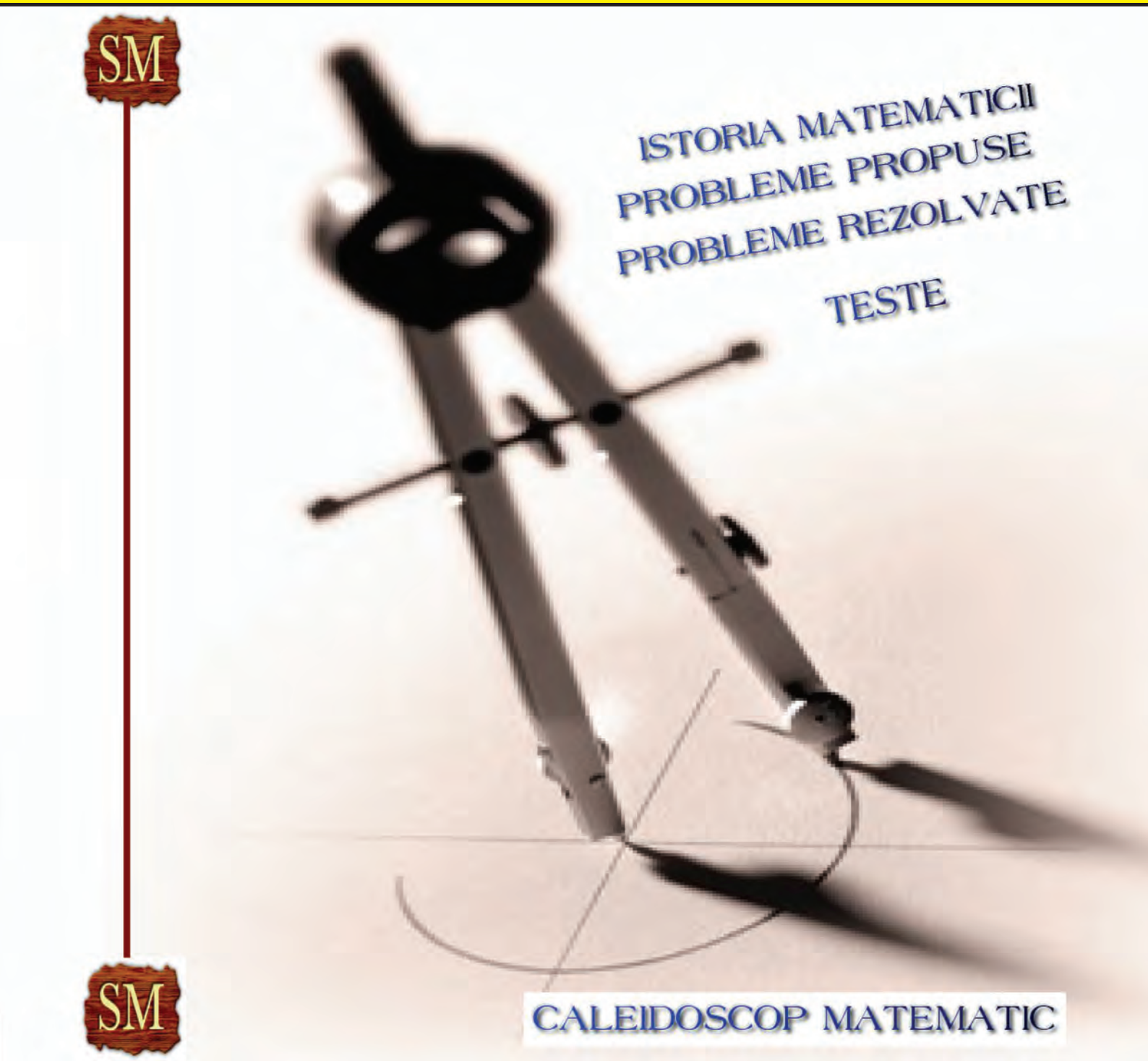
SCLIPIREA MINTII

REVISTĂ NATIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICA ; PUBLICATIE SEMESTRIALĂ, AN VIII, NR XVI, 2015

SM



ISTORIA MATEMATICII
PROBLEME PROPUSE
PROBLEME REZOLVATE
TESTE

CALEIDOSCOP MATEMATIC

SM

Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

LICEUL TEHNOLOGIC " COSTIN NENIŢESCU ", BUZĂU

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601

SCLIPIREA MINTII 16

Revistă naţională de cultură matematică, publicaţie semestrială, An VIII, Nr. XVI, NOIEMBRIE 2015, BUZĂU

COLECTIVUL DE REDACŢIE

Membrii onorifici:

Constantin Apostol – Preşedinte de onoare

Iorgu Mînzală – Inspector matematică, ISJ Buzău

Constantin Rusu – Preşedinte de onoare a Filialei Râmnicu Sărat a Societăţii de Ştiinţe Matematice

Costică Ambrinoc – Preşedinte Filiala Râmnicu Sărat a Societăţii de Ştiinţe Matematice

Lenuţa Pîrlog – Preşedinte Filiala Buzău a Societăţii de Ştiinţe Matematice

D. M . Bătineţu – Giurgiu — Titu Zvonaru

Nicolae Ivăşchescu — Mihály Bencze

Director:

Neculai Stanciu

Redactor şef:

Adrian Stan

Redactori principali:

Nicoleta Gabriela Lupşan — Constantin Dinu

Andrei Octavian Dobre — Iuliana Traşcă

Gabriel Tica — Ion Stănescu — Lucian Tuţescu

CUPRINS

ISTORIA MATEMATICII..... 1

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE..... 2

PROBLEME REZOLVATE..... 16

PROBLEME PROPUSE 37

QUICKIES 45

CALEIDOSCOP MATEMATIC 47

POŞTA REDACTIEI..... 48

GÂNDEŞTE CORECT

Membri:

Alexandru **Elena-Marcela,** Maria **Anton,** Jose Luis Diaz **– Barrero,** Liviu **Bordianu,** Nicoleta **Bran,** Gigel **Buth,** Daniela **Burtoiu,** Dana **Camelia,** Elena **Ciobîcă,** Constantin **Ciobîcă,** Ovidiu **Cioponea,** Ana **Cismaru,** Nicoleta **Clinciu,** Ciprian **Cheşcă,** Marcel **Chiriţă,** Aurel **Chiriţă,** Marin **Chirciu,** Nela **Ciceu,** Eliza **Chile,** Ileana **Didu,** Camelia **Dana,** Marian **Cucoaneş,** Gheorghe **Dârstaru,** Viorica **Dogaru,** Marius **Drăgan,** Otilia **Drăgan,** Gheorghe **Ghiţă,** Dorina **Goiceanu,** Daniela **Grama,** Dan Lucian **Grigore,** Cornelia **Gurău,** Laura **Ilie,** Dida **Isaia,** Ionuţ **Ivănescu,** Vasile **Jiglău,** Cristian Cosmin **Lupşan,** Simion **Marin,** Marcela **Marin,** Gabriela **Marinescu,** Mariana **Mărculescu,** Mariana **Mitea,** Cristian **Moanţă,** Ion **Nedelcu,** Delia **Naidin,** Andrei Florin **Nicolaescu,** Ana **Panaitescu, Cătălin Pană,** Stelian **Piscan,** Marica **Piţ-Rada,** Ionel **Piţ-Rada,** Valerica **Pometescu,** Claudia **Popa,** Florentina **Popescu,** Petre **Păunescu,** Ion **Pătraşcu,** Oana **Preda,** Ramona **Puchiu,** Ion **Radu,** Teodora **Rădulescu,** Viorel **Rotărescu,** Viorica **Rotărescu,** Dumitru **Săvulescu,** Roxana **Stanciu,** Liviu **Smarandache,** Horaţiu **Stoian,** Gheorghe **Struţu,** Florin **Stănescu,** Doina **Stoica,** Mircea Mario **Stoica,** Gabriela **Stoienescu,** Carmen **Terheci,** Alina **Tigae,** Daniela **Ticea,** Roxana-Violeta **Toader,** Ionel **Tudor,** Titu **Toma,** Ovidiu **Ţâţan,** Roxana **Vasile,** Marian **Voinea,** Marioara **Vrabie,** Daniel **Văcaru,** Sorina **Văcărean,** Florentin **Visescu,** Elena **Zainea**

REDACŢIA
Liceul Tehnologic „Costin Nenitescu”,
Buzău, Strada Transilvaniei, Nr. 134,
Cod. 120012, Tel. 0238725206
E_mail: ady_stan2005@yahoo.com
Coordonator proiect: Adrian Stan

Tipar: editgraph Buzău, www.editgraph.ro



” Nu spune puțin în vorbe multe, ci mult în vorbe puține”.
Pitagora

1. Istoria Matematicii

Emma Castelnuovo
-O viață dedicată matematicii-

Prof. Isaia Dida Cristina, Galați



Emma Castelnuovo s-a născut şi a trăit la Roma între 12 decembrie 1913 şi 13 aprilie 2014. Ea a crescut într-un mediu matematic de excepție. Tatăl său, Guido Castelnuovo şi unchiul său Federigo Enriques, au fost mari cercetători în domeniul geometriei algebrice – un important domeniu al cercetării matematice – şi profesori universitari. Ambii au fost foarte dedicați educației matematice şi se poate vedea influența lor în viziunea Emmei Castelnuovo asupra predării matematicii. Grație lor, **Emma Castelnuovo** a întâlnit mari matematicieni ai perioadei şi a putut vizita cercetători din străinătate.

A absolvit matematica în 1936 la Universitatea din Roma, în 1938 a câştigat concursul de ocupare a unui post într-o şcoală de stat, dar din cauza legilor rasiale a început să predea abia în anul 1945 într-o şcoală gimnazială din Roma, unde a şi rămas până la pensionarea sa din 1979. Încă de la începutul carierei sale a căutat un mod de predare care să implice activ elevii. A găsit răspunsul la această dorință în tratatul de geometrie, *Élements de géometrie* de **Alexis-Claude Clairaut,** publicat la Paris în anul 1741. Conținutul acestei cărți este apropiat textului lui Euclid, dar diferă în prezentare fiind scris cu intenții didactice, propunând probleme spre rezolvare şi încercând să ghideze elevii spre descoperire. Metoda propusă se presupune a fi fost utilizată de către primii inventatori ai geometriei, problemele plecând de la măsurarea terenurilor. Această abordare a inspirat-o pe Castelnuovo să îşi reînnoiască metoda de predare. În interpretarea sa ideile câştigătoare sunt: intuiția, problemele din viața cotidiană şi istoria. Cuvintele *intuitiv/intuiție* şi *real/realitate* au devenit comune în titlurile cărților şi articolelor ei.
Deşi tatălui ei nu îi reuşise, ea a introdus noțiuni de probabilitate în noua programă italiană pentru gimnaziu din 1970.

Cartea sa ***Geometria intuitiva, per le scuole medie inferiori*** (Geometria intuitivă, pentru şcoala secundară inferioară), publicată în 1948 şi reeditată până în 1964, a propulsat-o la nivel internațional, fiind tradusă în spaniolă şi engleză. Noua ei metodă de predare a geometriei se bazează pe materiale concrete, pe studierea obiectelor şi descoperirea proprietăților geometrice. Rigoarea nu este un punct de plecare al învățării, ci un punct de sosire atins prin implicarea activă a celor care învață, care începe de la concret spre abstract. Valoarea formativă a matematicii nu este în antiteză cu valoarea matematicii ca disciplină utilitară. Toți profesorii trebuie să aibă o implicare activă şi emoțională în procesul de predare.

Emma Castelnuovo a fost o profesoară specială din mai multe motive. În afară de creativitatea extremă în design-ul secvențelor de predare şi de libertatea sa în a interpreta programele şcolare, cu scopul de a-şi atinge obiectivele sale didactice, este remarcabil modul în care a fost capabilă să stabilească contacte internaționale şi să iasă pe scena internațională a educației matematice. Un rol dificil pentru o profesoară de gimnaziu, mai ales pentru o femeie, putând fi considerată o pioneră în domeniu.

La 93 de ani continua să țină cursuri şi conferințe despre învățarea şi predarea matematicii. În Italia, centenarul său a fost sărbătorit prin multiple manifestații ştiințifice. În anul 2014 *International Commission on Mathematical Instruction* a decis să creeze un premiu, numit Emma Castelnuovo, pentru recunoaşterea realizărilor remarcabile în practica educației matematice.

Profesor, Şcoala Gimnazială Nr. 20, Galați

Webgrafie: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Castelnuovo_Emma.html
http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/hist_mat/textes/femmes.htm

„ E greu să faci să aibă minte cine nu are voință şi încă şi mai greu să faci să aibă voință cine nu are minte ”
Gracian

2. Articole si note matematice

Aplicații ale funcțiilor continue

Prof. Lenuța Pîrlog, Buzău

Acest material prezintă o serie de aplicații ale funcțiilor de clasă C^1.

Convenim să notăm $C^K(I)=\left\{ f: I\to\mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ cu derivata de ordinul } K \text{ continua}\right\}$.

1. Să se determine funcțiile $f:[0;1]\to(0;\infty)$ de clasă C^1 care verifică relațiile: $f(1)=e\cdot f(0)$ şi

$\int_0^1 \left(f^I(x)\right)^2\,dx+\int_0^1 \frac{1}{\left(f(x)\right)^2}\,dx\le 2$**;**

Soluție: Alegem $\left(f^I(x)-\frac{1}{f(x)}\right)^2\ge 0$, atunci, $0\le\int_0^1\left(f^I(x)-\frac{1}{f(x)}\right)^2\,dx=$

$=\int_0^1\left[\left(f^I(x)\right)^2-2f^I(x)\cdot\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{\left(f(x)\right)^2}\right]=$

$\int_0^1\left[\left(f^I(x)\right)^2+\frac{1}{\left(f(x)\right)^2}\right]dx-2\int_0^1\frac{f^I(x)}{f(x)}dx\le 2-2\ln\left|f(x)\right|\Big|_0^1=2-2\ln\frac{f(1)}{f(0)}=2-2\ln e=0.$ (*).

Din (*) rezultă $f^I(x)-\frac{1}{f(x)}=0,\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow f^I(x)\cdot f(x)=1\Rightarrow\left(f^2(x)\right)^I=2\Rightarrow f^2(x)=2x+C\Rightarrow$

$f(x)=\sqrt{2x+C}, C\rangle 0$, (**). Cum $f(1)=e\cdot f(0)$ din (**) rezultă

$\sqrt{2+C}=e\cdot\sqrt{C}\Rightarrow C=\frac{2}{e^2-1}\Rightarrow f(x)=\sqrt{2x+\frac{2}{e^2-1}},\ \forall x\in[0;1].$

2. Să se determine $f:(0;\infty)\to(0;\infty)$ pentru care $f^I(\frac{1}{x})=\frac{x}{f(x)},\ x\in(0;\infty)$.

Soluție: Din $f^I(\frac{1}{x})=\frac{x}{f(x)}\Rightarrow f^I(x)=\frac{1}{x\cdot f(\frac{1}{x})}$. Derivând această relație, obținem:

$f^{II}(x)=-\frac{f^I(x)}{x}+\frac{\left(f^I(x)\right)^2}{f(x)}$. Aducând la acelaşi numitor şi împărțind apoi cu $\left(f(x)\right)^2$ rezultă

$x\cdot\frac{f^{II}(x)}{f(x)}=-\frac{f^I(x)}{f(x)}+x\cdot\left(\frac{f^I(x)}{f(x)}\right)^2\Rightarrow\ \frac{x\cdot f^{II}(x)+f^I(x)}{f(x)}-x\cdot\left(\frac{f^I(x)}{f(x)}\right)^2=0.$ Aducem din nou la acelaşi numitor şi obținem:

$$\frac{x\cdot f(x)\cdot f^{II}(x)+f(x)\cdot f^{I}(x)-x\cdot\left(f^{I}(x)\right)^2}{f^2(x)}=0\Leftrightarrow\left(\frac{x\cdot f^{I}(x)}{f(x)}\right)^{I}=0\Rightarrow\frac{x\cdot f^{I}(x)}{f(x)}=C.$$

Aşadar, $\frac{f^{I}(x)}{f(x)}=C\cdot\frac{1}{x}\Rightarrow\ln(f(x))=C\cdot\ln(x),\ x\in(0;\infty)\Rightarrow\ln(f(x))=\ln(x^C)\Rightarrow f(x)=x^C;$

3. Fie $C^K[0;1]$ **cu** $f(0)=0,\ 0\le f^{I}(x)\le 1,\ \forall x\in(0;1)$. **Să se arate că** $\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2\ge\int_0^1\left(f(x)\right)^3dx.$

Când are loc egalitatea? (Obs $C^1=C^1([0;1])=\{f:[0;1]\to\mathbb{R},\ f$ *cu derivata de ordinul* 1 *continua*$\}$ **)**

Soluție. Fie $G(t)=2\int_0^t f(x)\,dx-\left(f(t)\right)^2$. Evident, $G(0)=0-\left(f(0)\right)^2=0.$

$G^{I}(t)=2f(t)-2f(t)\cdot f^{I}(t)=2f(t)\left(1-f^{I}(t)\right)\ge 0\Rightarrow G(t)\ge 0$ şi $f(t)\cdot G(t)\ge 0$.

Fie $H(t)=\left(\int_0^t f(x)\,dx\right)^2-\int_0^t(f(x))^3dx,\ t\in[0;1]$ iar $H(0)=0,$

$H^{I}(t)=2\left(\int_0^t f(x)\,dx\right)\cdot f(t)-\left(f(t)\right)^3=f(t)\cdot G(t)\ge 0.$ Rezultă

$H(t)\ge 0\Rightarrow\left(\int_0^t f(x)\,dx\right)^2\ge\int_0^t(f(x))^3dx,$ şi $H(1)\ge 0\Rightarrow\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2\ge\int_0^1(f(x))^3dx.$ Egalitatea are loc pentru $f(t)\cdot G(t)=H^{I}(t)=0,\ \forall t\in(0;1).$ Se obține că $f(x)=x.$

Observație: $G(t)=0\Rightarrow 2\int_0^t f(x)dx=\left(f(t)\right)^2\Rightarrow\int_0^t f(x)dx=\frac{1}{2}(f(t))^2\Rightarrow\ f(t)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot f(t)\cdot f^{I}(t)\Rightarrow$

$f(t)\cdot\left(1-f^{I}(t)\right)=0\Rightarrow f^{I}(t)=1\Rightarrow f(t)=t.$

4. Fie $f:[0;\infty)\to\mathbb{R}$ **o funcție continuă cu** $\lim_{n\to\infty}f(x)=1$**. Să se calculeze** $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)dx.$

Soluție:

Vom folosi substituția $tx=u\Rightarrow x=\frac{1}{t}u,\ dx=\frac{1}{t}du,\ \left(x=0\Rightarrow u=0,\ x=1\Rightarrow u=t\right).$

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^1 f(tx)dx=\lim_{t\to\infty}\int_0^t\frac{1}{t}\cdot f(u)du=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\cdot\int_0^t f(u)du=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\cdot F(u)\Big|_0^t=\lim_{t\to\infty}\frac{F(t)-F(0)}{t}=$$

$=\lim_{t\to\infty}F^{I}(t)=\lim_{t\to\infty}f(t)=1.$ Deci, $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)dx=1.$

Profesor, Liceul “Alexandru Marghiloman”, Buzău

Bibliografie: www.edumanager.ro/community/documente/cursuri_nationale.pdf

Modele aplicative pentru calculul primitivelor unor funcții cu ajutorul ” formulei de integrare prin părți” III

Prof. Elena şi Constantin Ciobîcă, Fălticeni

Lucrarea continuă materialul publicat în numerele trecute privind metode de calcul al primitivelor utilizând integrarea prin părți.

În cadrul modelului III) avem câteva tipuri de integrale:

Fie $P(x)=s_n\cdot x^n+s_{n-1}\cdot x^{n-1}+...+s_1\cdot x+s_0$, $s_i\in R, i=\overline{0,n}, s_n\neq 0, x\in R$:

a. $\int P(x)\cdot \ln x dx$, $x>0$.

b. $\int P(x)\cdot \ln(ax)dx$, $a\in N^*, x>0$.

c. $\int P(x)\cdot \ln(bx)dx$; $b\in R^*, bx>0$. Putem avea situațiile : $b>0, x>0$ *sau* $b<0; x<0$;

d. $\int u'(x)\cdot u(x)\cdot \ln(u(x))dx$, $x\in D_u\cap D_u'$, unde funcțiile $u,: D\to R$ sunt derivabile cu derivatele continue; $u(x)>0, \forall x\in D$.

e. $\int P(x)\cdot[\ln(a_1x)+\ln(a_2x)+...+\ln(a_nx)]dx$, $a_i\in N^*, i=\overline{1,n}; x>0$.

f. $\int \frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}\cdot \ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)dx$, $x\in D_u\cap D'_u$, unde funcțiile $u,v: D\to R$ sunt derivabile cu derivatele continue; $\frac{u(x)}{v(x)}>0, \forall x\in D$.

g. $\int (u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x))\cdot \ln(u(x)\cdot v(x))dx$, $x\in D_u\cap D'_u$; Unde funcțiile $u,v: D\to R$ sunt derivabile cu derivatele continue; $u(x)\cdot v(x)>0, \forall x\in D$.

Exemple: Să se calculeze integralele:

a) $\int (3x+7)\cdot \ln x dx, x>0$; **b)** $\int (3\cdot x^2-2x+5)\cdot \ln(4x)dx; x>0$; **c)** $\int (2\sqrt[3]{3x})\cdot \ln(-\sqrt[3]{3x})dx$; $x<0$;

d) $\int u'(x)\cdot u(x)\cdot \ln(u(x))dx$, $x\in D_u\cap D'_u$. **u**nde funcțiile $u,v: D\to R$ sunt derivabile cu derivatele continue; $u(x)>0, \forall x\in D$. **e)** $\int (\cos x)\cdot(\sin x)\cdot \ln(\sin x)dx$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

f) $\int x\cdot[\ln(2x)+\ln(4x)+...+\ln(10x)]dx, x>0$; **g)** $\int x\cdot\left[\ln\left(\sqrt{3x}\right)+\ln\left(\sqrt[3]{3x}\right)+...+\ln\left(\sqrt[10]{3x}\right)\right]dx$, $x>0$

h) $\int \frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}\cdot \ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)dx$, $x\in D_u\cap D'_u$, unde funcțiile $u,v: D\to R$ sunt derivabile cu derivatele continue; $\frac{u(x)}{v(x)}>0, \forall x\in D$. **i)** $\int \frac{1}{(x+1)^2}\cdot[-\ln(x+1)]dx$; $x>-1$.

j) $\int \left(u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)\right)\cdot \ln\left(u(x)\cdot v(x)\right)dx$, $x\in D_u\cap D'_u$, unde funcțiile $u,v:D\to\mathbb{R}$ sunt derivabile cu derivatele continue; $u(x)\cdot v(x)>0,\forall x\in D$;

k) $\int (x+2)\cdot e^x\cdot \ln\left[(x+1)\cdot e^x\right]dx$, $x>-1$; **l)** $\int u'(x)\cdot\ln(u(x))dx$, $x\in D_u\cap D'_u$ unde $u:D\to\mathbb{R}$; $u(x)>0,\forall x\in D$ funcție derivabilă cu derivata continuă;

m) $\int e^x\cdot\ln\left(e^x+1\right)dx; x\in\mathbb{R}$;

Rezolvare:

a) $I=\left(3\cdot\frac{x^2}{2}+7x\right)\cdot\ln x-\frac{3}{4}\cdot x^2-7x+c$; **b)** $I=\left(x^3-x^2+5x\right)\cdot\ln(4x)-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-5x+c$

c) $f'(x)=2\cdot\sqrt[3]{3}\cdot x\Rightarrow f(x)=2\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\int xdx=\sqrt[3]{3}\cdot x^2$ $g(x)=\ln\left(-\sqrt[3]{3}x\right)\Rightarrow g'(x)=\frac{-\sqrt[3]{3}}{-\sqrt[3]{3}x}=\frac{1}{x}$.

