SCLIPIREA MINTII

REVISTĂ NATIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICA ; PUBLICAȚIE SEMESTRIALĂ, AN XI, NR XXI, 2018

SM

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEME PROPUSE

ISTORIA MATEMATICII

TESTE

CALEIDOSCOP MATEMATIC

SM

Societatea de Ştiințe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

LICEUL TEHNOLOGIC " COSTIN NENIŢESCU ", BUZĂU

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601

SCLIPIREA MINTII 21

Revistă națională de cultură matematică, publicație semestrială, An XI, Nr. XXI, MAI 2018, BUZĂU

CUPRINS

GÂNDEŞTE CORECT

REDACȚIA
Liceul Tehnologic „ Costin Nenitescu”,
Buzău, Strada Transilvaniei, Nr. 134,
Cod. 120012, Tel. 0238725206
E_mail: ady_stan2005@yahoo.com
Coordonator proiect: Adrian Stan

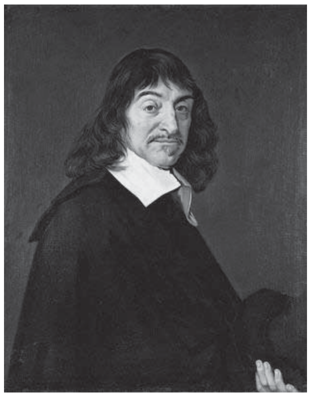
Tipar: editgraph Buzău, www.editgraph.ro

„ Numerele perfecte ca și oamenii perfecți, sunt foarte rare”.
Descartes
(1596- 1650)

1. Istoria matematicii

RENE DESCARTES (1596 – 1650)

de Adrian Stan, Buzău



Matematicianul şi filozoful francez **Rene Descartes** (31.03.1596 – 11.02.1650) publică în **1637** lucrarea sa „ **Discurs despre metoda de a conduce raţiunea şi de a căuta adevărul în ştiinţe...”,** punând astfel bazele filozofiei moderne bazate pe cunoaştere şi pe certitudini matematice așa numitul sistem de filozofie cartezian, (de la numele său latin, **Cartezius**), ce a influențat ultima jumătate de secol al XVII-lea. Sistemul său filozofic era unul inovator bazat pe observație și experiment.

Cuvintele rămase celebre de la el, ” **Dubito ergo cogito. Cogito ergo sum**” (”Mă îndoiesc, deci cuget. Cuget deci exist ”) reprezintă chiar esenţa sistemului său filozofic, şi anume, în demersul său de a găsi adevărul filozofic el supune percepţiile senzoriale şi afirmaţiile despre om şi despre lume unui proces elementar de scepticism cum ar fi că „ simţurile pot înşela, lumea exterioară poate fi stimulată, adevărat este însă numai ceea ce poate fi clar recunoscut”.

Contribuțiile sale matematice sunt imense și pe drept cuvânt este considerat **părintele geometriei analitice** și reformatorul algebrei. El a dat metoda de rezolvare a problemelor de geometrie cu ajutorul metodelor algebrice și invers, raportând măsurile figurilor la un sistem de referință XOY cu ajutorul coordonatelor.

Încă de la vârsta de 8 ani era poreclit „filozoful” căci dădea dovadă de o bună stăpânire a cunoștințelor iar de la 14 ani era preocupat de studii matematice. Însă, întâlnirea de la Paris cu viitorul său prieten Mersenne (1588-1648), l-a determinat să aprofundeze mult mai mult matematica. Își ia licența în drept la Universitatea din Poitiers în 1617 după care se înrolează în armata prinţului de Orania. În acest timp, în noiembrie 1618 se întâlnește cu matematicianul **Isaac Beeckman**(1588-1637) care-i încurajează spiritul pentru studiul matematicii și-i stimulează gustul pentru invenţii. De aceea, lucrarea sa din **1618**, “**Compendium Musicae**” îi este dedicată prietenului său Beeckman.

Descartes scrie în **1630** lucrarea “**Les Metheores”**, unde prezintă o serie de fenomene legate de meteoriții observați de el la Roma, aducând în prim plan o așa numită “teorie a curcubeului”.

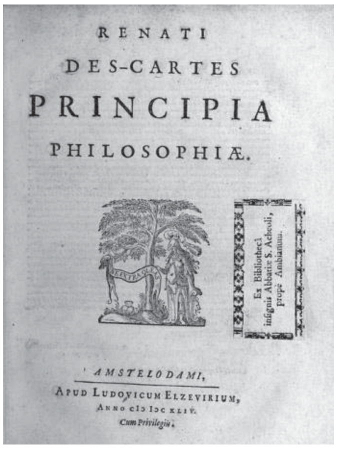
Prin cartea “**La Dioptrique**” (**1631**) tratează teoria fizico-matematică a instrumentelor optice şi tratează și legea refracției, descoperită independent de Willebrrord Snellius (1581 -1626). El descrie și funcționarea ochiului considerat ca o lentilă.

Cartea “**La Geometrie”(1637**) (începută în 1619) este fundamentală pentru geniul său matematic, căci aici, este primul matematician care introduce noțiunea de variabilă și folosește metoda coordonatelor prin care problemele de geometrie se reduc la probleme de algebră. A folosit literele alfabetului latin pentru notații , constantele cu primele litere iar variabilele cu ultimele litere. Astfel, geometria analitică pe care el a fondat-o este în strânsă legătură cu sistemul de coordonate carteziane - de la numele lui, pe care el l-a introdus și unde a notat axele cu Ox și Oy. Astfel, un punct din plan se reprezintă prin două coordonate, abcisa pe Ox și ordonata pe Oy. Luând un segment al dreptei ca fiind segment unitate, a descoperit că pentru orice punct de pe dreaptă se poate asocia un număr real, introducând astfel axa numerelor reale ceea ce era o noutate pentru acel timp.

De asemenea, a folosit exponenții la calculul cu puteri așa cum îi folosim și noi astăzi, a dat o metodă de rezolvare a ecuațiilor generale de gradul al patrulea, a descoperit relația dintre numărul fețelor, vârfurilor și muchiilor unui poliedru convex și a studiat problema inversă a tangentelor – punctul de plecare în studiul calculului diferențial realizat de Leibniz și Newton.

Întodeauna, **Descartes** nu a vrut să ia parte la diverse controverse sau să fie implicat în scandaluri și de aceea , de exemplu, când a vrut să publice cartea sa “Lumea”, (“Le Monde”) în 1663, a aflat de condamnarea lui **Galileo Galilei** de către Inchiziție datorită promovării teoriei copernicane a heliocentrismului pe care însuși Descartes o promova în tratatul său, așa că a fost nevoie să amâne publicarea cărții sale până în 1664.

În **1644** apare cartea **“Principia Philosophiae**” (Principiile filozofiei) unde are preocupări din domeniul filozofiei și cosmogoniei, de altfel , de la el rămânând foarte multe scrisori de filozofie purtate între el și **Mersenne** , cu principesa palatină **Elisabeth de Phalz** (1618 - 1680) sau cu ceilalați oameni de știință, unele din scrisori fiind descoperite chiar și cu mult timp după moartea sa.

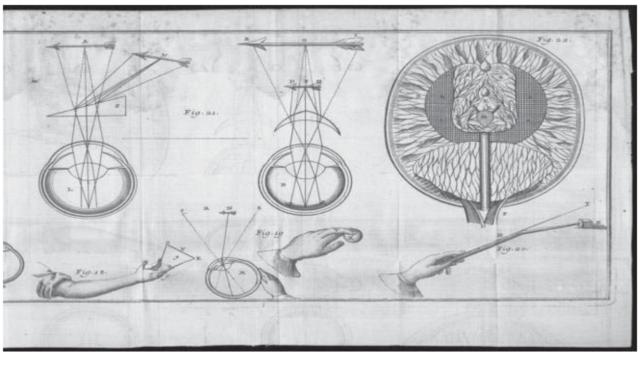


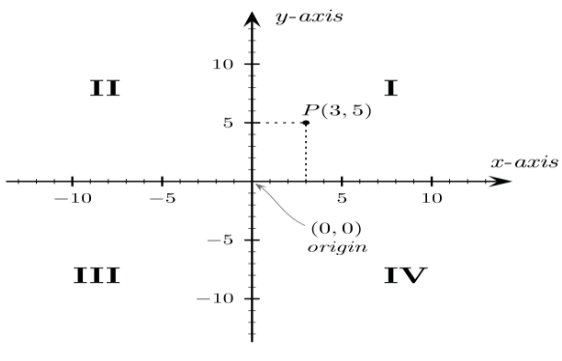
Rene Descartes a fost inspirat de opera lui Francois Viete (1540-1603) și a contribuit la stabilirea noțiunii de număr algebraic, noțiune care mai târziu a fost dezvoltată pe baze solide de către Gauss, Abel. Aceste numere erau însoțite de semnele + și - care ulterior a impus și introducerea noțiunii de valoare absolută și relativă a unui număr.

El a arătat că la o ecuație se poate stabila numărul de soluții pozitive sau negative fără să se resolve aceasta și este de asemenea, a arătat că pentru unele ecuații există rădăcini de forma a+bi, cu $a,b \in \mathbb{R}$, $i=\sqrt{-1}$, care nu se pot reprezenta într-un sistem de axe de coordonate, fiind un precursor al lui Gauss care le va considera numere imaginare sau complexe și care va constitui o întreagă teorie matematică pe seama lor.

În 1649, prin intermediul ambasadorului Franței în Suedia, Descartes ajunge la curtea reginei **Christina** (1626-1689) care devenise una din cei mai importanți monarhi ai Europei, pentru a-i preda lecții de filozofie. Însă, vremea foarte rece de acolo nu i-a fost prielnică, el având deja o stare precară a sănătății, astfel că, criza de pneumonie i-a fost fatală, decedând pe 11 februarie 1650. Trupul său a fost adus în Franța în 1667 fiind depus în biserica Saint-Germain –des – Pres din Paris.

În amintirea sa, un asteroid a fost denumit cu numele său.





Bibliografie:
1. N. Mihăileanu. Istoria matematicii. Vol I, II. Editura Didactică și Pedagogică. București. 1981.
2. Vasile Bobancu. Caleidoscop Matematic. Editura Niculescu. București. 2001.
3. www.wikipedia.com

Prof. Liceul Tehnologic “Costin Nenițescu”, Buzău

„Nu pot exista lucruri, oricât de îndepărtate, la care să nu ajungem, şi oricât de ascunse, pe care să nu le descoperim".
Descartes
(1596- 1650)

2. Articole și note matematice

Asupra inegalităţilor de tip Ionescu-Weintzenböck

de Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

I. Introducere.

Inegalitatea $4\sqrt{3}\cdot S \le a^2+b^2+c^2$, (1), a,b,c fiind laturile unui triunghi ABC şi S aria sa este inegalitatea *Ionescu-Weintzenböck* (I-W) (vezi [1]).

S-au dat foarte multe demonstraţii (peste 44). Acest fapt subliniază importanţa acestei inegalităţi.

Ion Ionescu (1870-1946) a fost ctitorul Gazetei Matematice, ctitorul S.S.M.R, ctitorul învăţământului politehnic din România, publică inegalitatea în G.M. octombrie 1897, pag. 52.

Roland Weitzenböck (1885-1955) publică aceeaşi inegalitate în 1919, în revista Mathematische-Zeitschrift.

Denumirea actuală a inegalităţii s-a produs foarte târziu şi anume, în ianuarie 2013 (vezi [1]).

II. Prezentăm acum două demonstraţii ale acestei inegalităţi, precum şi o interpretare geometrică a ei.

II.1. Cu notaţiile: $b=x, c=y, a=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos A}, S=\dfrac{xy\sin A}{2}, x>0, y>0, \dfrac{x}{y}=t$, relaţia

(1) devine $x^2+y^2-xy\cos A \ge \sqrt{3}xy\sin A \Leftrightarrow t^2-t(\cos A+\sqrt{3}\sin A)+1\ge 0$, (2).

Relaţia (2) este adevărată deoarece

$$\Delta = 1+2\sin^2 A+2\sqrt{3}\sin A\cos A-4 = 1-\cos 2A+\sqrt{3}\sin 2A-3 =$$
$$= -2-2\cos\left(2A+\frac{\pi}{3}\right) = -4\cos^2\left(A+\frac{\pi}{6}\right) < 0.$$

Observăm că (2) este echivalentă cu

$$\left(t-\frac{\cos A+\sqrt{3}\sin A}{2}\right)^2+\cos^2\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\ge 0,$$

deci în (2) avem egalitate dacă şi numai dacă $\cos\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$ şi $t=\dfrac{\cos A+\sqrt{3}\sin A}{2}$.

Din prima condiţie avem $A=\dfrac{\pi}{3}$, iar din a doua obţinem $t=1\Leftrightarrow x=y$, deci triunghiul ABC este echilateral.

