SCLIPIREA MINTII

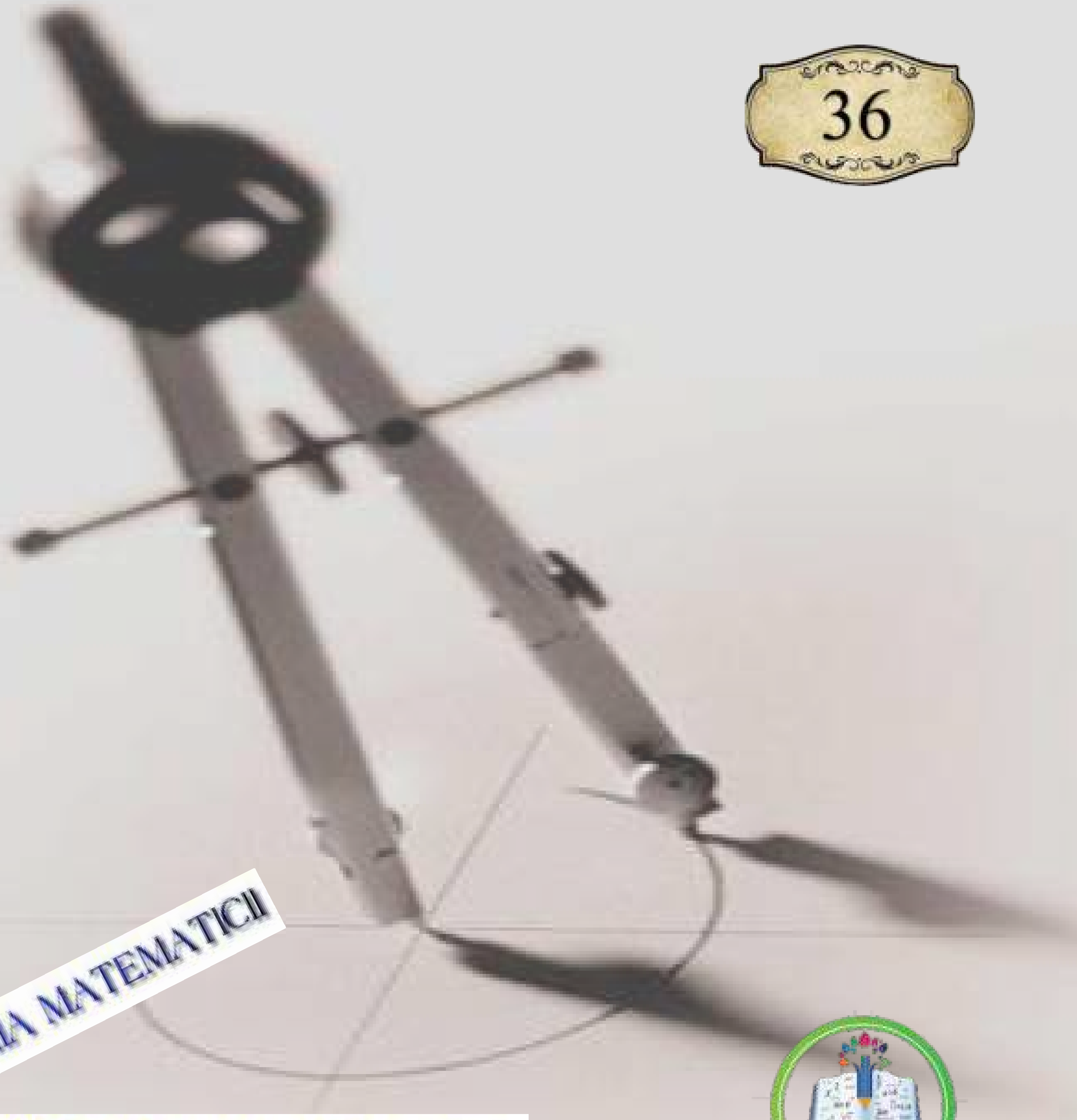
REVISTĂ NATIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICA . PUBLICATIE SEMESTRIALĂ, AN XVIII, NR XXXVI, 2025

SM

36

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEME PROPUSE



ISTORIA MATEMATICII

SM

CALEIDOSCOP MATEMATIC

Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

LICEUL TEORETIC DE INFORMATICĂ "ALEXANDRU MARGHILOMAN" , BUZĂU

NOIEMBRIE 2025

SCLIPIREA MINTII 36

Revistă națională de cultură matematică, publicație semestrială, An XVIII, Nr. XXXVI NOIEMBRIE 2025, BUZĂU

CUPRINS

GÂNDEȘTE CORECT

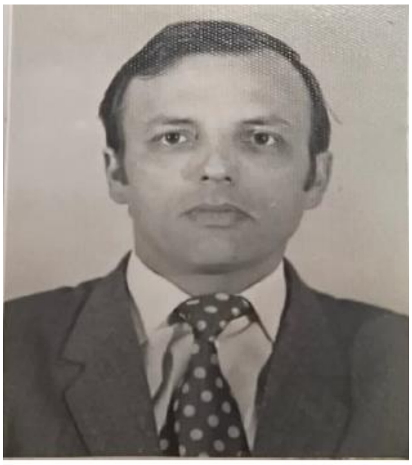
REDACȚIA
Liceul Teoretic de Informatică „Alexandru Marghiloman" , Buzău,
Strada Ivănețu , Nr. 7, Cod. 120114,
Tel. 0238714902
E_mail: ady_stan2005@yahoo.com
Coordonator proiect: Adrian Stan

Tipar: editgraph **Buzău, www.editgraph.ro**

IN MEMORIAM

TITU ZVONARU

(27.11.1953- 11.04.2025)



„**TITU ZVONARU** s-a născut pe 27 noiembrie 1953, în localitatea Dărmănești, județul Bacău.

A urmat cursurile gimnaziale în localitate, fiind premiantul clasei în fiecare an.

A urmat apoi liceul Teoretic din Comănești între anii 1968 – 1972, unde s-a remarcat clasându-se pe podium la toate olimpiadele de matematică. În această perioadă se numără printre rezolvitorii problemelor din Gazeta Matematică, cu care a colaborat mai târziu propunând chiar el probleme. Deși putea să-și aleagă orice profesie, el a ales matematica, urmând secția de matematică – informatică la Universitatea București între anii 1972 – 1976. După facultate, fiind specializat în matematică – informatică, a activat ca analist programator la centrul de calcul al MAPN până în 2002.

În anul 1977 s-a căsătorit cu *Magdalena* (fosta colegă de clasă în liceu) având o căsnicie frumoasă de 48 de ani și jumătate. A fost un exemplu de corectitudine și bunătate atât în familie cât și în comunitate. În toți acești ani și-a continuat pasiunea pentru matematică, a colaborat cu multe reviste de matematică: Recreații Matematice, RMT, CRUX, AMM, CMJ, MM, SM, RMM, MATINF, RGMO, REMI, REOIM, La Gaceta de la RSME și altele, în care a propus numeroase soluții și probleme frumoase date la concursuri și olimpiade naționale. A scris multe articole și note matematice remarcându-se prin claritatea gândirii și a exprimării, transmițând plăcerea provocată de frumusețea matematicii. A colaborat cu mulți matematicieni la editarea unor cărți, având subiecte favorite ca: teoria numerelor, geometria sintetică și demonstrarea unor inegalități.

Înzestrat cu o minte sclipitoare și rapidă, *Titu* a uimit deseori prin simplitatea și limpezimea soluțiilor pe care le oferea cu naturalețe și modestie, prin ideile genial găsite aparent fără efort.

A fost apropiat de cei care-i cereau sprijinul reușind să transmită și altor generații pasiunea pentru matematică prin probleme elegante și articole valoroase.

Plecarea lui la îngeri în 11 aprilie 2025 lasă în urmă un gol și o durere imensă !”

Magdalena Zvonaru

„*Titu* a fost căsătorit 48 de ani cu *Magdalena*; nu au avut copii.

A avut o singura soră, care are o fată, *Nela Ciceu* – profesoară de matematică în județul Bacău.

A fost coleg de cameră în facultate (în primul an) cu *Ionel Tudor* (Călugăreni) și cu *Dumitru Tudor* (Buzău) ! Din anul II a trecut la informatică.

A fost prieten de familie cu *Vasile Pravăț* (profesor de matematică în Comănești) – tatăl lui *Cristian Pravăț* (fost inspector de matematică la ISJ Iași) !
Este înmormântat la Cimitirul Sf. „Ilie" , Vermești, Comănești."

Nela Ciceu

„Nu l-am întâlnit niciodată pe *Titu Zvonaru* dar am corespondat mult. Contribuția sa la RMT și la site-ul de juniori a fost una extrem de valoroasa; rezolvările trimise, referințele bibliografice și observațiile sale de mare finețe îmi vor lipsi." *Andrei Eckstein*

„Un matematician de mare valoare, un colaborator constant la revistele MATINF și RMGO."

Costel Balcău

„Respectul, prețuirea și admirația pentru Omul **TITU ZVONARU**, pentru viața lui plină de discreție, modestie, onestitate și pasiune pentru matematică, sunt argumentele care m-au determinat să transmit acest mesaj. Am pierdut un prieten, un matematician de excepție, un profesionist în domeniul în care a activat. Dumnezeu să-l primească în brațele Sale!"

Cristian Pravăț

„Hi *Neculai*,
This is very sad news. *Titu*'s name has been a part of Crux for as long as I've been with Crux. I will truly miss seeing his submissions. I would like to publish a note in Crux about Titu."

Kseniya Garaschuk

„Dear *Neculai*,
I am deeply saddened by the loss of our esteemed collaborator, *Titu Zvonaru*. His contributions were invaluable, and his presence will be greatly missed. May he rest in peace. Thank you for sending the proposal, which we will include in the December 2025 issue. From Barcelona, I send my heartfelt wishes to all Romanian colleagues, encouraging them to continue moving forward.
Best regards ! "

Jose Luis Diaz Barrero

„TITU - Talent născut - nu făcut ! Lui Titu îi curgea matematica prin vene ! Avea matematica în ADN ! Un OM cu suflet frumos ! Vei rămâne în sufletul și gândul meu pentru totdeauna !"

Neculai Stanciu

Bibliografie:

1. **Neculai Stanciu, Titu Zvonaru,** *O rafinare a inegalității lui Euler în triunghi*, Gazeta Matematică, Nr. 3, 2025, 118 – 119.
2. **In memoriam**, **Titu Zvonaru,** Crux Mathematicorum, Vol. 51, Nr. 5, Mai, 2025, 207.
3. **Ion Pătrașcu, Titu Zvonaru**, *Asupra unei probleme de la olimpiada engleză,* 2024, Gazeta Matematică, Nr. 4, 2025, 176 – 178.
4. **Neculai Stanciu**, *Șapte soluții pentru o problemă din R.M.M.*, Recreații Matematice, Nr. 2, 2025, 130 - 132.
5. **Titu Zvonaru**, *Câteva probleme de geometrie*, Recreații Matematice, Nr. 2, 2025, 125 - 129.
6. **În memoria matematicianului Titu Zvonaru**, REMI, iunie, 2025.
7. **In Memory of Titu Zvonaru**, Mathematical Reflections, Issue 4, 2025.
8. **TITU ZVONARU (1953 – 2025), In memoriam**, Recreații Matematice, Nr. 2, 2025, 91 - 93.

„Numerele perfecte, ca și oamenii perfecți sunt foarte rare”.
René Descartes (1596 – 1650)

1. Istoria matematicii

René Descartes (1596 – 1650)

de **Ionel Tudor-**Călugăreni, Giurgiu și **Adrian Stan,** Buzău

Anul acesta comemorăm 375 de ani, de la moartea matematicianului și filozofului francez **René Descartes (Renatus Cartesius).**

S-a născut la 31.05.1596 în localitatea La Haye (astăzi Descartes) din departamentul Touraine, în centrul Franței.

Când avea un an, mama lui a decedat iar tatăl său, Joachim Descartes, membru al consiliului în parlamentul provincial, s-a recăsătorit așa că Rene a crescut în casa bunicii materne și s-a instruit cu fratele său, Pierre și cu sora sa Jeanne. A fost un copil foarte dotat intelectual dar slăbuț fizicește.

La opt ani, era poreclit „ filozoful ” și a început să studieze la, Colegiul Iezuit de la Flèche unde este instruit în cele șapte arte liberale: gramatica, retorica, dialectica, aritmetica, geometria, astronomia și muzica, iar de la 14 ani era preocupat de studii matematice.

După terminarea școlii, pleacă la Paris unde își ia bacalaureatul iar în 1617 obține și licența în drept la Universitatea din Poitiers. Întâlnirea de la Paris cu viitorul prieten Marin Mersenne (1588 – 1698), l-a determinat să aprofundeze mai mult studiul matematicii.

La vârsta de 20 de ani, s-a înrolat în armata prințului de Orania, pentru a-și spori șansele unei viitoare cariere politice, iar pe perioada stagiului militar se împrietenește cu matematicianul german Isaac Beeckman care, și el î-i încurajează spiritul pentru studiul matematicii și-i stimulează gustul pentru invenții. În 1618, Descartes i-a dedicat prietenului Beeckman, lucrarea „Compendium Musicae”.

În timpul studiilor, **Descartes**, după cum mărturisește, învățase multe: „Am fost hrănit cu carte din copilărie și deoarece mi se spunea că prin ea puteam câștiga o cunoștință clară și sigură despre tot ce este folositor vieții aveam o mare silință în toate..... Eram într-una din cele mai vestite școli ale Europei, în care profesau mulți oameni învățați. Aflasem acolo tot ceea ce și alții învățaseră și nemulțumit cu științele care ne erau predate cercetasem toate cărțile noi ce-mi cădeau sub mână și care tratau despre științele cele mai curioase și mai rare. Secolul mi se părea mai înfloritor și mai prosper în spirite alese decât toate cele de până acum”.

Abandonează cariera militară și urmează peregrinări prin Germania, Polonia și Italia pentru ca în 1626 să revină la Paris unde leagă prietenii cu mai mulți oameni de seamă printre care Desargues (1593- 1662) ultimul mare geometru și renumitul J.L.Guez de Balzac (1597- 1658) un mare scriitor al epocii. Parisul îl obosește și în 1628, **Descartes** se retrage în Olanda unde va trăi și va putea să lucreze în liniște timp de 20 de ani. În acea vreme în Olanda comerțul și științele erau în mare dezvoltare.

A fost perioada cea mai productivă a lui Descartes și sub influența cercurilor de gânditori olandezii el a publicat în 1637 principala sa operă științifică „Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verite dans les sciens”. („Tratat asupra metodei de a conduce în mod corect rațiunea și de a căuta adevărul în științele naturii”) .

În acest tratat, ca primă parte este cuprinsă o autobiografie filozofică urmată de alte 3 părți:

- „ **La Dioptrique** ” (1631), în care a prezentat teoria fizico- matematică a instrumentelor optice în strânsă legătură cu problemele fiziologiei și a redat legea refracției , descoperită independent și de Sneliuss (1581 - 1626).
- „ **Metheores** ”, unde a prezentat teoria fenomenelor meteorice, cauzele vânturilor și tunetelor, culorile curcubeului, figurile zăpezii).
- „ **La Geometrie** ”, care cuprinde în 87 pagini remarcabile, metoda coordonatelor cu ajutorul căreia problemele de geometrie sunt reduse la probleme de algebră. Se spune că Descartes a ajuns la ideea reperului de coordonate, inspirat de vechile încercări ale pitagoreicilor de a stabili o legătură între geometrie și aritmetică.

În „ **La Geometrie** ”, **Descartes** spunea: „caut să dau o metodă generală pentru a rezolva probleme care încă n-au fost rezolvate vreodată”. El voia să facă din algebră un instrument matematic universal, capabil să studieze orice problemă. Împreună cu **Fermat** (1601 – 1665) dar independent unul de altul, a fondat geometria analitică.

Descartes a introdus definiții cât mai exacte pe baza cărora să unifice algebra și geometria, domenii considerate diferite până la el.

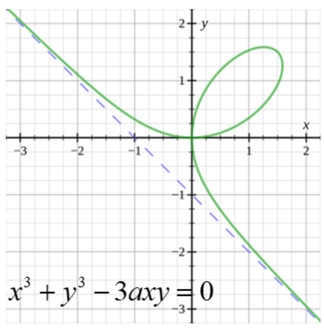
El a considerat că un anumit segment al unei drepte corespunde unui anumit număr, astfel a dedus dreapta reală sau axa numerelor, lucru senzațional pentru acea vreme.
Legătura dintre geometrie și algebră este dată în prezent prin sistemul de coordonate carteziene, denumit astfel în onoarea sa.

Descartes a fost primul despre care se știe că a fixat poziția unui punct din plan cu ajutorul a două numere: abscisa pe axa OX și ordonata pe axa OY.

René Descartes a considerat cel dintâi noțiunea de variabilă, a propus folosirea literelor alfabetului latin pentru notații (constantele cu primele litere iar variabilele și necunoscutele cu ultimele litere ale alfabetului). A considerat cifrele arabe și pentru notarea exponenților, a tratat teoria tangentelor la curbe (definind noțiunea de normală), a descris ovalele (cu utilizări la construirea oglinzilor focalizatoare și a lunetelor), s-a ocupat de problema dublării cubului și a trisecțiunii unghiului.

În 1620, **Descartes** a stabilit relația dintre numărul fețelor, vârfurilor și muchiilor unui poliedru convex f + v = m+ 2, regăsită și demonstrată în 1758 și de Euler.

Descartes a aplicat analiza ;i geometria analitică la studiul diferitelor curbe plane speciale, ca de exemplu, **foliul lui Descartes**, de ecuație $x^3+y^3=3axy$ și de ecuații parametrice $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$. Este o curbă simetrică în raport cu prima bisectoare și care are asimptota $x+y+a=0$. **Pierre Fermat** a calculat aria buclei foliului ($\frac{3a^2}{2}$) iar **Gilles – Personne Roberval** a găsit tangenta curbei.



În teoria ecuațiilor algebrice, **Descartes** a dat o teoremă care precizează numărul rădăcinilor pozitive ale unei ecuații algebrice cu coeficienți reali cunoscută și cu denumirea de „regula semnelor".

O ecuație algebrică completă, cu toate rădăcinile reale, are atâtea rădăcini pozitive câte alternări de semne au coeficienții ei și atâtea rădăcini negative câte perechi de semne consecutive figurează în ecuație. Menționăm că și **Newton** a avut cercetări în legătură cu această regulă, dar prima demonstrație generală a regulii semnelor a dat-o **Gauss** (1777-1855) în 1828.

De exemplu, ecuația $2x^4-13x^3+21x^2-2x-8=0$, are trei variații de semn ale coeficienților (2, -13, 21, -2), deci trei rădăcini pozitive $\left(x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=4\right)$ și există o pereche de semne consecutive ale coeficienților (-2; -8) deci ecuația are și o rădăcină negativă, $\left(x_4=-\frac{1}{2}\right)$.

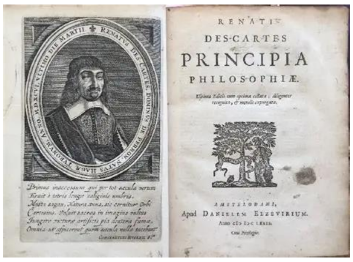
Tot legat de ecuații algebrice, **Descartes** a găsit o metodă de rezolvare a ecuației generale de gradul patru (este știut că italianul Ferrari (1522-1565) găsise pentru prima dată metoda sa de rezolvare prin radicali a ecuației de gradul patru în anul 1540). Se știa că ecuația generală $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ cu a nenul, poate fi adusă la forma $y^4+py^2+qy+r=0$ după o substituție de forma $x=y-\frac{b}{4a}$. În ecuația redusă, Descartes folosește următoarea descompunere $x^4+px^2+qx+r=\left(x^2+ax+b\right)\cdot\left(x^2-ax+c\right),\ a\neq 0$. Prin identificarea coeficienților obține un sistem în a, b, c de forma $\begin{cases} b+c-a^2=p \\ a(c-b)=q \\ bc=r \end{cases}$. Din $(b+c)^2-(c-b)^2=4bc$ și știind că $\begin{cases} b+c=a^2+p \\ c-b=\frac{q}{a} \end{cases}$ (*) rezultă $a^2\left(a^2+p\right)-4ra^2-q^2=0$. Se face notația $a^2=t\Rightarrow$ $t^3+2pt^2+\left(p^2-4r\right)t-q^2=0$. Se obține $a=\sqrt{t}$ iar din (*) rezultă și a și b și apoi soluțiile pentru ecuațiile $x^2+ax+b=0,\ x^2-ax+c=0$.

Un exemplu de folosire a metodei îl constituie ecuația $x^4+2x^3-12x^2-16x+32=0$ care se aduce la forma redusă prin substituția $x=y-\frac{b}{4a}=y-\frac{1}{2}$. Calculând x^2,x^3,x^4 se obține ecuația $y^4-\frac{27}{2}y^2-3y+\frac{589}{16}=0$, (1) și cu descompunerea lui Descartes $\left(y^2+ay+b\right)\cdot\left(y^2-ay+c\right)$ care se mai scrie $y^4+(b+c-a^2)y^2+a(c-b)y+bc$, (2) se face identificarea coeficienților din egalitatea (1) =(2) rezultând $b+c-a^2=-\frac{27}{2},\ a(c-b)=-3,\ bc=\frac{589}{16}$. Mai departe se obține rezolventa de gradul trei $t^3-27t^2+35t-9=0$, unde $t=a^2\rangle 0$. Din t =1 rezultă $a=\pm 1$ și în final se obțin soluțiile $S=\left\{-1\pm\sqrt{5};\ \pm 2\sqrt{2}\right\}$.

René Descartes a fost inspirat de opera lui Francois Viéte (1540 – 1603) și a contribuit l-a stabilirea noțiunii de număr algebric, noțiune dezvoltată mai târziu de Gauss și Abel. Aceste numere erau însoțite de semnele + și -, iar ulterior s-a impus introducerea noțiunilor de valoare absolută și relativă a unui număr.

Descartes a arătat că pentru unele ecuații există rădăcini a +bi cu a și b reale și $i=\sqrt{-1}$ care nu se pot reprezenta într-un sistem de axe de coordonate, fiind un precursor al lui Gauss, care le va considera numere imaginare sau complexe. Descartes nu a participat la diverse controverse și nu s-a implicat în scandaluri. Când a vrut să publice cartea sa „La Monde” („Lumea”) în 1663, a aflat de condamnarea lui Galileo Galilei de către Inchiziție, din cauza promovării acestuia a teoriei copernicane a heliocentrismului, pe care însuși Descartes o promovase în tratatul său, astfel că a fost nevoie de amânarea publicării cărții până în 1664.

Tot în 1664 apare și lucrarea „Principia Philosophiae” („Principiile filozofiei ”), unde are preocupări din domeniul filozofiei și cosmogoniei. De la el au rămas foarte multe scrisori de filozofie purtate cu Mersenne, apoi cu principesa Elisabeth de Phalz (1618 – 1680) sau cu alți oameni de știință.



Prin publicarea în 1637 a lucrării „Discours de la methode pour bien conduire .....” el a pus bazele unui sistem filozofic modern, bazat pe cunoaștere și pe certitudinea matematicii, un sistem inovator bazat pe observații și experiment care a influențat ultima jumătate a secolului al XVII-lea.

Cuvintele sale rămase celebre „*Dubito ergo cogito. Cogito ergo sum*”. („*Mă îndoiesc deci cuget, Cuget, deci exist*”.) , reprezintă esența sistemului său filozofic pentru că în demersul de a găsi adevărul filozofic, el supune percepțiile senzoriale și afirmațiile despre om și despre lume, unui proces elementar de scepticism cum ar fi că „*simțurile pot înșela, lumea exterioară poate fi stimulată, adevarat este însă numai ceea ce poate fi clar recunoscut*”.

În anul 1649, prin intermediul ambasadorului Franței în Suedia, **Descartes** ajunge la curtea reginei Christine (1626 – 1689) care devenise o figură proeminentă printre monarhii din Europa, pentru a-i preda lecții de filozofie. Vremea foarte rece a Suediei, capriciile reginei de a ține lecții la ora 5 dimineața și starea fizică precară a lui Descartes i-au grăbit sfârșitul. Astfel că, pe 11 februarie 1650 acesta decedează, fiind adus în Franța și depus la biserica Saint – Germain din Paris.

În amintirea sa, un asteroid a fost denumit cu numele său iar la noi în țară, o stradă din Cluj – Napoca poartă numele lui **Descartes.**

Bibliografie:

1. Adrian Stan și colab.. O scurtă istorie a matematicii. Editura Editgraph. Buzău;
2. Nicolae Mihăileanu. Istoria matematicii, vol. I, II. Editura Didactică și Pedagogică. București. 1981.
3. Vasile Bobancu. Caleidoscop matematic. Editura Niculescu. București. 2005.
4. Ion Purcaru, Octavian Bâscă. Pagini din istoria matematicii: oameni, idei și fapte de referință. Editura Universitară. București. 2017.
5. www.wikipedia.com
6. www. fineartamerica.com

„ **Matematica este fundația de nezdruncinat a științei și fântâna inepuizabilă a foloaselor pentru treburile omenești..”**

Isaac Barrow
(1630 - 1677)

2. Articole și note matematice

Câteva probleme cu integrale funcționale

de D. M. Bătinețu-Giurgiu, Neculai Stanciu și Daniel Sitaru

În aceast articol vom exemplifica o modalitate de a folosi schimbarea de variabilă pentru a demonstra unele identități integrale și pentru a calcula unele integrale definite și nedefinite care au în ipotezele lor relații funcționale. Ideile expuse pot fi utile elevilor care participă la diverse concursuri de matematică.

Problema 1. (*D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu* - Problema 736, The Pentagon, Fall, 2013). Dacă $a,b \in R$, $a < b$ și $f,g,h : R \to R$ funcții continue astfel încât:
$f(a+b-x) = -f(x), g(a+b-x) = g(x), h(a+b-x) = -h(x), \forall x \in R$, atunci demonstrați egalitatea:
$\int_a^b f(x)(arctgg(x))\ln\left(1+e^{h(x)}\right)dx = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)h(x)arctgg(x)dx$.