$I=\sqrt[3]{3}\cdot x^2\cdot\ln\left(-\sqrt[3]{3}x\right)-\sqrt[3]{3}\cdot\int xdx=\sqrt[3]{3}\cdot x^2\cdot\ln\left(-\sqrt[3]{3}x\right)-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\cdot x^2+c$

d) $f'(x)=u'(x)\cdot\ln\left(u(x)\right)\Rightarrow f(x)=\int u'(x)\cdot\ln\left(u(x)\right)dx=u(x)\cdot\ln\left(u(x)\right)-\int u(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}dx=$

$=u(x)\cdot\ln\left(u(x)\right)-u(x).$ $g(x)=u(x)\Rightarrow g'(x)=u'(x)$. Aplicăm integrarea prin părți.

$I=u^2(x)\cdot\ln(u(x))-u^2(x)-\int u'(x)\cdot u(x)\cdot\ln(u(x))dx+\int u'(x)\cdot u(x)dx\Rightarrow$

$2I=u^2(x)\cdot\ln\left(u(x)\right)-u^2(x)+\frac{u^2(x)}{2}+c\Rightarrow I=\frac{1}{2}\cdot u^2(x)\cdot\ln\left(u(x)\right)-\frac{1}{4}\cdot u^2(x)+c$

e) $f'(x)=\cos x\cdot\ln(\sin x)\Rightarrow f(x)=\int(\sin x)'\cdot\ln(\sin x)dx=(\sin x)\cdot\ln(\sin x)-\int(\sin x)\cdot\frac{\cos x}{\sin x}dx=$

$=(\sin x)\cdot\ln(\sin x)-\sin x.$ $g(x)=\sin x\Rightarrow g'(x)=\cos x$. Aplicăm integrarea prin părți.

$I=(\sin^2 x)\cdot\ln(\sin x)-\sin^2 x-\int(\cos x)(\sin x)\cdot\ln(\sin x)dx+\int(\cos x)\cdot(\sin x)dx$

$I=\frac{1}{2}\cdot(\sin^2 x)\cdot\ln(\sin x)-\frac{1}{4}\cdot\sin^2 x+c$.

f) $f'(x)=x\Rightarrow f(x)=\int xdx=\frac{x^2}{2}$;

$g(x)=\ln(2x)+\ln(4x)+...+\ln(10x)\Rightarrow g'(x)=\frac{2}{2x}+\frac{4}{4x}+...+\frac{10}{10x}=\underbrace{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+...+\frac{1}{x}}_{de\ 5\ ori}=\frac{5}{x}$.

Aplicăm integrarea prin părți.

$I=\frac{x^2}{2}\cdot\left[\ln(2x)+\ln(4x)+...+\ln(10x)\right]-\frac{5}{4}\cdot x^2+c=\frac{x^2}{2}\cdot\ln\left(2^5\cdot 5!\cdot x^5\right)-\frac{5}{4}\cdot x^2+c$;

g) $f'(x)=x\Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{2}$.

$g(x)=\ln\left(\sqrt[2]{3}x\right)+\ln\left(\sqrt[3]{3}x\right)+...+\ln\left(\sqrt[21]{3}x\right)\Rightarrow g'(x)=\frac{\sqrt[2]{3}}{\sqrt[2]{3}x}+\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}x}+...+\frac{\sqrt[21]{3}}{\sqrt[21]{3}x}\Rightarrow g'(x)=\underbrace{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+...+\frac{1}{x}}_{20\ ori}=\frac{20}{x}$

$I=\frac{x^2}{2}\cdot\left[\ln\left(\sqrt[2]{3}x\right)+\ln\left(\sqrt[3]{3}x\right)+...+\ln\left(\sqrt[21]{3}x\right)\right]-5\cdot x^2+c$;

h) $f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}=\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'\Rightarrow f(x)=\int\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'dx=\frac{u(x)}{v(x)}$

$g(x)=\ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)\Rightarrow g'(x)=\frac{\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'}{\frac{u(x)}{v(x)}}$. Aplicăm integrarea prin părți:

$$I=\frac{u(x)}{v(x)}\cdot\ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)-\int\frac{u(x)}{v(x)}\cdot\frac{\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'}{\frac{u(x)}{v(x)}}dx=\frac{u(x)}{v(x)}\cdot\ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)-\int\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'dx=\frac{u(x)}{v(x)}\cdot\ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)-\frac{u(x)}{v(x)}+c$$

i) $\int\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\left[-\ln(x+1)\right]dx=\int\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\left[\ln 1-\ln(x+1)\right]dx=\int\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\ln\frac{1}{x+1}dx$

$\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{1}{x+1}\Rightarrow\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=-\frac{1}{(x+1)^2}$.

$I=-\int\left(\frac{1}{x+1}\right)'\ln\left(\frac{1}{x+1}\right)dx$. Conform exercițiului **h)** avem :

$I=\frac{u(x)}{v(x)}\cdot\ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)-\frac{u(x)}{v(x)}+c\Rightarrow I=-\frac{1}{x+1}\cdot\ln\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}+c$.

j) $f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)=\left(u(x)\cdot v(x)\right)'\Rightarrow f(x)=\int\left(u(x)\cdot v(x)\right)'dx=u(x)\cdot v(x)$

$g(x)=\ln(u(x)v(x))\Rightarrow g'(x)=\frac{(u(x)\cdot v(x))'}{u(x)\cdot v(x)}$,

$$I=u(x)\cdot v(x)\cdot\ln\left(u(x)\cdot v(x)\right)-\int u(x)\cdot v(x)\cdot\frac{\left(u(x)\cdot v(x)\right)'}{u(x)\cdot v(x)}dx=u(x)\cdot v(x)\cdot\ln\left(u(x)\cdot v(x)\right)-u(x)\cdot v(x)+c$$

k) $u(x)\cdot v(x)=(x+1)\cdot e^x\Rightarrow\left(u(x)\cdot v(x)\right)'=(x+2)\cdot e^x$. Conform exercițiului **j)** avem :

$I=(x+1)\cdot e^x\cdot\ln\left[(x+1)\cdot e^x\right]-(x+1)\cdot e^x+c$

l) $I=u(x)\cdot\ln(u(x))-\int u(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}dx=u(x)\cdot\ln(u(x))-u(x)+c$

m) $u(x)=e^x+1\Rightarrow u'(x)=e^x$. Conform exercițiului **l)** avem: $I=\left(e^x+1\right)\cdot\ln\left(e^x+1\right)-e^x-1+c$.

Profesori, Colegiul “Vasile Lovinescu”, Fălticeni.

Metoda celor mai mici pătrate

de Adrian Stan, Buzău

Metoda celor mai mici pătrate se aplică în probleme de determinare a costului de producție, a maximizării profitului, a identificării nivelului de creştere sau scădere la un moment dat a unui proces de producție.

Pentru aceasta, în funcție de natura problemei, există următoarele tipuri de funcții care intervin în aproximari şi anume, funcții liniare, parabolice, hiperbolice, exponențiale, logaritmice.

Problema 1. Considerând că evoluția strângerii sumelor la buget, conform tabelului de mai jos, se face după o funcție liniară reprezentată de o dreaptă să se determine aceasta şi să se prognozeze cât se va strânge la bugetul de stat pentru luna noiembrie?

Luna	**Ianuarie**	**Februarie**	**Martie**	**Aprilie**	**Mai**
Suma strânsă la buget (miliarde euro)	1,2	1,5	2	2,3	3

Rezolvare: Tabelul dat se va scrie de forma următoare:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
-2	1,2	4	-2,4
-1	1,5	1	-1,5
0	2	0	0
1	2,3	1	2,3
2	3	4	6
.....	.....		
8	?		
$\sum_{i=1}^{5} x_i = 0$	$\sum_{i=1}^{5} y_i = 10$	$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 10$	$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 4,4$

Funcția de ajustare fiind liniară, atunci se va lua de forma $f(x) = ax + b$. Suma pătratelor erorilor este dată de formula $F(a,b) = \sum_{i=1}^{5} [f(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^{5} (ax_i + b - y_i)^2$ şi se pune întotdeauna condiția ca suma pătratelor erorilor să fie minimă. De aici rezultă: $\begin{cases} F_a^I(a;b) = 0 \\ F_b^I(a;b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sum_{i=1}^{5} (ax_i + b - y_i) \cdot x_i = 0 \\ 2\sum_{i=1}^{5} (ax_i + b - y_i) \cdot 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{5} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{5} x_i - \sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 0 \\ a\sum_{i=1}^{5} x_i + \sum_{i=1}^{5} b - \sum_{i=1}^{5} y_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 10 + b \cdot 0 - 4,4 = 0 \\ a \cdot 0 + 5 \cdot b - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0,44, b = 2;$ De aici identificăm că dreapta de ajustare este $f(x) = 0,44x + 2$. Pentru luna noiembrie se ia x = 8, corespunzătoare lunii noiembrie, rezultând

$f(8) = 0,44 \cdot 8 + 2 = 3,52 + 2 = 5,52$ miliarde euro.

Problema 2. Valoarea profitului înregistrat de o firmă timp de patru trimestre este următorul:

Trimestrul	**1**	**2**	**3**	**4**
Valoarea profitului (în milioane lei)	**10**	**14**	**20**	**18**

Considerând că evoluția profitului firmei se face după o parabolă, să se determine ecuația acesteia şi să se prognozeze ce profit va obține firma.

Rezolvare: Conform datelor problemei, asociem problemei următorul tabel:

x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
-2	10	4	-8	16	-20	40
-1	14	1	-1	1	-14	14
0	20	0	0	0	0	0
1	18	1	1	1	18	18
$\sum_{i=1}^{4} x_i = -2$	$\sum_{i=1}^{4} y_i = 62$	$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 6$	$\sum_{i=1}^{4} x_i^3 = -8$	$\sum_{i=1}^{4} x_i^4 = 18$	$\sum_{i=1}^{4} x_i y_i = -16$	$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 y_i = 72$

Funcția de ajustare este una pătratică şi are forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Suma pătratelor erorilor este dată de funcția $F(a,b,c) = \sum_{i=1}^{4} [f(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^{4} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$. Din condiția ca suma pătratelor erorilor să fie minimă rezultă:

$$\begin{cases} F_a^I(a;b;c) = 0 \\ F_b^I(a;b;c) = 0 \\ F_c^I(a;b;c) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sum_{i=1}^{4} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \cdot x_i^2 = 0 \\ 2\sum_{i=1}^{4} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \cdot x_i = 0 \\ 2\sum_{i=1}^{4} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{4} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{4} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{4} x_i^2 - \sum_{i=1}^{4} x_i^2 y_i = 0 \\ a\sum_{i=1}^{4} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{4} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{4} x_i - \sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 0 \\ a\sum_{i=1}^{4} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{4} x_i + 4c - \sum_{i=1}^{4} y_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18a - 8b + 6c - 72 = 0 \\ -8a + 6b - 2c + 16 = 0 \\ 6a - 2b + 4c - 62 = 0 \end{cases}$$

Din $c = -4a + 3b + 8 \Rightarrow$

$$\begin{cases} -3a - b = 12 \\ -5a + 5b = 15 \end{cases} \Rightarrow a = -3,75,\ b = -0,75 \Rightarrow c = 19,75.$$ Se obține funcția

$f(x) = -3,75x^2 - 0,75x + 19,75$. Pentru prognoza pentru următorul trimestru, se ia x=2 obținându-se

$f(2) = -3,75 \cdot 4 - 0,75 \cdot 2 + 19,75 = -15 - 1,5 + 19,75 = 3,25$.

Prof. Liceul Tehnologic „Costin Nenițescu” Buzău

Bibliografie:

Silviu Dedu, Florentin Şerban. Matematici aplicate în economie. Editura Teocora. 2009.

O condiție necesară şi suficientă pentru ca o dreaptă să treacă printr-un punct din planul unui triunghi

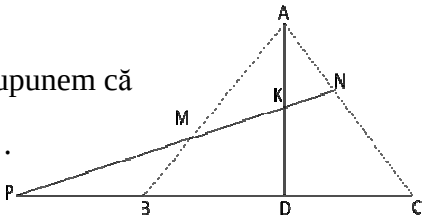
Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

În această notă vom obține o relație care exprimă o condiție necesară şi suficientă pentru ca o dreaptă să treacă printr-un punct ce aparține interiorului unui triunghi. Prin particularizări vom regăsi probleme publicate în *Gazeta Matematică* iar altele sunt posibil noi. Se vor analiza şi unele cazuri în care punctul aparține exteriorului triunghiului.

1. Astfel, fie triunghiul ABC, două puncte D şi K situate pe (BC) şi respectiv pe (AD). O dreaptă care trece prin punctul K taie (AB) şi respectiv pe (AC) în punctul M şi respectiv în punctul N. Notăm: $\frac{BM}{MA}=x$, $\frac{CN}{NA}=y$, $\frac{AK}{DK}=r$, $\frac{BD}{DC}=p$, unde x,y,r,p sunt numere reale strict pozitive.

Teoremă. *Dreapta MN trece prin punctul K dacă şi numai dacă avem relaţia* $rx+rpy=1+p$, (*).

Demonstraţie.



Dacă $MN\|BC$, atunci $x=y=\frac{1}{r}$ şi relaţia este imediat verificată. Presupunem că MN nu este paralelă cu BC, atunci $MN\cap BC=\{P\}$. Fie $y>x$. Aplicăm teorema lui *Menelaus* în triunghiurile ABD şi ABC şi obţinem

$\frac{BM}{MA}\cdot\frac{AK}{DK}\cdot\frac{PD}{PB}=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{r}\cdot\frac{PB}{PD}$, (1); respectiv $\frac{PB}{PC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AM}{MB}=1\Leftrightarrow\frac{PB}{PC}=\frac{x}{y}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{PB}{a}=\frac{x}{y-x}\Leftrightarrow PB=\frac{xa}{y-x}$, (2). Folosind relaţia (2) avem $PC=PB+a=a+\frac{xa}{y-x}=\frac{ya}{y-x}$.

Din $\frac{BD}{DC}=\frac{p}{1}$ obţinem $BD=\frac{ap}{1+p}$ şi $PD=PB+BD=\frac{xa}{y-x}+\frac{ap}{1+p}=\frac{a(x+py)}{(y-x)(1+p)}$.

Cu acestea relaţia (1) devine $x=\frac{1}{r}\cdot\frac{xa}{y-x}\cdot\frac{(1+p)(y-x)}{a(x+py)}\Leftrightarrow x=\frac{1}{r}\cdot\frac{x(1+p)}{x+py}\Leftrightarrow rx+rpy=1+p$, adică relaţia ce trebuia demonstrată.

Reciproc. Se dă relaţia $rx+rpy=1+p$, (*) şi demonstrăm că punctul $K\in MN$.

Demonstraţie. Fie $D\in(BC)$ astfel încât $\frac{BD}{DC}=p$ şi presupunem prin absurd că $MN\cap AD=\{K'\}$, atunci conform teoremei directe avem $r'x+r'py=1+p$, (3). Scăzând relaţiile (3) şi (*) obţinem $(r'-r)x+(r'p-rp)y=0\Leftrightarrow(r'-r)(x+py)-0,\ \forall x,y>0\Leftrightarrow r'=r$, ceea ce arată că punctele K şi K' coincid.

1.1. *$K=H$ (ortocentrul triunghiului ABC ascuţitunghic): $H\in MN\Leftrightarrow xtgB+ytgC=tgA$.*

Demonstraţie. Calculând rapoartele p şi r obţinem

$p=\frac{BD}{DC}=tgC\cdot ctgB$, $r=\frac{AH}{DH}=\frac{\cos A}{\cos B\cdot\cos C}$ şi înlocuind în relaţia (1) deducem

$\frac{\cos A}{\cos B\cdot\cos C}\cdot x+\frac{\cos A}{\cos B\cdot\cos C}\cdot\frac{\sin C}{\cos C}\cdot\frac{\cos B}{\cos C}\cdot y=1+\frac{\sin C}{\cos C}\cdot\frac{\cos B}{\sin B}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{\cos A}{\cos B}\cdot x+\frac{\cos A}{\cos C}\cdot\frac{\sin C}{\sin B}\cdot y=\frac{\sin A}{\sin B}\Leftrightarrow xtgB+ytgC=tgA$.

1.2. *Dreapta MN trece prin centrul simedian (punctul lui Emile Lemoine (1840-1906)) dacă şi numai dacă $b^2x+c^2y=a^2$.*

Demonstraţie. Cu teorema lui *Steiner* avem $p=\frac{BD}{DC}=\frac{c^2}{b^2}$. Aplicând teorema lui *Van Aubel* rezultă

$\frac{AK}{DK}=\frac{AS_1}{BS_2}+\frac{AS_2}{CS_2}$, unde $S_1\in(AB)$ şi $S_2\in(AC)$, sunt picioarele simedianelor duse din vârfurile C şi B ale triunghiului.

Deci $r=\frac{AK}{DK}=\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}=\frac{b^2+c^2}{a^2}$. Înlocuind în relația (1) avem $\frac{b^2+c^2}{a^2}\cdot x+\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{b^2+c^2}{a^2}\cdot y=1+\frac{c^2}{b^2}\Leftrightarrow b^2x+c^2y=a^2$.

1.1. *Dreapta MN trece prin punctul O (centrul cercului circumscris ΔABC ascuțitunghic) dacă şi numai dacă $x\sin 2B+y\sin 2C=\sin 2A$.*

Demonstrație. Cu teorema sinusurilor aplicată în ΔABC şi în ΔABA_1 unde $\{A_1\}=AO\cap BC$ rezultă $\frac{CA_1}{\sin(\angle A_1AC)}=\frac{AC}{\sin(\angle CA_1A)}\Rightarrow CA_1=\frac{b\cos B}{\cos(B-C)}$;

$$\frac{BA_1}{\sin(\angle BAA_1)}=\frac{AB}{\sin(\angle BA_1A)}\Rightarrow BA_1=\frac{c\cos C}{\cos(B-C)}.$$

Prin urmare $p=\frac{BA_1}{CA_1}=\frac{c\cos C}{b\cos B}=\frac{\sin 2C}{\sin 2B}$. Cu teorema lui *Van Aubel* avem

$$\frac{AO}{OA_1}=\frac{AC_1}{BC_1}+\frac{AB_1}{CB_1}\Leftrightarrow\frac{AO}{OA_1}=\frac{\sin 2B}{\sin 2A}+\frac{\sin 2C}{\sin 2A}=\frac{2\sin A\cos(B-C)}{\sin 2A}=\frac{\cos(B-C)}{\cos A}.$$

Înlocuind în teoremă obținem

$$\frac{\cos(B-C)}{\cos A}\cdot x+\frac{\sin 2C}{\sin 2B}\cdot\frac{\cos(B-C)}{\cos A}\cdot y=1+\frac{\sin 2C}{\sin 2B}\Leftrightarrow x\sin 2B+y\sin 2C=\sin 2A.$$

1.4. *$K=\Gamma$ (punctul lui Joseph Diaz Gergonne)* $\Leftrightarrow\frac{x}{p-b}+\frac{y}{p-c}=\frac{1}{p-a}$.

Demonstrație. $\frac{BD}{DC}=\frac{p-b}{p-c}$, p fiind semiperimetrul triunghiului; $r=\frac{A\Gamma}{D\Gamma}$. Folosind teorema lui Van Aubel avem $\frac{A\Gamma}{D\Gamma}=\frac{AC_1}{BC_1}+\frac{AB_1}{CB_1}$, unde $\{D\}=A\Gamma\cap BC$, $\{C_1\}=C\Gamma\cap BA$, $\{B_1\}=B\Gamma\cap CA$. Adică $\frac{A\Gamma}{D\Gamma}=\frac{p-a}{p-b}+\frac{p-a}{p-c}=\frac{(p-a)a}{(p-b)(p-c)}$. Înlocuind în teoremă obținem

$$\frac{a(p-a)}{(p-c)(p-c)}\cdot x+\frac{(p-b)(p-a)a}{(p-c)(p-b)(p-c)}\cdot y=\frac{a}{p-c}\Leftrightarrow\frac{x}{p-b}+\frac{y}{p-c}=\frac{1}{p-a},\ \text{q.e.d.}$$

1.5. *$K=N$ (punctul lui Christian Heinrich Von Nagel (1803-1882))* $\Leftrightarrow(p-b)x+(p-c)y=p-a$. *Demostrația* este analoagă cu cea de la 1.4.

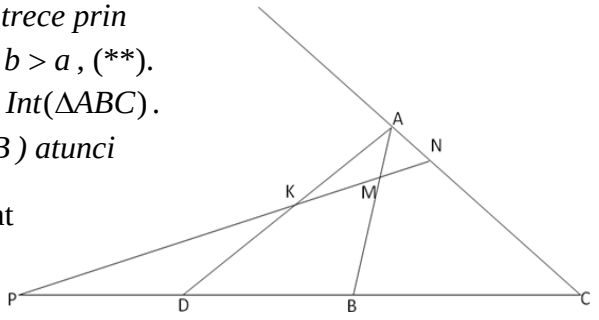
1.6. *Dacă $K=G$ (centrul de greutate al triunghiului ABC) atunci $p=1, r=2$ şi înlocuite în teoremă obținem problema* [1].

1.7. *Dacă $K=I$ (centrul cercului înscris în triunghiul ABC) atunci $p=\frac{b}{c}$, $r=\frac{b+c}{a}$ şi înlocuite în teoremă obținem problemele* [2] şi [3].

2. *Dacă $K\in Int(\angle ACB)-[ABC]$ atunci dreapta MN trece prin punctul K dacă şi numai dacă $rx-rpy=1-p, b>c, b>a$, (**).*

Demostrația este analoagă celei date pentru cazul $K\in Int(\Delta ABC)$.