II. 2. O altă demonstraţie pentru inegalitatea (1) se obţine pornind de la formula

$OL=\sqrt{R^2-3\cdot\dfrac{a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}}$, (vezi [3]), unde O este centrul cercului circumscris ΔABC şi L este punctul de intersecţie al simedianelor aceluiaşi ΔABC (punctul lui *Lemoine*).

Avem $OL\ge 0 \Leftrightarrow R^2-3\cdot\dfrac{a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}\ge 0 \Leftrightarrow 3\cdot\dfrac{a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}\le\dfrac{a^2b^2c^2}{16S^2}\Leftrightarrow(1)$.

II. 3. În continuare, cu ajutorul formulei $S=\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}$, relaţia (1) se scrie echivalent astfel

$$4\sqrt{3}S\le 2S\sum\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\le\sum\frac{\sin B\cos C+\sin C\cos B}{\sin B\sin C}\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sum(ctgB+ctgC)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{3}\le ctgA+ctgB+ctgC\text{, (3).}$$

Dar, $ctgA + ctgB + ctgC = ctg\omega$, (4), unde ω este unghiul lui Pierre René Jean Baptiste Henri Brocard (1845-1922) (vezi [2]). Deci, $ctg\omega \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow ctg\omega \geq ctg\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 0 < \omega \leq \frac{\pi}{6}$, i.e. inegalitatea *Ionescu-Weintzenböck* are loc dacă şi numai dacă $0 < \omega \leq \frac{\pi}{6}$. Egalitatea are loc atunci când $\omega = \frac{\pi}{6}$, adică dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

III. Definiţie. *Inegalitatea* $E(a,b,c) \leq F(a,b,c)$*, unde* a,b,c *sunt laturile unui triunghi, este de tip (I-W) dacă* $4\sqrt{3}S \leq E(a,b,c) \leq F(a,b,c) \leq a^2 + b^2 + c^2$.

Unei astfel de inegalităţi îi putem asocia o funcţie $f : R_+^3 \to R_+^*, f(a,b,c) = E(a,b,c) - F(a,b,c)$.
Demonstrăm acum următoarea

Propoziţie. Oricare ar fi numerele reale şi pozitive a şi b cu $a \leq b$ şi oricare ar fi $k \in [0,\infty)$ avem

$$a \leq \frac{1}{1+k}\sqrt{(1+2k)a^2 + k^2b^2} \leq b, \text{ (5), (vezi [4] şi [5]).}$$

Demonstraţie. Considerăm ΔAOB cu

$$m(\angle AOB) = 90^0, OA = a, OB = b, M \in [AB), \frac{AM}{BM} = k, k \in [0,\infty).$$

Asociem punctelor A, M, B vectorii $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}$. Cu acestea $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{1+k}$.

Avem echivalenţele succesive $\left|\overrightarrow{OA}\right| \leq \left|\overrightarrow{OM}\right| \leq \left|\overrightarrow{OB}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 \leq \left|\overrightarrow{OM}\right|^2 \leq \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 \leq \left|\frac{\overrightarrow{OA}^2 + 2k \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2 k^2}{(1+k)^2}\right|^2 \leq \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 \leq \frac{a^2 + 2kab + \cos(\angle AOB) + b^2k^2}{(1+k)^2} \leq b^2 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{1+k}\sqrt{(1+2k)a^2 + k^2b^2} \leq b, \text{ q.e.d.}$$

Demonstrăm cu ajutorul acestei propoziţii următoarea:

Teoremă. Orice inegalitate de tip (I-W) este omogenă şi de grad 2.

Demonstraţie. Fie acum funcţia

$$g : [0,\infty) \to [a,b), \; g(k) = \frac{1}{1+k}\sqrt{(1+2k)a^2 + k^2b^2}, \lim_{k\to 0} g(k) = g(0) = a,$$

$$\lim_{k\to\infty} g(k) = b, \; g'(k) = \frac{k(b^2 - a^2)}{(1+k)^2\sqrt{(1+2k)a^2 + k^2b^2}} > 0.$$

Deducem că funcţia este bijectivă, ceea ce înseamnă că pentru orice $y \in [a,b)$ există un singur $k \in [0,\infty)$, astfel încât $y = f(k)$.

Luând în inegalităţile (5) în locul lui a pe $4\sqrt{3}S$ şi în locul lui b pe $a^2 + b^2 + c^2$, obţinem:

$$4\sqrt{3}S \leq \frac{1}{1+k}\sqrt{(1+2k)(4\sqrt{3}S)^2 + k^2(a^2 + b^2 + c^2)^2} \leq a^2 + b^2 + c^2$$

şi ţinând seama că g este strict crescătoare, avem pentru orice $k_1, k_2 \in [0,\infty)$, $k_1 < k_2$

$$4\sqrt{3}S \leq \frac{1}{1+k_1}\sqrt{(1+2k_1)48S^2 + k_1^2(a^2 + b^2 + c^2)^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{1+k_2}\sqrt{(1+2k_2)48S^2 + k_2^2(a^2 + b^2 + c^2)^2} \leq a^2 + b^2 + c^2, \text{ (6).}$$

Pentru $k \in [0,\infty)$ inegalităţile (6) reprezintă toate inegalităţile de tip (I-W) şi cum ele sunt omogene de grad 2, teorema este demonstrată.

Studiul inegalităţilor de tip (I-W) se face cu ajutorul teoremei precedente în care utilizăm notaţiile folosite în prima demonstraţie din II.

Aplicaţie. *Să se arate că inegalitatea* $ab+bc+ca \le 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ *, (7) este de tip (I-W) şi să se deducă triunghiurile pentru care ea este adevărată şi respectiv falsă.*

Demonstraţie. Se ştie că $4\sqrt{3}S \le ab+bc+ca$, inegalitatea lui *V.O. Gordon* (1966).

Pe de altă parte $4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \le a^2+b^2+c^2$, este adevărată pentru orice ΔABC, ca fiind binecunoscuta inegalitate *Hadwinger-Finsler* (1937).

De asemeni este binecunoscută inegalitatea $ab+bc+ca \le a^2+b^2+c^2$.

În concluzie, inegalitatea (7) este de tip (I-W). Ea fiind omogenă şi de grad 2, studiul ei se face folosind notaţiile din II şi (7), se scrie echivalent astfel

$3(t+1)\sqrt{t^2-2t\cos A+1} \le 4t^2+(2\sqrt{3}\sin A-4\cos A-3)t+4$, căreia îi asociem funcţia

$f:(0,\infty)\to R$, $f(t)=3(t+1)\sqrt{t^2-2t\cos A+1}-4t^2-(2\sqrt{3}\sin A-4\cos A-3)t-4$, (vezi [6]).

Pentru fiecare valoare a lui A din $(0,\pi)$ obţinem o funcţie, de unde deducem triunghiurile care verifică (7).

Astfel, pentru $A=\frac{\pi}{3}$, $f(t)=3(t+1)\sqrt{t^2-t+1}-4t^2+2t-4$, f are un maxim egal cu 0 ce se atinge pentru $t=1$. Făcând graficul, deducem că mulţimea triunghiurilor care verifică (7) este

$$S=\left\{\Delta ABC \,\middle|\, m(\angle A)=60^0, \frac{b}{c}\in(0,\infty)\right\}.$$

Pentru $A=\frac{\pi}{2}$, $f(t)=3(t+1)\sqrt{t^2+1}-4t^2-(2\sqrt{3}-3)t-4$, care are un maxim de coordonate aproximativ egale cu $t_0 \cong 1{,}0129, y_0 \cong 0{,}0213$ şi două rădăcini $t_1 \cong 0{,}8516, t_2 \cong 1{,}741$.

Din grafic deducem $S=\left\{\Delta ABC \,\middle|\, m(\angle A)=90^0, \frac{b}{c}\in(0,t_1]\cup[t_2,\infty)\right\}$.

Evident, inegalitatea este falsă pentru $t\in(t_1,t_2)$.

Lăsăm ca exerciţiu, studiul inegalităţii (7) pentru restul valorilor $A\in(0,\pi)$.

Remarcă. Lucrarea de mai sus a fost prezentată într-o formă mult detaliată la - A XXI-a Conferinţa Anuală a Societăţii de Ştiinţe Matematice din România, Botoşani, 11 – 14 mai 2017.

Bibliografie

1. **Bătineţu-Giurgiu D.M., N. Stanciu,** *Inegalităţi de tip Ionescu – Weitzenböck*, Gazeta Matematica, Vol. 118 , **1**(2013), 1-10.
2. **Mihăileanu N.N.,** *Complemente de geometrie sintetică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1965,84-86
3. **Rusu C.,** *Calculul distanţei de la un punct al spaţiului la un punct din planul unui triunghi*, Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matematică, nr. 55 (Iunie-Septembrie 2016), 6-10.
4. **Rusu C.,** *Optimizări ale inegalitatăţii mediilor*, Gazeta Matematică, Vol. 110, **9**(2005), 444-446.
5. **Rusu C.,** *O metodă de optimizare a unei inegalităţi de numere* , Articole şi note matematice, vol. I, Editura RAFET, 2006, 32-34.
6. **Rusu C.,** *Rafinări ale inegalităţii Ionescu - Weitzenböck*, a XIX-a Conferinţă anuală a S.S.M.R., Călăraşi, 30 octombrie – 1 noiembrie 2015.
7. **Rusu C., Ambrinoc C.,** *Triunghiuri ale căror laturi verifică o inegalitate de tip (I-W)*, a XX-a Conferinţă anuală a S.S.M.R., Baia Mare, 19-22 mai 2016.

În legătură cu o inegalitate algebrică din AoPS 7/2016

de Marin Chirciu, Pitești

În **Art of Problems Solving** 7/2016 este propusă următoarea inegalitate:

"Dacă $a, b, c>0$ și $abc=1$, demonstrați că $\sum\frac{1}{(a+1)(a+2)}\geq\frac{1}{2}$".

Soluție: Facem substituția $a=\frac{yz}{x^2}$, $b=\frac{zx}{y^2}$, $c=\frac{xy}{z^2}$ și obținem $M_s=\sum\frac{1}{(a+1)(a+2)}=$

$$=\sum\frac{1}{\left(\frac{yz}{x^2}+1\right)\left(\frac{yz}{x^2}+2\right)}=\sum\frac{x^4}{(x^2+yz)(2x^2+yz)}\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{\left(\sum x^2\right)^2}{\sum(x^2+yz)(2x^2+yz)}=$$

$$=\frac{\sum\left(x^4+2y^2z^2\right)}{2\sum x^4+3\sum x^2yz+\sum y^2z^2}\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{2}=M_d\text{, unde}$$

(1) $\Leftrightarrow 2\sum x^4+4\sum y^2z^2\geq 2\sum x^4+3xyz\sum x+\sum y^2z^2\Leftrightarrow\sum y^2z^2\geq xyz\sum x$, adevărată din $A^2+B^2+C^2\geq AB+BC+CA,$ cu $A=yz,\ B=zx,\ C=xy$. Egalitatea are loc pentru $a=b=c=1$.

În acest articol se prezintă dezvoltări ale acestei inegalități:

1. Dacă $a, b, c>0$ și $abc=1$ arătați că $\sum\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}\geq\frac{3}{(n+1)(n+2)}$, unde $0\leq n\leq 1$.

Soluție: Facem substituția $a=\frac{yz}{x^2}$, $b=\frac{zx}{y^2}$, $c=\frac{xy}{z^2}$ și obținem $M_s=\sum\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}=$

$$=\sum\frac{1}{\left(\frac{yz}{x^2}+n\right)\left(\frac{yz}{x^2}+n+1\right)}=\sum\frac{x^4}{(nx^2+yz)\left[(n+1)x^2+yz\right]}\overset{Bergstrom}{\geq}$$

$$\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{\left(\sum x^2\right)^2}{n(n+1)\sum x^4+(2n+1)\sum x^2yz+\sum y^2z^2}=\frac{\sum x^4+2\sum y^2z^2}{n(n+1)\sum x^4+(2n+1)\sum x^2yz+\sum y^2z^2}\overset{(1)}{\geq}$$

$\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{n^2+3n+2}=M_d$, unde (1) $\Leftrightarrow\left(2-2n^2\right)\sum x^4+\left(2n^2+6n+1\right)\sum y^2z^2\geq(6n+3)xyz\sum x$, adevărată din

$$\sum x^4\geq\sum y^2z^2\Rightarrow\left(2-2n^2\right)\sum x^4+\left(2n^2+6n+1\right)\sum y^2z^2\overset{n\leq1}{\geq}\left(2-2n^2\right)\sum y^2z^2+$$

$$+\left(2n^2+6n+1\right)\sum y^2z^2=\left(2-2n^2+2n^2+6n+1\right)\sum y^2z^2=\left(6n+3\right)\sum y^2z^2\geq(6n+3)\sum x^2yz=$$

$=(6n+3)xyz\sum x$, evident din $A^2+B^2+C^2\geq AB+BC+CA,$ cu $A=yz,\ B=zx,\ C=xy$. Egalitatea are loc pentru $a=b=c=1$.