Soluție. $I = \int_a^b f(x)(arctgg(x))\ln\left(1+e^{h(x)}\right)dx$, în care facem schimbarea de variabilă $x = u(t) = a+b-t$, cu $u'(t) = -1, u(a) = b, u(b) = a$ și obținem:

$$I = -\int_b^a f(a+b-t)(arctgg(a+b-t))\ln\left(1+e^{h(a+b-t)}\right)dt =$$

$$= -\int_a^b f(x)(arctgg(x))\ln\left(1+e^{-h(x)}\right)dx = -\int_a^b f(x)(arctgg(x))\ln\frac{1+e^{h(x)}}{e^{h(x)}}dx =$$

$$= -\int_a^b f(x)(arctgg(x))\ln\left(1+e^{h(x)}\right)dx + \int_a^b f(x)(arctgg(x))h(x)dx.$$ Deci,

$$2I = \int_a^b f(x)h(x)arctgg(x)dx,$$ de unde reiese relația din enunț.

Problema 2. (*D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu* - Problema 2, Concursul Interjudețean ’’Speranțe Râmnicene’’, Ediția a XI-a, 20 aprilie, 2013).
Dacă $a \in R_+^*$, iar $f : R \to R_+^*$ este o funcția continuă astfel încât $f(x)f(-x) = 1, \forall x \in R$, atunci calculați $\int_{-a}^{a} \frac{1}{(x^2+2013)(1+f(x))}dx$.

Soluție. Facem schimbarea de variabilă $x = u(t) = -t$, cu $u'(t) = -1, u(a) = -a, u(-a) = a$ și obținem: $I = \int_{-a}^{a} \frac{1}{(x^2+2013)(1+f(x))}dx = \int_{a}^{-a} \frac{1}{(t^2+2013)(1+f(-t))}(-1)dt =$

$$=\int_{-a}^{a}\frac{1}{(x^2+2013)\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)}dx=\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{(x^2+2013)(1+f(x))}dx, \text{ deci}$$

$$2I=I+I=\int_{-a}^{a}\frac{1}{(x^2+2013)(1+f(x))}dx+\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{(x^2+2013)(1+f(x))}dx=$$

$$=\int_{-a}^{a}\frac{1}{x^2+2013}dx=2\int_{0}^{a}\frac{1}{x^2+2013}dx;$$

$$I=\int_{0}^{a}\frac{1}{x^2+2013}dx=\frac{1}{\sqrt{2013}}arctg\frac{x}{\sqrt{2013}}\Big|_0^a=\frac{1}{\sqrt{2013}}arctg\frac{a}{\sqrt{2013}}.$$

Problema 3. (*D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu* - Problema UP.098, RMM, Winter Edition, 2017). Dacă $a,b\in R$, $a<b$ și $f,g:R\to R$ sunt funcții continue astfel încât: $f(x)f(a+b-x)=1$, $g(x)=g(a+b-x)$, $\forall x\in R$, atunci demonstrați egalitatea: $\int_a^b\frac{g(x)}{1+f(x)}dx=\frac{1}{2}\cdot\int_a^b g(x)dx$.

Soluție. $I=\int_a^b\frac{g(x)}{1+f(x)}dx$ în care facem schimbarea de variabilă $x=u(t)=a+b-t$, cu $u'(t)=-1,u(a)=b,u(b)=a$ și obținem: $I=\int_a^b\frac{g(a+b-t)}{1+f(a+b-t)}dt=\int_a^b\frac{g(x)}{1+\frac{1}{f(x)}}dx=\int_a^b\frac{f(x)g(x)}{1+f(x)}dx$, deci

$$2I=I+I=\int_a^b\frac{g(x)}{1+f(x)}dx+\int_a^b\frac{f(x)g(x)}{1+f(x)}=\int_a^b\frac{(1+f(x))g(x)}{1+f(x)}dx=\int_a^b g(x)dx, \text{ prin urmare}$$

$$I=\frac{1}{2}\cdot\int_a^b g(x)dx.$$

Problema 4. (*D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu* - RMM, Winter Edition 2017). Dacă $a,b\in R$, $a<b$ și $f:R\to R$ derivabilă cu derivata continuă, $g:R\to R_+$ astfel încât $f(a+b-x)=f(x), g(a+b-x)g(x)=1, \forall x\in R$, atunci demonstrați egalitatea:

$$\int_a^b\left(\frac{f(x)}{1+g(x)}+f'(x)\ln(1+g(x))\right)dx=\frac{1}{2}\int_a^b\left(f(x)+f'(x)\ln g(x)\right)dx.$$

Soluție. Deoarece $f(a+b-x)=f(x),\forall x\in R$ avem că: $f'(a+b-x)=-f'(x),\forall x\in R$.

$I=\int_a^b\left(\frac{f(x)}{1+g(x)}+f'(x)\ln(1+g(x))\right)dx$, în care facem schimbarea de variabilă $x=u(t)=a+b-t$, cu $u'(t)=-1,u(a)=b,u(b)=a$ și obținem

$$I=-\int_b^a\left(\frac{f(a+b-t)}{1+g(a+b-t)}+f'(a+b-t)\ln(1+g(a+b-t))\right)dt=$$

$$=\int_a^b\left(\frac{f(x)}{1+\frac{1}{g(x)}}-f'(x)\ln\left(1+\frac{1}{g(x)}\right)\right)dt=\int_a^b\left(\frac{f(x)g(x)}{1+g(x)}-f'(x)\ln(1+g(x))+f'(x)\ln g(x)\right)dt.$$

$$2I=\int_a^b\left(\frac{(1+g(x))f(x)}{1+g(x)}+f'(x)\ln g(x)\right)dx=\int_a^b\left(f(x)+f'(x)\ln g(x)\right)dx,$$ de unde rezultă relația enunțului.

Următoarele cinci probleme le vom lăsa spre rezolvare cititorilor pasionați de calculul integral.

Problema 5. (*D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu*). Dacă $f:R\to R$ este o funcție continuă astfel încât $f(x)=f(1-x)$, $\forall x\in R$, atunci demonstrați egalitatea: $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}} f(x)dx=\sqrt{2}\cdot\int_0^1 f(x)dx$.

Problema 6. (*D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu*). Dacă $a,b\in R$, $c\in R-\{1\}$ și $f,g:R\to R$ sunt funcții continue astfel încât: $f(a+b-x)=cf(x)$, $g(a+b-x)=-g(x)$, $\forall x\in R$, atunci demonstrați egalitatea : $\int_a^b f(x)\ln\left(1+e^{g(x)}\right)dx=\frac{c}{c-1}\int_a^b f(x)g(x)dx$.

Problema 7. (*D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu* - Problema W29, Concursul Internațional Jozsef Wildt, Ediția a XXVIII-a, 2018). Dacă $u:R\to R$ este o funcție continua și $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ este o soluție a ecuației $y'(x)-y(x)-u(x)=0$, $\forall x\in(0,\infty)$, atunci calculați $\int \frac{e^x u(x)}{\left(e^x+f(x)\right)^2}dx$.

Problema 8. (*D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu*). Dacă $f:[a,b]\to(0,\infty)$ este o funcție continuă, astfel încât $f(a+b-x)+f(x)=c$, $\forall x\in[a,b]$ și $a+b=\frac{\pi}{2}$, atunci calculați

$$\int_a^b \frac{\sin^n x+f(x)+d}{\sin^n x+\cos^n x+c+2d}dx,$$ unde $n\in N^*$ și $d\ge 0$.

Soluție. $x=u(t)=\frac{\pi}{2}-t$, $u'(t)=-1$, $u(0)=\frac{\pi}{2}, u\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, u(a)=b, u(b)=a$ și

obținem $I=\int_a^b \frac{\sin^n x+f(x)+d}{\sin^n x+\cos^n x+c+2d}dx=\int_b^a \frac{\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+d}{\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+c+2d}(-1)dt=$

$=\int_a^b \frac{\cos^n t+(c-f(t))+d}{\cos^n t+\sin^n t+c+2d}dt=\int_a^b \frac{\cos^n x+c-f(x)+d}{\cos^n x+\sin^n x+c+2d}dx$;

$2I=\int_a^b \frac{\sin^n x+f(x)+d+\cos^n x+c-f(x)+d}{\cos^n x+\sin^n x+c+2d}dx=\int_a^b dx=b-a$; prin urmare $I=\frac{b-a}{2}$.

Problema 9. (*D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu* - Problema 2012, Mathematics Magazine, Vol. 90, Nr. 1, Februarie, 2017). Dacă $f:R\to R$ este o funcție continua impară, iar $g:R_+^*\to R$ este o funcție continua astfel încât $g\left(\frac{1}{x}\right)=-g(x), \forall x\in R_+^*$, atunci calculați $\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{1}{(1+x^2)\left(1+a^{(f\circ g)(x)}\right)}dx$, unde $a>1$.

Problema 10. (*D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu* - Problema H-819, The Fibonacci Quarterly – Advanced Problems, Vol. 56, Nr. 1, Februarie, 2018). Dacă $f:R\to R$ este o funcție continua impară, iar $g:R_+^*\to R$ este o funcție continua astfel încât $g\left(\frac{1}{x}\right)=-g(x), \forall x\in R_+^*$, atunci calculați

$\int_{-\beta}^{\alpha}\frac{1}{(1+x^2)\left(1+e^{(f\circ g)(x)}\right)}dx$, unde $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ și $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Bibliografie

1. D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu, *Exploatarea unor relații funcționale pentru schimbarea de variabilă în integrala Riemann*, Recreații Matematice, Anul XXVII, Nr. 1, Ianuarie – Iunie, 2025, 33-34.
2. D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu, Ovidiu Pop, *Asupra unei clase de probleme cu integrale funcționale definite,* Revista de Matematică din Timișoara (RMT), Nr. 2, 2024, 3 - 5.

Asupra inegalităților date la ONM 2021

de Marius Drăgan și Neculai Stanciu

Omagiu lui Titu Zvonaru (27.11.1953 – 11.04.2025)

Soluțiile problemelor date la Olimpiada Națională Gazeta Matematică (ONGM), 2021 – Etapa Finală sunt prezentate în [1]. În [2] și [3] este prezentată o nouă metodă de rezolvare a inegalităților. Utilizând această tehnică vom întări cele două inegalități date la faza națională a ONMG 2021, Etapa a III-a – 24 aprilie 2021. În final vom stabili și o legătură între cele două inegalități.

Fie $a,b,c>0$. Notăm $S=a+b+c$, $P=abc$, $\alpha=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$, $t=\frac{S^3}{P}\geq 27$

Lemă. i) $\sum a^2=\frac{S^3-2p\alpha}{S}$; ii) $t\leq\frac{\alpha^3}{4\alpha-9}$.

Demonstrație. i) $\sum a^2=(\sum a)^2-2\sum ab=S^2-\frac{2\alpha P}{S}=\frac{S^3-2p\alpha}{S}$;

ii) $\alpha=S\cdot\frac{\sum ab}{P}\Leftrightarrow\sum ab=\frac{\alpha P}{S}$. Din inegalitatea lui Schur obținem

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3+\frac{9}{abc}\geq 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(\sum ab)^3}{P^3}+\frac{9}{P}\geq\frac{4\alpha}{S}\cdot\frac{S}{P}\Leftrightarrow\frac{P^3\alpha^3}{S^3P^3}+\frac{9}{P}\geq\frac{4\alpha}{P}\Leftrightarrow\frac{\alpha^3P}{S^3}+9\geq 4\alpha\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\alpha^3}{t}+9\geq 4\alpha\Leftrightarrow t\leq\frac{\alpha^3}{4\alpha-9}.$$

1. ONGM 2021, Problema 2, Clasa a VIII-a

Arătați că, pentru orice numere reale $a,b,c>0$, are loc inegalitatea

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}+7.$$

Petrescu Lucian, Tulcea

Dacă $a,b,c>0$ și $\alpha=\sum a\sum\frac{1}{a}$, atunci au loc inegalitățile:

1.1. $\sum a\sum\frac{1}{a}\geq\frac{4\sum a^2}{\sum ab}+\frac{3(\alpha-9)}{4\alpha-9}+5\geq\frac{4\sum a^2}{\sum ab}+5\geq\frac{2\sum a^2}{\sum ab}+7$;

1.2. $\sum a\sum\frac{1}{a}\geq\frac{2\sum a^2}{\sum ab}+\frac{(2\alpha-3)(\alpha-9)}{\sum ab}+7\geq\frac{2\sum a^2}{\sum ab}+7$.

Soluție. Avem $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-4\cdot\frac{(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}=\alpha-\frac{4(S^3-2P\alpha)}{\alpha P}=$

$=\alpha-\frac{4(t-2\alpha)}{\alpha}=\frac{\alpha^2+8\alpha-4t}{\alpha}$, (1). Din lemă $t\leq\frac{\alpha^3}{4\alpha-9}$ și (1) obținem

$$\frac{\alpha^2+8\alpha-4t}{\alpha}\geq\frac{\alpha^2+8\alpha-\frac{4\alpha^3}{4\alpha-9}}{\alpha}=\alpha+8-\frac{4\alpha^2}{4\alpha-9}=\frac{23\alpha-72}{4\alpha-9}=5+\frac{3(\alpha-9)}{4\alpha-9},\ (2).$$

De asemenea avem $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-2\cdot\frac{(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}=\alpha-\frac{2(S^3-2P\alpha)}{\alpha P}=$

$$=\alpha-\frac{2(t-2\alpha)}{\alpha}=\frac{\alpha^2+4\alpha-2t}{\alpha}\geq\frac{\alpha^2+4\alpha-\dfrac{2\alpha^3}{4\alpha-9}}{\alpha}=\alpha+4-\frac{2\alpha^2}{4\alpha-9}=\frac{2\alpha^2+7\alpha-36}{4\alpha-9}=$$
$$=7+\frac{(2\alpha-3)(\alpha-9)}{4\alpha-9},\ (3).$$

Din (1), (2), $\dfrac{\sum a^2}{\sum ab}\geq 1$ și $\alpha\geq 9$, rezultă 1.1. Din (3) și $\alpha\geq 9$ rezultă 1.2.

Remarca 1. Inegalitățile 1.1. și 1.2. reprezintă întăriri ale problemei 2 dată la ONM 2021, clasa a VIII-a.

2. ONGM 2021, Problema 3, Clasa a IX-a

Fie a,b,c numere strict pozitive, astfel încât $a+b+c=1$. Arătați că
$$\frac{1}{abc}+\frac{4}{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{13}{ab+bc+ca}.$$

Mihai Opincariu, Brad, *Marian Stroe*, Hunedoara.

Dacă $a,b,c>0$, atunci obținem următoarele întăriri:

$$2.1.\ (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq\frac{27}{2}-\frac{9}{2}\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\frac{(\alpha-9)^2(2\alpha-7)}{2(\alpha^2-8\alpha+18)}\geq$$
$$\geq\frac{27}{2}-\frac{9}{2}\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\geq 13-\frac{4(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2};$$

$$2.2.\ (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 13-\frac{4(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}+\frac{(\alpha-9)^2(\alpha^2-12\alpha+30)}{\alpha^2-8\alpha+18}\geq$$
$$\geq 13-\frac{4(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}.$$

Soluție. Din lemă avem:
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{9}{2}\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}=\alpha+\frac{9}{2}\cdot\frac{P\alpha}{S^3-2P\alpha}=\alpha+\frac{9}{2}\cdot\frac{\alpha}{t-2\alpha},\ (4).$$

Din $t\leq\dfrac{\alpha^3}{4\alpha-9}$ (lemă) și (4) obținem
$$\alpha+\frac{9}{2}\cdot\frac{\alpha}{t-2\alpha}\geq\alpha+\frac{9}{2}\cdot\frac{\alpha}{\dfrac{\alpha^3}{4\alpha-9}-2\alpha}=\alpha+\frac{9}{2\left(\dfrac{\alpha^2}{4\alpha-9}-2\right)}=\frac{2\alpha^3-16\alpha^2+72\alpha-81}{2(\alpha^2-8\alpha+18)}=$$
$$=\frac{27}{2}+\frac{(\alpha-9)^2(2\alpha-7)}{2(\alpha^2-8\alpha+18)},\ (5).$$

De asemenea avem $\dfrac{27}{2}-\dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{\sum ab}{\sum a^2}\geq 13-\dfrac{4\sum ab}{\sum a^2}$, (6) $\left(\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\geq\dfrac{\sum ab}{2\sum a^2}\Leftrightarrow\sum a^2\geq\sum ab\right)$.

Din (4), (5) și (6) rezultă 2.1. Mai departe avem:
$$\frac{\sum a\sum ab}{abc}+\frac{4\sum ab}{\sum a^2}=\alpha+\frac{4\alpha}{t-2\alpha}\geq\alpha+\frac{4\alpha}{\dfrac{\alpha^3}{4\alpha-9}-2\alpha}=\alpha+\frac{4}{\dfrac{\alpha^2}{4\alpha-9}-2}=$$
$$=13+\frac{(\alpha-9)(\alpha^2-12\alpha+30)}{\alpha^2-8\alpha+18}\geq 13,\ (7).$$

Din $\alpha \geq 9$, $\alpha^2 - 12\alpha + 30 = (\alpha - 6)^2 - 6 \geq 3^2 - 6 = 3 > 0$,
$\alpha^2 - 8\alpha + 18 = \alpha(\alpha - 8) + 18 \geq \geq 9 + 18 = 27 > 0$ și (7) rezultă 2.2.

Remarca 2. Din 2.1. avem $\sum a \sum \frac{1}{a} \geq \frac{27}{2} - \frac{9}{2} \cdot \frac{\sum ab}{\sum a^2} \geq 13 - \frac{4\sum ab}{\sum a^2}$, unde dacă luăm $a + b + c = 1$ obținem $\frac{1}{abc} \geq \frac{27}{2} \cdot \frac{1}{\sum ab} - \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{\sum a^2} \geq \frac{13}{\sum ab} - \frac{4}{\sum a^2}$, care este o întărire a problemei 3 dată la ONM 2021, clasa a IX-a.

3. O legătură între cele două inegalități date la ONGM 2021

Dacă $a, b, c > 0$ și $E_1 = 4x + 5$, $E_2 = \frac{27}{2} - \frac{9}{2x}$, $E_3 = 2x + 7$, $E_4 = 13 - \frac{4}{x}$, unde $x = \frac{\sum a^2}{\sum ab} > 1$, atunci:

3.1. $\sum a \sum \frac{1}{a} \geq E_2 \geq E_1 \geq E_4 \geq E_3$, pentru $1 \leq x \leq \frac{9}{8}$;

3.2. $\sum a \sum \frac{1}{a} \geq E_1 \geq E_2 \geq E_4 \geq E_3$, pentru $\frac{9}{8} \leq x \leq 2$;

3.3. $\sum a \sum \frac{1}{a} \geq E_1 \geq E_2 \geq E_3 \geq E_4$, pentru $2 \leq x \leq \frac{9}{4}$;

3.4. $\sum a \sum \frac{1}{a} \geq E_1 \geq E_3 \geq E_2 \geq E_4$, pentru $x \geq \frac{9}{4}$.

Soluție. Avem $E_1 - E_2 = \frac{4}{x}(x-1)\left(x - \frac{9}{8}\right)$, $E_3 - E_4 = \frac{2}{x}(x-1)(x-2)$, $E_1 - E_3 = 2(x-1) \geq 0$, $E_2 - E_4 = \frac{x-1}{2x} \geq 0$, $E_1 - E_4 = \frac{4(x-1)^2}{x} \geq 0$, $E_3 - E_2 = \frac{(x-1)(4x-9)}{2x}$, (8).

Deoarece $\sum a \sum \frac{1}{a} \geq E_1$ (conform 1.), $\sum a \sum \frac{1}{a} \geq E_2$ (conform 2.), din (8) rezultă afirmațiile de mai sus.

Remarca 3. Observăm că pentru $1 \leq x \leq 2$ problema de la clasa a IX-a este mai ''bună'' ca problema de la clasa a VIII-a, iar pentru $x \geq 2$ problema de la clasa a VIII-a este mai ''bună'' ca problema de la clasa a IX-a.

Bibliografie

1. M. Bălună - *Olimpiada Națională Gazeta Matematică, 2021 – Etapa Finală*, Gazeta Matematică seria B, Nr. 5, 2022, pag. 231- 249.
2. M. Drăgan - *A Method to Solve and Refine some Algebraic Inequalities*, Recreații Matematice, Anul XXIII, Nr.1, Ianuarie – Iunie, 2021, pag. 14-17.
3. M. Drăgan, N. Stanciu - *Rafinarea unor inegalități din RMT*, Revista de Matematică din Timișoara, Anul XXVII (Seria a IV-a), Nr. 1/2022, pag. 8-10.

Zece inegalități noi în triunghi

de Mihaly Bencze

Rezultatul principal:

Teoremă. Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \geq 2tg\frac{x}{2}$.

Demonstrație. Cu inegalitatea mediilor GM-HM avem

$$\sqrt{\sin x tgx} \geq \frac{2}{\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{tgx}} = \frac{2\sin x}{1+\cos x} = 2tg\frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \geq 2tg\frac{x}{2}.$$

Aplicații:

În orice triunghi ascuțitunghic ABC sunt adevărate inegalitățile:

1. $\sum \frac{\sin A}{\sqrt{\cos A}} \geq \frac{2(4R+r)}{p}$. *Demonstrație.* $\sum \frac{\sin A}{\sqrt{\cos A}} \geq 2\sum tg\frac{A}{2} = \frac{2(4R+r)}{p}$.

2. $\sum \frac{\sin A \sin B}{\sqrt{\cos A \cos B}} \geq 4$. *Demonstrație.* $\sum \frac{\sin A \sin B}{\sqrt{\cos A \cos B}} \geq 4\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} = 4$.

3. $\sum \frac{\sin A \sin B \sin C}{\sqrt{\cos A \cos B \cos C}} \geq \frac{8r}{p}$. *Demonstrație.* $\sum \frac{\sin A \sin B \sin C}{\sqrt{\cos A \cos B \cos C}} \geq 8tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} = \frac{8r}{p}$.

4. $\sum \frac{\sqrt{\cos A}}{\sin A} \leq \frac{p}{2r}$. *Demonstrație.* $\sum \frac{\sqrt{\cos A}}{\sin A} \leq \frac{1}{2}\sum ctg\frac{A}{2} = \frac{p}{2r}$.

5. $\sum \frac{\sqrt{\cos A \cos B}}{\sin A \sin B} \leq \frac{4R+r}{4r}$. *Demonstrație.* $\sum \frac{\sqrt{\cos A \cos B}}{\sin A \sin B} \leq \frac{1}{4}\sum ctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2} = \frac{4R+r}{4r}$.

6. $\sum \frac{\sin^2 A}{\cos A} \leq \frac{4\left((4R+r)^2 - 2p^2\right)}{p^2}$. *Demonstrație.* $\sum \frac{\sin^2 A}{\cos A} \leq 4\sum tg^2\frac{A}{2} = \frac{4\left((4R+r)^2 - 2p^2\right)}{p^2}$.

7. $\sum \frac{\sin^2 A \sin^2 B}{\cos A \cos B} \geq 16\left(1 - \frac{2r(4R+r)}{p^2}\right)$.

Demonstrație. $\sum \frac{\sin^2 A \sin^2 B}{\cos A \cos B} \geq 16\sum tg^2\frac{A}{2}tg^2\frac{B}{2} = 16\left(1 - \frac{2r(4R+r)}{p^2}\right)$

8. $\sum \left(\frac{\sin A}{\sqrt{\cos A}}\right)^3 \geq \frac{8\left((4R+r)^3 - 12p^2 r\right)}{p^3}$.

Demonstrație. $\sum \left(\frac{\sin A}{\sqrt{\cos A}}\right)^3 \geq 8\sum tg^3\frac{A}{2} = \frac{8\left((4R+r)^3 - 12p^2 r\right)}{p^3}$.

9. $\sum \frac{\cos A}{\sin^2 A} \leq \frac{p^2 - 2r(4R+r)}{4r^2}$.

Demonstrație. $\sum \frac{\cos A}{\sin^2 A} \leq \frac{1}{4}\sum ctg^2\frac{A}{2} = \frac{p^2 - 2r(4R+r)}{4r^2}$.

10. $\sum \frac{\cos A \cos B}{\sin^2 A \sin^2 B} \leq \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{16r^2}$.

Demonstrație. $\sum \frac{\cos A \cos B}{\sin^2 A \sin^2 B} \leq \frac{1}{16}\sum ctg^2\frac{A}{2}ctg^2\frac{B}{2} = \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{16r^2}$.

Bibliografie

1. Octogon Mathematical Magazine (1993 – 2025).
2. Sclipirea Minții (2006 – 2025).

De la o inegalitate ... la alta

Moanță Cristian, Craiova

În cele ce urmează vă prezentăm cum se poate obține, pornind de la o inegalitate aparent simplă, una mai complicată.

Fie $x,y,z\in(0,\infty)$ **astfel încât** $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=k$. **Arătați că:**
$\sqrt{x^2+y^2-xy}+\sqrt{y^2+z^2-yz}+\sqrt{z^2+x^2-zx}\geq\frac{9}{k}$. **În ce caz avem egalitate?**

Soluție:

Avem $\sqrt{a^2+b^2-ab}\geq\frac{a+b}{2}, a,b>0$ care prin ridicare la pătrat obținem: $3(a-b)^2\geq 0$, cu egalitate pentru $a=b$. Atunci: $\sqrt{x^2+y^2-xy}\geq\frac{x+y}{2}, \sqrt{y^2+z^2-yz}\geq\frac{y+z}{2}, \sqrt{z^2+x^2-zx}\geq\frac{z+x}{2}$, de unde prin adunare obținem: $S=\sqrt{x^2+y^2-xy}+\sqrt{y^2+z^2-yz}+\sqrt{z^2+x^2-zx}\geq x+y+z$.

Cum $(x+y+z)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$ (Caz particular al inegalității Cauchy-Buniakowski-Schwarz), obținem $x+y+z\geq\frac{9}{k}$, de unde $S\geq\frac{9}{k}$. Egalitate avem pentru $x=y=z=\frac{3}{k}$.