2.1. *Dacă $K=I_C$ (centrul cercului exînscris laturii AB) atunci* $p=\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b}\Leftrightarrow\frac{BD}{a}=\frac{c}{b-c}\Leftrightarrow BD=\frac{ac}{b-c}$ (s-a aplicat teorema bisectoarei exterioare).



În ΔABD avem $\frac{AK}{DK}=\frac{c}{DB}\Leftrightarrow\frac{AK}{DK}=\frac{c(b-c)}{ac}=\frac{b-c}{a}=r$. Înlocuind în relația (**) obținem $I_C\in MN\Leftrightarrow bx-cy=a$.

Analog se analizează şi celelalte cazuri în care $K\in Ext(\Delta ABC)$.

Lucrarea de mai sus a fost prezentată detaliat, la a 39-a sesiune de comunicări ştiințifice organizată de filialele SSMR ale județului Prahova, Sinaia, 16 noiembrie 2013.

Bibliografie:

[1] Problema 15624, G.M-B , nr. 2 , 1976, pag.59 (Admitere la I.P. Bucureşti în 1975).
[2] Problema 19897, G.M.-B, nr.10 -11 , 1983, pag. 417 (autor *Constantin Rusu*).
[3] Problema 21237, G.M.-B, nr. 10 , 1987, pag.364 (autor *Călin Burduşel*).

Educația matematică în formarea personalității umane

Stănescu Gabriela, Stănescu Florin, Dâmbovița

"**Matematica este principalul mijloc de educare a gândirii raționale, corecte şi inovative a omului"**.

Solomon Marcus

Matematica îl întâmpină pe novice cu o aură de stranietate, aproximativ proporțională cu numărul mare de simboluri pe care le utilizează. Există în simbolismul matematic, ceva supărător, pentru că deşi solicită răbdarea, nu prea pare să promită si plăcere. În matematică e nevoie mai întâi de investiții, înainte de a obține un câştig, iar ceea ce se câştigă nu este niciodată la fel de palpabil cu ceea ce s-a investit.

Stimulii senzoriali şi verbali emanați prin analiza unor realități, lasă în mintea receptorului anumite urme, imprimări sau impresii care constituie informația matematică. În sens larg, arată Not (1986-p 3),,se cheamă informație, orice dată inteligibilă, indiferent de ce natură ar fi ea".

Comportamentul celui ce este pasionat de lucrul matematic nu este întâmplător o creştere sau o scădere a cantității de informație generează schimbări semnificative în comportare. Pentru o personalitate abstractă, mesajul matematic este un conținut informațional semantic, purtător de semnificații, **''un set de informații structurate după anumite reguli ce formează un tot inteligibil, exploatabil si transmisibil**"(Bureau,1972)

Studiul matematicii este mult confortabilă şi în firea lucrurilor, în dreptul unei personalități cu o gândire logică, intuitivă gata să prelucreze un conținut semantic determinat de reguli si condiții. Într-un parcurs frecvent al exersării pline de ramificații, învățarea matematicii contribuie nu doar la flexibilizarea minții şi extinderea orizontului de cunoaştere, dar şi la formarea caracterului şi conturarea unor trăsături cardinale, definitorii cum ar fii independența voinței, perseverența, responsabilitatea, fără să excludem formarea gândirii critice sau a rezervei critice. Persoana care studiază matematica şi operează cu reguli, metode matematice, proprietăți şi condiții nu poate fi manipulată.

Educația matematică amplifică aportul integrității intelectuale, obiectivității dar şi a capacității de muncă a persoanei stimulând efortul prelungit. O schemă grafică, o imagine, o expresie scrisă într-un enunț sau o expresie verbală, determină transmiterea unui orizont de cunoaştere şi implicit a unui mesaj în intenția de a provoca '"receptorul"' determinându-i mesaje în sfera emotivă.

O idee neaşteptată, un rezultat şi un raționament elegant poate determina trăiri şi sentimente speciale ce se reflectă asupra încrederii şi stimei de sine dar şi asupra elementului estetic, completând latura creativă si artistică a persoanei. Matematicianul francez H. Poincaré arăta că înțelegerea noțiunilor matematice reprezintă un fapt subiectiv: în timp ce unii vor căuta corectitudinea înlănțuirii raționamentelor şi logica argumentării, alții vor încerca să înțeleagă modul de combinare, de înlănțuire a raționamentelor folosite, iar o altă parte va căuta să găsească utilitățile practice ale

noțiunilor matematice întâlnite.

Ceea ce, în mod obişnuit numim "cunoştințe" reprezintă acumulări, adevărate construcții intelectuale sau chiar creații elaborate pe baza procesării de informații. Acumulările matematice înseamnă, aşadar a construi reprezentări şi cunoştințe şi a dezvolta comportamente de cunoaştere în mai multe arii profesionale, plecând de la procesări de informații, date şi teme, care sunt precursorii cunoştințelor (Tofler,1995,p 424).

Cunoştințele celui ce studiază matematica devin astfel instrumente utilizabile în noi elaborări, pentru a reconstrui sau descoperi conținuturi noi ale universului de cunoaştere, dacă luăm în discuție chiar originea greacă a cuvântului "matematica"' un derivat de la cuvântul de origine greacă "matema"-roadă, recoltare. O altă explicație a provenienței cuvântului ține de grecescul "mathein"-a învăța, a cunoaşte.

Matematica conține şi o importantă componentă practică, astfel că pentru a se orienta şi a trăi în lumea contemporană fiecare individ trebuie să dispună de un set de cunoştințe şi capacități matematice: deprinderi de calcul, elemente de geometrie practică – măsurarea dimensiunilor, identificarea şi reprezentarea figurilor geometrice, operarea cu funcții şi grafice, alcătuirea şi rezolvarea proporțiilor, estimarea probabilității producerii unui eveniment etc. Delimitarea loturilor de pământ (geometria), determinarea termenilor lucrărilor agricole (în baza observațiilor astronomice şi a calculelor), pregătirea cantității necesare de semințe şi calculul mărimii recoltei necesita cunoştințe matematice serioase. Cele două etimologii conduc, de asemenea, la reliefarea celor două funcții principale ale matematicii: una – **generatoare de intelect** şi alta **– instrumentală** .

"Eminescu nu face parte din categoria (...) poeților-matematicieni, ci dintr-o alta mult mai largă, în care trebuie să-i includem pe Novalis, pe Paul Valéry, pe Lucian Blaga, pe Camil Petrescu, Nichita Stănescu şi pe mulți alții care, scriitori fiind, au trăit cu intensitate nevoia umană de a înțelege lumea, o lume care include ştiința ca o parte esențială a ei. Curiozitatea intelectuală este o parte organică a personalității lor. Eminescu s-a comportat în această privință cu întreaga modestie a celui care vrea să învețe. (...) Eminescu nu a avut nici un moment intenția de a deveni matematician, fizician, chimist sau biolog. El nu a făcut decât să dea curs imensei sale mirări în fața lumii şi a făcut un efort considerabil de a înțelege măcar o părticică din tainele universului." Solomon Marcus

Stănescu Gabriela-psiholog şcolar, Centrul Județean de Asistență Educațională DÂMBOVIȚA
Stănescu Florin-profesor,Şcoala "Şerban Cioculescu", Găeşti

Bibliografie:

Solomon, Marcus, Educația în spectacol, Spandugino, Bucureşti 2011
Ioan, Cerghit,Sisteme de instruire alternative si complementare, Editura Polirom 2008.

O demonstrație pentru inegalitatea Ionescu-Weitzenböck

de Titu Zvonaru, Comăneşti

- Pe de o parte, folosind formule binecunoscute şi inegalitatea $\sum \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} \geq 6$, avem:

$$\sum (b+c)w_a = \sum (b+c)\cdot \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} = \sum \frac{2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = 2S\sum \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} \geq 12S, \qquad (1).$$

- Pe de altă parte, folosind inegalitatea $w_a \leq m_a$ şi inegalitatea C-B-S obținem:

$$\sum (b+c)w_a \leq \sum (b+c)m_a \leq \sqrt{\left(\sum (b+c)^2\right)\left(\sum m_a^2\right)} \leq \sqrt{4\sum a^2 \cdot \frac{3}{4}\sum a^2} = \sqrt{3}\sum a^2, \ (2).$$

(inegalitate care face obiectul problemei **X.411** din **RMT nr. 2/2015**, propusă de *Marian Cucoaneş*).

- Din (1) şi (2) rezultă că $12S \leq \sqrt{3}\sum a^2 \Leftrightarrow \sum a^2 \geq 4\sqrt{3}S$, i.e. inegalitatea I-W.

Ridicarea la putere a matricelor de ordin $n \geq 4$

Prof. Gheorghe Ghiță, Buzău

Deoarece problema ridicării la putere pentru matricile pătratice de ordinul 2 şi 3 a fost prezentată în diferite lucrări([1],[2]), articolul de față îşi propune să abordeze ridicarea la putere a matricelor pătratice de ordin $n \geq 4$, în care se face apel la polinomul caracteristic asociat matricei respective şi la teorema împărțirii cu rest pentru polinoame.

Fie $A \in M_n(R)$, $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$.

Definiție. Se numeşte **minor principal de ordinal k** al matricei A un minor de ordinul k format la intersecția a k linii şi coloane cu acelaşi indice.

Definiție. Se numeşte **polinom caracteristic** al matricei A, polinomul cu coeficienți reali:

$$K(x) = \det(A - xI_n) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Teoremă. Forma algebrică a polinomului caracteristic al matricei A, este:

$$K(x) = (-1)^n \left(x^n - \partial_1 x^{n-1} + \partial_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} x \partial_{n-1} + (-1)^n \partial_n \right),$$

unde : $\partial_1 = \sum_{i+1}^{n} a_{ii} = Tr(A)$ se numeşte urma(în engleză trace) matricei A;

$\partial_2 = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{13} \\ a_{31} & a_{33}-x \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix}$; în general ∂_i = suma minorilor de ordin i; $\partial_{n-1} = Tr(A^*)$; $\partial_n = \det(A)$.

Demonstrație. Demonstrez teorema pentru n = 4, celelalte cazuri se demonstrează analog.

$$K(x) = \det(A - xI_4) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-x & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-x \end{vmatrix} = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d. \quad (*)$$

Pentru $x = 0 \Rightarrow K(0) = d = \partial_4$. Derivând egalitatea (*), avem:

$$K^I(x) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-x & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-x & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-x \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-x & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{22}-x & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33}-x & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44}-x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33}-x & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44}-x \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44}-x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-x \end{vmatrix} = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c.$$

Pentru

$$x=0\Rightarrow K^{I}(0)=-\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{14}\\a_{31}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{44}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{24}\\a_{41}&a_{42}&a_{44}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\Rightarrow c=-\partial_3.$$

$$K^{II}(x)=2\left(\begin{vmatrix}a_{11}-x&a_{12}\\a_{21}&a_{22}-x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}-x&a_{13}\\a_{31}&a_{33}-x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}-x&a_{14}\\a_{41}&a_{44}-x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}-x&a_{23}\\a_{32}&a_{33}-x\end{vmatrix}+\right.$$

$$\left.\begin{vmatrix}a_{22}-x&a_{24}\\a_{42}&a_{44}-x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{33}-x&a_{34}\\a_{43}&a_{44}-x\end{vmatrix}\right)=12x^2+6ax+2b. \qquad (**)$$

Pentru

$$x=0\Rightarrow K^{II}(0)=2\left(\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{14}\\a_{41}&a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{24}\\a_{42}&a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{33}&a_{34}\\a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}\right).=2b\Rightarrow b=\partial_2.$$

Derivăm relația (**) şi pentru x = 0, se obține că $K^{III}(0)=-6(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})=6a\Rightarrow a=-\partial_1.$

În concluzie, pentru o matrice de ordinul 4, polinomul caracteristic este:

$$K(x)=x^4-\partial_1x^3+\partial_2x^2-\partial_3x+\partial_4.$$

Definiție. Ecuația k(x) = 0 se numeşte **ecuația caracteristică asociată matricei A**. Rădăcinile acesteia (n rădăcini complexe, nu neapărat distincte) se numesc **valorile proprii** ale matricei A.

Un rezultat extrem de important este :

Teorema (Cayley-Hamilton). Orice matrice pătratică verifică propria sa ecuație caracteristică, adică:

$$A^n-\partial_1A^{n-1}+\partial_2A^{n-2}-\ldots+(-1)^{n-1}\partial_{n-1}A+(-1)^n\partial_nI_n=O_n.$$

In continuare, vom prezenta o nouă teoremă care să ne ajute în obținerea metodei.

Teoremă. Dacă $A\in M_n(R)$, $m\in N$, şi r este restul împărțirii lui X^m la K(X), atunci

$$A^m = r(A).$$

Demonstrație. Aplicând teorema împărțirii cu rest a polinoamelor pentru X^m şi k(X) din **R**[X], există în mod unic polinoamele g, $r\in$ **R**[X], astfel încât:

X^m = k(X)g(X) + r(X), cu grad r < grad k, şi atunci:

A^m = k(A)g(A) + r(A).

Din teorema Cayley-Hamilton, rezultă k(A) = O_n, şi deci A^m = r(A).

Exemple. Să se calculeze A^n pentru matricele:

$$\textbf{1)}\ A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&-2\\1&0&-2&5\end{pmatrix}. \qquad \textbf{2)}\ A=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\1&3&1&1\\0&0&1&-1\\-1&-1&0&2\end{pmatrix}.$$

1) Avem: $\partial_1=Tr(A)=8;$

$$\partial_2=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1\\1&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0\\0&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-2\\-2&5\end{vmatrix}=13;$$

$$\partial_3=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\1&-2&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&-2&5\end{vmatrix}=6;\partial_4=\det(A)=0;$$

$K(x)=x^4-8x^3+13x^2-6x=x(x-1)^2(x-6)$. Din teorema împărțirii cu rest pentru polinoame, avem: $x^n=K(x)g(x)+ax^3+bx^2+cx+d$, şi de aici: $A^n=aA^3+bA^2+cA+dI_4$.

Pentru $x=0\Rightarrow d=0;\ x=1\Rightarrow a+b+c+d=1;\ x=6\Rightarrow 216a+36b+6c+d=6^n$; derivăm relația din teorema împărțirii cu rest, obținem:

$nx^{n-1} = 2(x-1)x(x-6)g(x) + (x-1)^2[x(x-6)g(x)]' + 3ax^2 + 2bx + c$, şi de aici pentru $x = 1 \Rightarrow 3a + 2b + c = n$. Obținem sistemul:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 36a+6b+c=6^{n-1} \\ 3a+2b+c=n \end{cases}.$$

cu soluția: $a = \frac{6^{n-1}-5n+4}{25}; b = \frac{35n-2\cdot 6^{n-1}-33}{25}; c = \frac{6^{n-1}-30n+54}{25}$.

Deoarece $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & -12 \\ 6 & 0 & -12 & 30 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -14 & 28 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -14 & 0 & 19 & -72 \\ 19 & 1 & -38 & 95 \end{pmatrix}$, obținem;

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{6^{n-1}+4}{5} & 0 & \frac{2-2\cdot 6^{n-1}}{5} & \frac{17\cdot 6^{n-1}+40n-32}{25} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2-2\cdot 6^{n-1}}{5} & 0 & 1 & -2\cdot 6^{n-1} \\ \frac{8\cdot 6^{n-1}+85n-68}{25} & 0 & \frac{136-16\cdot 6^{n-1}-170n}{25} & \frac{40\cdot 6^{n-1}+425n-340}{25} \end{pmatrix}.$$

Pentru 2) obținem:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ -5 & -5 & -1 & 3 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 20 & 12 & 12 \\ 6 & 6 & 2 & -6 \\ -18 & -18 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^n = aA^3 + bA^2 + cA + dI_4 = 2^{n-3} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 4n & 4n+8 & 4n & 4n \\ n^2-n & n^2-n & n^2-5n+8 & n^2-5n \\ -n^2-3n & -n^2-3n & -n^2+n & -n^2+n+8 \end{pmatrix}.$$

Bibliografie:

[1] **N. Stanciu**, *Un algoritm general pentru ridicarea la putere a matricelor de ordinul 3*,Revista Electronică
MateInfo, noiembrie 2010.
[2] **Gh. Ghiță**, *O metodă de ridicare la putere a matricelor*, Gazeta Matematică ,Anul CIX, nr.5-6/2004
[3] **M. Ganga**, Matematică. *Manual pentru clasa a XI-a*, Editura MATHPRESS, Ploieşti,2006
[4**] M. Ganga**, Matematică. *Manual pentru clasa a XII-a*, Editura MATHPRESS, Ploieşti,2002

„ Dacă cineva n-a greşit niciodată înseamnă
că n-a încercat să facă nimic nou .”
Albert Einstein

3. Probleme rezolvate

▪ Învățământ primar

P:342. Determinați numărul x din egalitatea $\left[x:(100-35)+x:(100-69)\right]\cdot 11=1056$**.**

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Rezolvare: Se utilizează metoda mersului invers: $\left[x:(100-35)+x:(100-69)\right]\cdot 11=11\cdot 96\left|:11\right.\Rightarrow$

$(x:65+x:31)=96\left|\bullet(65\cdot 31)\right.\Rightarrow\ x\cdot 31+x\cdot 65=96\cdot 65\cdot 31\Rightarrow\ 96x=96\cdot 65\cdot 31\left|:96\right.\Rightarrow$

$x=65\cdot 31=2015$.

P:343. Determinați suma a trei numere, ştiind că dacă îl adunăm pe primul cu al doilea obținem 1342, dacă îl adunăm pe primul cu al treilea obținem 1343, iar dacă îl adunăm pe al doilea cu al treilea obținem 1345. **Constantin Apostol**, Rm. Sărat

Rezolvare: Fie a, b, c, cele trei numere. Putem scrie următoarele egalități:
$a+b=1342$, $a+c=1343$, $b+c=1345$ Adunând cele trei egalități obținem:
$a+b+a+c+b+c=1342+1343+1345$, de unde rezultă: $2a+2b+2c=4030$, adică:
$2(a+b+c)=4030$, deci: $a+b+c=4030:2=2015$;
Aşadar, suma celor trei numere este egală cu 2015.

P:344. Un număr natural împărțit la 11 se micşorează cu 80. Aflați numărul.

Adrian Stan, Buzău

***Rezolvare*:**
$n:11=n-80$.Înmulțim egalitatea cu 11, de unde rezultă $n=(n-80)\cdot 11$ sau $n=11n-880$. Inversăm şi scriem $11n-880=n$ adică $11n-n=880$ sau 10n =880 , n=88.

P:345. Mihai şi-a propus să rezolve într-o săptămână de două ori mai multe probleme decât colegul sau, Mircea. Astfel, el a lucrat în prima zi a săptămânii un număr de probleme egal cu câtul numerelor 36 si 9, iar în fiecare din zilele următoare, a rezolvat cu câte două probleme în plus față de numărul problemelor din ziua precedentă. Câte probleme a rezolvat Mircea ?

Marinescu Gabriela, Buzău

Rezolvare: Aflăm câte probleme a rezolvat Mihai:
36:9 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = 70(probleme)
Aflăm câte probleme a rezolvat Mircea: 70 : 2 = 35(probleme)
Sau : Aflăm câte probleme a rezolvat Mircea:
36 : 9 :2 + 6 : 2 + 8 : 2 + 10 : 2 + 12 : 2 + 14 : 2 + 16 : 2 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 35 (probleme)

P:346. Arătați că oricare ar fi şase numere pare, există cel puțin două a căror diferență se împarte exact la 10.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

***Rezolvare*:**
Ştiind că numerele pare au ultima cifră pară, iar cifrele pare sunt 0, 2, 4, 6 şi 8, adică sunt cinci cifre pare, deducem că având şase numere pare, cel puțin două dintre numere se vor termina cu aceeaşi cifră, deci diferența lor va fi un număr care se termină cu zero, aşadar, se împarte exact la 10.

▪ Clasa a V-a

G:499. Într-o clasă sunt 30 de elevi. Dacă două cincimi din ei participă la concursul de matematică şi cinci şesimi la concursul de română, aflați câți participă la ambele.

Claudia Popa, Berca, Buzău

Rezolvare: 12 elevi participă la matematică şi 25 la română, prin urmare 12+25 – 30 = 7 elevi participă la ambele concursuri;

G:500. Să se afle trei numere ştiind că îndeplinesc următoarele condiții : primul este cu 11 mai mare decât al doilea , al doilea este de patru ori mai mic decât al treilea , iar al treilea este cu 1 mai mare decât primul .

Marin Simion, Rm . Sărat

Rezolvare : Dacă notăm numerele cu **x+11, x** şi **4x** obținem ecuația 4x = x +11+1 , care are soluția x = 4 .

G:501 . Determinați numerele naturale x, diferite de zero, care împărțite la 1986 dau ca rest pătratul câtului.

Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Din teorema împărțirii cu rest rezultă, $x = 1986 \cdot a + a^2$ cu $a^2 \langle 1986 \Rightarrow a \in \{1;2;3;...;44\}$, atunci, mulțimea soluțiilor este $S = \{1986 \cdot 1 + 1^2; 1986 \cdot 2 + 2^2; ....; 1986 \cdot 44 + 44^2\}$ adică $S = \{1987; 3976; .....; 89320\}$.

G:502. Fie numărul $a = \underbrace{111...1}_{2014\ de\ 1} + \underbrace{222...2}_{2014\ de\ 2} + ... + \underbrace{555...5}_{2014\ de\ 5} \in \mathbb{N}$ **. Determinați câte cifre de 6 conține numărul a.**

Cornelia Gurău, Moineşti, Bacău

Rezolvare: $a = \underbrace{111...1}_{2014\ de\ 1} + \underbrace{222...2}_{2014\ de\ 2} + ... + \underbrace{555...5}_{2014\ de\ 5} = (1+2+3+4+5) \cdot \underbrace{111...1}_{2014\ de\ 1} = 15 \cdot \underbrace{111...1}_{2014\ de\ 1} = 1\underbrace{666....6}_{2013\ de\ 6}5$.

Numărul a conține 2015 cifre, iar cifre de 6 sunt în număr de 2013.

G:503. Să se calculeze A^{2015}, unde $A = 2^{2015} - 2^{2014} - 2^{2013} - ... - 2^2 - 2 - 1$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Rezolvare: Se calculează din aproape în aproape diferența a câte doi termeni consecutivi,

$2^{2015} - 2^{2014} = 2^{2014}$,

$2^{2014} - 2^{2013} = 2^{2013}, ..., 2^2 - 2 = 2, 2 - 1 = 1$, aşadar, $A = 1, A^{2015} = 1$.

Altfel, $A = 2^{2015} - (2^{2014} + 2^{2013} + ... + 2^2 + 2 + 1) = 2^{2015} - (2^{2015} - 1) = 1.$

G:504. Scrieți numărul 169^n ca sumă de două pătrate perfecte.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

Rezolvare: $169^n = (12^2 + 5^2) \cdot 169^{n-1} = (12^2 + 5^2) \cdot \left(13^{n-1}\right)^2 = \left(12 \cdot 13^{n-1}\right)^2 + \left(5 \cdot 13^{n-1}\right)^2$.