2. Dacă $a, b, c>0$ astfel încât $abc=1$ demonstrați că $\sum\frac{1}{(a+1)(a+n)}\geq\frac{3}{2(n+1)}$, unde $0\leq n\leq 2$.

Soluție: Facem substituția $a=\frac{yz}{x^2}$, $b=\frac{zx}{y^2}$, $c=\frac{xy}{z^2}$ și obținem $M_s=\sum\frac{1}{(a+1)(a+n)}=$

$$=\sum\frac{1}{\left(\frac{yz}{x^2}+1\right)\left(\frac{yz}{x^2}+n\right)}=\sum\frac{x^4}{\left(yz+x^2\right)\left(yz+nx^2\right)}\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{\left(\sum x^2\right)^2}{\sum\left(yz+x^2\right)\left(yz+nx^2\right)}=$$

$$=\frac{\sum x^4+2\sum y^2z^2}{n\sum x^4+(n+1)\sum x^2yz+\sum y^2z^2}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{2(n+1)}=M_d\text{, unde}$$

$(1)\Leftrightarrow(2n+2)\sum x^4+(4n+4)\sum y^2z^2\geq 3n\sum x^4+(3n+3)\sum x^2yz+3\sum y^2z^2\Leftrightarrow(2-n)\sum x^4+$ $+(4n+1)\sum y^2z^2\geq(3n+3)\sum x^2yz$. Avem $\sum x^4\geq\sum y^2z^2\Rightarrow(2-n)\sum x^4\geq(2-n)\sum y^2z^2\Rightarrow$

$$\Rightarrow(2-n)\sum x^4+(4n+1)\sum y^2z^2\geq(2-n)\sum y^2z^2+(4n+1)\sum y^2z^2=(3n+3)\sum y^2z^2\geq$$

$\geq(3n+3)\sum x^2yz\Leftrightarrow\sum y^2z^2\geq\sum x^2yz$, adevărată din $A^2+B^2+C^2\geq AB+BC+CA,$ cu $A=yz,\ B=zx,\ C=xy$. Egalitatea are loc pentru $a=b=c=1$.

3. Dacă $a,\ b,\ c>0$ astfel încât $abc=1$ demonstrați că $\sum\frac{1}{(a+n)(a+k)}\geq\frac{3}{(n+1)(k+1)}$, unde $n,\ k\geq 0$ și $2nk\leq n+k+1$.

Soluție: Facem substituția $a=\frac{yz}{x^2},\ b=\frac{zx}{y^2},\ c=\frac{xy}{z^2}$ și obținem $M_s=\sum\frac{1}{(a+n)(a+k)}=$

$$=\sum\frac{1}{\left(\frac{yz}{x^2}+n\right)\left(\frac{yz}{x^2}+k\right)}=\sum\frac{x^4}{(yz+nx^2)(yz+kx^2)}\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{\left(\sum x^2\right)^2}{\sum(yz+nx^2)(yz+kx^2)}=$$

$$=\frac{\sum x^4+2\sum y^2z^2}{nk\sum x^4+(n+k)\sum x^2yz+\sum y^2z^2}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{nk+n+k+1}=M_d\text{, unde}$$

$(1)\Leftrightarrow(n+k+1-2nk)\sum x^4+(2nk+2n+2k-1)\sum y^2z^2\geq(3n+3k)\sum x^2yz$, care rezultă din

$$\sum x^4\geq\sum y^2z^2\Rightarrow(\underbrace{n+k+1-2nk}_{\geq 0})\sum x^4+(2nk+2n+2k-1)\sum y^2z^2\geq$$

$$\Rightarrow(n+k+1-2nk)\sum y^2z^2+(2nk+2n+2k-1)\sum y^2z^2\geq(2-n)\sum y^2z^2+(4n+1)\sum y^2z^2=$$

$=(3n+3k)\sum y^2z^2\geq(3n+3k)\sum x^2yz\Leftrightarrow\sum y^2z^2\geq\sum x^2yz$, adevărată din $A^2+B^2+C^2\geq AB+BC+CA,$ cu $A=yz,\ B=zx,\ C=xy$. Egalitatea are loc pentru $A=B=C,\ x=y=z\Rightarrow\ a=b=c=1$.

Bibliografie:

Art of Problems Solving 7/2016.
Marin Chirciu, Inegalități algebrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2014.

O metodă de rafinare a unei inegalităţi

de Titu Zvonaru, Comăneşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Fie o inegalitate de forma $MS\geq MD$. Folosind o inegalitate cunoscută, obţinem o minorare $MS\geq E$ şi $MD\geq E$; scriem apoi inegalitatea de la care am plecat sub forma $MS-E\geq MD-E$.

În demonstraţia acestei inegalităţi (de cele mai multe ori prin spargere), ajungem la ceva de forma $A(a-b)^2\geq B(a-b)^2$. Pentru $a\neq b$, rămâne de arătat că $A\geq B$. Dacă această inegalitate este prea slabă, atunci putem încerca să obţinem o rafinare a inegalităţii iniţiale.

Prezentăm în continuare rafinarea unor inegalităţi folosind ideea de mai sus.

1. Fie inegalitatea $\frac{\sum a^3}{3abc}\geq\frac{\sum a^2}{\sum ab}$, unde $a,b,c>0$.

Cineva care ştie foarte bine inegalităţi, o poate demonstra aşa: folosim *Cebâşev* şi cunoscuta $\sum a\cdot\sum\frac{1}{a}\geq 9$,

$$\frac{\sum a^3}{3abc} \geq \frac{1}{3abc} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum a \cdot \sum a^2 \geq \frac{1}{3abc} \cdot \sum a^2 \cdot \frac{3}{\sum \frac{1}{a}} = \frac{\sum a^2}{\sum ab}, \quad \text{q.e.d.}$$

Un rezolvitor care are mai puţine cunoştinţe încearcă să găsească o cale de abordare; Cu inegalitatea mediilor avem $\sum a^3 \geq 3abc$, dar mai ştim că $\sum a^2 \geq \sum ab$, deci nu putem intercala nimic între partea stângă şi partea dreaptă. Scriem atunci

$$\frac{\sum a^3 - 3abc}{3abc} \geq \frac{\sum a^2 - \sum ab}{\sum ab} \Leftrightarrow \frac{\sum a \cdot \sum (a-b)^2}{6abc} \geq \frac{\sum (a-b)^2}{2\sum ab}.$$

Acum observăm că este suficient să demonstrăm că $\frac{\left(\sum a\right)(a-b)^2}{6abc} \geq \frac{(a-b)^2}{2\sum ab}$, (1).

Dacă $a = b$ avem egalitate; dacă nu, rămâne de arătat că $\frac{\sum a}{6abc} \geq \frac{1}{2\sum ab} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum a \cdot \sum ab \geq 3abc \Leftrightarrow \sum a \cdot \sum \frac{1}{a} \geq 3$, (2), care este adevărată, dar prea slabă (căci avem de fapt $\sum a \cdot \sum \frac{1}{a} \geq 9$). Acum intervine rafinarea: putem adăuga ceva în partea dreaptă a inegalităţii (1) astfel încât inegalitatea (2) să rămână adevărată. Inegalitatea (1) poate fi înlocuită cu $\frac{(\sum a) \cdot (a-b)^2}{6abc} \geq \frac{(a-b)^2}{2\sum ab} + \frac{2(a-b)^2}{2\sum ab}$, care se reduce la $\sum a \cdot \sum ab \geq 9abc$, adevărată. Revenind, avem de fapt următoarea rafinare a inegalităţii de la care am pornit $\frac{\sum a^3}{3abc} \geq \frac{\sum a^2}{\sum ab} + \frac{\sum (a-b)^2}{\sum ab}$, (*).

Atunci când inegalitatea care joacă rolul lui (2) e prea strânsă, nu putem obţine o rafinare.

2. Dacă $a, b, c > 0$, atunci $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} \geq 2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)$.

Aplicând inegalitatea mediilor, avem $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} \geq 3$.

Deoarece $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ (inegalitatea lui *Nesbitt-Ionescu*), nu putem intercala ceva între partea stângă şi partea dreaptă. Scriem inegalitatea sub forma

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} - 3 \geq 2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}{abc} \geq 2\sum\left(\frac{a}{b+c} - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c) \cdot \frac{\sum (a-b)^2}{2abc} \geq \sum \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}.$$

Se observă că este suficient să demonstrăm că $(a+b+c) \cdot \frac{(a-b)^2}{2abc} \geq \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}$, (3)

Dacă $a = b$, avem egalitate; dacă $a \neq b$, rămâne de arătat că $\frac{a+b+c}{2abc} \geq \frac{1}{(a+c)(b+c)}$

$\Leftrightarrow (a+b+c)(a+c)(b+c) \geq 2abc \Leftrightarrow (a+b+c)(c^2 + ab + bc + ca) \geq 2abc$, (4) care este adevărată deoarece, aplicând inegalitatea mediilor, obţinem $(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc$.

Rafinarea inegalităţii din enunţul problemei: deoarece avem de fapt

$\sum a \cdot \sum ab + c^2 \sum a \geq 9abc + c^2 \sum a$, putem aduna ceva în partea dreaptă a inegalității (3) astfel încât (4) să rămână adevărată. Avem două posibilități:

Rafinarea 1. Daca adăugam pe $7abc$, atunci se obține rafinarea

$$\frac{\sum a^3}{abc} \geq 2\sum \frac{a}{b+c} + 7\sum \frac{(a-b)^2}{2(a+c)(b+c)}.$$

Demonstrarea acestei rafinări se reduce la a arăta că $\frac{\sum a}{2abc} \geq \frac{1}{(a+c)(b+c)} + \frac{7}{2(a+c)(b+c)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sum a \cdot \sum ab + c^2 \sum a \geq 2abc + 7abc, \text{ adevărată.}$$

Rafinarea 2. Dacă adăugăm pe $c^2 \sum a$, obținem rafinarea

$$\frac{\sum a^3}{abc} \geq 2\sum \frac{a}{b+c} + \sum \frac{c(a+b+c)(a-b)^2}{2ab(a+c)(b+c)},$$

a cărei demonstrație se reduce la arăta că $\frac{\sum a}{2abc} \geq \frac{1}{(a+c)(b+c)} + \frac{c(a+b+c)}{2ab(a+c)(b+c)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum a \sum ab + c^2 \sum a \geq 2abc + c^2 \sum a$, adevărată.

3. $\frac{4\sum x^2}{27\sum xy} + \sum \frac{x}{7x+y+z} \geq \frac{13}{27}, \forall x, y, z > 0.$

Deoarece $\frac{\sum x^2}{\sum xy} \geq 1$ și $\sum \frac{x}{7x+y+z} \leq \frac{1}{3}$ (se poate demonstra, de exemplu, cu substituțiile $7x+y+z=9a,\ x+7y+z=9b,\ x+y+7z=9c$), scriem inegalitatea dată sub forma

$$MS = \frac{4\sum x^2}{27\sum xy} - \frac{4}{27} \geq MD = \frac{1}{3} - \sum \frac{x}{7x+y+z}.$$

$$MS = \frac{4(x^2+y^2+z^2)}{27(xy+yz+zx)} - \frac{4}{27} = \frac{4(x^2+y^2+z^2) - 4(xy+yz+zx)}{27(xy+yz+zx)} =$$

$$= \frac{2\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)}{27(xy+yz+zx)}.$$

$$MD = \frac{1}{3} - \sum \frac{x}{7x+y+z} = \sum\left(\frac{1}{9} - \frac{x}{7x+y+z}\right) = \sum\left(\frac{y-x}{9(7x+y+z)} + \frac{z-x}{9(7x+y+z)}\right) =$$

$$= \sum \frac{y-x}{9(7x+y+z)} + \sum \frac{z-x}{9(7x+y+z)} = \sum \frac{y-x}{9(7x+y+z)} + \sum \frac{x-y}{9(x+7y+z)} =$$

$$= \sum \frac{x-y}{9}\left(\frac{1}{x+7y+z} - \frac{1}{7x+y+z}\right) = \sum \frac{2(x-y)^2}{3(7x+y+z)(x+7y+z)}.$$

Este suficient să demonstrăm că $\frac{2(x-y)^2}{27(xy+yz+zx)} \geq \frac{2(x-y)^2}{3(7x+y+z)(x+7y+z)}$.

Dacă $x=y$, avem egalitate; dacă $x \neq y$ rămâne să arătm că

$$\frac{1}{27(xy+yz+zx)} \geq \frac{1}{3(7x^2+7y^2+z^2+50xy+8yz+8zx)} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 7x^2+7y^2+z^2+50xy+8yz+8zx \geq 9(xy+yz+zx)$,(5), adevărată, deoarece $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$. Avem egalitate dacă și numai dacă $x=y=z$.