Pornind de la această inegalitate, **făcând substituțiile:** $\frac{1}{x}=a, \frac{1}{y}=b$ și $\frac{1}{z}=c$, avem $a+b+c=k>0$, cu $a,b,c>0$ și inegalitatea devine:

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{ab}}+\sqrt{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{bc}}+\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{ca}}\geq\frac{9}{k} \text{ sau}$$

$c\cdot\sqrt{a^2+b^2-ab}+a\cdot\sqrt{b^2+c^2-bc}+b\cdot\sqrt{c^2+a^2-ac}\geq\frac{9abc}{k}$, cu egalitate pentru $a=b=c=\frac{k}{3}$.

Extindem în continuare inegalitatea inițială sub forma:

Fie $x_1,x_2,...,x_n\in(0,\infty)$, **astfel încât** $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}=k>0$. **Arătați că:**

$S=\sqrt{x_1^2+x_2^2-x_1x_2}+\sqrt{x_2^2+x_3^2-x_2x_3}+...+\sqrt{x_{n-1}^2+x_n^2-x_{n-1}x_n}+\sqrt{x_n^2+x_1^2-x_nx_1}\geq\frac{n^2}{k}$. **În ce caz avem egalitate?**

Soluție: Procedând ca mai înainte avem:

$$S=\sqrt{x_1^2+x_2^2-x_1x_2}\geq\frac{x_1+x_2}{2}, \sqrt{x_2^2+x_3^2-x_2x_3}\geq\frac{x_2+x_3}{2},...,$$
$$\sqrt{x_{n-1}^2+x_n^2-x_{n-1}x_n}\geq\frac{x_{n-1}+x_n}{2}, \sqrt{x_n^2+x_1^2-x_nx_1}\geq\frac{x_n+x_1}{2}.$$

Adunând membru cu membru, obținem: $S\geq x_1+x_2+...+x_n$, cu egalitate pentru $x_1=x_2=...=x_n=\frac{n}{k}$.

Din cazul particular al inegalității Cauchy-Buniakowski-Schwarz
$\left(x_1+x_2+...+x_n\right)\cdot\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_n}+...+\frac{1}{x_n}\right)\geq n^2$, obținem $\left(x_1+x_2+...+x_n\right)\cdot k\geq n^2$ sau

$x_1+x_2+...+x_n\geq\frac{n^2}{2}$. Așadar $S\geq\frac{n^2}{k}$, cu egalitate pentru $x_1=x_2=...=x_n=\frac{n}{k}$.

Dacă **notăm** $\frac{1}{x_1}=a_1,\frac{1}{x_2}=a_2,...,\frac{1}{x_n}=a_n$ cu $a_1,a_2,...,a_n\in(0,\infty)$ avem $a_1+a_2+...+a_n=k$.

Inegalitatea precedentă devine:

$$S=\sqrt{\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}-\frac{1}{a_1a_2}}+\sqrt{\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}-\frac{1}{a_2a_3}}+...+\sqrt{\frac{1}{a_{n-1}^2}+\frac{1}{a_n^2}-\frac{1}{a_{n-1}a_n}}+\sqrt{\frac{1}{a_n^2}+\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{a_na_1}}\geq\frac{n^2}{k}\text{, sau}$$

$$\frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2-a_1a_2}}{a_1a_2}+\frac{\sqrt{a_2^2+a_3^2-a_2a_3}}{a_2a_3}+...+\frac{\sqrt{a_{n-1}^2+a_n^2-a_{n-1}a_n}}{a_{n-1}a_n}+\frac{\sqrt{a_n^2+a_1^2-a_na_1}}{a_na_1}\geq\frac{n^2}{k}\text{, care devine:}$$

$$a_3a_4...a_n\sqrt{a_1^2+a_2^2-a_1a_2}+a_1a_4a_5...a_n\sqrt{a_2^2+a_3^2-a_2a_3}+...+$$
$$+a_1a_2...a_{n-2}\sqrt{a_{n-1}^2+a_n^2-a_{n-1}a_n}+a_2a_3...a_{n-1}\sqrt{a_n^2+a_1^2-a_na_1}\geq\frac{n^2}{k}a_1a_2...a_n,$$

cu egalitate pentru $a_1=a_2=...=a_n=\frac{k}{n}$.

Recomandăm cititorilor să folosească această idee pentru a genera noi inegalități pornind de la unele "aparent" simple. Succes!

About
Mathematical Reflections Nr.4/2025

de **Marin Chirciu**

The article develop problems from Mathematical Reflections,number4/2025.

S708. Let a,b,c be positive real numbers that at most one of them is less than 1 and $a+b+c=3$.Prove that

$$\sum\frac{1}{a^2}+6\sum ab\geq 21.$$

Vasile Cîrtoaje,Ploiești, România

Solution.

Let $c=\min\{a,b,c\}$, then $a,b\geq c$, $a+b+c=3\Rightarrow 3\geq 3c\Rightarrow c\leq 1$.

If $c=1$, then $a,b\geq c\Rightarrow a,b\geq 1$;

If $c<1$, then at most one of them is less than $1\Rightarrow a,b\geq 1$.

So, in every case $\Rightarrow a,b\geq 1\geq c\Rightarrow(a-1)(b-1)(c-1)\leq 0\Leftrightarrow\sum a+abc-\sum ab-1\leq 0\overset{\sum a=3}{\Leftrightarrow}$

$\overset{\sum a=3}{\Leftrightarrow}3+abc-\sum ab-1\leq 0\Leftrightarrow 2+abc-\sum ab\leq 0\Leftrightarrow 2+abc\leq\sum ab\overset{pqr-Method}{\Leftrightarrow}q\geq 2+r$

We have $\sum\frac{1}{a^2}+6\sum ab\geq 21\Leftrightarrow\sum b^2c^2+6a^2b^2c^2\sum ab\geq 21a^2b^2c^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\sum bc\right)^2-2abc\sum a+6a^2b^2c^2\sum ab\geq 21a^2b^2c^2\overset{pqr-Method}{\Leftrightarrow}q^2-2rp+6r^2q\geq 21r^2$.

By $q\geq 2+r$ and $q^2-2rp+6r^2q\geq 21r^2$ it suffices to prove:

$(2+r)^2-2rp+6r^2(2+r)\ge 21r^2$, $p=3 \Leftrightarrow (2+r)^2-2r\cdot 3+6r^2(2+r)\ge 21r^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6r^3-8r^2-2r+4\ge 0 \Leftrightarrow 3r^3-4r^2-r+2\ge 0 \Leftrightarrow (r-1)^2(3r+2)\ge 0$.

We used pqr -Method: $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.

Equality occurs if and only if $a=b=c=1$.

Remark.

Let a,b,c be positive real numbers that at most one of them is less than 1 and $a+b+c=3$. Determine $n,\lambda>0$ such that $n\sum\frac{1}{a^2}+\lambda\sum ab\ge 3(\lambda+n)$. **Marin Chirciu**

Solution.

Let $c=\min\{a,b,c\}$, then $a,b\ge c$, $a+b+c=3\Rightarrow 3\ge 3c\Rightarrow c\le 1$.

If $c=1$, then $a,b\ge c\Rightarrow a,b\ge 1$;

If $c<1$, then at most one of them is less than $1\Rightarrow a,b\ge 1$.

So, in every case $\Rightarrow a,b\ge 1\ge c\Rightarrow (a-1)(b-1)(c-1)\le 0\Leftrightarrow \sum a+abc-\sum ab-1\le 0 \overset{\sum a=3}{\Leftrightarrow}$

$\overset{\sum a=3}{\Leftrightarrow} 3+abc-\sum ab-1\le 0\Leftrightarrow 2+abc-\sum ab\le 0\Leftrightarrow 2+abc\le\sum ab \overset{pqr-Method}{\Leftrightarrow} q\ge 2+r$

We have $n\sum\frac{1}{a^2}+\lambda\sum ab\ge 3(\lambda+n)\Leftrightarrow n\sum b^2c^2+\lambda a^2b^2c^2\sum ab\ge 3(\lambda+n)a^2b^2c^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n\left(\sum bc\right)^2-2nabc\sum a+\lambda a^2b^2c^2\sum ab\ge 3(\lambda+n)a^2b^2c^2 \overset{pqr-Method}{\Leftrightarrow} nq^2-2nrp+\lambda r^2q\ge 3(\lambda+n)r^2$.

By $q\ge 2+r$ and $q^2-2rp+\lambda r^2q\ge 3(\lambda+1)r^2$ it suffices to prove:

$n(2+r)^2-2nrp+\lambda r^2(2+r)\ge 3(\lambda+n)r^2$, $p=3\Leftrightarrow n(2+r)^2-2nr\cdot 3+\lambda r^2(2+r)\ge 3(\lambda+n)r^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda r^3-(\lambda+2n)r^2-2nr+4n\ge 0\Leftrightarrow (r-1)\left(\lambda r^2-2nr-4n\right)\ge 0$.

Din condiția $\left(\lambda r^2-2nr-4n\right)_{r=1}=0$ obținem $\lambda=6n$.

We used pqr -Method: $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.

Equality occurs if and only if $a=b=c=1$.

Note. Pentru $n=1, \lambda=6$ se obține Problema S708 din Mathematical reflections Nr.4/2025.

J704. If $a,b,c>0$, $a+b+c=6$ then $\sum\frac{1}{b+c}+\frac{3}{2\sum a^2}\ge\frac{7}{8}$.

Mihaela Berindeanu, Bucharest, România

Solution .

$$\sum\frac{1}{b+c}+\frac{3}{2\sum a^2}\ge\frac{7}{8}\Leftrightarrow\sum\frac{24}{b+c}+\frac{36}{\sum a^2}\ge 21\overset{\sum a=6}{\Leftrightarrow}\sum\frac{4(a+b+c)}{b+c}+\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a^2}\ge 21\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum 4\left(1+\frac{a}{b+c}\right)+\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a^2}\ge 21\Leftrightarrow 12+\sum\frac{4a}{b+c}+\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a^2}\ge 21\Leftrightarrow\sum\frac{4a}{b+c}+\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a^2}\ge 9\Leftrightarrow$$

$$\sum\frac{4a}{b+c}+\frac{\sum a^2+2\sum bc}{\sum a^2}\ge 9\Leftrightarrow\sum\frac{4a}{b+c}+\frac{2\sum bc}{\sum a^2}+1\ge 9\Leftrightarrow\sum\frac{4a}{b+c}+\frac{2\sum bc}{\sum a^2}\ge 8\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\sum\frac{2a}{b+c}+\frac{\sum bc}{\sum a^2}\ge 4$, resulting from:

$\sum\frac{2a}{b+c}=\sum\frac{2a^2}{a(b+c)}\overset{Titu-Lema}{\ge}\frac{2\left(\sum a\right)^2}{\sum a(b+c)}=\frac{2\left(\sum a\right)^2}{2\sum bc}=\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum bc}$. It remains to show that:

$$\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum bc}+\frac{\sum bc}{\sum a^2}\ge 4 \Leftrightarrow \frac{\sum a^2+2\sum bc}{\sum bc}+\frac{\sum bc}{\sum a^2}\ge 4 \Leftrightarrow \frac{\sum a^2}{\sum bc}+2+\frac{\sum bc}{\sum a^2}\ge 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum a^2}{\sum bc}+\frac{\sum bc}{\sum a^2}\ge 2\text{, see } \frac{\sum a^2}{\sum bc}+\frac{\sum bc}{\sum a^2}\overset{AM-GM}{\ge} 2\sqrt{\frac{\sum a^2}{\sum bc}\cdot\frac{\sum bc}{\sum a^2}}=2.$$

Equality occurs if and only if $a=b=c=2$.

Remark.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=6$ and $0\le\lambda\le\frac{3}{2}$ then $\sum\frac{1}{b+c}+\frac{\lambda}{\sum a^2}\ge\frac{\lambda+9}{12}$. **Marin Chirciu**

Solution.

$$\sum\frac{1}{b+c}+\frac{\lambda}{\sum a^2}\ge\frac{\lambda+9}{12}\Leftrightarrow\sum\frac{24}{b+c}+\frac{24\lambda}{\sum a^2}\ge 2(\lambda+9)\overset{\sum a=6}{\Leftrightarrow}\sum\frac{4(a+b+c)}{b+c}+\frac{2\lambda\left(\sum a\right)^2}{3\sum a^2}\ge 2(\lambda+9)$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{2(a+b+c)}{b+c}+\frac{\lambda\left(\sum a\right)^2}{3\sum a^2}\ge\lambda+9\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum 2\left(1+\frac{a}{b+c}\right)+\frac{\lambda\left(\sum a\right)^2}{3\sum a^2}\ge\lambda+9\Leftrightarrow 6+2\sum\frac{a}{b+c}+\frac{\lambda\left(\sum a\right)^2}{3\sum a^2}\ge\lambda+9\Leftrightarrow$$

$$2\sum\frac{a}{b+c}+\frac{\lambda\left(\sum a\right)^2}{3\sum a^2}\ge\lambda+3\Leftrightarrow 6\sum\frac{a}{b+c}+\frac{\lambda\left(\sum a\right)^2}{\sum a^2}\ge 3\lambda+9\Leftrightarrow$$

$$\sum\frac{6a}{b+c}+\frac{\lambda\sum a^2+2\lambda\sum bc}{\sum a^2}\ge 3\lambda+9\Leftrightarrow\sum\frac{6a}{b+c}+\lambda+\frac{2\lambda\sum bc}{\sum a^2}\ge 3\lambda+9\Leftrightarrow$$

$\sum\frac{6a}{b+c}+\frac{2\lambda\sum bc}{\sum a^2}\ge 2\lambda+9$, resulting from:

$$\sum\frac{6a}{b+c}=\sum\frac{6a^2}{a(b+c)}\overset{CS}{\ge}\frac{6\left(\sum a\right)^2}{\sum a(b+c)}=\frac{6\left(\sum a\right)^2}{2\sum bc}=\frac{3\left(\sum a\right)^2}{\sum bc}.$$

It remains to show that:

$$\frac{3\left(\sum a\right)^2}{\sum bc}+\frac{2\lambda\sum bc}{\sum a^2}\ge 2\lambda+9\Leftrightarrow\frac{3\sum a^2+6\sum bc}{\sum bc}+\frac{2\lambda\sum bc}{\sum a^2}\ge 2\lambda+9\Leftrightarrow$$

$$\frac{3\sum a^2}{\sum bc}+6+\frac{2\lambda\sum bc}{\sum a^2}\ge 2\lambda+9\Leftrightarrow\frac{3\sum a^2}{\sum bc}+\frac{2\lambda\sum bc}{\sum a^2}\ge 2\lambda+3\overset{\frac{\sum a^2}{\sum bc}=t\ge 1}{\Leftrightarrow}$$

$\Leftrightarrow 3t+\frac{2\lambda}{t}\ge 2\lambda+3\Leftrightarrow 3t^2-(2\lambda+3)t+2\lambda\ge 0\Leftrightarrow(t-1)(3t-2\lambda)\ge 0$, see $t\ge 1$ and $0\le\lambda\le\frac{3}{2}$,

Equality occurs if and only if $a=b=c=2$.

Note .

For $\lambda=\frac{3}{2}$ we get J704-MR-4/2025.

J708. If I is incenter in ΔABC then a) $\prod AI=4Rr^2$; b) $\frac{\sum AI^2}{r}=\sum\frac{b+c-a}{\sin A}$.

Nguyen Viet Hung, Vietnam

Solution.

a).Using $AI=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$, we have $\prod AI=\prod\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{r^3}{\prod\sin\frac{A}{2}}=\frac{r^3}{\frac{r}{4R}}=4Rr^2$.

We used $\prod\sin\frac{A}{2}=\frac{r}{4R}$.

b). Using $AI=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$, we have: $\sum AI^2=\sum\left(\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}\right)^2=r^2\sum\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}=r^2\cdot\frac{p^2+r^2-8Rr}{r^2}=p^2+r^2-8Rr$.

$LHS=\frac{\sum AI^2}{r}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{r}$,(1).

$RHS=\sum\frac{b+c-a}{\sin A}=\sum\frac{2p-2a}{\frac{a}{2R}}=4R\sum\frac{p-a}{a}=4R\cdot\frac{p^2+r^2-8Rr}{4Rr}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{r}$,(2).

From (1) and (2) result $\frac{\sum AI^2}{r}=\sum\frac{b+c-a}{\sin A}$.

We used $\sum\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{r^2}$ and $\sum\frac{p-a}{a}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{4Rr}$.

O708. In ΔABC holds $\sum\frac{\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\geq 6\sqrt{3}$. **Marius Stănean**, Zalău, România

Solution .

$$LHS=\sum\frac{\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\sum\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\sum\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{\prod\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}}}+3\sqrt[3]{\prod\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}}=$$

$$=3\sqrt[3]{\frac{\prod\cos\frac{A}{2}}{\prod\sin\frac{A}{2}}}+3\sqrt[3]{\frac{\prod\cos\frac{A}{2}}{\prod\sin\frac{A}{2}}}=6\sqrt[3]{\frac{\prod\cos\frac{A}{2}}{\prod\sin\frac{A}{2}}}=6\sqrt[3]{\frac{\frac{p}{4R}}{\frac{r}{4R}}}=6\sqrt[3]{\frac{p}{r}}\overset{Mitrinovic}{\geq}6\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}r}{r}}=6\sqrt[3]{3\sqrt{3}}=$$

$$=6\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}\right)^3}=6\sqrt{3}=RHS.$$

We used $\prod\sin\frac{A}{2}=\frac{r}{4R}$, $\prod\cos\frac{A}{2}=\frac{p}{4R}$ and $p\geq 3\sqrt{3}r$,(Mitrinovic inequality).

Equality occurs if and only if the triangle is equilateral.

Remark.

In ΔABC holds $\sum\frac{\cos\frac{B}{2}+\lambda\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\geq 3\sqrt{3}(\lambda+1),\lambda\geq 0$. **Marin Chirciu**

Solution .

$$LHS=\sum\frac{\cos\frac{B}{2}+\lambda\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\sum\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\lambda\sum\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{\prod\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}}}+\lambda\cdot 3\sqrt[3]{\prod\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}}=$$

$$=3\sqrt[3]{\frac{\prod\cos\frac{A}{2}}{\prod\sin\frac{A}{2}}}+3\lambda\sqrt[3]{\frac{\prod\cos\frac{A}{2}}{\prod\sin\frac{A}{2}}}=3(\lambda+1)\sqrt[3]{\frac{\prod\cos\frac{A}{2}}{\prod\sin\frac{A}{2}}}=3(\lambda+1)\sqrt[3]{\frac{\frac{p}{4R}}{\frac{r}{4R}}}=$$

$$=3(\lambda+1)\sqrt[3]{\frac{p}{r}}\overset{Mitrinovic}{\geq}3(\lambda+1)\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}r}{r}}=3(\lambda+1)\sqrt[3]{3\sqrt{3}}=3(\lambda+1)\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}\right)^3}=3(\lambda+1)\sqrt{3}=RHS.$$

We used $\prod\sin\frac{A}{2}=\frac{r}{4R}$, $\prod\cos\frac{A}{2}=\frac{p}{4R}$ and $p\geq 3\sqrt{3}r$, (Mitrinovic inequality).

Equality occurs if and only if the triangle is equilateral.

Note.

For $\lambda=1$ we get O708-MR-4/2025.

Remark.

In ΔABC holds $$\sum\frac{\sin\frac{B}{2}+\lambda\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\geq\sqrt{3}(\lambda+1)\left(\frac{2r}{R}\right)^{\frac{1}{3}},\lambda\geq 0.$$ **Marin Chirciu**

Solution .

$$LHS=\sum\frac{\sin\frac{B}{2}+\lambda\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\sum\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}}+\lambda\sum\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{\prod\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}+\lambda\cdot 3\sqrt[3]{\prod\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}=$$

$$=3\sqrt[3]{\frac{\prod\sin\frac{A}{2}}{\prod\cos\frac{A}{2}}}+3\lambda\sqrt[3]{\frac{\prod\sin\frac{A}{2}}{\prod\cos\frac{A}{2}}}=3(\lambda+1)\sqrt[3]{\frac{\prod\sin\frac{A}{2}}{\prod\cos\frac{A}{2}}}=3(\lambda+1)\sqrt[3]{\frac{\frac{r}{4R}}{\frac{p}{4R}}}=$$

$$=3(\lambda+1)\sqrt[3]{\frac{r}{p}}\overset{Mitrinovic}{\geq}3(\lambda+1)\sqrt[3]{\frac{r}{\frac{3\sqrt{3}R}{2}}}=3(\lambda+1)\sqrt[3]{\frac{2r}{3\sqrt{3}R}}=3(\lambda+1)\sqrt[3]{\frac{2r}{R\left(\sqrt{3}\right)^3}}=$$

$$=3(\lambda+1)\left(\frac{2r}{R}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}(\lambda+1)\left(\frac{2r}{R}\right)^{\frac{1}{3}}=RHS.$$

We used $\prod\sin\frac{A}{2}=\frac{r}{4R}$, $\prod\cos\frac{A}{2}=\frac{p}{4R}$ and $p\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}R$, (Mitrinovic inequality).

Equality occurs if and only if the triangle is equilateral.

Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești

Despre triunghiuri ”raționale”

Daniel Văcaru„ Pitești

Numim **triunghi rațional** un triunghi care are toate laturile de lungimi numere raționale. În această scurtă notă, ne vom ocupa de triunghiurile raționale cu lungimile laturilor de o formă specială. Mai precis, acestea sunt numere de forma $x,\ x+r;\ x+2r,\ x\in\mathbb{Q},\ r\in\mathbb{N}$.

Să considerăm mai întâi r = 1.

Să considerăm că triunghiul despre care vorbim este ***rațional*** și dreptunghic.

Așadar, cum ipotenuza are lungimea x+2, avem de rezolvat în $\mathbb{Q}$ ecuația

$$(x+2)^2 = x^2+(x+1)^2 \Leftrightarrow x^2+4x+4=2x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$$

Putem folosi pe Δ, însă este bine ca, în această situație, să folosim un mic „truc”, anume

$$x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x^2+x-3x-3=0 \Leftrightarrow x(x+1)-3(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)=0 \Rightarrow$$

$x=-1$ sau $x=3$.

Este evident că soluția $x=-1$ nu este potrivită. Pentru $x=3$ obținem triunghiul dreptunghic de catete 3,4, și ipotenuză 5. Să încercăm acum să prescriem valorile pe care le iau măsurile unghiurilor.

Să vedem ce se întâmplă dacă unul dintre unghiuri are măsura de 60°. Un raționament simplu ne spune că cel mai mare dintre unghiuri nu poate avea această măsură, astfel suma tuturor măsurilor unghiurilor ar fi $< 180°$.

De asemenea, nici cel mai mic nu poate avea această măsură, căci atunci suma măsurilor unghiurilor triunghiului ar fi $> 180°$.

Așadar, măsura unghiului ar putea fi de 60° doar pentru unghiul ce se opune laturii de lungime $x+1$.

Utilizăm teorema cosinusului, și deducem $(x+1)^2 = x^2+(x+2)^2-2x\cdot(x+2)\cdot\cos 60^0 \Leftrightarrow$

$2x^2+4x+4-x^2-2x-x^2-2x-x^2-2x-1=0 \Rightarrow 3=0$ adică un astfel de triunghi nu există.

Să fixăm măsura unghiului celui mai mare, anume cel care se opune laturii de lungime $x+2$. Dorim ca măsura acestuia să fie de $120°$.

Așadar, din nou cu teorema cosinusului, găsim

$$(x+2)^2 = x^2+(x+1)^2-2x\cdot(x+1)\cdot\cos 120^0 \Leftrightarrow\ 2x^2-x-3=0. \qquad (2)$$

Să ne uităm la ecuația (2). Utilizând relațiile lui Viète, deducem $x_1\cdot x_2=-\dfrac{3}{2} \langle\ 0.$

Așadar, una dintre rădăcini este pozitivă, cealaltă negativă.

Să folosim metoda „chineză” pentru rezolvarea ecuației (2).

Scriem $2x^2-x-3=0 \Leftrightarrow 2x(x+1)-3(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(2x-3)=0 \Rightarrow x_1=-1$

sau $x_2=\dfrac{3}{2}$. Soluția potrivită este $x_2=\dfrac{3}{2}$.

Exercițiile se impun de la sine

1. Analizați cazul în care lungimile laturilor sunt într-o progresie aritmetică, de rație număr natural oarecare.
2. Studiați cazul progresiilor geometrice .

Două proprietăți ale șirului lui Fibonacci

Alexie Elena , Grigorie Ramona ,Craiova

Șirul de numere $F_0, F_1, F_2, ...$ definit $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pentru $n \in \mathbb{N}$ se numește șirul lui Fibonacci , în memoria matematicianului italian Leonardo Pisano Fibonacci(1170-1250). Se oate arăta că $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], n \in \mathbb{N}$.

În 1680 matematicianul francez Giovanni Domenico Cassini (1625-1712) a demonstrat că $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$ (1).

În cele ce urmează vom demonstra că:

Propoziția 1: $F_{n+1} = \frac{1}{2}\left(F_n + \sqrt{5F_n^2 + 4\cdot(-1)^n}\right), (\forall) n \in \mathbb{N}$.

Soluție :

Deoarece $F_{n-1} = F_{n+1} + F_n, n \in \mathbb{N}^*$ și folosind relația (1)avem $(F_{n+1} - F_n)F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ adică $F_{n+1}^2 - F_n \cdot F_{n+1} - F_n^2 - (-1)^n = 0$ (2).

Cum $F_{n+1} > 0$ rezolvând ecuația (2) ca o ecuație de gradul al doilea obținem $F_{n+1} = \frac{1}{2}\left(F_n + \sqrt{5F_n^2 + 4\cdot(-1)^n}\right)$, ceeea ce trebuia demonstrat .

Propoziția 2: Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $F_n^4 + 2F_n^3 \cdot F_{n+1} - F_n^2F_{n+1}^2 - 2F_nF_{n+1}^3 + F_{n+1}^4 = 1$ (3).

Soluție :

Avem de arătat că $\left(F_n^2 + F_nF_{n+1} - F_{n+1}^2\right)^2 = 1$. Folosind formula lui Cassini avem : $F_{n+1} = F_nF_{n+2} - (-1)^{n+1}$ și atunci

$$\left(F_n^2 + F_nF_{n+1} - F_{n+1}^2\right)^2 = \left(F_n^2 + F_nF_{n+1} - \left(F_nF_{n+2} - (-1)^{n+1}\right)\right)^2 = \left(F_n^2 + F_nF_{n+1} - F_nF_{n+2} + (-1)^{n+1}\right)^2 =$$

$$= \left(F_n(F_n + F_{n+1} - F_{n+2}) + (-1)^{n+1}\right)^2 = \left(F_n \cdot 0 + (-1)^{n+1}\right)^2 = (-1)^{2(n+1)} = 1$$

Adică ceea ce trebuia demonstrat .