G:505. După ce se amplifică prin 3, o fracție subunitară devine simplificabilă cu 6. Aflați fracția, ştiind că termenii ei sunt cuburi cu suma 224.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare: Cum $6 = 2 \bullet 3$, fracția se va simplifica şi prin 2, deci are termeni pari şi cum 8 +216= 224, atunci soluția este $\frac{2^3}{6^3} = \frac{8}{216}$.

G:506. Arătați că numerele $a = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2014}$ **şi** $b = 32^{403} - 1$ **sunt egale.**

Alexandru Elena-Marcela, Baia , Suceava

Rezolvare: $a = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2014}$

$$\underline{a = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2014}}$$

$2a = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{2015} \Rightarrow 2a = a + 2^{2015} - 1 \Rightarrow a = 2^{2015} - 1$

şi $b = (2^5)^{403} - 1 \Rightarrow b = 2^{2015} - 1$. Deci $a = b$.

G:507. Arătați că numărul $2013 \cdot 2014 \cdot 2015 + 2014$ **este cub perfect.**

Radu Ion, Bozioru, Buzău

Rezolvare: $2013 \cdot 2015 = (2014 - 1) \cdot (2014 + 1) = 2014^2 - 1$.

$2013 \cdot 2014 \cdot 2015 + 2014 = 2014(2013 \cdot 2015 + 1) = 2014(2014^2 - 1 + 1) = 2014^3$**.**

G:508. Aflați numerele naturale de forma $\overline{ab}$ **cu proprietatea că** $\overline{ab} + \overline{ba}$ **şi** $\overline{ab} - \overline{ba}$ **sunt pătrate perfecte.**

Ionel Tudor, Călugăreni, **Viorica Dogaru**, Giurgiu

Rezolvare: $\overline{ab} + \overline{ba} = 11(a+b)$, $\overline{ab} - \overline{ba} = 9(a-b) \Rightarrow a + b = 11$ şi $a - b \in \{1; 4; 9\}$. În final se obține $\overline{ab} = 65$.

G:509. Dacă $a, b, c > 0$ **, astfel încât** $abc = 1$**, să se arate că :** $\frac{ab}{1+a+ab} + \frac{bc}{1+b+bc} + \frac{ca}{1+c+ca} = 1$ **.**

D.M. Bătinețu-Giurgiu, București şi **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Avem: $\frac{ab}{1+a+ab} = \frac{\frac{1}{c}}{1+a+\frac{1}{c}} = \frac{1}{1+c+ac}$ şi $\frac{bc}{1+b+bc} = \frac{\frac{c}{ac}}{1+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ac}\cdot c} = \frac{c}{1+c+ac}$.

Deci, $\frac{ab}{1+a+ab} + \frac{bc}{1+b+bc} + \frac{ca}{1+c+ca} = \frac{1}{1+c+ac} + \frac{c}{1+c+ac} + \frac{ca}{1+c+ac} = \frac{1+c+ac}{1+c+ac} = 1$. □

G:510. Suma a "**p**" numere naturale consecutive, este 2015. Care sunt aceste numere , dacă "**p**" este un divizor , număr natural prim , al lui 2015 ?

Mariana Mitea, Cugir, Alba

Rezolvare: Mai întâi avem: (x + 1) + (x + 2) + … + (x + p) = 2015 , de unde obținem relația $px + \frac{p(p+1)}{2} = 2015$. Divizorii primi ai lui 2015 sunt : 5 13, 31. Relația este verificată pentru:

p=5 şi x=400, iar cele 5 numere sunt 401, 402, …,405. p=13 şi x=148, iar cele 13 numere. sunt 149, 150, 151, …,161.

p=31 şi x=49, iar cele 31 numere sunt 50, 51, 52, …,80.

▪ Clasa a VI-a

G:511. Dacă $\overline{ab}$ **este număr prim , aflați câți divizori are numărul n =** $\overline{ababab}$ **.**

Marin Simion , Rm. Sărat

Rezolvare : Descompunerea numărului natural n este n = $\overline{ab} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$.

Dacă $\overline{ab} \neq 13$ şi $\overline{ab} \neq 37 \Rightarrow$ n = $\overline{ab} \cdot 3 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 7$ care are 32 divizori .

Dacă $\overline{ab} = 13 \Rightarrow$ n = $3 \cdot 7 \cdot 13^2 \cdot 37$ care are 24 divizori .

Dacă $\overline{ab} = 37 \Rightarrow$ n = $3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37^2$ care are tot 24 divizori .

G:512. Rezolvați în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ecuația: $|x-2010|+y^2-3y=4$. **Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare:

Ecuația dată este echivalentă cu $|x-2010|+(y-2)(y-1)=6,\ x,y\in\mathbb{Z}\Rightarrow|x-2010|\in\mathbb{N},$ $(y-2)(y-1)\in\mathbb{N}$. Deoarece produsul a două numere întregi consecutive este par şi pozitiv, avem posibilitățile : $|x-2010|=0,\ (y-2)(y-1)=6$ sau $|x-2010|=2,\ (y-2)(y-1)=4$ sau $|x-2010|=4,\ (y-2)(y-1)=2$ sau $|x-2010|=6,\ (y-2)(y-1)=0$ de unde se obțin soluțiile:

$S=\{(2004;1),(2004;2),(2006;0),(2006;3),(2010;-1),(2010;4),(2014;0),(2014;3),(2016;1),(2016;2)\}$.

G:513. Aflați măsura unghiului al cărui suplement este de 91 de ori mai mare decât complementul său.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Rezolvare: Notăm cu x măsura unghiului căutat. Atunci, $180-x=91\cdot(90-x)\Rightarrow x=89^0$.

G:514. Fie mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{Q}\,\middle|\,x=\frac{m}{n},m\in D_8,n\in D_4\right\}$**. Calculați produsul elementelor mulțimii A.**

Cornelia Gurău, Moineşti, Bacău

Rezolvare: Divizorii lui 8 sunt 1, 2, 4, 8 şi ai lui 4 sunt 1, 2, 4. Se consideră toate combinațiile, care sunt în număr de 12, se efectuează calculele şi se obține 64.

G:515. Să se compare numerele raționale pozitive $\frac{x+5^{806}}{x+2^{2015}}$ **şi** $\frac{y+4^{2013}}{y+7^{1342}}$ **,** $\forall x,y\in\mathbb{N}$**.**

Gheorghe Dârstaru, Buzău

Rezolvare: $\frac{x+5^{806}}{x+2^{2015}}=\frac{x+25^{403}}{x+32^{403}}\ \langle\ 1,\ \frac{y+64^{671}}{y+49^{671}}\ \rangle\ 1.$

G:516. Suma şi câtul a două fracții au valoarea $n\in\mathbb{N}^*$**. Comparați fracțiile şi determinați fracțiile pentru n=2015.**

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

***Rezolvare*:** Din $a+b=n,\ a:b=n\Rightarrow a=\frac{n^2}{n+1},b=\frac{n}{n+1}$. Evident, a este mai mare decât b.

G:517. Determinați toate numerele naturale n **astfel încât** $n(n^2+3n+2)$ **să fie pătrat perfect.**

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Observăm că $n(n^2+3n+2)=n(n+1)(n+2)$ .Avem: $(n,n+1)=1$ şi $(n+1,n+2)=1$. Deci $(n+1,n(n+2))=1$, rezultă că $n+1$şi $n(n+2)$ sunt simultan pătrate perfecte. Fie $a,b\in N$ astfel încât $\begin{cases}n+1=a^2\\n(n+2)=b^2\end{cases}\Rightarrow a^4-b^2=1\Rightarrow(a^2+b)(a^2-b)=1\Rightarrow a^2-b=1$ şi $a^2+b=1\Rightarrow a^2=1,b=0\Rightarrow n=0$.

G:518. Găsiți forma ireductibilă a fracției $\frac{\overbrace{290290290...29029}^{3n+2\ \ cifre}}{\underbrace{140140140...14014}_{3n+2\ \ cifre}}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Sorina Văcărean, Cluj-Napoca

Rezolvare: Pentru $n=1$, $29029 \vdots 29$ şi $14014 \vdots 14$, câturile împărţirilor fiind 1001, astfel că fracţia $\frac{29029}{14014}$ se simplifică cu $\underbrace{100}_{1grupa}1$, forma ei ireductibilă fiind $\frac{29}{14}$. Pentru $n=2$, $29029029 \vdots 29$ şi $14014014 \vdots 14$, câturile împărţirilor fiind 1001001, astfel că fracţia $\frac{29029029}{14014014}$ se simplifică cu $\underbrace{1001001}_{2grupe}1$, forma ei ireductibilă fiind $\frac{29}{14}$. Pentru $n=3$, $29029029029 \vdots 29$ şi $14014014014 \vdots 14$, câturile împărţirilor fiind 1001001001, astfel că fracţia $\frac{29029029029}{14014014014}$ se simplifică cu $\underbrace{1001001001}_{3grupe}1$, forma ei ireductibilă fiind $\frac{29}{14}$. Generalizând, numărătorul fracţiei date este divizibil cu 29, numitorul cu 14, câturile împărţirilor fiind egale cu $\underbrace{100100100...1001}_{n\ grupe}1$, număr cu care se simplifică fracţia, forma ei ireductibilă fiind $\frac{29}{14}$.

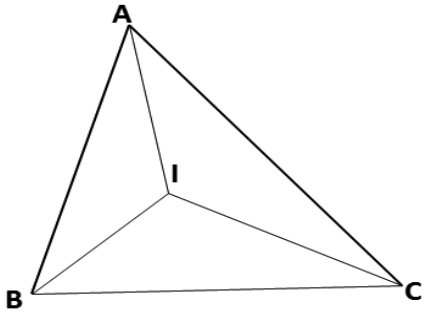
G:519. Fie triunghiul ABC, în care I este centrul cercului înscris. Facem notaţiile : $x=m(\widehat{BIC})-m(\hat{A})$, $y=m(\widehat{AIC})-m(\hat{B})$ **şi** $z=m(\widehat{AIB})-m(\hat{C})$**. Arătaţi că numerele x, y, z pot fi măsurile unghiurilor unui triunghi ascuţitunghic.**

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Rezolvare: Din triunghiul BIC,

$$\Rightarrow m(\widehat{BIC})=180^0-\frac{m(\hat{B})+m(\hat{C})}{2}=180^0-\frac{180^0-m(\hat{A})}{2}=$$

$$=\frac{360^0-180^0+m(\hat{A})}{2}=90^0+\frac{m(\hat{A})}{2}.$$



Deducem că $x=90^0+\frac{m(\hat{A})}{2}-m(\hat{A})=90^0-\frac{m(\hat{A})}{2}$ (1)

Analog, obţinem : $y=90^0-\frac{m(\hat{B})}{2}$ (2) şi $z=90^0-\frac{m(\hat{C})}{2}$(3).

Cercetând relaţiile (1), (2) şi (3), constatăm că numerele x, y şi z pot fi măsuri de unghiuri ascuţite.

În plus, calculând suma $x+y+z$, obţinem : $x+y+z=90^0-\frac{m(\hat{A})}{2}+90^0-\frac{m(\hat{B})}{2}+90^0-\frac{m(\hat{C})}{2}=$

$$=270^0-\frac{m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})}{2}=270^0-\frac{180^0}{2}=180^0.$$

Aşadar, numerele x, y şi z pot fi măsurile unghiurilor unui triunghi ascuţitunghic.

G:520. În triunghiul ABC isoscel fie M mijlocul bazei [BC], $P \in AM$ **şi** $N \in MB$ **astfel încât** $[MP] \equiv [MB]$ **şi** $[MN] \equiv [MA]$**. Arătaţi că** $NP \perp AC$.

Alexandru Elena-Marcela, Baia , Suceava

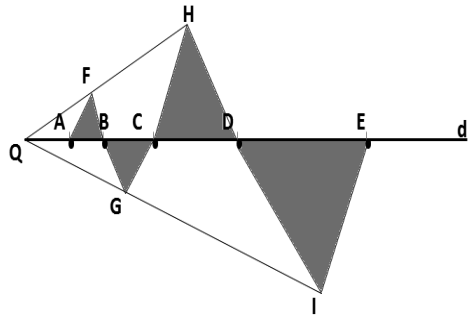
Rezolvare: $MP=\frac{BC}{2} \Rightarrow \Delta BPC$ dreptunghic în P.

$\left.\begin{matrix} MP=MB \\ MN=MA \end{matrix}\right\} \Rightarrow AP=NB \overset{R.T.Th.}{\Rightarrow} PB \| AN$ şi $CP \perp PB \Rightarrow CP \perp AN \Rightarrow$ P este ortocentrul ΔANC
$\Rightarrow PN \perp AC$.

G:521. Pe dreapta d se iau punctele A, B, C, D, E astfel încât AB=1cm, BC=2AB, CD=2BC, DE=2CD. Se construiesc apoi triunghiurile echilaterale ABF, BCG, CHD, DIE (F, H de o parte a lui d ; G, I de cealaltă parte). Demonstrați că : HE=CI, GI ⊥ GH, iar dacă HF ∩ d = {Q} arătați că punctele Q, G, I sunt coliniare, iar [QA este bisectoarea unghiului $\widehat{GQH}$.

Mariana Mitea, Cugir, Alba

Rezolvare:



$\Delta HDE \equiv \Delta CDI(L.U.L)$

În triunghiul GHI avem GH=6cm, HI=12cm iar m(<GHI)=60^0 de unde obținem că triunghiul GHI este dreptunghic în G, deci GI ⊥ GH.

Analog ca la punctul b). obținem că ΔGEH este dreptunghic cu m(<GHE)=30^0 , atunci putem obține că triunghiul QHC este isoscel, de unde m(<HQC)=30^0 şi QC=4cm. Din triunghiul dreptunghic QEG obținem m(<HQG)=60^0 iar apoi m(<GQA)=30^0. (1) Din triunghiul dreptunghic ΔQIE obținem $m(\sphericalangle EQI)=30^0$ (2). Din relațiile (1) şi (2) se obține coliniaritatea punctelor Q, G, I.

Din m(<HQC)=30^0 şi m(<GQA)=30^0 rezultă că [QA este bisectoarea unghiului $\sphericalangle GQH$.

▪ Clasa a VII-a

G:522. Dacă $\frac{a+2}{a-1}=\frac{b+8}{b+2}$, $a,b \in \mathbb{N}^*$, atunci, să se determine valoarea maximă a raportului $\frac{a}{b}$.

Adrian Stan, Buzău

***Rezolvare*:**

Din relația dată se obține $(a+2)(b+2)=(a-1)(b+8) \Rightarrow 2a-b=4$. Cum a şi b sunt naturale, rezultă că b trebuie să fie un multiplu de 2, aşadar, $b=2k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Atunci, $a=\frac{4+b}{2}=\frac{4+2k}{2}=k+2 \Rightarrow$ raportul $\frac{a}{b}=\frac{k+2}{2k}$ ia valoarea maximă dacă şi numai dacă $\frac{k+2}{2k} \geq \frac{(k+1)+2}{2(k+1)} \Leftrightarrow (k+2)(2k+2) \geq 2k(k+3) \Rightarrow 4 \geq 0,$ (adevărat). Aşadar, valoarea maximă a raportului se obține pentru k=1, rezultând, $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$.

Altfel, $\frac{a}{b}=\frac{k+2}{2k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{k}$ este maxim dacă $\frac{1}{k}$ este maxim iar aceasta se întâmplă pentru k minim, adică k = 1.

G:523. Rezolvați ecuația $\frac{x^2-2014^2}{2}+\frac{x^2-2014^2}{3}+.....+\frac{x^2-2014^2}{2015}=0$.

Claudia Popa, Buzău

Rezolvare: $\left(x^2-2014^2\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{2015}\right)=0\Rightarrow x=\pm 2014$.

G:524. Arătați că $\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+...+\frac{\sqrt{4058210}}{4029}\le 1007$**.** **Gheorghe Dârstaru,** Buzău

Rezolvare: Cum $\frac{\sqrt{a\cdot b}}{a+b}\le\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{3}\le\frac{1}{2},\frac{\sqrt{6}}{5}\le\frac{1}{2},\frac{\sqrt{12}}{7}\le\frac{1}{2},.....,\frac{\sqrt{4058210}}{4029}\le\frac{1}{2}$. Prin însumarea relațiilor de mai sus se obține relația din enunț.

G:525. Determinați toate perechile (x,y) **de numere întregi astfel încât:** $x^2y^2-x^2-xy-x-y^2+y+2=0$**.**

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

***Rezolvare*:** $x^2y^2-x^2-xy-x-y^2+y+2=0\Leftrightarrow$

$(x^2y^2-x^2-y^2+1)-(xy+x-y-1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x^2-1)(y^2-1)-(x-1)(y+1)=0\Leftrightarrow(x-1)(y+1)\left[(x+1)(y-1)-1\right]=0$.

Aşadar avem două familii de soluții: $(x,y)=(1,a)$ şi $(x,y)=(b,-1)$, unde a şi b sunt numere întregi, precum şi soluțiile care provin din $(x+1)(y-1)-1=0$.

Soluțiile întregi ale ecuației $(x+1)(y-1)-1=0\Leftrightarrow(x+1)(y-1)=1\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=1\\y-1=1\end{cases}$ sau $\begin{cases}x+1=-1\\y-1=-1\end{cases}$

sunt $(x,y)=(0,2)$ respectiv $(x,y)=(-2,0)$. Prin urmare ecuația are soluțiile :

$(x,y)\in\{(1,a);(b,-1);(0,2);(-2,0)\}$, unde $a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{Z}$.□

G:526. Pentru $a,b\in\mathbb{N}^*$**, să se arate că** $\left(1+\frac{a}{b}\right)^n\rangle 1+n\cdot\frac{a}{b},\ \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$**, şi să se compare numerele** 3^{2014} **şi** $7\cdot 2^{3025}$**.** **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Inegalitatea dată este echivalentă cu inegalitatea lui Bernoulli:

$(1+x)^n\ge 1+nx,\ \forall x,n\in\mathbb{R},x\ge -1,n\ge 0.$

$\frac{3^{2014}}{2^{3025}}=\overset{9)}{=}\frac{3^{2\cdot 1007}}{2\cdot 2^{3\cdot 1008}}=\frac{9^{1008}}{18\cdot 8^{1008}}=\frac{1}{18}\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^{1008}=\frac{1}{18}\left(1+\frac{1}{8}\right)^{1008}\rangle\frac{1}{18}\left(1+\frac{1008}{8}\right)\rangle\frac{1}{18}(1+126)=7\Rightarrow 3^{2014}\rangle 7\cdot 2^{3025}$.

G:527 Determinați numărul soluțiilor întregi ale inecuației: $|x|+|y|\langle 2011$**.**

Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Suma $|x|+|y|$ poate lua 2011 valori distincte de la 0 la 2010; Rezultă, $|x|+|y|=0$ are o singură soluție, $(0;0)$. $|x|+|y|=1$ are $4\cdot 1=4$ soluții, $(-1;0),(0;-1),(0;1),(1;0)$; $|x|+|y|=2$ are $4\cdot 2=8$ soluții şi aşa mai departe, ... $|x|+|y|=2010$ are $4\cdot 2010=8040$ soluții. Numărul tuturor soluțiilor este egal cu $1+4\cdot 1+4\cdot 2+....+4\cdot 2009+4\cdot 2010=1+4\cdot\frac{2010\cdot 2011}{2}=8084221$.

G:528. Arătați că suma $S=\frac{2014}{1\cdot 4}+\frac{2014}{4\cdot 7}+\frac{2014}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{2014}{2011\cdot 2014}$ **este un număr natural divizibil cu 11.** **Alexandru Elena-Marcela,** Baia , Suceava

Rezolvare: $S=2014\cdot\left(\frac{4-1}{1\cdot 4}+\frac{7-4}{4\cdot 7}+\frac{10-7}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{2014-2011}{2011\cdot 2014}\right)\cdot\frac{1}{3}=$

$$=\frac{2014}{3}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{2011}-\frac{1}{2014}\right)=\frac{2014}{3}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2014}\right)\Rightarrow S=\frac{2013}{3}\Rightarrow S=671\Rightarrow S=11\cdot 61\vdots 11.$$

G:529. Determinați cele mai mici numere naturale nenule a, b şi c, ştiind că a şi b + c sunt proporționale cu 2 şi 14, b şi c + a sunt proporționale cu 5 şi 11, iar c şi a + b sunt proporționale cu 9 şi 7.

Constantin Apostol,Rm. Sărat

Rezolvare: Din datele problemei, putem scrie :

$\frac{a}{2}=\frac{b+c}{14},\ \frac{b}{5}=\frac{c+a}{11},\ \frac{c}{9}=\frac{a+b}{7}\ \Rightarrow\ \begin{cases}14a-2b-2c=0\\-5a+11b-5c=0\\-9a-9b+7c=0\end{cases}$. Fiind un sistem omogen, din primele două ecuații se obține 9a=2c, 9b=5c . Cum a,b,c trebuie să fie cele mai mici, se ia c= 9 de unde se obține a= 2, b= 5.

G:530. În patrulaterul convex ABCD avem $m(\hat{A})=70^0$**,** $m(\hat{B})=50^0$, $m(\hat{D})=100^0$, $[BC]=[DC]$**. Arătați că:** $[BC]=[AD]$**.**

Radu Ion, Bozioru, Buzău

Rezolvare: Considerăm punctul $M\in(AB)$ astfel încât $[BC]=[CM]$ şi obținem că în triunghiul Δ BCM . $m(\hat{C})=80^0$. $\Rightarrow m(\widehat{MCD})=60^0\Rightarrow$ Δ CMD este echilateral şi că Δ ADM este isoscel de unde $[AD]=[DM]$ şi în final $[BC]=[AD]$**.**

G:531. Într-un trapez laturile neparalele sunt congruente cu baza mică . Ştiind că unul din unghiuri are măsura de 120^0, iar distanța dintre mijloacele diagonalelor este de 12 cm , determinați perimetrul şi aria trapezului.

Marin Simion , Rm. Sărat

Având laturile neparalele congruente trapezul este isoscel . Cum un unghi are 120^0, atunci unghiurile alăturate bazei mari au câte 60^0. Construim BM || CD . Patrulaterul BCDM este romb . Deci AB = BC = CD = DM = MB = a .Triunghiul isoscel ABM are un unghi de 60^0, deci este echilateral ; AM = a .

P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 2a + a + a + a = 5a .Cum distanța dintre mijloacele diagonalelor , EF = 12cm , iar EF = $\frac{B-b}{2}=\frac{2a-a}{2}=\frac{a}{2}\Rightarrow a=24$ cm .