Putem aduna în partea dreaptă a inegalităţii (5) expresia $6(x+y)^2$ şi obţinem următoarea rafinare a inegalităţii din enunţ

$$\frac{4\sum x^2}{27\sum xy}+\sum\frac{x}{7x+y+z}\ge\frac{13}{27}+\sum\frac{4(x^2-y^2)^2}{9(\sum xy)(7x+y+z)(x+7y+z)}.$$

Pentru a demonstra această rafinare trebui să arătăm de fapt că

$$\frac{2(x-y)^2}{27\sum xy}\ge\frac{2(x-y)^2}{3(7x+y+z)(x+7y+z)}+\frac{4(x+y)^2}{9(\sum xy)(7x+y+z)(x+7y+z)}$$

$\Leftrightarrow 7x^2+7y^2+z^2+50xy+8yz+8xz\ge 9\sum xy+6x^2+6y^2+12xy$,

adevărată, deoarece $\sum x^2+8\sum xy\ge 9\sum xy$.

4. Dacă $a,b,c>0$, atunci $\dfrac{\sum a^2}{\sum ab}\ge\dfrac{\sqrt{3\sum a^2}}{\sum a}$.

Deoarece $\sum a^2\ge\sum ab$ şi $\sqrt{3\cdot\sum a^2}\ge\sum a$, scriem inegalitatea din enunţ sub forma

$$\frac{\sum a^2-\sum ab}{\sum ab}\ge\frac{\sqrt{3\sum a^2}-\sum a}{\sum a}\Leftrightarrow\quad\Leftrightarrow\frac{\sum a^2-\sum ab}{\sum ab}\ge\frac{\left(\sqrt{3\sum a^2}\right)^2-\left(\sum a\right)^2}{\left(\sum a\right)\left(\sqrt{3\sum a^2}+\sum a\right)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{(a-b)^2}{2\sum ab}\ge\sum\frac{(a-b)^2}{\sum a\cdot\left(\sqrt{3\sum a^2}+\sum a\right)}.$$

Observăm că este suficient să demonstrăm că $\dfrac{(a-b)^2}{2\sum ab}\ge\dfrac{(a-b)^2}{\sum a\cdot\left(\sqrt{3\sum a^2}+\sum a\right)}$.

Dacă $a=b$ avem egalitate; dacă nu rămâne de arătat că

$$\frac{1}{2\sum ab}\ge\frac{1}{\sum a\cdot\left(\sqrt{3\sum a^2}+\sum a\right)}\Leftrightarrow\quad\Leftrightarrow\left(\sum a\right)^2+\sum a\cdot\sqrt{3\sum a^2}\ge 2\sum ab,\ (6).$$

Ultima inegalitate este adevărată deoarece $\left(\sum a\right)^2\ge 3\sum ab$ şi

$$\sum a\cdot\sqrt{3\sum a^2}\ge\sum a\cdot\sum a=\left(\sum a\right)^2.$$

Cum inegalitatea (6) este prea slabă, putem obţine următoarea rafinare a inegalităţii iniţiale:

$$\frac{\sum a^2}{\sum ab}\ge\frac{\sqrt{3\sum a^2}}{\sum a}+2\sum\frac{(a-b)^2}{\sum a\cdot\left(\sum a+\sqrt{3\sum a^2}\right)},\ (7).$$

Ţinând cont de cele de mai sus, demonstrarea inegalităţii (7) se reduce la a arăta că

$$\frac{1}{2\sum ab}\ge\frac{1}{\sum a\cdot\left(\sum a+\sqrt{3\sum a^2}\right)}+\frac{2}{\sum a\cdot\left(\sum a+\sqrt{3\sum a^2}\right)}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\sum a\cdot\left(\sum a+\sqrt{3\sum a^2}\right)\ge 2\sum ab+4\sum ab$, adevărată (conform celor de mai sus).

5. Dacă a,b,c sunt laturile unui triunghi, atunci $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\ge\dfrac{2}{3}\cdot\sum a\cdot\sum\dfrac{a}{b+c}$.

Folosind inegalitatea lui *Bergström* obţinem $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\ge\dfrac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a}=\sum a$.

Pe de altă parte, datorită inegalităţii lui *Nesbitt-Ionescu* avem

$$\frac{2}{3}\cdot\sum a\cdot\sum\frac{a}{b+c}\ge\frac{2}{3}\cdot\sum a\cdot\frac{3}{2}=\sum a.$$

Scriem inegalitatea din enunţ sub forma

$$\frac{a^2}{b}+b-2a+\frac{b^2}{c}+c-2b+\frac{c^2}{a}+a-2c\geq\frac{2}{3}\cdot\sum a\cdot\left(\sum\frac{a}{b+c}-\frac{3}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{(a-b)^2}{b}\geq\frac{1}{3}\sum a\sum\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}.$$

Este suficient să demonstrăm că $\frac{(a-b)^2}{b}\geq\sum a\cdot\frac{(a-b)^2}{3(a+c)(b+c)}$.

Dacă $a=b$ avem egalitate; dacă nu, rămâne de arătat că $\frac{1}{b}\geq\frac{\sum a}{3(a+c)(b+c)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3ab+3bc+3ac+3c^2\geq ab+b^2+bc$, (8),

$\Leftrightarrow b(a+c-b)+\sum ab+3c^2+2ac\geq 0$, adevărat deoarece a,b,c sunt laturile unui triunghi.

Deoarece inegalitatea (8) este slabă, putem obţine următoarea rafinare a inegalităţii din enunt

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq\frac{2}{3}\cdot\sum a\cdot\sum\frac{a}{b+c}+\sum ab\cdot\sum\frac{(a-b)^2}{3b(a+c)(b+c)},\ (9).$$

Demonstrarea inegalităţii (9) se reduce la a arăta că $\frac{1}{b}\geq\frac{\sum a}{3(a+c)(b+c)}+\frac{\sum ab}{3b(a+c)(b+c)}$

$\Leftrightarrow b(a+c-b)+3c^2+2ac\geq 0$, adevărată.

Propunem ca exerciţiu demonstrarea rafinării

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq\frac{2}{3}\cdot\sum a\cdot\sum\frac{a}{b+c}+\sum\frac{(a-b)^2}{3b},\ (10)$$

şi de asemenea lăsăm cititorului posibilitatea de a obţine alte rafinari ale inegalităţilor de la care am pornit.

Integrale duble

prof. Adrian Stan, Buzău

Materialul de față prezintă o serie de metode de calcul al integralelor duble, integrale care se calculează din funcții f(x;y) mărginite și definite pe un domeniu mărginit $D\subset\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Să considerăm o partiție a planului în intervale bidimensionale, din care alegem pe cele care conțin puncte din D. Notăm prin $\omega_k, k=1,2,3,...,n,$ intervalele bidimensionale alese, numerotate într-o ordine arbitrară. Fie diviziunea Δ mulțimea acestor intervale. Norma diviziunii Δ, notată $\|\Delta\|$, este cea mai mare dintre dimensiunile intervalelor $\omega_k, k=1,2,3,...,n.$

$\omega_1=[x_1;x_2]\times[y_1;y_2]$, $\omega_2=[x_2;x_3]\times[y_2;y_3]$, etc.

Suma Riemann atașată funcției f(x;y), corespunzătoare diviziunii Δ a domeniului D, este $\sigma_\Delta(f)=\sum_{k=1}^{n}f(c_k,n_k)\cdot aria\ \omega_k,\quad (c_k;n_k)\in\omega_k$, unde (c_k,n_k) sunt un sistem de puncte intermediare.

Atunci, integrala dublă a funcției f(x;y) extinsă la domeniul D este

$\iint_D f(x;y)dxdy=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sigma_\Delta(f)$, pentru orice alegere a sistemului de puncte intermediare (c_k,n_k).

Pentru calculul unei integrale duble există o serie de tipuri fundamentale de domenii de integrare:

1. Dacă D este dreptunghiul $[a;b]\times[c;d]$, atunci

$$\iint_D f(x;y)dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x;y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x;y)dx\right)dy.$$

2. Dacă D este un domeniu închis, simplu în raport cu axa OY, $D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le y, \alpha(x)\le y\le\beta(x)\}$, iar funcția $f(x;y)$ este integrabilă pe $[\alpha(x);\beta(x)]$, atunci

$$\iint_D f(x;y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x;y)dx\right)dy.$$

Mai există de asemenea și situațiile când D este un domeniu închis, simplu în raport cu axa OX sau când este nevoie să trecem de la coordonate carteziene la coordonate polare.

În concluzie, dacă D este un domeniu închis și mărginit, atunci aria suprafeței D este egal cu $Aria(D)=\iint_D dxdy$.

Câteva exemple de calcul:

1) Fie $D=[0;1]\times[0;1]$ **și** $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x;y)=4x^2y-3xy^2+1$**. Să se calculeze** $\iint_D f(x;y)dxdy$**.**

Rezolvare:

$$I=\int_0^1\left[\int_0^1(4x^2y-3xy^2+1)dy\right]dx=\int_0^1\left[\left(4x^2\frac{y^2}{2}-3x\frac{y^3}{3}+y\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1}\right]dx=\int_0^1(2x^2-x+1)dx=$$

$$=\left(2\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+1=\frac{7}{6}.$$

2. Fie $D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\le x-3,\ y\ge x^2-2x-3\}$**. Să se calculeze** $\iint_D dxdy$**.**

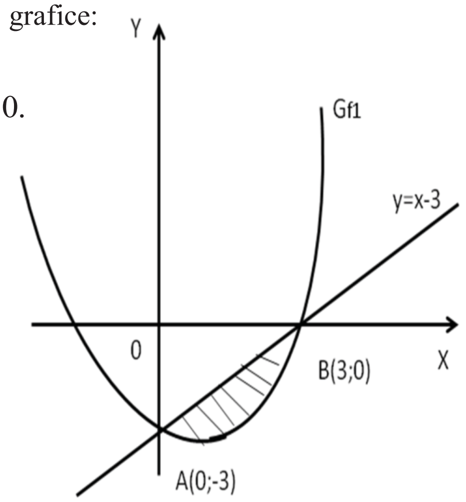
Rezolvare: Vom considera funcțiile $f_1,f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=x^2-2x-3$, $f_2(x)=x-3$.

Să determinăm punctele de intersecție ale celor două grafice:

$f_1(x)=f_2(x)\Rightarrow x^2-2x-3=x-3$

$\Rightarrow x^2-3x=0\Rightarrow x(x-3)=0\Rightarrow x_1=0, x_2=3\Rightarrow y_1=-3, y_2=0.$

Așadar, punctele de intersecție a graficelor celor două funcții sunt $A(0;-3)$, $B(3;0)$.



Domeniul D este dat de suprafața hașurată, rezultă că D se mai poate scrie de forma

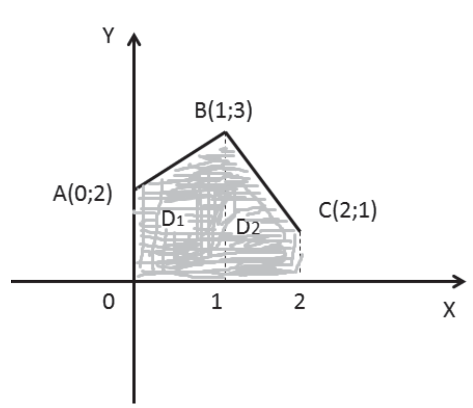
$D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 3,\ x^2-2x-3\le y\le x-3\}$, rezultă că D e simplu în raporrt cu axa OY, și atunci

$$I=\int_0^3\left[\int_{x^2-2x-3}^{x-3}dy\right]dx=\int_0^3\left[y\Bigg|_{y=x^2-2x-3}^{y=x-3}\right]dx=$$

$$\int_0^3(-x^2+3x)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3=$$

$$=\frac{-27}{3}+\frac{27}{2}=-9+\frac{27}{2}=\frac{9}{2}.$$

3. Să se calculeze $I=\iint_D dxdy$**, unde D este domeniul dat de suprafața hașurată.**



Rezolvare:

Mai întâi se determină ecuațiile dreptelor AB și BC:

AB: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y = x+2$ și BC: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y = 5-2x$. Vom integra pe domenii simple în raport cu OY. Domeniul D se descompune în reuniunea a două domenii D_1, D_2, care au interioare disjuncte.

Pentru D_1: $a=0, b=1$, $\alpha(x)=0, \beta(x)=x+2$. Atunci, $I_1 = \iint_D dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{x+2} dy \right) dx =$

$$= \int_0^1 \left(y \Big|_{y=0}^{y=x+2} \right) dx = \int_0^1 (x+2)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.$$

Pentru D_2: $a=1, b=2$, $\alpha(x)=0, \beta(x)=5-2x$. Atunci,

$$I_2 = \iint_D dxdy = \int_1^2 \left(\int_0^{5-2x} dy \right) dx = \int_1^2 \left(y \Big|_{y=0}^{y=5-2x} \right) dx = \int_1^2 (5-2x)dx = \left(5x - x^2\right) \Big|_1^2 = 2.$$

Așadar, $I = I_1 + I_2 = \frac{5}{2} + 2 = \frac{9}{2}$.