Bibliografie:

Bătinețu-Giurgiu, Dumitru M., Stanciu, Neculai, Tica, Gabriel Leonard, Din tainele numerelor Fibonacci și Lucas, Editura SITECH, Craiova, 2013;

„ Matematicile au invenții foarte subtile și care pot folosi mult, atât pentru ca să mulțumească pe cei doritori să învețe, cât și pentru ca să înlesnească toate meșteșugurile ușurând munca oamenilor “.

Rene Descartes

“„Milioane au văzut mărul căzând,
dar Newton a întrebat de ce.”
Bernard Baruch
(1870 – 1965)

3. Probleme rezolvate

▪ Clasa a V-a

$\boxed{\text{G:1341}}$. **Determinați mulțimile X, Y, Z știind că: a)** $X\cup Y\cup Z=\{a;\ b;\ c;\ d;\ e\}$**;** **b)** $X\cap Y\cap Z=\{a;\ e\}$**; c)** $Y\cap Z=\{a;\ b;\ e\}$**; d)** $X\cap Z=\{a;\ d;\ e\}$**; e)** $c\notin(Y\cup Z)\cap X$**.**

Nicolae Ivășchescu, Canada

Rezolvare: Din condiția b) rezultă $\{a;\ e\}\subset X$, $\{a;\ e\}\subset Y$, $\{a;\ e\}\subset Z$. Din condiția c) rezultă $\{a;\ b,\ e\}\subset Y$, $\{a;\ b,\ e\}\subset Z$. Din condiția d) rezultă $\{a;\ d,\ e\}\subset X$, $\{a;\ d,\ e\}\subset Z$, din condiția e) rezultă $c\in X$, așadar, $X=\{a;\ c;\ d,\ e\}$, $Y=\{a;\ b,\ e\}$, $Z=\{a;\ b;\ d,\ e\}$.

$\boxed{\text{G:1342}}$. **Să se determine restul împărțirii numărului** $a=20^{25}+2025$ **la 9.** **Adrian Stan, Buzău**

Rezolvare: $a=20^{25}+2025=(18+2)^{2025}+2025=M_9+2^{25}+225\cdot 9=$
$=M_9+2^{10}\cdot 2^{10}\cdot 2^5=M_9+(M_9+7)\cdot(M_9+7)\cdot(M_9+5)=$
$=M_9+7\cdot 7\cdot 5=M_9+245=M_9+M_9+2=M_9+2$**.** Restul este egal cu 2.

$\boxed{\text{G:1343}}$. **Arătați că numărul** 2025^{2025} **se poate scrie ca suma a trei pătrate perfecte nenule distincte.**

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: Observăm $2025^1=44^2+5^2+8^2$ și $2025^{2025}=2025^{2024}\cdot 2025=2025^{2024}\cdot\left(44^2+5^2+8^2\right)=$
$=\left(2025^{1012}\cdot 44\right)^2+\left(2025^{1012}\cdot 5\right)^2+\left(2025^{1012}\cdot 8\right)^2$.

$\boxed{\text{G:1344}}$. **Dacă adunăm un număr natural de patru cifre cu numărul obținut prin înlăturarea primei sale cifre, obținem 1982. Calculați suma cifrelor numărului dat.**

Doina și **Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: Fie $\overline{abcd}$ numărul natural de patru cifre. Atunci,
$\overline{abcd}+\overline{bcd}=1982\Leftrightarrow 1000a+\overline{bcd}+\overline{bcd}=1982\Rightarrow\ a=1\Rightarrow 1000+2\cdot\overline{bcd}=1982\Rightarrow$
$\overline{bcd}=491\Rightarrow\overline{abcd}=1491\Rightarrow S=1+4+9+1=15$.

$\boxed{\text{G:1345}}$. **Fie numerele** $x=2^{1962}\cdot 5^{1961}+1$ **și** $y=2^{1961}\cdot 5^{1962}+1$**. Arătați că numerele x și y nu sunt numere prime.** **Doina și Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: $x=2\cdot 10^{1961}+1=2\cdot\underbrace{1000....0}_{1961\ de\ 0}+1=2\underbrace{000...0}_{1961\ de\ 0}+1=2\underbrace{000...01}_{1960\ de\ 0}$. Cum suma cifrelor lui x este 3 înseamnă că x este divizibil cu 3, deci x nu e prim.

$y=5\cdot 10^{1961}+1=5\cdot 1\underbrace{000...0}_{1961\ de\ 0}+1=5\underbrace{0000....0}_{1961\ de\ 0}+1=5\underbrace{0000....01}_{1960\ de\ 0}$. Cum suma cifrelor lui y este 6 înseamnă că y este divizibil cu 3, deci y nu este prim.

G:1346. Determinați numărul natural $\overline{ab}$ pentru care $\overline{ab}^2 + a^b + a^2 + a + a = 2024$.

Nicolae Ivășchescu, Canada

Rezolvare: Dând valori lui a ca să vedem cum este situat membrul stâng față de 2024 observăm că pentru a = 4 obținem $44^2 + 4^b + 4^2 + 4 + 4 = 2024$ adică $4^b = 64 \Rightarrow b = 3$. Așadar, singura soluție se obține pentru a=4, b=3, adică numărul 43.

G:1347. Demonstrați că numărul A se divide cu numărul 2024, unde $A = 2^{n+1} \cdot 3^{n+1} \cdot 5^{n+3} + 2^{n+3} \cdot 3^{n+3} \cdot 5^{n+1} + 2^{n+4} \cdot 3^{n+2} \cdot 5^n + 2^{n+1} \cdot 3^n \cdot 5^{n+2}$.

Nicolae Ivășchescu, Canada

Rezolvare: A se mai poate scrie

$A = 2^n \cdot 3^n \cdot 5^n \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5^3 + 2^n \cdot 3^n \cdot 5^n \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 + 2^n \cdot 3^n \cdot 5^n \cdot 2^4 \cdot 3^2 + 2^n \cdot 3^n \cdot 5^n \cdot 2 \cdot 5^2 =$

$= 2^n \cdot 3^n \cdot 5^n \left(2 \cdot 3 \cdot 5^3 + 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 + 2^4 \cdot 3^2 + 2 \cdot 5^2\right) = 2^n \cdot 3^n \cdot 5^n \cdot 2024$, deci rezultă că A este divizibil cu 2024.

G:1348. Arătați că numărul $n = 5^{2025} + 5^{2027}$ se poate scrie ca sumă a două pătrate perfecte în două moduri.

Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Observăm că $n = 5^{2024} \cdot \left(5 + 5^3\right) = \left(5^{1012}\right)^2 \cdot (5 + 125) = \left(5^{1012}\right)^2 \cdot 130 = \left(5^{1012}\right)^2 \cdot \left(3^2 + 11^2\right)$.

Așadar, $n = 5^{2025} + 5^{2027} = \left(3 \cdot 5^{1012}\right)^2 + \left(11 \cdot 5^{1012}\right)^2$. Altfel, putem avea și

$n = \left(5^{1012}\right)^2 \cdot 130 = \left(5^{1012}\right)^2 \cdot \left(7^2 + 9^2\right) = \left(7 \cdot 5^{1012}\right)^2 + \left(9 \cdot 5^{1012}\right)^2$.

G:1349. Se consideră șirul cu termenii $a_1=3$; $a_2=12$; $a_3=30$; $a_4=60$;….. Scrieți termenii: $a_{10}=$...;$a_{100}=$...;$a_n=$…

Petre Păunescu, Roșiori de Vede

Rezolvare: Observăm că

$a_1 = 1 + 2 = 3,\ a_2 = 3 + 4 + 5 = 12,\ a_3 = 6 + 7 + 8 + 9 = 30,\ a_4 = 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 60, ...$ și

$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. (numerele din sume sunt termenii lui S_n). Atunci, a_n este suma de n +1 termeni.

$a_{10} = 55 + 56 + ... + 65$, adică 11 numere, unde $55 = 1 + 2 + 3 + ... + 10$;

$a_{100} = 5050 + 5051 + ... + 5150$ adică 101 numere, unde $5050 = 1 + 2 + 3 + ... + 100$.

Inductiv, avem $a_n = S_n + S_n + 1 + ... + S_n + n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{2}$.

G:1350. Dovediți că numărul $a = 285719$ este compus și rezolvați în numere prime ecuația $x^y \cdot z = 285719$.

Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Arătăm că numărul $a = 285719$ are cel puțin doi factori numere naturale, diferite de 1 și 285719. Folosind criteriile de divizibilitate cunoscute, a nu se divide cu 2,3,5.

Prin împărțirea lui a=285719 la 7 găsim câtul 40817 , deci $a = 7 \cdot 40817$, număr compus.

Ecuația dată devine $x^y \cdot z = 7 \cdot 40817$. Mai mult, descompunând în factori numărul a obținem:

$a = 7 \cdot 40817 = 7 \cdot 7 \cdot 5831 = 7 \cdot 7^2 \cdot 833 = 7 \cdot 7^3 \cdot 119 = 7 \cdot 7^4 \cdot 17 = 7^5 \cdot 17$.

Din $x^y \cdot z = 285719 = 7^5 \cdot 17 \Rightarrow x = 7,\ y = 5,\ z = 17$.

G:1351. Câte numere $\overline{xy}$ verifică relația $(x+y)^3 = \overline{abc}$ unde $\overline{xy}$ este un număr de două cifre , iar $\overline{abc}$ este un număr de trei cifre.

Liță Alexandru , Sgaibă Marius , Craiova

Rezolvare: Cum $100 \le \overline{abc} \le 1000$ avem $100 \le (x+y)^3 \le 1000$ de unde $5 \le x + y \le 9$.

Din $x + y = 5$ găsim numerele 50,41,32,23,14. Din $x + y = 6$ găsim numerele 60,51,42,33,24,15.

Din $x + y = 7$ găsim numerele 70,61,52,43,34,25,16.

Din $x + y = 8$ găsim numerele 80,71,62,53,44,35,26,17.

Din $x + y = 9$ găsim numerele 90,81,72,63,54,45,36,27,18.

Așadar avem 5+6+7+8+9=35 numere .

G:1352. Arătați că dacă unul din numerele $a=20^n-1$ **și** $b=20^n+1, n\in\mathbb{N}^*$ **este prim atunci celălalt număr este compus.** **Florin Șendroiu**, Tg Cărbunești

Rezolvare: Deoarece unul din numerele $20^n-1, 20^n, 20^n+1$ se divide cu 3 și 20^n nu se divide cu 3 , obținem cerința problemei .

G:1353. Să se determine numerele $\overline{abc}$ **știind că împărțite la** $\overline{bc}$ **dau câtul a+1 și restul a+8.**

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Conform teoremei împărțirii cu rest, avem: $\overline{abc}=\overline{bc}\cdot(a+1)+8\Rightarrow$

$100a+\overline{bc}=a\cdot\overline{bc}+\overline{bc}+a+8\Leftrightarrow 100a=a\cdot\overline{bc}+a+8\Rightarrow a|8\Rightarrow a\in\{1,2;4,8\}$.

Dând valorile lui a obținem $\overline{abc}\in\{191;\ 295;\ 487;\ 898\}$

▪ Clasa a VI-a

G:1354. Determinați numerele naturale a,b,c știind că numerele a+b, b+c, a+c sunt invers proporționale cu 0,25; 0,2; 0,125 și a+b+c=51. **Doina și Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: $0,25=\frac{1}{4},\ 0,2=\frac{1}{5},\ 0,125=\frac{1}{8}$, din datele problemei avem:

$\frac{a+b}{4}=\frac{b+c}{5}=\frac{a+c}{8}=\frac{2a+2b+2c}{4+5+8}=\frac{2\cdot 51}{17}=6\Rightarrow a+b=24,\ b+c=30,\ a+c=48.$ (*).

Din (*) și din $a+b+c=51$ rezultă $a=21,\ b=3,\ c=27$.

G:1355. Rezolvați în numere întregi ecuația $x^2\cdot y+10x^3=256$. **Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: $x^2\cdot(y+10x)=256$. Se obțin următoarele situații:

1) $x^2=1\Rightarrow x\in\{-1;1\}$ și $y+10x=256$ cu soluțiile $(-1;266),\ (1;246)$.

2) $x^2=4\Rightarrow x\in\{-2;2\}$ și $y+10x=64$ cu soluțiile $(-2;84),\ (2;44)$;

3) $x^2=16\Rightarrow x\in\{-4;4\}$ și $y+10x=16$ cu soluțiile $(-4;56),\ (4;-24)$;

4) $x^2=64\Rightarrow x\in\{-8;8\}$ și $y+10x=4$ cu soluțiile $(-8;84),\ (8;-76)$;

5) $x^2=256\Rightarrow x\in\{-16;16\}$ și $y+10x=1$ cu soluțiile $(-16;161),\ (16;-159)$;

G:1356. Demonstrați că numărul

$A=[1,(1)+2,(2)+3,(3)+...+8,(8)]\cdot 18+\left[12,(4)+11,(5)+5,(13)+2,(75)+\frac{1}{9}\right]\cdot 40+5^2$ **este un pătrat perfect.** **Nicolae Ivășchescu**, Canada

Rezolvare: $1,(1)+2,(2)+3,(3)+...+8,(8)=\frac{11-1}{9}+\frac{22-2}{9}+...+\frac{88-8}{9}=\frac{10}{9}\cdot(1+2+...+8)=40$

$12,(4)+11,(5)+5,(13)+2,(75)+\frac{1}{9}=12\frac{4}{9}+11\frac{5}{9}+5\frac{13}{99}+2\frac{75}{99}+\frac{1}{9}=$

$=12+11+5+2+\frac{4}{9}+\frac{5}{9}+\frac{13}{99}+\frac{75}{99}+\frac{1}{9}=30+\frac{10}{9}+\frac{88}{99}=32$. Obținem

$A=40\cdot 18+32\cdot 40+25=2025=45^2$.

G:1357. **Să se arate ca suma cifrelor numărului** $10^{2024}-2017$ **este un număr divizibil cu 2023.**

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: $10^{2024}-2017=\underbrace{10000....00}_{2024\ de\ 0}-2017=\underbrace{999...9997983}_{2024\ cifre}$

Suma cifrelor dă $2021\cdot 9+7+8+3=18207=2023\cdot 9$ și este divizibilă cu 2023

G:1358. **Aduceți la forma cea mai simpla fracția:** $\dfrac{8+88+888+...+888888888-123456789}{7+77+777+....+777777777}$.

Petre Păunescu, Roșiori de Vede

Rezolvare:

$$\frac{8(1+11+111+...+111111111)-123456789}{7(1+11+111+...+111111111)}=\frac{8\cdot 123456789-123456789}{7\cdot 123456789}=\frac{123456789(8-1)}{7\cdot 123456789}=1$$

G:1359. **Rezolvați ecuația** $\dfrac{x-1}{2023}+\dfrac{x-2}{2022}+\dfrac{x-3}{2021}+.....+\dfrac{x-2022}{2}+\dfrac{x-2023}{1}=2023$.

Nicolae Ivășchescu, Canada

Rezolvare: Ecuația dată se mai poate scrie

$$\frac{x-1}{2023}-1+\frac{x-2}{2022}-1+\frac{x-3}{2021}-1+..........+\frac{x-2022}{2}-1+\frac{x-2023}{1}-1=0\Leftrightarrow$$

$$(x-2024)\cdot\left(\underbrace{\frac{1}{2023}+\frac{1}{2022}+.....+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}}_{\neq 0}\right)=0\Rightarrow x-2024=0\Rightarrow x=2024.\ \ S=\{2024\}.$$

G:1360. **Scrieți numărul 2025 ca sumă de : a) Două pătrate perfecte; b) Patru pătrate perfecte**

Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

a) $2025=45^2=9^2\cdot(9+16)=9^2\cdot(3^2+4^2)=27^2+36^2$;

b) $2025=1001+1024=1+100+900+(2^5)^2=1^2+10^2+30^2+32^2$.

G:1361. **Arătați că pentru orice numere reale x și y , avem** $(x-y)\cdot(x+y)=x^2-y^2$. **Fără să efectuați ridicările la pătrat , arătați că numărul** $a=28336^2+53689^2-28364^2-53636^2$ **este natural pătrat perfect.**

Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Se desfac parantezele rezultând formula cunoscută pe care o aplicăm la scrierea numărului a:

$$a=(53689^2-53636^2)-(28364^2-28336^2)$$

$$=(53689-53636)\cdot(53689+53636)-(28364-28336)\cdot(28364+28336)=$$

$$=25\cdot 53\cdot 9\cdot 477-25\cdot 28\cdot 4\cdot 9\cdot 63=25\cdot 81\cdot(53^2-28^2)=5^2\cdot 9^2\cdot 25\cdot 81=45^2\cdot 45^2=2025^2$$

G:1362. **Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația** $\dfrac{p}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{q}$ **unde p, q sunt numere prime date.**

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Ecuația dată devine $qx+pqy=xy\Leftrightarrow x(y-q)=pqy\Rightarrow x=\dfrac{pqy}{y-q}$.

Avem cazurile: Cazul 1) $p=q\Rightarrow y-p\,|\,p^3$.

a) $y-p=1 \Rightarrow y=p+1 \Rightarrow x=p^2(p+1)$;
b) $y-p=p \Rightarrow y=2p \Rightarrow x=2p^2$;
c) $y-p=p^2 \Rightarrow y=p^2+p \Rightarrow x=p(p+1)$;
d) $y-p=p^3 \Rightarrow y=p^3+p \Rightarrow x=p^2+1$.

Cazul 2.

1) $p \neq q \Rightarrow y-p \mid p^2 \cdot q$

$y-q=1 \Rightarrow y=q+1 \Rightarrow x=pq(q+1)$,

$y-q=p \Rightarrow y=q+p \Rightarrow x=q(q+p)$,

$y-q=p^2 \Rightarrow y=p^2+q \Rightarrow x=pq+\frac{q^2}{p} \notin \mathbb{N}$,

$y-q=q \Rightarrow y=2q \Rightarrow x=2pq$,

$y-q=pq \Rightarrow y=q(q+1) \Rightarrow x=q(p+1)$,

$y-q=p^2q \Rightarrow y=q\left(p^2+\right) \Rightarrow x=pq+\frac{q}{p} \notin \mathbb{N}$.

▪ Clasa a VII-a

$\boxed{\text{G:1363}}$. **Verificați dacă numărul** $2019 \cdot 2022 \cdot 2025 \cdot 2028+81$ **este pătrat perfect.**

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: Notăm cu x pe 2019. Atunci, $2019 \cdot 2022 \cdot 2025 \cdot 2028+81=x(x+3)(x+6)(x+9)+81=$
$=(x^2+9x)(x^2+9x+18)+81=(x^2+9x)^2+18(x^2+9x)+9^2=(x^2+9x+9)^2$.
$=(2019^2+9 \cdot 2019+9)^2=4094541^2$.

$\boxed{\text{G:1364}}$. **Aflați numerele reale x și y dacă** $4x-y-2=0$ **și** $\sqrt{y^2-3x^2-3xy+21}=\sqrt{11-4x+y}$.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: Din $y=4x-2 \Rightarrow y^2=16x^2-16x+4 \Rightarrow \sqrt{x^2-10x+25}=3 \Rightarrow |x-5|=3 \Rightarrow$
$x \in \{2;8\} \Rightarrow y \in \{6;30\}$.

$\boxed{\text{G:1365}}$. **Rezolvați ecuația** $x+24\{x\}=[x]$, $x \in \mathbb{Q}$ **unde** $[x]$ **respectiv** $\{x\}$ **reprezintă partea întreagă respectiv partea fracționară.**

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Folosind faptul că $x=[x]+\{x\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ecuația dată devine
$[x]+\{x\}+24\{x\}=[x] \Rightarrow 25\{x\}=0 \Rightarrow \{x\}=0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$. $S=\mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{G:1366}}$. **Există valori ale numărului real a astfel încât numerele** $x=\frac{2a+3}{4}$ **și** $y=\frac{3a-1}{2}$ **să fie simultan numere întregi ?**

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Din $x=\frac{2a+3}{4} \Rightarrow a=\frac{4x-3}{2}$ și $y=\frac{3a-1}{2} \Rightarrow a=\frac{2y+1}{3}$ obținem
$\frac{4x-3}{2}=\frac{2y+1}{3} \Rightarrow 12x-9=4y+2 \Rightarrow 4(3x-y)=11$ ceea ce este imposibil, rezultă că nu există valori ale lui a astfel încât numerele x și y să fie simultan numere întregi.

$\boxed{\text{G:1367}}$. **Găsiți numerele nenule** $\overline{ba}^2$ **, care verifică egalitatea** $\frac{\overline{ab}^2-\overline{ba}^2}{(a+b)^2}=11$.

Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: $\overline{ba}^2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 0,\ b \neq 0, \Rightarrow a+b \neq 0$ și fracția are sens.

Eliminăm numitorul și scriem succesiv: $\overline{ab}^2-\overline{ba}^2=11(a+b)^2$,

$\left(\overline{ab}-\overline{ba}\right)\left(\overline{ab}+\overline{ba}\right)=11(a+b)^2 \Rightarrow \left(10a+b-10b-a\right)\left(10a+b+10b+a\right)=11(a+b)^2 \Rightarrow$

$9(a-b)\cdot 11(a+b)=11(a+b)^2 \,|:11(a+b) \Rightarrow 4a=5b$. Cum 4 și 5 sunt prime între ele iar a și b sunt cifre rezultă a=5, b=4. Deci, $\overline{ba}^2=45^2=2025$.

G:1368. Dacă $a,b,c>0$ astfel încât $a^2+b^2+c^2=3$ atunci $\sum\limits_{cyc} a\cdot\sqrt{2a^2+3ab+4b^2}\le 9$. Când are loc egalitatea?

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: $\sum a\cdot\sqrt{2a^2+3ab+4b^2}=\frac{1}{3}\cdot\sum\sqrt{9a^2(2a^2+3ab+4b^2)}\overset{Mg\le Ma}{\le}\frac{1}{3}\sum\frac{9a^2+2a^2+3ab+4b^2}{2}=$

$=\sum\frac{11a^2+3ab+4b^2}{6}=\frac{11\sum a^2+3\sum ab+4\sum b^2}{6}\le 19a^2=2a^2+3ab+4b^2 \Leftrightarrow$

$(a-b)(7a+4b)=0 \Leftrightarrow a=b$ și analog din celelalte două egalități rezultă că egalitatea are loc dacă și numai dacă a = b = c = 1.

G:1369. Se dă triunghiul ABC cu AB=10 cm, BC= 6cm și $m(\sphericalangle ABC)=105^0$. Calculați aria triunghiului.

Nicolae Ivășchescu, Canada

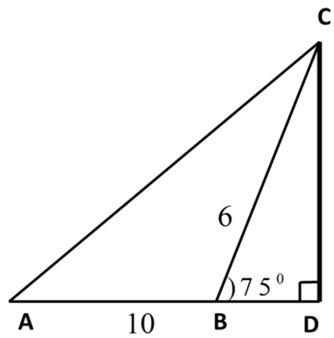
Rezolvare:

Fie $CD\perp AB$. În triunghiul $\Delta\ BCD$, $m(\sphericalangle D)=90^0$, $m(\sphericalangle CBD)=75^0$, $m(\sphericalangle BCD)=15^0$.

În triunghiul dreptunghic $\Delta\ BCD$, $\sin B=\frac{CD}{BC}\Rightarrow$

$CD=BC\cdot\sin B=6\cdot\sin 75^0=$

$=6\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2}$.



Atunci, aria $A_{ABC}=\frac{AB\cdot CD}{2}=7,5\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{6})$.

G:1370. Un trapez ABCD dreptunghic în A , are baza mică $AB=\frac{9\sqrt{10}}{2}$ cm și baza mare DC=AD. Se consideră punctul E mijlocul lui AD încât $BE\perp EC$.

a) Arătați că triunghiurile AEB și DCE sunt asemenea.

b) Arătați că aria trapezului ABCD este număr natural iar tangenta unghiului ascuțit format de diagonalele AC și BD este un număr rațional.

Ionel Tudor-Călugăreni

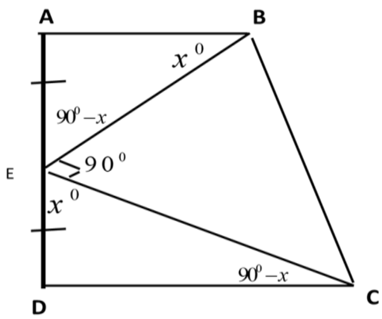
Rezolvare: Conform desenului, triunghiurile AEB și DCE sunt asemenea conform cazului de asemănare U.U sau C.U

$\Delta\ AEB\sim\Delta\ DCE\Rightarrow\frac{AB}{DE}=\frac{AE}{DC}=\frac{BE}{CE}$. Cum

$AE=\frac{AD}{2}=\frac{DC}{2}\Rightarrow\frac{AE}{DC}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{AB}{DE}=\frac{1}{2}\Rightarrow$

$DE=2\cdot AB=9\sqrt{10}$ și

$AD=2\cdot DE=18\sqrt{10},\ DC=AD=18\sqrt{10}.$



Trapezul ABCD are aria $A_{ABCD}=\frac{(DC+AB)\cdot AD}{2}=2025\in\mathbb{N}$.

Aria trapezului se poate calcula și cu formula $A_{ABCD}=\dfrac{AC\cdot BD\cdot\sin\varphi}{2}$, unde φ este unghiul ascuțit al diagonalelor AC și BD. Rezultă $\sin\varphi=\dfrac{2A_{ABCD}}{AC\cdot BD}=\dfrac{2\cdot 2025}{AC\cdot BD}$.

AC se calculează din triunghiul dreptunghic isoscel ADC , $AC=AD\sqrt{2}=18\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}=36\sqrt{5}$.