$P_{ABCD}=5\cdot 24=120$ cm .$A_{ABCD}=3\cdot A_{MCD}=3\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=432\sqrt{3}$ cm^2. (triunghiurile ABM ,BCM, MCD sunt echilaterale)

G:532. Se consideră rombul ABCD de centru O şi fie E$\in$AC, iar BE$\cap$AD={F}, BE$\cap$CD={M}, BD$\cap$CF={P} şi MP$\cap$BC={N}. Arătați că punctele N,O,F sunt coliniare dacă şi numai dacă 2AE=EC.

Mariana Mitea, Cugir, Alba

Rezolvare:

BFDC este trapez , P este intersecția diagonalelor trapezului şi atunci MP intersectează pe BC în N care este mijlocul lui $[BC]$.

$[ON]$ este linie mijlocie în triunghiul BCD şi deci $NO\,||\,CD$ (1).

"I". Relația 2AE = EC este echivalentă cu $\frac{AE}{EC}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{AE}{AC}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{AE}{AO}=\frac{2}{3}$.
Ceea ce face ca E să fie centru de greutate și $[BF]$ să fie mediană , iar de aici $[OF]$ linie mijlocie în triunghiul ABD, deci $OF \parallel AB$ (2). Din (1) și (2) obținem coliniaritatea punctelor **N, O, F**.
''II''. $CD \parallel AB$ și cum O = mijlocul lui $[BD] \Rightarrow [OF]$ linie mijlocie în ΔABD , $\Rightarrow [BF],[AO]$ mediane , $\Rightarrow$ E este centru de greutate (BF$\cap$AO={E}), $\Rightarrow \frac{AE}{AO}=\frac{2}{3}$, $\Rightarrow \frac{AE}{AC}=\frac{1}{3}$ de unde se obține concluzia 2AE=EC.

▪ Clasa a VIII-a

G:533. Rezolvați ecuația $x+[x]=\{x\}+54,\ x\in\mathbb{R}$, **unde** $[x]$ **reprezintă partea întreagă a lui x.**

Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Din $x=[x]+\{x\}$ ecuația dată devine $2[x]=54\Rightarrow[x]=27\Rightarrow x\in[27;28)$.

G:534. Să se determine cel mai mic număr natural n, pentru care numărul $\sqrt{n}$ are primele două zecimale 99.

Ionel Tudor, Călugăreni, **Viorica Dogaru**, Giurgiu

Rezolvare: Dacă $\left[\sqrt{n}\right]=m\in\mathbb{N}^*\Rightarrow m,99\le\sqrt{n}\langle m+1\Leftrightarrow\ (m+0,99)^2\le n\langle m^2+2m+1$, de unde rezultă $m\rangle\frac{0,99^2}{0,02}=49,005$. Așadar, m = 50 iar $n=[50,99]^2+1=2600$.

G:535. Arătați că pentru orice număr real $x\ge -1$ **avem** $\sqrt{2x+11-6\sqrt{2(x+1)}}\ \langle\ \frac{x+9}{2}$**.**

Gheorghe Dârstaru, Buzău

Rezolvare:

$$\sqrt{2x+11-6\sqrt{2(x+1)}}\ =\sqrt{\left(\sqrt{2(x+1)}-3\right)^2}=\left|\sqrt{2(x+1)}-3\right|\langle\ \left|\sqrt{2(x+1)}\right|+|-3|=\sqrt{2(x+1)}+3.$$

Din inegalitatea mediilor, $\sqrt{2(x+1)}\le\frac{2+x+1}{2}=\frac{x+3}{2}\Rightarrow\sqrt{2(x+1)}+3\le\frac{x+3}{2}+3=\frac{x+9}{2}$.

G:536. Calculați A^{2011} **știind că**

$$A=\left(\frac{a-1}{3a+(a-1)^2}-\frac{1-3a+a^2}{a^3-1}-\frac{1}{a-1}\right):\frac{a^2+1}{1-a}\cdot(a^2+a+1),\ a\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}.$$

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Rezolvare: $A=\left(\frac{a-1}{a^2+a+1}-\frac{1-3a+a^2}{(a-1)(a^2+a+1)}-\frac{1}{a-1}\right)\cdot\frac{1-a}{a^2+1}\cdot(a^2+a+1)=$

$$=\frac{(a-1)^2-1+3a-a^2-a^2-a-1}{(a-1)(a^2+a+1)}\cdot\frac{-(a-1)}{a^2+1}\cdot(a^2+a+1)=-\frac{-a^2-1}{a^2+1}=1,\ A^{2015}=1.$$

G:537 1) Arătați că oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$ **are loc inegalitatea:**

$$\sqrt{4(a-1)^2+8(a-1)+13}+\sqrt{5(a-1)^2+10(a-1)+21}+\sqrt{6(a-1)^2+12(a-1)+31}\ge 12.$$

Alexandru Elena-Marcela, Baia , Suceava

Rezolvare: $\sqrt{4(a-1)^2+8(a-1)+13}+\sqrt{5(a-1)^2+10(a-1)+21}+\sqrt{6(a-1)^2+12(a-1)+31}=$

$=\sqrt{4a^2+9}\ +\sqrt{5a^2+16}\ +\sqrt{6a^2+25}\ \geq\sqrt{9}+\sqrt{16}+\sqrt{25}=3+4+5=12$.

G:538. Rezolvați ecuația

$\sqrt{\left(4\sqrt{7}-1-5-5^2-...-5^n\right)\left(10\sqrt{3}n+4\sqrt{7}-1-5-5^2-...-5^n\right)+75n^2}=\frac{5^{2n-3}-1}{4}-4\sqrt{7}-5\sqrt{3}n$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

Sorina Văcărean, Cluj-Napoca

***Rezolvare*:** Notăm expresia de sub radical cu a, iar suma $1+5+5^2+...+5^n$ cu s. Avem: $a=\left(4\sqrt{7}-s\right)\left(10\sqrt{3}n+4\sqrt{7}-s\right)+75n^2$. Notăm $4\sqrt{7}-s$ cu x. Astfel, $a=x\left(10\sqrt{3}n+x\right)+75n^2=$

$=x^2+10\sqrt{3}xn+75n^2=\left(x+5\sqrt{3}n\right)^2$. Îl înlocuim pe x şi obținem $a=\left(4\sqrt{7}-s+5\sqrt{3}n\right)^2$. Cum $s=\frac{5^{n+1}-1}{4}$, urmează că $a=\left(4\sqrt{7}-\frac{5^{n+1}-1}{4}+5\sqrt{3}n\right)^2$. Membrul stâng al ecuației, respectiv $\sqrt{a}$, este $\left|4\sqrt{7}-\frac{5^{n+1}-1}{4}+5\sqrt{3}n\right|$, întrucât a este pătrat perfect. Cum expresia din modul este negativă pentru orice număr natural $n\geq 2$, ecuația se scrie $-4\sqrt{7}+\frac{5^{n+1}-1}{4}-5\sqrt{3}n=\frac{5^{2n-3}-1}{4}-4\sqrt{7}-5\sqrt{3}n$, de unde $5^{n+1}=5^{2n-3}$ şi de aici $n=4$.

G:539. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases}\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{26}{5}\\ x^2+y^2=13\end{cases}$**.** **Claudia Popa**, Buzău

Rezolvare: Notăm $\frac{x+y}{x-y}=t\Rightarrow t+\frac{1}{t}=\frac{26}{5}\Rightarrow t\in\left\{5,\frac{1}{5}\right\}$. Din $t=5\Rightarrow\ x+y=5(x-y)\Rightarrow x=\frac{3y}{2}$.

Din ecuația a doua a sistemului, rezultă $y=\pm 2\Rightarrow x=\pm 3$. $S=\{(3;2),(-3;-2)\}$.

Analog, pentru $t=\frac{1}{5}\Rightarrow S=\{(3;-2);(-3;2)\}$.

G:540. Fie $a,m,p\in\mathbb{R}_+^*$**, cu** $m\neq 1$**. Ştiind că** $a_1=am+p$, $a_2=a_1m+p,\cdots$, $a_n=a_{n-1}m+p$ **şi că** $a_1=a_4$**, calculați suma** $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$**.**

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Rezolvare: Din datele problemei deducem :

$a_1=am+p$;

$a_2=a_1m+p=(am+p)m+p=am^2+mp+p$;

$a_3=a_2m+p=(am^2+mp+p)m+p=am^3+m^2p+mp+p$;

$a_4=a_3m+p=(am^3+m^2p+mp+p)m+p=am^4+m^3p+m^2p+mp+p$

Din $a_1=a_4$, rezultă :

$am+p=am^4+m^3p+m^2p+mp+p\Leftrightarrow am-am^4=m^3p+m^2p+mp\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ a-am^3=m^2p+mp+p\ \Leftrightarrow\ a(1-m^3)=p(m^2+m+1)\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ a(1-m)(1+m+m^2)=p(m^2+m+1)\ \Leftrightarrow\ a(1-m)=p\ \Leftrightarrow\ a=\frac{p}{1-m}$.

Avem, deci, $a_1=\frac{p}{1-m}\cdot m+p=\frac{mp+p-mp}{1-m}=\frac{p}{1-m}$, adică, $a_1=a$.

Analog, arătăm că $a_2 = a$, ş.a.m.d. Astfel avem : $a = a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$, deci, $S = \frac{np}{1-m}$.

G:541. Să se arate că : triunghiul ABC **este dreptunghic isoscel dacă şi numai dacă** $S = \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{4}$ **(notaţiile sunt cele obişnuite).**

D.M.Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

***Rezolvare* :**

"$\Rightarrow$" Dacă $a = b$ şi triunghiul ABC este dreptunghic $\Rightarrow S = \frac{a^2}{2} = \frac{(a+a)\sqrt{aa}}{4} = \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{4}$.

"$\Leftarrow$" Se ştie că $R = \frac{abc}{4S}$ .Observăm că $S = \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{4} \Leftrightarrow R(a+b) = c\sqrt{ab}$

Deoarece $R(a+b) = c\sqrt{ab}$ şi $c = 2R\sin C \Rightarrow R(a+b) = 2R\sqrt{ab}\sin C \Rightarrow \sin C = \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$.

Din inegalitatea medie aritmetică-medie geometrică avem că :

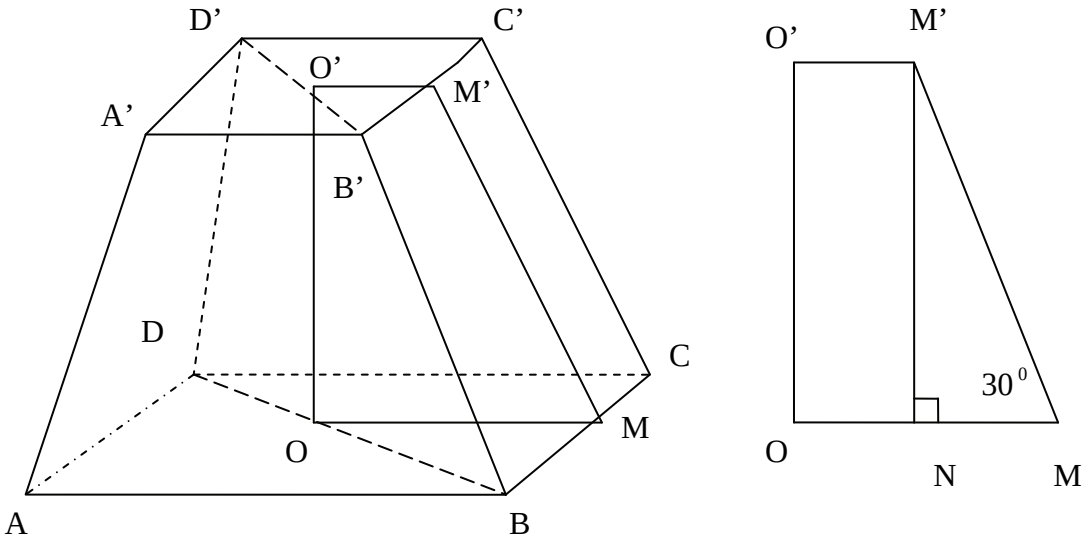
$\sin C = \frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \geq 1 \Rightarrow \sin C = 1 \Rightarrow C = 90^0, a = b, c = a\sqrt{2}$.□

Soluţia a doua (Titu Zvonaru):

$\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{4} = \frac{ab\sin C}{2} \leq \frac{ab}{2} \Rightarrow a+b \leq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \leq 0 \Rightarrow a = b, C = 90^0$.

G:542. Arătaţi că într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată în care o faţă laterală formează cu planul bazei mari un unghi de 30^0**, raportul dintre aria secţiunii diagonale şi aria unei feţe laterale este egal cu cos** 45^0**.**

Marin Simion , Rm. Sărat



Unghiul dintre o faţă laterală şi baza mare este unghiul format între apotema trunchiului MM' şi apotema bazei mari OM adică $\widehat{M'MN}$; deoarece are 30^0, din triunghiul dreptunghic M'MN obţinem că 2NM' = M'M , adică 2h = a_t, unde h reprezintă înălţimea iar a_t apotema trunchiului .

$S_{BCC'B'} = \frac{(L+l)\cdot a_t}{2}$; dar $a_t = 2h \Rightarrow S_{BCC'B'} = h\cdot(L+l)$;

$S_{ACC'A'}=\frac{\sqrt{2}\cdot(L+l)\cdot h}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot S_{BCC'B'}\Leftrightarrow\frac{S_{ACC'A'}}{S_{BCC'B'}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{S_{ACC'A'}}{S_{BCC'B'}}=\cos 45^0$.

G:543. Fie pătratul ABCD de latură AB=28cm, iar E∈ CD astfel încât 3DE=EC şi AC∩BE={P}. Fie PH⊥(ABC), PH=2$\sqrt{6}$ cm. Arătaţi că HB≡HD. Calculaţi HA, HB, HC şi HD . Aflaţi măsura unghiului diedru plan dintre (HBD)şi (ABC).

Mariana Mitea, Cugir, Alba

Rezolvare: Din AC∩BE={P} şi AC∩BD={O}, iar ABCD pătrat⇒
ΔBPD este isoscel(căci OP= mediană, înălţime), ⇒ $BP\equiv DP$, atunci $\Delta HPB\equiv\Delta HPD$ (C.C.) de unde HB≡HD.

b) Avem $\Delta ABP\sim\Delta PEC$ pentru că ($ABIICD$)

$\Rightarrow\frac{BP}{PE}=\frac{AB}{EC}$ de unde $\frac{BP}{BP+PE}=\frac{AB}{AB+EC}$ iar apoi $\frac{BP}{BE}=\frac{4}{7}$.

Pe de altă parte avem

$A_{DBE}=A_{DBC}-A_{BCE}=\frac{l^2}{8}$ unde l=AB, dar $A_{DBE}=\frac{BD.ME}{2}$ şi cum BD=$l\sqrt{2}$

obţinem ME=$\frac{l\sqrt{2}}{8}$, unde ME⊥BD. Cum şi OP⊥BD ⇒ ME//OP

$\Rightarrow\Delta OBP\sim\Delta MBE\Rightarrow\frac{OP}{ME}=\frac{PB}{BE}$, însă $\frac{BP}{BE}=\frac{4}{7}$ şi atunci OP=$\frac{4.ME}{7}=\frac{l\sqrt{2}}{14}=2\sqrt{2}$ cm. Atunci AP=AO+OP=16$\sqrt{2}$ cm, de unde HA=$2\sqrt{134}$ cm, apoi PC=OC-OP=12$\sqrt{2}$ cm, iar HC=$2\sqrt{78}$ cm. Cum PB=PD=20cm, obţinem HB=HD=$2\sqrt{106}$ cm.

c) Aplicăm teorema celor trei perpendiculare şi obţinem HO⊥BD şi cum (HBD)∩(ABC)=BD, iar OP⊥BD, rezultă că unghiul diedru $\measuredangle((HBD),(ABC))=\measuredangle(HOP)$.

În ΔHOP dreptunghic, avem $tg\left(\widehat{HOP}\right)=\frac{HP}{OP}=\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{3}$, de unde $m\left(\widehat{HOP}\right)=60^0$.

▪ Clasa a IX-a

L:375. Să se determine $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ astfel încât ecuaţia $(m^2-1)\cdot 9^x+(m+1)\cdot 3^x+2=0$ să aibă o singură soluţie reală.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare:

Notăm $3^x=y\rangle 0$, de unde rezultă că ecuaţia $(m^2-1)y+(m+1)y+2=0$ are o singură soluţie reală dacă şi numai dacă verifică condiţiile: $\Delta\rangle 0$,(1) şi $P=y_1\cdot y_2\langle 0$, (2).

Din (1) rezultă, $(m+1)^2-4(m^2-1)\cdot 2\rangle 0\Rightarrow -7m^2+2m+9\rangle 0\Rightarrow m\in\left(-1;\frac{9}{7}\right)$.

Din (2) rezultă $y_1\cdot y_2\langle 0\Leftrightarrow\frac{2}{m^2-1}\langle 0\Rightarrow m\in(-1;1)$. Din (1) şi (2) rezultă, $m\in(-1;1)$. Dacă $\Delta=0$ nu se obţine soluţie dublă pozitivă.

L:376. Arătați că numărul $a=\sqrt{\underbrace{99.....9}_{2014\ cifre}+2\underbrace{00....0}_{1006\ de\ 0}2}$ **este natural.** **Gheorghe Dârstaru**, Buzău

Rezolvare:

Observăm că $\underbrace{99.....9}_{2014\ cifre}=10^{2014}-1$, fie calculăm

$\underbrace{99.....9}_{2014\ cifre}=9(10^{2013}+10^{2012}+...+10+1)=9\cdot\frac{10^{2014}-1}{9}=10^{2014}-1.$ iar $2\underbrace{00.....0}_{1006\ cifre}2=2\cdot10^{1007}+2.$ Atunci,

$a=\sqrt{10^{2014}+2\cdot10^{1007}+1}=\sqrt{(10^{1007}+1)^2}=10^{1007}+1\in\mathbb{N}.$

L:377. Să se rezolve ecuația $[2x+2015]-[x+2016]=\{x+2017\}$**.**

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Din $\{x+n\}=\{x\},\ \forall n\in\mathbb{Z}\Rightarrow\{x+2017\}=\{x\}$. Partea stângă a ecuației este un număr întreg, atunci rezultă $\{x\}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\{x\}=0\Rightarrow x\in\mathbb{Z}.$ Aşadar, $2x+2015\in\mathbb{Z},\ x+2016\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ $[2x+2015]=2x+2015,\ [x+2016]=x+2016$. După înlocuire în ecuația dată, rezultă x=1.

Generalizare: $[2x+n]-[x+m]=\{x+p\},\ m,n,p\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=m-n$.

L:378. Să se arate că $\frac{\left(\frac{30}{7}\right)^x+\left(\frac{35}{6}\right)^x+\left(\frac{42}{5}\right)^x}{5^x+6^x+7^x}\geq1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$ **IulianaTrașcă,** Olt

Rezolvare:

$$\left(\frac{30}{7}\right)^x+\left(\frac{35}{6}\right)^x+\left(\frac{42}{5}\right)^x=\frac{1}{2}\cdot\left[2\left(\frac{5\cdot6}{7}\right)^x+2\left(\frac{5\cdot7}{6}\right)^x+2\left(\frac{6\cdot7}{5}\right)^x\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{5^x\left[\left(\frac{6}{7}\right)^x+\left(\frac{7}{6}\right)^x\right]+6^x\left[\left(\frac{5}{7}\right)^x+\left(\frac{7}{5}\right)^x\right]+7^x\left[\left(\frac{6}{5}\right)^x+\left(\frac{5}{6}\right)^x\right]\right\}\geq$$

$\geq\frac{1}{2}\cdot2\cdot\left(5^x+6^x+7^x\right)=5^x+6^x+7^x$. Am folosit inegalitatea $a+\frac{1}{a}\geq2,\ \forall a\in\mathbb{R}^*$

Altfel , se utilizează inegalitatea $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$, şi rezultă

$$\left(\frac{30}{7}\right)^x+\left(\frac{35}{6}\right)^x+\left(\frac{42}{5}\right)^x\geq\sqrt{\left(\frac{30}{7}\cdot\frac{35}{6}\right)^x}+\sqrt{\left(\frac{35}{6}\cdot\frac{42}{5}\right)^x}+\sqrt{\left(\frac{42}{5}\cdot\frac{30}{7}\right)^x}=5^x+7^x+6^x.$$

(Soluție dată de dl. Titu Zvonaru)

L:379. Aflați numerele reale x**, astfel încât raportul** $\frac{2x^2+2x-4}{x^2-x+2}$ **să fie număr natural.**

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Avem: $\frac{2x^2+2x-4}{x^2-x+2}=2+\frac{4x-8}{x^2-x+2}$. Vom arăta că $\frac{4x-8}{x^2-x+2}<1$. Într-adevăr: deoarece

$x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$, deducem:

$\frac{4x-8}{x^2-x+2}<1\Leftrightarrow4x-8<x^2-x+2\Leftrightarrow x^2-5x+10=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$, adevărată.

Pentru că $\frac{4x-8}{x^2-x+2}<1$, $\frac{4x-8}{x^2-x+2}\in\mathbb{Z}$, $\frac{2x^2+2x-4}{x^2-x+2}=2+\frac{4x-8}{x^2-x+2}\in\mathbb{N}$, rezultă $\frac{4x-8}{x^2-x+2}\in\{-2,-1,0\}$, de unde obținem: $x\in\left\{-2;\frac{-3-\sqrt{33}}{2};\frac{-3+\sqrt{33}}{2};1;2\right\}$.

L:380. Demonstrați inegalitatea $\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\le\frac{\sum a^2b+\sum ab^2+2\sum a^2+2\sum a}{18}$**, unde** $a,b,c\ge 0$.

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Aplicând inegalitatea mediilor avem $3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3\sqrt[3]{a^2(b^2c)c}\le a^2+b^2c+c$, şi încă 5 inegalități analoage, care prin adunare conduc la inegalitatea de demonstrat. Avem egalitatea dacă

L:381. Rezolvați ecuația $\left[\frac{7-x}{4}\right]+\left[\frac{7-2x}{4}\right]+\left[\frac{7-3x}{4}\right]=\frac{5x-3}{8}$**,** $x\in\mathbb{R}$.**Sorina Văcărean**, Cluj-Napoca

Rezolvare: Notăm $\left[\frac{7-x}{4}\right]=a\quad(1)$, $\left[\frac{7-2x}{4}\right]=b\quad(2)$, $\left[\frac{7-3x}{4}\right]=c\quad(3)$ şi $\frac{5x-3}{8}=d\quad(4)$, $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$. Ecuația se scrie $a+b+c=d\quad(5)$. Din (1) rezultă că $a\le\frac{7-x}{4}<a+1\quad(6)$, din (2) rezultă că $b\le\frac{7-2x}{4}<b+1\quad(7)$, iar din (3) rezultă că $c\le\frac{7-3x}{4}<c+1\quad(8)$. Adunând membru cu membru relațiile (6), (7) şi (8) obținem $a+b+c\le\frac{21-6x}{4}<a+b+c+3$, de unde, conform relației (5), rezultă că $d\le\frac{21-6x}{4}<d+3\quad(9)$. Din (4) îl exprimăm pe x în funcție de d, $x=\frac{8d+3}{5}$ (10), pe care îl înlocuim în (9), obținând $d\le\frac{87-48d}{20}<d+3$, de unde $\begin{cases}20d\le 87-48d\\87-48d<20d+60\end{cases}$ şi de aici $d\in\left(\frac{27}{68},\frac{87}{68}\right]$. Cum $d\in\mathbb{Z}$ urmează că $d=1$, iar din (10) rezultă că $x=\frac{11}{5}$. Înlocuind în ecuația dată obținem $\left[\frac{24}{20}\right]+\left[\frac{13}{20}\right]+\left[\frac{2}{20}\right]=\frac{8}{8}$, de unde $1+0+0=1$, ceea ce este adevărat, astfel că $x=\frac{11}{5}$ este soluția ecuației.