4. Să se calculeze aria domeniului D, unde D este limitat de dreptele de ecuații $x+y=2$, $y=3x+2$, $x=3y+2$.

Rezolvare: Se găsesc mai întâi punctele de intersecție ale dreptelor: Astfel, A(0;2), B(-1;-1), C(2;0). Domeniul dat se împarte în două domenii, astfel că $A_D = A_1 + A_2$.

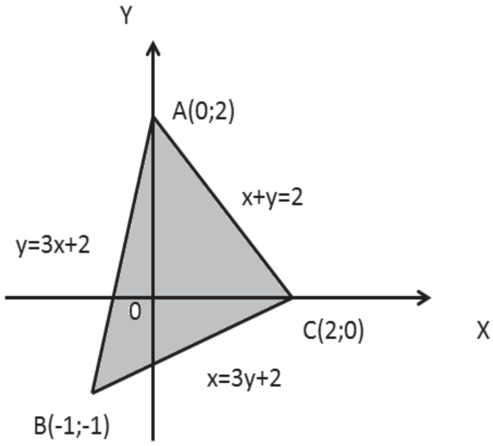
$$I_1 = \iint_{D_1} dxdy = \int_{-1}^{0} \left(\int_{\frac{x-2}{3}}^{3x+2} dy \right) dx = \int_{-1}^{0} \left(y \Big|_{y=\frac{x-2}{3}}^{y=3x+2} \right) dx = \int_{-1}^{0} \left(3x+2-\frac{x-2}{3} \right) dx =$$

$$= (3\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{2x}{3}) \Big|_{-1}^{0} = \frac{4}{3}.$$

$$I_2 = \iint_{D_2} dxdy = \int_0^2 \left(\int_{\frac{x-2}{3}}^{2-x} dy \right) dx = \int_0^2 \left(y \Big|_{y=\frac{x-2}{3}}^{y=2-x} \right) dx = \int_0^2 \left(2-x-\frac{x-2}{3} \right) dx = = \int_0^2 (2-x-\frac{x-2}{3})dx = .$$

$$= \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}(\frac{x^2}{2} - 2x) \right) \Big|_0^2 = 4 - 2 - \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

Așadar, $I = \iint_D dxdy = I_1 + I_2 = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4.$



Altfel, dacă se cunosc coordonatele vârfurilor triunghiului ABC, se poate folosi formula pentru arie cu ajutorul determinanților .

5. Să se calculeze momentele de inerție în raport cu axele de coordonate și în raport cu originea pentru placa (D) definită prin $x+y \le 1$, $x \ge 0, y \ge 0$, știind că densitatea de masă este $f(x;y) = xy$.

Rezolvare: Mai întâi se determină domeniul D care este triunghiul OAB, cu A(1;0), B(0;1). Atunci, momentele de inerție în raport cu axele OX, resp. OY sunt conform formulelor:

$$I_x = \iint_D y^2 \cdot f(x;y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} xy^3 dx \right) dy = \int_0^1 \left[\left(\frac{x^2}{2} \cdot y^3 \right) \Big|_{x=0}^{x=1-y} \right] dy =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1(1-y)^2\cdot y^3dy=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1\left(y^3-2y^4+y^5\right)dy=\frac{1}{120}.$$

$$I_y=\iint_D x^2\cdot f(x;y)dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}x^3ydy\right)dx=\int_0^1\left[\left(\frac{y^2}{2}\cdot x^3\right)\Bigg|\begin{matrix}y=1-x\\ y=0\end{matrix}\right]dx=$$

$=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1(1-x)^2\cdot x^3dx=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1\left(x^3-2x^4+x^5\right)dy=\frac{1}{120}$. Momentul de inerție al plăcii în raport cu originea este dată de formula $I_0=I_x+I_y=\frac{1}{120}+\frac{1}{120}=\frac{1}{60}$.

Integralele duble se mai pot folosi la calculul volumului (V) unui corp delimitat de o suprafață f(x;y) sau la determinarea masei (M) unei plăci plane D, de densitate $f(x;y)\rangle 0$ cu ajutorul formulei $V=\iint_D f(x;y)dxdy$, $M=\iint_D f(x;y)dxdy$ sau la determinarea coordonatelor centrului de greutate G al unei plăci plane D, cu densitatea de masă $f(x;y)\rangle 0$: $x_G=\frac{1}{M}\iint_D x\cdot f(x;y)dxdy$,

$y_G=\frac{1}{M}\iint_D y\cdot f(x;y)dxdy$.

Bibliografie:
1. Probleme de matematici superioare. S. Chiriță. Editura Didactică și Pedagogică. București. 1989.
2. Matematici aplicate în economie. Silvia Dedu, Florentin Șerban. Editua Teocora. 2009.

Prof. Liceul Tehnologic Costin Nenițescu, Buzău

Proprietati ale patrulaterului convex - Aplicatii

de Soare Carmen Violeta, București

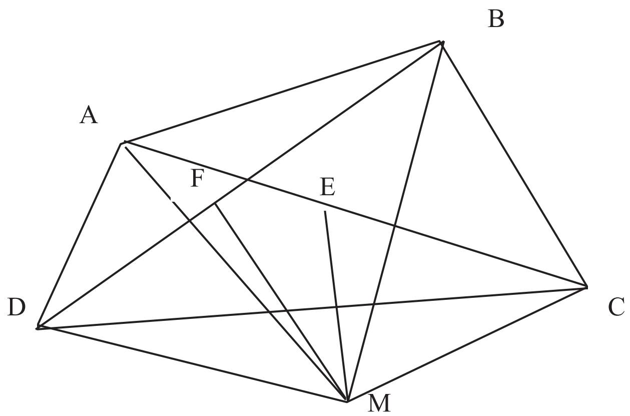
1. Fie ABCD un patrulater convex în planul P. Să se determine mulţimea punctelor M din planul P cu proprietatea că $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$. Discuţie.

Notăm cu E, respectiv F, mijloacele segmentelor (AC) şi (BD). Din teorema medianei rezultă că :

$MA^2+MC^2=2\,ME^2+\frac{1}{2}AC^2$ şi $MB^2+MD^2=2\,MF^2+\frac{1}{2}BD^2$. Egalitatea din enunţ este echivalentă cu:

$2\,ME^2+\frac{1}{2}AC^2=2\,MF^2+\frac{1}{2}BD^2$ sau

$ME^2-MF^2=\frac{1}{4}(BD^2-AC^2)=$ const.



Distingem următoarele cazuri:

a. E$\neq$F şi atunci mulţimea este o dreaptă perpendiculară pe (EF) (acest caz are loc dacă patrulaterul ABCD nu este paralelogram).

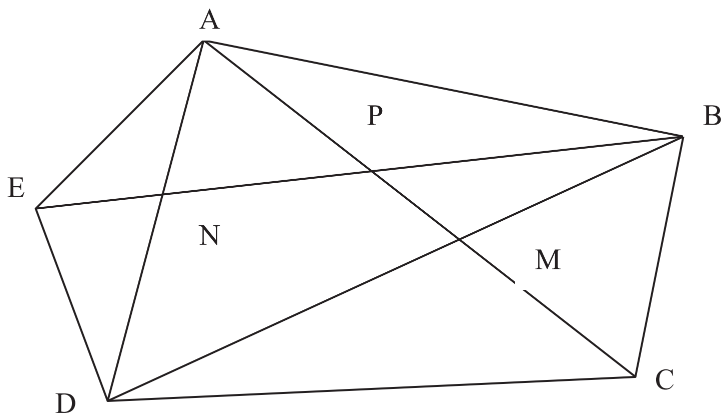
b. E=F şi (BD)$\equiv$(AC) şi atunci mulţimea este tot planul P (în acest caz patrulaterul ABCD este dreptunghi).

c. E=F şi BD$\neq$AC şi atunci mulţimea este vidă (acest caz are loc dacă patrulaterul ABCD este paralelogram, dar nu este dreptunghi).

2. Fie cinci puncte distincte A, B, C, D, E în plan astfel încât ABCD şi ABDE sunt patrulatere convexe. Să se arate că ABCD este patrulater convex.

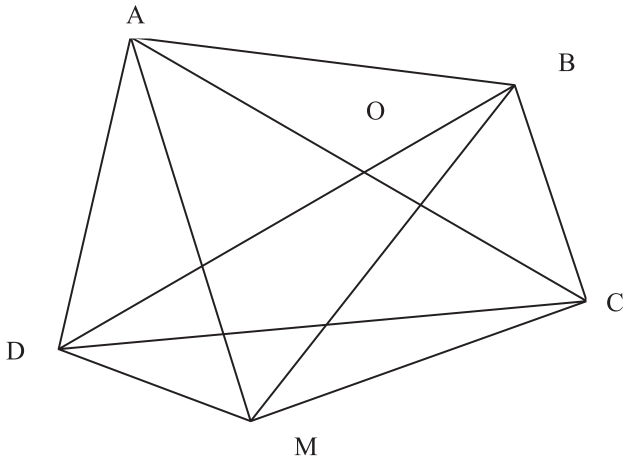
Deoarece ABCD şi ABDE sunt patrulatere convexe rezultă că (AC) $\cap$(BD)={M} şi (AD) $\cap$(BE)={N}.

Dreapta AM separă B şi N; fie AM∩(BN)={P}. Analog dreapta BN separă A şi M; fie BN∩(AM)={Q}. Rezultă că (AM) şi (BN) au un punct comun, acesta fiind P=Q. Deoarece fie AM∩(BN)={P}, rezultă fie $(AC)\cap(BE)\neq \varnothing$, deci ABCE este patrulater convex. (fig de mai sus)



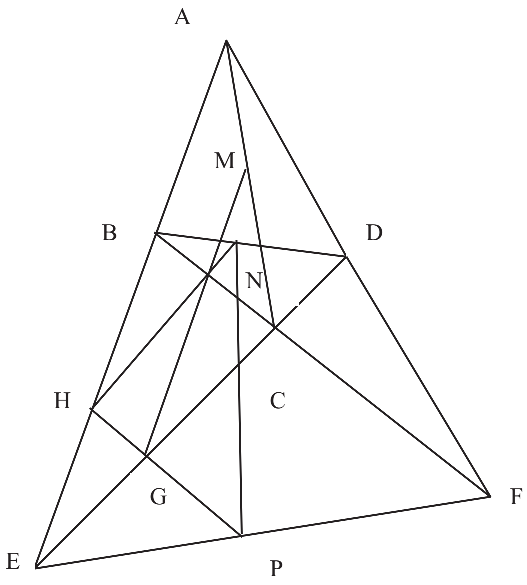
3. Să se arate că punctul din plan pentru care suma distanţelor la vârfurile unui patrulater convex este minimă, este intersecţia diagonalelor patrulaterului.

Fie patrulaterul convex ABCD şi fie



{O}=[AC]∩[BD], iar $M\in P$. Deosebim cazurile cazurile când M aparţine cel puţin unei diagonale şi când M aparţine cel puţin unei diagonale şi când M nu aparţine cel puţin unei diagonale şi când M nu aparţine nici unei diagonale. Oricum, însă putem scrie: $MA+MC\geq AC$ şi $MB+MD\geq BD$ şi deci $MA+MB+MC+MD\geq AC+BD = OA+OB+OC+OD$.

4. Fie ABCD un patrulater convex. Notăm AB∩CD)={E}, BC∩AD={F}. Să se arate că mijloacele M, N, P ale segmentelor [AC], [BD][EF] sunt coliniare. (teorema NEWTON-GAUSS).



Fie G,H,I mijloacele segmentelor [CE], [EB], [BC]. Punctele G, I, M sunt pe o paralelă la EAB; punctele H, I, N sunt pe o paralelă la ECD, iar punctele H, G, P sunt pe o paralelă la BCF.

Deci M, N, P sunt pe prelungirile laturilor GHI.

