor dreptunghiuri între punctele x = 0 și x = a având bazele în progresie geometrică,

$a,\ ar,\ ar^2,\ ....,\ r\langle 1$, îi aproxima aria de sub graficul lui $y = x^n$, mai bună cu cât numărul de dreptunghiuri erau mai multe și mai înguste adică r tindea către 1.

$A_r = \dfrac{a^{n+1}\cdot(1-r)}{1-r^{n+1}} = \dfrac{a^{n+1}}{1+r+r^2+...+r^n}$ adică $A = \dfrac{a^{n+1}}{n+1}$ (*) unde pentru n =2 se obținea aria obținută de **Arhimede** ( cca. 287 – 212, î.e.n) pentru parabolă, $A = \dfrac{a^3}{3}$. Cuadratura hiperbolei în cazul $y = \dfrac{1}{x}$ ( hiperbola lui **Apollonius**) l-a pus pe Fermat în impas datorită numitorului n+1 din relația (*) care devenea 0. Un alt matematician **Gregorius de Saint – Vincent** ( 1584 – 1667) și un discipol al său, **Anton de Sarasa** ( 1618- 1667) rezolvă această problemă prin descoperirea legăturii dintre creșterea geometrică a bazelor dreptunghiurilor cu creșterea aritmetică a ariilor dreptunghiurilor care acopereau aria de sub hiperbolă, rezultând formula $A(t) = \log t$ unde x = t era un punct de referință cuprins între 1 și t iar baza funcției logaritmice avea să fie notată mai târziu de către Euler.




Printre primele preocupări ale lui **Isaac Newton** (1642 – 1727) a fost să extindă dezvoltarea $(a+b)^n$ și pentru n rațional ( în 1665) și apoi n negativ și n real. Generalizarea dezvoltării binomiale pentru n negativ, l-a condus pe Newton la o serie infinită a cărei sumă este $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + ....$ iar aria de sub hiperbola $y = \dfrac{1}{x+1}$ de la x = 0 la x = t este $\log(t+1)$ ceea ce a condus la seria logaritmică $\log(t+1) = t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t^4}{4} + ......$. Continuând studiul său cu privire la calculul ariilor de sub graficul unor funcții, Newton a ajuns la problema tangentei și a inversei tangentei adică la un algoritm, care astăzi constă în derivarea unei funcții respectiv în integrarea nedefinită. Newton a observat legătura dintre aria $A = \dfrac{a^{n+1}}{n+1}$ de sub curba $y = x^n$, între x=0 și x=a cu formula de integrare pentru $y = x^n$, $A = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, adică problema tangentei și problema ariei sunt inversa celeilalte adică tocmai ideea calculului diferențial și integral.

Primul care a făcut legătura dintre $l = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ și problema dobânzii compuse a fost matematicianul elvețian **Jakob Bernoulli** (1655- 1705) care a arătat că $l \in (2,3)$ cu ajutorul binomului lui Newton.

$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = 1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}+.....+\dfrac{1}{n!}+...$, unde $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot .....\cdot n$.

n = 1: 2=2; n = 2: $2+\dfrac{1}{2} = 2,5$; n = 3: $2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6} = 2,666$;

n = 4: $2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{24} = 2,70833$; n = 5: $2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{120} = 2,71666$, și cu cât este mai mare cu atât se obține că

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718281....$ Tot **Jakob Bernoulli** introducea în 1690 și denumirea de calcul integral.

Studiind seriile infinite, **Jakob Bernoulli** a arătat că seria $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+......+\frac{1}{n^2}+.....$ este convergentă, dar nu a reușit să-i calculeze suma, de abia în **1736, Leonhard Euler( 1707 – 1783)** îi găsește valoarea de $\frac{\pi^2}{6}$ incluzând-o în cartea sa de mecanică „**Mechanica**" unde apare pentru prima dată litera „**e**" fără să știm cărui fapt i se datorează această notație dar se presupune că a ales notația de „**e"** de la prima literă de la cuvântul exponent și nicidecum de la numele său.

Se pare însă că **Euler** folosise notația literei „**e**" pentru valoarea **2,718281**.... cu mult timp înainte, pe când avea 20 de ani într-o lucrare din **1727** dar publicată în **1862** la 80 de la moartea sa ca multele din sutele de note sau articole descoperite și publicate după moartea sa, opera sa întreagă „**Opera Omnia**" conținând 80 de volume mari cu mii de articole și zeci de mii de pagini, **Euler** devenind primul dintre cei mai prodigioși matematicieni ai tuturor timpurilor, înaintea lui Cayley, Cauchy și Poincare.

**Euler** a demonstrat în 1737 că orice număr rațional se poate scrie ca o fracție continuă finită în timp ce un număr irațional se poate scrie ca o fracție continuă infinită, de exemplu, e:

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5+......}}}}}.$$

Lucrarea „**Introductio in analysin infinitorum**" publicată în **1748**, este o carte care se constituie ca fiind baza analizei matematice în care **Euler** introduce și conceptul modern de funcție cu notația f(x). El introduce următoarele funcții $e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ și $\ln x=\lim_{n\to\infty} n\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)^n$ reliefând importanța celor două funcții și a trecerii la limită la infinit. Avem următoarele dezvoltări în serie infinită de puteri ale lui $e^x$:

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+.....$ și $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+.......$ (**).

În relația (**), **Euler** a înlocuit pe x cu ix, unde i era definit ca $i=\sqrt{-1}$ ( unitatea imaginară), obținând trecerea de la numere reale la numere complexe în relația

$e^{ix}=1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+......$ și mai departe prin separarea termenilor

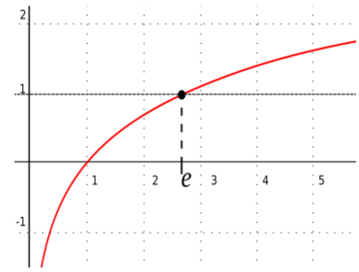
$e^{ix}=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+......\right)+i\cdot\left(x-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}-.......\right)$ obține celebra formulă $e^{ix}=\cos x+i\sin x$. Mai departe, prin înlocuirea lui x cu -x obține și următoarea $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$, iar din ultimele două **Euler** obținea relațiile care poartă denumirea de **formulele lui Euler**:

$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$. De aici, punând în locul lui x pe $\pi$, **Euler** obţinea una dintre cele mai frumoase şi interesante formule în matematică: $e^{\pi i} = -1$, ($\sin \pi = 0,\ \cos \pi = -1$), numită **identitatea lui Euler**.

Se pare că şi alţi matematicieni, printre care **Roger Cotes** ( 1682-1716) şi **Abraham De Moivre** ( 1667-1754) ar fi ajuns la această formulă înaintea lui Euler prin alte relaţii echivalente: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

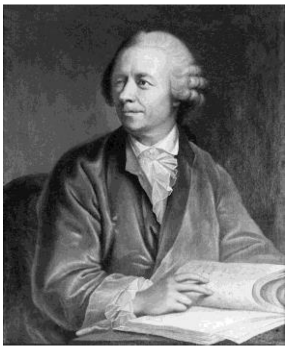
În **1748**, **Euler** cunoştea primele 18 zecimale ale numărului e iar după el mulţi alţi matematicieni s-au preocupat cu găsirea zecimalelor lui e, cum ar fi: William Shanks în 1853 ştia primele 205 zecimale, J.M Boorman cunoştea primele 346 de zecimale în 1884, iar în 1949 John von Neumann găsise circa 2010 zecimale. Apariţia calculatoarelor a facilitat găsirea zecimalelor, astfel că pe 27 aprilie 2007 matematicienii Shigeru Kondo şi Steve Pagliarulo găsiseră un număr de $10^{11}$ zecimale ale lui e.

Un fapt interesant este felul cum numărul **„e”** intervine în teorema numerelor prime – o conjectură enunţată de **C. F. Gauss** ( 1777- 1855). Acesta încă de la vârsta de 15 ani era fascinat de găsirea unui model de determinare a numerelor prime, iar conjectura lui **Christian Goldbach**(1690-1764) – că orice număr par mai mare decât 4 este suma a două numere prime l-a intrigat şi mai mult. Gauss a cercetat tabelul de numere prime a lui **J.H. Lambert** ( 1728-1777) şi a încercat să găsească o regulă după care se distribuie numerele prime mai mici decât un întreg x, introducând notaţia $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ sau $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1$ ceea ce însemna că probabilitatea ca un întreg dat să fie prim este aproape egal cu $\frac{1}{\ln x}$ când x creşte nemărginit. De abia în **1896** matematicienii **S. Hadamard** (1865- 1963) şi **Charles de la Valle Poussin** ( 1866-1962) au demonstrat conjectura lui Gauss reliefând astfel că distribuţia medie a numerelor prime este legată de funcţia logaritmică şi indirect de numărul **e**.




Dar comunitatea matematică se întreba ce fel de număr este **e** ? Euler îi demonstrase iraţionalitatea în 1737 dar existau matematicieni care se întrebau dacă există numere iraţionale nealgebrice cum era şi francezul **Joseph Liouville** ( 1809- 1882) care descoperise într-un final că **„e”** nu e soluţia niciunei ecuaţii pătratice cu coeficienţi întregi. Doar matematicianul francez **Charles Hermite** ( 1822- 1901) reuşeşte în **1873** să demonstreze complet transcendenţa numărului lui Euler cât şi a lui $e^2$, adică **„e”** nu este soluţia niciunei ecuaţii polinomiale cu coeficienţi întregi.

Ulterior, în **1882** germanul **Carl Lindemann** ( 1852-1939) descoperă transcendenţa lui $\pi$ şi o dată cu aceasta a fost deschisă calea pentru găsirea şi a altor numere transcendente, $\pi^e$, $\pi^\pi$, $e^e$.



O scurtă introspecţie în viaţa lui **Euler** ne dezvăluie faptul că acesta s-a născut la Basel în Elveţia pe data de 15 aprilie 1707 cu un tată pastor luteran care studiase matematica împreună cu **Johann Bernoulli** ( 1667 – 1748) sub îndrumarea lui **Jakob Bernoulli** ( 1655 – 1654).

Trebuie menţionat că în familia **Bernoulli** care a dat o seamă de matematicieni şi fizicieni de prim rang, **Jakob** a fost cel dintâi care propusese în **1690** în revista „Acta eruditorum” a lui Leibnitz, problema cunoscută sub denumirea de **„problema lănţişorului”**, şi rezolvată ulterior de fratele său **Johann** dar şi de Leibniz şi C. Huygens în moduri diferite.

Ecuația găsită a lănțișorului este ecuația unei curbe $y = \frac{\left(e^{ax} + e^{-ax}\right)}{2a}$ care depinde de densitatea sa și de tensiunea la care este supus iar pentru a=1 se obține ecuația $y = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ cu mențiunea că atunci nu se folosea un simbol pentru e și nici pentru funcția exponențială, dar era rezultatul începutului folosirii calculului diferențial al lui Leibniz.

Interesant este faptul că, de mic copil, Euler a fost îndrumat de tatăl său să studieze teologia și limba greacă pentru a deveni pastor, dar întâlnirea lui cu marele matematician Johann Bernoulli pe când avea doar 13 ani, a avut o influență covârșitoare care i-a determinat viitoarea carieră de matematician.

**Johann Bernoulli** (1667- 1705) i-a devenit mentor lui **Euler** și văzând în el un talent deosebit, i-a cerut tatălui acestuia să-i canalizeze eforturile către matematică. Așadar, **Euler** deși își luase un titlu de master în filosofie la facultatea din Basel și își terminase studiile teologice, renunță la acestea și se apucă de studiat matematica, absolvind în 1726 Universitatea din Basel.

În **1727** publică diverse articole printre care unul este premiat cu locul doi de Academia din Paris, dar acest lucru nu la descurajat și în întreaga viață a obținut apoi de 12 ori premiul Academiei din Paris.

În același an la Basel, își susține doctoratul cu o teză despre acustică și apoi aplică pentru un post de profesor la Universitatea din Basel dar nu îl obține ceea ce îl face să accepte invitația de a preda la Sankt Petersburg, așa că în primăvara lui 1727 pe 17 mai ajunge la Academia din Sankt Petersburg, patronată de țarina Ecaterina I a Rusiei, locul unde predau cei mai mari matematicieni ai vremii, printre care și prietenul său Daniel Bernoulli sau Jakob Hermann, Christian Goldbach și mulți alții.

Ajuns aici, **Euler** a învățat foarte repede limba rusă și după plecarea lui Daniel Bernoulli din Rusia, Euler ajunge în 1931 șef al departamentului de matematică. Muncește foarte mult în această perioadă, înființează o revistă în care își publică numeroase lucrări, se ocupă de cartografierea teritoriului Rusiei, ajungând ca în 1735 la vârsta de 28 de ani să sufere o congestie cerebrală și să își piardă vederea la ochiul drept.

Continuă să lucreze excesiv iar în 1738 și 1740 obține marele premiu al Academiei din Paris propulsându-l printre marile figuri ale oamenilor de știință. După 14 ani de ședere în Rusia, și după începutul unor vremuri tulburi acolo, **Euler** acceptă în 1941 invitația lui Frederic al II-lea de a veni la Academia din Prusia, viitoarea Academie din Berlin, pentru a preda acolo chiar din poziția de director al departamentului de matematică.

Avea să rămână aici 25 de ani până în 1766 ocupându-se de numeroase activități inclusiv supervizarea Observatorului Astronomic, Bibliotecii Academiei și a Grădinii Botanice, s-a ocupat de problemele financiare ale Academiei, a publicat numeroase calendare și hărți aducând venituri substanțiale pentru Academie.

În **1766**, la vârsta de 59 de ani și complet orb se reîntoarce la Sankt Petersburg unde timp de 17 ani avea să dea dovadă de o productivitate extraordinară, toate cercetările sale le făcea mintal, putea elabora calcule dificile după care le dicta fiicei sale. Cunoștea pe dinafară și putea să recite de oriunde din vasta operă „Eneida”.

O întâmplare povestește faptul că, odată au venit la el doi studenți care calculaseră suma a 17 termeni dintr-o serie convergentă însă separat fiecare dintre ei găsiseră o diferență la a 15-a zecimală. L-au întrebat pe Euler care din ei a făcut calculul corect și atunci, matematicianul calculând și el însă fără a lua creion și hârtie a reușit să determine mintal a 15-a zecimală corect.

**Leonhard Euler** este considerat cel mai prodigios om de știință al lumii, în întreaga sa activitate a avut lucrări științifice din domeniul analizei matematice, algebrei, teoriei numerelor, topologiei, fizicii, opticii, astronomiei, și altele din domeniul tehnicii

În timpul vieții a fost membru a opt academii de științe dintre care, al Academiei de Științe din Berlin, Prusia, cât și la cea din Sankt Petersburg, Rusia, împărțindu-și viața între cele două orașe, respectiv țări.

**Euler** a reprezentat o școală pentru urmașii săi, un munte de cunoștințe greu de întrecut, numit în glumă de contemporani, "analiza în carne și oase".

Contribuțiile sale în matematică sunt uriașe, el fiind singurul matematician al cărui nume a fost atribuit la două constante foarte importante în matematică, numărul lui Euler, e=2,718281,...... și constanta lui Euler c=0,57721..... .

**Euler** a enunțat o impresionantă colecție de teoreme, formule și definiții dintre care amintim: definiția logaritmului unui număr pozitiv, definirea ecuațiilor reciproce, studiul teoriei cu privire la rezolvarea ecuațiilor de grad mai mare ca 4 prin radicali, definirea legii reciprocității cuadratice, funcția indicatorul lui Euler, **i-** unitatea imaginară de la numere complexe, **f(x)-** simbolul pentru notația unei funcții în variabila x, a dat dezvoltări în serie, a prezentat metode de integrare, a pus bazele calculului variațional, în calculul diferențial a introdus noțiunile de soluție particulară și soluție general (1775). De asemenea, în geometrie, o formulă de a sa care-i poartă numele, exprimă curbura normală a unei curbe pe o suprafață.

Alte cărți importante în afara celor amintite au fost "Institutiones calculi differentialis" (1755), și "Institutionum calculi integralis" (1768–1770).

În **1732**, **Euler** a demonstrat că numărul Fermat pentru n = 5, $F_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297$ nu este prim deoarece se divide cu 641, aceasta după ce, Fermat anunțase conjectura sa că, "toate numerele de forma $F_n = 2^{2^n} + 1$ sunt prime", după ce făcuse observațiile că numerele $F_0 = 3,\ F_1 = 5,\ F_2 = 17,\ F_3 = 257$ sunt prime.

În **1737**, el arată că toate fracțiile raționale pot fi exprimate în fracții continue finite și numerele iraționale se pot transforma în fracții continue infinite.

În **1747**, în urma calculelor efectuate, reușește să realizeze primul microscop cu lentilă dublă care evită devierele cromatice ale sistemului optic din care era format primul microscop cu o lentilă al naturalistului englez Robert Hooke(1665). Euler, a observat că o lentilă convexă și una concavă conduc împreună la fixarea frecvențelor luminii într-un singur punct al planului microscopului nemaiexistând acea imagine neclară a perspectivei.

În **1750**, **Euler** a introdus noțiunea de rest pătratic pentru a rezolva ecuația lui Pell – un tip de ecuație diofantică pe care **Euler** i-o atribuie din greșeală matematicianului englez John Pell (01.03.1611 – 12.12.1685), care, de altfel a fost preocupat în teoria numerelor de studierea ecuațiilor diofantice.

Astfel de ecuații, cum ar fi $x^2 - ny^2 = 1$ sau $nx^2 + 1 = y^2$ cunoscute sub numele de ecuații Pell, au fost studiate și de Lagrange care a arătat că au o infinitate de soluții numere întregi distincte, n nefiind pătrat perfect.

Euler face afirmația că ecuația $x^2 \equiv m (\mathrm{mod}\ p)$ are soluții dacă m este rest pătratic al lui p.

În **1758**, a introdus noțiunea de indicator al numărului natural n, și anume, $\varphi(n)$. Acesta semnifică numărul tuturor numerelor prime cu n mai mari sau egale cu 1 și mai mici decât n.

$\varphi(n) = \left|\left\{ a \middle| 1 \le a \langle n,\ (a,n) = 1 \right\}\right|$. Astfel, dacă $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot ..... \cdot p_k^{\alpha_k}$ este descompunerea în puteri de factori primi ai lui n, atunci, indicatorul lui Euler este egal cu

$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_3}\right)\cdot....\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$. Pe lângă o serie de proprietăţi pe care le-a dat indicatorului $\varphi(n)$ se regăseşte şi următoarea: $\varphi(m\bullet n)=\varphi(m)\bullet\varphi(n),\ \forall(m,n)=1$, iar pentru n prim rezultă $\varphi(n)=n-1$. Tot în **1758**, **Euler** generalizează mica teoremă a lui Fermat sub forma: $a^{\varphi(n)}-1=M_n$, unde $M_n$ este un multiplu de n, iar a şi n sunt prime între ele.

Teoria fracţiilor continue a adus-o sub o formă de prezentare şi scriere care este actuală dând şi relaţia dintre reduse: $P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n=(-1)^n$. De asemenea, găseşte rădăcina iraţională pozitivă a ecuaţiei $x^2-px-q=0$ sub forma unei fracţii continue, $x=p+\cfrac{q}{p+\cfrac{q}{p+.....}}$, sau $x=p+\frac{q}{x}$. Mai târziu, îl va aproxima pe $\lg 2$ prin fracţii continue astfel, $\lg 2=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{16}{1+...}}}}}$.

În **1755**, extinde regula lui l'Hospital pentru cazurile de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}, 0\bullet\infty, \infty-\infty$.

În **1772**, **Euler** a demonstrat că numărul $2^{31}-1$ = 2,147,483,647 este un număr prim Mersenne iar *identitatatea lui Euler,* $e^{i\cdot\pi}+1=0$ este considerată una din cele mai frumoase formule date vreodată.

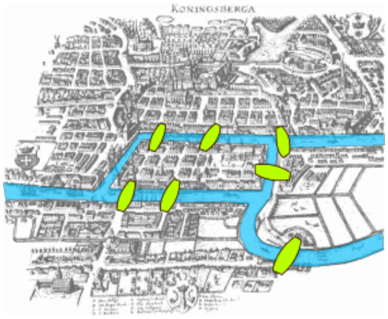
În **1774**, **Euler** generalizează relaţia lui Lagrange, $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+....+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$ sub forma $C_n^0\cdot C_m^k+C_n^1\cdot C_m^{k-1}+C_n^2\cdot C_m^{k-2}+...+C_n^k\cdot C_m^0=C_{n+m}^k$.

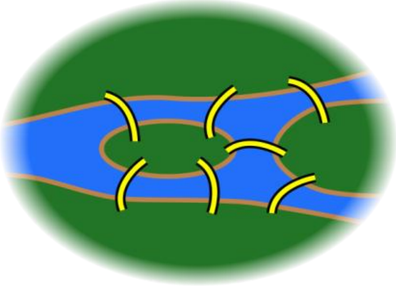
În **1776, Euler** demonstrează "teorema lu Fermat" pentru n = 3, şi anume, "ecuaţia $x^n+y^n=z^n,\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 3$ nu are soluţii în numere întregi".

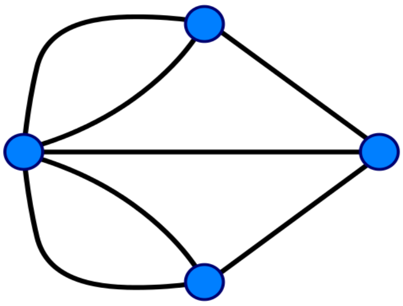
S-a preocupat de asemenea şi de domeniul Logicii, fiind astăzi citat la binecunoscutele **diagrame Venn- Euler**.

În fizică şi astronomie, a dat o serie de *ecuaţii diferenţiale* şi a calculat paralaxa Soarelui. S-a preocupat şi de optică, nefiind de acord cu teoria corpusculară a luminii enunţată de Newton.

În topologie este cunoscută celebra sa problemă cu podurile din Königsberg care a constituit începutul fundamentării teoriei grafurilor.





**Bibliografie:**

**1. Adrian Stan, şi colab; O scurtă istorie a matematicii. Editura Editgraph. Buzău. 2015;**

**2. Eli Maor. e.Povestea unui număr. Editura Theta. Bucureşti. 2006;**

**3. https://ro.wikipedia.org/wiki**

**„ O personalitate mare e ca un munte : îți lărgește orizontul dacă stai pe umerii săi, dacă-i stai însă la genunchi îți strâmtează zarea împiedicându-te să vezi și ce mai înainte ai văzut.”**

**(Lucian Blaga)**
**(1895 - 1961)**

# 2. Articole și note matematice

## Asupra unei probleme din RMM

**de Titu Zvonaru, Comănești**

În revista **Romanian Mathematical Magazine**, Nr. 42, Ediția de Toamnă, 2024, la pagina 105 a fost publicată problema:

**J.2408**. Să se demonstreze că dacă $x, y, z > 0$ și $m \geq 1$, atunci

$$\frac{x}{mx+y+z}+\frac{y}{x+my+z}+\frac{z}{x+y+mz}\leq\frac{3}{m+2}$$ (*Neculai Stanciu* și *George Florin Șerban*)

În afară de obținerea unei soluții, este interesant de a vedea care este rolul condiției $m \geq 1$ și ce se întâmplă dacă $0 \leq m < 1$.

**I.** Folosind metoda deligamentării, obținem următoarea identitate:

$$\frac{x}{mx+y+z}+\frac{y}{x+my+z}+\frac{z}{x+y+mz}-\frac{3}{m+2}=$$

$$=\frac{x}{mx+y+z}-\frac{1}{m+2}+\frac{y}{x+my+z}-\frac{1}{m+2}+\frac{z}{x+y+mz}-\frac{1}{m+2}=$$

$$=\frac{1}{m+2}\left(\frac{x-y+x-z}{mx+y+z}+\frac{y-z+y-x}{x+my+z}+\frac{z-x+z-y}{x+y+mz}\right)=$$

$$=\frac{1-m}{m+2}\left(\frac{(x-y)^2}{(mx+y+z)(x+my+z)}+\frac{(y-z)^2}{(x+my+z)(x+y+mz)}+\frac{(z-x)^2}{(x+y+mz)(mx+y+z)}\right).$$

Rezultă imediat că inegalitatea este adevărată dacă $m \geq 1$, iar dacă $0 \leq m < 1$, atunci are loc inegalitatea de sens contrar

$$\frac{x}{mx+y+z}+\frac{y}{x+my+z}+\frac{z}{x+y+mz}\geq\frac{3}{m+2}.$$

**II.** Fiind o inegalitate cu fracții, ne gândim la Bergström. Folosind un „truc’’ cunoscut, scriem inegalitatea sub forma echivalentă

$$\frac{1}{m}-\frac{x}{mx+y+z}+\frac{1}{m}-\frac{y}{x+my+z}+\frac{1}{m}-\frac{z}{x+y+mz}\geq\frac{3}{m}-\frac{3}{m+2}$$

$$\frac{y+z}{mx+y+z}+\frac{z+x}{x+my+z}+\frac{x+y}{x+y+mz}\geq\frac{6}{m+2}.$$

Aplicând inegalitatea lui Bergström, după câteva calcule simple, rămâne de arătat că

$$(m-1)(x^2+y^2+z^2)\geq(m-1)(xy+yz+zx).$$

Ultima inegalitate este adevărată pentru $m \geq 1$. Această soluție nu ne spune nimic despre situația când $0 \leq m < 1$.

**III.** Pentru $m = 1$ avem egalitate. Dorind să avem numitori mai simpli, putem încerca o substituție. Notând $mx + y + z = a,\ x + my + z = b,\ x + y + mz = c$ obținem

$$x = \frac{(m+1)a - b - c}{(m+2)(m-1)},\ y = \frac{(m+1)b - c - a}{(m+2)(m-1)},\ z = \frac{(m+1)c - a - b}{(m+2)(m-1)}.$$

Inegalitatea dorită se scrie

$$\frac{(m+1)a - b - c}{(m+2)(m-1)a} + \frac{(m+1)b - c - a}{(m+2)(m-1)b} + \frac{(m+1)c - a - b}{(m+2)(m-1)c} \leq \frac{3}{m+2}$$

$$\frac{b+c}{(m-1)a} + \frac{c+a}{(m-1)b} + \frac{a+b}{(m-1)c} \geq \frac{6}{m-1} \Leftrightarrow \frac{1}{m-1}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geq \frac{6}{m-1}.$$

Deoarece $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, ultima inegalitate este adevărată pentru $m > 1$, și are sens contrar dacă $0 < m < 1$.

**IV.** Inegalitatea este omogenă; putem presupune că $x + y + z = 1$. Vom încerca o spargere folosind inegalitatea $\frac{a}{1+(m-1)a} \leq \frac{9a + m - 1}{(m+2)^2}$, echivalentă cu $(m-1)(3a-1)^2 \geq 0$, adevărată pentru $m \geq 1$. Obținem

$$\frac{x}{1+(m-1)x} + \frac{y}{1+(m-1)y} + \frac{z}{1+(m-1)z} \leq \frac{9}{(m+2)^2} + \frac{3(m-1)}{(m+2)^2} = \frac{3}{m+2}.$$

**Comentarii**:

**1.** Din cele de mai sus, pentru $m = 0$ obținem cunoscuta inegalitate a lui Nesbitt

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

**2.** Dacă numitorii sunt pozitivi, inegalitatea este adevărată și pentru $m < 0$. De exemplu, dacă $a, b, c$ sunt laturile unui triunghi, putem considera $m = -1$ și obținem inegalitatea

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

**3.** Pentru $m = 13$ se obține problema C:1079 din G.M.-B nr. 1/1991.

**4.** În [1] este studiată inegalitatea mai generală

$$\frac{b_1x + b_2y + b_3z}{a_1x + a_2y + a_3z} + \frac{b_3x + b_1y + b_2z}{a_3x + a_1y + a_2z} + \frac{b_2x + b_3y + b_1z}{a_2x + a_3y + a_1z} \geq (\leq) \frac{3(b_1 + b_2 + b_3)}{a_1 + a_2 + a_3}.$$

**Bibliografie**

**1. T. Zvonaru**, *Generalizarea unor inegalități*, G.M.-B nr. 9/1994

## Asupra unei probleme pentru ''Ciclul Primar''

**de Neculai Stanciu,** Buzău

Problemă dată la Digi24 de *Daniela Vasile* ca provocare pentru *Nicușor Dan:* să se determine cel mai mic număr natural cu proprietatea că dacă ultima cifră se mută la începutul numărului acesta devine de două ori mai mare decât cel inițial.

I. Dorim să aflăm cu ajutorul calculatorului toate numerele naturale cu proprietatea că dacă ultima cifră se mută la începutul numărului acesta devine de două ori mai mare decât cel inițial.

*Soluție.* Fie $X = \overline{a_1a_2..a_n}$ și $Y = \overline{a_1a_2..a_{n-1}}$; $X = \overline{Ya_n}$, (*) . Din enunț reiese succesiv că:

$(P)$ $\overline{a_na_1a_2..a_{n-1}} = 2 \cdot \overline{a_1a_2..a_{n-1}a_n} \Leftrightarrow 10^{n-1}a_n + Y = 20Y + 2a_n \Leftrightarrow a_n(10^{n-1} - 2) = 19Y \Leftrightarrow$

$a_n \cdot \dfrac{10^{n-1} - 2}{19} = Y$, (1). Deci, $\dfrac{10^{n-1} - 2}{19} = m \in N$, (2); $Y = a_n \cdot m$, (3).

Rezolvând ecuația (2) cu ajutorul calculatorului găsim următoarele soluții:

1) $m =$ 5263157894736842 , $n =$ 18;
2) $m =$ 52631578947368421052631578947368 42, $n = 36$;
3) $m =$ 52631578947368421052631578947368421052631578947368 42, $n = 54$;
4) $m =$ 5263157894736842105263157894736842105263157894736842105263157894736842;
$n = 72$;
5) $m =$
52631578947368421052631578947368421052631578947368421052631578947368421052631578
94736842; $n = 90$.

Evident $a_1 \neq 0, a_n \neq 0, a_n \neq 1$. Din relația (3) pentru $a_n = 2$ obținem următoarele numere $Y$:

1) $Y =$ 10526315789473684;
2) $Y =$ 10526315789473684210526315789473684;
3) $Y =$ 10526315789473684210526315789473684210526315789473684;
4) $Y =$ 1052631578947368421052631578947368421052631578947368421052631578947368 4;
5) $Y =$
10526315789473684210526315789473684210526315789473684210526315
789473684.

Deci, din relația (*), rezultă că numerele căutate pentru $a_n = 2$ sunt:

1) $X =$ 105263157894736842;
2) $X =$ 105263157894736842105263157894736842;
3) $X =$ 105263157894736842105263157894736842105263157894736842;
4) $X =$ 105263157894736842105263157894736842105263157894736842105263157894736842;
5) $X =$ 10526315789473684210526315789473684210526315789473684210526315789473684210
5263157894736842.

Din relația (3) pentru $a_n = 3$ obținem următoarele numere $Y$:

6) $Y =$ 15789473684210526;
7) $Y =$ 15789473684210526315789473684210526;
8) $Y =$ 15789473684210526315789473684210526315789473684210526;
9) $Y =$ 10526315789473684210526315789473684210526315789473684210526315789473684;
10) $Y =$
15789473684210526315789473684210526315789473684210526315789473684210526315789473
684210526.

Apoi, din (*), deducem numerele căutate pentru $a_n = 3$:

6) $X = 157894736842105263$;
7) $X = 157894736842105263157894736842105263$;
8) $X = 157894736842105263157894736842105263157894736842105263$;
9) $X =$
$157894736842105263157894736842105263157894736842105263157894736842105263$;
10) $X =$
$1578947368421052631578947368421052631578947368421052631578947368421052631578947368421052 63$.

Din relația (3) pentru $a_n = 4$ obținem următoarele numere $Y$:

11) $Y = 210526315789473 68$;
12) $Y = 210526315789473684210526315789473 68$;
13) $Y = 210526315789473684210526315789473684210526315789473 68$;
14) $Y = 526315789473684210526315789473684210526315789473684210526315789473684 2$;
15) $Y =$
$21052631578947368421052631578947368421052631578947368421052631578947368421052631578947368$.

Atunci, din (*) obținem numerele căutate pentru $a_n = 4$:

11) $X = 210526315789473684$;
12) $X = 210526315789473684210526315789473684$;
13) $X = 210526315789473684210526315789473684210526315789473684$;
14) $X =$
$5263157894736842105263157894736842105263157894736842105263157894736842 4$
15) $X =$
$21052631578947368421052631578947368421052631578947368421052631578947368421052631578947368 4$.

Așadar, cu ajutorul calculatorului am găsit 15 soluții !

Pentru $a_n > 4$, relația problemei, i.e. $(P)$ $\overline{a_n a_1 a_2 .. a_{n-1}} = 2 \cdot \overline{a_1 a_2 .. a_{n-1} a_n}$ nu mai este posibilă !

Prin urmare cel mai mic număr căutat este $X = 105263157894736842$.

**II.** Vom demonstra că există o infinitate de numere care au proprietatea: dacă ultima cifră se mută la începutul numărului, atunci acesta devine de două ori mai mare decât cel inițial.

*Soluție.* Fie $X = \overline{a_1 a_2 .. a_n}$ și $Y = \overline{a_1 a_2 .. a_{n-1}}$; $X = \overline{Y a_n}$, (*). Din enunț reiese succesiv că:

$(P)$ $\overline{a_n a_1 a_2 .. a_{n-1}} = 2 \cdot \overline{a_1 a_2 .. a_{n-1} a_n} \Leftrightarrow 10^{n-1} a_n + Y = 20Y + 2a_n \Leftrightarrow a_n (10^{n-1} - 2) = 19Y \Leftrightarrow$

$a_n \cdot \dfrac{10^{n-1} - 2}{19} = Y$, (1). Deci, $\dfrac{10^{n-1} - 2}{19} = m \in N$, (2); $Y = a_n \cdot m$, (3).