L:382. Se consideră numerele reale pozitive a,b,c **, astfel încât** $a+b+c+2\le abc$.

Demonstrați inegalitatea: $\frac{ab}{(2+a^2)(2+b^2)}+\frac{bc}{(2+b^2)(2+c^2)}+\frac{ca}{(2+c^2)(2+a^2)}\le\frac{1}{3}$.

Florin Stănescu, Găeşti, Dâmbovița

Rezolvare: Pentru început avem inegalitatea evidentă $(x-2)^2(x^2+x+1)\ge 0\Rightarrow$

$(x^2-4x+4)(x^2+x+1)\ge 0\Rightarrow x^4+x^3+x^2-4x^3-4x^2-4x+4x^2+4x+4\ge 0\Rightarrow$

$x^4-3x^3+x^2+4\ge 0\Rightarrow x^4+4x^2+4\ge 3x^2(x+1)\Rightarrow(x^2+2)^2\ge 3x^2(x+1)\Rightarrow\frac{x}{x^2+2}\le\frac{1}{\sqrt{3(x+1)}}$.

Aplicând ultima inegalitate pentru numerele a,b,c obținem

$\frac{ab}{(2+a^2)(2+b^2)} \le \frac{1}{3\sqrt{(a+1)(b+1)}}, \frac{bc}{(2+b^2)(2+c^2)} \le \frac{1}{3\sqrt{(b+1)(c+1)}}, \frac{ca}{(2+c^2)(2+a^2)} \le \frac{1}{3\sqrt{(c+1)(a+1)}}$, de unde

$$\frac{ab}{(2+a^2)(2+b^2)}+\frac{bc}{(2+b^2)(2+c^2)}+\frac{ca}{(2+c^2)(2+a^2)} \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{(a+1)(b+1)}}+\frac{1}{\sqrt{(b+1)(c+1)}}+\frac{1}{\sqrt{(c+1)(a+1)}}\right) \le$$

$$\frac{1}{3}\left(\left(\sqrt{\frac{1}{a+1}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{b+1}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{c+1}}\right)^2\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right) \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow (1+b)(1+c)+(1+c)(1+a)+(1+a)(1+b) \le$$

$(1+a)(1+b)(1+c) \Leftrightarrow 3+2(a+b+c)+ab+bc+ca \le 1+a+b+c+ab+bc+ca+abc \Leftrightarrow 2+a+b+c \le abc,$

care reprezintă condiția din ipoteza.

L:383. Dacă în paralelogramul $ABCD$ **, punctele M , N,P,Q sunt mijloacele segmentelor** $[BC],[CD],[MC],[CN]$ **atunci :** $\overline{AM}+\overline{AN}+\overline{AP}+\overline{AQ}=\frac{13}{4}\overline{AC}$ **.**

Elena şi Constantin Ciobîcă, Fălticeni

Rezolvare: $\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{AC}$, $\overline{AN}=\frac{1}{2}\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{AD}$, $\overline{AP}=\frac{3}{4}\overline{AC}+\frac{1}{4}\overline{AB}$, $\overline{AQ}=\frac{3}{4}\overline{AC}+\frac{1}{4}\overline{AD}$

$\overline{AM}+\overline{AN}+\overline{AP}+\overline{AQ}=\frac{13}{4}\overline{AC};$

L:384. Fie ABC un triunghi oarecare de laturi a , b , c , A'B'C' un triunghi de laturi $(a',b',c')=(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c})$ **şi A"B"C" un triunghi de laturi** $(a'',b'',c'')=(\cos\frac{A}{2},\cos\frac{B}{2},\cos\frac{C}{2})$ **. Notăm cu R , r razele cercurilor circumscris , respectiv înscris în triughiul ABC şi cu** $m_a^{'},m_a^{''}$ **, respectiv** $h_a^{'},h_a^{''}$ **medianele , respectiv înălțimile corespunzătoare laturilor a' si a" ale triunghiurilor A'B'C' si A"B"C".**

Demonstrați că : $\frac{R}{2r} \ge \frac{m_a^{'2}}{h_a^{'2}}\frac{m_a^{''2}}{h_a^{''2}}$. **Vasile Jiglău** , Arad

Rezolvare: În "Crux mathematicorum ", problema 2732 (autor M, Bencze) apare formula

$\frac{a^2+b^2+c^2}{4S\sqrt{3}} \ge \frac{m_a}{h_a}$, **(1)** iar în lucrarea "Abordare globală a geometriei triunghiului ", Ed. All , 1996,

autori Florea C , Florea D, pag. 65, 66, apar formulele $\Sigma cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}=\frac{p^2+(4R+r)^2}{16R^2}$ (2),

$\Sigma\cos^4\frac{A}{2}=\frac{(4R+r)^2-p^2}{8R^2}$ (3), $\Sigma\cos^2\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{2R}$ (4)

care se demonstrează imediat cu $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ şi analoagele , precum şi cunoscutele :

$ab+bc+ca=p^2+r^2+4Rr$ (5) şi $a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8Rr$ (6)

a) Aplicând formula lui Heron pentru calculul ariei unui triunghi în triunghiul ΔA'B'C', avem :

$16S'^2=2\Sigma\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}-\Sigma\cos^4\frac{A}{2}$ de unde rezultă , folosind (2) şi (3) , ca :

$16S'^2=2\frac{p^2+(4R+r)^2}{16R^2}-\frac{(4R+r)^2-p^2}{8R^2}=\frac{p^2}{4R^2}\Rightarrow 4S'=\frac{p}{2R}$.

Aplicând (1) , obținem :

$$\frac{\Sigma\cos^2\frac{A}{2}}{4S'\sqrt{3}}=\frac{\frac{4R+r}{2R}}{\frac{p}{2R}\sqrt{3}}=\frac{4R+r}{p\sqrt{3}}\geq\frac{m_a'}{h_a'}\Rightarrow\frac{(4R+r)^2}{3p^2}\geq\frac{m_a'^2}{h_a'^2}\quad .\qquad (7)$$

b) Aplicând din nou formula lui Heron în $\Delta A"B"C"$ avem :

$16S"^2=2\Sigma ab-\Sigma a^2=2p^2+2r^2+8Rr-2p^2+2r^2+8Rr=4r^2+16Rr$, şi de aici

$4S"=2\sqrt{r(4R+r)}$. Aplicând din nou (1) , obținem :

$$\frac{a+b+c}{2\sqrt{3}\sqrt{r(4R+r)}}=\frac{p}{\sqrt{3r(4R+r)}}\geq\frac{m_a"}{h_a"}\Rightarrow\frac{p^2}{3r(4R+r)}\geq\frac{m_a"^2}{h_a"^2}\qquad (8)$$

Având în vedere (7) și (8) , este suficient să demonstrăm că

$\frac{R}{2r}\geq\frac{(4R+r)^2}{3p^2}\cdot\frac{p^2}{3r(4R+r)}\Leftrightarrow 9R\geq 2(4R+r)\Leftrightarrow R\geq 2r$ care este adevărată (inegalitatea lui Euler) .

▪ Clasa a X-a

L:385. Arătați că $\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{1960}}+\frac{1}{\sqrt{1961}}\right]=87$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Din $2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\langle\frac{1}{\sqrt{n}}\langle 2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$ rezultă

$\sum_{k=1}^{1961}2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\langle\sum_{k=1}^{1961}\frac{1}{\sqrt{k}}\langle\sum_{k=1}^{1961}2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$, $\quad\sum_{k=1}^{1961}2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)=2\sqrt{1962}-2\simeq 86,58$

$\sum_{k=1}^{1961}2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)=2\sqrt{1961}\simeq 88,56$. Cu ajutorul calculatorului se arată că suma de fracții este egală cu 87,1173, prin urmare, partea sa întreagă este egală cu 87.

L:386. **Să se rezolve ecuația** $729^x+6\cdot 27^x+12+\frac{8}{27^x}=27$ **.** (enunț corectat)

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: Notăm $9^x+\frac{2}{3^x}=y\rangle 0\Rightarrow y^3=729^x+6\cdot 27^x+12+\frac{8}{27^x}\Rightarrow y^3=27\Rightarrow y=3$. Atunci, din

$9^x+\frac{2}{3^x}=3\Rightarrow 3^x=1\Rightarrow x=0.$

L:387. **Să se determine** $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$ **pentru care** $\sqrt[n]{1+2n\sqrt{n}+n^2}=1+\sqrt{n}$ **.**

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Pentru n=2 rezultă $\sqrt{5+4\sqrt{2}}\rangle 1+\sqrt{2}$, deci nu e soluție;

Pentru $n\geq 4\Rightarrow(1+\sqrt{n})^n=1+n\sqrt{n}+n\sqrt{n}C_n^2+\sum_{k=4}^{n}C_n^k\sqrt{n}^k\ \rangle\ 1+n\sqrt{n}+n\cdot\frac{n(n-1)}{2}+C_n^3n\sqrt{n}\ \rangle$

$\rangle\ 1+2n\sqrt{n}+n^2$ ceea ce constituie o contradicție. Singura soluție este n=3 deoarece

$(1+\sqrt{3})^3=1+6\sqrt{3}+3^2$.

L:388. Să se demonstreze inegalitatea $2\cdot\log_2 2014+13\cdot\log_{2014} 2>10$

Elena şi Constantin Ciobîcă, Fălticeni

Rezolvare: Notăm $\log_2 2014=a>\log_2 2=1\Rightarrow a>1$. Inegalitatea devine:

$2a+\frac{13}{a}>10\Rightarrow 2a^2-10a+13>0\Rightarrow a^2-4a+4+a^2-6a+9>0$. $(a-2)^2+(a-3)^2>0,\forall a\in\mathbb{R}$.

L:389 Rezolvați ecuația: $\cos 3x-4\sin^2 x+2=0$**.**

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare: $\cos 3x-4\sin^2 x+2=0\Leftrightarrow\cos 3x+2(1-2\sin^2 x)=0\Leftrightarrow\cos 3x+2\cos 2x=0$, unde înlocuim $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ şi $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ şi obținem ecuația echivalentă: $4\cos^3 x+4\cos^2 x-3\cos x-2=0\Leftrightarrow\left[2\cos(x)+1\right]\left[2\cos^2(x)+\cos(x)-2\right]=0$ **.** Deci, $\cos x=-\frac{1}{2}$ sau $\cos x=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$. Rezultă soluțiile:

$x\in\left\{\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi\middle|k\in Z\right\}\cup\left\{\pm\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right)+2k\pi\middle|k\in Z\right\}$.□

▪ Clasa a XI-a

L:390. Fie matricea $X=\begin{pmatrix}30 & 28\\ 51 & 53\end{pmatrix}$**. Determinați** $x,y\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $X^2=x\cdot X+y\cdot I_2$

Doina Stoica, Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

Relația dată este echivalentă cu $\begin{pmatrix}2328 & 2324\\ 4233 & 4237\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30x+y & 28x\\ 51x & 53x+y\end{pmatrix}\Rightarrow x=83,\ y=-162$.

L:391. Dacă $A,B\in M_3(R)$ **a.î.** $A+B+AB=0$ **şi** $AB=\begin{pmatrix}2010 & 2011 & 2012\\ 2013 & 2014 & 2015\\ 2016 & 2017 & 2018\end{pmatrix}$**, calculați** BA**.**

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Deoarece $(A+I)(B+I)=AB+A+B+I=I$, rezultă că matricile $A+I$ şi $B+I$ sunt una inversa alteia. Atunci $(A+I)(B+I)=(B+I)(A+I)\Leftrightarrow AB=BA$.

Prin urmare, $BA=\begin{pmatrix}2010 & 2011 & 2012\\ 2013 & 2014 & 2015\\ 2016 & 2017 & 2018\end{pmatrix}$.

L:392. În sistemul cartezian de coordonate se dau punctele $A(2,0)$**,** $B(0,3)$ **şi** $C(\alpha,\beta)$ **unde** $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$**.**

a)Să se arate că punctele A**,** B **şi** C **sunt vârfurile unui triunghi**

$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}5 & 1 & 2\alpha+1\\ 1 & 10 & 3\beta+1\\ 2\alpha+1 & 3\beta+1 & \alpha^2+\beta^2+1\end{vmatrix}\neq 0$**;**

b)Dacă punctul C descrie dreapta $(d): x+y=1$, atunci determinați mulțimea de puncte generate de centrul de greutate al ΔABC.

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

Soluție. a)Avem $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2\alpha+1 \\ 1 & 10 & 3\beta+1 \\ 2\alpha+1 & 3\beta+1 & \alpha^2+\beta^2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 3 & \beta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow A(\Delta ABC) \neq 0$, adică concluzia.

b)Din $C \in (d) \Leftrightarrow \alpha+\beta=1$. Coordonatele centrului de greutate sunt $x=\frac{\alpha+2}{3}$ şi $y=\frac{\beta+3}{3}$.

Deci $\alpha=3x-2$, $\beta=3y-3$ care înlocuite în ecuația dreptei (d) obținem $(d'): x+y=2$.

Aşadar centrul de greutate al ΔABC generează o dreaptă (d') care este paralelă cu dreapta (d) din care se elimină punctul D, de intersecție al dreptei (d) cu dreapta AB (se obține uşor $(D(4,-3))$, situație în care punctele A, B şi C sunt coliniare.

L:393. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_n=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{x}{3^k}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$. Să se studieze convergența şirului dat şi să se determine $\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\beta(x)}=0$, unde $\beta(x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha^{kx}(\alpha^x-1)$.

Stelian Piscan, Giurgiu

Rezolvare: $a_{n+1}-a_n=\sin\frac{x}{3^{n+1}}\rangle 0$, $\forall n\geq 1\Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

$\beta(x)=\sum_{k=1}^{n}(\alpha^{(k+1)x}-\alpha^{kx})=\alpha^{(n+1)x}-\alpha^n=\alpha^n(\alpha^{nx}-1)$. $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior, deci convergent.

Cum $0\langle a_n\langle\frac{\pi}{4}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=l\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right]\subset(0;1)$ şi $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\beta(x)}=0$ dacă $\lim_{n\to\infty}(\alpha^{nx}-1)=\infty$, ceea ce se realizează pentru $\alpha\rangle 1$.

L:394. Fie $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ două matrice, astfel încât $(AB)^2+(BA)^2=2AB^2A$.

a) Arătați că $AB^2A=BA^2B$.

b) Dacă $A,B\in M_2(\mathbb{R})$ sunt doua matrice cu urma nenulă,pentru care avem $AB+BA=O_2$ arătați că $(TrA)^2+(TrB)^2=Tr(A^2+B^2)$.

Florin Stănescu, Găeşti, Dâmbovița

Rezolvare:

a) Din $(AB)^2+(BA)^2=2\cdot AB^2A$, trecând la urmă obținem:

$Tr(AB)^2=Tr(A^2B^2)\Rightarrow Tr(B^2A^2)=Tr(BA)^2$.Acum,din $X^2-Tr(X)\cdot X+\det X\cdot I_2=0_2$,

aplicând urma, obținem: $\det X=\frac{1}{2}[(TrX)^2-Tr(X^2)]$. Pentru

$X=AB-BA\Rightarrow\det(AB-BA)=\frac{1}{2}[(Tr(AB-BA))^2-Tr((AB-BA)^2)]=-\frac{1}{2}[Tr(AB)^2-Tr(A^2B^2)-Tr(B^2A^2)+Tr(BA)^2]=0\Rightarrow\det(AB-BA)=0\Rightarrow(AB-BA)^2=O_2$

Tinand cont de relatia din ipoteza, putem scrie:

$O_2=(AB-BA)^2=(AB)^2-AB^2A-BA^2B+(BA)^2=2\cdot AB^2A-AB^2A-BA^2B=AB^2A-BA^2B\Rightarrow AB^2A=BA^2B$.

b)Deoarece $AB+BA=O_2$, avem $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=A^2+B^2$ si analog $(A-B)^2=A^2+B^2\Rightarrow(A+B)^2=(A-B)^2\Rightarrow \det(A+B)^2=\det(A-B)^2\Rightarrow \det(A+B)=\pm\det(A-B)$

(1).

Acum,din $X^2-Tr(X)\cdot X+\det X\cdot I_2=0_2$, aplicând urma, obținem:

$\det X=\frac{1}{2}[(TrX)^2-Tr(X^2)]$**(2).**Astfel,in**(2),** luand pe rand $X=A+B$ si $X=A-B$, obținem:

$\det(A+B)=\frac{1}{2}\left[\left(Tr(A+B)\right)^2-Tr((A+B)^2)\right]=\frac{1}{2}[(TrA)^2+(TrB)^2+2Tr(A)\cdot Tr(B)-Tr(A^2+B^2)]$

am folosit că $AB+BA=O_2$)**(3)** si analog :

$\det(A-B)=\frac{1}{2}[(TrA)^2+(TrB)^2-2Tr(A)\cdot Tr(B)-Tr(A^2+B^2)]$. Acum,revenind la (**1),** cu ajutorul lui (**3**)si **(4),** putem scrie:

Cazul 1. Dacă

$\det(A+B)=\det(A-B)\Rightarrow\frac{1}{2}[(TrA)^2+(TrB)^2+2Tr(A)\cdot Tr(B)-Tr(A^2+B^2)]=\frac{1}{2}[(TrA)^2+(TrB)^2-2Tr(A)\cdot Tr(B)-Tr(A^2+B^2)]\Rightarrow TrA\cdot TrB=0,$

contradicție cu ipoteza problemei.

Cazul 2.Dacă

$\det(A+B)=-\det(A-B)\Rightarrow\frac{1}{2}[(TrA)^2+(TrB)^2+2Tr(A)\cdot Tr(B)-Tr(A^2+B^2)]=-\frac{1}{2}[(TrA)^2+(TrB)^2-2Tr(A)\cdot Tr(B)-Tr(A^2+B^2)]\Rightarrow(TrA)^2+(TrB)^2=Tr(A^2+B^2).$

L:395. Fie familiile de puncte $A_n\left(2n+1;\sum_{k=1}^{n}(2k+1)\right)$, $B_n\left(8n+7;\sum_{k=1}^{n}(8k+7)\right)$, $C_n\left(14n+13;\sum_{k=1}^{n}(14k+13)\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. **Să se arate că punctele** $A_n,B_n,C_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ **sunt coliniare.**

Elena şi Constantin Ciobîcă, Fălticeni, Suceava

***Rezolvare*:**

Punctele $A_n,B_n,C_n,\forall n\in N^*$ sunt coliniare dacă:

$$\begin{vmatrix} 2n+1 & \sum_{k=1}^{n}(2k+1) & 1\\ 8n+7 & \sum_{k=1}^{n}(8k+7) & 1\\ 14n+3 & \sum_{k=1}^{n}(14k+13) & 1\end{vmatrix}=0,\forall n\in N^*\Leftrightarrow\begin{vmatrix} 2n+1 & \sum_{k=1}^{n}(2k+1) & 1\\ 6n+6 & \sum_{k=1}^{n}(8k+7)-\sum_{k=1}^{n}(2k+1) & 0\\ 12n+12 & \sum_{k=1}^{n}(14k+13)-\sum_{k=1}^{n}(2k+1) & 0\end{vmatrix}=0,\forall n\in N^*$$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix} 6n+6 & \sum_{k=1}^{n}(6k+6)\\ 12n+12 & \sum_{k=1}^{n}(12k+12)\end{vmatrix}=0,\forall n\in N^*\Leftrightarrow\begin{vmatrix} 6(n+1) & 6\sum_{k=1}^{n}(k+1)\\ 12(n+1) & 12\sum_{k=1}^{n}(k+1)\end{vmatrix}=0,\forall n\in N^*$$

▪ Clasa a XII-a

L:396. Calculați $\int_0^3 \max(\ln(x^2+1),2)dx$ **;** **Constantin Dinu**, Buzău

Rezolvare: Se arată că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(x^2+1)-2$ este crescătoare.

$$\int_0^3 \max(\ln(x^2+1),2)dx=\int_0^3 2dx+\int_0^3 \ln(x^2+1)dx=2\sqrt{e^2-1}+x\ln(x^2+1)\Big|_{\sqrt{e^2-1}}^3-2\int_0^3\frac{x^2}{x^2+1}dx.$$ etc.

L:397. Să se arate că $\int_{2p+1}^{2p+\frac{3}{2}}\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x+k-1}{n}\right]}dx<\frac{n+2p}{2n},\ \forall n\in\mathbb{N},n\geq 2,\ p\in\mathbb{N}^*.$

Stelian Piscan, Giurgiu

Rezolvare:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x+k-1}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]+\left[\frac{x}{n}+\frac{1}{n}\right]+\left[\frac{x}{n}+\frac{2}{n}\right]+.....+\left[\frac{x}{n}+\frac{n-1}{n}\right]=\left[n\cdot\frac{x}{n}\right]=[x],$$ (Identitatea lui Hermite).

Din inegalitatea mediilor, rezultă, $\sqrt[n]{[x]}=\sqrt[n]{[x]\cdot 1\cdot 1\cdot.....\cdot 1}\leq\frac{[x]+1+...+1}{n}$, (*) .