Diagonala BD se calculează din triunghiul dreptunghic ABD, $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\dfrac{\sqrt{13770}}{2}$, atunci $AC\cdot BD=36\sqrt{5}\cdot\dfrac{\sqrt{13770}}{2}=90\sqrt{2754}$, deci $\sin\varphi=\dfrac{2\cdot 2025}{90\sqrt{2754}}=\dfrac{5}{\sqrt{34}}$. Mai departe se calculează și $\cos\varphi=\sqrt{1-\sin^2\varphi}=\dfrac{3}{\sqrt{34}}$. Atunci, $tg\varphi=\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\dfrac{5}{3}\in\mathbb{Q}$.

G:1371. În trapezul ABCD se cunosc: $AD\parallel BC,\ AD\ \langle\ BC,\ m(\sphericalangle D)=120^0$ iar diagonalele sale sunt bisectoarele unghiurilor alăturate bazei mari. Dacă CD=8 cm, să se afle perimetrul trapezului.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

Rezolvare: Din ipoteză avem $\sphericalangle ABD\equiv\sphericalangle DBC$ iar $\sphericalangle DBC\equiv\sphericalangle BDA$ (alterne interne) , deci $\sphericalangle ABD\equiv\sphericalangle BDA$. Așadar, triunghiul ABD este isoscel cu AB=AD (1). Analog, AD=DC (2).
Din (1) și (2) se deduce că AB=DC=AD, adică trapezul este isoscel. Cum $m(\sphericalangle D)=120^0$, rezultă $m(\sphericalangle DCB)=60^0$ și $m(\sphericalangle DBC)=30^0$. Prin urmare, triunghiul BCD este dreptunghic. Conform teoremei unghiului de 30^0, BC=2·CD. Perimetrul trapezului va fi 16+8+8+8=40 (cm).

▪ Clasa a VIII-a

G:1372. Se dă piramida VABC cu înălțimea de 90 cm și baza triunghiului dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A)=90^0$, $m(\sphericalangle C)=15^0$ și $AC=20\sqrt{2+\sqrt{3}}\ cm$. La distanța de o treime din înălțime față de vârful V se face o secțiune cu un plan paralel cu planul bazei. Determinați volumul trunchiului de piramidă obținut.

Nicolae Ivășchescu, Canada

Rezolvare:

În triunghiul ABC, $\cos(15^0)=\dfrac{AC}{BC}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{20\sqrt{2+\sqrt{3}}}{BC}\Rightarrow BC=\dfrac{40\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+1}cm$.

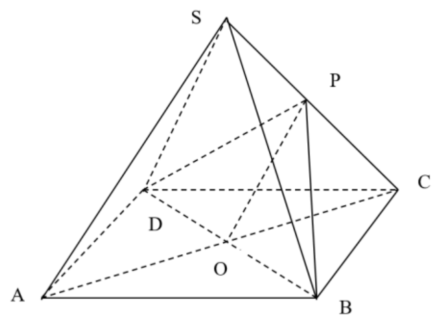
Pentru $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ se folosește formula $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$. În cazul nostru, $a^2-b=2^2-3=1$ și obținem că $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$. Atunci, $BC=40cm$. AB se află ușor din triunghiul dreptunghic ABC, $AB=10\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$. $A_{ABC}=\dfrac{AB\cdot AC}{2}=200cm^2$.

Din $\dfrac{A_{A^IB^IC^I}}{A_{ABC}}=\left(\dfrac{VO^I}{VO}\right)^2\Rightarrow\dfrac{A_{A^IB^IC^I}}{200}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\Rightarrow A_{A^IB^IC^I}=\dfrac{200}{9}cm^2$. $V=\dfrac{h}{3}\cdot\left(A_B+A_b+A_B\cdot A_b\right)\Rightarrow V=\dfrac{52000}{9}cm^3$

G:1373. În piramida patrulateră SABCD, având toate muchiile congruente, se face o secțiune cu planul care conține dreapta BD și este paralel cu muchia SA. Știind că aria acestei secțiuni este $9\sqrt{2}$ cm^2, să se afle suma tuturor muchiilor piramidei.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

Rezolvare: Notăm cu x muchia piramidei și cu P mijlocul muchiei SC. Arătăm că secțiunea în cauză este triunghiul PDB. OP este linie mijlocie în triunghiul SAC, deci planul (PDB) este paralel cu SA. Triunghiul PDB fiind isoscel (PD=PB= $\frac{SC\sqrt{3}}{2}$), mediana OP este și înălțime. Avem OP=$\frac{SA}{2}=\frac{x}{2}$, iar BD=$x\sqrt{2}$, iar BD=$x\sqrt{2}$. Aia secțiunii are expresia $\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot x\sqrt{2}=\frac{x^2\sqrt{2}}{4}$. Din $\frac{x^2\sqrt{2}}{4}$=$9\sqrt{2}$ se deduce x=6. Suma tuturor muchiilor este 8·6=48 (cm).



G:1374. Rezolvați ecuația $\left(x+1961\right)^3+\left(x-1986\right)^3+\left(-2x+25\right)^3=0,\ x\in\mathbb{R}.$

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Se folosește formula $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\cdot(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$ pentru $a=x+1961,\ b=x-1986,\ c=-2x+25$. Cum a+b+c=0 rezultă $a^3+b^3+c^3-3abc=0\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$ adică $\left(x+1961\right)\cdot\left(x-1986\right)\cdot\left(-2x+25\right)=0\Rightarrow x\in\left\{-1961;\ 12,5;\ 1986\right\}$.

G:1375. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\left[x-29\right]+\left|x-29\right|+\left(x-29\right)=6$, **unde** $\left[x\right]$ **reprezintă partea întreagă a numărului real x.**

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Se explicitează modulul $\left|x-29\right|=\begin{cases}x-29, & x\geq 29\\ -x+29, & x\ \langle 29\end{cases}$.

Pentru $x\langle 29$ ecuația devine $\left[x-29\right]=6\Rightarrow x\in\left[35;36\right)$.

Pentru $x\geq 29\Rightarrow\left[x-29\right]=64-2x=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{-k+64}{2}$. Rezultă,

$k\leq\frac{-k+6}{2}\langle k+1\Rightarrow k\in\left(\frac{4}{3};2\right]\Rightarrow k=2\Rightarrow x=31.$

G:1376. Rezolvați ecuația $\frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{x-8}}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x-8}}=\frac{1}{4}$.

Nicolae Ivășchescu, Canada

Rezolvare: Punem condițiile de existență și obținem $x\in\left[8;\infty\right)$. După raționalizarea numitorului fracției date se obține: $x-\sqrt{x^2-64}=2\Leftrightarrow x-2=\sqrt{x^2-64}\left|()^2\right.\Rightarrow x=17.\quad S=\left\{17\right\}$.

Altfel, se pot folosi notațiile $\sqrt{x+8}=a$ și $\sqrt{x-8}=b$ iar ecuația dată devine $\frac{a-b}{a+b}=\frac{1}{4}$. Folosind proporții derivate adică adunăm numărătorul la numitor obținem: $\frac{a-b}{2a}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow 5a-5b=2a\Leftrightarrow 3a=5b\left|()^2\right.\Rightarrow$ $9a^2=25b^2$. După înlocuirea lui a și b cu radicalii respectivi se obține $9(x+8)=25(x-8)\Rightarrow x=17$.

$\boxed{\text{G:1377}}$. Fie $a,b,c \in \mathbb{N}^*$. Dacă $\dfrac{a\sqrt{7}+b}{b\sqrt{7}+c} \in \mathbb{Q}$ să se arate că $a \cdot c$ este pătrat perfect. **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare:

$$\frac{a\sqrt{7}+b}{b\sqrt{7}+c}=\frac{(a\sqrt{7}+b)\cdot(c-b\sqrt{7})}{(b\sqrt{7}+c)\cdot\left(c-b\sqrt{7}\right)}=\frac{bc-7ab+(ac-b^2)\cdot\sqrt{7}}{c^2-7b^2}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow\Leftrightarrow ac-b^2=0\Rightarrow a\cdot c=b^2.$$

$\boxed{\text{G:1378}}$. **Se consideră** $a=\sqrt{n^2+1},\ n\in\mathbb{N}.$

a) Să se calculeze partea întreagă a lui a;

b) Să se calculeze $\left[\sqrt{2024^2+1}\right]+\left[\sqrt{2024^4+1}\right]+\left[\sqrt{2024^6+1}\right]+......+\left[\sqrt{2024^{2024}+1}\right]$**, unde**

$[x]$ **reprezintă partea întreagă a lui x.** **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: a) $n^2 \langle\ n^2+1 \ \langle\ (n+1)^2 \Rightarrow n\langle\sqrt{n^2+1}\langle n+1$ atunci, $\left[\sqrt{n^2+1}\right]=n$;

b) din a) obținem că suma cerută este egală cu $2024+2024^2+2024^3+.....+2024^{1012}$ și se calculează după metoda. $S=x+x^2+x^3+...+x^n\,\big|\cdot x\Rightarrow\ x\cdot S=x^2+x^3+x^4+...+x^n$. Se scad cele două relații și obținem:

$S=x+x^2+x^3+...+x^n=x\cdot\dfrac{x^n-1}{x-1}=\dfrac{x^{n+1}-x}{x-1}$. În cazul sumei cerute se obține $\dfrac{2024^{1013}-2024}{2023}$.

$\boxed{\text{G:1379}}$. **Arătați că există numere naturale x, pentru care numărul 45x -54 , este cub perfect.**
Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Trebuie să găsim x și y numere naturale astfel încât $45x-54=y^3$ (*). Se impun condițiile $x\ge 2$ și $y\rangle 3$. Din $45x-55=y^3-1\Leftrightarrow 5(9x-11)=(y-1)(y^2+y+1)$ obținem pentru $y-1=5$ următoarea soluție: $y=6\in\mathbb{N}\Rightarrow 45x=270\Rightarrow x=6\in\mathbb{N}$.

Mai există și alte soluții naturale ale ecuației $(*)$? Răspunsul este da. Scriem ecuația sub forma: $9(5x-6)=y^3\Rightarrow y^3\,\vdots\,9\Rightarrow y\,\vdots\,3\Rightarrow y=3k,\ k\in\mathbb{N}^*$.

Prin înlocuire în (*) obținem: $9(5x-6)=27k^3\Rightarrow 5x-6=3k^3\Rightarrow x\,\vdots\,3\Rightarrow x=3l,\ l\in\mathbb{N}$. Mai departe găsim $15l-6=3k^3\Rightarrow 5l-2=k^3\Rightarrow k^3-8=5l-10\Rightarrow\ (k-2)(k^2+2k+4)=5(l-2)$. Pentru k-2=5 se obține k = 7, atunci se impune $l-2=k^2+2k+4\Rightarrow l=69$. Atunci, x = 3.l = 207 iar y= 3.k = 21 soluții care verifică ecuația (*).

$\boxed{\text{G:1380}}$. **Dacă** $a\ge 0,\ x,y,z\rangle 0$ **astfel încât** $x+y+z=3$ **să se arate că** $\dfrac{x+a}{y+z}+\dfrac{x+a}{y+z}+\dfrac{x+a}{y+z}\ge\dfrac{3a+3}{2}$**.**

Când are loc egalitatea? **Gheorghe Ghiță**, Buzău

Rezolvare: Se aplică inegalitatea $\dfrac{x+a}{y+z}+\dfrac{1}{4}\cdot(x+a)\cdot(y+z)\ge x+a$ care adunată cu celelalte două analoage

avem: $\displaystyle\sum_{cyc}\frac{x+a}{y+z}\ge\sum_{cyc}x+\sum_{cyc}a-\frac{1}{4}\cdot\sum_{cyc}\ (x+a)\cdot(y+z)=3+3a-\frac{1}{4}\sum_{cyc}\left(xy+xz+ay+az\right)=$

$$=3+3a-\frac{1}{4}\left(2\sum xy+2a\sum x\right)=3+3a-\frac{1}{2}\sum xy-\frac{3a}{2}=\frac{3a+6}{2}-\frac{1}{2}\sum xy\ge\frac{3a+6}{2}-\frac{3}{2}=\frac{3a+3}{2}.$$

S-au folosit $\sum x=3$ și $\left(\sum x\right)^2\ge 3\sum xy$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă y+z=z+x= x+y =2 adică x=y=z=1.

Altfel, se folosește inegalitatea lui Nesbitt: $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}\ge\dfrac{3}{2}$ iar cu inegalitatea lui Bergstróm

obținem: $\dfrac{a}{y+z}+\dfrac{a}{z+x}+\dfrac{a}{x+y}\ge\dfrac{9a}{2(x+y+z)}\ge\dfrac{3a}{2}$ cu egalitate dacă și numai dacă x = y = z = 1.

(soluție dată de dl . **Titu Zvonaru**).

G:1381. Folosind doar ecuații de gradul doi , să se rezolve ecuația:
$x^4+4x^3-2028x^2-28x+14147=0$. **Ionel Tudor-Călugăreni,** Giurgiu

Rezolvare:

Ecuația dată se mai poate scrie $x^4+4x^3-7x^2-2021x^2-4\cdot7x+7\cdot2021=0 \Leftrightarrow$
$\left(x^4-7x^2\right)+\left(4x^3-4\cdot7x\right)-2021x^2+7\cdot2021=0 \Leftrightarrow$
$\left(x^2-7\right)\left(x^2+4x-2021\right)=0 \Rightarrow x^2-7=0$ cu soluțiile $x\in\left\{\pm\sqrt{7}\right\}$ sau $x^2+4x-2021=0$ cu soluțiile $x\in\left\{-47,43\right\}$. Așadar, $S=\left\{-47;-\sqrt{7};\sqrt{7};43\right\}$.

▪ Clasa a IX-a

L:1176. Arătați că oricare ar fi $x,y,z\rangle0$ are loc inegalitatea
$3\left(x^2+y^2+z^2\right)+xyz+15 \rangle 3\left(xy+yz+zx\right)+3\left(x+y+z\right)$. eleva **Carina Maria Viespescu**, Craiova

Rezolvare:

Deoarece $(0;\infty)=(0;3)\cup[3;\infty)$ și pentru că avem trei numere, conform Principiului lui Dirichlet cel puțin două numere sunt mai mari sau egale cu 3 sau mai mici decât 3. Fie acestea x,y.

Atunci, $z(x-3)(y-3)\ge0 \Leftrightarrow xyz+9z\ge3xz+3yz$ (1).

Avem $3\left(x^2+y^2+z^2\right)\ge3\left(x+1\right)(y+1)\Leftrightarrow\frac{3}{2}\left[\left(x-y\right)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\right]\ge0$ cu egalitate când $x=y=1$. Deci, $3x^2+3y^2+6\ge3xy+3x+3y+3$ (2).

Dar $3\left(x^2+2^2\right)\ge3\cdot2\sqrt{z^2\cdot2^2}=12z$ (3) cu egalitate când z = 2.

Adunând relațiile (1), (2), (3) și deoarece nu putem avea egalitate simultan obținem cerința problemei.

L:1177. Fie $a,b,c\rangle$ 0 astfel încât a+ b+ c = 3. Arătați că $S=\sqrt{3a+bc}+\sqrt{3b+ac}+\sqrt{3c+ab}\le6$. În ce caz avem egalitate ? **Maria Gurgui, Mihaela Ciobănelu,** Craiova

Rezolvare:

$3a+bc=a(a+b+c)+bc=a^2+ab+ac+bc=(a+b)(a+c)$ și analoagele $3b+ac=(b+a)(b+c)$, $3c+ab=(c+a)(c+b)$. Atunci,

$S=\sqrt{3a+bc}+\sqrt{3b+ac}+\sqrt{3c+ab}=S=\sqrt{(a+b)(a+c)}+\sqrt{(b+a)(b+c)}+\sqrt{(c+a)(c+b)}\le$

$\le\frac{a+b+a+c}{2}+\frac{b+a+b+c}{2}+\frac{c+a+c+b}{2}=\frac{4(a+b+c)}{2}=2\cdot3=6$, cu egalitate pentru $a+b=a+c,\ b+a=b+c,\ c+a=c+b$ adică a = b = c = 1.

L:1178. Arătați că $\sqrt{a}+\sqrt{a+1}+\sqrt{a+2}+...+\sqrt{a+2024}\le2025\cdot\sqrt{a+1012},\ \forall a\in\mathbb{N}$.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare. Folosim Inegalitatea Cauchy- Buniakowsky-Schwarz:

$$\left(1\cdot\sqrt{a}+1\cdot\sqrt{a+1}+....+1\cdot\sqrt{a+2024}\right)^2\le\left(1^2+1^2+...+1^2\right)\cdot\left(\sqrt{a}^2+....+\sqrt{a+2024}^2\right)=$$

$$=2025\cdot\left(a+a+1+a+2+.....+a+2024\right)=2025\cdot\left(2025a+1+2+3+...+2024\right)=2025^2\cdot(a+1012)\Rightarrow$$

$$\sqrt{a}+\sqrt{a+1}+\sqrt{a+2}+...+\sqrt{a+2024}\le\sqrt{2025^2(a+1012)},\ \forall a\in\mathbb{N}.$$

L:1179. Să se demonstreze că $\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k+1\right)\cdot\left[\frac{k^{p+1}}{k^p+k^{p-1}+...+k+1}\right]=\frac{n(n-1)(n^2+3n+4)}{4}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x, iar $p\in\mathbb{N}^*$. **Mihaly Bencze**, Brașov

Rezolvare:

Se arată că $k-1 < \dfrac{k^{p+1}}{k^p+k^{p-1}+\ldots+k+1} < k \Rightarrow \left[\dfrac{k^{p+1}}{k^p+k^{p-1}+\ldots+k+1}\right]=k-1\Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k+1\right)\cdot\left[\frac{k^{p+1}}{k^p+k^{p-1}+\ldots+k+1}\right]=\sum_{k=1}^{n}(k^3-1)=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-n=\frac{n(n-1)(n^2+3n+4)}{4}.$$

L:1180. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:
$\left\{x^3+x^2+x+1\right\}+\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=x^3+\left[\sqrt{4n+2}\right]$, **unde** $n\in\mathbb{N}$ **și** $\{x\}$ **este partea fracționară a numărului real** x **iar** $[x]$ **este partea întreagă a numărului real x.** **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: Se arată mai întâi că $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$.

Din $4n+1 < \sqrt{n}+\sqrt{n+1} < 4n+2 \Rightarrow \sqrt{4n+1} < \sqrt{n}+\sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$

$\Rightarrow\left[\sqrt{4n+1}\right] < \left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right] < \left[\sqrt{4n+2}\right]$. Cum $\left[\sqrt{4n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right]$ rezultă

$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$. Atunci, ecuația dată devine: $\left\{x^3+x^2+x+1\right\}=x^3$. (*)

De aici se impune condiția necesară $0\le x^3 < 1 \Leftrightarrow 0\le x < 1\Rightarrow$ ecuația (*) devine

$\Leftrightarrow x^2+x=n$, unde $n\in\mathbb{Z}$ și $0\le x<1$.

Rădăcinile reale pozitive și subunitare ale ecuației: $x^2+x-n=0$ sunt $x=\dfrac{-1+\sqrt{1+4n}}{2}$, și din condiția

$0\le x<1$ avem $0\le n\le 1$ iar $x\in\left\{0,\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$.

L:1181. Să se arate că dacă $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ **atunci cel puțin una din ecuațiile** $ax^2-2bx+c=0$, $bx^2-2cx+a=0$, $cx^2-2ax+b=0$ **are soluții reale.** **Mihaly Bencze**, Brașov

Rezolvare: Presupunem că niciuna din ecuații nu are soluții reale, atunci discriminantul fiecărei ecuații este negativ, adică $\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3\le 0$.

Dar $\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3=\left(4b^2-4ac\right)+\left(4c^2-4ba\right)+\left(4a^2-4cb\right)=$

$=4\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\right)=2\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)\ge 0$, contradicție, deci cel puțin o ecuație are soluții reale.

L:1182. Rezolvați ecuația în $\mathbb{R}$ **:** $x^4-6x^3+6x^2+9x+2=0$**.**
Mirea Mihaela Mioara, Stoian Daniela, Craiova

Rezolvare: Ecuația dată devine $x^4-6x^3+9x^2-3x^2+9x+2=0\Leftrightarrow(x^2-3x)^2-3(x^2-3x)+2=0$.

Fie $y=x^2-3x\Rightarrow y^2-3y+2=0\Rightarrow y\in\{1;2\}$. Atunci, $x^2-3x-1=0\Rightarrow x\in\left\{\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}\right\}$ și

$x^2-3x-2=0\Rightarrow x\in\left\{\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$.

L:1183. Să se arate că într-un triunghi ABC, cu notațiile cunoscute are loc inegalitatea

$$\frac{1}{\left(\sqrt{h_a}+\sqrt{h_b}\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{h_b}+\sqrt{h_c}\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{h_c}+\sqrt{h_a}\right)^2}\le\frac{1}{4tg\frac{A}{2}(p-a)}.$$

Florin Rotaru, Focșani

Rezolvare: Evident $\left(\sqrt{h_a}+\sqrt{h_b}\right)^2 \le 2\left(h_a+h_b\right)$ și cum $\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}\right)\cdot\left(h_a+h_b\right)\ge 4$ avem că

$\frac{1}{\left(\sqrt{h_a}+\sqrt{h_b}\right)^2} \le \frac{1}{8}\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}\right)$ și inegalitățile similare. Rezultă

$$\frac{1}{\left(\sqrt{h_a}+\sqrt{h_b}\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{h_b}+\sqrt{h_c}\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{h_c}+\sqrt{h_a}\right)^2} \le \frac{1}{8}\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_a}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$$

și cum $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$ și $r=tg\frac{A}{2}\cdot\left(p-a\right)$, rezultă relația din enunțul problemei.

L:1184. Să se arate că în orice triunghi ABC avem inegalitatea : $S \le \frac{1}{8}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$, **notațiile fiind cele cunoscute în triunghi.** **Radu Diaconu**, Sibiu

Rezolvare: Avem succesiv, $S=\frac{bc\cdot\sin A}{2}\le\frac{bc}{2}\le\frac{1}{2}\cdot\max(ab,bc,ca)\le\frac{1}{8}\cdot\max\left[(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2\right]$

L:1185. Să se arate că $\frac{1^k+2^k+3^k+...+n^k}{n}\ge\left(\frac{n+1}{2}\right)^k$, $n,k\in\mathbb{N}^*$. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

Rezolvare: Demonstrăm prin inducție matematică:

P(n): $\frac{1^k+2^k+3^k+...+n^k}{n}\ge\left(\frac{n+1}{2}\right)^k$, $n,k\in\mathbb{N}^*$; P(1): $1^k\ge\left(\frac{1+1}{2}\right)^k\Leftrightarrow 1\ge 1$;

Considerăm că P(k) este adevărată și să demonstrăm că P(k+1) este adevărată.

P(k+1): $1^k+2^k+3^k+.....+n^k+(n+1)^k\ge n\cdot\left(\frac{n+1}{2}\right)^k+(n+1)^k=(n+1)^k\cdot\left(\frac{n}{2^k}+1\right)$.

Mai trebuie demonstrat prin inducție după k că $(n+1)^k\cdot\left(\frac{n}{2^k}+1\right)\ge(n+1)\cdot\left(\frac{n+2}{2}\right)^k\Leftrightarrow$

P(k): $(n+1)^{k-1}\cdot\left(n+2^k\right)\ge(n+2)^k, \forall n.k\ge 1$.

P(1): $(n+1)^0\cdot\left(n+2^1\right)\ge(n+2)^1$, adevărată.

Presupunem că P(k) este adevărată și să demonstrăm că P(k+1) este adevărată.

P(k+1): $(n+1)^k\cdot\left(n+2^{k+1}\right)=(n+1)^k\cdot\left(n+2^k+2^k\right)=(n+1)^k\cdot\left(n+2^k\right)+2^k\cdot\left(n+1\right)^k=$

$=(n+1)^{k-1}\cdot\left(n+2^k\right)(n+1)+2^k\cdot\left(n+1\right)^k\ge(n+2)^k\cdot(n+1)+2^k\cdot\left(n+1\right)^k\ge(n+2)^{k+1}\Leftrightarrow$

$2^k(n+1)^k\ge(n+2)^k\Leftrightarrow 2n+2\ge n+2$, adevărat.

Notă. Pentru $k=4$ rezultă problema L:596,Sclipirea minții, nr. 21/2018 de Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu.

L:1186. Într-un patrulater bicentric $ABCD$**de laturi** a,b,c,d **și arie** S **avem inegalitatea:** $S^2\le R\sqrt{2}\cdot\max(abc,acd,abd,bcd)$, **unde** R **este raza cercului circumscris patrulaterului.**

Emil C. Popa, Sibiu

Rezolvare: Se știe că $S^2=abcd$ și cum $a+b+c+d=2p$ (p semiperimetru), rezultă că cel puțin una dintre laturi este mai mică sau cel mult egală cu $\frac{p}{2}$. Fie $a\le\frac{p}{2}$ și avem:

$S^2\le\frac{p}{2}\cdot bcd\le\frac{p}{2}\cdot\max(abc,abd,acd,bcd)\le R\sqrt{2}\cdot\max(abc,abd,acd,bcd)$, unde am folosit inegalitatea de tip Mitrinovic $p\le 2\sqrt{2}R$.

Observație: Dacă $ABCD$ este pătrat, avem egalitate.

▪ Clasa a X-a

L:1187. Fie a,b,c trei numere naturale astfel încât $a^3+b^3+c^3$ se divide cu 7.
a) Dacă $a+b+c$ nu se divide cu 7, să se arate că
$\sqrt{(a-b)^2\cdot(a-c)^2+(b-c)^2\cdot(b-a)^2+(c-a)^2\cdot(c-b)^2}$ este număr natural divizibil cu 7.
b) Dacă a,b,c sunt numere prime, să se arate că cel puţin unul dintre ele este egal cu 7.