Conform teoremei lui Menelaos coliniaritatea punctelor M, N, P este echivalentă cu îndeplinirea egalităţii:

$$\frac{MI}{MG}\cdot\frac{GP}{PH}\cdot\frac{HN}{NI}=1$$

Folosind linii mijlocii convenabile vom putea scrie:

$$\frac{MI}{MG}=\frac{\frac{AB}{2}}{\frac{AE}{2}}=\frac{AB}{AE};\ \frac{GP}{PH}=\frac{\frac{CF}{2}}{\frac{BF}{2}}=\frac{CF}{BF};\ \frac{HNI}{NI}=\frac{\frac{ED}{2}}{\frac{CD}{2}}=\frac{ED}{CD};$$

Egalitatea de mai sus devine $\frac{AB}{AE}\cdot\frac{CF}{BF}\cdot\frac{ED}{CD}=1$, ea constituind relaţia lui Menelaos pentru triunghiul BEC şi punctele coliniare A, D, F. Această teoremă datorată lui ISAAC NEWTON din 1687 a fost completată de KARL FRIEDRICH (1777-1855). Matematician, fizician şi astronom german, profesor universitar la GÖTINGEN, GAUSS este autorul unor lucrări în domeniile algebrei, teoriei numerelor, analizei matematice, geometriei diferenţiale, studiul planetelor. El a rezolvat problema construcţiei cu rigla şi compasul a poligoanelor regulate şi a definit curbura totală. Deşi a publicat puţin, GAUSS este exemplar sub aspectul profunzimii rezultatelor sale. El a scos în evidenţă deficienţe ale raţionamentelor matematicienilor secolului al XVIII-lea, pe care le-a refăcut.

Bibliografie:

1. Mihalca , D., Chițescu I., Chiriță M., Geometria patrulaterului, Ed. Teora, Bucureşti, 1998.
2. Mica enciclopedie matematică, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1980.

Prof., Şcoala Gimnazială „ George Bacovia”, București

Asupra unor sume de progresii aritmetice

Ciobîcă Constantin, Colegiul Vasile Lovinescu,Fălticeni
Ciobîcă Elena , Colegiul Mihai Băcescu,Fălticeni

În cele ce urmează vom considera un șir $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale în progresie aritmetică de rație r pentru care vom demonstra următoarele relații:

1).

$$\frac{1}{(a_3+a_5)\cdot(a_7+a_9)}+\frac{1}{(a_7+a_9)\cdot(a_{11}+a_{13})}+\ldots+\frac{1}{(a_{2n+1}+a_{2n+3})\cdot(a_{2n+5}+a_{2n+7})}=\frac{n+1}{2\cdot(a_3+a_5)\cdot(a_{2n+5}+a_{2n+7})}.$$

2).

$$\frac{1}{(a_7+a_{11})\cdot(a_{15}+a_{19})}+\frac{1}{(a_{15}+a_{19})\cdot(a_{23}+a_{27})}+\ldots+\frac{1}{(a_{4n+3}+a_{4n+7})\cdot(a_{4n+11}+a_{4n+15})}=\frac{n+1}{2\cdot(a_7+a_{11})\cdot(a_{4n+11}+a_{4n+15})}.$$

3)

$$\frac{1}{(a_{11}+a_{17})\cdot(a_{23}+a_{29})}+\frac{1}{(a_{23}+a_{29})\cdot(a_{35}+a_{41})}+\ldots+\frac{1}{(a_{6n+5}+a_{6n+11})\cdot(a_{6n+17}+a_{6n+23})}=\frac{n+1}{2\cdot(a_{11}+a_{17})\cdot(a_{6n+17}+a_{6n+23})}.$$

Rezolvare:

1). $a_3+a_5=a_1+2r+a_1+4r=2a_1+6r$ și $a_7+a_9=a_1+6r+a_1+8r=2a_1+14r$

$$(a_7+a_9)-(a_3+a_5)=8r\Rightarrow\frac{1}{(a_3+a_5)\cdot(a_7+a_9)}=\frac{1}{8r}\cdot\left(\frac{1}{a_3+a_5}-\frac{1}{a_7+a_9}\right)$$

$$a_{11}+a_{13}=a_1+10r+a_1+12r=2a_1+22r$$

$$(a_{11}+a_{13})-(a_7+a_9)=8r\Rightarrow\frac{1}{(a_7+a_9)\cdot(a_{11}+a_{13})}=\frac{1}{8r}\cdot\left(\frac{1}{a_7+a_9}-\frac{1}{a_{11}+a_{13}}\right)$$

$$a_{2n+1}+a_{2n+3}=a_1+2nr+a_1+(2n+2)r=2a_1+(4n+2)r$$

$$a_{2n+5}+a_{2n+7}=a_1+(2n+4)r+a_1+(2n+6)r=2a_1+(4n+10)r$$

$$(a_{2n+5}+a_{2n+7})-(a_{2n+1}+a_{2n+3})=8r$$

$$\Rightarrow\frac{1}{(a_{2n+1}+a_{2n+3})\cdot(a_{2n+5}+a_{2n+7})}=\frac{1}{8r}\cdot\left(\frac{1}{a_{2n+1}+a_{2n+3}}-\frac{1}{a_{2n+5}+a_{2n+7}}\right)$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{8r}\cdot\left(\frac{1}{a_3+a_5}-\frac{1}{a_{2n+5}+a_{2n+7}}\right)=\frac{1}{8r}\cdot\frac{(a_{2n+5}+a_{2n+7})-(a_3+a_5)}{(a_3+a_5)\cdot(a_{2n+5}+a_{2n+7})}$$

$$(a_{2n+5}+a_{2n+7})-(a_3+a_5)=2a_1+(4n+10)r-2a_1-6r=(4n+4)r=4(n+1)r$$

$$S=\frac{4(n+1)r}{8r\cdot(a_3+a_5)\cdot(a_{2n+5}+a_{2n+7})}=\frac{n+1}{2\cdot(a_3+a_5)\cdot(a_{2n+5}+a_{2n+7})}.$$

2) $a_7+a_{11}=a_1+6r+a_1+10r=2a_1+16r$ și $a_{15}+a_{19}=a_1+14r+a_1+18r=2a_1+32r$

$(a_{15}+a_{19})-(a_7+a_{11})=16r$ atunci, $$\frac{1}{(a_7+a_{11})\cdot(a_{15}+a_{19})}=\frac{1}{16r}\cdot\left(\frac{1}{a_7+a_{11}}-\frac{1}{a_{15}+a_{19}}\right)$$

$a_{23}+a_{27}=a_1+22r+a_1+26r=2a_1+48r$ și $(a_{23}+a_{27})-(a_{15}+a_{19})=16r$

$$\frac{1}{(a_{15}+a_{19})\cdot(a_{23}+a_{27})}=\frac{1}{16r}\cdot\left(\frac{1}{a_{15}+a_{19}}-\frac{1}{a_{23}+a_{27}}\right)$$

$a_{4n+3}+a_{4n+7}=a_1+(4n+2)r+a_1+(4n+6)r=2a_1+(8n+8)r$

$a_{4n+11}+a_{4n+15}=a_1+(4n+10)r+a_1+(4n+14)r=2a_1+(8n+24)r$

$(a_{4n+11}+a_{4n+15})-(a_{4n+3}+a_{4n+7})=16r$

$$\frac{1}{(a_{4n+3}+a_{4n+7})\cdot(a_{4n+11}+a_{4n+15})}=\frac{1}{16r}\cdot\left(\frac{1}{a_{4n+3}+a_{4n+7}}-\frac{1}{a_{4n+11}+a_{4n+15}}\right)$$

$$S=\frac{1}{16r}\cdot\left(\frac{1}{a_7+a_{11}}-\frac{1}{a_{4n+11}+a_{4n+15}}\right)=\frac{(a_{4n+11}+a_{4n+15})-(a_7+a_{11})}{16r\cdot(a_7+a_{11})\cdot(a_{4n+11}+a_{4n+15})}$$

$(a_{4n+11}+a_{4n+15})-(a_7+a_{11})=8\cdot(n+1)\cdot r$

$$\Rightarrow S=\frac{8(n+1)r}{16r\cdot(a_7+a_{11})\cdot(a_{4n+11}+a_{4n+15})}=\frac{n+1}{2\cdot(a_7+a_{11})\cdot(a_{4n+11}+a_{4n+15})}.$$

3) $a_{11}+a_{17}=a_1+10r+a_1+16r=2a_1+26r$ și $a_{23}+a_{29}=a_1+22r+a_1+28r=2a_1+50r$

$(a_{23}+a_{29})-(a_{11}+a_{17})=24r$

$$\frac{1}{(a_{11}+a_{17})\cdot(a_{23}+a_{29})}=\frac{1}{24r}\cdot\left(\frac{1}{a_{11}+a_{17}}-\frac{1}{a_{23}+a_{29}}\right)$$

$a_{35}+a_{41}=a_1+34r+a_1+40r=2a_1+74r$ și $(a_{35}+a_{41})-(a_{23}+a_{29})=24r$

$$\frac{1}{(a_{23}+a_{29})\cdot(a_{35}+a_{41})}=\frac{1}{24r}\cdot\left(\frac{1}{a_{23}+a_{29}}-\frac{1}{a_{35}+a_{41}}\right)$$

$a_{6n+5}+a_{6n+11}=a_1+(6n+4)r+a_1+(6n+10)r=2a_1+(12n+14)r$

$a_{6n+17}+a_{6n+23}=a_1+(6n+16)r+a_1+(6n+22)r=2a_1+(12n+38)r$

$(a_{6n+17}+a_{6n+23})-(a_{6n+5}+a_{6n+11})=24r$

$$\frac{1}{(a_{6n+5}+a_{6n+11})\cdot(a_{6n+17}+a_{6n+23})}=\frac{1}{24r}\cdot\left(\frac{1}{a_{6n+5}+a_{6n+11}}-\frac{1}{a_{6n+17}+a_{6n+23}}\right)$$

$$S=\frac{1}{24r}\cdot\left(\frac{1}{a_{11}+a_{17}}-\frac{1}{a_{6n+17}+a_{6n+23}}\right)=\frac{1}{24r}\cdot\frac{(a_{6n+17}+a_{6n+23})-(a_{11}+a_{17})}{(a_{11}+a_{17})\cdot(a_{6n+17}+a_{6n+23})}=$$

$(a_{6n+17}+a_{6n+23})-(a_{11}+a_{17})=12\cdot(n+1)r$

$$=\frac{1}{24r}\cdot\frac{12(n+1)r}{(a_{11}+a_{17})\cdot(a_{6n+17}+a_{6n+23})}=\frac{n+1}{2\cdot(a_{11}+a_{17})\cdot(a_{6n+17}+a_{6n+23})}.$$

Generalizations of the limits of the sequences of Bătineţu, Ghermănescu, Ianculescu, Lalescu and other collaborations

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Dan Sitaru and Neculai Stanciu

I. If $B_n(t)=n^{1-t}\left(\frac{(n+1)^{2t}}{\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right)^t}-\frac{n^{2t}}{\left(\sqrt[n]{n!}\right)^t}\right)$, with $t>0$, then $\lim\limits_{n\to\infty}B_n(t)=te^t$.

Proof. We have $B_n(t)=n^{1-t}\cdot\frac{n^{2t}}{\left(\sqrt[n]{n!}\right)^t}\cdot(u_n-1)=\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)^t\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n,\forall n\geq 2$, (1).

where we denoting $u_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2t}\cdot\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\right)^t$, $\forall n\geq 2$. We have

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$ and then we obtain $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n}=1$. We also

have: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(e_n^{2t}\cdot\left(\frac{n!}{(n+1)!}\cdot\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right)^t\right)=e^{2t}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}\right)^t=e^{2t}\cdot e^{-t}=e^t$.

By (1) and above we obtain that: $\lim\limits_{n\to\infty}B_n(t)=e^t\cdot 1\cdot\ln e^t=te^t$

Observation. For $t=1$ we obtain that: $\lim\limits_{n\to\infty}B_n(1)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}-\frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}\right)=e$,

i.e. the limit of well-known *D.M Bătineţu-Giurgiu'* s sequence.

II. Let $\forall t\in R^*$ and the sequence $(I_n(t))_{n\geq 2}$, $I_n(t)=n^{1-t}\left((n+1)^t\left(\sqrt[n+1]{n+1}\right)^t-n^t\left(\sqrt[n]{n}\right)^t\right)$, then

$\lim\limits_{n\to\infty}I_n(t)=t$

Proof. We have that $I_n(t)=n\cdot\sqrt[n]{n^t}\cdot(u_n-1)=\left(\sqrt[n]{n}\right)^t\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n,\forall n\geq 2$, (1).

where $u_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^t\cdot\left(\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}}\right)^t,\forall n\geq 2$. So, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n}=1$. Also we have

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n^n=\lim\limits_{n\to\infty}e_n^t\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}}\right)^{nt}=e^t\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}}\right)^t=e^t\cdot 1=e^t$.

Hence: $\lim\limits_{n\to\infty}I_n(t)=1\cdot 1\cdot\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}u_n^n\right)=\ln e^t=t$.