Observăm cu ajutorul calculatorului că relația (2) se verifică pentru $n \in \{18, 36, 54, 72, 90\}$, deci pentru primii cinci multipli nenuli ai lui 18.

Vom demonstra că relația (2) este adevărată pentru orice număr natural nenul $n$, $n = M_{18}$, i.e. $19 \mid 10^{18n-1} - 2$, pentru orice număr natural nenul $n$.

*O soluție elementară* (la nivel de gimnaziu).

Într-adevăr, $(10^{17} - 2) : 19 = 5263157894736842$; $19 \mid 10^{17} - 2$; $10^{17} = M_{19} + 2$;

$10^{18n-1} - 2 = 10^{17n} \cdot 10^{n-1} - 2 = (M_{19} + 2)^n \cdot 10^{n-1} - 2 =$

$= (M_{19} + 2^n) \cdot 10^{n-1} - 2 = M_{19} + 2^n \cdot 10^{n-1} - 2 = M_{19} + 2(20^{n-1} - 1) =$

$= M_{19} + 2((19+1)^{n-1} - 1) = M_{19} + 2(M_{19} + 1 - 1) = M_{19}$.

*O soluție cu metoda inducției matematice* (la nivel de liceu – clasa a IX-a).

$P(n): 10^{18n-1} - 2 = M_{19}$

$P(1): 10^{17} - 2 = M_{19}$, adevărată. Presupunem $P(k): 10^{18k-1} - 2 = M_{19}$, adevărată și demonstrăm $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

$P(k+1): 10^{18(k+1)-1} - 2 = 10^{18k-1} \cdot 10^{18} - 2 = (10^{18k-1} - 2 + 2) \cdot 10^{18} - 2 = M_{19} + 2(10^{18} - 1) =$

$= M_{19} + 20 \cdot 10^{17} - 2 = M_{19} + (19+1) \cdot 10^{17} - 2 = M_{19} + 10^{17} - 2 = M_{19}$.

Deci, $10^{18n-1} - 2 = M_{19}$.

*O soluție cu mică teoremă a lui Fermat* (la nivel de liceu – clasa a XII-a). $a^{p-1} = 1(\text{mod } p)$.

$10^{18} = 1(\text{mod } 19)$; $10^{18n-1} - 2 = 10^{18(n-1)+17} - 2 = 10^{17} - 2 = M_{19}$.

Deoarece $19 \mid 10^{18n-1} - 2$ este adevărată pentru orice număr natural nenul $n$, reiese că există o infinitate de numere care verifică $(P)$ $\overline{a_n a_1 a_2 .. a_{n-1}} = 2 \cdot \overline{a_1 a_2 .. a_{n-1} a_n}$.

## Asupra unei probleme din The American Mathematical Monthly

de Marius Drăgan și Neculai Stanciu

În revista **The American Mathematical Monthly** (A.M.M.), Vol. 129, Nr. 2, Februarie, 2022, a fost propusă următoarea problemă:

**12303.** *Propusă de George Apostolopoulos, Messolonghi, Grecia*. Fie $R$ și $r$ razele cercurilor circumscris și, respectiv înscris, triunghiului $ABC$. Fie $D$, $E$, și $F$ pe laturile $BC$, $CA$, și $AB$ astfel încât $AD$, $BE$, și $CF$ sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului $ABC$. Demonstrați că:

$$\frac{FD}{AB+BC} + \frac{DE}{BC+CA} + \frac{EF}{CA+AB} \le \frac{3}{8}\left(1 + \frac{R}{2r}\right).$$

Scopul notei de față este de a prezenta două întăriri pentru inegalitatea de mai sus.

**I.** Cu teorema bisectoarei avem $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$, deci $BD = \frac{ac}{b+c}$. Cu teorema cosinusului avem

$$FD = \sqrt{BF^2 + BD^2 - 2BF \cdot BD \cdot \cos B} = \sqrt{\left(\frac{ac}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 - \frac{2a^2c^2}{(a+b)(b+c)} \cdot \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}} =$$

$$= \sqrt{\frac{abc \cdot (-a^3 + b^3 - c^3 - a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c - bc^2 + 3abc)}{(a+b)^2(b+c)^2}}.$$

Deoarece $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le \sqrt{3(x+y+z)}$, $\forall x, y, z > 0$, obținem

$$\sum_{cyc} \frac{FD}{AB+BC} = \frac{\sqrt{abc}}{\prod_{cyc}(a+b)} \sum_{cyc} \sqrt{-a^3 + b^3 - c^3 - a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c - bc^2 + 3abc} \le$$

$$\le \frac{\sqrt{abc}}{\prod_{cyc}(a+b)} \sqrt{3(-a^3 - b^3 - c^3 + a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2) + 9abc} =$$

$= \dfrac{\sqrt{abc}}{\prod_{cyc}(a+b)}\sqrt{3(-\sum_{cyc} a^3 + \prod_{cyc}(a+b) + 7abc)}$. Deoarece, $\sum_{cyc} ab = p^2 + r^2 + 4Rr$,

$$\prod_{cyc}(a+b) = \prod_{cyc}(2p-c) = 8p^3 - 2p\cdot 4p^2 + \sum_{cyc} ab\cdot 2p - abc = \sum_{cyc} ab\cdot 2p - 4Rrp =$$

$= 2p(p^2 + r^2 + 4Rr - 2Rr) = 2p(p^2 + 2Rr + r^2)$ și $\sum_{cyc} a^3 = 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr)$, atunci ultima inegalitate devine:

$$\sum_{cyc}\frac{FD}{AB+BC} \le \frac{\sqrt{4Rrp}}{2p(p^2+2Rr+r^2)}\sqrt{3[-2p(p^2-6Rr-3r^2)+2p(p^2+2Rr+r^2)+28Rrp]} =$$

$= \dfrac{\sqrt{12Rr^2(11R+2r)}}{p^2+2Rr+r^2}$. Utilizând inegalitatea lui Gerretsen, adică $p^2 \ge 16Rr - 5r^2$, obținem:

$$\sum_{cyc}\frac{FD}{AB+BC} \le \frac{\sqrt{12Rr^2(11R+2r)}}{18Rr-4r^2} = \frac{\sqrt{3R(11R+2r)}}{9R-2r}.$$

Vom demonstra că inegalitatea de mai sus este o întărire a inegalității din problema 12303. Într-adevăr, dacă notăm $x = R/r$, $x \ge 2$, avem succesiv inegalitățile:

$$\frac{\sqrt{3R(11R+2r)}}{9R-2r} \le \frac{3}{8}\left(1+\frac{R}{2r}\right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3x(11x+2)}}{9x-2} \le \frac{3}{8}\left(1+\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3\cdot 256\cdot(11x+2) \le 9(x+2)^2(9x-2)^2 \Leftrightarrow 3(x-2)(243x^3 + 1350x^2 + 436x - 24) \ge 0$, adevărată.

Prin urmare, am obținut următoarea întărire pentru inegalitatea problemei din A.M.M.:

$$\sum_{cyc}\frac{FD}{AB+BC} \le \frac{\sqrt{12Rr^2(11R+2r)}}{p^2+2Rr+r^2} \le \frac{\sqrt{3R(11R+2r)}}{9R-2r} \le \frac{3}{8}\left(1+\frac{R}{2r}\right), (*).$$

**II.** Acum, vom obține altă rafinare pentru inegalitatea problemei din A.M.M.

Fie $p_1 = \sqrt{2R^2 + 10Rr - r^2 - 2\sqrt{R(R-2r)^3}}$. Din teorema lui Blundon știm că $p_1 \le p$, deci

$$\sum_{cyc}\frac{FD}{AB+BC} \le \frac{\sqrt{12Rr^2(11R+2r)}}{p^2+2Rr+r^2} \le \frac{\sqrt{12Rr^2(11R+2r)}}{2R^2+12Rr-2\sqrt{R(R-2r)^3}}.$$

Vom demonstra că:

$$\frac{\sqrt{12Rr^2(11R+2r)}}{2R^2+12Rr-2\sqrt{R(R-2r)^3}} \le \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{12x(11x+2)}}{2x^2+12x-2\sqrt{x(x-2)^3}} \le \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 16\cdot 12x(11x+2) \le 9\left(2x^2+12x-2\sqrt{x(x-2)^3}\right)^2$, care după câteva calcule algebrice este echivalentă cu $3x(x-2)\left(3x^2+15x+14-3(x+6)\sqrt{x(x-2)}\right) \ge 0$, $\forall x \ge 2$, adevărată, deoarece $(3x^2+15x+14)^2 - 9x(x-2)(x+6)^2 \ge 0, \forall x \ge 2 \Leftrightarrow 201x^2 + 1068x + 196 \ge 0, \forall x \ge 2$.

Prin urmare, am obținut următoarea întărire:

$$\sum_{cyc}\frac{FD}{AB+BC} \le \frac{\sqrt{12Rr^2(11R+2r)}}{p^2+2Rr+r^2} \le \frac{\sqrt{12Rr^2(11R+2r)}}{2R^2+12Rr-2\sqrt{R(R-2r)^3}} \le \frac{3}{4} \le \frac{3}{8}\left(1+\frac{R}{2r}\right), (**).$$

# O extindere a problemei J.3041 din RMM nr. 46

**de Titu Zvonaru**

**Problema J.3041.** Dacă $a,b,c>0$, atunci demonstrați inegalitatea:

$$\sum_{ciclic}\frac{1}{2(2a+b+c)}\geq\sum_{ciclic}\frac{1}{3(a+b)+2c}$$ (*Mihaly Bencze și Neculai Stanciu*).

*O Soluție.* $\sum_{ciclic}\frac{1}{2(2a+b+c)}\geq\sum_{ciclic}\frac{1}{3(a+b)+2c}\Leftrightarrow\sum_{cyclic}\frac{1}{2a+b+c}\geq\sum_{cyclic}\frac{2}{3(a+b)+2c}$.

$$\sum_{ciclic}\frac{1}{2a+b+c}-\sum_{ciclic}\frac{2}{2a+3(b+c)}=\sum_{clclic}\left(\frac{1}{2a+b+c}-\frac{2}{2a+3(b+c)}\right)=$$

$$=\sum\frac{b+c-2a}{(2a+b+c)(2a+3b+3c)}=\sum\frac{b-a}{(2a+b+c)(2a+3b+3c)}+$$

$$+\sum\frac{c-a}{(2a+b+c)(2a+3b+3c)}=\sum\frac{b-a}{(2a+b+c)(2a+3b+3c)}+$$

$$+\sum\frac{a-b}{(2b+a+c)(2b+3a+3c)}=$$

$$=\sum\frac{(a-b)[(2a+b+c)(2a+3b+3c)-(2b+a+c)(2b+3a+3c)]}{(2a+b+c)(2a+3b+3c)(2b+a+c)(2b+3a+3c)}.$$

Dar, $(2a+b+c)(2a+3b+3c)-(2b+a+c)(2b+3a+3c)=$

$=a^2-b^2+2ac-2bc=(a-b)(a+b+2c)$.

Atunci, $\sum_{ciclic}\frac{1}{2a+b+c}-\sum_{ciclic}\frac{2}{2a+3(b+c)}=$

$$=\sum\frac{(a-b)^2(a+b+2c)}{(2a+b+c)(2a+3b+3c)(2b+a+c)(2b+3a+3c)}\geq 0$$, adevărat.

*O Extindere.* Fie $p,q,x,y\geq 1$ astfel încât:

$$p+2q=2x+y,\ xy(p-q)^2\geq pq(x-y)^2,\ x^2(p-q)^2\geq q^2(x-y)^2,$$

$$(x^2+y^2)(p-q)^2\geq(p^2+q^2)(x-y)^2,\ (x^2+xy)(p-q)^2\geq(q^2+pq)(x-y)^2.$$

Remarcăm că astfel de numere $p,q,x,y\geq 1$ există; câteva exemple cu $p,q,x,y$ numere naturale: $(4,2,32),(6,1,3,2),(7,2,4,3),(9,2,5,3),(9,4,6,5)$.

Pentru orice numere reale pozitive $a,b,c$ este adevărată inegalitatea

$$\sum_{ciclic}\frac{1}{pa+qb+qc}\geq\sum_{ciclic}\frac{1}{ya+xb+xc},\ (*).$$

Scăzând din ambii termeni expresia:

$\frac{9}{(p+2q)(a+b+c)}$, care este egală cu $\frac{9}{(y+2x)(a+b+c)}$, folosind metoda deligamentării, inegalitatea $(*)$ este echivalentă cu

$$\sum_{ciclic}\frac{(p-q)^2(a-b)^2}{(pa+qb+qc)(qa+pb+qc)}\geq\sum_{ciclic}\frac{(x-y)^2(a-b)^2}{(ya+xb+xc)(xa+yb+xc)},\ (**).$$

În condițiile date inegalitatea (**) este adevărată.

# O generalizare a inegalității Doucet și a inegalității JP.536 din RMM Spring Edition 2025

**de Gheorghe Ghiță,** Buzău

Articolul prezintă o generalizare a inegalității ***Doucet*** și a inegalității **JP.536** din **RMM Spring Edition 2025** ([1]):

**În $\Delta ABC, \forall n \in N$ are loc inegalitatea:** $$p\sqrt{4\left(\frac{2r}{R}\right)^n - 1} \le 4R + r \le p\sqrt{4\left(\frac{R}{2r}\right)^{n+1} - 1}$$

***Gheorghe Ghiță*, Buzău**

*Soluție*. Pentru $n = 0$, prima parte este inegalitatea lui Doucet: $p\sqrt{3} \le 4R + r$ și a doua parte este inegalitatea JP 536 din RMM Spring Edition 2025:

$4R + r \le p\sqrt{\frac{2R}{r} - 1} \Leftrightarrow \frac{2R}{r} \ge \frac{(4R+r)^2}{p^2} + 1$, propusă de *Alex Szoros – Romania.*

Prima parte.

Fie $P(n)$: $4\left(\frac{2r}{R}\right)^n \le \frac{(4R+r)^2}{p^2} + 1, n \in N \Leftrightarrow [(4R + r)^2 + p^2]R^n \ge 2^{n+2}r^n p^2, n \in N.$

Pentru $n = 0$ obținem inegalitatea lui Doucet: $p\sqrt{3} \le 4R + r$.

Deoarece $[(4R + r)^2 + p^2]R^{n+1} = [(4R + r)^2 + p^2]R^n \cdot R \overset{P(n)}{\geq} 2^{n+2}r^n p^2 R$ și

$2^{n+2}r^n p^2 R \ge 2^{n+3}r^n p^2 \Leftrightarrow R \overset{Euler}{\geq} 2r$ și conform inducției matematice rezultă adevărată prima parte a dublei inegalități.

A doua parte.

Fie $P(n)$: $\frac{(4R+r)^2}{p^2} + 1 \le 4\left(\frac{R}{2r}\right)^{n+1}, n \in N \Leftrightarrow 2^{n-1}r^{n+1}[(4R + r)^2 + p^2] \le p^2 R^{n+1}, n \in N$.

Pentru $n = 0$ rezultă inegalitatea JP.536 :

$$\frac{(4R + r)^2}{p^2} + 1 \le \frac{2R}{r} \Leftrightarrow r(4R + r)^2 + p^2 r \le 2p^2 R$$

propusă de *Alex Szoros în RMM Spring edition 2025,* adevărată din

$r(4R + r)^2 + p^2 r \overset{Gerretsen}{\leq} 16R^2 r + 8Rr^2 + r^3 + 4R^2 r + 4Rr^2 + 3r^3 = 20R^2 r + 12Rr^2 + 4r^3$,

$2p^2 R \ge 32R^2 r - 5Rr^2$ și $20R^2 r + 12Rr^2 + 4r^3 \le 32R^2 r - 10Rr^2 \Leftrightarrow$

$12R^2 r - 22Rr^2 - 4r^3 \ge 0 \Leftrightarrow (R - 2r)(6R + r) \overset{Euler}{\geq} 0.$

Deoarece

$$2^n r^{n+2}[(4R + r)^2 + p^2] = 2r \cdot 2^{n-1}r^{n+1}[(4R + r)^2 + p^2] \overset{P(n)}{\leq} 2rp^2 R^n \text{ și}$$

$2rp^2 R^n \le p^2 R^{n+2} \Leftrightarrow 2r \overset{Euler}{\leq} R$

și conform inducției matematice inegalitatea este demonstrată.

Bibliografie:

1. **http://www.ssmrmh.ro/wp-content/uploads/2023/08/36-RMM-SPRING-EDITION-2025.pdf**.

# Dezvoltări ale unor probleme din revista Sclipirea Minții Nr. 34

de **Marin Chirciu**, Pitești

**L:1126. Dacă** $a,b,c>0, a+b+c=1$**, atunci** $27\le 8\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)+15\le\frac{1}{abc}$**.**

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

<u>**Soluție:** Inegalitatea din dreapta.</u>

$$8\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)+15\le\frac{1}{abc}\Leftrightarrow\frac{8\sum a(a+b)(a+c)}{\prod(b+c)}+15\le\frac{1}{abc}.$$

Folosim $pqr$ -Method.

Notăm $p=a+b+c=1, q=ab+bc+ca, r=abc$. Avem $1=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt[3]{r}\Rightarrow r\le\frac{1}{27}$.

$1=(a+b+c)^2\ge 3\sum bc=3q\Rightarrow q\le\frac{1}{3}$.

$q^2=(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)=3pr=3r\Rightarrow q^2\ge 3r\Rightarrow r\le\frac{q^2}{3}$.

$\sum a(a+b)(a+c)=p^3-2pq+3r$, $p=1\Rightarrow\sum a(a+b)(a+c)=1-2q+3r$.

$\prod(b+c)=pq-r$, $p=1\Rightarrow\prod(b+c)=q-r$.

Inegalitatea se scrie:

$\frac{8(1-2q+3r)}{q-r}+15\le\frac{1}{r}\Leftrightarrow 9r^2+9r\le qr+q\Leftrightarrow 9r\le q$, care rezultă din $r\le\frac{q^2}{3}$.

Rămâne să arătăm că $9\cdot\frac{q^2}{3}\le q\Leftrightarrow q\le\frac{1}{3}$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

<u>Inegalitatea din stânga.</u>

$27\le 8\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)+15\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$, (Nesbitt).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

**<u>Remarcă</u>**

**Dacă** $a,b,c>0, a+b+c=1$ **și** $n+\frac{3k}{2}=27, 6\le k\le 8$ **atunci**

$$27\le k\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)+n\le\frac{1}{abc}.$$

**Marin Chirciu**

<u>**Soluție:** Inegalitatea din dreapta.</u>

$$k\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)+n\le\frac{1}{abc}\Leftrightarrow\frac{k\sum a(a+b)(a+c)}{\prod(b+c)}+n\le\frac{1}{abc}.$$

Folosim $pqr$ -Method.

Notăm $p=a+b+c=1, q=ab+bc+ca, r=abc$. Avem $1=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt[3]{r}\Rightarrow r\le\frac{1}{27}$.

$1=(a+b+c)^2\ge 3\sum bc=3q\Rightarrow q\le\frac{1}{3}$.

$q^2=(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)=3pr=3r\Rightarrow q^2\ge 3r\Rightarrow r\le\frac{q^2}{3}$.

$\sum a(a+b)(a+c)=p^3-2pq+3r$, $p=1\Rightarrow\sum a(a+b)(a+c)=1-2q+3r$.

$\prod(b+c)=pq-r$, $p=1\Rightarrow\prod(b+c)=q-r$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{k(1-2q+3r)}{q-r}+n\le\frac{1}{r}\Leftrightarrow(3k-n)r^2+(k+1)r\le q(1+2kr-nr)\overset{n=27-\frac{3k}{2}}{\Leftrightarrow}$$

$9(k-6)r^2+2(k+1)r\le q\left[(7k-54)r+2\right]$, care rezultă din $q\ge\sqrt{3r}$.

Rămâne să arătăm că:

$$9(k-6)r^2+2(k+1)r\le\sqrt{3r}\left[(7k-54)r+2\right]\overset{r=\frac{t^2}{3}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 9(k-6)\frac{t^4}{9}+2(k+1)\frac{t^2}{3}\le t\left[(7k-54)\frac{t^2}{3}+2\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(k-6)t^3+(54-7k)t^2+2(k+1)t-6\le0\Leftrightarrow(3t-1)\left[(k-6)t^2+2(8-k)t+6\right]\le0,$$

vezi $t\le\frac{1}{3}\Leftrightarrow r\le\frac{1}{27}$ și $\left[(k-6)t^2+2(8-k)t+6\right]>0$, pentru $6\le k\le8$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

<u>Inegalitatea din stânga.</u>

$$27\le k\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)+n\Leftrightarrow 27\le k\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)+27-\frac{3k}{2}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$, (Nesbitt). Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

**<u>Nota.</u>** Pentru $n=15, k=8$ se obține Problema L:1126 din Sclipirea Minții 34/2024.

**L:1127. Dacă $x,y>0, x+y=2$, atunci în $\Delta ABC$ cu $s=\frac{a+b+c}{2}$ avem**

$$\frac{3}{m_a^2+m_b^2+m_c^2}+\frac{4}{b(ax+cy)}+\frac{4}{c(bx+ay)}+\frac{4}{a(cx+by)}\ge\frac{16}{s^2}.$$

**D.M.Bătinețu-Giurgiu**, București, **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

**<u>Soluție</u>**: Folosind identitatea în triunghi: $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$, inegalitatea se scrie:

$$\frac{4}{a^2+b^2+c^2}+\frac{4}{b(ax+cy)}+\frac{4}{c(bx+ay)}+\frac{4}{a(cx+by)}\ge\frac{16}{s^2}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{b(ax+cy)}+\frac{1}{c(bx+ay)}+\frac{1}{a(cx+by)}\ge\frac{4}{s^2}$, vezi inegalitatea lui Bergstrom:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{b(ax+cy)}+\frac{1}{c(bx+ay)}+\frac{1}{a(cx+by)}\ge\frac{(1+1+1+1)^2}{a^2+b^2+c^2+(x+y)(ab+bc+ca)}=$$

$$=\frac{16}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}=\frac{16}{(a+b+c)^2}=\frac{16}{(2s)^2}=\frac{4}{s^2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

**<u>Remarcă:</u> În $\Delta ABC$,**

$$\frac{3}{4(m_a^2+m_b^2+m_c^2)}+\frac{1}{a(b+\lambda c)}+\frac{1}{b(c+\lambda a)}+\frac{1}{c(a+\lambda b)}\ge\frac{8}{9R^2},\lambda\ge0.$$

**Marin Chirciu**

Folosind identitatea în triunghi: $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$, inegalitatea se scrie:

$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{a(b+\lambda c)}+\frac{1}{b(c+\lambda a)}+\frac{1}{c(a+\lambda b)}\ge\frac{8}{9R^2}$ vezi inegalitatea lui Bergstrom:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{a(b+\lambda c)}+\frac{1}{b(c+\lambda a)}+\frac{1}{c(a+\lambda b)}\ge\frac{(1+1+1+1)^2}{\sum a^2+(\lambda+1)\sum bc}=$$

$$=\frac{16}{2\left(p^2-r^2-4Rr\right)+(\lambda+1)\left(p^2+r^2+4Rr\right)}=\frac{16}{(\lambda+3)p^2+(\lambda-1)r^2+4(\lambda-1)Rr}\overset{Gerrtesen}{\ge}$$

$$\overset{Gerrtesen}{\ge}\frac{16}{(\lambda+3)\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)+(\lambda-1)r^2+4(\lambda-1)Rr}=\frac{16}{4(\lambda+3)R^2+8(\lambda+1)Rr+4(\lambda+2)r^2}=$$

$$=\frac{4}{(\lambda+3)R^2+2(\lambda+1)Rr+(\lambda+2)r^2}\overset{Euler}{\ge}\frac{4}{\frac{9(\lambda+2)}{4}R^2}=\frac{16}{9(\lambda+2)R^2}.$$

Am folosit mai sus $(\lambda+3)R^2+2(\lambda+1)Rr+(\lambda+2)r^2\le\frac{9(\lambda+2)}{4}R^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(5\lambda+6)R^2-8(\lambda+1)Rr-4(\lambda+2)r^2\ge0\Leftrightarrow(R-2r)\left[(5\lambda+6)R+2(\lambda+2)\right]\ge0$,

vezi $R\ge2r$,(Euler). Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

**L:1136. În $\Delta ABC$, $\sum\frac{1+\cos(A-B)}{\cos A+\cos B}\ge6$.** **Florin Rotaru**, Focșani

**<u>Soluție</u>**

$$LHS=\sum\frac{1+\cos(A-B)}{\cos A+\cos B}=\sum\frac{2\cos^2\frac{A-B}{2}}{\cos A+\cos B}=\sum\frac{2\cos^2\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\sum\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\overset{AM-GM}{\ge}$$

$$\overset{AM-GM}{\ge}3\sqrt[3]{\prod\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}}=3\sqrt[3]{\frac{\prod\cos\frac{A-B}{2}}{\prod\sin\frac{C}{2}}}=3\sqrt[3]{\frac{\frac{p^2+r^2+2Rr}{8R^2}}{\frac{r}{4R}}}=3\sqrt[3]{\frac{p^2+r^2+2Rr}{2Rr}}\overset{Gerretsen}{\ge}$$

$$\overset{Gerretsen}{\ge}3\sqrt[3]{\frac{16Rr-5r^2+r^2+2Rr}{2Rr}}=3\sqrt[3]{\frac{18Rr-4r^2}{2Rr}}=3\sqrt[3]{\frac{9R-2r}{R}}\overset{Euler}{\ge}3\sqrt[3]{8}=6=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

**<u>Remarcă</u>**

**În $\Delta ABC$, $\sum\frac{1+\cos(A-B)}{\sin A+\sin B}\ge6\sqrt[3]{\frac{r}{p}}$.** **Marin Chirciu**

**<u>Soluție</u>**

$$LHS=\sum\frac{1+\cos(A-B)}{\sin A+\sin B}=\sum\frac{2\cos^2\frac{A-B}{2}}{\sin A+\sin B}=\sum\frac{2\cos^2\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\sum\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\overset{AM-GM}{\ge}$$

$$\overset{AM-GM}{\ge}3\sqrt[3]{\prod\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}}=3\sqrt[3]{\frac{\prod\cos\frac{A-B}{2}}{\prod\cos\frac{C}{2}}}=3\sqrt[3]{\frac{\frac{p^2+r^2+2Rr}{8R^2}}{\frac{t}{4R}}}=3\sqrt[3]{\frac{p^2+r^2+2Rr}{2Rp}}\overset{Gerretsen}{\ge}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

**L:1142. Rezolvați în R ecuația** $\log_7\left(6^x+1\right)=\log_6\left(7^x-1\right)$.

**Cezar Ozunu, Tica Gabriel**, Craiova

**Soluție**

Fie $\log_7\left(6^x+1\right)=\log_6\left(7^x-1\right)=t \Rightarrow \begin{cases}\log_7\left(6^x+1\right)=t\\ \log_6\left(7^x-1\right)=t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6^x+1=7^t\\ 7^x-1=6^t\end{cases} \Rightarrow 7^x+6^x=7^t+6^t \Rightarrow$

$\Rightarrow x=t \Rightarrow \log_7\left(6^x+1\right)=x \Rightarrow 6^x+1=7^x \Rightarrow x=1$ soluție unică.

**Remarcă**

**Fie** $a>1$ **fixat. Rezolvați în R ecuația** $\log_{a+1}\left(a^x+1\right)=\log_{a+1}\left(\left(a+1\right)^x-1\right)$. **Marin Chirciu**

**Soluție**

Fie $\log_{a+1}\left(a^x+1\right)=\log_a\left(\left(a+1\right)^x-1\right)=t \Rightarrow \begin{cases}\log_{a+1}\left(a^x+1\right)=t\\ \log_a\left(\left(a+1\right)^x-1\right)=t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a^x+1=\left(a+1\right)^t\\ \left(a+1\right)^x-1=a^t\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(a+1\right)^x+a^x=\left(a+1\right)^t+a^t \Rightarrow x=t \Rightarrow \log_{a+1}\left(a^x+1\right)=x \Rightarrow a^x+1=\left(a+1\right)^x \Rightarrow x=1$ soluție unică.

**Notă.** Pentru $a=6$ se obține Problema $L:1142$ din Sclipirea Minții 34/2024.

**L:1152. Rezolvați în R ecuația**

$$\frac{1}{2^{-x}+3^{-x}}+\frac{1}{3^{-x}+5^{-x}}+\frac{1}{5^{-x}+2^{-x}}=2^{x-1}+\frac{1}{2}\left(3^x+5^x\right).$$

**Adrian Stan**, Buzău

**Soluție**

$$LHS=\frac{1}{2^{-x}+3^{-x}}+\frac{1}{3^{-x}+5^{-x}}+\frac{1}{5^{-x}+2^{-x}}\overset{CS}{\geq}\frac{9}{2\left(2^{-x}+3^{-x}+5^{-x}\right)} \Rightarrow$$

$$RHS=2^{x-1}+\frac{1}{2}\left(3^x+5^x\right)\geq\frac{9}{2\left(2^{-x}+3^{-x}+5^{-x}\right)} \Rightarrow \frac{2^x+3^x+5^x}{2}\geq\frac{9}{2\left(2^{-x}+3^{-x}+5^{-x}\right)} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left(2^x+3^x+5^x\right)\left(2^{-x}+3^{-x}+5^{-x}\right)\geq 9$, cu egalitate dacă și numai dacă $x=0$

Deducem că ecuația admite $x=0$ soluție unică.

**Remarcă**

**Fie** $a,b>1$ **fixate. Rezolvați în R ecuația**

$$\frac{1}{2^{-x}+a^{-x}}+\frac{1}{a^{-x}+b^{-x}}+\frac{1}{b^{-x}+2^{-x}}=2^{x-1}+\frac{1}{2}\left(a^x+b^x\right).$$

**Marin Chirciu**

**Soluție**

$$LHS=\frac{1}{2^{-x}+a^{-x}}+\frac{1}{a^{-x}+b^{-x}}+\frac{1}{b^{-x}+2^{-x}}\overset{CS}{\geq}\frac{9}{2\left(2^{-x}+a^{-x}+b^{-x}\right)} \Rightarrow$$

$$RHS=2^{x-1}+\frac{1}{2}\left(a^x+b^x\right)\geq\frac{9}{2\left(2^{-x}+a^{-x}+b^{-x}\right)} \Rightarrow \frac{2^x+a^x+b^x}{2}\geq\frac{9}{2\left(2^{-x}+a^{-x}+b^{-x}\right)} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left(2^x+a^x+b^x\right)\left(2^{-x}+a^{-x}+b^{-x}\right)\geq 9$, cu egalitate dacă și numai dacă $x=0$

Deducem că ecuația admite $x=0$ soluție unică.

**Notă.** Pentru $a=3, b=5$ se obține Problema $L:1152$ din Sclipirea Minții 34/2024.

**L:1153. Rezolvați în $\mathbb{R}_+$ sistemul**

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=(2x+y)\sqrt[3]{xz^2} \\ y^2+yz+z^2=(2y+z)\sqrt[3]{yx^2} \\ z^2+zx+x^2=(2z+x)\sqrt[3]{zy^2} \end{cases}.$$

**Mihaly Bencze**, Brașov

**<u>Soluție</u>**. Adunăm ecuațiile și folosim inegalitatea mediilor $\sqrt[3]{xz^2}\le\frac{x+2z}{3}$. Obținem:

$$2\sum x^2+\sum xy=\sum(2x+y)\sqrt[3]{xz^2}\overset{AM-GM}{\le}\sum(2x+y)\frac{x+2z}{3}=\frac{1}{3}\left(2\sum x^2+7\sum xy\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sum x^2+\sum xy\le\frac{1}{3}\left(\left(2\sum x^2+7\sum xy\right)\right)\Leftrightarrow 2\sum x^2-2\sum xy\le 0\Leftrightarrow\sum(x-y)^2\le 0\Leftrightarrow x=y=z.$$

Folosind ecuația $x^2+xy+y^2=(2x+y)\sqrt[3]{xz^2}$ și $x=y=z\Rightarrow 3x^2=3x^2\Leftrightarrow x=k>0$

Deducem că sistemul admite $(x,y,z)=(k,k,k),k>0$.

**<u>Remarcă</u>**

**Fie $0\le\lambda\le 6$ fixat. Rezolvați în $\mathbb{R}_+$ sistemul**

$$\begin{cases} x^2+(\lambda-1)xy+y^2=(\lambda x+y)\sqrt[3]{xz^2} \\ y^2+(\lambda-1)yz+z^2=(\lambda y+z)\sqrt[3]{yx^2} \\ z^2+(\lambda-1)zx+x^2=(\lambda z+x)\sqrt[3]{zy^2} \end{cases}.$$

**Marin Chirciu**

**<u>Soluție</u>**

Adunăm ecuațiile și folosim inegalitatea mediilor $\sqrt[3]{xz^2}\le\frac{x+2z}{3}$. Obținem:

$$2\sum x^2+(\lambda-1)\sum xy=\sum(\lambda x+y)\sqrt[3]{xz^2}\overset{AM-GM}{\le}\sum(\lambda x+y)\frac{x+2z}{3}=\frac{1}{3}\left(\lambda\sum x^2+(2\lambda+3)\sum xy\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sum x^2+(\lambda-1)\sum xy\le\frac{1}{3}\left(\left(\lambda\sum x^2+(2\lambda+3)\sum xy\right)\right)\Leftrightarrow(6-\lambda)\sum x^2-(6-\lambda)\sum xy\le 0\Leftrightarrow$$

$(6-\lambda)\sum(x-y)^2\le 0\Leftrightarrow x=y=z$, vezi $0\le\lambda\le 6$.