Florin Rotaru, Focşani

Rezolvare:
a) Dacă $a^3+b^3+c^3$ se divide cu 7 atunci abc se divide cu 7. Presupunem că niciun număr a sau b sau c nu se divide cu 7. Deoarece $a^3,b^3,c^3\in\{7k\pm1,k\in\mathbb{N}\}$ avem $a^3+b^3+c^3\in\mathbb{N}\setminus\{7k,\ k\in\mathbb{N}\}$ absurd, deci presupunerea este falsă, deci cel puţin unul dintre numerele a, b, c este divizibil cu 7, deci abc şi 3abc se divid cu 7 şi având în vedere că $a^3+b^3+c^3-3abc$ se divide cu 7 dar $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ rezultă că $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ se divide cu 7. Are loc identitatea $(a-b)^2\cdot(a-c)^2+(b-c)^2\cdot(b-a)^2+(c-a)^2\cdot(c-b)^2=(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)^2$, de aici rezultând cerinţa problemei.
b) Presupunem prin absurd că niciunul nu se divide cu 7, atunci $a^6-1,\ b^6-1,\ c^6-1$ se divid cu 7 adică $a^3-1\equiv0(\bmod 7)$ sau $a^3+1\equiv0(\bmod 7)$, analog pentru b şi c. Rezultă că $a^3+b^3+c^3$ este congruent modulo 7 cu unul din numerele 1, -1, 3, -3 care nu se divid cu 7 ceea ce contrazice ipoteza că $a^3+b^3+c^3$ se divide cu 7. Aşadar, există cel puţin unul din ele egal cu 7.
Exemplu: 2, 3, 7 numere prime pentru care $2^3+3^3+7^3$ divizibil cu 7 dar 2+3+7 nu se divide cu 7.

L:1188. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$. Să se arate că
$\sqrt[3]{(1+a^2b^2+c^2)\cdot(1+b^2c^2+a^2)\cdot(1+c^2a^2+b^2)}\geq ab+bc+ca$. **Florin Rotaru**, Focşani

Rezolvare:
Cum $1+a^2\geq 2a\Rightarrow 1+b^2c^2+a^2\geq a+a+b^2c^2$ şi analog pentru celelalte expresii. După care le înmulţim: $(1+a^2b^2+c^2)\cdot(1+b^2c^2+a^2)\cdot(1+c^2a^2+b^2)\geq(a^2b^2+c+c)\cdot(a+a+b^2c^2)\cdot(b+c^2a^2+b)\geq$ $\geq(ab+bc+ca)^3$, conform inegalităţii lui Holder, care conduce la cerinţa din enunţ. Egalitatea există atunci când a=b=c=1.

L:1189. Găsiţi $z\in\mathbb{C}$ astfel încât $|z+1|=1$ şi $|z|=|z+2i|$. **Cristian Schneider**, Craiova

Rezolvare: Fie $z=a+ib,\ a,b\in\mathbb{R}$. Atunci, $(a+1)^2+b^2=1$ şi $a^2+b^2=a^2+(b+2)^2$. Se obţine, $b=-1\Rightarrow a=-1-i\Rightarrow z=-1-i$.

L:1190. Fie $z\in\mathbb{C}$ astfel încât $|z|=1$. Să se arate că $|z^{2012}+1|+|z^{2013}+1|+|z^{2025}+1|\geq 2$.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: Folosim proprietatea $|z_1|+|z_2|\geq|z_1-z_2|$ cu egalitate $\Leftrightarrow z_1=z_2$.

$$|z^{2025}+1|+|z^{2012}+1|\ \rangle\ |z^{2025}+1-z^{2012}-1|=|z^{2012}|\cdot|z^{2013}-1|=|z|^{2012}\cdot|z^{2013}-1|=|z^{2013}-1|$$

$$|z^{2013}-1|+|z^{2013}+1|\ \rangle\ |z^{2013}-1-z^{2013}-1|=|-2|=2,\text{ c.c.t.d.}$$

L:1191. Fie $a\in\mathbb{C}$ astfel încât $|a|=1$. Să se arate că $|1+a|+|1-a|+2\cdot|1+a^2|+|1+a^3|\geq 2+\sqrt{2}$.

Mihaly Bencze, Braşov

Rezolvare: Din $|x\pm y|\leq|x|+|y|,\ \forall x,y\in\mathbb{C}$, avem

(1) $2=\left|1+a+a^3+1-a(1+a^2)\right|\le\left|1+a\right|+\left|1+a^3\right|+\left|a\right|\cdot\left|1+a^2\right|=\left|1+a\right|+\left|1+a^3\right|+\left|1+a^2\right|$, deoarece $\left|a\right|=1$. În continuare se arată că $\sqrt{2}\le\left|1-a\right|+\left|1+a^2\right|$. **(2)**

Pentru aceasta, fie $a=\cos 2x+i\cdot\sin 2x\Rightarrow \left|1-a\right|=\sqrt{(1-\cos 2x)^2+\sin^2 2x}=\sqrt{2-2\cos 2x}=2\cdot\left|\sin x\right|$,

$\left|1+a^2\right|=\sqrt{(1+\cos 4x)^2+\sin^2 4x}=\sqrt{2+2\cos 4x}=2\cdot\left|\cos 2x\right|=2\cdot\left|1-2\sin^2 x\right|$.

Rezultă $\left|1-a\right|+\left|1+a^2\right|=2\left|\sin x\right|+2\left|1-2\sin^2 x\right|\ge\sqrt{2}\Leftrightarrow \left|t\right|+\left|1-2t^2\right|\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\forall t\in[-1;1]$ adevărată

deoarece funcția $f(t)=\left|t\right|+\left|1-2t^2\right|$ are minimul $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\forall t\in[-1;1]$.

Așadar, din **(1) + (2)** rezultă $\left|1+a\right|+\left|1-a\right|+2\cdot\left|1+a^2\right|+\left|1+a^3\right|\ge 2+\sqrt{2}$.

$\boxed{\textbf{L:1192}}$. **Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $2^{2x\cdot\arcsin x}+2^{2x\cdot\arccos x}=\sqrt{2^{2+\pi x}}$.**

Eugenia Turcu, Alina Tigae, Craiova

Rezolvare: Evident, $x\in[-1;1]$. Cum $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$, $\forall x\in[-1;1]$, ecuația se scrie:

$$4^{x\arcsin x}+4^{x(\frac{\pi}{2}-\arcsin x)}=2^{\frac{2+\pi x}{2}}\Leftrightarrow 4^{x\arcsin x}+\frac{4^{x\cdot\frac{\pi}{2}}}{4^{x\cdot\arcsin x}}-2^{\frac{2+\pi x}{2}}=0\Rightarrow$$

$$\left(4^{x\arcsin x}\right)^2-2^{\frac{2+\pi x}{2}}\cdot 4^{x\arcsin x}+4^{\frac{\pi}{2}x}=0\Rightarrow\left(4^{x\arcsin x}-2^{\frac{\pi x}{2}}\right)^2=0\Rightarrow x\arcsin x=\frac{\pi x}{4}\Rightarrow x=0 \text{ și}$$

$$\arcsin x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\boxed{\textbf{L:1193}}$. **Aflați soluțiile reale ale ecuației $x^2+(x-5)\log_2 x=6x-5$.**

Petrică Aurelia , Liță Alexandru, Craiova

Rezolvare: $x^2-6x+5+(x-5)\log_2 x=0\Leftrightarrow(x-1)(x-5)+(x-5)\log_2 x=0$ și de aici $(x-5)(x-1+\log_2 x)=0$ cu soluțiile $x_1=5$ și $x+\log_2 x-1=0(1)$.

Cum funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\log_2 x$ este strict crescătoare și (1) se scrie $f(x)=f(1)\Rightarrow x_2=1$.

$\boxed{\textbf{L:1194}}$. **Fie $m,n\in\mathbb{N}^*$, $m\ge 2$. Să se calculeze: $\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot m^k\cdot C_n^k}{C_{m\cdot n-1}^k}=\frac{m\cdot n}{m-1}$.**

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: **Fie** $x_k=\frac{m^kC_n^k}{C_{mn}^k}$. $x_{k+1}-x_k=\frac{m^{k+1}n!(k+1)!(mn-k-1)!}{(k+1)!(n-k-1)!(mn)!}-\frac{m^kn!\cdot k!(mn-k)!}{k!(n-k)!(mn)!}=$

$$=\frac{m^kn!\cdot k!(mn-k-1)!}{(n-k-1)!(mn)!}\left(m-\frac{mn-k}{n-k}\right)=\frac{1-m}{mn}\cdot\frac{km^kC_n^k}{C_{mn-1}^k}\Rightarrow$$

$\frac{km^kC_n^k}{C_{mn-1}^k}=\frac{mn}{1-m}\cdot(x_{k+1}-x_k)$, $\forall k=\overline{1;n}$. Fie $x_{n+1}=0\Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{km^kC_n^k}{C_{mn-1}^k}=\frac{mn}{1-m}\cdot\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)=\frac{mn}{1-m}\cdot(x_{n+1}-x_1)=\frac{mn}{1-m}\cdot(0-1)=\frac{mn}{m-1}$$

Pentru $m=2\Rightarrow$problema 4314 Crux Mathematicorum vol.44, nr. 2/2018 de *Michel Bataille*.

L:1195. Într-un triunghi de laturi a,b,c, avem inegalitatea: $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab}>2\cdot e^{\max(\ln a,\ln b,\ln c)}$

Emil C. Popa, Sibiu

Rezolvare: Din $a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$, rezultă că:

$a+b+c>2a$, $a+b+c>2b$, $a+b+c>2c$.

Deci: $\ln(a+b+c)>\ln 2+\ln a$, $\ln(a+b+c)>\ln 2+\ln b$, $\ln(a+b+c)>\ln 2+\ln c$,

de unde $\ln(a+b+c)>\ln 2+\max(\ln a,\ln b,\ln c)\Rightarrow a+b+c>2\cdot e^{\max(\ln a,\ln b,\ln c)}$.

Acum: $a^4+b^4+c^4\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq abc\cdot(a+b+c)$.

Așa că: $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab}>2\cdot e^{\max(\ln a,\ln b,\ln c)}$.

▪ Clasa a XI-a

L:1196. Fie $A=\begin{pmatrix} a & b\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2+5I_2=4A$. Demonstrați că există $c,d\in\mathbb{Z}$ astfel încât $A^{n+1}+c\cdot A^n+d\cdot A^{n-1}=O_2$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ și că $A^n\neq I_2$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Mihaly Bencze, Brașov

Rezolvare: Din $A^2+5I_2=4A$ obținem

$$\begin{pmatrix} a^2+2b & ab+3b\\ 2a+6 & 2b+9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4a & 4b\\ 8 & 12\end{pmatrix}\Rightarrow a=1,\ b=-1\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}.$$

$A^2-4A+5I_2=O_2\,|\cdot A\Rightarrow A^3-4A^2+5A=O_2$. Prin inducție se arată că

(*) $A^{n+1}-4A^n+5A^{n-1}=O_2\,|\cdot A\Rightarrow A^{n+2}-4A^{n+1}+5A^n=O_2$ adică există $c=-4;\ d=5$.

Dacă $A^n=I_2$, prin înlocuirea în (*) obținem $I_2-4I_2+5I_2=0\Rightarrow I_2=O_2$, fals, deci $A^n\neq I_2$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

L:1197. Fie $A\in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietățile $\det(A)=3$ și $\det(A^4+2A^2+9I_2)=0$. Să se afle urma matricei A, Tr A.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: Folosim Relația Hamilton – Cayley: $A^2-(TrA)\cdot A+(\det A)\cdot I_2=O_2$. Notăm Tr A = t.

$A^2=t\cdot A-3I_2\,|()^2\Rightarrow A^4=t^2A^2-6tA+9I_2\Rightarrow A^4+2A^2+9I_2=t^2A^2-6tA+9I_2+2\cdot(ta-3I_2)+9I_2\Rightarrow$

$A^4+2A^2+9I_2=t^2A^2-4(t\cdot A-3\cdot I_2)=(t^2-4)\cdot A^2\Rightarrow$

$\det(A^4+2A^2+9I_2)=(t^2-4)^2\cdot(\det A)^2=0\Rightarrow t^2-4=0\Rightarrow t=\pm2\Rightarrow TrA=\pm2$.

L:1198. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{(2-\sqrt{3})^n}+\frac{1}{(2-\sqrt[3]{3})^n}+...+\frac{1}{(2-\sqrt[n+1]{3})^n}}$.

Florin Rotaru, Focșani

Rezolvare: Din inegalitatea mediilor $\frac{n}{\frac{1}{x_1^n}+\frac{1}{x_2^n}+...+\frac{1}{x_n^n}}\leq x_1x_2.....x_n$ rezultă

$$\frac{n}{\frac{1}{(2-\sqrt{3})^n}+\frac{1}{(2-\sqrt[3]{3})^n}+\ldots+\frac{1}{(2-\sqrt[n+1]{3})^n}}\leq\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt[3]{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(2-\sqrt[n+1]{3}\right)$$

. Folosind inegalitatea mediilor avem $2 \langle \sqrt[k]{3}+\frac{1}{\sqrt[k]{3}}\Rightarrow 2-\sqrt[k]{3} \langle \frac{1}{\sqrt[k]{3}}$ și deci $\prod_{k=2}^{n+1}\left(2-\sqrt[k]{3}\right)\leq\prod_{k=2}^{n+1}\frac{1}{\sqrt[k]{3}}$ adică

$$0\langle\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt[3]{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(2-\sqrt[n+1]{3}\right)\langle\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{3}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}}$$

de unde rezultă că limita este 0.

$\boxed{\text{L:1199}}$. **Fie** $a=\lim_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt[3]{x^6-x^5+1}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{x}$. **Să se calculeze** $A=\sin a+\sin 2a+\sin 3a+\ldots+\sin 2025a$.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: $a=\lim_{x\to\infty}\frac{x^6-x^6+x^5-1}{x^4+x^2\cdot\sqrt[3]{x^6-x^5+1}+\left(\sqrt[3]{x^6-x^5+1}\right)^2}\cdot\sin\frac{\pi}{x}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-1}{x^4+x^4\cdot\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}}+x^4\cdot\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}\right)^2}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}\cdot\frac{x}{\pi}}=\frac{\pi}{3}.$$

$$A=\sin\frac{\pi}{3}+\sin 2\cdot\frac{\pi}{3}+\sin 3\cdot\frac{\pi}{3}+\ldots+\sin 2025\cdot\frac{\pi}{3}=337\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+0-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+0\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+0=\sqrt{3}$$

$\boxed{\text{L:1200}}$. **Fie** $a,b\rangle 0$ **. Să se arate că** $e^{\frac{a^2+b^2}{a+b}}+\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\geq e^{ab}$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{e^x-1}{x}\Rightarrow f^I(x)=\frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$, și

$g:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x\cdot(x-1)+1\Rightarrow g^I(x)=x\cdot e^x\rangle 0,\ \forall x\rangle 0.$ Rezultă că g (x) este crescătoare .

Atunci, $x\rangle 0\Rightarrow g(x)\geq\lim_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}}g(0)=0\Rightarrow f^I(x)\geq 0\Rightarrow$ f(x) este crescătoare.

Cum $\frac{a^2+b^2}{2}\geq ab\Leftrightarrow(a-b)^2\geq 0\Rightarrow\frac{e^{\frac{a^2+b^2}{2}}-1}{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{e^{ab}-1}{ab}\Leftrightarrow abe^{\frac{a^2+b^2}{2}}+\frac{1}{2}(a-b)^2\geq\frac{a^2+b^2}{2}e^{ab}\Leftrightarrow$

$$e^{\frac{a^2+b^2}{2}}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\geq\frac{a^2+b^2}{2ab}e^{ab}\overset{MA-MG}{\geq}\frac{2ab}{2ab}e^{ab}=e^{ab}\Rightarrow$$

$$e^{\frac{a^2+b^2}{2}}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\geq e^{ab}.$$

▪ Clasa a XII-a

$\boxed{\text{L:1201}}$. **Determinați toate grupurile finite $(G,\cdot)$ cu proprietatea că există trei elemente a,b,c distincte între ele și diferite de elementul neutru e, astfel încât submulțimea $G\setminus\{a,b,c\}$ să fie subgup al lui G.**

(în legătură cu problema S:L 24313) **Daniel Văcaru**, Pitești

Rezolvare: Să notăm $card\ G = n,\ n\in\mathbb{N}$. Din teorema lui Lagrange se știe că pentru orice subgrup

$H\subseteq G$, avem $card\ H \mid card\ G \Leftrightarrow \dfrac{card\ G}{card\ H}\in\mathbb{N}$. (1)

Deducem relația $\dfrac{n}{n-3}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow n-3\in D_3$. (2)

I. dacă **n-3 =1**, deducem n = 4. Orice grup cu 4 elemente este izomorf cu $(\mathbb{Z}_4;\oplus)$ sau cu grupul lui Klein.

În primul caz, dacă $G\simeq\mathbb{Z}_4\Rightarrow\{a;b;c\}=\{\bar1;\bar2;\bar3\}$. (3) și găsim $\mathbb{Z}_4\setminus\{\bar1;\bar2;\bar3\}=\{\bar0\}$

Dacă $G\simeq K$ unde $K=\{e;a;b;c\}$ (4)

cu proprietatea că $a^2=b^2=c^2=e$. (5)

atunci, evident, vom avea $K\setminus\{a;b;c\}=\{e\}$. (6)

II. Dacă **n-3 = 3**, atunci n=6.

În acest caz, grupul poate fi izomorf cu $G\simeq(\mathbb{Z}_6,\oplus)$ sau cu $G\simeq(S_3,\circ)$

Mulțimea $\{a;b;c\}$ este de fapt $\{\bar1;\bar3;\bar5\}$ și $\mathbb{Z}_6\setminus\{\bar1;\bar3;\bar5\}=\{\bar0;\bar2;\bar4\}$ care este un subgrup al lui $(\mathbb{Z}_6,\oplus)$.

Dacă grupul coincide cu $(S_3,\circ)$ deducem că $S_6=\{e;\sigma;\sigma^2;\tau;\sigma\tau;\sigma^2\tau\}$. (8)

cu proprietatea $\sigma^3=e;\ \sigma^2\tau=\tau\sigma$. (9)

Atunci, considerăm mulțimea a cărei complementară este subgrup mulțimea $\{\tau;\sigma\tau;\sigma^2\tau\}$ (10)

și găsim $S_6\setminus\{\tau;\sigma\tau;\sigma^2\tau\}=\{e;\sigma;\sigma^2\}$. (11)

$\boxed{\text{L:1202}}$. Fie $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\ax&1&0\\2x(x+1)&bx&1\end{pmatrix}\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $(G,\bullet)$ să fie grup abelian. **Mihaly Bencze**, Brașov

Rezolvare: Se arată ușor că $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1&0&0\\a(x+y)&1&0\\2x(x+1)+abxy+2y(y+1)&b(x+y)&1\end{pmatrix}$ dar

$A(x+y)=\begin{pmatrix}1&0&0\\a(x+y)&1&0\\2x(x+1)(x+y+1)&b(x+y)&1\end{pmatrix}$, legea internă este corect definită dacă și numai dacă

$A(x)\cdot A(y)=A(x+y)\Rightarrow 2x(x+1)+abxy+2y(y+1)=2(x+y)(x+y+1)\Rightarrow abxy=4xy\Rightarrow ab=4$.

Rezultă, $A(x)\cdot A(y)=A(y)\cdot A(x)=A(x+y)$ (comutativitatea),

$A(x)\cdot\big(A(y)\cdot A(z)\big)=\big(A(x)\cdot A(y)\big)\cdot A(z)=A(x+y+z)$ (asociativitatea),

$A(0)$ este elementul neutru, $A^{l}(x)=A(-x)$ este elementul simetrizabil.

$\boxed{\text{L:1203}}$. **Determinați toate funcțiile polinomiale cu coeficienți raționali, de grad minim, și toate funcțiile polinomiale cu coeficienți întregi astfel încât** $f(\sqrt[3]{2011}+\sqrt[3]{2011^2})=2011+\sqrt[3]{2011}$.

Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare :

Pasul 1. Notăm $x_0 = \sqrt[3]{2011}$.Vom arăta că dacă $\alpha,\beta,\gamma \in Q$, a.î. $\alpha x_0^2 + \beta x_0 + \gamma = 0$, atunci $\alpha = \beta = \gamma = 0$.Presupunem $\alpha \neq 0$.Deoarece x_0 este soluția ecuației $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, rezultă $x_0 = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, unde $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$.Se observă că $\sqrt{\Delta} \notin Q$, pentru că $x_0 \notin Q$.Din $x_0 = \dfrac{\beta \pm \sqrt{\Delta}}{-2\alpha}$, $x_0 = \sqrt[3]{2011}$, se obține $-2011 \cdot 8 \cdot \alpha^3 = \beta^3 + 3\beta\Delta \pm \sqrt{\Delta} \cdot (3\beta^2 + \Delta)$.Atunci, trebuie ca $3\beta^2 + \Delta = 0$.Deci, $\beta = \Delta = 0$ și obținem $\alpha = 0$, contradicție! Așadar, $\alpha = 0$ și mai departe din $\alpha x_0^2 + \beta x_0 + \gamma = 0$, rezultă $\beta = \gamma = 0$.□

Pasul 2. Vom arăta că $f(X) = \dfrac{1}{2010} \cdot X^2 - \dfrac{1}{2010} \cdot X + 2011 \cdot \dfrac{1004}{1005}$ este unicul polinom de grad minim care verifică ipoteza. Fie $f \in Q[X]$, astfel încât $f(x_0 + x_0^2) = x_0 + 2011$.

Dacă $gradf = 1$ atunci $f(X) = \alpha X + \beta$, $\alpha,\beta \in Q$ și avem $\alpha(x_0 + x_0^2) + \beta = x_0 + 2011 \Leftrightarrow \alpha x_0^2 + (\alpha - 1)x_0 + \beta - 2011 = 0$.Din Pasul 1, rezultă $\alpha = 0$ și $\alpha = 1$, imposibil! Dacă $gradf = 2$, atunci $f(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$, apoi din $f(x_0 + x_0^2) = x_0 + 2011$ și Pasul 1, rezultă sistemul: $\alpha + \beta = 0, 2011\alpha + \beta - 1 = 0, 4022\alpha + \gamma - 2011 = 0$, cu soluția unică $\alpha = \dfrac{1}{2010}, \beta = -\dfrac{1}{2010}, \gamma = 2011 \cdot \dfrac{1004}{1005}$.□

Pasul 3. Vom arăta că nu există polinoame cu coeficienți întregi care verifică relația dată.

Presupunem că $\exists f \in Z[X]$, $f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, a_i \in Z, n \geq 3$,a.î $f(x_0 + x_0^2) = x_0 + 2011$.

Avem $(x_0 + x_0^2)^3 = 2011 \cdot 2012 + 3 \cdot 2011(x_0 + x_0^2)$, de unde

$f(x_0 + x_0^2) = \sum_{i=0}^{2} a_i (x_0 + x_0^2)^i + (2011 \cdot 2012 + 3 \cdot 2011(x_0 + x_0^2)) \sum_{i=3}^{n} a_i (x_0 + x_0^2)^{i-3}$ .Așadar polinomul

$g(X) = \sum_{i=0}^{2} a_i X^i + (2011 \cdot 2012 + 3 \cdot 2011 \cdot X) \sum_{i=3}^{n} a_i X^{i-3}$ satisface

$g(x_0 + x_0^2) = f(x_0 + x_0^2) = x_0 + 2011$ și $g(X) \in Z[X]$.Avem $gradg = gradf - 2$.Aplicăm în continuare procedeul pentru polinomul g și ajungem în final la polinomul h, de grad cel mult 2, cu coeficienți întregi cu $h(x_0 + x_0^2) = x_0 + 2011$.Din pasul 2, rezultă

$h(X) = \dfrac{1}{2010} \cdot X^2 - \dfrac{1}{2010} \cdot X + 2011 \cdot \dfrac{1004}{1005}$, care are coeficienți raționali, contradicție!

L:1204. Fie $f:[a;b] \to \mathbb{R}$, $0 \langle a \langle b$ o funcție bijectivă, continuă astfel încât $f(a) = b$, $f(b) = a$ și $\int_a^b f(x)dx = 0$. Să se arate că $\int_a^b f^{-1}(x)dx = 0$. **Florin Rotaru**, Focșani

Rezolvare: Conform formulei Young $\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx = bf(b) - af(a) = ba - ab = 0 \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)dx+\int_b^a f^{-1}(x)dx=0\Rightarrow \int_a^b f(x)dx-\int_a^b f^{-1}(x)dx=0\Rightarrow -\int_a^b f^{-1}(x)dx=0\Rightarrow\int_a^b f^{-1}(x)dx=0.$$

L:1205. Să se calculeze integrala: $\int \frac{\cos x+x\cdot\sin x}{(x+k\cos x)(x+\cos x)}dx,\ x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right),\ k\neq 1$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare:

Deoarece $(1-\sin x)\cdot(x+k\cos x)-(x+\cos x)(1-k\sin x)=(k-1)(\cos x+x\sin x)$

Avem, $\int\frac{\cos x+x\sin x}{(x+k\cos x)(x+\cos x)}dx=\frac{1}{k-1}\int\frac{(1-\sin x)(x+k\cos x)-(x+\cos x)(1-k\sin x)}{(x+k\cos x)(x+\cos x)}dx=$

$$=\frac{1}{k-1}\int\frac{(1-\sin x)}{(x+\cos x)}dx-\frac{1}{k-1}\int\frac{(1-k\sin x)}{(x+k\cos x)}dx=$$

$$=\frac{1}{k-1}\ln(x+\cos x)-\frac{1}{k-1}\ln(x+k\cos x)=\frac{1}{k-1}\ln\frac{x+\cos x}{x+k\cos x}+C$$

L:1206. Dacă $f:[a,b]\to R$ este derivabilă, atunci demonstrați că $\exists\alpha\in(a,b)$ astfel încât:

$$\int_a^b f(x)dx=f'((\alpha-a)(b-\alpha))\ \textbf{sau}\ \alpha=\frac{a+b}{2}.$$

Mihaly Bencze, Brașov și **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Considerăm $g(x)=(x-a)(b-x)\int_a^b f(t)dt-f((x-a)(b-x))$, care este continuă și derivabilă cu $g(a)=g(b)$. Cu teorema lui Rolle $\exists\alpha\in(a,b)$ astfel încât astfel încât: $g'(\alpha)=0$;

$$g'(\alpha)=(a+b-2\alpha)\left(\int_a^b f(t)dt-f'((\alpha-a)(b-\alpha))\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\int_a^b f(x)dx=f'((\alpha-a)(b-\alpha))\ \text{sau}\ \alpha=\frac{a+b}{2}.$$

L:1207. Se definește integrala având limita superioară infinită prin egalitatea:

$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$. **Să se calculeze integrala:** $\int_0^\infty\frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{(x^2+1)(x^2-x+1)}dx$.