Observation. For $t=1$ we get that $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=\lim\limits_{n\to\infty}I_n(1)=1$, i.e. the limit of the sequence of *Romeo T. Ianculescu.*

III. Let $g_n=\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n},\forall n\in N$, $x\in R$. $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\sin^2x}\left(g_{n+1}^{\cos^2x}-g_n^{\cos^2x}\right)=\cos^2x\cdot e^{\cos^2x}$

Proof. $G_n(x)=n^{1-\cos^2x}\left(g_{n+1}^{\cos^2x}-g_n^{\cos^2x}\right)=n\cdot\left(\frac{g_n}{n}\right)^{\cos^2x}(u_n-1)=$

$$=\left(\frac{g_n}{n}\right)^{\cos^2x}\frac{u_n-1}{\ln u_n}\ln u_n^n=\frac{(n+2)^{(n+1)\cos^2x}}{n^{\cos^2x}(n+1)^{n\cos^2x}}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n=$$

$$=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{(n+1)\cos^2x}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\cos^2x}\frac{u_n-1}{\ln u_n}\ln u_n^n,\forall n\in N^*,\ (1).$$

where $u_n=\left(\frac{g_{n+1}}{g_n}\right)^{\cos^2x}=\left(\frac{(n+3)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)^n}{(n+2)^{n+1}}\right)^{\cos^2x},\forall n\in\mathbb{N}$. Therefore,

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n\right)^{\cos^2x}=\left(e\cdot\frac{1}{e}\right)^{\cos^2x}=1,\text{ şi deci}\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n}=1.$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+3)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)^n}{(n+2)^{n+1}}\right)^{n\cos^2x}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+3}{n+1}\right)^{n\cos^2x}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4}\right)^{(n^2+n)\cos^2 x}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n\cos^2 x}=e^{-\cos^2 x}\cdot e^{2\cos^2 x}=e^{\cos^2 x}.$$

Hence we obtain that: $\lim\limits_{n\to\infty} G_n(x)=e^{\cos^2 x}\cdot 1\cdot 1\cdot \ln\left(\lim\limits_{n\to\infty} u_n^n\right)=e^{\cos^2 x}\cdot \ln e^{\cos^2 x}=\cos^2 x\cdot e^{\cos^2 x}$.

Observation. For $x=0$, yields that $\lim\limits_{n\to\infty} G_n(0)=\lim\limits_{n\to\infty} G_n=e$, i.e. the limit of the sequence of *Mihail Ghermănescu*.

IV. Euler-Mascheroni-Lalescu collaboration

If $a,b\in R, a+b=1$, then $\lim\limits_{n\to\infty}\left((n+1)^a\sqrt[n+1]{((n+1)!c_n)^b}-n^a\sqrt[n]{(n!e_n)^b}\right)=\frac{a+b\ln c}{e^b}$, where

$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ and $c_n=-\ln n+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Proof. We have

$$B_n=(n+1)^a\sqrt[n+1]{((n+1)!c_n)^b}-n^a\sqrt[n]{(n!e_n)^b}=n^a\sqrt[n]{(n!e_n)^b}(u_n-1)=$$

$$=n^a\sqrt[n]{(n!e_n)^b}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n=n\cdot\frac{\sqrt[n]{(n!e_n)^b}}{n^b}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n=\left(\frac{\sqrt[n]{n!e_n}}{n}\right)^b\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n,\ \forall n\ge 2,\text{ unde}$$

$$u_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^a\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!c_n}}{\sqrt[n]{n!e_n}}\right)^b,\ \forall n\ge 2.$$

We have that

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!c_n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!c_n}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!c_{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!c_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}\cdot\frac{1}{e_n}=\frac{1}{e};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!e_n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!e_n}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!e_{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!e_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{e_{n+1}}{e_n}\cdot\frac{1}{e_n}=\frac{1}{e}.$$

So $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=1$ and then $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n}=1$. Also we have that

$$\lim_{n\to\infty} u_n^n=\lim_{n\to\infty} e_n^a\left(\frac{(n+1)!c_n}{n!e_n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!c_n}}\right)^b=e^a\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{c_n}{e_n}\cdot\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!c_n}}\right)==e^a\left(\frac{c}{e}\cdot e\right)^b=e^a c^b.$$

Hence: $\lim\limits_{n\to\infty} B_n=\left(\frac{1}{e}\right)^b\cdot 1\cdot\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty} u_n^n\right)=\frac{1}{e^b}\cdot\ln\left(e^a c^b\right)=\frac{a+b\ln c}{e^b}$.

V. Euler-Mascheroni-Bătineţu collaboration

Let $e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ and $\gamma_n=-\ln n+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, for any positive integer n, then

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!\gamma_n}}-\frac{n^2}{\sqrt[n]{(2n-1)!!e_n}}\right)=\frac{e}{2}(2-\ln\gamma).$$

Proof. We have $x_n=\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!c_n}}-\frac{n^2}{\sqrt[n]{(2n-1)!!e_n}}=\frac{n^2}{\sqrt[n]{(2n-1)!!e_n}}(u_n-1)=$

$$=\frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!e_n}}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n,\forall n\geq 2,\ (1).$$

where we denoted $u_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!e_n}}{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!c_n}},\forall n\geq 2$.

Also we have that:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!e_n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!e_{n+1}}{(2n-1)!!e_n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left((2n+1)\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{e_n}\right)=\frac{2}{e},$$

and analogous, $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!\gamma_n}}{n+1}=\frac{2}{e}$.

Yields that: $\lim_{n\to\infty}u_n=1$, and $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n}=1$. We have

$$\lim_{n\to\infty}u_n^n=\lim_{n\to\infty}\left(e_n^2\cdot\frac{(2n-1)!!e_n}{(2n+1)!!\gamma_n}\cdot\sqrt[n+1]{(2n+1)!!\gamma_n}\right)=\frac{e^3}{\gamma}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!\gamma_n}}{2n+1}=$$

$$=\frac{e^3}{\gamma}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!\gamma_n}}{n+1}\cdot\frac{n+1}{2n+1}=\frac{e^3}{\gamma}\cdot\frac{2}{e}\cdot\frac{1}{2}=\frac{e^2}{\gamma},\ (2).$$

Hence, taking to limit in (1) with $n\to\infty$ and considering (2) we obtain that

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{e}{2}(2-\ln\gamma).$$

Euclid filozoful

Despre marele matematician **Euclid (330-275 î.e.n)** cel care a întemiat celebra sa școală în Alexandria și de la care ne-a rămas cartea ”**Elementele** ” , cea mai citită carte științifică, după Biblie, ne-au rămas multe descoperiri în matematică dar și unele întâmplări povestite de istorici cu mult timp după moartea sa.

Se povestește că o dată, la școala sa, un elev după ce învățase o serie de teoreme de geometrie l-a întrebat pe Euclid:

- **Ce folos voi avea eu învățând aceste lucruri**?

Auzind acestea, Euclid îl cheamă la el pe ajutorul său și-i spune:

- **Dă-i acestuia trei monezi, căci el vrea să câștige din ceea ce învață**. Astfel a replicat marele învățat considerând că unii dintre elevi vor să aibă un câștig imediat fără a înțelege esența lucrurilor mai ales în domeniul matematicii unde primele noțiuni te ajută să le înțelegi pe următoarele.

„ Acela care învață, dar nu gândește este pierdut;
cel care gândește, dar nu învață
se află într-un mare pericol”.
Confucius
(551- 479)

3. Probleme rezolvate

▪ Clasa a V-a

G:732. **Aflaţi** $n\in\mathbb{N}$**, dacă** $7^{1+2+3+....+n}$ **este pătrat perfect.** **Ion Stănescu**, Buzău

Rezolvare:

Evident $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}=2k,\ \ k\in\mathbb{N}^*,\Rightarrow n(n+1)=4k$. Așadar, n= 4k sau n= 4k-1.

G:733. **Să se determine numerele naturale m și n știind că**

$m^2\left(n+3\right)+\left(1+2^2+2^3+...+2^{2016}\right):\left[2^{2017}-\left(2^0\right)^{2016}\right]=31214$. **Iuliana Trașcă**, Olt

Rezolvare : $1+2^2+2^3+...+2^{2016}=2^{2017}-1$

$\left(1+2^2+2^3+...+2^{2016}\right):\left[2^{2017}-\left(2^0\right)^{2016}\right]=1\Rightarrow m^2\left(n+3\right)=31213,\quad m^2\left(n+3\right)=7^4\cdot 13$

Așadar, $m^2\in\left\{1,7^2,7^4\right\}$, adică $\left(m,n\right)\in\left\{\left(1,31210\right);\left(7,634\right);\left(49,10\right)\right\}$.

G:734. **Proiectul de matematică Ştiinţă şi Caracter din Şcoala noastră, are capitolele 1) Planificare, 2) Parteneri, 3) Cursuri, 4) Corespondenţa la Gazeta Matematică, 5) Tabăra de Matematică şi Expediţia Aura Pădurii, 6) Evaluare şi câte un număr de teme pentru fiecare. Capitolul 1 conţine** $\frac{1}{5}$ **din numărul temelor, capitolul 2,** $\frac{1}{8}$ **din rest, capitolul 3,** $\frac{2}{7}$ **din noul rest, capitolul 4,** $\frac{1}{5}$ **din noul rest, capitolul 5,** $\frac{1}{2}$ **din noul rest, capitolul 6,** $\frac{1}{2}$ **din noul rest. Ştiind că s-a mai parcurs o temă, aflaţi numărul total de teme.** **Ion Stănescu**, Buzău

Rezolvare : Se aplică metoda mersului invers.

MN = 1. KL = 2. IJ = 4 = $\frac{4}{5}\cdot GH$. GH = 5 = $\frac{5}{7}\cdot EF$. EF = 7 = $\frac{7}{8}\cdot CD$. CD = 8 = $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}\cdot\cdot AB$.
AB = 10. Răspuns. 10 teme.

G:735. **Dacă** $n\in\mathbb{N}^*$**, să se arate că** 89^n **se poate scrie ca o sumă de trei pătrate perfecte distincte nenule.** **Marin Chirciu**, Pitești

Rezolvare: Cum $89=3^2+4^2+8^2$ și $89^2=17^2+24^2+84^2$, atunci pentru n impar avem:

$89^n=89^{2k+1}=89^k\cdot 89=(89^k)^2\cdot\left(3^2+4^2+8^2\right)=\left(89^k\cdot 3\right)^2+\left(89^k\cdot 4\right)^2+\left(89^k\cdot 8\right)^2$.

Analog , pentru n par: $89^n=89^{2k+2}=89^{2k}\cdot 89^2=\left(89^k\cdot 17\right)^2+\left(89^k\cdot 24\right)^2+\left(89^k\cdot 84\right)^2,\ k\in\mathbb{N}$.

G:736. **Să se determine** $m,n\in\mathbb{N}^*$ **care verifică relația:** $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{2m^n}=1$.

Ionel Tudor, Viorica Dogaru, Giurgiu

Rezolvare:

Pentru $n=1$ sau $m=1$ membrul stâng este mai mare ca 1.

Fie $m,n\geq 2$. Pentru n=2 rezultă $(m-2)m=3\Rightarrow m=3$. Pentru $m\rangle 3, n\rangle 2\Rightarrow m^n\rangle 9$ iar $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{3}{2m^n}\langle\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=1$, ceea ce nu convine. Așadar, $(m;n)\in\{(3;2)\}$.

$\boxed{G:737}$. **Să se arate că nu există numere naturale x astfel încât $x^{2017}+x^{2015}=x^{2016}+x^{2014}+2017$.**

Marian Ciuperceanu, Craiova

Rezolvare: Presupunem prin absurd că relația dată este adevărată. Atunci,
$x^{2017}-x^{2016}+x^{2015}-x^{2014}=2017\Leftrightarrow x^{2015}\cdot x(x-1)+x^{2013}\cdot x\cdot(x-1)=2017\Leftrightarrow$
$x(x-1)\cdot(x^{2015}+x^{2013})=2017,$ ceea ce este o contradicție deoarece membrul stâng este par iar membrul drept este impar.

$\boxed{G:738}$. **Determinați restul împărțirii numărului $x=7^{n+3}\cdot 2^{n+2}+7^{n+2}\cdot 2^{n+3}+253\cdot 14^n$ la 2017.**

Gheorghe Dârstaru, Buzău

Rezolvare:
$x = 7^{n+3}\cdot 2^{n+2} + 7^{n+2}\cdot 2^{n+3} + 253\cdot 14^n = 7^n\cdot 7^3\cdot 2^n\cdot 2^2 + 7^n\cdot 7^2\cdot 2^n\cdot 2^3 + 253\cdot 14^n$
$x = 14^n(7^3\cdot 2^2 + 7^2\cdot 2^3 + 253) = 14^n\cdot(343\cdot 4 + 49\cdot 8+253) = 14^n\cdot 2017$
Restul împărțirii lui x la 2017 este 0 .