Folosind ecuația $x^2+(\lambda-1)xy+y^2=(\lambda x+y)\sqrt[3]{xz^2}$ și $x=y=z\Rightarrow(\lambda+1)x^2=(\lambda+1)x^2\Leftrightarrow x=k>0$

Deducem că sistemul admite $(x,y,z)=(k,k,k),k>0$.

**<u>Notă.</u>**Pentru $\lambda=2$ se obține Problema $L:1153$ din Sclipirea Minții 34/2024.

**L:1154. În $\Delta ABC$ $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[4]{\frac{b}{c}}+\sqrt[7]{\frac{c}{a}}>\frac{4r}{R}$.**

**Florin Rotaru**, Focșani

**<u>Soluție</u>**

$$LHS=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[4]{\frac{b}{c}}+\sqrt[7]{\frac{c}{a}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot1\cdot1}+\sqrt[4]{\frac{b}{c}\cdot1\cdot1\cdot1}+\sqrt[7]{\frac{c}{a}\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1}\overset{GM-HM}{\ge}$$

$$\overset{GM-HM}{\ge}\frac{3}{\frac{b}{a}+1+1}+\frac{4}{\frac{c}{b}+1+1+1}+\frac{7}{\frac{a}{c}+1+1+1+1+1+1}=\frac{3}{\frac{b}{a}+2}+\frac{4}{\frac{c}{b}+3}+\frac{7}{\frac{a}{c}+6}=$$

$$=\frac{3}{\frac{b}{a}+2}+\frac{4}{\frac{c}{b}+3}+\frac{7}{\frac{a}{c}+6}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sqrt{3}+2+\sqrt{7}\right)^2}{\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+11}\overset{GM}{\geq}\frac{\left(\sqrt{3}+2+\sqrt{7}\right)^2}{\frac{3R}{2r}+11}\overset{(1)}{>}\frac{4r}{R}=RHS,$$

unde $\frac{\left(\sqrt{3}+2+\sqrt{7}\right)^2}{\frac{3R}{2r}+11}\overset{(1)}{>}\frac{4r}{R}\overset{\frac{R}{2r}=t\overset{Euler}{\geq}1}{\Leftrightarrow}\frac{\left(\sqrt{3}+2+\sqrt{7}\right)^2}{3t+11}>\frac{2}{t}\Leftrightarrow t\left(7+2\sqrt{3}+2\sqrt{7}+\sqrt{21}\right)\geq 3t+11\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t\left(4+2\sqrt{3}+2\sqrt{7}+\sqrt{21}\right)\geq 11$, vezi $t\geq 1$. Am folosit mai sus GM: $\frac{R}{2r}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$.

$\frac{R}{2r}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$, (GM 4-5/1990, Viorel Băndilă, București și Mircea Lascu, Zalău).

**Remarcă**

**În** $\Delta ABC$**,** $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}+\sqrt[n+1]{\frac{b}{c}}+\sqrt[2n+1]{\frac{c}{a}}>\frac{4r}{R}$**,** $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$**.** **Marin Chirciu**

**Soluție**

$$LHS=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}+\sqrt[n+1]{\frac{b}{c}}+\sqrt[2n+1]{\frac{c}{a}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}\cdot\underbrace{1\cdot\ldots\cdot1}_{n-1}}+\sqrt[n+1]{\frac{b}{c}\cdot\underbrace{1\cdot\ldots\cdot1}_{n}}+\sqrt[2n+1]{\frac{c}{a}\cdot\underbrace{1\cdot\ldots\cdot1}_{2n}}\overset{GM-HM}{\geq}$$

$$\overset{GM-HM}{\geq}\frac{n}{\frac{b}{a}+n-1}+\frac{n+1}{\frac{c}{b}+n}+\frac{2n+1}{\frac{a}{c}+2n}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{2n+1}\right)^2}{\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+4n-1}\overset{GM}{\geq}\frac{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{2n+1}\right)^2}{\frac{3R}{2r}+4n-1}\overset{(1)}{>}\frac{4r}{R}=RHS$$

unde $\frac{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{2n+1}\right)^2}{\frac{3R}{2r}+4n-1}\overset{(1)}{>}\frac{4r}{R}\quad\frac{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{2n+1}\right)^2}{3t+4n-1}\overset{(1)}{>}\frac{2}{t}\overset{\frac{R}{2r}=t\overset{Euler}{\geq}1}{\Leftrightarrow}\frac{\left(\sqrt{3}+2+\sqrt{7}\right)^2}{3t+11}>\frac{2}{t}\Leftrightarrow$

$$t\left(2n+1+\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(2n+1)}+\sqrt{(n+1)(2n+1)}\right)>3t+11\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow t\left(2n-2+\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(2n+1)}+\sqrt{(n+1)(2n+1)}\right)>11$, vezi $t\geq 1$.

Este suficient să arătăm că:

$$2n-2+\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(2n+1)}+\sqrt{(n+1)(2n+1)}>11\Leftrightarrow$$

$$2n+\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(2n+1)}+\sqrt{(n+1)(2n+1)}>13\overset{n\geq 2}{\Leftrightarrow}2\cdot2+\sqrt{2\cdot3}+\sqrt{2\cdot5}+\sqrt{3\cdot5}>13\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}>9$, adevărat.

Am folosit mai sus GM: $\frac{R}{2r}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$.

$\frac{R}{2r}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$, (GM 4-5/1990, Viorel Băndilă, București și Mircea Lascu, Zalău).

**Notă.** Pentru $n=3$ se obține Problema L:1154 din Sclipirea Minții 34/2024.

**„ Nu este de ajuns a avea rațiune, principalul este de a ne sluji bine de ea”.**

**Rene Descartes**

# Unele demonstrații ale inegalității lui Mitrinovic

de **D.M.Bătinețu-Giurgiu , Ionel Tudor-Călugăreni**

***Dragoslav S.Mitrinovic*** (1908-1995), a fost un cunoscut matematician sârb.

În anul 1965 , a stabilit cunoscuta dublă inegalitate geometrică $3\sqrt{3}\,r \leq p \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}R$ , unde *p* este semiperimetrul unui triunghi cu lungimile laturilor $a, b, c$ iar $r$ și $R$ sunt lungimile razelor cercului înscris, respectiv circumscris triunghiului.

O consecință imediată este cunoscuta inegalitate $R \geq 2r$ , stabilită de *Euler* în 1765. Egalitățile au loc în triunghiul echilateral.

În literatura de specialitate există un număr mare de demonstrații ale acestei importante inegalități.

Noi prezentăm câteva demonstrații pentru inegalitatea $p \geq 3\sqrt{3}\,r$ , unde vom utiliza alte inegalități importante din geometria triunghiului :

**inegalitatea *Ionescu-Weitzenbőck* :** $\boldsymbol{a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot S}$ ;

**inegalitatea lui *Gordon* :** $\boldsymbol{ab + bc + ac \geq 4\sqrt{3} \cdot S}$ ;

**inegalitatea lui *Goldner*:** $\boldsymbol{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geq 16S^2}$ ;

**inegalitatea lui *Carlitz*:** $\boldsymbol{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 4\sqrt{3} \cdot S}$.

<u>*Demonstrația 1 .*</u>

Avem: $4p^2 = (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ac) \overset{Gordon}{\geq} 3 \cdot 4\sqrt{3} \cdot S = 12\sqrt{3}pr \Leftrightarrow p \geq 3\sqrt{3} \cdot r$

<u>*Demonstrația 2.*</u>

Avem: $4p^2 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) \overset{Ionescu-Weitzenbőck}{\geq} 4\sqrt{3} \cdot S +$
$+2(ab+bc+ac) \overset{Gordon}{\geq} 4\sqrt{3}\,S + 2 \cdot 4\sqrt{3}S = 12\sqrt{3}S = 12\sqrt{3}pr \Leftrightarrow p \geq 3\sqrt{3}r$

<u>*Demonstrația 3.*</u>

Avem : $a+b+c = 2p \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3\sqrt[3]{4RS} \overset{Euler}{\geq} 3\sqrt[3]{4 \cdot 2rS} = 6\sqrt[3]{pr^2} \Leftrightarrow p \geq 3\sqrt[3]{pr^2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow p^3 \geq 27pr^2 \Leftrightarrow p^2 \geq 27r^2 \Leftrightarrow p \geq 3\sqrt{3}\,r$

<u>*Demonstrația 4.*</u>

Avem:

$4p^2 = (a+b+c)^2 \geq \left(3\sqrt[3]{abc}\right)^2 \Leftrightarrow 4p^2 \geq 9\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3 \cdot$
$\left(3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right) \overset{Carlitz}{\geq} 3\left(4\sqrt{3}S\right) = 12\sqrt{3}pr$
$\Leftrightarrow p \geq 3\sqrt{3}r.$

**Bibliografie**

*O.Bottema,R.Z.Djordjevic,R.R.Janic,D.S.Mitrinovic , P.M.Vasic-Geometric Inequalities, Groningen,1969*

*Dumitru M.Bătinețu-Giurgiu-Asupra unor inegalități în triunghi,Recreații Matematice nr1/2022*

# Asupra unor inegalități în triunghiul oarecare

**de Radu Diaconu,** Sibiu

**Să se arate că în triunghiul** $ABC$ **oarecare au loc inegalitățile: (notațiile fiind cele cunoscute în triunghi)**

**1.** $$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}}\le\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**2.** $$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}}\le\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**3.** $$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{\frac{1}{AI\cdot\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{BI\cdot\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{CI\cdot\sin\frac{C}{2}}}\le\frac{\sqrt{3}}{24}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**4.** $$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{\frac{1}{(p-a)\cdot tg\frac{A}{2}}+\frac{1}{(p-b)\cdot tg\frac{B}{2}}+\frac{1}{(p-c)\cdot tg\frac{C}{2}}}\le\frac{\sqrt{3}}{24}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**5.** $$r^2\le\frac{1}{48}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**6,** $$\sqrt{r\cdot r_ar_br_c}\le\frac{\sqrt{3}}{16}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**7.** $$\sqrt{r_ar_b+r_br_c+r_cr_a}\cdot r\le\frac{\sqrt{3}}{16}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**8.** $$a\cdot AH+b\cdot BH+c\cdot CH\le\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**9.** $$a\cdot IA^2+b\cdot IB^2+c\cdot IC^2\le\frac{\sqrt{3}\cdot R}{4}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**10.** $$IA^2\cdot\sin A+IB^2\cdot\sin B+IC^2\cdot\sin C\le\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**11.** $$\frac{r\cdot(h_a+h_b+h_c)}{\sin A+\sin B+\sin C}\le\frac{\sqrt{3}}{24}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**12.** $$\frac{\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}}{\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)^2}\le\frac{\sqrt{3}}{24}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**13.** $$\frac{\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}}{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)^2}\le\frac{\sqrt{3}}{24}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**14.** $$\frac{\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}}{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)} \le \frac{\sqrt{3}}{24}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**15.** $$\sum_{cyc}(p-a)\cdot(r_a-r) \le \frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**Demonstrație**: Orice triunghi are un unghi mai mic sau cel mult egal cu 60 grade.

În triunghiul $ABC$ oarecare, fie de exemplu $0^\circ < A \le 60^\circ$. Avem succesiv:

$$S=\frac{bc\cdot\sin A}{2}\le\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot bc\le\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\max(ab,bc,ca)\le\frac{\sqrt{3}}{16}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]; \quad (1)$$

Folosind inegalitatea dintre media aritmetică și cea geometrică și relația (1) obținem:

**1.** $$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}} \overset{M_g\le M_a}{\le} \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}}{\frac{1}{r}} = 2pr = 2S \overset{(1)}{\le} \frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**2.** $$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}} \overset{M_g\le M_a}{\le} \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}}{\frac{1}{r}} = 2pr = 2S \overset{(1)}{\le} \frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**3.** $$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{\frac{1}{AI\cdot\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{BI\cdot\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{CI\cdot\sin\frac{C}{2}}} \overset{M_g\le M_a}{\le} \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}}{\frac{3}{r}} = \frac{2S}{3}$$

$$\overset{(1)}{\le}\frac{\sqrt{3}}{24}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**4.** $$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{\frac{1}{(p-a)\cdot tg\frac{A}{2}}+\frac{1}{(p-b)\cdot tg\frac{B}{2}}+\frac{1}{(p-c)\cdot tg\frac{C}{2}}} \overset{M_g\le M_a}{\le} \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}}{\frac{3}{r}} = \frac{2pr}{3} = \frac{2S}{3} \overset{(1)}{\le}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{24}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**5.** $$3\sqrt{3}\cdot r^2 \overset{Mitrinovic}{\le} pr = S \Rightarrow r^2 \le \frac{S}{3\sqrt{3}} \overset{(1)}{\le} \frac{1}{48}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**6.** $$r\cdot r_a r_b r_c = r\cdot\frac{S^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{S^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = S^2.$$ **Rezultă:**

$$\sqrt{r\cdot r_a r_b r_c} = S \overset{(1)}{\le} \frac{\sqrt{3}}{16}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**7.** $$r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = \frac{S^2}{(p-a)(p-b)(p-c)}\cdot(p-c+p-a+p-b) = \frac{S^2\cdot p^2}{S^2} = p^2.$$

$$\sqrt{r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a}\cdot r = p\cdot r = S \overset{(1)}{\le} \frac{\sqrt{3}}{16}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**8.** $a\cdot AH+b\cdot BH+c\cdot CH=2R^2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=$

$$8R^2\sin A\sin B\sin C=4S\overset{(1)}{\leq}\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**9.** $a\cdot IA^2+b\cdot IB^2+c\cdot IC^2=abcr^2\cdot\dfrac{1}{(p-a)(p-b)(p-c)}\cdot(p-a+p-b+p-c)=$

$$\frac{abc\cdot r^2p^2}{S^2}=abc=R\cdot 4S\overset{(1)}{\leq}\frac{\sqrt{3}\cdot R}{4}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**10**. $IA^2=\dfrac{r^2}{\sin^2\frac{A}{2}}=\dfrac{r^2\cdot bc}{(p-b)(p-c)}=\dfrac{bc(p-a)\cdot pr^2}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\dfrac{bc\cdot(p-a)}{p}$. $bc\cdot\sin A=2S$. Atunci putem scrie: $\sum\limits_{cyc}IA^2\cdot\sin A=\sum\limits_{cyc}\dfrac{bc\cdot(p-a)}{p}\cdot\dfrac{2S}{bc}=\dfrac{2S}{p}\cdot\sum\limits_{cyc}(p-a)=2S$. Rezultă:

$$IA^2\cdot\sin A+IB^2\cdot\sin B+IC^2\cdot\sin C=2S\overset{(1)}{\leq}\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**11.** $h_a+h_b+h_c=2S\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$; $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{a+b+c}{2R}=\dfrac{p}{R}$.

$3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2\Rightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leq\dfrac{4p^2}{12Rpr}=\dfrac{p}{3Rr}$. **Rezultă:**

$$\frac{r\cdot(h_a+h_b+h_c)}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{2RrS}{p}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\leq\frac{2RrS}{p}\cdot\frac{p}{3Rr}=\frac{2S}{3}.$$

$$\frac{r\cdot(h_a+h_b+h_c)}{\sin A+\sin B+\sin C}\leq\frac{2S}{3}\overset{(1)}{\leq}\frac{\sqrt{3}}{24}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**12.** $$\frac{\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}}{\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)^2}\overset{Cebîsev}{\leq}\frac{\frac{2p}{3}\cdot\frac{1}{r}}{\left(\frac{1}{r}\right)^2}=\frac{2S}{3}\overset{(1)}{\leq}\frac{\sqrt{3}}{24}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right],$$

**13.** $$\frac{\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}}{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)^2}\overset{Cebîsev}{\leq}\frac{\frac{2p}{3}\cdot\frac{1}{r}}{\left(\frac{1}{r}\right)^2}=\frac{2S}{3}\overset{(1)}{\leq}\frac{\sqrt{3}}{24}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right],$$

**14.** $$\frac{\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}}{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)}\overset{Cebîsev}{\leq}\frac{\frac{2p}{3}\cdot\frac{1}{r}}{\left(\frac{1}{r}\right)^2}=\frac{2S}{3}\overset{(1)}{\leq}\frac{\sqrt{3}}{24}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$$

**15.** $$\sum_{cyc}(p-a)\cdot(r_a-r)=\sum_{cyc}(p-a)\cdot\frac{aS}{p(p-a)}=\frac{S}{p}\sum_{cyc}a=2S\overset{(1)}{\leq}\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right].$$


**Bibliografie:**

1. Emil C. Popa, *Asupra unei inegalități geometrice*, G.M.-B nr. 7/1982, pag. 256-257;
2. Marin Chirciu, *Puncte remarcabile în triunghi. Distanțe. Inegalități*. Editura Paralela 45, Pitești, 2019;
3. Emil C. Popa, Mihaela Duță, Adriana Oprea, Radu Diaconu, *Culegere de probleme de geometrie și aplicații ale trigonometriei în geometrie*, Editura Techno Media, Sibiu, 2020.

# În legătură cu o problemă din Gazeta Matematică

**de Emil C. Popa,** Sibiu

*În cele ce urmează vom demonstra următoarea:*

***Fie Q un punct situat în interiorul unui triunghi*** $ABC$. ***Notăm cu*** $M, N, P$ ***intersecțiile dreptelor*** $AQ, BQ, CQ$ ***cu*** $BC, CA,$ ***respectiv*** $AB$. ***Dacă*** $p \in R_+, p \geq 1$***, iar:***

$$S = \left(\frac{QA}{QM}\right)^p + \left(\frac{QB}{QN}\right)^p + \left(\frac{QC}{QP}\right)^p,$$

$$T = \left(\frac{QM}{QA}\right)^p + \left(\frac{QN}{QB}\right)^p + \left(\frac{QP}{QC}\right)^p,$$

***atunci*** $\frac{S}{3} \geq 2^p \geq \frac{3}{T}$.

Folosind relația lui **Van Aubel** avem:

$$\frac{QA}{QM} = z + zx, \frac{QB}{QN} = x + xy, \frac{QC}{QP} = y + yz,$$

unde $\frac{MB}{MC} = x, \frac{NC}{NA} = y, \frac{PA}{PB} = z,$ iar $xyz = 1$ (Ceva).

Folosind inegalitatea $(H\ddot{o}lder - Radon)$: $\alpha^p + \beta^p + \gamma^p \geq \frac{(\alpha + \beta + \gamma)^p}{3^{p-1}}$, cu $\alpha, \beta, \gamma > 0$,

găsim: $\left(\frac{QA}{QM}\right)^p + \left(\frac{QB}{QN}\right)^p + \left(\frac{QC}{QP}\right)^p \geq \frac{1}{3^{p-1}} \cdot (x + y + z + xy + yz + zx)^p \geq \frac{6^p}{3^{p-1}} = 3 \cdot 2^p$,

și $\left(\frac{QM}{QA}\right)^p + \left(\frac{QN}{QB}\right)^p + \left(\frac{QP}{QC}\right)^p \geq \frac{1}{3^{p-1}} \cdot \left(\frac{1}{x + xy} + \frac{1}{y + yz} + \frac{1}{z + zx}\right)^p$.

Dacă notăm $x = \frac{m}{n}, y = \frac{n}{p}, z = \frac{p}{m},$ cu $m, n, p > 0$, avem:

$$\frac{1}{x + xy} + \frac{1}{y + yz} + \frac{1}{z + zx} = \frac{np}{mn + mp} + \frac{mp}{mn + np} + \frac{mn}{np + mp} \geq \frac{3}{2},$$ conform inegalității lui Nesbitt.

Deci: $\left(\frac{1}{x + xy} + \frac{1}{y + yz} + \frac{1}{z + zx}\right)^p \geq \left(\frac{3}{2}\right)^p$

și $\left(\frac{QM}{QA}\right)^p + \left(\frac{QN}{QB}\right)^p + \left(\frac{QP}{QC}\right)^p \geq \frac{1}{3^{p-1}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^p = \frac{3}{2^p}$.

În final: $\frac{S}{3} \geq 2^p \geq \frac{3}{T}$.

**Observație**: Pentru $p = 2$, avem: $\left(\frac{QM}{QA}\right)^2 + \left(\frac{QN}{QB}\right)^2 + \left(\frac{QP}{QC}\right)^2 \geq \frac{3}{4}$, ce constituie obiectul problemei 28098. din G.M.-B.

**„Nimic nu coboară mai adânc și**
**mai cu blândețe în sufletul omului, decât exemplul."**
**John Locke**
**(1632- 1704)**

# 3. Probleme rezolvate

## ▪ Clasa a V-a

**G:1292. Există $x, y, z, t$ cifre astfel încât $\overline{xyzt}+\overline{xyz}+\overline{xy}+x=2024$?**

**Cornelia Neacșu, Elena Alexie**, Craiova

***Rezolvare:*** Relația se scrie $1111x+111y+11z+t=2024$. Cum $1\le x\le 9, x\in\mathbb{N}$ avem $x=1$ și de aici $111y+11z+t=913$. Pentru $y=9$ $111y=999>913$. Pentru $y=8$ $11z+t=999-888=25$ și găsim $z=2, t=3$, obținem numărul $\overline{xyzt}=1823$ (pentru $z=1\Rightarrow t=14$ *fals*!)
Pentru $y=7$ avem $777+11z+t=913\Rightarrow 11z+t=136$ cum $z\le 9$ și $11z\le 99$ nu putem avea soluții .
Pentru $y\le 6$ procedăm similar și nu găsim soluții . Singurul număr care verifică este 1823.

**G:1293. Determinați numărul $\overline{abc}$ pentru care $\overline{abcb}+\overline{abc}+\overline{bc}=3b+2c=2024$.**

**Nicolae Ivășchescu,** Canada

***Rezolvare:*** Relația dată este echivalentă cu
$1000a+100b+10c+b+100a+10b+c+10b+c+3b+2c=2024$ sau $1100a+124b+14c=2024$
Evident valoarea maximă a lui a este 1. Pentru a = 1 obținem: $124b+14c=924$. Se dau valori lui b: 8, 7. Numărul care convine este 174.

**G:1294. În câte zerouri se poate termina numărul $19^n+9, n\in\mathbb{N}$?**

**Simona Marinela Șerban**, Dăbuleni, Dolj, **Gilena Dobrică**, Bechet, Dolj

***Rezolvare:*** Dacă n este impar, numărul se termină în 8. Dacă n este par, atunci n$=2k, k\in\mathbb{N}$. Avem $19^n+9=19^{2k}+9=361^k+9=M_4+1+9=M_4+2$. Un număr de forma $M_4+2$ nu poate avea două zerouri . Deci , numărul $19^n+9$ se termină în cel mult un zero .

**G:1295. Arătați că numărul $a=\left[\left(2^7:64+4^2\right):3^2\right]\cdot 2^{2023}:\left(2^{253}\right)^8$ este mai mic decât 2.**

**Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

***Rezolvare:*** $a=\left[\left(2^7:2^6+16\right):9\right]\cdot 2^{2023}:\left(2^{253}\right)^8=\left(18:9\right)\cdot 2^{2023}:2^{2024}=2^{2024}:2^{2024}=1 \langle\ 2$.

**G:1296. Aflați $x, y\in\mathbb{N}$ astfel încât $x^2+y^2=2025$.**

eleve **Prisnel Sara, Afrem Sara**, Craiova

***Rezolvare:*** Cum $a^2$ dă restul 0 sau 1 la împărțirea cu 3 și 3 divide pe 2025 atunci, x și y sunt multipli de 3. Fie $x=3x_1,\ y=3y_1,\ x_1, y_1\in\mathbb{N}\Rightarrow 9\left(x_1^2+y_1^2\right)=2025\Rightarrow\ x_1^2+y_1^2=225$ și cum 3 divide 225 rezultă $x=3x_2,\ y=3y_2,\ x_1, y_1\in\mathbb{N}\Rightarrow 9\left(x_2^2+y_2^2\right)=225\Rightarrow\ x_2^2+y_2^2=25$. Se obțin soluțiile:
$(x;y)\in\left\{(0;45),(45;0),(27;36),(36;27)\right\}$.

**G:1297. Comparați numerele $5^{867}$ și $2^{2024}$.** **Elena Alexie, Elena Grigore**, Craiova

***Rezolvare***: $5^{867}=\left(5^3\right)^{289} < \left(2^7\right)^{289}=2^{2023} < 2^{2024}$.

**G:1298. Există $x,y,z\in\mathbb{N}$ astfel încât numărul $P=(x+y)(y+z)(z+x)$ să fie egal cu:**
$a)\ 2025^{2024}$; $b)\ 2024^{2025}$.**?** **Grigorie Dan**, Craiova, **Sebastian Ilinca** , Pârșcoveni, Olt

***Rezolvare:***

a) Deoarece $(x+y)+(y+z)+(z+x)=2(x+y+z)$ este număr par rezultă că cel puțin unul din numerele x+y sau y+z sau x+z este par și de aici nu există $x,y,z\in\mathbb{N}$ astfel încât $P=2025^{2024}$.

b) Se poate lua $x+y=y+z=2024^{1012}$ și $z+x=2024$. Atunci, $x=z=1012$ de unde rezultă $y=2024^{1012}-1012$

**G:1299. Determinați $n\in\mathbb{N}$ astfel încât numărul $2024^n$ să aibă exact 576 divizori naturali .**
**Camelia Dană, Iulia Sanda**, Craiova

***Rezolvare***:

$2024^n=\left(8\cdot 11\cdot 23\right)^n=8^n\cdot 11^n\cdot 23^n=2^{3n}\cdot 11^n\cdot 23^n$ **și atunci numărul divizorilor lui** $2024^n$ **este** $(3n+1)(n+1)(n+1)=(3n+1)(n+1)^2=576$.

Dacă $n>5\Rightarrow(3n+1)(n+1)^2>16\cdot 36=576$ iar dacă $n<5\Rightarrow(3n+1)(n+1)^2<16\cdot 36=576$. Cum pentru n = 5 avem egalitate înseamnă că numărul căutat este n = 5.

**G:1299. Se consideră numărul natural $n=\overline{abc}$ . Dacă se elimină una din cifrele sale, se obține un număr de 6 ori mai mic decât n. Să se afle n.**
**Dumitru Preoteasa**, Giurgiu**, Mădălina Buliga**, București

***Rezolvare:***

Cazul I. Se elimină cifra a.

$20a=10b+c\Rightarrow c=20a-10b=10(2a-b)\vdots 10\Rightarrow c=0\Rightarrow 2a=b\Rightarrow n\in\{120;240;360;480\}$

Cazul II. Se elimină cifra b.

$100a+10b+c=60a+6b\Rightarrow 40a+4b+c=0\Rightarrow n\in\{108\}$.

Cazul III. Se elimină cifra c. Din $100a+10b+c=60a+6b$ nu se obține soluție.

**G:1300. Stabiliți dacă fracția $\frac{3^{2025}}{2^{3025}}$ este subunitară sau supraunitară.**

**Ionel Tudor-** Călugăreni, Giurgiu

***Rezolvare:*** $\frac{3^{2025}}{2^{3025}}=\frac{\left(3^{81}\right)^{25}}{\left(2^{121}\right)^{25}}>1$, deoarece comparăm pe $3^{81}$ *cu* $2^{121}$.

$3^{81}-2^{121}=3\cdot 3^{80}-2\cdot 2^{120}=3\cdot 9^{40}-2\cdot 8^{40}>0$. Fracția dată este supraunitară.

**G:1301. Arătați că nu există pătrate perfecte de forma $A=41\underbrace{aa...a}_{2k\ de\ a}61$ unde $a\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ și $k\in\mathbb{N}$.** **Roxana Vasile**, Craiova, **Ilinca Sebastian**, Pârșcoveni, Olt

***Rezolvare:***

Restul împărțirii lui A la 11 este $4+a+a+....+a+6-(1+a+...+a+1)=4+6-1-1=8$ și cum nu există pătrat perfect de forma 11 N +8, problema e rezolvată.

**G:1302. Arătați că numărul $4^{99}+6^{100}+3^{200}$ este pătrat perfect**
elevă **Panduru Mădălina**, Bălcești, Vâlcea

***Rezolvare:*** $4^{99}+6^{100}+3^{200}=\left(2^{99}\right)^2+2^{100}\cdot 3^{100}+\left(3^{100}\right)^2=\left(2^{99}+3^{100}\right)^2$ **, c.c.t.d.**

**G:1303. Dacă $a,b,c,d\in\mathbb{N}$, cu p impar, astfel încât $(p+1)a+2pd=pb+4pc$ să se arate că 2p divide ab.** **Gheorghe Ghiță**, Buzău

***Rezolvare:*** *Din* $(p+1)a+2pd=pb+4pc$ $(p+1)a=p(b+4c-2d)$. Cum p nu divide p+1, fiind prime între ele, rezultă că $p|a\Rightarrow a=pk,\ k\in\mathbb{N}$; Relația dată devine: $(p+1)k=b+4c-2d$ și cum membrul stâng este par, rezultă că b este par, adică $b=2m,\ m\in\mathbb{N}\Rightarrow ab=2mpk\Rightarrow 2p|ab$.

**G:1304. Arătați că fracția $\dfrac{89+8^{2024}}{89+9^{2024}}$ este reductibilă.** **Ionel Tudor-** Călugăreni, Giurgiu

***Rezolvare***:

$u(8^{2024})=u\left(8^4\right)^{506}=u\left(\overline{....6}\right)^{506}=6\Rightarrow u\left(89+8^{2024}\right)=u(9+6)=5\Rightarrow(89+8^{2024})\vdots 5$;

$u(9^{2024})=u\left(9^2\right)^{1012}=u\left(81^{1012}\right)=1\Rightarrow u\left(89+9^{2024}\right)=u(9+1)=0\Rightarrow(89+9^{2024})\vdots 5$, deci fracția se simplifică cu 5.

**G:1305. Determinați $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât numărul $A=\dfrac{1+2^n+3^n}{1+2^{n-1}+3^{n-1}}$ să fie număr natural .**

**Loredana Surcel**, Otopeni, **Cristian Cosmin Alexandru**, Brădești , Dolj

***Rezolvare:*** Cum $1\le A<3$ deoarece $\dfrac{1+2^n+3^n}{1+2^{n-1}+3^{n-1}}<3\Leftrightarrow 1+2^n+3^n<3+3\cdot 2^{n-1}+3^n$ care este adevărată . Putem avea $A=1$ sau $A=2$.

Dacă $A=1\Rightarrow 1+2^n+3^n=1+2^{n-1}+3^{n-1}$ fals !

Dacă $A=2\Rightarrow 1+2^n+3^n=2+2^n+2\cdot 3^{n-1}$ sau $3^{n-1}\left(3-2\right)=1\Rightarrow n=1$ care verifică .

# ▪ Clasa a VI-a

**G:1306. Să se afle suma tuturor numerelor naturale de forma $\overline{abc}$, știind că numerele $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ și $\overline{ca}$ sunt direct proporționale cu numerele c, a, respectiv b.**

**Dumitru Preoteasa**, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

***Rezolvare:***

Conform enunțului, putem scrie $\dfrac{\overline{ab}}{c}=\dfrac{\overline{bc}}{a}=\dfrac{\overline{ca}}{b}=k\Rightarrow$ $\overline{ab}=ck,\ \overline{bc}=ak,\overline{ca}=bk$ sau încă 10a+b=ck (1), 10b+c=ak (2) și 10c+a=bk (3). Adunând (1) cu (2) și (3), găsim 11(a+b+c)=k(a+b+c), de unde k=11 (la același rezultat se ajungea și dacă se utiliza o proprietate a șirului de rapoarte egale). Acum se deduce ușor că $\overline{abc}\in\{111,222,...,999\}$, iar suma cerută este $111(1+2+....+9)=4995$.

**G:1307. Determinați produsul $(b+2c)(c-a)(2a+b)$ știind că $a,b,c\in\mathbb{N},\ a+b+c=44$ și că $2a+3b+4c=133$.** **Nicolae Ivășchescu,** Canada

***Rezolvare***: $2a+3b+4c=133\Leftrightarrow 2(a+b+c)+b+2c=133\Rightarrow b+2c=133-2\cdot 44=45$.

Din $a+b+c=44|\cdot 3\Rightarrow 3a+3b+3c=132$ prin scăderea egalității $2a+3b+4c=133$ obținem $a-c=-1$ sau $c-a=1|\cdot(-2)\Rightarrow 2a-2c=-2$ și împreună cu $b+2c=45$ obținem $b+2a=43$.

Așadar, $(b+2c)(c-a)(2a+b)=45\cdot 1\cdot 43=1935$.

**G:1308. Arătați că numerele** $10017,\ 100117,\ 1001117,....,\underbrace{10011..117}_{k\ de\ 1},\ k\in\mathbb{N}^*$ **se divid la 53.**

**Grigorie Dan**, **Constantina Prunaru**, Craiova

***Rezolvare***: $10017=53\cdot189$, *etc.*

Avem $1001117,....,\underbrace{10011..117}_{k\ de\ 1}=10^{k+3}+\left(10^k+10^{k-1}+....+10^2+10+1\right)+6=10^{k+3}+\dfrac{10^{k+1}-1}{10-1}+6=$

$=\dfrac{9\cdot10^{k+3}+10^{k+1}-1+54}{9}=\dfrac{9\cdot10^{k+3}+10^{k+1}+53}{9}\ \vdots\ 53\ \Leftrightarrow\left(9\cdot10^{k+3}+10^{k+1}\right)\vdots 53\Leftrightarrow$

$10^{k+1}\cdot\left(9\cdot10^2+1\right)\vdots 53$ care este adevărat deoarece $10^{k+1}\cdot901=10^{k+1}\cdot(53\cdot17)\ \vdots\ 53$.