Vasile Mircea Popa, Sibiu

Rezolvare: Notăm: $I=\int_0^\infty\frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{(x^2+1)(x^2-x+1)}dx$; $J=\int_0^\infty\frac{x\,\mathrm{arcctg}\,x}{(x^2+1)(x^2-x+1)}dx$.

Avem: $I+J=\int_0^\infty\frac{x(\mathrm{arctg}\,x+\mathrm{arcctg}\,x)}{(x^2+1)(x^2-x+1)}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty\frac{x}{(x^2+1)(x^2-x+1)}dx$

Pentru calculul integralei definite de mai sus vom folosi o primitivă a funcției de integrat și formula Leibniz-Newton adaptată situației din problema noastră (limita superioară din integrala definită tinde la infinit).

Pentru calculul familiei de primitive vom descompune fracția ce reprezintă funcția de integrat în fracții simple.

$$\frac{x}{(x^2+1)(x^2-x+1)}=-\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2-x+1}$$

Relația pentru familia de primitive ale funcției $f(x)=\dfrac{x}{(x^2+1)(x^2-x+1)}$, $x\in[0,\infty)$ este:

$$\int\frac{x}{(x^2+1)(x^2-x+1)}dx=-\operatorname{arctg}x+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C=F(x)+C$$

unde C este o constantă arbitrară. Am folosit tabelul primitivelor imediate. Relația se poate evident verifica prin derivare. Cititorul este invitat să efectueze aceste calcule simple.

Rezultă $I+J=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^\infty\frac{x}{(x^2+1)(x^2-x+1)}dx=\frac{\pi}{2}\left(\lim_{x\to\infty}F(x)-F(0)\right)$

Dar $\displaystyle\lim_{x\to\infty}F(x)=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$; $F(0)=-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}$ rezultă: $I+J=\dfrac{\pi^2}{36}\left(8\sqrt{3}-9\right)$ (1)

În integrala J facem schimbarea de variabilă $x=\dfrac{1}{t}$ și obținem:

$$J=-\int_\infty^0\frac{\frac{1}{t}\operatorname{arcctg}\frac{1}{t}}{\left(\frac{1}{t^2}+1\right)\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+1\right)}\frac{1}{t^2}dt=\int_0^\infty\frac{t\operatorname{arctg}t}{(1+t^2)(1-t+t^2)}dt=I \qquad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă $I=\dfrac{\pi^2}{72}\left(8\sqrt{3}-9\right)$. Problema este astfel rezolvată.

Caleidoscop matematic

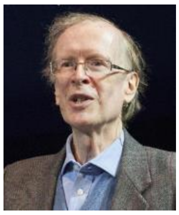
Regele și tânărul

Un tânăr este prins pe proprietatea regelui. El este adus înaintea regelui pentru a fi pedepsit. Regele spune: „Trebuie să-mi spui o propoziție. Dacă este adevărată, vei fi ucis de lei. Dacă este falsă, vei fi ucis fiind călcat în picioare de bivoli sălbatici. Dacă nu pot să-mi dau seama dacă spui adevărul sau nu, va trebui să te las să pleci”. Tânărul s-a gândit puțin iar ceea ce i-a spus regelui la făcut pe acesta să-l elibereze. Care a fost propoziția tânărului?

www. goldsite.ro

Răspuns la pagina 54.

„Doar pentru că nu putem găsi o soluție,
nu înseamnă că nu există.”
Andrew Wiles
(1953 -)



4. Probleme propuse

▪ Clasa a V-a

G:1382. Câte numere de două cifre $\overline{ab}$ verifică relația $\overline{ab} = a \cdot b + a + b$?

Alexie Elena, **Jianu Lonetta**, Craiova

a) Arătați că numărul 10404 este pătrat perfect;
b) Descompuneți în factori primi numărul 10403. **Ionel Tudor- Călugăreni**, Giurgiu

G:1383. Arătați că numerele
$a_1 = 10201, a_2 = 102030201, a_3 = 1020304030201, ..., a_8 = 102030405060708090807060504030201$
sunt pătrate perfecte . elevă **Panduru Mădălina** , Bălcești , Vâlcea

G:1384. Să se arate că suma S=1+3+5+...+2025 este un pătrat perfect.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

G:1385. Să se arate că nu există cifrele x,y,z astfel încât $x \cdot \overline{yz} = \overline{xyz}$. **Geanina Bicică**, Craiova

G:1386. Determinați numerele $\overline{abcd}$ cu proprietatea $\overline{ab} \cdot \left(c^2 + d^2\right) = 2025$. **Adrian Stan**, Buzău

G:1387. Numerele naturale x, y, z sunt direct proporționale cu numerele prime p, q, r. Știind că $\mathrm{p} < \mathrm{q} < \mathrm{r}$, $\mathrm{p} + \mathrm{q} + \mathrm{r} = 10$, $\mathrm{x} + \mathrm{y} + \mathrm{z} = 100$, calculați suma ultimelor 2026 de cifre ale numărului $\mathrm{T} = \mathrm{x}^{2025} + \mathrm{y}^{2025} + \mathrm{z}^{2025}$. elev **Gobej Ștefan**, Curtea de Argeș

G:1388. Demonstrați că există cel puțin un multiplu de 37 care conține numai cifre de 2 și de 3 și are numai aceste cifre. **Gobej Cristina-Dumitra**, Curtea de Argeș

G:1389. Determinați numărul natural $\overline{abc}$ pentru care $c^c = \overline{accbc}$. **Nicolae Ivășchescu**, Canada

G:1390. a) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât numărul $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{n}$ să fie natural;

b) Determinați $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât numărul $b = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{42} + \frac{1}{m}$ să fie natural;

Cristina Călina – Doina, Craiova

G:1391. Să se arate că suma elementelor mulțimii $M = \left\{\overline{ab} \mid a^b + a + b = \overline{ab}\right\}$ este un cub perfect.

Gheorghe Ghiță, Buzău

▪ Clasa a VI-a

G:1392. Fie A un număr natural cu 2025 cifre care este divizibil cu 9 . Fie B suma cifrelor acestui număr . Fie C suma cifrelor lui B . Găsiți suma cifrelor lui C .

elev **Ganea Andrei** , Caraula , Dolj

G:1393. Într-o țară sunt 66 orașe cu aeroport propriu. O companie aeriană are în programul său 2025 de rute (tur-retur). Demonstrați că, utilizând rutele companiei aeriene, din orice oraș se poate ajunge în oricare altul. elev **Gobej Ștefan**, Curtea de Argeș

G:1394. Demonstrați că numărul $\underbrace{1111...1}_{\text{de 2025 ori}}$ se divide cu 37. **Adrian Stan**, Buzău

G:1395. Arătați că între două puteri consecutive de numere naturale ale lui 17 există cel mult trei puteri consecutive de numere naturale ale lui 3.

Nălbaru Ramona , **Stăncele Dumitru Gabriel**, Craiova

G:1396. Să se rezolve în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ecuația $x^2 + py + p = xy + (2p+1)x$ unde p este un număr prim dat. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

G:1397. Să se găsească cel mai mic număr de două cifre, prin care se simplifică fracția:

$$F = \frac{1^{2025}+2^{2025}+3^{2025}+4^{2025}+5^{2025}+6^{2025}+9^{2025}}{11^{2027}+12^{2027}+13^{2027}+14^{2027}+15^{2027}+16^{2027}+19^{2027}}.$$

Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu

G:1398. Comparați numerele $m = \frac{1}{2025}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{2024}+\frac{1}{2025}\right)$ și

$n = \frac{1}{2024}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{2023}+\frac{1}{2024}\right)$. **Nicolae Ivășchescu**, Canada

G:1399. Să se arate că fracția $\frac{5n+7}{(2n+3)(3n+4)}$ este ireductibilă pentru orice număr natural n.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

G:1400. Demonstrați că dacă numerele naturale a,b,c,d,e,f,g sunt direct proporționale, cu numerele 38, 18, 12, 10, 3, 2, 45 atunci $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2=g^2$. **Nicolae Ivășchescu**, Canada

▪ Clasa a VII-a

G:1401. Să se determine $n\in\mathbb{Z}$ astfel încât numărul $A=|n-1|+|n-2|+|n-3|+|n-4|+|n-5|$ să fie pătrat perfect. eleva **Ana Alesia Truică**, Craiova

G:1401. Să se arate că numărul $n = 4^{2025}+2025^4$ poate fi scris ca suma a patru pătrate perfecte.

Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu

G:1402. Demonstrați că există numerele naturale a, b, c pentru care $a^2+b^2=c^2+2025$.

Nicolae Ivășchescu, Canada

G:1403. Determinați numărul natural n, pentru care:

$$\frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}+\sqrt{7}}+\frac{\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}+\sqrt{8}}+...+\frac{\sqrt{n+5}}{1+\sqrt{n+5}+\sqrt{n+6}}=\frac{24+\sqrt{6}}{2}$$

elev **Gobej Ștefan**, Curtea de Argeș

G:1404. Un elev s-a gândit la 10 numere întregi (nu neapărat diferite) și a calculat toate sumele posibile formate din câte 9 dintre aceste numere, obținând astfel rezultatele: 92, 93, 94, …, 100. (Sumele care se repetă le-a scris o singură dată.) La ce numere s-a gândit elevul?

Gobej Cristina-Dumitra, Curtea de Argeș

G:1405. Se consideră numărul $a(n)=\sqrt{9^n+4\cdot 3^n+m}$, $m,n\in\mathbb{N}$. Dacă $a(0)$, $a(1)\in\mathbb{N}$ atunci, să se arate că $a(n)\in\mathbb{N}$. **Adrian Stan**, Buzău

$\boxed{\text{G:1406}}$. Arătați că în orice triunghi ABC unde $BC=a, AC=b, AB=c$ este adevărată inegalitatea $ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)>a^3+b^3+c^3+2abc$. **Roxana Vasile, Botea Sorin**, Alimpești

$\boxed{\text{G:1407}}$. Dacă $a,b,c \rangle 0$ atunci $3\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\frac{b^3}{a^3}+\frac{c^3}{b^3}+\frac{a^3}{c^3}\geq 12$. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

$\boxed{\text{G:1408}}$. Arătați că în orice triunghi ABC unde BC=a, AC=b, AB=c e adevărată inegalitatea: $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \rangle a^3+b^3+c^3+2abc$. **Roxana Vasile, Gigi Zaharia**, Craiova

$\boxed{\text{G:1409}}$. Fie triunghiul ΔABC echilateral. Pe dreapta BC se consideră punctul M astfel încât C se află între B și M și $m(\sphericalangle CAM)=15^0$. Dacă AB = BC =CA = a determinați CM și AM în funcție de **a**. **Răzvan Lupu**, Craiova

$\boxed{\text{G:1410}}$. Trapezul ABCD cu bazele AB și CD, este isoscel și are diagonalele perpendiculare. Știind că înălțimea trapezului are 10 cm, să se calculeze aria trapezului.
Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

$\boxed{\text{G:1411}}$. Fie ABCD un trapez isoscel înscris în cercul C cu $BC \parallel AD$ $(BC \langle AD)$. Perpendiculara BB^1 pe AD intersectează cercul C în punctul E. Arătați că $DE \langle BC+AE$.
Marius Sgaibă, Craiova

$\boxed{\text{G:1412}}$. În triunghiul ABC oarecare se consideră punctul D pe latura $[AC]$ astfel încât $[AD]\equiv[DC]$ și punctul $E\in[BD]$ astfel încât $[BE]\equiv[ED]$ și punctul $I\in(BC)$ astfel încât $DI \parallel AE$. Construiți cu ajutorul unei rigle negradate pe prelungirea lui $[AE]$, dincolo de E un segment $[EG]$, astfel încât $[EG]=\frac{[AG]}{4}$. **Nicolae Ivășchescu**, Canada

$\boxed{\text{G:1413}}$. În cercul $C(O;R)$, punctele A,B,C sunt conciclice, C aparținând arcului mic AB. Dacă AB=R și AC=2Rcos75^0 atunci aflați măsura unghiului BAC. **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

▪ Clasa a VIII-a

$\boxed{\text{G:1414}}$. **Găsiți valoarea de adevăr a propoziției:**
$P:\ \sqrt{1+2023\cdot\sqrt{1+2024\cdot\sqrt{1+2025\cdot\sqrt{1+2026\cdot 2026}}}}=2024$. **Nicolae Ivășchescu**, Canada

$\boxed{\text{G:1415}}$. Să se determine numerele prime p,q,r care verifică egalitatea $pqr=23(p+q+r)$.
Florin Rotaru, Focșani

$\boxed{\text{G:1416}}$. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^3=x-2$.
Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu

$\boxed{\text{G:1417}}$. Se consideră expresia algebrică $E(x)=\left(\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{1}{x^2+3x+2}\right):(x+1),\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;-1\}$. Aflați $x\in\mathbb{Z}$ astfel încât $E(x)\in\mathbb{Z}$. **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

$\boxed{\text{G:1418}}$. Fie $a,b,x,y\rangle 0$. Să se arate că $\frac{x^7}{a^4}+\frac{y^7}{b^4}\geq\frac{x^3+y^3}{a^3+b^3}\cdot\left(\frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}\right)$. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

G:1419. Demonstrați că valoarea expresiei

$$E(n)=\frac{\sqrt{n+\sqrt{0}}+\sqrt{n+\sqrt{1}}+\sqrt{n+\sqrt{2}}+...+\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}+\sqrt{n+\sqrt{n^2}}}{\sqrt{n-\sqrt{0}}+\sqrt{n-\sqrt{1}}+\sqrt{n-\sqrt{2}}+...+\sqrt{n-\sqrt{n^2-1}}+\sqrt{n-\sqrt{n^2}}}$$ este constantă, oricare ar fi numărul $n\in N^*$.

elev **Gobej Ștefan,** Curtea de Argeș

G:1420. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA^IB^IC^ID^I$, lățimea și înălțimea sunt direct proporționale cu 4, respectiv 3. Aflați sinusul unghiului dintre planele $(ABCD)$ și (A^IB^ICD).

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:1421. Pe planul pătratului ABCD se ridică perpendiculara $[EC]$ astfel încât $EO=4(\sqrt{3}+1)cm$, unde O este centrul pătratului. Dacă măsura unghiului planelor (ABC) și (EDB) este de 75^0, determinați distanța de la E la planul (EDB) și distanța de la C la planul (MBD), unde M este mijlocul lui $[EC]$.

Nicolae Ivășchescu, Canada

G:1422. În cubul ABCDEFGH se notează cu O centrul feței BCGF. Se știe că segmentul HO are lungimea egală cu $2\sqrt{6}$ cm. Să se afle volumul cubului si măsura unghiului dintre dreptele HO și EB.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

G:1423. Se dă o piramidă patrulateră regulată SABCD. Dacă latura bazei, înălțimea piramidei și apotema piramidei au lungimile trei numere naturale consecutive, să se calculeze sinusul unghiului format de două fețe laterale opuse.

Gobej Cristina-Dumitra, Curtea de Argeș

G:1424. a) Demonstrați inegalitățile: (i): $(x^2+1)(y^2+1)\geq\frac{3}{4}((x+y)^2+1),\ \forall x,y\geq 0;$

(ii): $(u^2+1)(v^2+1)\geq(u+v)^2,\ \forall u,v\geq 0;$

b) Într-un tetraedru ABCD notăm prin F aria totală, cu F_A aria feței care se opune vârfului A și analoagele $F_B,\ F_C,\ F_D$. Arătați că $(F_A{}^2+1)\cdot(F_B{}^2+1)\cdot(F_C{}^2+1)\cdot(F_D{}^2+1)\geq\frac{9}{16}\cdot F^2$.

D.M.Bătinețu-Giurgiu, București, **Ionel Tudor-Călugăreni**, Giurgiu

▪ Clasa a IX-a

L:1208. Se consideră mulțimea nevidă $A\subseteq R$ cu proprietățile:

a) $1\in A$; b) $x\in A\Rightarrow x^2\in A$; c) $x^2-4x+4\in A\Rightarrow x\in A$. Demonstrați că numărul $2024+\sqrt{2025}$ este element al mulțimii A.

elev **Gobej Ștefan**, Curtea de Argeș

L:1209. Arătați că pentru orice număr natural nenul n există un număr natural A, având n cifre, toate impare, care se divide cu 5^n.

elev **Gobej Ștefan**, Curtea de Argeș

L:1210. Fie $n,k\in N^*$ astfel încât $2^{k+1}>n$. Calculați $S=\sum_{i=0}^{k}\left[\frac{n+2^i}{2^{i+1}}\right]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

L:1211. Fie $n\in N^*$, $n\geq 2$ și numerele reale strict pozitive $a_1,a_2,...,a_n$ cu proprietatea $a_1+a_2+...+a_n=2025n$. Să se determine numerele reale $x_1,x_2,...,x_{n-1}$ care verifică ecuația $\sqrt{a_1-x_1}+\sqrt{a_2-x_2}+...+\sqrt{a_{n-1}-x_{n-1}}+\sqrt{a_1+x_1+x_2+...+x_{n-1}}=45n$.

Gobej Cristina-Dumitra, Curtea de Argeș

L:1212. Dacă $(a_n)_{n\geq 1},(b_n)_{n\geq 1},(c_n)_{n\geq 1}$ sunt progresii aritmetice de numere întregi, atunci demonstrați că 5 divide $2a_{n+4}b_{n+4}c_{n+4}+2a_{n+3}b_{n+3}c_{n+3}-3a_{n+2}b_{n+2}c_{n+2}+2a_{n+1}b_{n+1}c_{n+1}+2a_nb_nc_n$.

Florin Rotaru, Focșani

L:1213. Dacă $x,y\in(0,\infty)$ și $(2x)^2+y^3\geq(2x)^3+y^4$ arătați că $(2x)^3+y^3\leq 2$.

Cezar Ozunu , Daneți , Dolj **Felicia Ozun** ,Craiova

L:1214. Fie $n\geq\mathbb{N}$. Arătați că: Arătați că $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{3\cdot 2^{n-3}}+\frac{1}{3\cdot 2^{n-2}}=1$.
Folosind eventual acest rezultat, arătați că dacă $x_1,x_2,\dots,x_n>0$ și $x_1+x_2+\dots+x_n=1$, atunci:
$\frac{x_1}{2\cdot x_1+1}+\frac{x_2}{2^2\cdot x_2+1}+\cdots+\frac{x_{n-2}}{2^{n-2}\cdot x_{n-2}+1}+\frac{x_{n-1}}{3\cdot 2^{n-3}\cdot x_{n-1}+1}+\frac{x_n}{3\cdot 2^{n-2}\cdot x_n+1}\leq\frac{1}{2}$.
În ce caz avem egalitate?

Lucian Tuțescu, Craiova

L:1215. Fie $x_1,x_2,\dots,x_n\in[1,\infty),n\geq 3$. Arătați că $\frac{\sqrt{x_1-1}}{x_1+x_2}+\frac{\sqrt{x_2-1}}{x_2+x_3}+\dots+\frac{\sqrt{x_{n-1}-1}}{x_{n-1}+x_n}+\frac{\sqrt{x_n-1}}{x_n+x_1}\leq\frac{n}{4}$.
În ce caz avem egalitate?

Moanță Cristian, Tuțescu Lucian, Craiova

L:1216. Aflați $n\in\mathbb{N}$ astfel încât ecuația $\left[\frac{2x+1}{2}\right]+\left[\frac{2^2x+1}{2}\right]+\left[\frac{2^3x+1}{2}\right]+\dots\dots+\left[\frac{2^nx+1}{2}\right]=2025$ să aibă soluții în $[0;1)$.

Adrian Stan, Buzău

L:1217. Să se rezolve ecuația $(2x^2-1013)^2-4x-2026=0$, folosind doar ecuații de grad doi.

Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu

L:1218. În triunghiul ABC, să se arate că $\max(|\mathbf{a}-\mathbf{b}|,|\mathbf{b}-\mathbf{c}|,|\mathbf{c}-\mathbf{a}|)\leq\sqrt{6(\mathbf{R}-2\mathbf{r})}$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:1219. Să se arate că $E(x,m)=9m^2x^2-3m(2x^2-x)+x^2-x+1\rangle 0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \forall m\in\mathbb{R}$.
Scrieți $E(x,m)$ ca sumă a două pătrate perfecte și determinați minimul expresiei $E(x,m)$.

Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu

L:1220. Dacă $a,b,c,d>0$ atunci să se arate că $\sum\frac{a}{3a^3+bcd}\leq\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^2$.

Marin Chirciu, Pitești

L:1221. Fie M un punct în planul triunghiului $\Delta\ ABC$ iar N, P, Q simetriile punctului M în raport cu mijloacele laturilor AB, BC, respectiv AC. Arătați că $\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{MG}$ unde G și G1 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor $\Delta\ ABC$ respectiv $\Delta\ NPQ$.

Dorina Goiceanu, Camelia Dana, Craiova

L:1222. Fie triunghiul $\Delta\ ABC$ isoscel (AB=BC) cu $m(\sphericalangle ABC)=36^0$ și $D\in(BC)$ astfel încât AD este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$. Dacă $AD=2\sqrt{7}$, calculați lungimile laturilor triunghiului ABC.

Alina Ciucă, Ionuț Ivănescu, Craiova

L:1223. Se consideră triunghiul ABC ascuțitunghic și fie D, E punctele de intersecție ale cercului de diametru $[\mathrm{AB}]$ cu laturile $[\mathrm{AC}]$, respectiv $[\mathrm{BC}]$. Notăm cu M intersecția dreptelor CO și DE, unde O este mijlocul segmentului [AB].

a) Să se demonstreze relația $\left(\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}+\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CD}}\right)\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}$.

b) Să se arate că M este centrul de greutate al triunghiului ABC dacă și numai dacă $\mathrm{AC}^2+\mathrm{BC}^2=3\mathrm{AB}^2$.

Gobej Cristina-Dumitra, Curtea de Argeș

L:1224. În triunghiul ABC considerăm punctul $M \in (BC)$. Să se arate că: $\min(AB, AC) \leq \frac{AM}{\cos\frac{A}{2}}$. **Emil C. Popa**, Sibiu

▪ Clasa a X-a

L:1225. Arătați că:

$$\frac{x+y+1}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+1)(y+1)}}+\frac{x+y+2}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+2)(y+2)}}+\ldots+\frac{x+y+2025}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+2025)(y+2025)}} \geq 2025$$

elev **Gobej Ștefan**, Curtea de Argeș

L:1226. Fie $n \in \mathbb{N}$. Aflați partea întreagă a numărului $A_n = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}}$.

Sorina Tudor, Craiova, **Daniela Beldea**, Băilești,

L:1227. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că:

a) $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. b) $n! \leq (n+1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{n+2}{3}\right)^{\frac{n}{2}}$. În ce caz avem egalitate?

Moanță Cristian, Tuțescu Lucian, Craiova

L:1228. Dacă $a, b, c \geq 1$ și $k \geq 0$ să se demonstreze inegalitatea:

$\sqrt{\lg^2 a+k\cdot\lg^2 b}+\sqrt{\lg^2 b+k\cdot\lg^2 c}+\sqrt{\lg^2 c+k\cdot\lg^2 b} \geq \sqrt{k+1}\cdot\lg abc$ **Gheorghe Ghiță**, Buzău

L:1229. Rezolvați ecuația $x^{\log_2\left(\frac{x}{98}\right)}\cdot 14^{\log_2 7}=1$.

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

L:1230. Fie $x=1+i\sqrt{3}$, $y=1-i\sqrt{3}$ și $z=2$. Demonstrați că pentru orice număr prim p, $p>3$ are loc egalitatea $x^p+y^p=z^p$. **Gobej Adrian**, Curtea de Argeș

L:1231. Numerele complexe $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sunt astfel încât $|z_k-\alpha|<r, (\forall)\ k=\overline{1,n}$ și $r \in (0,\alpha)$.

Demonstrați că $|z_1+z_2+\ldots+z_n|\cdot\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\cdots+\frac{1}{z_n}\right| \geq \left(1-\frac{r^2}{\alpha^2}\right)\cdot n^2$.

Moanță Cristian, Craiova

L:1232. Să se rezolve ecuația $\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=\frac{2(x^2+2)}{\sqrt{x^2+1}}$. **Adrian Stan**, Buzău

L:1233. Arătați că:

a) $\cos 6=\cos\{2\pi\}$; b) $\cos 9=-\cos\{3\pi\}$; c) $ctg 1>\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a. **Moanță Cristian, Tuțescu Lucian**, Craiova

L:1234. Determinați numerele naturale nenule n, pentru care $tg\frac{\pi}{4n}=2-\sqrt{n}$.

Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu

L:1235. Fie un triunghi cu vârful in O (orig. axelor),iar celelalte in punctele de tangenta ale laturilor ce pleacă din O cu parabola f(x)=$x^2 - x + 1, x\ din\ R$. Calculați aria triunghiului si arătați ca unghiul O e ascuțit. **Petre Păunescu**, Roșiori de Vede

L:1236. Rezolvați în $(0;\infty)$ ecuațiile $\sqrt[5]{41+29x} = x+1$ și $\sqrt[5]{401+298x} - \sqrt[5]{41+29x} = x$, știind că sunt echivalente. **Ionel Tudor- Călugăreni**, Giurgiu

L:1237. Să se demonstreze că în orice triunghi ABC există egalitatea:

$$\frac{tg\frac{A}{2}}{h_a} + \frac{tg\frac{B}{2}}{h_b} + \frac{tg\frac{C}{2}}{h_c} = \frac{p-a}{h_a r_a} + \frac{p-b}{h_b r_b} + \frac{p-c}{h_c r_c}.$$

Florin Rotaru, Focșani

▪ Clasa a XI-a

L:1238. a) Fie $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ matrice inversabile ($n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$) astfel încât $X^{-1} - Y$ este matrice inversabilă;

b) Fie $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ matrice inversabile, $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ astfel încât $YX + (YX)^{-1} = I_n$. Arătați că $X - Y^{-1}$ este matrice inversabilă. eleve **Carina Viespescu**, București, **Bianca Negreț**, Craiova

L:1239. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(R)$ cu proprietatea $AB = BA$. Demonstrați că $\det(2A^2 + 2B^2 - 3AB - A - B + I_n) \geq 0.$ elev **Gobej Ștefan,** Curtea de Argeș

L:1240. Studiați dacă există matrice $A, B \in \mathcal{M}_{2025}(R)$, astfel încât $A^2 + B^2 = AB$ și $\det(AB - BA) > 0$. Justificați răspunsul. **Gobej Adrian,** Curtea de Argeș

L:1241. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $b < 0$. Arătați că ecuația $x^3 + 3ax^2 + 3bx + ab = 0$ are toate rădăcinile reale. **Dană Camelia , Vlad Carmen** , Craiova

L:1242. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 = 2$ și $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 - a_n + 1}{n}, n \geq 1$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$; b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + 4a_2 + ... + n^2 a_n}{1 + 2 + ... + n}$;

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1^2 + 2a_2^2 + ... + na_n^2}{a_1 + a_2 + ... + a_n}$. **Florin Rotaru**, Focșani

L:1243. Se consideră un șir de numere raționale strict pozitive $(x_n)_{n\geq 1}$ în care fiecare termen începând cu al doilea se obține din produsul vecinilor săi din care se scade o unitate!
Dacă $x_2 = 2025$, calculați x_{2027}. elev **Gobej Ștefan**, Curtea de Argeș

L:1244. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir convergent de numere reale pozitive. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2 + ak}$. **Gobej Adrian**, Curtea de Argeș

L:1245 Fie $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ și $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale strict pozitive astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a \rangle\ 0$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{H_n}}{\sqrt[n]{a_n}}$.