Cum $2p+1\leq x\leq 2p+1+\frac{1}{2}\Rightarrow[x]=2p+1\rangle 1,$ rezultând că în (*) nu putem avea egalitate deoarece,

$[x]\neq 1.$ Aşadar, $\sqrt[n]{[x]}<\frac{[x]+n-1}{n}$ iar $\int_{2p+1}^{2p+\frac{3}{2}}\sqrt[n]{[x]}dx<\int_{2p+1}^{2p+\frac{3}{2}}\frac{[x]+n-1}{n}dx=\int_{2p+1}^{2p+\frac{3}{2}}\frac{n+2p}{n}dx=\frac{n+2p}{2n}.$

L:398. Dacă $f:[0,1]\to R^+$ **este continuă şi verifică condiția** $\int_0^1(f(x))^2dx=1$**, determinați:**

$\max\left(\int_0^1 f(x)x^{2014}dx\right)$ **şi funcția care realizează acest maxim.**

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Soluție. Fie $I=\int_0^1 f(x)x^{2014}dx$ .Aplicăm inegalitatea *Cauchy-Schwarz* pentru integrale , funcțiilor $f(x)$ şi x^{2014} .Obținem: $I^2\leq\int_0^1(f(x))^2dx\int_0^1 x^{4028}dx=1\cdot\frac{1}{4029}$. Aşadar, $I\leq\frac{\sqrt{4029}}{4029}$. Deci,

$\max\left(\int_0^1 f(x)x^{2014}dx\right)=\frac{\sqrt{4029}}{4029}$, iar funcția pentru care se realizează acest maxim este $f(x)=cx^{2014}$, unde $c=\sqrt{4029}$ (satisface $\int_0^1(f(x))^2dx=1$).□

L:399. Să se demonstreze că $\int_0^1 x^2e^{x^2}dx<\frac{e}{\sqrt{5}}$**. De ce semnul egal nu este posibil?**

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

***Rezolvare*:** Aplicând inegalitatea C-B-S obținem

$\left(\int_0^1 x^2 e^{x^2} dx\right)^2 \le \int_0^1 x^4 dx \cdot \int_0^1 e^{2x^2} dx = \frac{1}{5}\int_0^1 e^{2x^2} dx \Rightarrow \int_0^1 x^2 e^{x^2} dx \le \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{\int_0^1 e^{2x^2} dx}$, (1).

Fie funcția $f:[0,1]\to R, f(x)=e^{2x^2}$. Deoarece $f'(x)=2xe^{2x^2}\ge 0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare şi îşi atinge marginile, deci $1\le e^{2x^2}\le e^2$. Folosind proprietatea de monotonie a integralei obținem

$\int_0^1 1dx \le \int_0^1 e^{2x^2} dx \le \int_0^1 e^2 dx \Leftrightarrow 1\le \int_0^1 e^{2x^2} dx \le e^2 \Leftrightarrow 1\le \sqrt{\int_0^1 e^{2x^2} dx} \le e$, (2).

Din (1) şi (2) rezultă inegalitatea de demonstrat. Semnul egal nu este posibil deoarece $\frac{x^2}{e^{x^2}}$ nu este constantă.

L:400. Să se arate că ecuația $x^4-6x^3+12x^2-12x+6=0$ nu are toate rădăcinile reale şi să se rezolve în $\mathbb{C}$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Dacă $x\langle 0 \Rightarrow -6x^3\rangle 0,\ -12x\rangle 0$, deci ecuația nu are rădăcini negative.

Dacă presupunem că toate rădăcinile sunt reale şi pozitive, din inegalitatea mediilor obținem că $\frac{x^4-6x^2+12x^2-12x+6}{5}\ge \sqrt[5]{x^4\cdot(-6x^3)\cdot 12x^2\cdot(-12x)\cdot 6}$ adică, $0\ge 5\cdot\sqrt[5]{36\cdot 144\cdot x^{10}}$ ceea ce ar însemna că $x^2\le 0$, fals. Aşadar, ecuația nu are toate soluțiile reale.

Pentru a rezolva ecuația, se împarte cu x^2 rezultând: $x^2-6x+12x-\frac{12}{x}+\frac{6}{x^2}=0$ de unde cu notația $y=x+\frac{2}{x}\Rightarrow 3y^2-12y+12-x^2=0$ cu soluțiile $y_{1,2}=\frac{6\pm x\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{3+\sqrt{3}\pm\sqrt[4]{12}}{2}\in\mathbb{R}_+^*$ şi $x_{3,4}=\frac{3-\sqrt{3}\pm i\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

Paradoxul martorului

Cum trebuie să răspundă un martor în fața unui judecător, fără a se contrazice, atunci când judecătorul îi cere să răspundă cu da sau cu nu la următoarea întrebare: **"Va fi următorul cuvânt pe care-l veți pronunța cuvântul nu?"**

Aceasta este un paradox căci , dacă răspunde cu da, înseamnă că primul cuvânt trebuia să fie nu, aşadar, contradicție. Dacă răspunde nu, înseamnă că trebuia să ofere un răspuns afirmativ, deci iar s-a contrazis.

” Va exista întodeauna un mâine pentru a rezolva problemele care azi păreau să nu aibă soluție. ”
Jose Saramago

4. Probleme propuse

▪ Învățământ primar

P:347. Suma a patru numere naturale este egală cu cel mai mare număr natural de trei cifre la care cifra unităților este un număr mai mic decât 1.Primul număr reprezintă a treia parte din întreaga sumă,al doilea reprezintă o treime din primul număr,iar al treilea reprezintă un sfert din suma primelor două. Care este al patrulea număr ? **Gabriela Marinescu** , Buzău

P:348. a) Cinci elevi au jucat şah, oricare dintre ei, câte o partidă cu fiecare dintre ceilalți. Câte partide s-au jucat?

b) Un grup de elevi joacă şah, oricare dintre ei, câte o partidă cu fiecare dintre ceilalți. Ştiind că se joacă 21 de partide, determinați câți elevi sunt în grup.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

P:349. Suma dintre un număr,dublul predecesorului său şi triplul succesorului său este 967 . Aflați numărul .

Marcela Marin , Rm. Sărat

P:350. Câtul a două numere este 9. Primul mărit cu 37 este de 8 ori mai mare decât al doilea număr mărit cu 5. Să se afle numerele.

Mariana Laura Ilie, Buzău

P:351. Câtul dintre triplul sumei a 3 numere consecutive şi 17 este 6 şi restul este 6. Care sunt numerele?

Mariana Laura Ilie, Buzău

P:352. Suma a trei numere naturale x, y, z este 2044. Să se afle numerele dacă: (x + z + 100) : 2 = x + z – 104 = 800.

Cristian-Cosmin Lupşan, Buzău

P:347. Carla a citit o carte de 93 de pagini în 5 zile. Luni a citit un număr de pagini, apoi în fiecare zi dublul paginilor din ziua precedentă. Câte pagini a citit în fiecare zi?

Cristian-Cosmin Lupşan, Buzău

P:353. Suma vârstelor tatălui, mamei şi fiicei este de 81 de ani. Peste 3 ani mama va avea vârsta de acum a tatălui, iar peste 30 de ani fiica va avea vârsta de acum a mamei. Câți ani are fiecare?

Nicoleta-Gabriela Lupşan, Berca

P:354. Un agricultor îşi dublează zilnic cantitatea de legume vândută. În câte zile termină de vândut legumele, dacă după 10 zile a vândut o pătrime din cantitatea totală?

Nicoleta-Gabriela Lupşan, Berca

P:355. Dublul unui număr se adună cu 50. Suma obținută se scade din 400, iar rezultatul este 270. Care este numărul?

Daniela Ticea, Buzău

P:356. Suma a două numere este 3078. Dacă unul se triplează, suma devine 6312. Află numerele.

Daniela Ticea, Buzău

P:357. Un câine urmăreşte o vulpe. Vulpea este cu 60 de sărituri înaintea câinelui. 3 paşi de-ai câinelui sunt cât 7 sărituri ale vulpii. După câte sărituri prinde câinele vulpea?

Roxana- Violeta Toader, Buzău

P:358. Află câte pâini s-au făcut la o brutărie într-o zi, ştiind că: 4403 erau franzele şi intermediare, 3411 erau franzele şi dietetice, iar 2754 erau intermediare şi dietetice.

Roxana- Violeta Toader , Buzău

P:359. Într-o bibliotecă sunt 450 de volume. Dintre acestea, a cincea parte sunt cărți de literatură, iar atlase geografice sunt de nouă ori mai multe decât culegeri de matematică. În bibliotecă urmează să se mai primească 35 de cărți de literatură, de trei ori mai multe atlase geografice şi de două ori mai

multe culegeri de matematică față de noul număr de atlase geografice din bibliotecă. Câte volume din fiecare fel vor fi în total în bibliotecă? Câte volume vor fi în total în bibliotecă?

Elena Zainea, Buzău

P:360. În două sacoşe sunt 10 kilograme de mere. Dacă se transferă 2 kg de mere din prima sacoşă, rămân cu 2 kg mai puțin decât în a doua sacoşă. Câte kilograme de mere au fost la început în fiecare sacoşă?

Elena Zainea , Buzău

▪ Clasa a V-a

G:544. Justificați că $3^{2015} + 3$ este divizibil cu 10. **Ion Stănescu**, Buzău

G:545. Suma a trei numere este 47. Daca împărțim al treilea număr la primul obținem câtul 1 şi restul 8; dacă împărțim al doilea număr la primul, obținem câtul 1 şi restul 6; iar, dacă împărțim al treilea număr la al doilea, obținem câtul 1 si restul 2. Aflați cele trei numere. **Claudia Popa,** Buzău

G:546. Arătați că există o infinitate de numere naturale nenule pătrate perfecte, n, astfel încât 3n este cub perfect, 4n este puterea a patra a unui număr natural iar 5n este puterea a cincea a unui număr natural.

Carmen Terheci , Alina Tigae , Craiova

G:547. Fie n un număr care, împărțit la 8, dă restul 7 şi, împărțit la 15, dă restul 11. Determinați restul împărțirii numărului n la 24. **Constantin Apostol**, Rm. Sărat

G:548. Ştiind că $4\cdot \overline{ab}=\overline{cd}$, arătați că numerele de forma $\overline{abcd}$ se divid cu 13 şi cu 8.

Marin Simion, Rm. Sărat

G:549. Să se demonstreze că $107\cdot 2^{4n+1}\cdot 3^{4n}+221^n \vdots 43, \forall n\in N.$

Gheorghe Ghiță, Buzău

G:550. Arătați că există o infinitate de pătrate perfecte care se pot scrie ca sumă de 2015 cuburi perfecte şi o infinitate de cuburi perfecte care se pot scrie ca sumă de 2015 pătrate perfecte.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

G:551. Arătați că numărul $A=(2^{2020}-2^{2015})\cdot(2^{2018}+2^{2017}+2^{2015})\cdot(2^{2016}+2^{2014})$ se divide cu 2015 şi de asemenea că se poate scrie ca diferență a două pătrate perfecte.

Mariana Mitea, Cugir, Alba

G:552. Aflați numerele naturale x, y, z astfel încât $25^x+15^y+5^z=627$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:553. Determinați numerele naturale x, astfel încât ultima cifră a numărului $n=x!+961$ să fie 1, unde $x!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ....\cdot x,\ x\in \mathbb{N}^*$, şi $0!=1$. **Doina şi Mircea Mario Stoica**, Arad

G:554. Să se rezolve ecuația $13_x+34_y=33_{10}$, unde indicii reprezintă baze de numerație.

Constantin Dinu, Buzău

G:555. Să se determine numerele de patru cifre $\overline{a0bc}$ ştiind că se scriu în baza 7 ca $\overline{defg}_{(7)}$ şi că cifrele a,b,c,d,e,f,g, luate într-o anumită ordine, sunt consecutive.

Titu Zvonaru, Comăneşti

▪ Clasa a VI-a

G:556. Arătați că suma $S = 2^0 + 2^1 + \ldots 2^{401}$ nu este pătrat perfect. **Claudia Popa**, Buzău

G:557. Determinați cel mai mic număr natural care are 36 de divizori şi printre aceştia şi 16.
Dârstaru Gheorghe, Buzău

G:558. Determinați două numere întregi direct proporționale cu 2000 şi 2010, ştiind că suma pătratelor lor este 72360900. **Mircea Mario Stoica**, Arad

G:559. Aflați cardinalul mulțimii $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,x=\dfrac{n^2+21n}{n-1},n\in\mathbb{N},n\neq 1\right\}$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:560. Să se determine numerele $\overline{abcd}$ ştiind că numerele a + b, b + c, c + a sunt direct proporționale cu numerele d, d + 1, d + 3,cu $d\neq 0$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

G:561. Bisectoarele a 2 unghiuri adiacente formează un unghi de 120^0. Măsura unui unghi este pătratul măsurii celuilalt. Aflați măsurile unghiurilor. **Ion Stănescu,** Buzău

G:562. Să se determine măsurile a două unghiuri complementare , ştiind că sunt direct proporționale respectiv cu măsurile complementului şi suplementului lor.
Marin Simion, Rm. Sărat

G:563. În triunghiul Δ ABC se dau AB=5 cm, AC=12 cm, BC=13 cm, iar pe latura $[BC]$ se iau punctele M, N astfel încât BM=1 cm, CN=8 cm. Aflați măsura unghiului $\sphericalangle$ MAN. **Mariana Mitea**, Cugir, Alba

G:564. Determinați măsura unghiului $\widehat{BAC}$ al triunghiului Δ ABC, ştiind că sunt îndeplinite condițiile:
a) $[AB]=[AC]$; b) $D,E\in(BC)$ şi $[BD]\equiv[DE]\equiv[EC]$; c) $m(\widehat{DAE})=m(\widehat{BAD})+m(\widehat{EAC})$.
Constantin Apostol, Rm. Sărat

▪ Clasa a VII-a

G:565. Rezolvați în $N\times N\times N$ ecuația $xyz=x+y+z$. **Constantin Rusu,** Rm. Sărat

G:566. Arătați că dacă suma a două numere pozitive este un număr par, atunci valoarea maximă a produsului lor este pătratul jumătății sumei lor. **Andrei Octavian Dobre**, Ploieşti

G:567. a) Ştiind că x şi m sunt numere naturale şi că $x^2+4(x+1)=m^2-4(m+1)+8$, arătați că $x\le m$.
b) Arătați că ecuațiile cu necunoscuta x, unde $x\in\mathbb{Z}$, care se obțin din egalitatea dată, dacă $m=1$ sau $m=3$, sunt echivalente.
Constantin Apostol, Rm. Sărat

G:568. Aflați numerele naturale $\overline{abc}$ ştiind că $\sqrt{\overline{abc}}=\sqrt{\overline{cb}}+\sqrt{\overline{ab}}+\sqrt{a+b}+\sqrt{a+c}+a+c$.
Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:569. Fie $n \in \mathbb{N}$ şi $a,b \in (1;\infty)$. Arătaţi că $ab + \frac{1}{a^n b^n} \rangle \frac{1}{a^{n-1}} + \frac{1}{b^{n-1}}$.

Ileana Didu, Camelia Dana, Craiova

G:570. Determinaţi $x, y, z \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 = 2015yz$.

Cătălin Pană, Rm. Vâlcea**, Lucian Tuţescu**, Craiova

G:571. Fie n_1 numărul numerelor naturale $n\langle 2015$ astfel încât $\left[\frac{n}{3}\right]$ se divide cu 3 şi n_2 numărul numerelor naturale $n\langle 2015$ astfel încât $\left[\frac{n}{3}\right]$ să se dividă cu 9. Determinaţi $n_1 - n_2$.

Lucian Tuţescu, Craiova, **Dumitru Săvulescu**, Bucureşti

G:572. Determinaţi $x, y \in \mathbb{R}_+$ dacă $\sqrt{6x+6y} + \sqrt{20x^2+20y^2} = \frac{(x+y)(x+y+1)-2xy+26}{2}$.

Gheorghe Struţu, Buzău

G:573. Fie $a,b,c \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $a^2 + 4b^2 + 9c^2 = 6a + 16b - 12c + 20$. Să se determine max(a,b.c).

Adrian Stan, Buzău

G:574. Dacă A = 3·9+4·10+5·11+…+2015·2021 iar B = 1·11+2·12+3·13+…+2013·2023, comparaţi cele două numere. **Mariana Mitea,** Cugir, Alba

G:575. Se consideră numărul $a = 4\sqrt{15} + 4\sqrt{35} + 4\sqrt{21} + 30$. Să se arate că $a = b^2$, unde $b \in \mathbb{R}$.

Petre Păunescu, Roşiorii de Vede

G:576. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ atunci : $\frac{n^{2015}}{2015n - 2014} \geq \frac{n^{2015} + 2016}{n^{2017} + 2016}$. **Gheorghe Ghiţă,** Buzău

G:577. Determinaţi $\overline{abc}$ astfel încât $[\sqrt{\overline{abc}}]=16$ şi a+b+c=17.

Iuliana Traşcă, Scorniceşti, Olt

G:578. Dacă un triunghi dreptunghic are lungimile catetelor a, respectiv b, şi lungimea ipotenuzei c, iar p este semiperimetrul, atunci arătaţi că $p(p-c) = (p-a)(p-b)$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

G:579. Fie P un punct situat pe cercul circumscris triunghiului echilateral ABC. Arătaţi că :
a) PA = PB+PC sau PB = PA+PC sau PC = PA+PB
b) Dacă AB = a, a nr real pozitiv atunci $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 2a^2$. **Ion Radu**, Bozioru, Buzău

G:580. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A , iar M mijlocul ipotenuzei. Perpendiculara în M pe BC intersectează pe (AC) în N . Dacă AN = NM şi AB = 4 cm , determinaţi perimetrul şi aria triunghiului ΔABC.

Marin Simion, Rm. Sărat

▪ Clasa a VIII-a

G:581. Arătaţi că dacă $3x^2 - 2x + 3y^2 - 4y + \frac{1}{3} = 0$ atunci $x + y + 1 \in \left[\frac{2}{3}; \frac{10}{3}\right]$.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

G:582. Se consideră mulțimile : A = { x| x $\in \mathbb{R}$ şi $|x-1| \le 4$ },B = { y| $y \in \mathbb{R}$ şi $|y+0,3| < 3,3$ }.
a) Scrieți sub formă de intervale mulțimile A şi B .
b) Determinați mulțimile : A $\cup$ B , A $\cap$ B şi (A-B) $\cap \mathbb{N}$, unde $\mathbb{N}$ reprezintă mulțimea numerelor naturale .

Marin Simion, Rm. Sărat

G:583. Fie $P=\left(\sqrt{1}-900\right)\cdot\left(\sqrt{2}-899\right)\cdot\left(\sqrt{3}-898\right)\cdot.....\cdot\left(\sqrt{899}-2\right)\cdot\left(\sqrt{900}-10\right)\cdot$ Stabiliți semnul lui P.

Dan Lucian Grigore , Craiova

G:584. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x(x+1)(x^2+x-5)=300$. **Adrian Stan,** Buzău

G:585. Determinați $x, y \in \mathbb{R}_+$ dacă $\sqrt{\frac{x^2+4y(x+y)+9}{2}}+\sqrt{\frac{x^2+8y(x+2y)+16}{2}}=x+3y+\frac{7}{2}$.

Gheorghe Struțu, Buzău

G:586. Dacă x$\in \mathbb{Z}$ şi numărul $n=x^3+6x^2-109x-234$ se divide cu 11, demonstrați că numărul $\frac{n}{1331}$ este întreg.

Iuliana Trască, Scorniceşti, Olt, **Daniela Burtoiu,** Piteşti, Argeş

G:587. Rezolvați în $\mathbb{R}^*$x $\mathbb{R}^*$ sistemul : $\begin{cases} 15y\left(x^2+1\right)=7x\left(y^2+1\right) \\ xy^2-x^2y+x-y=\frac{80xy}{21} \end{cases}$. **Constantin Apostol**, Rm. Sărat

G:588. Să se arate că numărul $x=\frac{4^{2009}+16^{2009}+64^{2009}+256^{2009}+...+4^{2009^2}-2009}{4^{2009}-1}$ este număr natural.

Mircea Mario Stoica , Arad

G:589. Aflați valorile întregi ale lui n pentru care fracția $F=\frac{n^3-n^2-48}{n^3+5n^2+18n+24}\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{-2\}$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:590. Rezolvați ecuația $\sqrt{504+\frac{1}{2}\sqrt{y}}-\sqrt{504-\frac{1}{2}\sqrt{y}}=1$. **Mariana Mitea,** Cugir, Alba

G:591. Fie $a,\ b\in\mathbb{R}$, $a\neq b$ cu $a^2=nb+n^2+1$ şi $b^2=na+n^2+1$, unde $n\in\mathbb{R}$. Calculați: $a^3-2a^2b^2+b^3$.

Marin Chirciu, Piteşti

G:592. Dacă $a,b,c\in\mathbb{R}^+$, astfel încât $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2$, arătați că $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\le\frac{3}{2}$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

G:593. Dacă a,b,c sunt laturile unui triunghi, arătați că are loc urmatoarea inegalitate:
$\frac{1}{2(a^4+b^4)-(a^2+b^2-c^2)^2}+\frac{1}{2(b^4+c^4)-(b^2+c^2-a^2)^2}+\frac{1}{2(c^4+a^4)-(c^2+a^2-b^2)^2}\le\frac{3}{16S^2}$, unde S este aria triunghiului.

Florin Stănescu, Găeşti, Dâmbovița

G:594. Să se rezolve ecuația:
$(x+1)(1+\sin^2\alpha-x\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-x\cos^2\alpha)^2=\sin^2\alpha$, unde α este măsura unui unghi al unui triunghi.

Gheorghe Ghiță, Buzău

G:595. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu laturile $AB=5$ cm, $BC=DA=\sqrt{17}$ cm şi $CD=3$ cm. Pe planul $ABCD$ în punctul de intersecție a diagonalelor notat cu O se ridică o semidreaptă perpendiculară pe AC . Pe această semidreaptă se ia un punct M astfel încât

$OM = \frac{3\sqrt{6}}{4}$ cm. Se cere:

a) Demonstrați că $DM \perp AC$.

b) Calculați volumul piramidei $ABCDM$ știind că $m(\sphericalangle MBD) = 60^0$.

c) Aflați aria laterală a piramidei $ABCDM$ în cazul în care triunghiul ΔAMB are aria maximă.

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

▪ Clasa a IX-a

L:401. Să se determine valorile naturale ale parametrului a astfel încât ecuația $(ax-1)^2+(x-a)^2=-18x$ să aibă o soluție întreagă și să se rezolve ecuația în acest caz.

Adrian Stan, Buzău

L:402. a) Arătați că dacă r este un număr rațional pozitiv ce aproximează prin lipsă pe $\sqrt{7}$ atunci $\frac{r+7}{r+1}$ este un număr rațional pozitiv ce aproximează prin adaos pe $\sqrt{7}$.

b) Pentru ce valori raționale pozitive ale aproximării r prin lipsă a lui $\sqrt{7}$ valoarea $\frac{r+7}{r+1}$ este o aproximare mai bună a lui $\sqrt{7}$ decât r ?

Ion Pătrașcu, Titu Toma, Craiova

L:403. Fie ABC un triunghi echilateral de latura "a" și un punct M în interiorul triunghiului astfel încât distanța de la M la laturile triunghiului este egală cu „d". Arătați că $a \geq 2\sqrt{3}d$.

Andrei Octavian Dobre, Ploiești

L:404. a) Să se arate că $\left[\sqrt{n^2+n}\right]=n,\ \forall n\in\mathbb{N}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x;

b) Rezolvați ecuația $\left[\sqrt{1\cdot 2}\right]+\left[\sqrt{2\cdot 3}\right]+\left[\sqrt{3\cdot 4}\right]+.....+\left[\sqrt{n\cdot(n+1)}\right]=496$ în $\mathbb{N}$.