**G:1309. Aflați forma ireductibilă a fracției** $F=\dfrac{2\left(|1-2+3-4...+2024|+|-1+2-3+...+2024|\right)}{3\left(|2-4+6-...+2024|+|-2+4-6+...-2024|\right)}$

***Ion Stănescu,*** Smeni, Buzău

***Rezolvare***: $F=\dfrac{2\cdot\left(|-1012|+|1012|\right)}{3\cdot\left(2\cdot|-506|+2\cdot|506|\right)}=\dfrac{2\cdot2024}{3\cdot2024}=\dfrac{2}{3}$.

**G:1310. Determinați numerele prime p astfel încât $p^2+2000$ să fie pătratul unui număr natural.**

**Grigorie Dan**, Craiova, **Cristian Cosmin Alexandru**, Brădești, Dolj

**Rezolvare**:

$p^2+2000=a^2\Rightarrow a^2-p^2=2000\Leftrightarrow(a+p)(a-p)=2000$. Cum $a+p$ și $a-p$ au aceeași paritate și $a+p\ \rangle\ ap\Rightarrow(a+p;a-p)\in\{(1000;2),(500;4),(250;8),(200;10),(100;20),(50;40)\}$.

Convin numerele p = 5 și p = 499.

**G:1311. a). Descompuneți în factori numărul** $n=1^3+2^3+3^3+5^3+6^3+7^3+11^3$.
**b) Arătați că numărul** $2024^{2023}$ **se poate scrie ca suma a șase cuburi perfecte.**

**Ionel Tudor** - Călugăreni, Giurgiu

***Rezolvare:*** a) Cum $n=1^3+2^3+3^3+5^3+6^3+7^3+11^3=2051=7\cdot293$

b) $2024=2051-27=n-3^3=1^3+2^3+3^3+5^3+6^3+7^3+11^3-3^3\Rightarrow2024=1^3+2^3+5^3+6^3+7^3+11^3$

Atunci, $2024^{2023}=2024\cdot2024^{2022}=\left(1^3+2^3+5^3+6^3+7^3+11^3\right)\cdot\left(2024^{674}\right)^3\Rightarrow$

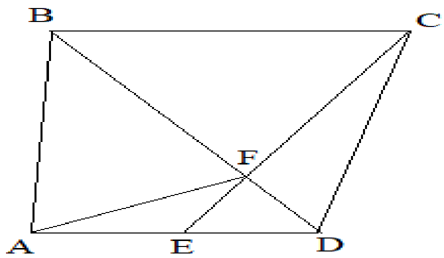
$2024^{2023}=\left(1\cdot2024^{674}\right)^3+\left(2\cdot2024^3\right)+\left(5\cdot2024\right)^3+\left(6\cdot2924\right)^3+\left(7\cdot2024\right)^3+\left(11\cdot2024\right)^3$.

**G:1312. Fie $ABCD$ un trapez și $E$ mijlocul bazei $AD$. Dacă $BD\cap CE=\{F\}$ și $BC=CF$ arătați că $AF\perp BD$.**

**Grigorie Dan, Zaharia Gigi**, Craiova

***Rezolvare:***

Cum $BC=CF\Rightarrow\widehat{CBF}=\widehat{CFB}=\alpha$
De aici $\widehat{EFD}=\alpha$ (opuse la vârf) și $\widehat{BDA}=\alpha$ (alterne interne) $\Rightarrow\triangle EFD$ isoscel cu $EF=ED$
Cum $AE=ED\Rightarrow EF=\frac{AD}{2}$ și de aici $\triangle AFD$ dreptunghic în $F$ adică $AF\perp BD$



**G:1313. Doi muncitori, la fel de harnici, culeg strugurii dintr-o vie. Primul muncitor lucrează 5 zile iar al doilea lucrează 3 zile. Pentru munca lor primesc împreună 960 lei.**
**a) Ce procent din suprafața viei culege primul muncitor ?**
**b) Aflați ce sumă i se cuvine fiecărui muncitor.**

**Ionel Tudor-Călugăreni,** Giurgiu

***Rezolvare:***
a) Cele cinci zile reprezintă cinci optimi din suprafața viei pe care o culege primul muncitor iar pentru cel de-al doilea muncitor cele trei zile reprezintă trei optimi din suprafața viei. Atunci, în procente, cele cinci optimi înseamnă $\frac{5}{8}\cdot 100 = 62,5$ așadar 62,5%.

b) Sumele primite de cei doi muncitori sunt direct proporționale cu zilele lucrate adică pentru muncitorul 1 avem $\frac{5}{8}\cdot 960 = 600$ iar pentru al doilea avem $\frac{3}{8}\cdot 960 = 360$.

# ▪ Clasa a VII-a

**G:1314. Fie $a,b,c \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\frac{a^2}{b} = \frac{b^2}{c} = \frac{c^2}{a}$. Arătați că $a = b = c$.**

elevă **Panduru Mădălina Nicoleta**, Bălcești, Vâlcea

***Rezolvare:*** Evident că a,b,c au același semn. Fie
$\frac{a^2}{b} = \frac{b^2}{c} = \frac{c^2}{a} = k \Rightarrow a^2 = bk,\ b^2 = ck,\ c^2 = ak \Rightarrow a^2b^2c^2 = abck^3 \Rightarrow abc = k^3 \Rightarrow a^2b^2c^2 = k^6$. Cum
$a^2 = bk \Rightarrow c^2 = \frac{b^4}{k^2} \Rightarrow b^7 = k^7 \Rightarrow b = k$. Din $b^2 = kc \Rightarrow k^2 = kc \Rightarrow c = k$.
Din $c^2 = ka \Rightarrow k^2 = ka \Rightarrow a = k$. Așadar, $a = b = c$.

**G:1315. Rezolvați ecuația $x^2 = \frac{3^{2025}+1}{2}\cdot\left(1+3+3^2+...+3^{2024}\right)$.** **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

***Rezolvare***: $x^2 = \frac{3^{2025}+1}{2}\cdot\frac{3^{2025}-1}{2} = \frac{3^{4050}-1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3^{4050}-1}}{2}$.

**G:1316. Aflați numerele naturale $\overline{ab}$, unde cifra b este impară, știind că $1+3+5+7+...+\overline{ab} = (2a+3b)^2$.** **Dumitru Preoteasa**, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

***Rezolvare***: Membrul stâng reprezintă suma primelor n numere impare adică $1+3+5+7+...+2n-1 = n^2$ prin urmare, din $\overline{ab} = 2n-1 \Rightarrow n = \frac{\overline{ab}+1}{2}$. Așadar, egalitatea din enunț devine $\left(\frac{\overline{ab}+1}{2}\right)^2$ = $(2a + 3b)^2$, adică $\frac{\overline{ab}+1}{2}$=2a+3b, de unde, prin calcule, se obține ecuația 10a+b+1=4a+6b, sau 6a+1=5b, cu soluțiile a=4 și b=5. Deci $\overline{ab}$=45.

**G:1317. Determinați numărul $\overline{abc}$ cu $b = 2a$ și cifre distincte, pentru care $\sqrt{\overline{abc}} = a\cdot b + c$.**

**Nicolae Ivășchescu,** Canada

***Rezolvare:*** Din egalitatea dată deducem că numărul $\overline{abc}$ este pătrat perfect iar $c \in \{0;1;4;5;6;9\}$
Din b = 2a pentru a = 1 respectiv 2,3,4 obținem b = 2 respectiv 4,6, 8. Singurul pătrat perfect care se poate obține este pentru a =3, b= 6 și apoi c =1. Deci, $\overline{abc} = 361$.

**G:1318**. **Fie** $a,b>0$. **Arătați că** $\frac{a}{5a+b}+\frac{b}{5b+a}\le\frac{1}{3}$. **În ce caz avem egalitate ?**

**Sebastian Ilinca**, Pârșcoveni , Olt, **Cristian Catană**, Băilești

***Rezolvare:*** Se va aduce la același numitor obținându-se $2a^2-4ab+2b^2\ge 0\Leftrightarrow(a-b)^2\ge 0$, cu egalitate pentru a = b.

**G:1319**. **Determinați** $x\in\mathbb{Z}$ **astfel încât** $A=\left|x^3-6x+4\right|$ **este număr prim.**

**Gigi Zaharia**, **Constantina Pruneanu**, Craiova

***Rezolvare:***

Deoarece $x^3-6x+4=(x-2)(x^2+2x-2)$ va trebui ca $\left|x-2\right|\cdot\left|x^2+2x-2\right|$ să fie număr prim. Singurul număr care verifică este x = 1.

**G:1320**. **Aflați câți termeni are suma** $S_n=\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}$ **, știind că are partea întreagă egală cu 13.**

**Ionel Tudor-** Călugăreni, Giurgiu

***Rezolvare***: Calculând partea întreagă pentru $S_n$ pentru fiecare $n\in\{1;2;3;....;7\}$ obținem că enunțul se verifică pentru n = 7.

Pentru $n=7$ avem $2{,}6<\sqrt{7}<2{,}7$ (deoarece $2{,}6^2=5{,}76<7<7{,}29=2{,}7^2$) și rezultă inegalitățile
$S_7=3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}>3+1{,}4+1{,}7+2{,}2+2{,}4+2{,}6=13{,}3>13$ și
$S_7=S_6+\sqrt{7}<11+2{,}7=13{,}7<14$
Din $13<S_7<14$ , avem $[S_7]=13$ și n=7 este o soluție.
Pentru $n\ge 8$ , avem $S_n\ge S_8=S_7+\sqrt{8}>13+2\sqrt{2}>13+2=15$. Rezultă $[S_n]\ge 15>13$.
Avem $[S_n]=13$, numai dacă n=7 , adică pentru suma din enunț cu 7 termeni.

**G:1321**. **Fie** $x,y,z\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $x+y+z=3$. **Aflați maximul expresiei** $E(x,y,z)=x+y+2xy+xz+yz$.

**Mihaela Stăncele**, Craiova

***Rezolvare:***

$$E(x,y,z)=x(y+z+1)+y(x+z+1)=x(3-x+1)+y(3-y+1)=4x-x^2+4y-y^2=$$

$=4-(2-x)^2+4-(2-y)^2\le 4+4=8$, cu egalitate pentru $x=y=2$ și $z=-1$.

**G:1322**. **Fie** $n\in\mathbb{N},\ n\ge 2\ si\ x_1,x_2,...,x_n$ **numere reale astfel încât** $x_1+x_2+...+x_n=\frac{n-1}{2}$.

**Determinați cea mai mică valoare a expresiei** $E_{(x_1,x_2,...x_n)}=x_1+x_2{}^2+...+x_n{}^2$.

**Lucian Tuțescu**, Craiova, **Neculai Stanciu**, Buzău

***Rezolvare:***

$$E_{(x_1,x_2,...x_n)}=\frac{n-1}{2}-x_2-x_3-....-x_n+x_2{}^2+...+x_n{}^2=$$

$$=\frac{n-1}{2}+\left(x_2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x_3-\frac{1}{2}\right)^2+.....+\left(x_n-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{n-1}{4}=$$

$=\frac{n-1}{4}+\left(x_2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x_3-\frac{1}{2}\right)^2+.....+\left(x_n-\frac{1}{2}\right)^2\ge\frac{n-1}{4}$, minimul fiind $\frac{n-1}{4}$ și se atinge pentru

$x_2=x_3=...=x_n=\frac{1}{2},x_1=0.$

**G:1323**. **Determinați laturile a, b, c ale triunghiului ABC știind că:**
$\sqrt{a^2-10a+50}+\sqrt{b^2-24b+288}+\sqrt{c^2-26c+338}\le 30$. **Ce fel de triunghi este ABC ?**

**Doina și Mircea Mario Stoica**, Arad

***Rezolvare:***

Relația dată se scrie $\sqrt{(a-5)^2+25}+\sqrt{(b-12)^2+144}+\sqrt{(c-13)^2+169}\ge 30$ și implică egalitate adică $a=5,\ b=12,\ c=13$. Atunci, triunghiul este dreptunghic în C.

**$\boxed{\text{G:1324}}$. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $a+b+c=\alpha$, $(a+b)c+(a+c)b+(b+c)a=\beta$. Arătați că dacă $6+\beta<4\alpha$ atunci cel puțin unul din numerele $a,b,c$ este mai mic ca 1 și cel puțin unul este mai mare ca 1.**

**Mihai Călugăru , Eugenia Turcu**, Craiova

***Rezolvare:*** A doua relație se scrie $ab+bc+ca=\frac{\beta}{2}$.Calculăm

$$(a-1)(b-1)+(b-1)(c-1)+(c-1)(a-1)=ab+bc+ca-2(a+b+c)+3=\frac{\beta}{2}-2\alpha+3<0$$

Dacă $a,b,c$ ar fi toate mai mari sau egale cu 1(sau mai mici sau egale cu 1)atunci $(a-1)(b-1)+(b-1)(c-1)+(c-1)(a-1)\ge 0$, fals .

**$\boxed{\text{G:1325}}$. Determinați $x\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x^2+8x+3$ să fie pătratul unui număr întreg.**

**Gigi Zaharia , Luiza Cremeneanu**, Craiova

***Rezolvare***: Avem $x^2+8x+16-13=y^2$ sau $(x+4)^2-y^2=13$ de unde $(x+4-y)(x+4+y)=13$ și de aici $\begin{cases}x+4-y=1\\x+4+y=13\end{cases}$ $\begin{cases}x+4-y=13\\x+4+y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x+4-y=-1\\x+4+y=-13\end{cases}$ $\begin{cases}x+4-y=-13\\x+4+y=-1\end{cases}$.

Găsim $(x;y)\in\{(31;6),(31;-6),(-11;-6),(-11;6)\}$.

**$\boxed{\text{G:1326}}$. Dacă $a,b,c\rangle 0$ și $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$, atunci: $\frac{a}{ab+2bc+ca}+\frac{b}{bc+2ca+ab}+\frac{c}{ca+2ab+bc}\le\frac{3}{4}$.**

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

***Rezolvare:***

$$\sum_{cyc}\frac{a}{ab+2bc+ca}=\sum_{cyc}a\cdot\frac{1}{(ab+bc)+(bc+ca)}\le\sum_{cyc}\frac{a}{4}\cdot\left(\frac{1}{ab+bc}+\frac{1}{bc+ca}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{a+c}{ab+bc}+\frac{a+b}{bc+ca}+\frac{b+c}{ca+ab}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\sum_{cyc}\frac{a+c}{b(a+c)}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\sum_{cyc}\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{4}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$

**$\boxed{\text{G:1327}}$. Într-un paralelogram ABCD , se cunosc AB=7 cm , BC=4 cm și $m(\widehat{ABC})=60^\circ$.**

**În exterior se construiesc triunghiurile dreptunghic isoscele ABM și ADN, cu bazele $[BM]$, respectiv $[DN]$. Calculați perimetrul și aria triunghiului AMN.**

**Ionel Tudor-Călugăreni**, Giurgiu

***Rezolvare:***

$P_{AMN}=AM+AN+MN=7+4+MN$, unde $AM=AB=7,\ AN=AD=BC=4$.

$m(\sphericalangle BAD)=180^0-m(\sphericalangle ABC)=120^0$,

$m(\sphericalangle MAN)=360^0-m(\sphericalangle MAB)-m(\sphericalangle NAD)-m(\sphericalangle BAD)=60^0$. $m(\sphericalangle ADC)=m(\sphericalangle ABC)=60^0$.

Atunci, din congruența triunghiurilor

$\Delta MAN\equiv\Delta ADC\ (L.U.L)\ \ (AN=AD=7, \sphericalangle MAN\equiv\sphericalangle ADC=60^0,\ AM=D=7\ \Rightarrow MN\equiv AC$.

Prelungim MA cu AP, $P\in(DC)$. Cum $MA\perp AB$ și $AB\,||\,DC\Rightarrow AP\perp DC\Rightarrow$

$m(\sphericalangle DAP)=90^0-m(\sphericalangle ADC)=30^0\Rightarrow PD=\frac{AD}{2}=2$.

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul APD se obține $AP=2\sqrt{3}$ iar PC= DC-DP=5 iar din triunghiul APC se obține $AC^2=AP^2+PC^2\Rightarrow AC=\sqrt{37}=MN$, deci $P_{AMN}=11+\sqrt{37}$.

$\Delta AMN \equiv \Delta ADC \Rightarrow S_{AMN} = S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{2}\, DC \cdot AD \cdot sin(\sphericalangle\, ADC) = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4 \cdot sin60^{\circ} = 14 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

Deci $S_{AMN} = 7\sqrt{3}$ cm$^2$

$\boxed{\text{G:1328}}$. **Fie triunghiul ABC înscris în cerc și $A_1$, $B_1$, respectiv $C_1$, punctele diametral opuse în cerc ale lui A, B respectiv C. Dacă $A_2$, $B_2$, respectiv $C_2$ sunt mijloacele laturilor BC, AC, și respectiv AB, arătați că $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$ sunt concurente.**

**Alina Călugăru, Eugenia Turcu**, Craiova

***Rezolvare:*** Ducem $BB^I$, $CC^I$ înălțimile din A și C ale triunghiului ABC $\left(B^I \in AC,\ C^I \in AB\right)$ care se intersectează în H. Deoarece $A_1C \perp AC$ și $BB^I \perp AC \Rightarrow BH \,||\, A_1C$ și analog $A_1B \,||\, CH$. De aici rezultă că patrulaterul $BA_1CH$ este paralelogram și $A_1A_2$ trece prin H. Analog, $B_1B_2$ și $C_1C_2$ trec prin H de unde cerința problemei.

## ▪ Clasa a VIII-a

$\boxed{\text{G:1329}}$. **Fie $n \in \mathbb{N}$ astfel încât numărul $p = 2^{2^n} + 1$ să fie prim . Arătați că $p$ nu se poate scrie ca diferența cuburilor a două numere naturale nenule .**

eleve **Militaru Cismaru Gabriela** , Craiova , **Panduru Mădălina**, Bălcesti, Vâlcea

***Rezolvare***: Fie $p = 2^{2^n} + 1 = a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$, cu $a, b \in \mathbb{N}^*$ . Cum $a^2 + ab + b^2 > a - b$ $\Rightarrow a - b = 1$ de unde $a = b + 1$ și atunci $p = 2^{2^n} + 1 = (b+1)^3 - b^3 = b^3 + 3b^2 + 3b + 1 - b^3 = 3b(b+1) + 1$ și de aici $3b(b+1) = 2^{2^n}$ fals, deoarece $3$ nu divide $2^{2^n}$.

$\boxed{\text{G:1330}}$. **Fie $x \ge 1$ și $y \ge 1$. Arătați că $x^2y^2 + 16(x+y) \ge 16xy + 16$. În ce caz avem egalitate?**

**Lucian Tuțescu**, Craiova, **Sorin Botea**, Tg.Jiu

***Rezolvare:*** Conform ipotezei avem $x^2 \ge 4x - 4 \ge 0,\ y^2 \ge 4y - 4 \ge 0 \Rightarrow$ $x^2 \cdot y^2 \ge (4x-4)\cdot(4y-4) = 16xy - 16x - 16y + 16 \Rightarrow$ $x^2 \cdot y^2 + 16(x+y) \ge 16xy + 16$. Egalitate avem pentru $x^2 = 4x - 4$ și $y^2 = 4y - 4 \Rightarrow$ $(x-2)^2 = 0,\ (y-2)^2 = 0 \Rightarrow x = y = 2$.

$\boxed{\text{G:1331}}$. **Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2(y+z) = y^2(x+z) = 2024$ și $x \ne y$. Calculați $z^2(x+y)$.**

**Alecu Orlando**, Craiova

***Rezolvare:*** Din $0 = x^2(y+z) - y^2(x+z) = xy(x-y) + z(x^2 - y^2) = (x-y)(xy + yz + zx)$.

Cum $x \ne y$ rezultă $xy + yz + zx = 0$. Cum

$0 = (x-y)(xy + yz + zx) = xz(x-z) + y(x^2 - y^2) = x^2(y+z) - z^2(x+y) = 2024 - z^2(x+y) \Rightarrow$

$z^2(x+y) = 2024$.

$\boxed{\text{G:1332}}$. **Fie $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $a + b = x + y \ne 0$ și $a^3 + b^3 = x^3 + y^3$. Arătați că $a^n + b^n = x^n + y^n, (\forall) n \in \mathbb{N}$.**

**Alina Tigaie** , Craiova

***Rezolvare***: Avem $(a+b)^3 - 3ab(a+b) = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$ de unde

$ab(a+b)=xy(x+y)$ adică $ab=xy$. Cum $a=x+y-b$ obținem $(x+y-b)b=xy$ sau $b^2-xb-by+xy=0$ sau $(b-x)(b-y)=0$. Dacă $b=x$ rezultă $a=y$ iar dacă $b=y$ rezultă $a=x$ și de aici $a^n+b^n=x^n+y^n,(\forall)n\in\mathbb{N}$.

$\boxed{\text{G:1333}}$. **Determinați $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $A=n^{11}+n+1$ să fie număr prim.**

**Mihaela Stăncele, Monica Stanca**, Craiova

***Rezolvare:*** Se arată că

$A=n^{11}-n^2+n^2+n+1=n^2(n^9-1)+n^2+n+1=n^2(n^3-1)(n^3+1)+n^2+n+1=$

$=\left(n^2+n+1\right)\cdot\left[n(n-1)(n^3+1)+1\right]$ și doar pentru n = 1 se obține că A =3 este număr prim. În rest, ambele paranteze sunt mai mare ca 1, deci A nu este număr prim.

$\boxed{\text{G:1334}}$. **Arătați că ecuația $4x^3-507x+253=0$ are trei rădăcini reale care au suma număr natural.**

**Ionel Tudor**-Călugăreni, Giurgiu

**Rezolvare:** Rezolvăm ecuația și găsim soluțiile reale $x_1,x_2,x_3$ cu suma $x_1+x_2+x_3\in\mathbb{N}$. Ecuația dată este echivalentă cu : $4x^3-507x+253=0\,\big|\cdot 2\Rightarrow(2x)^3-507\cdot(2x)+506=0$. Notăm 2x = y și obținem ecuația $y^3-y-506y+506=0\Leftrightarrow(y-1)(y^2+y-506)=0\Rightarrow y_1=1,\quad y_2=22,\quad y_3=-23$.

Mai departe se obține $x\in\left\{\frac{1}{2};11;-\frac{23}{2}\right\}$.

$\boxed{\text{G:1335}}$. **Rezolvați ecuația** $\frac{x^4-1}{x^3+x^2+x+1}+\frac{x^5+1-x^2-x^3}{(x-1)^2\cdot(x^2+x+1)}=4048,\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$**.**

**Nicolae Ivășchescu**, Canada

***Rezolvare***: Ecuația dată este echivalentă cu $\frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x^2+1)}+\frac{(x^2-1)(x^3-1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=4048\Rightarrow$

$x-1+x+1=4048\Rightarrow x=2024.\ S=\{2024\}$.

$\boxed{\text{G:1336}}$. **Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația irațională** $\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt{x^2-x}=\sqrt{1+\frac{1}{x}}$**.**

**Ionel Tudor**-Călugăreni, Giurgiu

***Rezolvare:*** Condițiile de existență în R ale ecuației sunt : $x\neq 0,\ 1+\frac{1}{x}\geq 0,\ x^2-x\geq 0$. Ridicăm la pătrat ambii membri ai ecuației , apoi rezolvăm ecuația în care nu mai apar radicali și reținem ca soluții reale ale ecuației date , doar pe acelea care verifică și condițiile impuse.

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\cdot\left(x^2-x\right)=1+\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{(x+1)^2}{x^2}\cdot x(x-1)-\frac{x+1}{x}=0$. Din $(x+1)(x^2-2)=0$ se obțin soluțiile problemei: $S=\{-\sqrt{2},-1,\sqrt{2}\}$.

$\boxed{\text{G:1337}}$. **Fie $a,b,c\rangle 0$. Să se demonstreze că:** $\frac{a}{4a+b+c}+\frac{b}{a+4b+c}+\frac{c}{a+b+4c}\leq\frac{1}{2}$**.**

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

***Rezolvare:*** Se folosește următoarea inegalitate: $\frac{1}{x+y}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\Leftrightarrow(x-y)^2\geq 0,$

$$\sum\frac{a}{4a+b+c}=\sum\frac{a}{3a+\sum a}=\sum\left(a\cdot\frac{1}{3a+\sum a}\right)\leq\sum\left(\frac{a}{4}\left(\frac{1}{3a}+\frac{1}{\sum a}\right)\right)=\sum\left(\frac{1}{12}+\frac{a}{4\sum a}\right)=$$

$= \sum \frac{1}{12} + \sum \frac{1}{4\sum a} = \frac{3}{12} + \frac{\sum a}{4\sum a} = \frac{1}{2}$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.

**G:1338. Să se determine $(x; y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ din ecuația $\sqrt{x-10}+\sqrt{y-10}=\frac{x+y+30}{10}$.**

**Adrian Stan**, Buzău

***Rezolvare***: Notăm $x-10=a,\ y-10=b \Rightarrow x=a+10,\ y=b+10$

Ecuația devine $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\frac{a+b+20+30}{10}=\frac{a+b}{10}+5.$

Cum $\frac{a+b}{10}+5 \geq 2\sqrt{\frac{a+b}{10}\cdot 5}=2\sqrt{\frac{a+b}{2}}=2\sqrt{\frac{\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2}{2}} \geq 2\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Avem egalitate dacă și numai dacă $\frac{a+b}{10}=5$ și $\sqrt{a}=\sqrt{b}$. Obținem $a=b=25$. $S=\{(15;15)\}$.

**G:1339. Un paralelipiped dreptunghic are toate muchiile exprimate prin numere naturale. Știind că diagonalele a trei fețe distincte ca arii au lungimile 10 cm, $2\sqrt{34}$ cm, respectiv $2\sqrt{41}$ cm, să se afle lungimea diagonalei paralelipipedului și volumul acestuia.**

**Dumitru Preoteasa**, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

***Rezolvare:*** Notăm cu a, b și c lungimile a trei muchii care pornesc din același vârf. Conform enunțului avem relațiile: $a^2+b^2=100,\ (1)$ $a^2+c^2=136,\ (2)$ $b^2+c^2=164,\ (3)$. Adunând aceste trei egalități, obținem $2(a^2+b^2+c^2)=400 \Rightarrow d^2=a^2+b^2+c^2=200 \Rightarrow d=10\sqrt{2}$. Mai departe se află a =6, b =8, c =10 iar volumul este egal cu 480 cm$^3$.

**G:1340. Într-un cub secțiunea diagonală are aria $A_1$. O secțiune paralelă cu aceasta are aria $A_2$ și $A_1=\sqrt{2}\cdot A_2$. a) Ce formă are secțiunea a 2-a ? b) Cât este distanța dintre aceste secțiuni ?**

**Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

***Rezolvare:***

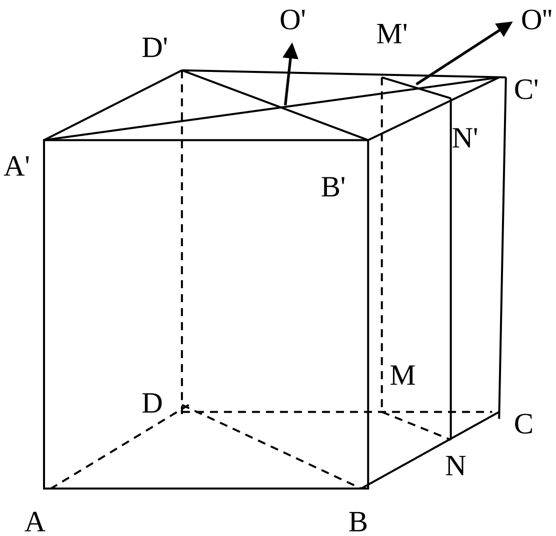
a) Fie l muchia cubului. Atunci,

$B^I D^I = l\sqrt{2} \Rightarrow A_1 = BB^I \cdot B^I D^I = l^2\cdot\sqrt{2}$ ;

$A_2 = NN^I \cdot M^I N^I = l\cdot M^I N^I \Rightarrow$

$l^2\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot M^I N^I$, secțiunea a doua fiind pătrat.

b) Distanța $O^I O^{II} = \frac{l(2\sqrt{2}-1)}{2}$ se obține din asemănarea triunghiurilor $\Delta C^I M^I N^I \sim \Delta C^I D^I B^I$.




# ▪ Clasa a IX-a

**L:1119. Găsiți toate numerele naturale n astfel încât $\sqrt{n+1}+\sqrt{4n-3}$ să fie număr natural**

elevă **Militaru Cismaru Gabriela**, Craiova

***Rezolvare***:

Fie $\sqrt{n+1}+\sqrt{4n-3}=p\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\sqrt{4n-3}=p-\sqrt{n+1}\Rightarrow\ \sqrt{4n-3}\in\mathbb{N}^*,\sqrt{n+1}\in\mathbb{N}^*$.

Notăm $n+1=a^2,\ 4n-3=b^2,\ a,b\in\mathbb{N}^*\Rightarrow 4a^2-b^2=7\Leftrightarrow(2a-b)(2a+b)=7$. De aici se obține a=2 și b =3 adică n = 3 este singurul număr natural care convine.

**L:1120. Demonstrați că:**

$$\frac{1}{\left[\sqrt{2}\right]\cdot\left[\sqrt{5}\right]}+\frac{1}{\left[\sqrt{5}\right]\cdot\left[\sqrt{10}\right]}+....+\frac{1}{\left[\sqrt{n^2+1}\right]\cdot\left[\sqrt{n^2+2n+2}\right]}=\frac{n}{n+1},\quad\forall n\in\mathbb{N}^*,$$ **unde** $[x]$ **este partea întreagă a lui x.**

**Elena și Constantin Ciobîcă**, Fălticeni

***Rezolvare***: Din $\left[\sqrt{n^2+1}\right]=n,n\in\mathbb{N}^*$ și $\left[\sqrt{n^2+2n+2}\right]=n+1,\forall n\in\mathbb{N}^*$ obținem că membrul stâng este egal cu $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+......+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+....+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

**L:1121. Fie** $x,y,z\in\mathbb{R}$ **cu** $x\ge\frac{1}{2},\ y\ge\frac{1}{2},\ z\ge\frac{1}{2}$. **Arătați că**

$x^2y^2z^2+4(xy+yz+zx)+1\ge 8xyz+2(x+y+z)$. **În ce caz avem egalitate ?**

**Simona Marinela Șerban**, Dăbuleni, Dolj

***Rezolvare***: Cum $(x-1)^2\ge0\Rightarrow x^2\ge2x-1\ge0$ și analoagele. Înmulțindu-le obținem:

$x^2y^2z^2\ge(2x-1)(2y-1)(2z-1)\Leftrightarrow x^2y^2z^2\ge 8xyz-4(xy+yz+zx)+2(x+y+z)-1$ c.c.t.d.

Egalitatea există pentru x = y = z = 1.

**L:1122. Aflați soluțiile reale ale ecuației** $\left(x^2+x-1\right)^3+\left(3x^2+x-8\right)^3=\left(4x^2+2x-9\right)^3$.

**Iulia și Ionuț Șchiopu** , Craiova

***Rezolvare:*** Ecuația se scrie $\left(x^2+x-1\right)^3+\left(3x^2+x-8\right)^3+\left(-4x^2-2x+9\right)^3=0$.

Fie $a=x^2+x-1,b=3x^2+x-8,c=-4x^2-2x+9$. Cum $a+b+c=0$ avem $a^3+b^3+c^3=3abc$ (Se obține din identitatea $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\right)$)

Ecuația devine $3\left(x^2+x-1\right)\left(3x^2+x-8\right)\left(-4x^2-2x+9\right)=0$ și de aici $x^2+x-1=0$ cu $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$,

$3x^2+x-8=0$ cu $x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{97}}{6}$ și $-4x^2-2x+9=0$ cu $x_{5,6}=\frac{-1\pm\sqrt{37}}{4}$.

**L:1123. Fie** $a>1$ **fixat. Rezolvați în mulțimea numerelor reale:**

$\left(a^{2x}+a^x-a^2-a\right)^3=\left(a^{2x}-a\right)^3+\left(a^x-a^2\right)^3$.

**Marin Chirciu**, Pitești

***Rezolvare:*** Cu notația $(u,v)=\left(a^{2x}-a,a^x-a^2\right)$ ecuația se scrie $(u+v)^3=u^3+v^3\Leftrightarrow uv(u+v)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(a^{2x}-a\right)\left(a^x-a^2\right)\left(a^{2x}+a^x-a^2-a\right)=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{1}{2},1,2\right\}$. Rezultă $S=\left\{\frac{1}{2},1,2\right\}$.

**Nota.** Pentru $a=2$ se obține Problema propusă în MathAtelier7/2024.

Solve in real numbers $\left(2^{2x}+2^x-6\right)^3=\left(2^{2x}-2\right)^3+\left(2^x-4\right)^3$. Panagiotis Danousis, Greece

**L:1124. Fie** $x,y>0$ **astfel încât** $x^2+xy+y^2=3$.**Arătați că** $\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3xy+2}+\sqrt{3y^2+3}\le3\sqrt{5}$.

**Felicia Ozunu** ,Craiova

***Rezolvare:*** Folosim inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz și avem

$\left(\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3xy+2}+\sqrt{3y^2+3}\right)^2 \le \left(1^2+1^2+1^2\right)\left(3x^2+1+3xy+2+3y^2+3\right)=3\left(3\left(x^2+xy+y^2\right)+6\right)$
$=3\left(9+6\right)=45$ de unde inegalitatea cerută.

**L:1125. Determinați numerele reale $x$ și $y$ astfel încât: $\left(xy+9\right)^2+\left(y^2-xy\right)^2=18y^2$.**

**Grigorie Dan, Lavinia Trincu**, Craiova

***Rezolvare***: Observăm că $y \neq 0$, în caz contrar se obține $9^2=0$, fals. Relația din enunț se scrie
$x^2y^2+18xy+81+y^4-2xy^3+x^2y^2-18y^2=0 \Leftrightarrow 2y^2x^2+2y(9-y^2)+(9-y)^2 =0$.
$\Delta=4y^2(9-y^2)-8y^2(9-y^2)^2=-4y^2(9-y^2)^2$. Din condiția
$\Delta \ge 0,\ si\ y\neq 0 \Rightarrow (9-y^2)^2\le 0 \Rightarrow y\in\{-3;3\}\Rightarrow x\in\{0\}$.