D.M.Bătinețu-Giurgiu, București, **Ionel Tudor-Călugăreni,** Giurgiu

L:1246. Arătați că $e^{x^2} \rangle\ 2+3\ln x,\ \forall x\rangle\ 2.$ student **Alin – Ionuț Constantinescu**, Craiova

L:1247. **Fie** $f:\mathbb{R}\to[-3;2],\ f(x)=\dfrac{x^2+mx+1}{x^2-x+1}$**.** Să se determine numărul real m astfel încât f să fie bijectivă. **Adrian Stan**, Buzău

Dacă $k,a,b,c\ \rangle\ 0$ astfel încât $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\geq 3$ să se arate că

$$\left(\frac{k}{bc}+1\right)^a\cdot\left(\frac{k}{ca}+1\right)^b\cdot\left(\frac{k}{ab}+1\right)^c\geq(k+1)^{a+b+c}.$$ **Gheorghe Ghiță**, Buzău

▪ Clasa a XII-a

L:1248. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu 2025 elemente. Arătați că funcția $f:G\to G$, $f(x)=x^2,\ \forall x\in G$ este injectivă. **Loredana Surcel**, Otopeni

L:1249. Determinați funcțiile derivabile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $(x+2)\cdot f(x)+(x+1)\cdot f^{I}(x)=x,\ \forall x\rangle-1.$ elevi **Horia Mușat, Vlad Oriviceanu**, Craiova

L:1250. Dacă $f:[a,b]\to R,\ 0<a<b$ este continuă astfel încât $\int_a^b f(x)dx=0$, atunci demonstrați că există $c\in(a,b)$ astfel încât $\int_c^b f(x)dx=f(c)$. **Florin Rotaru,** Focșani

L:1251. Rezolvați ecuația: $x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1=0$. **Ionel Tudor-Călugăreni,** Giurgiu

L:1252. Calculați integrala $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{(x^4+1)(x^2+x+1)}$.

Simona Vladimirescu, Ileana Stanciu, Craiova

L:1253. Să se calculeze: $I=\displaystyle\int\frac{\sin x\cdot\cos x}{\sqrt{8+\sin 4x}}dx,\ x\in R.$ **Radu Diaconu** Sibiu

L:1254. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ să se calculeze $\displaystyle\int_n^{n+1}\left[\frac{x^{4n}+(n+1)x^{2n}+2n}{x^{4n}+(n+1)x^{2n}+n}\right]\cdot\left\{\frac{(n+1)x-n}{(n+1)x+n}\right\}dx$, unde $[a],\{a\}$ reprezintă partea întreagă , respectiv partea fracționară a unui număr real a.

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:1255. Se definește integrala având limita superioară infinită prin egalitatea:

$\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$. Să se calculeze integrala: $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{(x^2-x+1)^2}dx$. **Vasile Mircea Popa**, Sibiu

„Sper că văzând entuziasmul de a rezolva această problemă îi va face pe matematicieni să realizeze că acolo sunt o mulțime și o mulțime de alte probleme de matematică care vor fi la fel de provocatoare în viitor."

Andrew Wiles.

„Doubt is the origin of wisdom. ”

René Descartes
(1596 – 1650)

5. QUICKIES

A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader's name, full address, and an e-mail address. Submited solutions should arrive before February 01, 2026.

PROPOSALS – QUICKIES

QUICKIES

~ TITU ZVONARU ~

(27.11.1953 – 11.04.2025)

Q116. Proposed by TITU ZVONARU.

Prove that if $x, y, z > 0$ then $\frac{4(x^2+y^2+z^2)}{xy+yz+zx}+\frac{27x}{7x+y+z}+\frac{27y}{x+7y+z}+\frac{27z}{x+y+7z}\geq 13$.

Q117. Proposed by TITU ZVONARU.

Let ABC be a triangle with AD the hight from A, and E respectively F the midlle of the sides AC, respectively AB. For any point P from the plane of triangle ABC, let Y and Z be its symmetric from the points E, respectively F. If P' is the midlle at DP and $M = BY \cap CZ$, then prove that the line MP' passes through a fixed point.

Q118. Proposed by TITU ZVONARU.

Let $a, b, c > 0$ such that $a+b+c=1$. Prove that:

$$\frac{abc(1+3a)}{b+c}+\frac{abc(1+3b)}{c+a}+\frac{abc(1+3c)}{a+b}+\frac{a^3+b^3+c^3+6abc}{2}\leq\frac{1}{2}.$$

Q119. Proposed by TITU ZVONARU.

Solve for $x \in \left(0,90^0\right)$: $\dfrac{\sin x}{2\sin(x+60^0)}+\dfrac{\sqrt{3}}{4\sin 40^0}=1$.

SOLUTIONS - QUICKIES

Q112. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

Compute $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\left(\dfrac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}-\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)$.

Solution by author. It is well-hnown that $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\dfrac{1}{e}$.

If we denote $u_n=\dfrac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$, then $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n-1}{\ln u_n}=1$ and

$$\lim_{n\to\infty}u_n^n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}=\frac{1}{e}\cdot e=1\cdot$$

Hence,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}-\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)^2\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n=\frac{1}{e^2}\cdot 1\cdot\ln 1=0.$$

Solution by Marin Chirciu and Octavian Stroe, Pitești, Romania.

Using $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)=\dfrac{1}{e}$ (Traian Lalescu) and $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\dfrac{1}{e}$, we have:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\left(\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)-\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}\right)=\frac{1}{e}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e}\right)=0.$$

Also solved by Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain.

Q113. Proposed by Mihaly Bencze, Brașov, Romania.

If $x,y>0$ then prove the following inequalities:

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)^2\left(1+\frac{y}{x}\right)^2\geq\left(1+\frac{2x+y}{\sqrt[3]{x^2y}}\right)\left(1+\frac{2y+x}{\sqrt[3]{xy^2}}\right)\geq 16.$$

Solution by author. We prove the right inequality with AM-GM inequality, i.e. we have

$$2x+y\geq 3\cdot\sqrt[3]{x^2y},\ 2y+x\geq 3\cdot\sqrt[3]{xy^2}.$$

So, $\left(1+\dfrac{2x+y}{\sqrt[3]{x^2y}}\right)\left(1+\dfrac{2y+x}{\sqrt[3]{xy^2}}\right)\geq(1+3)(1+3)=16$.

After some algebraic manipulations the left inequality is equivalent with:

$$\left(\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{y^4}\right)\left(\frac{\sqrt[3]{x^8}-\sqrt[3]{y^8}}{\sqrt[3]{x^5y^5}}\right)+\left(\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{y^4}\right)\cdot 2\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2y^2}}\geq 0,\text{ which is true}$$

because the expressions $\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{y^4}$ and $\sqrt[3]{x^8}-\sqrt[3]{y^8}$, respectively $\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{y^4}$ and $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}$ has the same sign. We have equality if and only if $x=y$.

Solution by Marin Chirciu, Piteşti, Romania.

Lemma1. If $x,y>0$ then $\left(1+\frac{x}{y}\right)^2\left(1+\frac{y}{x}\right)^2\ge\left(1+\frac{2x+y}{\sqrt[3]{x^2y}}\right)\left(1+\frac{2y+x}{\sqrt[3]{y^2x}}\right)$.

Proof. $\left(1+\frac{x}{y}\right)^2\left(1+\frac{y}{x}\right)^2\ge\left(1+2\sqrt[3]{\frac{x}{y}}+\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}\right)\left(1+2\sqrt[3]{\frac{y}{x}}+\sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2}}\right)\overset{\sqrt[3]{\frac{x}{y}}=t}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow\left(1+t^3\right)^2\left(1+\frac{1}{t^3}\right)^2\ge\left(1+2t+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+\frac{2}{t}+t^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(t^3+\frac{1}{t^3}+2\right)^2\ge2\left(t^3+\frac{1}{t^3}\right)+t^2+\frac{1}{t^2}+2\left(t+\frac{1}{t}\right)+6\overset{t+\frac{1}{t}=u\ge2}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\left(u^3-3u+2\right)^2\ge2\left(u^3-3u\right)+u^2-2+2u+6\Leftrightarrow u^6-6u^4+2u^3+8u^2-8u\ge0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u(u-2)\left(u^4+2u^3-2u^2-2u+4\right)\ge0,$$

true from $u=t+\frac{1}{t}\ge2$ and $u^4+2u^3-2u^2-2u+4>0$, $u\ge2$.

Lemma2. If $x,y>0$ then $\left(1+\frac{2x+y}{\sqrt[3]{x^2y}}\right)\left(1+\frac{2y+x}{\sqrt[3]{y^2x}}\right)\ge16$.

Proof.

$$\left(1+\frac{2x+y}{\sqrt[3]{x^2y}}\right)\left(1+\frac{2y+x}{\sqrt[3]{y^2x}}\right)=\left(1+\frac{x+x+y}{\sqrt[3]{x\cdot x\cdot y}}\right)\left(1+\frac{y+y+x}{\sqrt[3]{y\cdot y\cdot x}}\right)\overset{AM-GM}{\ge}(1+3)(1+3)=16.$$

We move on to solving the main problem.
Using the 2 Lemmas we obtain the conclusion.
Equality occurs if and only if $x=y$.

Solution by Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain.
By changing variables $x\to x^3$ and $y\to y^3$, the inequalities become

$$\left(1+\frac{x^3}{y^3}\right)^2\left(1+\frac{y^3}{x^3}\right)^2\ge\left(1+\frac{2x^3+y^3}{x^2y}\right)\left(1+\frac{x^3+2y^3}{xy^2}\right)\ge16.$$

The left-hand side inequality is equivalent to

$$\frac{(x-y)^2(x+y)^2(x^2+y^2)(x^6+x^4y+2x^3y^3+x^2y^4+y^6)}{x^6y^6}\ge0$$

while the right-hand side inequality is equivalent to

$$\frac{2x^6+x^5y+2x^4y^2++22x^3y^3+2x^2y^4+xy^5+2y^6}{x^3y^3}\ge0$$

and the problem is done.

Q114. Proposed by Florin Rotaru, Focşani, Romania. If ABC is a triangle with usual notations, then prove the following equality:

$$\frac{r_a}{h_a}+\frac{r_b}{h_b}+\frac{r_c}{h_c}+1=\frac{bc}{h_ar_a}+\frac{ca}{h_br_b}+\frac{ab}{h_cr_c}.$$

Solution by author. If we use the well-known equalities

$$\frac{r_a}{h_a}+\frac{r_b}{h_b}+\frac{r_c}{h_c}+1=\frac{2R-r}{r}=\frac{2R}{r}-1,\ (1);\text{ and }\frac{bc}{h_ar_a}+\frac{ca}{h_br_b}+\frac{ab}{h_cr_c}=\frac{2R}{r},\ (2),$$

then we obatin the desired equality.

Solution by Marin Chirciu, Pitești, Romania

Lemma1. In $\Delta ABC:\sum\frac{r_a}{h_a}=\frac{2R-r}{r}$.

Proof. $\sum\frac{r_a}{h_a}=\sum\frac{\frac{S}{p-a}}{\frac{2S}{a}}=\frac{1}{2}\sum\frac{a}{p-a}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2(2R-r)}{r}=\frac{2R-r}{r}$.

Lemma2. In $\Delta ABC:\sum\frac{bc}{h_ar_a}=\sum\frac{bc}{\frac{2S}{a}\cdot\frac{S}{p-a}}=\frac{abc}{2S^2}\sum(p-a)=\frac{4Rrp}{2p^2r^2}\cdot p=\frac{2R}{r}$.

Proof. $\sum\frac{r_a}{h_a}=\sum\frac{\frac{S}{p-a}}{\frac{2S}{a}}=\frac{1}{2}\sum\frac{a}{p-a}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2(2R-r)}{r}=\frac{2R-r}{r}$.

We move on to solving the main problem.

Using the 2 Lemmas we obtain the conclusion.

Q115. Proposed by Marin Chirciu, Pitești, Romania.

Prove that in any ΔABC is true the inequality $\frac{1}{2R^2r}\le\sum\frac{\sin B+\sin C}{a^3}\le\frac{R}{16r^4}$.

Solution by author. Lemma. In ΔABC

$$\sum\frac{\sin B+\sin C}{a^3}=\frac{p^6+p^4\left(3r^2-14Rr\right)+p^2r^2\left(16R^2-4Rr+3r^2\right)+r^3\left(4R+r\right)^2\left(2R+r\right)}{64R^4r^3p^2}.$$

Proof. $\sum\frac{\sin B+\sin C}{a^3}=\sum\frac{\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}}{a^3}=\frac{1}{2R}\sum\frac{b+c}{a^3}=$

$$=\frac{p^6+p^4\left(3r^2-14Rr\right)+p^2r^2\left(16R^2-4Rr+3r^2\right)+r^3\left(4R+r\right)^2\left(2R+r\right)}{64R^4r^3p^2}.$$

Above we used

$$\sum\frac{b+c}{a^3}=\frac{p^6+p^4\left(3r^2-14Rr\right)+p^2r^2\left(16R^2-4Rr+3r^2\right)+r^3\left(4R+r\right)^2\left(2R+r\right)}{32R^3r^3p^2}.$$

By lemma: RHS

$$\sum\frac{\sin B+\sin C}{a^3}=\frac{p^6+p^4\left(3r^2-14Rr\right)+p^2r^2\left(16R^2-4Rr+3r^2\right)+r^3\left(4R+r\right)^2\left(2R+r\right)}{64R^4r^3p^2}=$$

$$=\frac{1}{64R^4r^3}\left[p^2\left(p^2+3r^2-14Rr\right)+r^2\left(16R^2-4Rr+3r^2\right)+\frac{r^3\left(4R+r\right)^2\left(2R+r\right)}{p^2}\right]\overset{Gerretsen}{\le}$$

$$\overset{Gerretsen}{\le} \frac{1}{64R^4r^3}\left[(4R^2+4Rr+3r^2)(4R^2-10Rr+6r^2)+r^2(16R^2-4Rr+3r^2)+\frac{r^3(4R+r)^2(2R+r)}{\frac{r(4R+r)^2}{R+r}}\right]=$$

$$\overset{Gerretsen}{\le}\frac{1}{64R^4r^3}\left[(4R^2+4Rr+3r^2)(4R^2-10Rr+6r^2)+r^2(16R^2-4Rr+3r^2)+r^2(R+r)(2R+r)\right]=$$

$$=\frac{16R^4-24R^3r+14R^2r^2-7Rr^3+22r^2}{64R^4r^3}\overset{Euler}{\le}\frac{\frac{4R^5}{r}}{64R^4r^3}=\frac{R}{16r^4}$$. The equality occurs iff triangle is equilateral.

LHS.

$$\sum\frac{\sin B+\sin C}{a^3}=\frac{p^6+p^4(3r^2-14Rr)+p^2r^2(16R^2-4Rr+3r^2)+r^3(4R+r)^2(2R+r)}{64R^4r^3p^2}=$$

$$=\frac{1}{64R^4r^3}\left[p^2(p^2+3r^2-14Rr)+r^2(16R^2-4Rr+3r^2)+\frac{r^3(4R+r)^2(2R+r)}{p^2}\right]\overset{Gerretsen}{\ge}$$

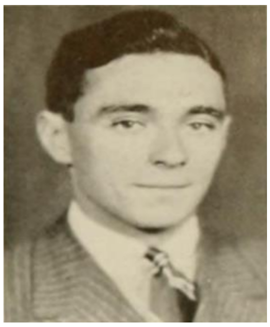
$$\overset{Gerretsen}{\ge}\frac{1}{64R^4r^3}\left[(16Rr-5r^2)(16Rr-5r^2+3r^2-14Rr)+r^2(16R^2-4Rr+3r^2)+\frac{r^3(4R+r)^2(2R+r)}{\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}}\right]=$$

$$=\frac{r^2}{64R^4r^3}\left[(16R-5r)(2R-2r)+(16R^2-4Rr+3r^2)+\frac{2r(2R-r)(2R+r)}{R}\right]=$$

$$=\frac{48R^3-38R^2r+13Rr^2-2r^3}{64R^5r}\overset{Euler}{\ge}\frac{32R^3}{64R^5r}=\frac{1}{2R^2r}$$. The equality occurs iff triangle is equilateral.

„ A înțelege un lucru ca un caz particular al unei legi mai generale - ceea ce înseamnă că înțelegi un principiu fundamental sau o structură – înseamnă să fi învățat nu numai conținutul corect al unui lucru, dar, de asemenea, un model pentru înțelegerea altor fenomene pe care le poți întâlni mai târziu”.

Jerome S. Bruner
(1915 – 2016)



„Coboară suficient de adânc în orice și vei găsi matematică.”
Dean Schlicter

6. Caleidoscop matematic

Segmentul și punctul

Dumitru Preoteasa, Giurgiu

Cândva, un **punct** și-un **segment**
Discutau, evident,
Despre întâietate.
-Înainte de toate,
Recunoaște că eu am lungime,
Obiecte ca tine am o mulțime;
Nu ești nici lung și nici lat,
Cu o bulină banală ești comparat,
Ești un vârf de creion sau de ac,
Vru segmentul să-i vină de hac.
-Sărmane segment,
Eu nu sunt așa elocvent:
Fără mine n-ai exista,
După cum vei vedea.
Unii zic că-s vedetă,
Sunt prezent și într-o mulțime discretă.
În lumea noastră aridă
Pot crea și-o mulțime nevidă.
Suni uneori aderent sau de acumulare,
Se-nfierbântă punctul mai tare.
De-o așa tiradă, sătul,
Segmentul deveni brusc un segment nul.
Iar punctul replică mărunt:
-Hai să punem discuției... punct.

Răspuns: Regele și tânărul
„Voi muri călcat în picioare de bivolii sălbatici”. Acest lucru l-a uimit pe rege, deoarece dacă este adevărat, el va fi ucis de lei, ceea ce ar face ca afirmația să nu fie adevărată. Dacă este o minciună, el ar fi ucis de bivoli sălbatici, ceea ce ar face din asta un adevăr. Întrucât regele nu avea nicio soluție, a trebuit să-l lase pe tânăr să plece.

„ Să citești cărți bune este ca și cum ai purta o conversație cu cei mai de seamă oameni ai secolelor trecute”
René Descartes (1596 – 1650)

7. Poșta redacției

Dragi cititori, elevi și profesori, a apărut **numărul 36** al revistei de matematică „ **SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noștri, și care, sperăm noi, va aduna tot mai mulți elevi și profesori împreună, pentru a face din obiectul matematicii o activitate atractivă și performantă.

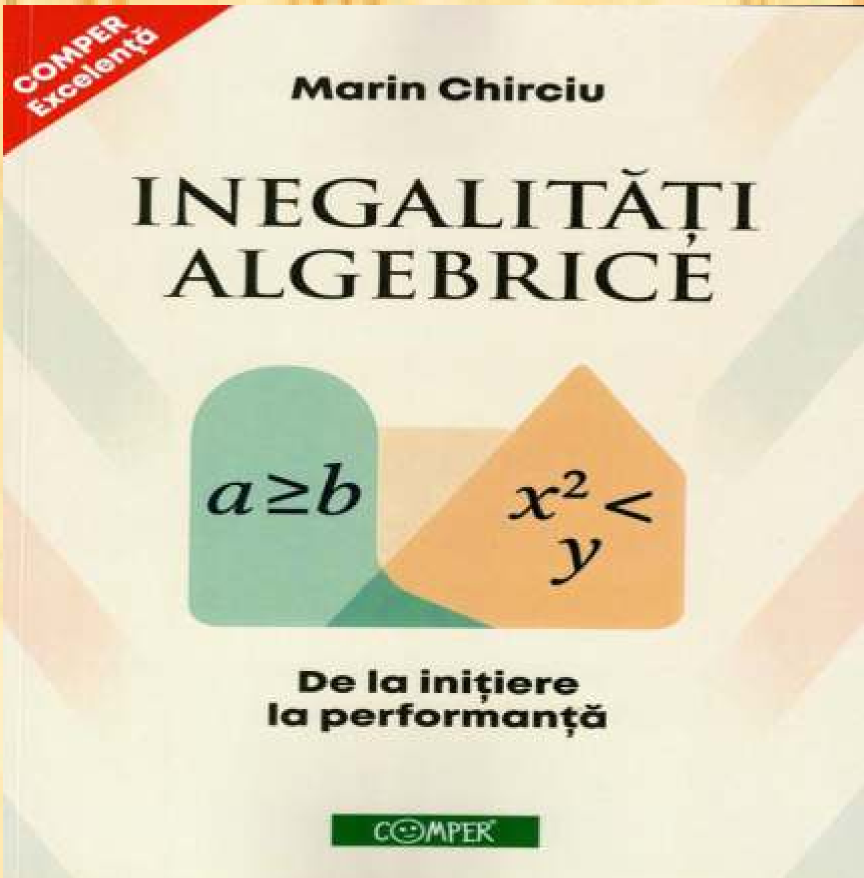
Profesorii și elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciții și probleme cu enunț și rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătățiii calitatea acestei reviste, o pot face trimițând materialele membrilor colectivului de redacție sau pe adresa de e_mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate, de preferat scrise cu programul mathtype (**salvate în Word 2003-2007**). **Materialele primite trebuie să fie originale și să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise și către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparține redacției.

Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările și comenzile pentru **numărul 37** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **01 MARTIE 2026**. Vă urăm succes și vă așteptăm.

Elevi rezolvitori

Liceul Economic „ Maria Teiuleanu” Pitești, Argeș.:
Clasa a XI-a: Maria- Amina Tanasi; **Prof. Daniel Văcaru.**
Liceul Teoretic „Alexandru Marghiloman”, Buzău
Clasa a X-a: Toma Ariana, Avram Alexandru, Turcu Alexandru, Bratosin Andrei, Marcu Gabriela, Șerban Mario, Grozav Vlăduț; **Clasa a XI-a**: Tudor Octavian, Petcu Petru, Dragu Florin, Zaman George, Gavrilă Răzvan, Lungu George; Petre Ana Maria, Gheorghe Magdalena;
Clasa a XII-a: Zaharia Darius Andrei, Cazacu Rareș Ștefan, Radu Cătălina, Isăcilă Ema, Prof. **Stan Adrian**
Colegiul Național „Frații Buzești”, Craiova
Clasa a XII-a: Mușat Horia, Negret Bianca, Cîrstea Ștefan, Cernaianu Alex, Colan Mara, Oroviceanu Vlad, Prof. **Moanță Cristian.**
Școala Gimnazială Mircea Eliade, Craiova:
Clasa a VII-a: Afrem Sara, Drăgan Raul, Pascu Ștefan, Geană Rebeca, Prisnel Sara. Prof. **Grigorie Dan Lucian.**
Scoala Preuniversitară de Măsură Smeeni, Buzău
Clasa a VI-a: Nicula Andrei, Pavel Bogdan, Pipoi Antonia**; Clasa a VII-a:** Dobre Andrei, Stan Maria**;**
Clasa a VIII-a: Neagu Delia, Manolache Andreea, Dragnea Ionuț**;** Prof. **Ion Stănescu.**

Apariții editoriale



Încă o lucrare de excepție a domnului profesor **Marin Chirciu**, apărută la editura Comper, lucrarea „**Inegalități algebrice**" – de la inițiere la performanță se înscrie în tradiția preocupărilor sale față de studiul inegalităților.

Cartea de 300 de pagini este un izvor de probleme originale publicate de autor în revistele de specialitate naționale și internaționale, un auxiliar didactic foarte util pentru cadrele didactice cât și pentru elevii de la clasele a VII-a până la a XII-a, întrucât tratează sistematic cele mai importante inegalități din algebră de la nivel elementar până la nivelul pentru performanță ridicată.

Urmărind o aplicare riguroasă a unor inegalități celebre, cartea conține 440 de probleme cu inegalitatea mediilor, cu inegalitățile lui Cauchy- Schwarz, Hölder, Minkowski, Cebîșev, Schur, Jensen, etc sau cu metodele SOS, pqr sau cu ajutorul unor substituții trigonometrice, devenind astfel un ghid necesat pentru elevii olimpici și nu numai.

Prin conținutul său amplu cu foarte multe probleme rezolvate complet, cu un echilibru între teorie și aplicarea ei, cartea se adreasează așadar tuturor elevilor care doresc o pregătire pentru aprofundare și participare la concursuri și olimpiade. Pentru informații suplimentare, vă puteți adresa domnului prof. Marin Chirciu: e_mail: marin.chirciu@yahoo.com

Redacția

VIZITATI SI REVISTA ONLINE DE MATEMATICA MATEINFO.RO

REVISTA SCLIPIREA MINȚII

NR. 36 ANUL XVIII - NOIEMBRIE 2025

Cuprins

LEI 18 RON

editgraph

editură | tipar offset | tipar digital

www.editgraph.ro

ISSN 2247 – 6601

ISSN – L 2247 – 6601