Constantin Dinu, Buzău

L:405. Dacă $a,\ b,\ c>0$ astfel încât $a^2+b^2+c^2=3$ și $1<n\leq 2$, arătați că: $\frac{1}{n-a}+\frac{1}{n-b}+\frac{1}{n-c}\geq\frac{3}{n-1}$.

Marin Chirciu, Pitești

L:406. Determinați numerele reale nenule $a_1, a_2, a_3,..., a_n$, astfel încât:

$\frac{a_1+2a_2+3a_3+...+na_n}{a_1+a_2+a_3+...+a_n}=\frac{2n+1}{3},\ \forall n\geq 2.$

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:407. Fie $m\rangle 0$. Fie o funcție $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ pentru care f(a) = f(b) = 0 și pentru $\forall x_1, x_2\in[0;1]$, $x_1\neq x_2\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|\langle m\cdot|x_1-x_2|$. Să se arate că există $x_1, x_2\in(0;1)$, $x_1\neq x_2\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|\langle\frac{m(b-a)}{2}$.

Chiriță Marcel,București

L:408. Rezolvați în $\mathbb{R}^*$x $\mathbb{R}^*$ sistemul : $\begin{cases}15y(x^2+1)=7x(y^2+1)\\ xy^2-x^2y+x-y=\frac{80xy}{21}\end{cases}$.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

L:409. Să se arate că $\frac{1}{\left[\sqrt{11}\right]\cdot\left[\sqrt{27}\right]}+\frac{1}{\left[\sqrt{27}\right]\cdot\left[\sqrt{51}\right]}+...+\frac{1}{\left[\sqrt{4n^2+4n+3}\right]\cdot\left[\sqrt{4n^2+12n+11}\right]}=\frac{2n}{3(2n+3)}$,

$\forall n\in\mathbb{N}^*$ unde $\left[x\right]$ este partea întreagă a lui x. **Constantin şi Elena Ciobîcă**, Fălticeni

▪ Clasa a X-a

L:410. Să se arate că $2\lg 3+\lg 7\cdot\lg 27\langle\log_2 10$. **Constantin Dinu**, Buzău

L:411. Determinați numerele prime p şi q astfel încât $\frac{(p-1)!+1}{p}=q^6+39$.

Cristian Moanță, Lucian Tuțescu, Craiova

L:412. Care sunt condițiile ce trebuie să le îndeplinească $a,b,c\geq 0$ astfel încât să avem $\sqrt[3]{27a^2b^2c^2}\leq 2ab+c^2\leq ab+bc+ca$? **Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

L:413. Rezolvați ecuația $\log_4\log_5\lg x=1$ în $\mathbb{R}^*_+$. **Doina şi Mircea Mario Stoica**, Arad

L:414. Rezolvati în $\mathbb{R}$ ecuatia: $x\sqrt{3+x}+\sqrt{39-3x}=4\sqrt{3+x^2}$. **Marin Chirciu**, Pitesti

L:415. Să se rezolve în $\mathbb{R}_+$* ecuația $(2^x-1)^{\frac{1}{x}}+(3^x-1)^{\frac{1}{x}}+....+(n^x-1)^{\frac{1}{x}}=\frac{(n-1)n}{2}$, $n\geq 2, n\in\mathbb{N}$.

Gigel Buth, Satu Mare

L:416. **Fie** $x,y,z\in(0;\infty)$**. Arătați că:** $\sqrt{\frac{x^2+xy}{x^2-xy+y^2}}+\sqrt{\frac{y^2+yz}{y^2-yz+z^2}}+\sqrt{\frac{z^2+zx}{z^2-zx+x^2}}\leq 3\sqrt{2}$

Marcel Chiriță, Bucureşti

L:417. Dacă $z,z_0\in C,|z_0|\leq 1$, astfel încât $z^n\pm z^{n-1}\pm...\pm z\pm 2z_0=0$ atunci $|z|\leq 2$, unde $n\in N^8$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:418. Fie triunghiul ABC ascuțit unghic şi $[AD],[BE],[CF]$ înălțimile sale iar H ortocentrul triunghiului. Arătați că $6(AD\cdot AH+BE\cdot BH+CF\cdot CH)\geq(a+b+c)^2$, unde notațiile sunt cele uzuale. În ce caz avem egalitate? **Daniela Grama, Lucian Tuțescu**, Craiova

▪ Clasa a XI-a

L:419. Aflați matricea $A\in M_2(\mathbb{R})$ dacă $A^2+A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$. **Ion Stănescu**, Buzău

L:420. Fie $A,B\in M_2(\mathbb{R})$. Să se arate că dacă $B\cdot A=O_2$ şi $\det(A^2+AB+B^2)=0$ atunci $\det(A+nB)=0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. **Marcel Chiriță**,Bucureşti

L:421. Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{C_n^1+\frac{1}{2}C_n^2+...+\frac{1}{n}C_n^n}{2^2+\frac{1}{2}2^3+...+\frac{1}{n}2^{n+1}}$. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

L:422. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x^3+5x=x^2-5+4\cdot\sqrt[3]{(5x^2+x-5)^2}+6\cdot\sqrt[3]{5x^2+x-5}$.

Oana Preda, Roxana Vasile, Craiova

L:423. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+....+f(n)\right)^{n^2-n+2}$. **Constantin Dinu**, Buzău

L:424. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3!}{4!-2!}+\dfrac{7!}{8!-6!}+....+\dfrac{(4n-1)!}{(4n)!-(4n-2)!}\right)$. **Petre Păunescu,** Roşiorii de Vede

L:425. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale cu $x_1=x_2=4$ şi $2x_{n+2}-3x_{n+1}+x_n-1=0,\forall n\geq 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(x_k-k)$. **Ovidiu Țâțan,** Râmnicu Sărat

L:426. Se consideră $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, o funcție derivabilă de două ori, cu următoarele proprietăți:

a) $f''(x)>0,(\forall)x\in(0,2]$ si $\min\limits_{x\in[0,2]}f(x)\notin\{f(0),f(2)\}$.

b) $f''(0)\cdot f''(2)+f'(0)\cdot f'(2)\leq 0$.

i) Gasiți un exemplu de funcție care are proprietatea din enunț.

ii) Demonstrați că există $c\in(0,2)$ astfel incat $f''(c)=\sqrt{-f'(0)\cdot f'(2)}$.

Florin Stănescu, Găeşti, Dâmbovița

▪ Clasa a XII-a

L:427. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4+e^{-x}$ şi $g(x)=\int\limits_0^2 f(t)dt$.

a) Arătați că funcția g este inversabilă;

b) $\int\limits_{\frac{6}{5}-\frac{1}{2}}^{\frac{37}{5}-\frac{1}{e^2}} g^{-1}(x)dx$; **Dârstaru Gheorghe ,** Buzău

L:428. Să se calculeze: $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{dx}{\sin^{1008}x+\sqrt{1+x^2}+\sqrt{\sin^{2016}x+1+x^2}}dx$. **Gheorghe Ghiță,** Buzău

L:429. Rezolvați în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ecuația $x!=xy+x+y$. **Marian Voinea, Florentin Visescu,** Bucureşti

L:430. Fie ecuația $x^4-4x^3+12x^2-16x+a=0,a\in\mathbb{R}$.

a) Să se rezolve ecuația pentru $a=32$;

b) Să se rezolve ecuația şi să se discute în funcție de $a\in\mathbb{R}$, natura rădăcinilor ei.

Ovidiu Țâțan , Râmnicu Sărat

L:431. Dacă ecuația $x^3-x+3=0$ are rădăcinile a,b şi c determinați polinomul monic care are rădăcinile a^5,b^5 şi c^5.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

" Learning is the eye of the mind ".
****

5. QUICKIES

A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader's name, full address, and an e-mail address. Submited solutions should arrive before March 31 , 2016.

PROPOSALS - QUICKIES

Q21. Proposed by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania.
Let ABC be a triangle with circumcenter O and incenter I. Prove that the line OI and the internal bisector of angle $\angle CAB$ are perpendicular if and only if $BC = \frac{AB+AC}{2}$.

Q22. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania. In all triangle ABC holds

$$\sum tg\frac{A}{2}\sqrt{tg^2\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg^2\frac{C}{2}} \geq \sqrt{3}.$$

Q23. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania.
Show that in any triangle ABC with usual notations holds $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c} \geq \frac{6R}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}$.

Q24. Proposed by Marius Drăgan, Bucharest, Romania.
If $0 < x < 1$, then show that

a) $\frac{x+1}{2}+\sqrt{x} < \frac{2x}{1+x}+\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}$

b) $\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}+\sqrt{x} < 1+x$.

SOLUTIONS – QUICKIES

Q17. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania.
Let $E_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$. Compute $\lim_{n\to\infty}(e-E_n)\cdot(n+1)!$.

Solution of Q17 by Marius Drăgan, Bucharest.
By the theorem of *Cesàro-Stolz*, case $\frac{0}{0}$, we have

$$\lim_{n\to\infty}(e-E_n)\cdot(n+1)! = \lim_{n\to\infty}\frac{(e-E_{n+1})-(e-E_n)}{\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+1)!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{E_{n+1} - E_n}{\frac{n+1}{(n+2)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{n+1}{(n+2)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1.$$

Q18. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania.

Prove that in all triangle ABC holds $\sum \frac{\sin A}{\sin B} \le \frac{s^2 - r^2 - 4Rr}{3Rr}$.

Solution of Q18 by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania.

By sine law and the formulas $\sum a^2 = 2(s^2 - r^2 - 4Rr)$, $abc = 4rRs$, the given inequality becomes successively

$$\sum \frac{a}{b} \le \frac{2s\sum a^2}{12rRs} \Leftrightarrow 2\sum a^2 c \le \sum a^3 + \sum a^2 b \Leftrightarrow \sum (a^3 + ac^2) \ge 2\sum a^2 c,$$

which is true by AM-GM inequality.

Also solved by Marius Drăgan, Bucharest.

Q19. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania.

Prove that if $a,b,c > 0$ and $x \in \mathbb{R}$ then $\sum \frac{a^3}{a\sin^2 x + b\cos^2 x} \ge a^2 + b^2 + c^2$.

Composite solution of Q19 from submissions by Daniel Văcaru, Piteşti, Romania and Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania. By well-known inequality $\sum a^2 \ge \sum ab$ and Bergström's inequality, we obtain $\sum \frac{a^3}{a\sin^2 x + b\cos^2 x} = \sum \frac{a^4}{a^2\sin^2 x + ab\cos^2 x} \overset{Bergstrom}{\ge}$

$$\overset{Bergstrom}{\ge} \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sin^2 x \sum a^2 + \cos^2 x \sum a^2} = \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a^2} = \sum a^2 = a^2 + b^2 + c^2, \text{ q.e.d.}$$

Also solved by Marius Drăgan, Bucharest, Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş, Romania and Ángel Plaza, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Spain.

Q20. Proposed by Neculai Stanciu, Buzău, Romania and Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania.

Prove that if $a,b,c > 0$, then $\sum a^2 \ge \sum ab + \frac{1}{8}\sum \left(|a-c| + |b-c|\right)^2$.

Solution of Q20 by authors. WLOG we can assume that $a \le b \le c$; let $x, y \ge 0$ such that $b = a + x, c = a + x + y$. The given inequality is equivalent with

$$x^2 + xy + y^2 \ge \frac{1}{8}\left((x+2y)^2 + (2x+y)^2 + (x+y)^2\right) \Leftrightarrow 8x^2 + 8xy + 8y^2 \ge 6x^2 + 10xy + 6y^2$$

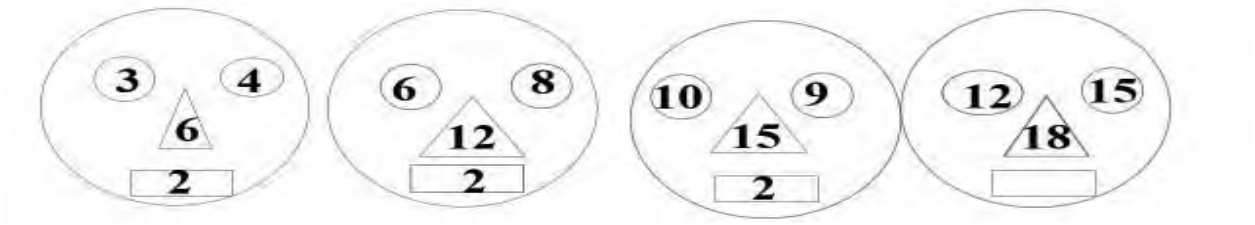
$$\Leftrightarrow x^2 - xy + y^2 \ge 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \ge 0, \text{ true.}$$

Also solved by Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş, Romania and Marius Drăgan, Bucharest.

”Cel ce n-are niciun merit, invidiază întodeauna meritele altora “.
Francisc Bacon

6. Caleidoscop matematic

1. Analizând cele trei cercuri, găsiți numărul lipsă din al patrulea cerc.

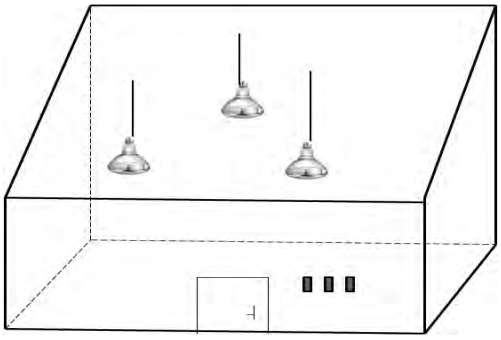


Titu Zvonaru

2. Paznicul unei închisori adoarme iar în acest timp, un deținut fură cheile şi calculează că ar avea nevoie de cel mult 45 de încercări de a deschide uşile cu cheile şi de a evada. Câte uşi trebuiesc deschise de către deținut pentru a fi liber?

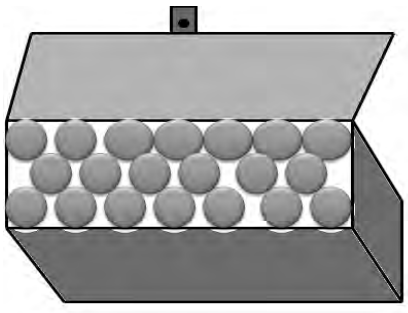
Adrian Stan

3. Într-o cameră opacă sunt trei becuri iar cele trei întrerupătoare sunt afară. Cum putem determina care întrerupător îi corespunde cărui bec fără a intra decât o singură dată în cameră? ***



4. Un rege are un cufăr dreptunghiular, plin cu 20 de sfere de aur. Fiecare sferă este strâns lipită de celelalte din jur, aşa încât atunci când cufărul este mişcat din loc, sferele rămân nemişcate. Câte sfere pot fi scoase astfel încât cele rămase să fie , în continuare, nemişcate la mişcarea cufărului?

***



Răspunsuri la pagina 48.



„ Sunt succese care te înjosesc şi înfrângeri care te înalță ”.
Nicolae Iorga

7. Poşta redacției

*D*ragi cititori, elevi şi profesori, a apărut **numărul 16** al revistei de matematică „ **SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noştri, şi care, sperăm noi, va aduna tot mai mulți elevi şi profesori împreună, pentru a face din obiectul matematicii o activitate atractivă şi performantă.

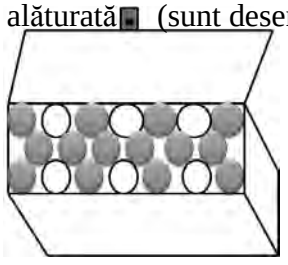
*P*rofesorii şi elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciții şi probleme cu enunț şi rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătății calitatea acestei reviste, o pot face trimițând materialele membrilor colectivului de redacție sau pe adresa de e_mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate(**salvate în Word 2003**) , fie scrise de mână şi scanate. **Materialele primite trebuie să fie originale şi să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise şi către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparține redacției.

*D*ata finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările şi comenzile pentru **numărul 17** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **1 Martie 2016**. Vă urăm succes şi vă aşteptăm.



RĂSPUNSURI CALEIDOSCOP MATEMATIC NR 16:

1). Răspunsul e dat de observația că: [(3+6):4] = [(6+12):8] = [(10+15):9] = [(12+18):15] = 2.
2). Fie n numărul de uşi, atunci, la prima uşă pot exista cel mult n încercări, după care încercările descresc, n-1, n-2, până la ultima uşă 1. Aşadar, $n+(n-1)+(n-2)+...+2+1=45$. Rezultă $\frac{n(n+1)}{2}=45 \Rightarrow n(n+1)=90 \Rightarrow$ n=9 uşi;
3). Apăsăm pe un întrerupător, lăsăm becul aprins câteva minute, după care îl stingem. Apăsăm alt întrerupător, intrăm în cameră şi vedem ce bec e aprins. Punem mâna pe celelalte două becuri; cel cald a fost aprins iar cel rece nu - si astfel am determinat asocierea becuri-întrerupătoare.
4). 6 bile luate din cufăr exact ca în figura alăturată (sunt desenate cu alb) fac ca celelalte bile să nu se poată mişca între ele.



RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Liceul Teoretic Pogoanele, Buzău.
Clasa a V-a: 20p. Condruz Andreea ; 15p. Trifan Cătălin; Brancoveanu Ştefan, Mihalaşcu Cătălin, Stirbu Denisa, Tudorica Marius, Vasile Adina;
Clasa a VI-a: 15p. Manea Petronela; 10p. Constantin Ionuţ, Marin Laurenţiu ;
Clasa a XI-a : 20p. Velicu Andreea; 15p. Enea Bogdan; Lupu Nicolae; **Prof. Stănescu Ion.**

Şcoala Gimnazială cu clasele I-VIII, nr. 3 Cugir, Alba
Clasa a V-a: 15p**.** Andreiuc Răzvan, Neag Răzvan, Negrea Ciprian; **Prof. Călugăr Monica;**
Clasa a VI-a: 20p**.** Fernandes Daria, Ilca Georgiana, Roşu Iulia, Vetişan Alexandru, Schadi Andreas, Isarie Diana, Căprariu Adnana; **Prof. Ţârlea Anca Stela;**
Clasa a VII-a: 20p**.** Dicu Andrei, Dînşorean Denisa**; Clasa a VIII-a:** 60p**.** Bel Luana, 34p. Lazăr Ariana; **Prof. Mariana Mitea.**

Colegiul "Vasile Lovinescu", Fălticeni, Suceava
Clasa a XI-a: 19p. Geoşanu Neculai, Tăbârcea Constantin; Boicu Răzvan; **Clasa a XII-a:** 44p. Mogarzan Elisabeth, Nistor Vanda; **Prof. Elena Ciobîcă**.

Colegiul Economic Buzău
Clasa a X-a: 20p**.** Aldea Aurel; **Clasa a XI-a:** 35p. Stere Elena; **Clasa a XII-a :** 38p. Dodan Marius; **Prof. Constantin Dinu;**

Şcoala Şerban Cioculescu, Găeşti, Dâmboviţa
Clasa a VI-a: 18p. Gainar Maria, Ioniţă Alexandra, Ioniţă Adriana, Olteanu Adrian, Nae Vanesa, Dinu Lidia, Popescu Radu ; **Prof. Florin Stănescu**

Şcoala "Mihai Viteazu", Târgovişte, Dâmboviţa
Clasa a VI-a : 18p. Pleşa Ştefan, **Prof. Gabriela Stănescu;**

Şcoala cu clasele I-VIII "Gh. Popescu" Mărgineni –Slobozia, Olt
Clasa a VII-a: 40p. Ducu Sabina, Troana Adriana.**Prof. Iuliana Traşcă.**

Liceul Tehnologic „Costin Neniţescu", Buzău
Clasa a X-a: 31p. Cană Cornel, Grigore Daniel, Toboş Valentin. **Clasa a XI-a:** 36p. Preda Mădălin, Dinu Cristina Bianca. **Clasa a XII-a :**40p. Ilie Ştefania, Marin Valentina, Ion Mihaela,Costache Adrian, Roman Corina, Stupinaru Cosmin, Zincă Andreea. **Prof. Stan Adrian.**

Liceul Tehnologic "Sfântul Mucenic Sava", Berca, Buzău
Clasa a IV-a: 30p. Hoacă Ştefan, Calaican Costin, Bocioc Ana, Bocioc Andreea, Tudor Irina, Păpătoiu Paul; **Prof. Gabriela- Nicoleta Lupşan;**

Scoala Gimnazială „Căpitan Aviator M. T. Bădulescu", Buzău
Clasa a IV-a: 24p. Bălan Alexandru, Damian Rareş, Zevedei Ariana, Coman Călin.
Prof. Cristian Cosmin Lupşan.

Colegiul Naţional "Fraţii Buzeşti", Craiova, Dolj
Clasa a VIII-a : 25p : Vasilescu Andrei, **Prof. Ionescu Maria.**

Colegiul National "Vasile Alecsandri" Galati
Clasa a VI-a : 25p. Buleti Daria – Alexandra, **Prof. Romeo Zanfir.**

Scoala Gimnazială "Şerban Cioculescu", Găeşti
Clasa a VI-a: 25p. Gainar Maria, Popescu Radu, Olteanu Adrian, Nae Vanesa, Dinu Lidia.
Prof. Florin Stănescu.

Şcoala Mihai Viteazu, Târgovişte
Clasa a II-a: 12p. Oancea Sorin, clasa a IV-a; 18p. Butucea Ianis, **Prof. Gabriela Stănescu.**

VIZITAȚI SI REVISTA ONLINE DE MATEMATICA MATEINFO.RO

REVISTA SCLIPIREA MINŢII
NR. 16 ANUL VIII - NOIEMBRIE 2015

Cuprins

1. **Istoria matematicii**
- Emma Castelnuovo – O viață dedicată matematicii de Prof. Isaia Dida Cristina 1

2. **Articole şi note matematice**
- Aplicații ale funcțiilor continue de Prof. Lenuța Pîrlog 2
- Modele aplicative pentru calculul primitivelor unor funcţii cu ajutorul " formulei de integrare prin părţi" de prof. Elena și Constantin Ciobîcă..... 4
- Metoda celor mai mici pătrate de Prof. Adrian Stan 7
- O condiţie necesară şi suficientă pentru ca o dreaptă să treacă printr-un punct din planul unui triunghi de Prof. Constantin Rusu 8
- Educația matematică în formarea personalității umane de prof. Gabriela și Florin Stănescu 11
- O demonstraţie pentru inegalitatea Ionescu-Weitzenböck de Titu Zvonaru 12
- Ridicarea la putere a matricelor de ordin mai mare ca patru de Prof. Gheorghe Ghiță 13

3. **Probleme rezolvate** 16
4. **Probleme propuse** 37
5. **Quickies** 45
6. **Caleidoscop matematic** 47
7. **Poşta redacţiei** 48

editgraph

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601

LEI 10 RON