**L:1126. Fie $a,b,c>0$ astfel încât $a+b+c=1$. Să se demonstreze că**
$27\le 8\cdot\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)+15\le\frac{1}{abc}$.

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

***Rezolvare***:

Inegalitatea din stânga este echivalentă cu $\sum\frac{a}{b+c}\ge\frac{3}{2}$ ( inegalitatea lui Nesbit). Pentru inegalitatea din dreapta aplicând inegalitatea: $\frac{4}{b+c}\le\frac{b+c}{bc}\Leftrightarrow\left(b-c\right)^2\ge 0\Rightarrow\sum\frac{4}{b+c}\le\sum\frac{b+c}{bc}$

$$\Leftrightarrow 4\sum\frac{2a+b+c}{b+c}\le\sum\frac{(2a+b+c)(b+c)}{bc}\Leftrightarrow\ 8\sum\frac{a}{b+c}+12\le\sum\frac{(a+b+c+a)(a+b+c-a)}{bc}\Leftrightarrow$$

$$8\sum\frac{a}{b+c}+12\le\sum\frac{(1+a)(1-a)}{bc}=\sum\frac{(1-a^2)}{bc}=\sum\frac{a-a^3}{abc}=\frac{\sum a-\sum a^3}{abc}=\frac{1-\sum a^3}{abc}\le\frac{1-3\sqrt[3]{(abc)^3}}{abc}=$$

$=\frac{1}{abc}-3\Rightarrow 8\sum\frac{a}{b+c}+12\le\frac{1}{abc}-3$, cu egalitate pentru $a=b=c=\frac{1}{3}$.

**L:1127. Dacă $x,y\rangle 0,\ x+y=2$ atunci în triunghiul ABC cu semiperimetrul $s=\frac{a+b+c}{2}$, are loc inegalitatea : $\frac{3}{{m_a}^2+{m_b}^2+{m_c}^2}+\frac{4}{b(ax+cy)}+\frac{4}{c(bx+ay)}+\frac{4}{a(cx+by)}\ge\frac{16}{s^2}$**

**D.M.Bătinețu-Giurgiu** , București, **Ionel Tudor**- Călugăreni, Giurgiu

***Rezolvare:***

Vom folosi cunoscuta relație ${m_a}^2+{m_b}^2+{m_c}^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$, care rezultă din formulele de calcul ale medianelor și inegalitatea lui Bergström $\frac{{x_1}^2}{y_1}+\frac{{x_2}^2}{y_2}+......+\frac{{x_n}^2}{y_n}\ge\frac{\left({x_1}^2+{x_2}^2+....+{x_n}^2\right)}{y_1+y_2+....+y_n}$.

Membrul stâng al inegalității se scrie

$$\frac{3}{\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)}+4\cdot\sum_{cyc}\frac{1}{b(ax+cy)}=4\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\sum_{cyc}\frac{1}{b(ax+cy)}\right).$$

Aplicând inegalitatea lui Bergström avem

$$\sum_{cyc}\frac{1}{b(ax+cy)}=\frac{1^2}{abx+bcy}+\frac{1^2}{bcx+acy}+\frac{1^2}{acx+aby}\ge\frac{(1+1+1)^2}{ab(x+y)+bc(x+y)+ac(x+y)}=\frac{9}{2(ab+ac+bc)}$$

Atunci

$$4\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\sum_{cyc}\frac{1}{b(ax+cy)}\right)\ge 4\left(\frac{1^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{3^2}{2(ab+bc+ca)}\right)\ge 4\cdot\frac{(1+3\ )^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac}\ge$$

$$\frac{4\cdot 16}{(a+b+c)^2}=\frac{16}{S^2}$$

**L:1128. Rezolvați în R sistemul de ecuații:**

$$\sqrt{x_1-3}+\sqrt{x_2^2-4x_2+3}-\sqrt{(x_3-2)^3}=\sqrt{x_2-3}+\sqrt{x_3^2-4x_3+3}-\sqrt{(x_4-2)^3}=\ldots$$

$$=\sqrt{x_n-3}+\sqrt{x_1^2-4x_1+3}-\sqrt{(x_2-2)^3}=0.$$

**Mihaly Bencze**, Brașov

***Rezolvare*:** Adunând ecuațiile sistemului obținem:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{x_k-3}+\sqrt{x_k^2-4x_k+3}-\sqrt{(x_k-2)^3}\right)=0.$$

Pentru $x\ge 3$ avem: $\sqrt{x-3}+\sqrt{x^2-4x+3}\le\sqrt{(x-2)^3}$ , (1). Într-adevăr, notând $y=x-2$, (1) devine $\sqrt{y-1}+\sqrt{y^2-1}\le\sqrt{y^3}$ , sau $\left((y-1)(y^2-1)-1\right)^2\ge 0$, adevărată, cu egalitate dacă și numai dacă $(y^2-1)(y-1)=1\Leftrightarrow y^3-y^2-y=0$

$\Leftrightarrow y_1=0,\ y_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt5}{2}$, dar numai $y=\frac{1+\sqrt5}{2}>1$, i.e. $x=\frac{5+\sqrt5}{2}$.

Deci sistemul are unica soluție $\left(\frac{5+\sqrt5}{2},\frac{5+\sqrt5}{2},\ldots,\frac{5+\sqrt5}{2}\right)$.

**L:1129. Fie $a\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x^2+ax-1=0$ are rădăcinile reale $x_1$ și $x_2$. Aflați cea mai mică valoare a expresiei $E(x_1;x_2)=(1+x_1^2)(1+x_2^2)$.** **Alecu Orlando**, Roșioridevede, Teleorman

***Rezolvare*:** $E(x_1;x_2)=1+(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+\left(x_1x_2\right)^2=4+a^2\ge 4$ cu egalitate pentru a = 0. Minimul expresiei este 4.

**L:1130.** a) Să se arate că există triunghiuri cu lungimile laturilor $a,b,c>2025$ astfel încât $[a]+[b]<[c]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui $x$.

b) Există triunghiuri cu lungimile laturilor $a,b,c>2025$ astfel încât $\{a\}+\{b\}<\{c\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui $x$?

c) Să se arate că nu există triunghiuri cu lungimile laturilor $a,b,c>2025$ astfel încât $[a]+[b]<[c]$ și $\{a\}+\{b\}<\{c\}$.

**Ioana Genoveva. Luiza Cremeneanu**, Craiova

Rezolvare:

a) Fie $a=b=2025,1$ și $c=4051$ care pot fi laturile unui triunghi deoarece a+b=4050,2, a+b>4051 $a+c>b,b+c>a$.

Cum $[a]=[b]=2025$ și $[c]=4051$ avem $[a]+[b]=2\cdot 2025=4050<4051$ obținem cerința.

Observăm că putem lua $a=b=2025,99$ și $c=4051$, similar $a=b=2025,99$ $c=2025$ și obținem alte triunghiuri care verifică .

b) Fie $a=b=2025,3$ și $c=4049,7$ . Atunci $a+b=4050,6>4049,7;a+c>b,b+c>a$ .Avem $\{a\}=\{b\}=0,3$ și $\{c\}=0,7$ . Observăm că $\{a\}+\{b\}<\{c\}$.

Similar putem da exemple pe această idee : $a=b=2025,2$ $c=4049,5$ , etc.

c) Adunând $[a]+\{a\}+[b]+\{b\}<[c]+\{c\}$ de unde $a+b<c$, fals!

**$\boxed{\text{L:1131}}$. Fie $a,\ b\in\mathbb{Q}$. Pentru fiecare $n\in\mathbb{Z}$ considerăm mulțimea ecuațiilor de forma $E_n:\ (n+1)x^2-2(n+a)x+b+n+1=0$. Arătați că dacă 1 , a, b+1 sunt în progresie aritmetică, atunci ecuațiile $E_n$ au o rădăcină comună.**

**Adrian Stan**, Buzău

***Rezolvare:***

Căutăm o soluție a ecuației independentă de n. Fie $\alpha\in\mathbb{R}$ o soluție a ecuațiilor de forma $E_n$. Atunci, $E_n:\ (n+1)\alpha^2-2(n+a)\alpha+b+n+1=0$ sau $n(\alpha^2-2\alpha+1)+(\alpha^2-2a\alpha+b+1)=0,\ \forall n\in\mathbb{Z}$.

Cum $n\in\mathbb{Z}\ si\ \alpha^2-2\alpha+1=0,\ \alpha^2-2a\alpha+b+1=0\Rightarrow\alpha=1\ si\ 1^2-2a+b+1=0\ \Rightarrow 2a=b+2$ adică tocmai faptul că 1; a; b+1 sunt în progresie aritmetică.

**$\boxed{\text{L:1132}}$. a) Determinați $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ astfel încât $xf(y)f(x+y)=yf(x)\left(f(x)+f(y)\right)\ (\forall)x,y\in(0,\infty)$.**

**b) Determinați $f:(-\infty,0)\to(-\infty,0)$ astfel încât $xf(y)f(x+y)=yf(x)\left(f(x)+f(y)\right)\ (\forall)x,y\in(-\infty,0)$.**

**Lucian Tuțescu**, Craiova, **Neculai Stanciu**, Buzău

***Rezolvare:*** a) Relația din enunț se scrie $\dfrac{f(x)+f(y)}{f(x+y)}=\dfrac{yf(x)}{xf(y)},\forall x,y\in(0,\infty)$. Schimbând $x$ cu $y$ obținem $\dfrac{f(y)+f(x)}{f(y+x)}=\dfrac{xf(y)}{yf(x)},\forall x,y\in(0,\infty)$.De aici $\dfrac{yf(x)}{xf(y)}=\dfrac{xf(y)}{yf(x)},\forall x,y\in(0,\infty)$ sau $y^2f^2(x)=x^2f^2(y)$ adică $yf(x)=xf(y)$.Pentru $y=1$ se obține $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{f(1)}{1}=a$. De aici $f(x)=ax$ cu $a>0$ pentru orice $x\in(0,\infty)$. Întorcându-ne în relația din enunț obținem $xay\cdot a(x+y)=yax(ax+ay)$ relație adevărată pentru orice $x,y\in(0,\infty)$. Așadar $f:(0,\infty)\to(0,\infty)\ \ f(x)=ax$ unde $a>0$ sunt funcțiile căutate .

b) Se procedează ca la a) și se găsește $f:(-\infty,0)\to(-\infty,0),\ f(x)=ax$ cu $a>0$

**$\boxed{\text{L:1133}}$. Demonstrați că $\dfrac{\cos 10^\circ}{1-\sin 10^\circ}=\tan 50^\circ$.** **Marin Chirciu**, Pitești

***Rezolvare***: Se folosește următoarea lemă:

**Lema.** Arătați că $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}=tg\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)$.

**Demonstrație.** $tg\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{tg\frac{\pi}{4}+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{\pi}{4}tg\frac{x}{2}}=\dfrac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}=\dfrac{1+\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1-\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}=\dfrac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}=$

$$=\frac{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\cos x}{1-\sin x}.$$

Egalitatea are loc pentru $1-\sin x\neq 0$ și $\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\neq 0$.

Folosind **Lema** pentru $x=10^{\circ}$ obținem: $\frac{\cos 10^{\circ}}{1-\sin 10^{\circ}}=tg\left(45^{\circ}+5^{\circ}\right)=tg50^{\circ}$.

**L:1134. Fie $\alpha,\beta>0$ și $a,b,c\in(0,\infty)$. Arătați că**

$$\sqrt{\frac{2\alpha a+(\alpha+\beta)b+2\beta c}{2\beta a+(\alpha+\beta)b+2\alpha c}}+\sqrt{\frac{2\alpha b+(\alpha+\beta)c+2\beta a}{2\beta b+(\alpha+\beta)c+2\alpha a}}+\sqrt{\frac{2\alpha c+(\alpha+\beta)a+2\beta b}{2\alpha b+(\alpha+\beta)a+2\beta c}}\geq 3.$$

**În ce caz avem egalitate ?** **Lucian Tuțescu , Olivia Bercea** , Craiova

***Rezolvare***: Folosind inegalitatea dintre media geometrică și cea aritmetică avem :

$$\sqrt{\frac{2\alpha a+(\alpha+\beta)b+2\beta c}{2\beta a+(\alpha+\beta)b+2\alpha c}}=\frac{2\alpha a+(\alpha+\beta)b+2\beta c}{\sqrt{\left(2\beta a+(\alpha+\beta)b+2\alpha c\right)\left(2\alpha a+(\alpha+\beta)b+2\beta c\right)}}\geq\frac{2\left(2\alpha a+(\alpha+\beta)b+2\beta c\right)}{2(\alpha+\beta)(a+b+c)}$$

Așadar $\sqrt{\frac{2\alpha a+(\alpha+\beta)b+2\beta c}{2\beta a+(\alpha+\beta)b+2\alpha c}}\geq\frac{2\alpha a+(\alpha+\beta)b+2\beta c}{(\alpha+\beta)(a+b+c)}$.

Analog $\sqrt{\frac{2\alpha b+(\alpha+\beta)c+2\beta a}{2\beta b+(\alpha+\beta)c+2\alpha a}}\geq\frac{2\alpha b+(\alpha+\beta)c+2\beta a}{(\alpha+\beta)(a+b+c)}$ și

$$\sqrt{\frac{2\alpha c+(\alpha+\beta)a+2\beta b}{2\alpha b+(\alpha+\beta)a+2\beta c}}\geq\frac{2\alpha c+(\alpha+\beta)a+2\beta b}{(\alpha+\beta)(a+b+c)}$$

Relații care prin adunare ne conduc la inegalitatea din enunț . Egalitate avem pentru

$$2\alpha a+(\alpha+\beta)b+2\beta c=2\beta a+(\alpha+\beta)b+2\alpha c$$
$$2\alpha b+(\alpha+\beta)c+2\beta a=2\beta b+(\alpha+\beta)c+2\alpha a$$
$$2\alpha c+(\alpha+\beta)a+2\beta b=2\alpha b+(\alpha+\beta)a+2\beta c$$

Relațiile se mai scriu $(\alpha-\beta)(a-c)=0;(\alpha-\beta)(b-a)=0;(\alpha-\beta)(c-b)=0$ .Așadar cu egalitate pentru $a=b=c$ dacă $\alpha\neq\beta$, iar dacă $\alpha=\beta$ egalitatea este adevărată pentru orice $a,b,c\in(0,\infty)$.

**L:1135. În triunghiul ABC obtuzunghic $\left(m(\sphericalangle C)\rangle\ 90^{0}\right)$ avem $4\sin A+5\cos B=6$ și $5\sin B+4\cos A=5$. Calculați măsura unghiului $\sphericalangle C$.** **Dan Mitricoiu,** Plătărești, Călărași

***Rezolvare:*** Din

$$61=6^2+5^2=(4\sin A+5\cos B)^2+(5\sin B+4\cos A)^2=16(\sin^2 A+\cos^2 A)+25(\sin^2 B+\cos^2 B)+$$
$$40(\sin A\cos B+\sin B\cos A)=41+40\sin(A+B)=41+40\sin(\pi-C)=41+40\sin C\Rightarrow\sin C=\frac{1}{2}.$$

Rezultă $\sphericalangle C=\frac{\pi}{6}\ sau\ \sphericalangle C=\frac{5\pi}{6}$. Cum triunghiul este obtuzunghic rezultă $\sphericalangle C=\frac{5\pi}{6}$.

**L:1136. Să se arate că în orice triunghi ascuțitunghic ABC are loc relația:**

$$\frac{1+\cos(A-B)}{\cos A+\cos B}+\frac{1+\cos(B-C)}{\cos B+\cos C}+\frac{1+\cos(C-A)}{1+\cos C+\cos A}\geq 6.$$ **Florin Rotaru**, Focșani

***Rezolvare:*** Folosim următoarele rezultate trigonometrice $b\cos C+c\cos B=a$ și $b\cos B+c\cos C=a\cos(B-C)$ și similarele lor. Obținem:

$$\frac{1+\cos(A-B)}{\cos A+\cos B}+\frac{1+\cos(B-C)}{\cos B+\cos C}+\frac{1+\cos(C-A)}{1+\cos C+\cos A}=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geq 2+2+2=6$$

**L:1137. În triunghiul oarecare ABC se consideră punctul $D\in(BC)$. Să se arate că dacă [AD**

**este bisectoarea unghiului** $\sphericalangle BAC$ **atunci:** $a^2 \le \dfrac{2\cos\frac{A}{2}}{\sin C}\cdot BD^2 + \dfrac{2\cos\frac{A}{2}}{\sin B}\cdot DC^2$ **notațiile fiind cele obișnuite într-un triunghi.**

**Emil C. Popa**, Sibiu

***Rezolvare.*** Aria S a triunghiului ABC se scrie: $S = \dfrac{a\cdot b\cdot c}{4R} = \dfrac{a\cdot 2R\sin B\cdot 2R\sin C}{4R} = \dfrac{a\cdot\dfrac{a}{\sin A}\cdot\sin B\cdot\sin C}{2} = \dfrac{a^2\cdot\sin B\cdot\sin C}{2\cdot\sin A}$. Cum aria triunghiului ABC este suma ariilor triunghiurilor ABD și ACD avem:

$$\frac{a^2\cdot\sin B\cdot\sin C}{2\cdot\sin A} = \frac{BD^2\sin B\cdot\sin ADB}{2\sin\frac{A}{2}} + \frac{DC^2\sin C\cdot\sin ADC}{2\sin\frac{A}{2}} = BD^2\sin B\cdot\sin ADB + DC^2\sin C\cdot\sin ADC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2\cdot\sin B\cdot\sin C}{2\cdot\sin A} \le BD^2\sin B + DC^2\sin C \Rightarrow c.c.t.d$$

## ▪ Clasa a X-a

$\boxed{\text{L:1138}}$. **Comparați numerele** $A = 2^{\sqrt{\log_2 2024}}$ **și** $B = 2024^{\sqrt{\log_{2024} 2}}$ **.**

**Ionuț Ivănescu, Mihaela Mirea**, Craiova

***Rezolvare***: Avem $\ln A = \sqrt{\log_2 2024}\cdot\ln 2 = \sqrt{\dfrac{\ln 2024}{\ln 2}}\cdot\ln 2 = \sqrt{\ln 2024\cdot\ln 2}$ **,**

$\ln B = \sqrt{\log_{2024} 2}\cdot\ln 2024 = \sqrt{\dfrac{\ln 2}{\ln 2024}}\cdot\ln 2024 = \sqrt{\ln 2\cdot\ln 2024}$. Așadar, $\ln A = \ln B \Rightarrow A = B$**.**

$\boxed{\text{L:1139}}$. **Arătați că ecuația** $\left[3^x\right] + \left[5^x\right] = 15^x + 1$ **nu are soluții nenule, unde** $[x]$ **reprezintă partea întreagă a lui x.**

elev **Ciurea Andrei**, Buzău

***Rezolvare***: Se arată că pentru $x \langle\ 0$ **,** $\left[3^x\right] + \left[5^x\right] = 0$ iar $15^x + 1 \rangle 0$.

Pentru $x\ \rangle\ 0$, și din $[x]\ \le\ x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ se arată că $5^x + 3^x \ge \left[3^x\right] + \left[5^x\right]$ iar din

$15^x + 1\ \rangle\ 5^x + 3^x \Leftrightarrow\ (3^x - 1)(5^x - 1)\rangle 0 \Rightarrow\ 15^x + 1\ \rangle\ \left[3^x\right] + \left[5^x\right]$, deci nu avem soluții nenule.

$\boxed{\text{L:1140}}$. **Fie** $a,b,c > 1, c > a > b$ **. Rezolvați în** $\mathbb{R}$ **ecuația** $a^x\cdot b^{x^2}\cdot c^{x^3} = a\cdot b\cdot c$ **.**

elev **Stancu Cosmin** , Craiova

***Rezolvare:*** Ecuația se scrie $a^x\cdot b^{x^2-1}\cdot c^{x^3-1} = 1$ de unde rezultă $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ sau $a\cdot b^{x+1}\cdot c^{x^2+x+1} = 1$.

Dar $c > b \Rightarrow c^{x^2+x+1} > b^{x^2+x+1}$.

$a\cdot b^{x+1}\cdot c^{x^2+x+1} > a\cdot b^{x+1}\cdot b^{x^2+x+1} = a\cdot b^{x^2+2x+2} \ge ab^{(x+1)^2+1} \ge ab > 1 \Rightarrow a\cdot b^{x+1}\cdot c^{x^2+x+1} > 1$ De aici rezultă că ecuația nu are alte soluții . Am folosit $(x+1)^2 \ge 0$.

$\boxed{\text{L:1141}}$. **Fie** $x, y\in\mathbb{R}$ **. Arătați că** $x^2y^4 + 7x^2y^2 + x^2 + 9y^2 \ge 6xy(y^2 - 1)$**.**

**Carmen Vlad , Iacob Meda**, Craiova

***Rezolvare***: Inegalitatea dată se scrie de forma

$$x^2y^4 - 2x^2y^2 + x^2 + 9y^2 - 6xy(y^2-1) + 9x^2y^2 = \left[x(y^2-1)\right]^2 + (3y)^2 - 2\cdot 3yx(y^2-1) + (3xy)^2 =$$

$=\left[x(y^2-1)-3y\right]^2+(3xy)^2\geq 0$ cu egalitate pentru $x(y^2-1)-3y=0$ și $3xy=0$ care conduce la x=y=0.

**L:1142. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_7\left(6^x+1\right)=\log_6\left(7^x-1\right)$.**

**Cezar Ozunu , Tica Gabriel**, Craiova

***Rezolvare***: Observăm că $x>0$ din $7^x-1>0$.

Fie $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=\log_7\left(6^x+1\right)$ care este bijectivă și $f^{-1}(x)=\log_6\left(7^x-1\right)$.

Ecuația se scrie $f(x)=f^{-1}(x)$ și de aici $f(x)=f^{-1}(x)=x$ adică $\log_7\left(6^x+1\right)=x\Leftrightarrow 7^x=6^x+1$ sau

$\left(\frac{6}{7}\right)^x+\left(\frac{1}{7}\right)^x=1$ cu soluția unică $x=1$.

**L:1143. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $x^2-2x+3\geq\sqrt{4-x^2}$.**

**Alecu Orlando,** RoșioridеVede, Teleorman

***Rezolvare***: $x^2-2x+3=(x-1)^2+2\geq 2\geq\sqrt{4-x^2}$, $\forall x\in[-2;2]$. $S=[-2;2]$.

**L:1144. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+2\lambda}+2^{(x+\lambda)^2}+2^{-x}=2^{\lambda+1}+1$.**

**Marin Chirciu**, Pitești

***Rezolvare:*** $LHS=2^{(x+\lambda)^2}+2^{x+2\lambda}+2^{-x}\overset{AM-GM}{\geq}2^{(x+\lambda)^2}+2\sqrt{2^{x+2\lambda}\cdot 2^{-x}}\geq 2^0+2\sqrt{2^{2\lambda}}=2^{\lambda+1}+1=RHS$,

cu egalitate pentru $(x+\lambda)^2=0$, $2^{x+2\lambda}=2^{-x}\Leftrightarrow x=-\lambda$. Deducem că $x=-\lambda$ este soluția unică a ecuației.

**Nota.** Pentru $\lambda=2$ se obține Problema propusă în Mathematics (College and High School) 7/2024.

Solve in real numbers $2^{x+4}+2^{(x+2)^2}+2^{-x}=9$. (OscarReynaga Alarcon)

**L:1145. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\left(x^2-7x+11\right)^{x^3-14x^2+55x-42}=1$.**

**Ionel Tudor-** Călugăreni**,** Giurgiu

***Rezolvare***: Din condiția $x^2-7x+11\rangle\ 0\Rightarrow x\in\left(-\infty;\frac{7-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{7+\sqrt{5}}{2};\infty\right)$. Logaritmăm ecuația dată și obținem: $\left(x^3-14x^2+55x-42\right)\cdot\lg\left(x^2-7x+11\right)=\lg 1=0\Rightarrow$

$x^3-14x^2+55x-42\Leftrightarrow(x-1)(x^2-13x+42)=0\Rightarrow x\in\{1;6;7\}$ care convin.

Din $\lg\left(x^2-7x+11\right)=0\Rightarrow x^2-7x+11=1\Rightarrow x^2-7x+10=0\Rightarrow x\in\{2;5\}$ care respectă condițiile de existență. Mai există și posibilitatea $(-1)^{2k}=1$ unde 2k este număr întreg par.

Deci $\begin{cases} x^2-7x+11=-1 \\ x^3-14x^2+55x-42 \quad \text{întreg par}\end{cases}$

$x^2-7x+12=0\Rightarrow x=3$ sau $x=4$.

Dacă $x=3$ avem $x^3-14x^2+55x-42=27-126+165-42=192-168=24$ număr par și avem soluția $x_6=3$

Dacă $x=4$, atunci $x^3-14x^2+55x-42=64-224+220-42=218$, număr par , deci avem și soluția $x_7=4$.

Așadar, mulțimea soluțiilor reale ale ecuației date este $S=\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

**L:1146. Fie $n\in\mathbb{N}$ astfel încât numărul $p=2^{2^n}+1$ să fie prim . Arătați că $p$ nu se poate scrie ca diferența puterilor $q$ a două numere naturale nenule , $q$ este număr prim $q\geq 3$.**

**Lucian Tuțescu , Ramona Nălbaru**, Craiova

***Rezolvare***: Fie $p=2^{2^n}+1=a^q-b^q=(a-b)\left(a^{q-1}+a^{q-2}b+\ldots+ab^{q-2}+b^{q-1}\right)$. Cum

$a^{q-1}+a^{q-2}b+...+ab^{q-2}+b^{q-1}>a-b$ și $p$ este număr prim rezultă $a-b=1$adică $a=b+1$.
Atunci
$p=2^{2^n}+1=(b+1)^q-b^q=b^q+C_q^1b^{q-1}+C_q^2b^{q-2}+...+C_q^{q-1}b+1-b^q=C_q^1b^{q-1}+C_q^2b^{q-2}+...+C_q^{q-1}b+1$și de aici $2^{2^n}=C_q^1b^{q-1}+C_q^2b^{q-2}+...+C_q^{q-1}b$ ceea ce este fals deoarece $q\left|C_q^1,q\right|C_q^2,...,q\left|C_q^k,...q\right|C_q^{q-1}$ și $q$ nu divide $2^{2^n}$ deoarece $q$ este număr prim și $q\geq 3$.

$\boxed{\text{L:1147}}$. **Fie** $a,b\in(0;1)\cup(1;\infty)$ **astfel încât** $\log_a 2023+\log_c 2023=2\log_b 2023$**. Arătați că** $\log_a 2024+\log_c 2024=2\log_b 2024$**.** **Delia și Cristian Schreider**, Craiova

***Rezolvare***: Relația din enunț se scrie

$$\frac{\ln 2023}{\ln a}+\frac{\ln 2023}{\ln c}=2\frac{\ln 2023}{\ln b}\Bigg|\cdot\frac{\ln 2024}{\ln 2023}\Rightarrow\frac{\ln 2024}{\ln a}+\frac{\ln 2024}{\ln c}=2\frac{\ln 2024}{\ln b}\Rightarrow$$
$\log_a 2024+\log_c 2024=2\log_b 2024$.

$\boxed{\text{L:1148}}$. **Găsiți o funcție bijectivă** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **astfel încât** $f(f(x))-f(x)=56x+2024,\ \forall x\in\mathbb{R}$**.**
**Eugenia Turcu, Mihai Călugăru**, Craiova

***Rezolvare***: Se va căuta o funcție de forma $f(x)=ax+b,\ a\neq 0$ iar după înlocuire în relația din enunț obținem: $(a^2-a)x+ab=56x+2024\Rightarrow a^2-a=56$ și ab=2024. Găsim
$a\in\{-7;8\}\Rightarrow b\in\left\{-\frac{2024}{7};253\right\}$.

$\boxed{\text{L:1149}}$. Există $z\in\mathbb{C}$ astfel încât $z^{2025}=(z+1)^{2025}=1$.
**Florin Șendroiu**, Tg. Cărbunești, **Sorin Botea**, Tg. Jiu

***Rezolvare:*** Presupunem că există și trecem relația dată la module, luând $z=a+ib,\ a,b\in\mathbb{R}$.

$|z|=|z+1|=1\Rightarrow a^2+b^2=1$, și $(a+1)^2+b^2=1$. Se obțin valorile: $a=-\frac{1}{2},\ b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dar $(z+1)^3=\left(\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=-1\Rightarrow(z+1)^{2025}=\left[(z+1)^3\right]^{675}=-1$, contradicție, deci nu există un astfel de număr z.

$\boxed{\text{L:1150}}$. **Rezolvați în** $\mathbb{R}$ **ecuația** $\sqrt[5]{x^3+2023}+\sqrt[7]{x^3+2024}+\sqrt[9]{x^3+2025}=0$**.**
**Ileana Stanciu, Mihai Călugăru**, Craiova

***Rezolvare:*** Observăm că $x=-\sqrt[3]{2024}$ este soluție . Cum
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[5]{x^3+2023}+\sqrt[7]{x^3+2024}+\sqrt[9]{x^3+2025}$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ rezultă că ecuația $f(x)=0$ are cel mult o soluție pe $\mathbb{R}$. Așadar, singura soluție a ecuației este $x=-\sqrt[3]{2024}$.

$\boxed{\text{L:1151}}$. **Pentru a și b cifre nenule, determinați numerele** $\overline{ab}$**, care verifică egalitatea:** $\sqrt[3]{a\sqrt{b}+\sqrt{\overline{ab}}}-\sqrt[3]{a\sqrt{b}-\sqrt{\overline{ab}}}=\sqrt[3]{\sqrt{\overline{ab}}}$. **Ionel Tudor-** Călugăreni, Giurgiu

***Rezolvare***:

Notăm $x=\sqrt{\overline{ab}}\ \rangle\ 0$ și obținem ecuația în x: $\sqrt[3]{x+a\sqrt{b}}-\sqrt[3]{x-a\sqrt{b}}=\sqrt[3]{x}\,\big|()^3\Rightarrow$

$2x-3\sqrt[3]{x\cdot(x^2-a^2b)}=x\Rightarrow\ x=3\sqrt[3]{x\cdot(x^2-a^2b)}\,\big|()^3\Rightarrow x^3=27x\cdot(x^2-a^2b)\big|:x\Rightarrow 28x^2=27a^2b$

Deci, $\overline{ab}=27\cdot\frac{a^2b}{28}$. Cum $\overline{ab}\in\mathbb{N}^*$ iar 27 și 28 sunt numere prime între ele se impune ca

$28=4\cdot 7\,|\,a^2\cdot b\Rightarrow a^2=4,\ si\ b=7$, deci enunțul se verifică numai pentru numărul $\overline{ab}=27$, obținând egalitatea $\sqrt[3]{2\sqrt{7}+\sqrt{27}}-\sqrt[3]{2\sqrt{7}-\sqrt{27}}=\sqrt[3]{3}$

**L:1152. Să se rezolve ecuația** $\frac{1}{2^{-x}+3^{-x}}+\frac{1}{3^{-x}+5^{-x}}+\frac{1}{5^{-x}+2^{-x}}=2^{x-1}+\frac{1}{2}(3^x+5^x)$**.**

**Adrian Stan,** Buzău

***Rezolvare:*** Dacă notăm $2^x=a\rangle 0,\ 3^x=b\rangle 0,\ 5^x=c\rangle 0$ ecuația dată devine

$$\frac{2ab}{a+b}+\frac{2bc}{b+c}+\frac{2ca}{c+a}=a+b+c \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}\right)+\left(\frac{b+c}{2}-\frac{2bc}{b+c}\right)+\left(\frac{c+a}{2}-\frac{2ca}{c+a}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}+\frac{(b-c)^2}{2(b+c)}+\frac{(c-a)^2}{2(c+a)}=0 \Rightarrow a=b=c$. De aici rezultă $2^x=3^x=5^x \Rightarrow x\in\{0\}$.

**L:1153. Rezolvați în** $\mathbb{R}_+$ **sistemul** $\begin{cases} x^2+xy+y^2=(2x+y)\sqrt[3]{xz^2} \\ y^2+yz+z^2=(2y+z)\sqrt[3]{yx^2} \\ z^2+zx+x^2=(2z+x)\sqrt[3]{zy^2} \end{cases}$**.**

**Mihaly Bencze,** Brașov

***Rezolvare*:** Cu inegalitatea mediilor $\sqrt[3]{xz^2}\le\frac{x+2z}{3}$, și alte două inegalități similare. Adunând ecuațiile sistemului obținem: $2\sum x^2+\sum xy=(2x+y)\sqrt[3]{xz^2}+(2y+z)\sqrt[3]{yx^2}+(2z+x)\sqrt[3]{zy^2}\le$

$$\le\frac{(2x+y)(x+2z)}{3}+\frac{(2y+z)(y+2x)}{3}+\frac{(2z+x)(z+2y)}{3}=$$

$=\frac{2\sum x^2+7\sum xy}{3}$, i.e. $6\sum x^2+3\sum xy\le 2\sum x^2+7\sum xy \Leftrightarrow \sum x^2\le\sum xy$, dar $\sum x^2\ge\sum xy$.

Deci, $x=y=z$, și obținem soluțiile $(a,a,a)$, unde $a\in R_+$.

**L:1154. Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghi ABC, cu notațiile cunoscute, să se arate că** $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[4]{\frac{b}{c}}+\sqrt[7]{\frac{c}{a}}\ \rangle\ \frac{4r}{R}$**.**

**Florin Rotaru,** Focșani

***Rezolvare:*** Avem $4\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[4]{\frac{b}{c}}+\sqrt[7]{\frac{c}{a}}\right)=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\left(3\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+4\cdot\sqrt[4]{\frac{b}{c}}\right)+4\cdot\sqrt[7]{\frac{c}{a}}\ \rangle$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\left(7\cdot\sqrt[7]{\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[4]{\frac{b}{c}}\cdot\sqrt[4]{\frac{b}{c}}\cdot\sqrt[4]{\frac{b}{c}}\cdot\sqrt[4]{\frac{b}{c}}}\right)+4\cdot\sqrt[7]{\frac{c}{a}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+7\cdot\sqrt[7]{\frac{a}{c}}+4\cdot\sqrt[7]{\frac{c}{a}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+3\cdot\sqrt[7]{\frac{a}{c}}+4\cdot\left(\sqrt[7]{\frac{a}{c}}+\sqrt[7]{\frac{c}{a}}\right)\ge\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+3\cdot\sqrt[7]{\frac{a}{c}}+4\cdot 2\cdot\sqrt{\sqrt[7]{\frac{a}{c}}\cdot\sqrt[7]{\frac{c}{a}}}\ge 8 \,|:4\Rightarrow$$

$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[4]{\frac{b}{c}}+\sqrt[7]{\frac{c}{a}}\ \rangle\ 2\ge\frac{4r}{R}$ ( Euler).

**L:1155. Arătați că dacă** $A_1B_1C_1$ **și** $A_2B_2C_3$ **sunt triunghiuri de arii** $S_1,S_2$ **și laturi** $a_1,b_1,c_1$ **respectiv** $a_2,b_2,c_2$ **iar** $x,y,z\in\mathbb{R}_+{}^*$ **cu** $xyz\ge 1$, **atunci** $xa_1a_2+yb_1b_2+zc_1c_2\ge 4\sqrt{3}\cdot\sqrt{S_1\cdot S_2}$

(O generalizare a inegalității lui G.Tsintsifas)

**Dumitru M. Bătinețu-Giurgiu; Ionel Tudor-**Călugăreni, Giurgiu

***Rezolvare*:**

Vom folosi inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică pentru trei variabile strict pozitive și inegalitatea lui Carliz într-un triunghi de laturi **a, b, c** și arie **S**: $3\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\ge 4\sqrt{3}\cdot S$**.**

$$xa_1a_2+yb_1b_2+zc_1c_2\ge 3\cdot\sqrt[3]{xyza_1a_2b_1b_2c_1c_2}=3\sqrt[3]{xyz}\cdot\sqrt[3]{a_1a_2b_1b_2c_1c_2}\ge 3\sqrt[3]{a_1a_2b_1b_2c_1c_2}=$$

$= 3\sqrt{\sqrt[3]{a_1^2 b_1^2 c_1^2} \cdot \sqrt[3]{a_2^2 b_2^2 c_2^2}} = \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a_1^2 b_1^2 c_1^2}} \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a_2^2 b_2^2 c_2^2}} \overset{Carliz}{\geq} \sqrt{4\sqrt{3} \cdot S_1} \cdot \sqrt{4\sqrt{3} \cdot S_2} = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{S_1 S_2}$

Deci $x a_1 a_2 + y b_1 b_2 + z c_1 c_2 \geq 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{S_1 \cdot S_2}$.

Pentru **x= y = z = 1** rezultă inegalitatea lui Tsintsifas : $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \geq 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{S_1 \cdot S_2}$ .

## ▪ Clasa a XI-a

$\boxed{\text{L:1156}}$ **. Dacă** $A \in M_2(\mathbb{R})$ **să se arate că** $\det\left(A^4 + A^2 + I_2\right) \leq \left(t^2 + d^2 - d + 1\right)^2$ **unde** $t = Tr(A)$ **și** $d = \det(A)$**.**

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

***Rezolvare***: Fie funcția $f(x) = \det(A - x \cdot I_2) = x^2 - t \cdot x + d$.

Deoarece $A^4 + A^2 + I_2 = (A^2 + A + I_2) \cdot (A^2 - A + I_2)$ și $(A^2 + A + I_2) = (A - \varepsilon I_2) \cdot (A - \varepsilon^2 I_2)$, unde $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ și $\varepsilon^3 = 1$. Atunci,

$\det(A^2 + A + I_2) = \det(A - \varepsilon I_2) \cdot \det(A - \varepsilon^2 I_2) = f(\varepsilon) \cdot f(\varepsilon^2) = \left(\varepsilon^2 - \varepsilon \cdot t + d\right) \cdot \left(\varepsilon - \varepsilon^2 t + d\right) =$

$= t^2 + d^2 + 1 + (\varepsilon^2 + \varepsilon)(d - t - dt) = t^2 + d^2 + 1 + t + dt - d$, unde s-a notat $(\varepsilon^2 + \varepsilon = -1)$.

Analog pentru $\det(A^2 - A + I_2) = f(-\varepsilon) \cdot f(-\varepsilon^2) = = t^2 + d^2 + 1 - t - dt - d$ .

Obținem că $\det\left(A^4 + A^2 + I_2\right) = \left(t^2 + d^2 + 1 - d\right)^2 - (t + td)^2 \leq \left(t^2 + d^2 - d + 1\right)^2$.

$\boxed{\text{L:1157}}$ **. a) Aflați termenul general al șirului** $(x_n)_{n \geq 1}$ **definit prin** $5x_{n+1} = x_n + 10$ $, \forall n \in \mathbb{N}^*$ **și** $x_1 = 1$**. b) Calculați** $\lim_{n \to \infty} x_n$**.**

**Cezar Ozunu**, Dolj, **Ilinca Sebastian** , Pârșcoveni, Olt

***Rezolvare***: a) Fie $x_{n+1} = y_n + \alpha$ $, \alpha \in \mathbb{R}$. Atunci $5\left(y_{n+1} + \alpha\right) = y_n + \alpha + 10$ adică $5y_{n+1} + 4\alpha = y_n + 10$ .

Luăm $4\alpha = 10$ adică $\alpha = \frac{5}{2}$ și atunci $5y_{n+1} = y_n$ adică $y_{n+1} = \frac{1}{5} y_n$. De aici $y_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} y_1$ cu

$y_1 = x_1 - \alpha = 1 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$. Așadar $y_n + \alpha = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{-3}{2}\right) + \alpha = x_n$. Obținem $x_n = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

$\boxed{\text{L:1158}}$**. Fie șirul** $(a_n)_{n \geq 1}$ **definit prin** $a_1 \rangle\ 0$ **și** $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2 + 2}$, $\forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$. **Să se calculeze** $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{\sqrt[3]{n}}$.

**Florin Rotaru**, Focșani

***Rezolvare***: Deoarece $a_1 \rangle\ 0$ rezultă prin inducție că $a_n \rangle\ 0, \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$. Cum $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n^2 + 2} \rangle 0$ este șir strict crescător, deci este mărginit inferior de primul termen. Dacă șirul ar fi mărginit superior atunci ar fi convergent și ar avea limită finită, l. Atunci, trecând relația de recurență la limită obținem $l = l + \frac{1}{l^2 + 2} \Rightarrow \frac{1}{l^2 + 2} = 0$, fals. Deci șirul este nemărginit și $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$. Cu Stolz- Cesaro se arată că

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n^3}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{n + 1 - 1} = \lim_{n \to \infty} \left(a_{n+1} - a_n\right)\left(a^2_{n+1} + a_{n+1} a_n + a^2_n\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{\left(a^2_{n+1} + a_{n+1} a_n + a^2_n\right)^{(a_n^2}}{a^2_n + 2} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2+\frac{a_{n+1}}{a_n}+1}{1+\frac{2}{a_n^2}}=3$$, deoarece $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n^3+2a_n}\right)=1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^3}{n}=3\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt[3]{n}}=\sqrt[3]{3}.$

**L:1159**. **Fie** $a_1\rangle 3$ **și** $a_{n+1}=a_n+\frac{9}{a_n}-3,\ \forall n\in\mathbb{N}.$ **Arătați că șirul** $(a_n)_{n\geq 1}$ **este convergent și calculați limita sa.** **Ionuț Ivănescu**, Craiova

***Rezolvare***: Observăm $a_{n+1}-3=a_n+\frac{9}{a_n}-6=\frac{(a_n-3)^2}{a_n}\rangle\ 0.$

Deoarece $a_{n+1}=a_n+\frac{9}{a_n}-3\geq 2\sqrt{a_n\cdot\frac{9}{a_n}}-3\ =6-3=3\rangle 0\Rightarrow$ șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ are termenii pozitivi și $a_n\ \rangle\ 3$. Din $a_{n+1}-a_n=\frac{9}{a_n}-3\langle\frac{9}{3}-3=0\Rightarrow$ șirul este strict descrescător, deci are limită. Fie l limita acestuia iar prin trecere la limită a relației de recurență obținem l=3.

**L:1160**. **Să se calculeze** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cdot\sin\frac{2n}{4n^2-1}\right)\cdot\left(1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2\right)$. **Adrian Stan**, Buzău

***Rezolvare:***

Se calculează $S=1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$, atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cdot\sin\frac{2n}{4n^2-1}\right)\cdot\frac{n(4n^2-1)}{3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\sin\frac{2n}{4n^2-1}}{\frac{2n}{4n^2-1}}\cdot\frac{2n}{4n^2-1}\cdot\frac{n(4n^2-1)}{3}=\frac{2}{3}$$

**L:1161**. **Fie** $a,\ b\ \rangle\ 0$ **și** $(x_n)_{n\geq 1}$ **un șir cu termeni pozitivi astfel încât** $\sum_{k=1}^{n}x_k^{\,a}+b\ln x_{n+1}=0,\ \forall n\geq 1.$ **Arătați că șirul** $(x_n)_{n\geq 1}$ **est econvergent și calculați limita** $\lim_{n\to\infty}n\cdot x_n^{\,b}$. **Mihaly Bencze**, Brașov

***Rezolvare***: Din scăderea relațiilor $\sum_{k=1}^{n+1}x_k^{\,a}+b\ln x_{n+2}=0,$ și $\sum_{k=1}^{n}x_k^{\,a}+b\ln x_{n+1}=0$ obținem

$x_{n+1}^{\,a}=\ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_{n+2}}\right)^b\ \rangle\ 0\Rightarrow x_{n+1}^{\,b}\rangle\ x_{n+2}^{\,b}\Rightarrow x_{n+1}\rangle x_{n+2}$, atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ este șir strict descrescător cu termenii pozitivi, deci este convergent. Fie L limita sa, atunci din

$$L^a=\ln\left(\frac{L}{L}\right)^b=0\Rightarrow L^b=0\Rightarrow L=0$$

Rezultă $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=0$. $\lim_{n\to\infty}n\cdot x_n^{\,b}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^{\,b}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}^{\,b}}-\frac{1}{x_n^{\,b}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{e^{x_n^{\,a}}}{x_n^{\,b}}-\frac{1}{x_n^{\,b}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^{\,a-b}}{\frac{e^{x_n^{\,a}}-1}{x_n^{\,a}}}=\lim_{n\to\infty}x_n^{\,a-b}$

Rezultă, $\lim_{n\to\infty}n\cdot x_n^{\,b}=\lim_{n\to\infty}x_n^{\,a-b}=\begin{cases}0, & a\rangle b\\ 1, & a=b\\ \infty, & a\langle b\end{cases}.$

**L:1162. a)Rezolvați în mulțimea $(1;\infty)$ ecuația** $\log_{x+1} x+\log_{x+2}(x+1)=\log_3 2+\log_4 3$

**b)Rezolvați în mulțimea $(0;1)$ ecuația** $\log_{x+1} x+\log_{x+2}(x+1)=\log_{\frac{3}{2}}\frac{1}{2}+\log_{\frac{5}{2}}\frac{3}{2}$

**Grigorie Dan Lucian, Mihai Călugăru**, Craiova

***Rezolvare***: a) Fie $f:(1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_{x+1} x+\log_{x+2}(x+1)$. Se arată că $f^{I}(x)\rangle\ 0$, adică f(x) este strict crescătoare pe $(1;\infty)$ și cum ecuația se scrie $f(x)=f(2)\Rightarrow x=2$ este soluție unică.

b) Similar ca la a) considerăm $g:(0;1)\to\mathbb{R},\ g(x)=\log_{x+1} x+\log_{x+2}(x+1)$ și cum $g^{I}(x)\ \rangle\ 0\Rightarrow$, g(x) este strict crescătoare iar din $g(x)=g(\frac{1}{2})\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ este soluție unică.

**L:1163. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{9^x-1}{9^x+1}-x$. Stabiliți paritatea și tabelul de variație al funcției f și rezolvați ecuația f(x)=0.** **Ionel Tudor –**Călugăreni, Giurgiu

***Rezolvare***: Mai întâi se arată că f(x) este impară: $f(-x)=-f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Funcția $f$ este derivabilă cu derivata $f^{I}(x)=\frac{2\cdot 9^x\ln 9-(9^x+1)^2}{(9^x+1)^2},\ \forall x\in\mathbb{R}$. Atunci,

$$f^{I}(x)=0\Leftrightarrow(9^x+1)^2-4\cdot\left(3^x\right)^2\ln 3=0\Leftrightarrow\ \Rightarrow\left(\underbrace{9^x+2\cdot 3^x\cdot\sqrt{\ln 3}+1}_{\rangle\ 0}\right)\cdot\left(9^x-2\cdot 3^x\cdot\sqrt{\ln 3}+1\right)=0\Rightarrow$$

$9^x-2\cdot 3^x\cdot\sqrt{\ln 3}+1=0$. Notăm $3^x=y\rangle 0$. Obținem ecuația $y^2-2y\sqrt{\ln 3}+1=0$.

$\Delta_y=4\ln 3-3\rangle\ 4\ln e-3\rangle\ 0$. Atunci, $y_{1,2}=\sqrt{\ln 3}\pm\sqrt{\ln 3-1}\ \rangle\ 0$. Obținem soluțiile pentru ecuația $f^{I}(x)=0\Rightarrow\ x_{1,2}{}^{I}(x)=\log_3\left(\sqrt{\ln 3}\mp\sqrt{\ln 3-1}\right)$.

Deoarece $\sqrt{\ln 3}+\sqrt{\ln 3-1}\rangle\ \sqrt{\ln 3}\ \rangle\ \sqrt{\ln 1}=0$ și $\sqrt{\ln 3}-\sqrt{\ln 3-1}=\frac{1}{\sqrt{\ln 3}+\sqrt{\ln 3-1}}\ \langle 1$, atunci

$x^{I}{}_1=\log_3\left(\sqrt{\ln 3}-\sqrt{\ln 3-1}\right)\langle\log_3 1=0\ \langle\ \log_3\left(\sqrt{\ln 3}+\sqrt{\ln 3-1}\right)=x^{I}{}_2$, așadar, $x_1^{I}\langle\ 0\ \langle x_2^{I}$.

$f^{I}(0)=\ln 3-1\rangle\ 0$ iar $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{I}(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[4\ln 3\cdot\frac{9^x}{(9^x+1)^2}-1\right]=-1\ \langle\ 0$.

$$\lim_{x\to\infty} f^{I}(x)=\lim_{x\to\infty}\left[4\ln 3\cdot\frac{3^x}{(9^x+1)^2}-1\right]=4\ln 3\cdot\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{3^x+\frac{1}{3^x}}\right)^2-1\right]=-4\ln 3\langle 0$$

De asemenea avem și : $f(0)=0$ (deci $x=0$ este o soluție a ecuației $f(x)=0$);

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{9^x-1}{9^x+1}-x\right)=-1+\infty=+\infty>0$;

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{9^x-1}{9^x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left[\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^x}{1+\left(\frac{1}{9}\right)^x}\right]-x\right)=1-\infty=-\infty<0$

Avem datele pentru stabilirea tabelului de variație al funcției f:

| x | $-\infty$ | | $x_1^{I}$ | | $0$ | | $x_2^{I}$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f^{I}(x)$ | -1 | - - - - | 0 | + + + + + | | + + + + | 0 | - - - - - - | -1 |
| $f(x)$ | $\infty$ | $\searrow$ | n | $\nearrow$ | 0 | $\nearrow$ | M | $\searrow$ | $-\infty$ |

Rezultă că f este strict descrescătoare pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,x'_1]$ și $[x'_2,\infty)$ iar pe

intervalul $(x'_1,\ x'_2)$ este strict crescătoare cu $f(0) = 0$.
$x'_1$ este punct de minim relativ cu minimul $m = f(x'_1) < f(0) = 0$ iar $x'_2$ este punct de maxim relativ cu maximul $M = f(x'_2) > f(0) = 0$.
Datorită monotoniei stricte pe intervalele $(-\infty, x'_1)$, $(x'_1, x'_2)$ și $(x'_2, +\infty)$ ecuația dată are cel mult o soluție în fiecare dintre aceste intervale $\left(x = 0 \text{ este soluția în } (x'_1, x'_2)\right)$
Folosind datele din tabelul de variație și apoi șirul lui Rolle , rezultă că ecuația
$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{9^x-1}{9^x+1} = x$, are trei soluții reale $x_1 \in (-\infty, x'_1)$ ; $x_2 = 0$ ; $x_3 \in (x'_2, +\infty)$
cu $x_1 < x_2 = 0 < x_3$ .
Avem $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9^{\frac{1}{2}}-1}{9^{\frac{1}{2}}+1} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{9}-1}{\sqrt{9}+1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{4} - \frac{2}{4} = 0$ , și cum f este impară rezultă $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$
Deci toate soluțiile sunt chiar numere raționale și $S = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$.

# ▪ Clasa a XII-a

**L:1164**. **Să se calculeze:** $I = \int_{-1}^{\frac{-1}{\sqrt{2}}} \frac{\arccos x}{x^2} dx.$ **Diaconu Radu**, Sibiu

***Rezolvare***: Folosim formula de integrare prin părți și avem:

$$I = \int_{-1}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(-\frac{1}{x}\right)' \cdot \arccos x dx = \left(-\frac{\arccos x}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} - \int_{-1}^{\frac{-1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$\frac{(3\sqrt{2}-4)\cdot\pi}{4} - \int_{-1}^{\frac{-1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx.$ În ultima integrală facem schimbarea de variabilă $x = \sin t$.

$$I_1 = \int_{-1}^{\frac{-1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{-\pi}{4}} \frac{\cos t}{\sin t \cdot \cos t} dt = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{-\pi}{4}} \frac{1}{\sin t} dt = \ln\left|tg\frac{t}{2}\right|\Bigg|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{-\pi}{4}} = \ln tg\frac{\pi}{8} = \ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

În final $I = \int_{-1}^{\frac{-1}{\sqrt{2}}} \frac{\arccos x}{x^2} dx = \frac{(3\sqrt{2}-4)\cdot\pi}{4} - \ln\left(\sqrt{2}-1\right)$

**L:1165**. **Determinați funcțiile continue** $f:[0;1] \to \mathbb{R}$ **astfel încât** $\int_0^1 f(x)\left(2x^2 - f(x)\right)dx = \frac{1}{5}$.

**Florin Rotaru**, Focșani

***Rezolvare:*** Folosim inegalitatea $4ab \le (a+b)^2,\ \forall a,b \in \mathbb{R}$ cu egalitate când a=b.

$\int_0^1 f(x)\left(2x^2 - f(x)\right)dx \le \int_0^1 \frac{\left[f(x)+2x^2-f(x)\right]^2}{4} dx = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$, deci având egalitate obținem
$f(x) = 2x^2 - f(x) \Rightarrow f(x) = x^2$.

**L:1166**. **Fie** $f:[0;1] \to [0;\infty)$ **o funcție derivabilă știind că** $f(1) = 0$ **și f** $^I$ **continuă. Să se arate că**

$144\left(\int_0^1 x^3 f(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 \left(f^I(x)\right)^2 dx$. **Florin Rotaru**, Focșani

***Rezolvare:*** $4\int_0^1 x^3 f(x)dx = \int_0^1 \left(x^4\right)^I f(x)dx = x^4 f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x^4 f^I(x)dx = -\int_0^1 x^4 f^I(x)dx$ deoarece f(1)=0.

$$16\left(\int_0^1 x^3 f(x)dx\right)^2=\left(\int_0^1 x^4 f^I(x)dx\right)^2\overset{Cauchy}{\le}\int_0^1 x^8dx\cdot\int_0^1\left(f^I(x)\right)^2dx=\frac{1}{9}\int_0^1\left(f^I(x)\right)^2dx\Rightarrow \text{c.c.t.d.}$$

$\boxed{\text{L:1167}}$. **Calculați: a)** $\int\sqrt{\dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{x^2+1}}dx$; **b)** $\int\sqrt[n]{\dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{x^2+1}}dx$; $x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}, n\ge 3$.

**Preda Oana**, Cariova

***Rezolvare***:

a) $\int\sqrt{\dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{x^2+1}}dx=\int\left[\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]^I\cdot\sqrt{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}dx=\dfrac{2}{3}\left(\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)^{\frac{3}{2}}+C$;

b) $\int\sqrt[n]{\dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{x^2+1}}dx=\dfrac{n}{n+1}\left(\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)^{\frac{n+1}{n}}+C$.

$\boxed{\text{L:1168}}$. **Fie** $f(x)=e^x+4x^3+1$. **Calculați** $\int_2^{e+5} f^{-1}(x)dx$.

**Marin Chirciu**, Pitești

***Rezolvare***: Folosim identitatea lui Young:

Dacă $f:[a,b]\to[c,d]$, $f$ derivabilă, $f'(x)\in\mathbf{R}^*$, $\forall x\in[a,b]$, $f(a)=c, f(b)=d$, atunci:

$$\int_a^b f(x)dx+\int_c^d f^{-1}(x)dx=bd-ac.$$ În cazul nostru:

$f:[0,1]\to[2,e+5]$, $f(x)=e^x+4x^3+1$, $f(0)=2$, $f(1)=e+5$, $f'(x)=e^x+12x>0$, $x\in[0,1]$.

Rezultă: $\int_0^1 f(x)dx+\int_2^{e+5} f^{-1}(x)dx=(e+5)\cdot 1-0\cdot 2=e+5$.

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(e^x+4x^3+1\right)dx=\left(e^x+x^4+x\right)\Big|_0^1=e+2-1=e+1\Rightarrow\int_2^{e+5} f^{-1}(x)dx=4.$$

$\boxed{\text{L:1169}}$. **Fie** $\lambda\ge 0, n>0$. **Calculați** $\int\dfrac{e^{nx}-\lambda}{e^{nx}+\lambda}dx$, $x\in\mathbf{R}$.

**Marin Chirciu**, Pitești

***Rezolvare***: Pentru $\lambda=0$ obținem $\int dx=x+C$. În continuare fie $\lambda>0$.

$$F=\int\frac{e^{nx}-\lambda}{e^{nx}+\lambda}dx=\int\left(1-\frac{2\lambda}{e^{nx}+\lambda}\right)dx=x-2\lambda\int\frac{dx}{e^{nx}+\lambda}\overset{u=e^{nx}}{=}x-\frac{2\lambda}{n}\int\frac{du}{u(u+\lambda)}=x-\frac{2}{n}\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+\lambda}\right)du=$$

$$=x-\frac{2}{n}\left(\ln u-\ln(u+\lambda)\right)=\ln e^x-\frac{2}{n}\ln\frac{u}{u+\lambda}=\ln e^x-\frac{2}{n}\ln\frac{e^{nx}}{e^{nx}+\lambda}=\ln\frac{\left(e^{nx}+\lambda\right)^{\frac{2}{n}}}{e^x}=$$

$=\dfrac{2}{n}\ln\left(e^{nx}+\lambda\right)-x$. În final $\int\dfrac{e^{nx}-\lambda}{e^{nx}+\lambda}dx=\dfrac{2}{n}\ln\left(e^{nx}+\lambda\right)-x+C$.

$\boxed{\text{L:1170}}$. **Să se calculeze** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^3x+\cos^3x}{2\sin^3x+2(1-\sqrt{2})\cos^3x+3\sqrt{2}\cos x}dx$.

**Emil C. Popa**, Sibiu

**Rezolvare:** Observăm că:

$$2\sin^3x+2(1-\sqrt{2})\cos^3x+3\sqrt{2}\cos x=2\sin^3x+(2+\sqrt{2})\cos^3x+3\sqrt{2}(1-\cos^2x)\cdot\cos x=$$

$$=2\sin^3x+(2+\sqrt{2})\cos^3x+3\sqrt{2}\cdot\sin^2x\cdot\cos x\ \rangle\ 0,\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right].$$

Dacă $f:[0;a]\to\mathbb{R},\ a\rangle 0$ f continuă cu $f(a-x)+f(x)+f(a+x)+f(2a-x)\ne 0$ considerăm

$I=\int_0^a \frac{f(a)+f(2a-x)}{f(a-x)+f(x)+f(a+x)+f(2a-x)}dx$. Pentru a -x = u se obține

$I=\int_0^a \frac{f(a-u)+f(a+u)}{f(a)+f(a-u)+f(2a-u)+f(a+u)}dx \Rightarrow 2I=\int_0^a du=a \Rightarrow I=\frac{a}{2}$.

Pentru $f(x)=\sin^3 x,\ a=\frac{\pi}{4},\ f:\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}$,

avem $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin^3\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sin^3 x+\sin^3\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx$. În final obținem: $I=\frac{\pi}{16}$

**L:1171. Să se calculeze pe (0,∞) integrala:** $\int \frac{x^{\ln a}(b\ln a\ln x+c)}{x\left(a^{\ln x}+b\ln a\ln x+b+c\right)}dx$ **, unde** $a>0, a\neq 1, b,c\in R$.

***Rezolvare:*** **Gheorghe Ghiță**, Buzău

$$I=\int \frac{ba^{\ln x}\ln a\ln x+b^2\ln a\ln x+ba^{\ln x}+b^2+ca^{\ln x}+bc-b(b\ln x\ln a+a^{\ln x}+b+c)}{x\left(a^{\ln x}+b\ln a\ln x+b+c\right)^2}dx$$

$$=\int \frac{(a^{\ln x}+b)(b\ln a\ln x+b+c)}{x\left(a^{\ln x}+b\ln a\ln x+b+c\right)^2}dx-b\cdot\int \frac{b\ln a\ln x+a^{\ln x}+b+c)}{x\left(a^{\ln x}+b\ln a\ln x+b+c\right)^2}dx=$$

$$=\int\left(\frac{-1}{\ln a\left(a^{\ln x}+b\ln a\ln x+b+c\right)}\right)^{I}\cdot(b\ln a\ln x+b+c)dx-b\cdot\int \frac{dx}{x\left(a^{\ln x}+b\ln a\ln x+b+c\right)}=$$

$$=\frac{b\ln a\ln x+b+c}{\ln a\left(a^{\ln x}+b\ln a\ln x+b+c\right)}+\frac{1}{\ln a}\int \frac{b\ln a dx}{x\left(a^{\ln x}+b\ln a\ln x+b+c\right)}-b\int \frac{dx}{x\left(a^{\ln x}+b\ln a\ln x+b+c\right)}=$$

$$=-\frac{b\ln a\ln x+b+c}{\ln a\left(a^{\ln x}+b\ln a\ln x+b+c\right)}+C.$$

**L:1172. Calculați următoarea limită de funcție:** $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{2\sqrt{x}}\frac{1}{1+\sin t\cos t}dt$. **Vasile Mircea Popa**, Sibiu

***Rezolvare:*** Considerăm funcția: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(t)=\frac{1}{1+\sin t\cdot\cos t}$.

Observăm că funcția f(t) este periodică cu perioada $\pi$ iar valoarea integralei lui f(t) pe o perioadă se poate arăta că este $\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\sin t\cos t}dt=\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$

Pentru orice $x>0$ putem scrie: $2\sqrt{x}=n\pi+a\pi$ unde $n\in N$, $n=n(x)$, $\lim_{x\to\infty}n(x)=\infty$, $a\in[0,1]$, $a=a(x)$

De asemenea putem scrie: $\int_0^{2\sqrt{x}}\frac{1}{1+\sin t\cos t}dt=n\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}+b\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$ unde $b\in[0,1]$, $b=b(x)$

Trecem la calculul limitei cerute în enunțul problemei. Notăm această limită cu L.

$L=2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^{2\sqrt{x}}\frac{1}{1+\sin t\cos t}dt$ ·

$\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^{2\sqrt{x}}\frac{1}{1+\sin t\cos t}dt=\frac{n\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}+b\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}}{n\pi+a\pi}$

Avem următoarea inegalitate dublă:

$$\frac{n\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}}{(n+1)\pi}<\frac{n\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}+b\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}}{n\pi+a\pi}<\frac{(n+1)\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}}{n\pi} \text{ sau } \frac{\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\pi}<\frac{n\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}+b\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}}{n\pi+a\pi}<\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}}{\pi}$$

Trecând la limită în această dublă inegalitate și folosind criteriul cleștelui, obținem:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^{2\sqrt{x}}\frac{1}{1+\sin t\cos t}dt=\frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ deci } L=2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

$\boxed{\text{L:1173}}$. **Să se rezolve în** $\mathbb{C}$**, ecuația:** $2024x^4+2x^3-3x^2+2x-1=0$. **Ionel Tudor**-Călugăreni, Giurgiu

***Rezolvare:*** $2025x^4-x^4+2x^3-3x^2+2x-1=0$ ; $(45x^2)^2-(x^4-2x^3+3x^2-2x+1)=0$

$(45x^2)^2-(x^2-x+1)^2=0 \Leftrightarrow (45x^2-x^2+x-1)(45x^2+x^2-x+1)=0 \Leftrightarrow$

$(44x^2+x-1)(46x^2-x+1)=0 \Leftrightarrow 44x^2+x-1=0$ sau $46x^2-x+1=0$

Deci $S=\left\{\frac{-1-\sqrt{177}}{88}, \frac{-1+\sqrt{177}}{88}, \frac{1+i\sqrt{183}}{92}, \frac{1-i\sqrt{183}}{92}\right\}\subset C$.

$\boxed{\text{L:1174}}$. **a) Rezolvați în** $\mathbb{R}$**, ecuația** $t^3-5t^2+53t-196=0$.

**b) Arătați că ecuația** $3x^5-2x^4+5x^3+6x^2-20x-16=0$ **nu are toate rădăcinile reale și apoi rezolvați ecuația** **Ionel Tudor**-Călugăreni, Giurgiu

***Rezolvare:*** a) Ecuația dată este echivalentă cu $t^2(t-4)-(t-4)(t-49)=0 \Leftrightarrow (t-4)(t^2-t+49)=0 \Rightarrow t\in\{4\}$.

b) Conform relațiilor lui Viète avem $S_1=\sum_{k=1}^{5}x_k=\frac{2}{3}$ și $S_1=\sum_{1\le i\langle j\le 5}^{5}x_ix_j=\frac{5}{3}$. Atunci,

$\sum_{k=1}^{5}x_k^{\,2}=S_1^{\,2}-2S_2=\frac{4}{9}-\frac{10}{3}=-\frac{26}{9}\langle 0$, Observăm că **x = -1** , verifică ecuația.

$3x^5-2x^4+5x^3+6x^2-20x-16=(x+1)(3x^4-5x^3+10x^2-4x-16)$

Rezolvăm în C ecuația $3x^4-5x^3+10x^2-4x-16=0$ , pe care o scriem

$x^4-\frac{5}{3}x^3+\frac{10}{3}x^2-\frac{4}{3}x-\frac{16}{3}=0$ Această ecuație de grad patru de forma $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ o rezolvăm cu metoda lui Ferrari . Scriem ecuația în forma $\left(x^2-\frac{5}{6}x+\alpha\right)^2-(mx^2+nx+p)=0$ , unde impunem condiția ca $mx^2+nx+p$ să fie pătrat perfect , deci $n^2=4mp$ ,unde $m=2\alpha+\frac{a^2}{4}-b=2\alpha+\frac{25}{36}-\frac{10}{3}=$

$=2\alpha-\frac{95}{36}$ ,$n=a\alpha-c=-\frac{5}{3}\alpha+\frac{4}{3}$ și $p=\alpha^2+\frac{16}{3}$

Condiția $n^2=4mp$ conduce la ecuația rezolventă de gradul trei în $\alpha$ :

$8\alpha^3-\frac{40}{3}\alpha^2+\frac{424}{9}\alpha-\frac{1568}{27}=0$; $8\cdot27\alpha^3-40\cdot9\alpha^2+424\cdot3\alpha-1568=0$

Cu substituția $3\alpha=t$ găsim ecuația $8t^3-40t^2+424t-1568=0$; $t^3-5t^2+53t-196=0 \Rightarrow t=4$

Deci $\alpha=\frac{t}{3}=\frac{4}{3}$ este rădăcină reală a ecuației rezolvente.

Obținem $m=2\alpha-\frac{95}{36}=\frac{1}{36}$ , $n=\frac{4}{3}-\frac{5}{3}\alpha=-\frac{8}{9}$ , $p=\alpha^2+\frac{16}{3}=\frac{64}{9}$

Deci $mx^2+nx+p=\frac{1}{36}x^2-\frac{8}{9}x+\frac{64}{9}=\left(\frac{1}{6}x-\frac{8}{3}\right)^2$ Ecuația devine $\left(x^2-\frac{5}{6}x+\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{6}x-\frac{8}{3}\right)^2=0$,

de unde $\left(x^2-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}\right)(x^2-x+4)=0$ Deci $S=\left\{-1, \frac{1-\sqrt{13}}{3}, \frac{1+\sqrt{13}}{3}, \frac{1+i\sqrt{15}}{2}, \frac{1-i\sqrt{15}}{2}\right\}$

$\boxed{\text{L:1175}}$. **Fie** $f\in\mathbb{R}[X]$, $f(X)=aX^3+bX^2+cX+d$, $a\rangle 0$ **și rădăcinile** $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$. **Arătați că** $f^I(x_1)+f^I(x_2)+f^I(x_3)\geq 0$. **În ce caz avem egalitate?** **Sorin Pîrlea, Meda Iacob**, Craiova

***Rezolvare***: Fie $f=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\Rightarrow f^I=a(x-x_2)(x-x_3)+a(x-x_1)(x-x_3)+a(x-x_1)(x-x_2)\Rightarrow$

$f^I(x_1)+f^I(x_2)+f^I(x_3)=a[(x_1-x_2)(x_1-x_2)+(x_2-x_1)(x_2-x_3)+(x_3-x_1)(x_3-x_2)]=$

$=a\left(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3\right)=\frac{a}{2}\left[(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2\right]\geq 0$ cu egalitate

pentru $x_1=x_2=x_3 \Rightarrow f=a(x-x_1)^3$.

**“ Curiozitatea științifică în sine este una dintre cele mai puternice forțe motrice ale societății noastre”.**

**Alvin Toffler**
**( 1928- 2016)**

# 4. Probleme propuse

## ▪ Clasa a V-a

**G:1341**. Determinați mulțimile X, Y, Z știind că: a) $X \cup Y \cup Z = \{a;\ b;\ c;\ d;\ e\}$; b) $X \cap Y \cap Z = \{a;\ e\}$; c) $Y \cap Z = \{a;\ b;\ e\}$; d) $X \cap Z = \{a;\ d;\ e\}$; e) $c \notin (Y \cup Z) \cap X$.

**Nicolae Ivășchescu**, Canada

**G:1342**. Să se determine restul împărțirii numărului $a = 20^{25} + 2025$ la 9. **Adrian Stan**, Buzău

**G:1343**. Arătați că numărul $2025^{2025}$ se poate scrie ca suma a trei pătrate perfecte nenule distincte.

**Adrian Stan**, Buzău

**G:1344**. Dacă adunăm un număr natural de patru cifre cu numărul obținut prin înlăturarea primei sale cifre, obținem 1982. Calculați suma cifrelor numărului dat.

**Doina** și **Mircea Mario Stoica**, Arad

**G:1345**. Fie numerele $x = 2^{1962} \cdot 5^{1961} + 1$ și $y = 2^{1961} \cdot 5^{1962} + 1$. Arătați că numerele x și y nu sunt numere prime. **Doina și Mircea Mario Stoica**, Arad

**G:1346**. Determinați numărul natural $\overline{ab}$ pentru care $\overline{ab}^2 + a^b + a^2 + a + a = 2024$.

**Nicolae Ivășchescu**, Canada

**G:1347**. Demonstrați că numărul A se divide cu numărul 2024, unde
$A = 2^{n+1} \cdot 3^{n+1} \cdot 5^{n+3} + 2^{n+3} \cdot 3^{n+3} \cdot 5^{n+1} + 2^{n+4} \cdot 3^{n+2} \cdot 5^{n} + 2^{n+1} \cdot 3^{n} \cdot 5^{n+2}$. **Nicolae Ivășchescu**, Canada

**G:1348**. Arătați că numărul $n = 5^{2025} + 5^{2027}$ se poate scrie ca sumă a două pătrate perfecte în două moduri. **Ionel Tudor-Călugăreni,** Giurgiu

**G:1349**. Se consideră șirul cu termenii $a_1=3$; $a_2=12$; $a_3=30$; $a_4=60$;….. Scrieți termenii: $a_{10}=$...;$a_{100}=$...;$a_n=$… **Petre Păunescu**, Roșiori de Vede

**G:1350**. Dovediți că numărul $a = 285719$ este compus și rezolvați în numere prime ecuația $x^y \cdot z = 285719$. **Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu**

**G:1351**. Câte numere $\overline{xy}$ verifică relația $(x+y)^3 = \overline{abc}$ unde $\overline{xy}$ este un număr de două cifre , iar $\overline{abc}$ este un număr de trei cifre. **Liță Alexandru Craiova, Sgaibă Marius** , Craiova

**G:1352**. Arătați că dacă unul din numerele $a = 20^n - 1$ și $b = 20^n + 1, n \in \mathbb{N}^*$ este prim atunci celălalt număr este compus. **Florim Șendroiu**, Tg Cărbunești

**G:1353**. Să se determine numerele $\overline{abc}$ știind că împărțite la $\overline{bc}$ dau câtul $a + 1$ și restul $a + 8$

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

# ▪ Clasa a VI-a

**G:1354**. Determinați numerele naturale a,b,c știind că numerele a+b, b+c, a+c sunt invers proporționale cu 0,25; 0,2; 0,125 și a+b+c=51. **Doina și Mircea Mario Stoica**, Arad

**G:1355**. Rezolvați în numere întregi ecuația $x^2 \cdot y + 10x^3 = 256$. **Mircea Mario Stoica**, Arad

**G:1356**. Demonstrați că numărul

$A = [1,(1)+2,(2)+3,(3)+...+8,(8)]\cdot 18 + \left[12,(4)+11,(5)+5,(13)+2,(75)+\frac{1}{9}\right]\cdot 40 + 5^2$ este un pătrat perfect. **Nicolae Ivășchescu**, Canada

**G:1357**. Să se arate ca suma cifrelor numărului $10^{2024} - 2017$ este un număr divizibil cu 2023. **Adrian Stan,** Buzău

**G:1358**. Aduceți la forma cea mai simpla fracția: $\frac{8+88+888+...+888888888-123456789}{7+77+777+....+777777777}$.
**Petre Păunescu**, Roșiori de Vede

**G:1359**. Rezolvați ecuația $\frac{x-1}{2023}+\frac{x-2}{2022}+\frac{x-3}{2021}+.....+\frac{x-2022}{2}+\frac{x-2023}{1}=2023$.
**Nicolae Ivășchescu**, Canada

**G:1360**. Scrieți numărul 2025 ca sumă de : **a)** Două pătrate perfecte; b) Patru pătrate perfecte
**Ionel Tudor-Călugăreni,** Giurgiu

**G:1361**. Arătați că pentru orice numere reale x și y , avem $(x-y)\cdot(x+y)=x^2-y^2$. Fără să efectuați ridicările la pătrat , arătați că numărul $a = 28336^2 + 53689^2 - 28364^2 - 53636^2$ este natural pătrat perfect. **Ionel Tudor-Călugăreni,** Giurgiu

**G:1362**. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația $\frac{p}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{q}$ unde p, q sunt numere prime date. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

# ▪ Clasa a VII-a

**G:1363**. Verificați dacă numărul $2019\cdot 2022\cdot 2025\cdot 2028+81$ este pătrat perfect.
**Adrian Stan,** Buzău

**G:1364**. Aflați numerele reale x și y dacă $4x-y-2=0$ și $\sqrt{y^2-3x^2-3xy+21}=\sqrt{11-4x+y}$.
**Adrian Stan,** Buzău

**G:1365**. Rezolvați ecuația $x+24\{x\}=[x]$, $x\in\mathbb{Q}$ unde $[x]$ respectiv $\{x\}$ reprezintă partea întreagă respectiv partea fracționară. **Doina și Mircea Mario Stoica**, Arad

**G:1366**. Există valori ale numărului real a astfel încât numerele $x=\frac{2a+3}{4}$ și $y=\frac{3a-1}{2}$ să fie simultan numere întregi ? **Doina și Mircea Mario Stoica**, Arad

**G:1367**. Găsiți numerele nenule $\overline{ba}^2$ , care verifică egalitatea $\frac{\overline{ab}^2-\overline{ba}^2}{(a+b)^2}=11$.

**Ionel Tudor**-Călugăreni

**G:1368**. Dacă $a,b,c\rangle 0$ astfel încât $a^2+b^2+c^2=3$ atunci $\sum a\sqrt{2a^2+3ab+4b^2}\le 9$. Când are loc egalitatea?
**Gheorghe Ghiță**, Buzău

**G:1369**. Se dă triunghiul ABC cu AB=10 cm, BC= 6cm și $m(\sphericalangle ABC)=105^0$. Calculați aria triunghiului.
**Nicolae Ivășchescu**, Canada

**G:1370**. Un trapez ABCD dreptunghic în A , are baza mică $AB=\dfrac{9\sqrt{10}}{2}$ cm și baza mare DC=AD. Se consideră punctul E mijlocul lui AD încât $BE\perp EC$.

**a)** Arătați că triunghiurile AEB și DCE sunt asemenea.

**b)** Arătați că aria trapezului ABCD este număr natural iar tangenta unghiului ascuțit format de diagonalele AC și BD este un număr rațional.

**Ionel Tudor**-Călugăreni

**G:1371**. În trapezul ABCD se cunosc: $AD\,||\,BC,\ AD\ \langle\ BC,\ m(\sphericalangle D)=120^0$ iar diagonalele sale sunt bisectoarele unghiurilor alăturate bazei mari. Dacă CD=8 cm, să se afle perimetrul trapezului.
**Dumitru Preoteasa**, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

# ▪ Clasa a VIII-a

**G:1372**. Se dă piramida VABC cu înălțimea de 90 cm și baza triunghiului dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A)=90^0,\ m(\sphericalangle C)=15^0$ și $AC=20\sqrt{2+\sqrt{3}}\ cm$. La distanța de o treime din înălțime față de vârful V se face o secțiune cu un plan paralel cu planul bazei. Determinați volumul trunchiului de piramidă obținut.
**Nicolae Ivășchescu**, Canada

**G:1373**. În piramida patrulateră SABCD, având toate muchiile congruente, se face o secțiune cu planul care conține dreapta BD și este paralel cu muchia SA. Știind că aria acestei secțiuni este $9\sqrt{2}$ cm$^2$, să se afle suma tuturor muchiilor piramidei.
**Dumitru Preoteasa**, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

**G:1374**. Rezolvați ecuația $(x+1961)^3+(x-1986)^3+(-2x+25)^3=0,\ x\in\mathbb{R}$.
**Doina și Mircea Mario Stoica,** Arad

**G:1375**. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $[x-29]+|x-29|+(x-29)=6$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.
**Doina și Mircea Mario Stoica**, Arad

**G:1376**. Rezolvați ecuația $\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{x-8}}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x-8}}=\dfrac{1}{4}$.
**Nicolae Ivășchescu**, Canada

**G:1377**. Fie $a,b,c\in\mathbb{N}^*$. Dacă $\dfrac{a\sqrt{7}+b}{b\sqrt{7}+c}\in\mathbb{Q}$ să se arate că $a\cdot c$ este pătrat perfect.
**Adrian Stan**, Buzău

**G:1378**. Se consideră $a=\sqrt{n^2+1},\ n\in\mathbb{N}$.

a) Să se calculeze partea întreagă a lui a;

b) Să se calculeze $\left[\sqrt{2024^2+1}\right]+\left[\sqrt{2024^4+1}\right]+\left[\sqrt{2024^6+1}\right]+......+\left[\sqrt{2024^{2024}+1}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.
**Adrian Stan**, Buzău

**G:1379**. Arătaţi că există numere naturale x, pentru care numărul 45x -54 , este cub perfect.

**Ionel Tudor-Călugăreni**

**G:1380**. Dacă $a \ge 0$, $x, y, z \rangle 0$ astfel încât $x+y+z=3$ să se arate că $\frac{x+a}{y+z}+\frac{x+a}{y+z}+\frac{x+a}{y+z} \ge \frac{3a+3}{2}$.

Când are loc egalitatea? **Gheorghe Ghiţă**, Buzău

**G:1381**. Folosind doar ecuaţii de gradul doi , să se rezolve ecuaţia:

$x^4+4x^3-2028x^2-28x+14147=0$. **Ionel Tudor-Călugăreni**

# ▪ Clasa a IX-a

**L:1176**. Arătaţi că oricare ar fi $x, y, z \rangle 0$ are loc inegalitatea

$3\left(x^2+y^2+z^2\right)+xyz+15 \rangle 3\left(xy+yz+zx\right)+3\left(x+y+z\right)$. eleva **Carina Maria Viespescu**, Craiova

**L:1177**. Fie $a, b, c \rangle\ 0$ astfel încât a+ b+ c = 3. Arătaţi că $S=\sqrt{3a+bc}+\sqrt{3b+ac}+\sqrt{3c+ab} \le 6$. În ce caz avem egalitate ? **Maria Gurgui, Mihaela Ciobănelu,** Craiova

**L:1178**. Arătaţi că $\sqrt{a}+\sqrt{a+1}+\sqrt{a+2}+...+\sqrt{a+2024} \le 2025 \cdot \sqrt{a+1012}$, $\forall a \in \mathbb{N}$.

**Adrian Stan**, Buzău

**L:1179**. Să se demonstreze că $\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k+1\right)\cdot\left[\frac{k^{p+1}}{k^p+k^{p-1}+...+k+1}\right]=\frac{n(n-1)(n^2+3n+4)}{4}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x, iar $p \in \mathbb{N}^*$. **Mihaly Bencze**, Braşov

**L:1180**. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$\left\{x^3+x^2+x+1\right\}+\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=x^3+\left[\sqrt{4n+2}\right]$, unde $n \in \mathbb{N}$ şi $\{x\}$ este partea fracţionară a numărului real $x$ iar $[x]$ este partea întreagă a numărului real x. **Adrian Stan**, Buzău

**L:1181**. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ atunci cel puţin una din ecuaţiile $ax^2-2bx+c=0$, $bx^2-2cx+a=0$, $cx^2-2ax+b=0$ are soluţii reale. **Mihaly Bencze**, Braşov

**L:1182**. Rezolvaţi ecuaţia în $\mathbb{R}$ : $x^4-6x^3+6x^2+9x+2=0$.

**Mirea Mihaela Mioara, Stoian Daniela**, Craiova

**L:1183**. Să se arate că într-un triunghi ABC, cu notaţiile cunoscute are loc inegalitatea

$\frac{1}{\left(\sqrt{h_a}+\sqrt{h_b}\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{h_b}+\sqrt{h_c}\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{h_c}+\sqrt{h_a}\right)^2} \le \frac{1}{4tg\frac{A}{2}(p-a)}$. **Florin Rotaru**, Focşani

**L:1184**. Să se arate că în orice triunghi ABC avem inegalitatea : $S \le \frac{1}{8}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$, notaţiile fiind cele cunoscute în triunghi.

**Radu Diaconu**, Sibiu

**L:1185**. Să se arate că $\frac{1^k+2^k+3^k+...+n^k}{n} \ge \left(\frac{n+1}{2}\right)^k$, $n, k \in \mathbb{N}^*$. **Gheorghe Ghiţă**, Buzău

**L:1186**. Într-un patrulater bicentric $ABCD$ de laturi $a, b, c, d$ şi arie $S$ avem inegalitatea:

$S^2 \le R\sqrt{2}\cdot\max(abc, acd, abd, bcd)$, unde $R$ este raza cercului circumscris patrulaterului.

**Emil C. Popa**, Sibiu

# ▪ Clasa a X-a

**L:1187.** Fie $a,b,c$ trei numere naturale astfel încât $a^3+b^3+c^3$ se divide cu 7.
a) Dacă $a+b+c$ nu se divide cu 7, să se arate că
$\sqrt{(a-b)^2\cdot(a-c)^2+(b-c)^2\cdot(b-a)^2+(c-a)^2\cdot(c-b)^2}$ este număr natural divizibil cu 7.
b) Dacă $a,b,c$ sunt numere prime, să se arate că cel puțin unul dintre ele este egal cu 7.

**Florin Rotaru**, Focșani

**L:1188.** Fie $a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$. Să se arate că
$\sqrt[3]{(1+a^2b^2+c^2)\cdot(1+b^2c^2+a^2)\cdot(1+c^2a^2+b^2)}\geq ab+bc+ca$.

**Florin Rotaru**, Focșani

**L:1189.** Găsiți $z\in\mathbb{C}$ astfel încât $|z+1|=1$ și $|z|=|z+2i|$. **Cristian Schneider**, Craiova

**L:1190.** Fie $z\in\mathbb{C}$ astfel încât $|z|=1$. Să se arate că $|z^{2012}+1|+|z^{2013}+1|+|z^{2025}+1|\geq 2$.

**Adrian Stan**, Buzău

**L:1191.** Fie $a\in\mathbb{C}$ astfel încât $|a|=1$. Să se arate că $|1+a|+|1-a|+2\cdot|1+a^2|+|1+a^3|\geq 2+\sqrt{2}$.

**Mihaly Bencze**, Brașov

**L:1192.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $2^{2x\cdot\arcsin x}+2^{2x\cdot\arccos x}=\sqrt{2^{2+\pi x}}$.

**Eugenia Turcu, Alina Tigae**, Craiova

**L:1193.** Aflați soluțiile reale ale ecuației $x^2+(x-5)\log_2 x=6x-5$.

**Petrică Aurelia , Liță Alexandru**, Craiova

**L:1194.** Fie $m,n\in\mathbb{N}^*$, $m\geq 2$. Să se calculeze: $\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot m^k\cdot C_n^k}{C_{m\cdot n-1}^k}=\frac{m\cdot n}{m-1}$. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

**L:1195.** Într-un triunghi de laturi $a,b,c$, avem inegalitatea: $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab}>2\cdot e^{\max(\ln a,\ln b,\ln c)}$

**Emil C. Popa**, Sibiu

# ▪ Clasa a XI-a

**L:1196.** Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 3\end{pmatrix}$. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2+5I_2=4A$. Demonstrați că există $c,d\in\mathbb{Z}$ astfel încât $A^{n+1}+c\cdot A^n+d\cdot A^{n-1}=O_2$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ și că $A^n\neq I_2$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

**Mihaly Bencze**, Brașov

**L:1197.** Fie $A\in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietățile $\det(A)=3$ și $\det(A^4+2A^2+9I_2)=0$. Să se afle urma matricei A, Tr A. **Adrian Stan**, Buzău

**L:1198.** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{(2-\sqrt{3})^n}+\frac{1}{(2-\sqrt[3]{3})^n}+\ldots+\frac{1}{(2-\sqrt[n+1]{3})^n}}$. **Florin Rotaru**, Focșani

**L:1199**. Fie $a=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt[3]{x^6-x^5+1}\right)\cdot\sin\dfrac{\pi}{x}$. Să se calculeze $A=\sin a+\sin 2a+\sin 3a+...+\sin 2025a$.

**Adrian Stan**, Buzău

**L:1200**. Fie $a,b\rangle 0$. Să se arate că $e^{\frac{a^2+b^2}{a+b}}+\dfrac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2\geq e^{ab}$. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

## ▪ Clasa a XII-a

**L:1201**. Determinați toate grupurile finite $(G,\cdot)$ cu proprietatea că există trei elemente a,b,c distincte între ele și diferite de elementul neutru e, astfel încât submulțimea $G\setminus\{a,b,c\}$ să fie subgup al lui G.

**Daniel Văcaru**, Pitești

**L:1202**. Fie $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\ax&1&0\\2x(x+1)&bx&1\end{pmatrix}\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $(G,\bullet)$ să fie grup abelian. **Mihaly Bencze**, Brașov

**L:1203**. Determinați toate funcțiile polinomiale cu coeficienți raționali, de grad minim, și toate funcțiile polinomiale cu coeficienți întregi astfel încât $f(\sqrt[3]{2011}+\sqrt[3]{2011^2})=2011+\sqrt[3]{2011}$.

**Neculai Stanciu,** Buzău

**L:1204**. Fie $f:[a;b]\to\mathbb{R},\ 0\langle a\langle b$ o funcție bijectivă, continuă astfel încât $f(a)=b,\ f(b)=a$ și $\int_a^b f(x)dx=0$. Să se arate că $\int_a^b f^{-1}(x)dx=0$. **Florin Rotaru**, Focșani

**L:1205**. Să se calculeze integrala: $\int\dfrac{\cos x+x\cdot\sin x}{(x+k\cos x)(x+\cos x}dx,\ x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right),\ k\neq 1$.

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

**L:1206**. Dacă $f:[a,b]\to R$ este derivabilă, atunci demonstrați că $\exists\alpha\in(a,b)$ astfel încât:

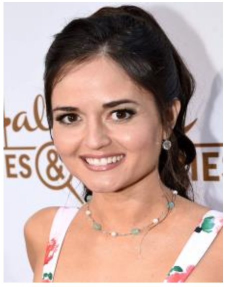
$$\int_a^b f(x)dx=f'((\alpha-a)(b-\alpha))\text{ sau }\alpha=\frac{a+b}{2}.$$

**Mihaly Bencze,** Brașov și **Neculai Stanciu,** Buzău

**L:1207**. Se definește integrala având limita superioară infinită prin egalitatea:

$$\int_a^\infty \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx}=\lim_{\mathrm{b}\to\infty}\int_a^{\mathrm{b}}\mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx}.$$

Să se calculeze integrala: $\int_0^\infty\dfrac{\mathrm{x}\operatorname{arctg}\mathrm{x}}{\left(\mathrm{x}^2+1\right)\left(\mathrm{x}^2-\mathrm{x}+1\right)}\mathrm{dx}$. **Vasile Mircea Popa,** Sibiu



„ Math is the only place where
truth and beauty mean the same thing. ”

**Danica McKellar**
**(n. 1975- )**

# 5. QUICKIES

**A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader's name, full address, and an e-mail address. Submited solutions should arrive before SEPTEMBER 01, 2025.**

## PROPOSALS – QUICKIES

**PROPOSALS – QUICKIES**

**Q112. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania. Compute**

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}-\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right).$$

**Q113. Proposed by Mihaly Bencze, Braşov, Romania. If $x, y > 0$ then prove the following inequalities:**

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)^2\left(1+\frac{y}{x}\right)^2\ge\left(1+\frac{2x+y}{\sqrt[3]{x^2y}}\right)\left(1+\frac{2y+x}{\sqrt[3]{xy^2}}\right)\ge 16.$$

**Q114. Proposed by Florin Rotaru, Focşani, Romania. If $ABC$ is a triangle with usual notations, then prove the following equality:**

$$\frac{r_a}{h_a}+\frac{r_b}{h_b}+\frac{r_c}{h_c}+1=\frac{bc}{h_ar_a}+\frac{ca}{h_br_b}+\frac{ab}{h_cr_c}.$$

**Q115. Proposed by by Marin Chirciu, Piteşti, Romania. Prove that in any $\Delta ABC$ is true the following double inequality:**

$$\frac{1}{2R^2r}\le\sum\frac{\sin B+\sin C}{a^3}\le\frac{R}{16r^4}.$$

## SOLUTIONS - QUICKIES

**Q107. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania. Compute**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)\sqrt[n]{(2n-1)!!}\sin\frac{\pi}{\sqrt[n]{n!}}.$$

**Solution by Marin Chirciu, Piteşti, Romania.**

**Using** $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)=\frac{1}{e}$**, (Traian Lalescu),** $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{\sqrt[n]{n!}}}{\frac{\pi}{\sqrt[n]{n!}}}=1$**,(**$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$**)**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{\sqrt[n]{n!}}=2,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n-1)!!}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n-1)!!}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+1)!!}{(n+1)!}}{\frac{(2n-1)!!}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)}{(n+1)}=2,$$

we get $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)\sqrt[n]{(2n-1)!!}\sin\frac{\pi}{\sqrt[n]{n!}}=\frac{2\pi}{e}$.

**Solution by author.** It is well-known: $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n}=\frac{2}{e}$.

We denote $u_n=\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}$: $\lim_{n\to\infty}u_n=1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n}=1$, $\lim_{n\to\infty}u_n^n=e$.

We denote $x_n=(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!})\sqrt[n]{(2n-1)!!}\sin\frac{\pi}{\sqrt[n]{n!}}$:

$$x_n=(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!})\sqrt[n]{(2n-1)!!}\sin\frac{\pi}{\sqrt[n]{n!}}=\sqrt[n]{n!}\cdot(u_n-1)\cdot\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n}\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\sqrt[n]{n!}\cdot\sin\frac{\pi}{\sqrt[n]{n!}}=$$

$$=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot n\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n\cdot\frac{(2n-1)!!}{n}\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\pi\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{\sqrt[n]{n!}}}{\frac{\pi}{\sqrt[n]{n!}}}=\quad=\pi\cdot\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{n}\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{\sqrt[n]{n!}}}{\frac{\pi}{\sqrt[n]{n!}}}.$$

Hence, $\lim_{n\to\infty}x_n=\pi\cdot\frac{1}{e}\cdot 1\cdot\ln e\cdot\frac{2}{e}\cdot e\cdot 1=\frac{2\pi}{e}$.

**Solution by Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain.**

By Stolz-Cezaro lemma, we obtain $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}=\frac{1}{e}$

by the Stirling formula for $(n+1)!$ and having in mind that $(2n-1)!!=\frac{(2n-1)!}{(2n)!}=\frac{(2n)!}{2^n\,n!}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{2^n\,(n!)^2}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)^{(2n)}e^{-(2n-1)}}{n^{2n}e^{-2n}}}=2.$$

Therefore, the proposed limit results $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)\sqrt[n]{(2n-1)!!}\frac{\pi}{\sqrt[n]{n!}}=\frac{2\pi}{e}$.

**Also solved by Daniel Văcaru, Piteşti, Romania.**

**Q108. Proposed by Dorin Marghidanu, Corabia, Romania.** If $a_k>0, k=\overline{1,6}$, such that $\sum_{k=1}^{6}a_k=3$, then prove that $\prod_{k=1}^{6}a_k(a_k+a_{k+1})(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})<1$, where $a_{6+k}=a_k, k=\overline{1,2}$.

**Solution by Marin Chirciu, Piteşti, Romania.**

From symmetry we can assume that $a_1\le a_2\le a_3\le a_4\le a_5\le a_6\Rightarrow 3=\sum_{k=1}^{6}a_k\ge 6a_1\Rightarrow 2a_1\le 1$.

Using AM-GM: $xyz\le\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$, $(x,y,z)=\left(a_k,(a_k+a_{k+1}),(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})\right)$, equally for

$a_k=(a_k+a_{k+1})=(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})$, contradiction, see $a_k>0$. We have:

$$a_k(a_k+a_{k+1})(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})\le\left(\frac{a_k+(a_k+a_{k+1})+(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})}{3}\right)^3=\left(\frac{3a_k+2a_{k+1}+a_{k+2}}{3}\right)^3\le$$

$$\le\left(\frac{3a_1+2a_1+a_1}{3}\right)^3\le\left(\frac{6a_1}{3}\right)^3=(2a_1)^3\le 1^3=1\Rightarrow a_k(a_k+a_{k+1})(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})\le 1,$$

equally for $a_k=(a_k+a_{k+1})=(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})$, contradiction, see $a_k>0\Rightarrow$

$$\Rightarrow a_k(a_k+a_{k+1})(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})<1\Rightarrow\prod_{k=1}^{6}a_k(a_k+a_{k+1})(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})\le\prod_{k=1}^{6}a_k<1.$$

**Solution by Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain.**
The proposed inequality may be written as

$$\prod_{k=1}^{6}a_k\prod_{k=1}^{6}(a_k+a_{k+1})\prod_{k=1}^{6}(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})<1,$$

Now, by the AM-GM inequality, $\prod_{k=1}^{6}a_k\le\left(\frac{\sum_{k=1}^{6}a_k}{6}\right)^6=\frac{1}{2^6}$,

$\prod_{k=1}^{6}(a_k+a_{k+1})\le\left(\frac{\sum_{k=1}^{6}(a_k+a_{k+1})}{6}\right)^6=1$ and

$\prod_{k=1}^{6}(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})\le\left(\frac{\sum_{k=1}^{6}(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})}{6}\right)^6=\frac{3^6}{2^6}$ which implies that

$\prod_{k=1}^{6}a_k\prod_{k=1}^{6}(a_k+a_{k+1})\prod_{k=1}^{6}(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})\le\frac{1}{2^6}1\frac{3^6}{2^6}=\frac{3^6}{4^6}<1.$

**Solution by author.** By AM-GM inequality we deduce that:

$a_1(a_2+a_3)(a_4+a_5+a_6)\le\left(\frac{a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)}{3}\right)^3=1$, and other five similar inequalities,

which by multiplying yields $\prod_{k=1}^{6}a_k(a_k+a_{k+1})(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})\le 1$.

Equality in the last inequality would be obtained taking into account the application of AM-GM inequality in the inequalities from above, i.e. iff :

$a_1=a_2+a_3=a_4+a_5+a_6,\ \ldots,\ a_6=a_1+a_2=a_3+a_4+a_5$, which by summation lead to $3=2\cdot 3=3\cdot 3$, absurd ! So, the inequality is strict.

**Also solved by Gheorghe Molea, Curtea de Argeș, Romania.**

**Q109. Proposed by Laura Molea and Gheorghe Molea, Curtea de Argeș, Romania.** If $a,b,c\in R$, then prove that $\sum\frac{a^3+a}{a^4+a^2+1}\le 2$.

**Solution by Marin Chirciu, Pitești, Romania.**

**Lemma.** If $a\in\mathbf{R}$ then we shall prove that $\frac{a^3+a}{a^4+a^2+1}\le\frac{2}{3}$.

**Proof.** $\frac{a^3+a}{a^4+a^2+1}\le\frac{2}{3}\Leftrightarrow 2a^4-3a^3+2a^2-3a+2\ge 0\Leftrightarrow(a-1)^2(2a^2+a+2)\ge 0$, equality iff $a=1$. We move on to solving the main problem.

$LHS=\sum\frac{a^3+a}{a^4+a^2+1}\overset{Lemma}{\le}\sum\frac{2}{3}=3\cdot\frac{2}{3}=2=RHS$. Equality occurs iff $a=b=c=1$.

**Remark.** The problem can be generalized:

If $a,b,c\in\mathbf{R}$ and $2n\ge\lambda>0$, $4n=\lambda(n+3)$ then we prove that $\sum\frac{a^3+na}{a^4+a^2+\lambda}\le\frac{3(n+1)}{\lambda+2}$.

**Solution**. Lemma. If $a\in\mathbf{R}$ and $2n\ge\lambda>0$, $4n=\lambda(n+3)$ then we prove that $\frac{a^3+na}{a^4+a^2+\lambda}\le\frac{n+1}{\lambda+2}$.

Proof. $\frac{a^3+na}{a^4+a^2+\lambda}\le\frac{n+1}{\lambda+2}\Leftrightarrow(n+1)a^4-(\lambda+2)a^3+(n+1)a^2-n(\lambda+2)a+\lambda(n+1)\ge0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(a-1)^2\left[(n+1)a^2+(2n-\lambda)a+2(2n-\lambda)\right]\ge0$, equally for $a=1$. We move on to solving the main problem. $LHS=\sum\frac{a^3+na}{a^4+a^2+\lambda}\overset{Lemma}{\le}\sum\frac{n+1}{\lambda+2}=3\cdot\frac{n+1}{\lambda+2}=RHS$. Equality occurs iff $a=b=c=1$.

Note. For $n=\lambda=1$ we get the problem Q109 from SM-34/2024.

**Solution by authors**. If $a=b=c=0$, then $0\le2$, true. We assume that $a,b,c\ne0$. We will prove that $\frac{x^3+x}{x^4+x^2+1}\le\frac{2}{3},\forall x\in R$. Indeed, $\frac{x^3+x}{x^4+x^2+1}\le\frac{2}{3}\Leftrightarrow2x^4+2x^2+2-3x^3-3x\ge0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2(2x^2+xc+2)-2x(2x^2+x+2)+(2x^2+x+2)\ge0\Leftrightarrow(2x^2+x+2)(x-1)^2\ge0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-1)^2\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)\ge0\Leftrightarrow(x-1)^2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}\right]\ge0$, true $\forall x\in R$, with equality iff $x=1$.

Hence, $\sum\frac{a^3+a}{a^4+a^2+1}\le\frac{2}{3}\cdot3=2$, with equality iff $a=b=c=1$.

**Solution by Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain**.

It is enough to prove that $max\frac{x^3+x}{x^4+x^2+x}=\frac{2}{3}$, for $x\in R$.

$\left(\frac{x^3+x}{x^4+x^2+x}\right)'=\frac{-x^6-x^4+2x^2+1}{(x^4+x^2+x)^2}$ and $-x^6-x^4+2x^2+1=-(x^2+1)(x^4+3x^2+1)$ which implies that its only real roots are $x=-1$ and $x=1$ where function $\frac{x^3+x}{x^4+x^2+x}$ respectively attains its minimum and it maximum with values $-2/3$ and $2/3$.

**Also solved by Daniel Văcaru, Piteşti, Romania.**

**Q110. Proposed by Marin Chirciu, Piteşti, Romania**. If $a_1,a_2,\dots,a_n>1$, then prove that

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{4}\ge\frac{\sqrt{a_1a_2-1}}{a_2+a_3}+\frac{\sqrt{a_2a_3-1}}{a_3+a_4}+\dots+\frac{\sqrt{a_na_1-1}}{a_1+a_2}.$$

**Solution by author**. Lemma. If $a_1,a_2,a_3>1$, then $\frac{\sqrt{a_1a_2-1}}{a_2+a_3}\le\frac{1}{4}\left(a_1-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)$.

Proof. $\frac{\sqrt{a_1a_2-1}}{a_2+a_3}\overset{AM-GM}{\le}\frac{\sqrt{a_1a_2-1}}{2\sqrt{a_2a_3}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a_1a_2-1}{a_2a_3}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{a_3}\left(a_1-\frac{1}{a_2}\right)}\overset{AM-GM}{\le}\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{a_3}+\left(a_1-\frac{1}{a_2}\right)}{2}=$

$=\frac{1}{4}\left(a_1-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)$, with iqulity iff $a_2=a_3$ şi $\frac{1}{a_3}=a_1-\frac{1}{a_2}\Leftrightarrow a_2=a_3$ and $a_1a_2=2$.

Using **Lemma** we obatin: $RHS=\sum\frac{\sqrt{a_1a_2-1}}{a_2+a_3}\leq\frac{1}{4}\sum\left(a_1-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)=\frac{1}{4}\sum a_1=LHS$.

Equality occurs iff $a_1=a_2=...=a_n=\sqrt{2}$.

**Also solved by Gheorghe Molea, Curtea de Argeş, Romania.**

**Q111. Proposed by Florin Rotaru, Focşani, Romania.** If $a,b,c>0$, then prove that

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{6\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\geq 5.$$

**Solution by Marin Chirciu, Piteşti, Romania.**

**Lemma.** If $a,b,c>0$ then $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$.

**Proof.** We have: $\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}}=3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}}=\frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}$, and the two analogues.

Adding the three inequalities we get $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$.

Equality occurs if $a=b=c$. We move on to solving the main problem.

$$LHS=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{6\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\overset{Lemma}{\geq}\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{6\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\overset{\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}=t\geq 3}{=}t+\frac{6}{t}\overset{(1)}{\geq}5=RHS,$$

where $t+\frac{6}{t}\overset{(1)}{\geq}5\Leftrightarrow t^2-5t+6\geq 0\Leftrightarrow(t-3)(t-2)\geq 0$, see $t\geq 3>2$, $t=\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\overset{AM-GM}{\geq}3$.

Equality occurs iff $a=b=c$. **Remark.** The problem can be generalized:

If $a,b,c>0$ and $\lambda\leq 9$ then prove that $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{\lambda\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\geq\frac{\lambda+9}{3}$.

**Solution. Lemma.** If $a,b,c>0$ then $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$.

**Proof.** We have: $\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}}=3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}}=\frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}$, and the two analogues.

Adding the three inequalities we get $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$.

Equality occurs if $a=b=c$. We move on to solving the main problem.

$$LHS=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{\lambda\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\overset{Lemma}{\geq}\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{\lambda\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\overset{\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}=t\geq 3}{=}t+\frac{\lambda}{t}\overset{(1)}{\geq}\frac{\lambda+9}{3}=RHS,$$

where $t+\frac{\lambda}{t}\overset{(1)}{\geq}\frac{\lambda+9}{3}\Leftrightarrow 3t^2-(\lambda+9)t+3\lambda\geq 0\Leftrightarrow(t-3)(3t-\lambda)\geq 0$, see: $t\geq 3\geq\frac{\lambda}{3}$, $\lambda\leq 9$ and

$t=\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\overset{AM-GM}{\geq}3$. Equality occurs if $a=b=c$.For $\lambda=6$ we get the problem Q111 from SM-34/2024.

**Solution by author.** $\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2b}{b^2c}}=\frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}$ and analogously $\frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{3b}{\sqrt[3]{abc}}$ and $\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\geq\frac{3c}{\sqrt[3]{abc}}$, so $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$. Denoting $\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}=t$, we have $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq t\geq 3$ and we have to prove $t+\frac{6}{t}\geq 5\Leftrightarrow t^2-5t+6\geq 0\Leftrightarrow(t-3)(t-2)\geq 0$, which is true. Equality occurs if $a=b=c$.

**„Numai entuziasmul poate da naștere la înfăptuiri mărețe."**
**Karl Liebknecht**
**(1871-1919)**

# 6. Caleidoscop matematic

## 2025 DOUĂ MII DOUĂZECI ȘI CINCI

## 2025 UN AN PĂTRAT PERFECT

de ***Bela Kovacs***,, *Satu Mare*

**2025** = $45^2$ . Se întâmplă destul de rar, ca anul calendaristic să fie un număr pătrat perfect, următorul va fi peste 91 de ani: 2116 = $46^2$ , iar cel din urmă a fost acum 89 de ani: 1936 = $44^2$.
**2025** cu cifre romane: MMXXV
Anul **2025** are 365 zile, 8760 ore, 525600 minute și 31.536.000 secunde.

Ce știm, ce putem afla despre acest număr **2025** ? Vom analiza și vom prezenta câteva informații, care pot fi completate de cei interesați.
**2025** este un număr natural impar.
Este un număr compus, aflat între cele mai apropiate numere prime: 2017 < 2025 < 2027
Descompunerea lui în factori primi: **2025** = $3^4 \cdot 5^2$ , având factorii primi 3 și 5 .
Divizorii săi sunt: 1 , 3 , 5 , 9 , 15 , 25 , 27 , 45 , 75 , 81 , 135 , 225 , 405 , 675 , 2025.
Are 15 divizori. Suma divizorilor este 3751.
Este divizibil cu suma divizorilor: **2025** = 15 · 135
Suma divizorilor mai mici ca **2025** este:
1 + 3 + 5 + 9 + 15 + 25 + 27 + 45 + 75 + 81 + 135 + 225 + 405 + 675 = 1726, este mai mic ca 2025, astfel este un număr deficient. Are deficiența: 2025 – 1726 = 299
Este divizibil cu suma cifrelor sale: **2025** = (2 + 0 + 2 + 5) · 225 ,
și este divizibil cu pătratul sumei cifrelor sale: **2025** = $(2 + 0 + 2 + 5)^2 \cdot 25$
Adunat cu răsturnatul lui obținem: 2025 + 5202 = 7227 un număr palindom.

Numărul **2025** se poate scrie în mai multe feluri ca suma unor numere naturale consecutive, pentru care este un număr politicos. Rangul politeței lui este 14.
2025 = 1012 + 1013
2025 = 674 + 675 + 676
2025 = 403 + 404 405 + 406 + 407
2025 = 335 + 336 + 337 + 338 + 339 + 340
2025 = 221 + 222 + 223 + 224 + 225 + 226 + 227 + 228 + 229
2025 = 198 + 199 + 200 + 201 + 202 + 203 + 204 + 205 + 206 + 207
2025 = 128 + 129 + 130 + 131 + 132 + 133 + 134 + 135 + 136 + 137 + 138 + 139 + 140 + 141 + 142. Aici este o sumă de 15 numere naturale consecutive.

$2025=\sum_{k=104}^{121} k$, ca sumă de 18 numere naturale consecutive; $2025=\sum_{k=69}^{93} k$, ca sumă de 25 numere naturale consecutive; $2025=\sum_{k=62}^{88} k$, ca sumă de 27 numere naturale consecutive; $2025=\sum_{k=53}^{82} k$, ca sumă de 30 numere naturale consecutive; Apoi: $2025=\sum_{k=23}^{67} k$, $2025=\sum_{k=16}^{65} k$, $2025=\sum_{k=11}^{64} k$, unde avem sume de 45, 50, respectiv 54 numere naturale consecutive..

Se poate scrie ca sume de numere naturale impare consecutive

2025 = 673 + 675 + 677

2025 = 401 + 403 + 405 + 407 + 409

2025 = 217 + 219 + 221 + 223 + 225 + 227 + 229 + 231 + 233

2025 =121 +123 + 125 + 127 + 129 + 131 + 133 + 135 + 137 + 139 + 141 + 143 + 145 + 147 + 149.

Respectiv: $2025=\sum_{k=1}^{45}(2k-1)$ suma primelor 45 de numere impare consecutive

Scrierea ca o sumă de numere prime:

2025 = 661 + 673 + 691

2025 = 23 + 491 + 499 + 503 + 509

2025 = 101 + 467 + 479 + 487 + 491

2025 = 31 + 313 + 317 + 331 + 337 + 347 + 349

2025 = 43 + 229 + 233 + 239 + 241 + 251 + 257 + 263 + 269

Se poate scrie ca suma numerelor cubice consecutive:

$$2025=1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3$$

și ca pătratul sumei primelor 9 numere naturale

$$2025=(1+2+3+4+5+6+7+8+9)^2.$$

Ca suma unor puteri ale lui 2 :

$2025=2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^5+2^3+2^0$

$2025=2^{11}-2^5+2^3+2^0$

$2025=2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^5+2^4-2^3+2^0$

$2025=2^{11}-2^4-2^3+2^0$

Puteri ale lui 3: $2025=3^7-3^5+3^4$ $\quad 2025=3^7-3^4-3^4$

Cu diferite puteri: $2025=3^6+6^4$ $\quad 2025=7^4-15^2-11^2$

$2025=2^{10}+3^6+4^4+2^4$ $\quad 2025=2^3+3^2+4^3+6^3+12^3$

Se poate scrie ca o sumă de două pătrate perfecte. $2025=27^2+36^2$

Se poate scrie ca o sumă de 3 pătrate perfecte.

$2025=4^2+28^2+35^2$ $\quad 2025=8^2+19^2+40^2$

$2025=5^2+8^2+44^2$ $\quad 2025=13^2+16^2+40^2$

$2025=5^2+20^2+40^2$ $\quad 2025=15^2+30^2+30^2$

$2025=6^2+15^2+42^2$ $\quad 2025=16^2+20^2+37^2$

$2025=6^2+30^2+33^2$ $\quad 2025=20^2+20^2+35^2$

$2025=20^2+28^2+29^2$

Se poate scrie ca o diferență a două pătrate perfecte.:

$2025=51^2-24^2$ $\quad 2025=53^2-28^2$ $\quad 2025=75^2-60^2$

$2025=117^2-108^2$ $\quad 2025=205^2-200^2$ $\quad 2025=339^2-336^2$

$2025=1013^2-1012^2$

Între numere pitagorice:

$2025^2 + 156^2 = 3031^2$ $\quad$ $2025^2 + 1080^2 = 2295^2$
$2025^2 + 1260^2 = 2385^2$ $\quad$ $2025^2 + 2448^2 = 3177^2$
$2025^2 + 2700^2 = 3375^2$ $\quad$ $2025^2 + 2968^2 = 3593^2$
$2025^2 = 1620^2 + 1215^2$ $\quad$ $2025^2 = 567^2 + 1944^2$
$2025^2 = 1155^2 + 1158^2 + 1194^2$

2025 nu este număr triunghiular dar se poate scrie ca suma a două numere triunghiulare.

$$2025 = T_{44} + T_{45} = \sum_{k=1}^{44} k + \sum_{k=1}^{45} k = 990 + 1035.$$

Este număr pătratic: $2025 = 45^2$ . nu este număr pentagonal, nu este număr hexagonal, dar mai departe se poate găsi printre numerele 58-ogonale, ca termenul al 9 – lea al șirului $c_n = 28n^2 - 27n$ :
1 , 58 , 171 , 340 , 565 , 846 , 1183 , 1576 , **2025** , 2530 , , , , ,

Numărul 2025 este un număr centrat octogonal, fiind termenul al 23 – lea al șirului cu termenul general $a_n = 4n(n-1) + 1$ .

Folosind o singură cifră:

$2025 = (1 + 1)^{11} - 11(1 + 1) - 1$ $\quad$ $2025 = (1111 - 111 + 11 + 1) \cdot (1 + 1) + 1$
$2025 = 2222 - 222 + 22 + 2 + 2 : 2$ $\quad$ $2025 = 333(3 + 3) + 3^3$
$2025 = (3333 + 3 + 3 : 3)(3 + 3) + 3$ $\quad$ $2025 = (444 + 44 + 4 \cdot 4 + 4 : 4) \cdot 4 + 4 + 4 : 4$
$2025 = (55 - 5 - 5)(55 - 5 - 5)$ $\quad$ $2025 = (666 : 6 - 6 \cdot 6 + 6)(6 \cdot 6 - 66 : 6)$
$2025 = [(7777 + 7)(7 + 7) + 7 \cdot 7] : 7$ $\quad$ $2025 = 88 \cdot (8 + 8 + 8) - 88 + 8 : 8$
$2025 = (999 + 9)(9 + 9) : 9 + 9$ $\quad$ $2025 = 999 + 999 + 9 + 9 + 9$

Scrierea în altă bază de numerație:

$2025_{10} = 11111101001_2$ $\quad$ $2025_{10} = 2210000_3$
$2025_{10} = 133220_4$ $\quad$ $2025_{10} = 31100_5$
$2025_{10} = 13213_6$ $\quad$ $2025_{10} = 5622_7$
$2025_{10} = 3751_8$ $\quad$ $2025_{10} = 2700_9$
$2025_{10} = 1581_{11}$ $\quad$ $2025_{10} = 1209_{12}$

Se exprimă cu termenii șirului lui Fibonacci:
2025 = F(1) + F(2) +F(3) + F(7) + F(9) + F(14) + f(17) =1 + 1 + 2 + 13 + 34 + 377 + 1597

În diferite inegalități:

$1936 = 44^2 < 2025 = 45^2 < 46^2 = 21161.$ $\qquad$ $1^{79} < 2025 < 1.1^{80}$

$$\sum_{k=1}^{63} k < 2025 < \sum_{k=1}^{64} k \qquad \sum_{k=1}^{17} k^2 < 2025 < \sum_{k=1}^{18} k^2 \qquad \sum_{k=1}^{209} \sqrt{k} < 2025 < \sum_{k=1}^{210} \sqrt{k}$$

$$\sum_{k=1}^{374} \sqrt[3]{k} < 2025 < \sum_{k=1}^{375} \sqrt[3]{k} \qquad \sum_{k=1}^{404} \ln k < 2025 < \sum_{k=1}^{405} \ln k \qquad \sum_{k=1}^{816} \lg k < 2025 < \sum_{k=1}^{817} \lg k$$

$$2.71761 < \left(1+\frac{1}{2025}\right)^{2025} < 2.71762 < e \qquad 12 < \sqrt[3]{2025} < 13$$

$$\sqrt{2025} = 45 \qquad \sqrt[4]{2025} = 3\sqrt{5} \cong 6,7$$

Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 44 \\ 46 & 2024 \end{pmatrix}$ este o matrice de ordinul 2, atunci $A^n = 2025^{n-1} \cdot A$.

Ca limita unor șiruri:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{125}+\sqrt[n]{375}+\sqrt[n]{19683}}{3}\right)^n = 2025. \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{625}+\sqrt[n]{6561}}{2}\right)^n = 2025$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{81}+\sqrt[n]{625}+\sqrt[n]{729}+\sqrt[n]{50625}}{4}\right)^n = 2025 \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{729}+\sqrt[n]{5625}}{2}\right)^n = 2025$$

Numere naturale scrise cu cifrele numărului 2025 în această ordine:

$1 = (2 + 0! + 2) : 5$ $\quad 2 = 2 + 0 \cdot 2 \cdot 5$ $\quad 3 = 2 \cdot 0 - 2 + 5$

$4 = 2 - 0! - 2 + 5$ $\quad 5 = 2 + 0 - 2 + 5$ $\quad 6 = 2 + 0! - 2 + 5$

$7 = 2 \cdot 0 + 2 + 5$ $\quad 8 = 2 - 0! + 2 + 5$ $\quad 9 = 2 + 0 + 2 + 5$

$10 = 2 + 0! + 2 + 5$ $\quad 11 = 2^0 + 2 \cdot 5$ $\quad 12 = 2 \cdot 0! + 2 \cdot 5$

$13 = 2 + 0! + 2 \cdot 5$ $\quad 14 = (2 + 0!)^2 + 5$ $\quad 15 = (2 - 0! + 2) \cdot 5$

$15 = 20 : 2 + 5$ $\quad 16 = (2 + 0!)! + 2 \cdot 5$ $\quad 17 = 20 + 2 - 5$

$18 = (2 + 0!)! \cdot (-2 + 5)$ $\quad 19 = -(2 + 0!)! + 25$ $\quad 19 = (2 + 0 + 2)! - 5$

$20 = (2 + 0) \cdot 2 \cdot 5$

**Bibliografie: www.numbersaplenty.com**

*Kovács Béla*

## Problema lui Poisson

**Avem o damigeană de 12 litri plină cu vin și două damigene goale de 8 litri și 5 litri. Cum putem separa cei 12 litri de vin astfel încât să punem 6 litri de vin doar în damigeana de 8 litri folosindu-ne doar de cele două damigene goale?**


Răspuns la pagina 72.

## ȘTIAȚI CĂ ....

… prima carte de matematică scrisă de un francez îi aparține lui **Nicolas Chuquet** (cca. 1445 – 1488), un matematician francez care a scris în 1484 prima carte de aritmetică și algebră din Franța?

Cartea nu a fost publicată în timpul vieții lui, rămânând în manuscris până în anul 1880 când a fost descoperită (în 1870 ) și publicată de editorul Aristide Marre, până atunci se considera că o carte a lui La Roche ar fi prima algebră franceză, dar s-a văzut ulterior că La Roche cunoștea cartea lui Chuquet, cel mai probabil aceștia s-au cunoscut între ei pe perioada șederii în Lyon.

Cartea sa “Le Triparty en la science des nombres”, “ Știința numerelor în trei părți “ nu a avut o influență imediată în Franța, pe atunci, se cunoșteau cărțile lui Fibonacci sau Nicole Oresme, din care Chuquet s-a inspirat cu siguranță. Ceea ce este interesant, este că în cartea lui apare și cifra 0 spre deosebire de cea a lui Fibonacci unde erau doar cele nouă cifre fără 0. S-a mai preocupat de radicalii compuși, rezolvarea diverselor ecuații pătratice, sau calculul cu numere cu exponenți.

## Aniversări și comemorări pentru matematicieni străini în anul 2024

**de Ionel Tudor-Călugăreni**

**1**. În anul 2024 s-au împlinit 2300 de ani de la nașterea lui **Eratosthene (276-cca.194 î.Hr.)**, în localitatea Cyrene (Libia de astăzi). A fost un savant grec universal , cu succese în domeniile în care a lucrat: matematică, astronomie, geografie, filosofie, literatură și muzică.

După studiile efectuate la Atena și-a câștigat o mare autoritate ca membru la Academie, până la vârsta de 30 de ani. În anul 245 î.Hr., a fost chemat la Alexandria de regele Ptolemeu al III–lea Euergetul. A predat la cea mai importantă universitate a vremii, Academia din Alexandria , unde a fost numit și administratorul șef al Bibliotecii din Alexandria. Aici a fost și principalul profesor al lui Ptolemeu Philopater, fiul moștenitor al regelui.

În lucrarea *„Platonikos"*, Eratosthene tratează probleme de matematică și muzică. În matematică i se atribuie o metodă pentru determinarea numerelor prime mai mici decât un număr dat (*ciurul lui Eratostene*), iar în geometrie a soluționat mecanic problema dublării cubului (*„problema delică*”), cu ajutorul unui instrument denumit mesolab. De asemenea a studiat locurile geometrice și a dat formule aproximative pentru laturile poligoanelor regulate cu 9 și cu 11 laturi.

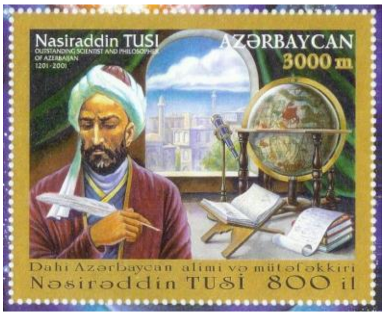
În anul 240 î.Hr., a calculat pentru prima dată în istorie , la Alexandria, circumferința Pământului de 39690 km , foarte aproape de cea reală de 40008 km (evaluarea a descris-o în lucrarea „*Măsurarea Pământului*”). Aceste evaluări au fost chiar mai bune decât cele ale lui Arhimede (287-212 î.Hr.) privind lungimea unui cerc mare al sferei terestre.

Eratosthene, prin lucrările „*Geografica*” și „*Chronografia*” este considerat fondatorul geografiei științifice și al cronologiei istorice. Pe harta geografică a părții locuite a Pământului întocmită de Eratosthene, figura și insula Ceylon(astăzi Sri Lanka) cu denumirea de „Coasta palmierului de bronz”, dovadă că acel teritoriu era cunoscut de multă vreme de către europeni.

În cronologie, a stabilit un nou calendar, introdus în anul 237 î.Hr., cu un an bisect de 366 zile la fiecare patru ani , care înlocuia vechiul calendar egiptean de 365 zile.

A fost contemporan atât cu Arhimede cât și cu Apolloniu , pe care i-a cunoscut la Alexandria. Pentru ideile sale a fost foarte apreciat de Arhimede, cel mai mare matematician al antichității. Lui Eratosthene i-a trimis Arhimede lucrările „*Problema taurilor Soarelui*” și „*Metoda*”. La bătrânețe a orbit și a murit ,într-o sărăcie totală , în anul 194 î.Hr.

**2**. În 2024 s-au comemorat 750 de ani de la moartea matematicianului ,astronomului și filosofului persan **Nasir al-Din al-Tusi (18.02.1201-26.06.1274)**, născut la Khorasan ( astăzi în Iran).




După mulți ani petrecuți în Persia, a vizitat orașul Bagdad iar la vârsta de 50 ani ajunge în Kuhistan la curtea conducătorului hașinilor–asasini. După cucerirea Kuhistanului de către mongoli, noul stăpân al Persiei, Hulagn-han îl ia aproape pe al–Tusi și la sfaturile lui a construit un Observator astronomic deschis în 1259 în capitala Maragheb. La acest observator condus de al–Tusi, au fost aduși învățați din Damasc, Mosul, Tbilisi precum și astronomi chinezi. În cinstea hanului aici au fost întocmite tabele astronomice valoroase pentru calculul efemeridelor.

În matematică, al-Tusi a avut preocupări deosebite pentru aritmetică, trigonometrie și geometrie , studiind teoria rapoartelor și teoria paralelelor . Lucrarea lui principală a fost „*Cartea despre figura alcătuită din secante”* (adică *„Tratatul despre patrulaterul complet”*). A studiat patrulaterul Saccheri și a efectuat o analiză critică a istoriei paralelelor, expunând propriile teorii.

Este considerat un precursor al geometriilor neeuclidiene. A avut un loc important și în istoria trigonometriei, prezentând în mod unitar, pentru prima dată, întregul sistem al trigonometriei, teoria rezolvării triunghiurilor și importanța teoremei patrulaterului complet în determinarea unor arce obținute prin intersecția cercurilor mari pe sferă cu atele.

Al-Tusi a demonstrat teorema sinusurilor, după ce a introdus noțiunile de sinus și cosinus, precum și teorema tangentelor pentru triunghiuri dreptunghice. A avut rezultate importante și în trigonometria sferică. Cercetările lui al-Tusi au influențat hotărâtor dezvoltarea trigonometriei în Europa medievală, Regiomontanus (Johann Müller din Kőnigsberg (1436-1476)) preluând în lucrările sale de trigonometrie mai multe rezultate ale lui al-Tusi. Ca ramură aparte a matematicii, prin introducerea denumirii funcțiilor trigonometrice și a operațiilor algebrice cu ele, trigonometria a fost creată în Evul Mediu de matematicienii de limbă arabă. În secolul XVIII, trigonometria a fost definitivată ca ramură aparte a matematicii.

**3**. **<u>Laplace, Pierre Simon(28.03.1749 -05.03.1827)</u>** , a fost un mare matematician, astronom și fizician francez, născut la Beaumont-en-Auge, care a fost aniversat în 2024 pentru 275 ani de la naștere. În 1765 intră la Universitatea din Caen iar după absolvire pleacă la Paris, unde se întâlnește cu D'Alembert (1717-1783). La recomandarea acestuia este angajat la Școala Militară din Paris.


A fost profesor și la Școala Politehnică precum și la Școala Normală Superioară din Paris.

În 1773 devine membru al Academiei de Științe din Paris(iar în 1817 președinte) iar în 1789 devine membru și în Royal Society.

În timpul împăratului Napoleon Bonaparte (1804-1814,1815) ajunge ministru de interne, cancelar al Senatului și Mare Ofițer al Legiunii de Onoare. A făcut parte din comisia propusă de Convenție (la Revoluția franceză din 1789) pentru introducerea sistemului zecimal de măsuri și greutăți în Franța, împreună cu Lagrange(1736-1813) și Monge(1746-1818).

Preocupările științifice s-au concretizat în lucrări valoroase de analiză matematică (funcții sferice de două variabile, integrale cu limite imaginare, ecuații cu diferențe finite, ecuații diferențiale și cu derivate parțiale), geometrie dierențială (suprafețe omofocale de ordin doi, denumirea de geodezice) și teoria probabilităților.

În 1795, în prelegerile de la Școala Normală, expune o metodă de rezolvare a ecuațiilor de grad superior. În 1772, Laplace a introdus noțiunea de determinant și ecuația seculară $|A - sI_n| = 0$, unde A este matrice simetrică de ordin n, $I_n$ este matricea unitate de ordin n și $s$ este un parametru utilizat în teoria perturbațiilor planetare. Este condus la dezvoltarea teoriei determinanților și la formula (regula) lui Laplace de calcul a determinanților.

Preocupat și de fizică, mecanică cerească și astronomie , Laplace este considerat unul dintre cei mai mari oameni de știință ai Franței și uneori intitulat ,,Newton al Franței".
A dat soluții pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale, creând noțiunea de operator Laplace (laplacian) și un operator diferențial care modelează propagarea undelor și a căldurii stând la baza ecuației Helmholz. Funcțiile cu laplacianul nul sunt funcții armonice.

În teoria probabilităților a fundamentat calculul cu probabilități dând denumirea clară prin raportul dintre numărul cazurilor favorabile și cele egal posibile iar în 1812 introduce funcția Laplace.

În lucrările sale ,,*Exposition du systeme du monde*" (1796) și ,,*Mecanique celleste*" (1799-1825), a studiat problema originii și stabilității sistemului solar, fiind primul om de știință care a formulat ipoteze cu privire la existența găurilor negre. Studiind perturbațiile Lunii a dedus valoarea turtirii la poli a Pământului.

Laplace a participat alături de Napoleon , la expedițiile pentru vizitarea piramidelor din Egipt. După restaurarea bourbonilor, în 1817, Laplace a primit titlul de marchiz de la regele Ludovic al XVIII-lea.

De la el au rămas celebrele vorbe: „**Ceea ce cunoaștem este puțin. Ceea ce nu știm este imens.”**

**4**. În 2024 , s-au împlinit 225 de ani de la moartea celei care a fost a doua femeie matematiciană de renume din istorie, <u>**Agnesi Margarita Gaetana Angiolo Maria (16.05.1718-09.01.1799)**</u>, (după Hypatia (350/370-415) conducătoarea școlii platoniene din Alexandria).

Maria Agnesi s-a născut la Milano și pe lângă matematică a avut și preocupări filosofice și lingvistice.

A luptat pentru emanciparea femeii și accesului ei la educație.

A fost un copil supradotat care la 13 ani vorbea curent limbile italiană, franceză , latină, spaniolă , greacă ,germană și ebraică. Avea aplecare deosebită pentru filosofie cu numeroase expuneri publice în domeniu. A dezbătut cu numeroși oameni de știință ai vremii probleme ca propagarea luminii, transparența corpurilor și studiul geometric al curbelor.

În 1738 a scris lucrarea „*Propositiones philosophies*”.

În 1748 a publicat, în două volume, cea mai cunoscută lucrare a sa „*Ses Insttuzioni analitiche ad uso della gioventa italiana*” *(1748)( Instituții analitice pentru tinerii italieni)*,lucrare dedicată împărătesei Maria Tereza a Austriei (1717-1780).

A fost prima lucrare în care se tratează deopotrivă calculul diferențial și calculul integral. Ea a servit ca bază și pentru cercetările lui Leonhard Euler (1707-1783). Tot în 1748, publică la Milano, lucrarea în două volume *„Fundamentele analizei”*, care constituie o sinteză vastă a rezultatelor de geometrie analitică existente până atunci. Aici a dat o demonstrație existenței celor trei rădăcini ale unei ecuații de gradul trei .

Tot aici a introdus și a studiat curba cubică de ecuație $f(x)=\frac{a^3}{x^2+a^2}$ , denumită „*bucla lui Agnesi”(versiera* sau *vrăjitoarea lui Agnesi)* și a scris un comentariu asupra lucrării „*Traité analytique de sections coniques*“ a marchizului de l’Hôspital (1661-1704). Despre această lucrare, Academia Franceză de Științe declară „ îl privim ca pe cel mai complet și bine făcut tratat”. Papa Benedict al XIV-lea(1675-1758) a fost impresionat și i-a scris că „Opera sa ar putea aduce recunoștința Italiei și a Academiei din Bologna” , apoi a numit-o în anul 1750 pe Maria Agnesi, profesoară la Universitatea din Bologna (cea mai veche din Europa, înființată în 1088).

Dar Maria Agnesi a preferat să se consacre cercetărilor sale și să se retragă din viața publică. Deși numele său a rămas în registrele universității timp de 45 de ani, Agnesi nu a venit niciodată la Bologna. Spre sfârșitul vieții s-a dedicat operelor de caritate.

Maria Agnesi afirma că *„Analiza matematică este arta de a rezolva tot felul de întrebări matematice, prin găsirea calculelor sau numerelor necunoscute, sau a cantităților, sau prin alte mijloace care sunt cunoscute”*

<u>**Bibliografie**</u>

1 . Adrian Stan, Florentina Popescu, Iuliana Trașcă - *O scurtă istorie a matematicii*-Editgraph, Buzău, 2015
2. Adrian C. Albu-*O istorie a matematicii, Antichitatea până în secolul VI(XIII)*-Editura Nomina, Pitești - 2009
3. Ion Purcaru, Octavian Bâscă-*Pagini din istoria matematicii-oameni , idei și fapte de referință*-Editura Universitară, București, 2017
4. Wikipedia

## Metagramă

**(OXXX)** de Dumitru Preoteasa, Giurgiu

Neplăcută dar utilă
Sarcină pentru acasă,
E ușoară sau subtilă
Dar verificată-n clasă.

Propoziție ea este,
Nu-ncape nicio dilemă,
Mai apare și prin teste
Dar precede-o teoremă.

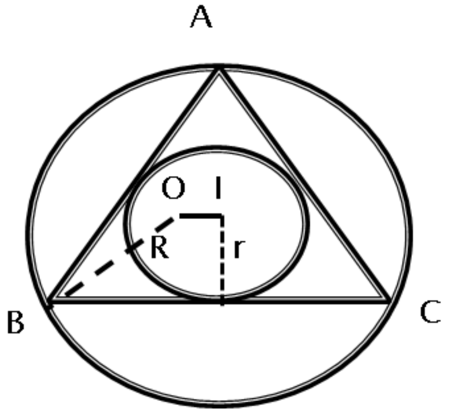
**În cele două strofe se pot descoperi două noțiuni din sfera matematicii, care diferă între ele prin prima literă.**

Răspuns la pag.72

# Știați că ....

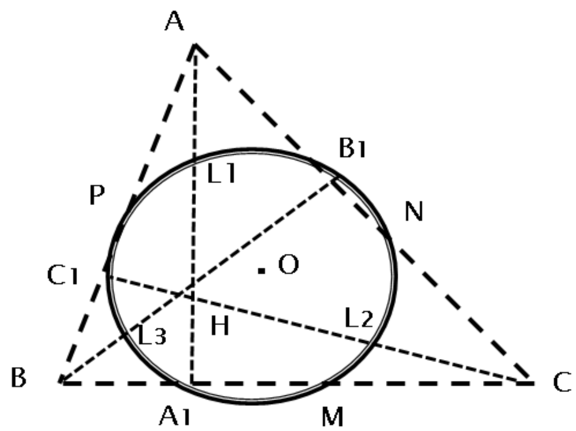
**…… formula $OI^2 = R\cdot(R-2r)$ cunoscută sub denumirea de relația lui Euler face legătura dintre I- centrul cercului înscris și O- centrul cercului circumscris triunghiului ABC, unde R, respectiv r sunt razele cercului circumscris respectiv înscris în triunghi.**

**Ea a fost atribuită eronat lui Euler, de fapt relația a fost publicată în 1746 de către William Chapple, iar Euler a redescoperit-o dându-i în 1765 o altă formă.**




# Știați că ....

**….. cercul care trece prin mijloacele laturilor unui triunghi, prin picioarele înălțimilor lui și prin mijloacele segmentelor determinate de vârfurile și ortocentrul triunghiului se numește cercul lui Euler în mod eronat deoarece el a fost considerat mai întâi de către Charles Brianchon și Jean Poncelot dar și de către Karl Feuerbach în 1822, iar ulterior a fost numit cercul celor nouă puncte.**




**,, Ce nu vrei să știe dușmanul, nu spune prietenului.”**
**proverb arab**

# 7. Poșta redacției

Dragi cititori, elevi și profesori, a apărut **numărul 35** al revistei de matematică „ **SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noștri, și care, sperăm noi, va aduna tot mai mulți elevi și profesori împreună, pentru a face din obiectul matematicii o activitate atractivă și performantă.

Profesorii și elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciții și probleme cu enunț și rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătății calitatea acestei reviste, o pot face trimițând materialele membrilor colectivului de redacție sau pe adresa de e-mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate, de preferat scrise cu programul mathtype (**salvate în Word 2003-2007**). **Materialele primite trebuie să fie originale și să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise și către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparține redacției.

Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările și comenzile pentru **numărul 36** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **01 OCTOMBRIE 2025**. Vă urăm succes și vă așteptăm.

**RĂSPUNS Problema lui Poisson**

Această problemă îi aparține matematicianului francez **Simeon Poisson** care a întâlnit-o într-o carte a unui matematician francez Nicolas Chuquet ( 1484).

Avem mai multe separări ale celor 12 litri în cele două damigene conform următoarelor mutări consecutive, se obțin șapte mutări până să ajungem la cei 6 litri în damigeana de 8 litri.


| | Starea inițială | Prima mutare | A doua mutare | A treia mutare | A patra mutare | A cincea mutare | A șasea mutare | A șaptea mutare |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Vasul cu 12 litri | **12** | **4** | **4** | **9** | **9** | **1** | **1** | **6** |
| Vasul de 8 litri | **0** | **8** | **3** | **3** | **0** | **8** | **6** | **6** |
| Vasul de 5 litri | **0** | **0** | **5** | **0** | **3** | **3** | **5** | **0** |

**Răspuns Metagramă.** temă-lemă.

VIZITAȚI ȘI REVISTA ONLINE DE MATEMATICĂ MATEINFO.RO

**REVISTA SCLIPIREA MINȚII**

**NR. 35 ANUL XVIII - APRILIE 2025**

**Cuprins**



LEI 17 RON

editgraph
editură | tipar offset | tipar digital
www.editgraph.ro

ISSN 2247 – 6601
ISSN – L 2247 – 6601