$\boxed{G:739}$. **Fie numerele $A=2+3+4-1+6+7+8-5+10+11+12-9+...+238+239+240-237$ și $B=1-2+3+4-5+6+7-8+9+...+157-158+159$. Arătați că $\frac{A}{61}=\frac{3B}{53}$.**

Sorina Văcărean, Cluj-Napoca

Rezolvare: Grupând termenii lui A câte 4, obținem
$A=8+16+24+...+480=8(1+2+3+...+60)=8\cdot\frac{60\cdot 61}{2}=240\cdot 61$, de unde $\frac{A}{61}=240$. Grupând termenii lui B câte 3, obținem $B=2+5+8+...+158$. În sumă sunt 53 termeni, de unde $B=\frac{(2+158)\cdot 53}{2}=80\cdot 53$ și de aici $\frac{3B}{53}=240$, astfel că fracțiile date sunt echivalente.

▪ Clasa a VI-a

$\boxed{G:740}$. **Să se rezolve ecuația $(n-2017)^{n-2017}=n-1765,\ n\in\mathbb{N}.$**

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:
Numărul 2017 nu este soluție deoarece 0^0 nu are sens. Pentru $0\leq n\ \langle\ 2017$, fie $m=n-2017\langle 0,\ m\in\mathbb{Z}$.
Atunci, ecuația devine $m^m=m+252$. Fie $m=-p,\ p\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\ (-p)^{-p}=252-p$ (*).
Trecând la modul, $|252-p|\ =|(-p)^{-p}|=\frac{1}{p}\langle 1\Rightarrow\ -1\langle 252\langle 1\Rightarrow 251\langle p\langle 253\Rightarrow p=252$ dar nu satisface ecuația (*). Rezultă că ecuația nu are soluții pentru $n\in\{1;2;3;.....;2017\}$.
Pentru $n\rangle 2017$ și $m=n-2017\in\mathbb{N}^*$ ecuația $m^m=m+252$ se verifică doar pentru 4.

$\boxed{G:741}$. **Să se arate că numărul $\frac{2^{2017}+3\cdot 5^{17}}{17}$ este natural și să i se găsească ultima cifră .**

Viorica Dogaru, Giurgiu

Rezolvare:

Fie $n=\dfrac{2^{2017}+3\cdot 5^{17}}{17}$ și $k=\dfrac{n}{17}$. Cum $2^{2017}+3\cdot 5^{17}=15\cdot 5^{16}+2\cdot 2^{16}=17\cdot 5^{16}-2\cdot 5^{16}+2\cdot 2^{2016}=$

$=M_{17}+2(2^{2016}-5^{17})=M_{17}+2\left[\left(2^{4}\right)^{504}-\left(5^{4}\right)^{4}\right]=M_{17}+2(17-1)^{504}-2\cdot 625^{4}=$

$=M_{17}+2\left(M_{17}+(-1)^{504}\right)-2(17\cdot 37-43)^{4}=M_{17}+2-2\cdot 16^{2}=M_{17}+2-2(167-1)^{2}=$

$=M_{17}+2-2(M_{17}+1)=M_{17}$, așadar, $n\vdots 17\Rightarrow k\in\mathbb{N}$.

Ultima cifră a lui n este $u(2\cdot 16^{504}+3\cdot 5^{17})=u\left(2\cdot u(16^{504})+3u(5^{17})\right)=u\left(12+15\right)=7$ iar cum $k=\dfrac{n}{17}$

rezultă $n=17k\Rightarrow u(n)=u(17k)=u\left(17\cdot u(k)\right)=7\Rightarrow u(k)=1$.

$\boxed{\text{G:742}}$. **Arătați că $(a+1)^{n}+a-1$ se divide cu a, $\forall a\in\mathbb{N}$ și că**

$A=\dfrac{(a+1)^{2n}+2(a+1)^{n+1}+a^{2}+2a-3}{a(a+1)^{n}+a^{2}+3a}\in\mathbb{N},\ \forall a\in\mathbb{N}^{*}, n\in\mathbb{N}.$ **Marin Chirciu**, Pitești

Rezolvare:

$(a+1)^{n}+a-1=Ma+1+a-1\vdots a$; $A=\dfrac{\left[(a+1)^{n}+a-1\right]\cdot\left[\cancel{(a+1)^{n}+a+3}\right]}{a\left[\cancel{(a+1)^{n}+a+3}\right]}=\dfrac{(a+1)^{n}+a-1}{a}\in\mathbb{N}.$

$\boxed{\text{G:743}}$. **Fie a,b,c numere prime astfel încât 5a+7b, 7b+11c, și 11c+5a sunt direct proporționale cu 25, 56 respectiv 46. Arătați că $a^{3}+b^{3}+c^{3}$ este divizibil cu 45.**

Marian Ciuperceanu, Craiova

Rezolvare: Din enunțul problemei rezultă $\dfrac{5a+7b}{25}=\dfrac{7b+11c}{56}=\dfrac{11c+5a}{46}=\dfrac{10a+14b+22c}{127}=k\Rightarrow$

$5a+7b+11c=\dfrac{127k}{2}$. Din această relație și $5a+7b=25k,\ 7b+11c=56k,\ 5a+11c=46k$ rezultă consecutiv c = 7, a = 3, b = 5. Înlocuind, obținem $a^{3}+b^{3}+c^{3}=495=45\cdot 55\ \vdots\ 45$.

$\boxed{\text{G:744}}$. **Să se calculeze minimul și maximul expresiei E = x+3y-2z, știind că x, y și z sunt numere pozitive și avem 7x-2y+6z = 3 și 11x-6y+3z = 4.**

Petre Rău, Galați

Rezolvare: Din condițiile date determinăm variabilele y și z în funcție de variabila x și găsim: $y=\frac{2x-1}{2}$, $z=\frac{1-3x}{2}$; cum avem de a face cu trei variabile pozitive, rezultă că $\frac{1}{3}\le x\le\frac{1}{2}$. Expresia E devine: E = 6x-2, deci $E_{min}=0$ și $E_{max}=1$.

$\boxed{\text{G:745}}$. **Arătați că nu există numere naturale formate din trei cifre de 1 și restul cifrelor 0 care să poată fi scrise ca sumă de două pătrate perfecte.**

Neculai Stanciu, Buzău **și Titu Zvonaru,** Comănești

Rezolvare: Fie n numărul din enunţ; deoarece suma cifrelor sale este 3, n este divizibil cu 3 dar nu este divizibil cu 9.

Presupunem că există numerele naturale a și b astfel încât $n=a^{2}+b^{2}$; deoarece resturile pătratice modulo 3 sunt 0 și 1, deducem că $a=b=0(\text{mod}\,3)$. Atunci $a^{2}+b^{2}=(3k)^{2}+(3p)^{2}=9k^{2}+9p^{2}$ se divide cu 9, contradicție cu faptul că n nu se divide cu 9!

$\boxed{\text{G:746}}$. **Arătați că fracția $\dfrac{x(x+1)(x+2)}{23^{y}+19^{z}}$ este reductibilă pentru x, y, z numere naturale nenule, y număr impar.** **Gheorghe Dârstaru**, Buzău

Rezolvare:

$x(x+1)(x+2)$ este produsul a trei numere naturale consecutive, deci este divizibil cu 3

$23^y = (24-1)^y = M_{24} - 1^y = M_{24} - 1$ **$19^z = (18+1)^z = M_{18} + 1^z = M_{18} + 1$**

Numărătorul și numitorul multiplii de 3 rezultă că fracția este reductibilă

$\boxed{\text{G:747}}$. **Să se rezolve în $\mathbb{N}^*$ ecuaţia:** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a+b+c}=1.$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Rezolvare: Pentru c = 0, ecuaţia devine: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a+b}=1.$

Dacă $a \le b \Rightarrow 1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a+b} \le \frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}=\frac{5}{2a} \Rightarrow 2a \le 5 \Rightarrow a \in \{1,2\}$.

Pentru a = 1 avem: $1+\frac{1}{b}+\frac{1}{1+b}=1,$ ecuaţie imposibilă.

Pentru a = 2 ecuaţia devine: $\frac{1}{b}+\frac{1}{2+b}=\frac{1}{2}.$ Din faptul că

$\frac{1}{2}=\frac{1}{b}+\frac{1}{2+b}<\frac{1}{b}+\frac{1}{b}=\frac{2}{b} \Rightarrow \frac{1}{2}<\frac{2}{b} \Rightarrow b<4 \Rightarrow b \in \{2,3\}$.

Se constată uşor că nici o valoare a lui b nu este soluţie. Deci, ecuaţia admite numai soluţii nenule.

2) Pentru $c \neq 0$ avem:

a) Dacă $a=1 \Rightarrow \frac{1}{b}+\frac{1}{1+b+c}=0,$ ecuaţie imposibilă.

b) Dacă $a=2 \Rightarrow \frac{1}{b}+\frac{1}{2+b+c}=\frac{1}{2};$

i) b=2, ecuaţie imposibilă;

ii) $b=3 \Rightarrow \frac{1}{5+c}=\frac{1}{6} \Rightarrow c=1;$ soluţia este (2,3,1).

iii) $b>3 \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{b}+\frac{1}{2+b+c}<\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2} \Rightarrow$ ecuaţie imposibilă.

c) Dacă $a,b \ge 3, \Rightarrow 1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a+b+c} \le \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{17}{21}<1,$ fals $\Rightarrow$ ecuaţie imposibilă.

Cum ecuaţia este simetrică în a şi b ecuaţia admite şi soluţia (3,2,1).

În concluzie, mulţimea soluţiilor S = $\{(2,3,1):(3,2,1)\}$.

$\boxed{\text{G:748}}$. **Un unghi are 171 ^{0} şi este împărţit în unghiuri cu măsurile 1 ^{0}, 2 ^{0}, ---, n ^{0}, $n \in \mathbb{N}$. În câte părţi este împărţit unghiul dat ?**

Ion Stănescu, Buzău

Rezolvare : Cum $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}=171 \Rightarrow n(n+1)=34=18 \cdot 19 \Rightarrow n=18^0.$

$\boxed{\text{G:749}}$. **Arătaţi că** $\frac{810}{\overline{286k}-\overline{283k}+\overline{280k}-\overline{277k}+\overline{274k}-\overline{271k}+...+\overline{130k}-\overline{127k}}=1.$

Sorina Văcărean, Cluj-Napoca

Rezolvare:

$\left(\overline{286k}-\overline{283k}\right)+\left(\overline{280k}-\overline{277k}\right)+\left(\overline{274k}-\overline{271k}\right)+...+\left(\overline{130k}-\overline{127k}\right)=30+30+30+...+30$.

Şirul 1300, 1360, 1420, …, 2860 are 27 termeni, astfel că numitorul va fi $30 \cdot 27=810$, de unde rezultă că fracţia dată este echiunitară.

▪ Clasa a VII-a

$\boxed{\text{G:750}}$. **Să se rezolve în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ecuațiile: a) $x^2+y^2=2017$; b) $x^2+y^2=2017^2$;**

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

a) Fie $1\le x\langle y$. Atunci, $y^2\langle x^2+y^2=2017\Rightarrow y\langle\sqrt{2017}$. Cum $44\langle\sqrt{2017}\langle 45\Rightarrow y\le 44$.

Atunci, $y^2\le 44^2=1936\Rightarrow 2017-x^2\le 1936\Rightarrow x^2\ge 81\Rightarrow x\ge 9$.

Soluția $(x;y)=\{(9;44)\}$ este unică, unicitatea este dată de teorema lui Fermat.

Cum ecuația este simetrică atunci și perechea $(44;9)$ este soluție.

b) Evident perechile $(0;2017)$ și $(2017;0)$ sunt soluții. Fie $x\langle y$. Din identitatea lui Lagrange rezultă:

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2\Rightarrow$

$2017^2=(9^2+44^2)(44^2+9^2)=(9\cdot44+44\cdot9)^2+(44\cdot44-9\cdot9)^2=(2\cdot9\cdot44)^2+(1936-81)^2=792^2+1855^2$

Așadar, $(x;y)\in\{(0;2017),(2017;0),(792;1855),(1855,792)\}$.

$\boxed{\text{G:751}}$. **Se consideră numărul $A=\overline{ab}(a-2b+c)+\overline{bc}(b-2c+a)+\overline{ca}(c-2a+b)$ cu a, b, c nenule și distincte. Arătați că numărul A se poate scrie ca suma a trei pătrate perfecte nenule.**

Marin Chirciu, Pitești

Rezolvare:

$A=(10a+b)(a-2b+c)+(10b+c)(b-2c+a)+(10c+a)(c-2a+b)$. După desfacerea parantezelor obținem

$A=8(a^2+b^2+c^2)-8(ab+bc+ca)=4(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc)=\quad=4\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$,

evident fiind o sumă de trei pătrate perfecte nenule.

$\boxed{\text{G:752}}$. **Determinați numerele x, y cu $x\ge y$ și $x\in[1;\infty)$, știind că $x^2+y^2-x-3y-xy+4=0$.**

Marian Ciuperceanu, Craiova

Rezolvare:

Relația dată este echivalentă cu $(y^2-4y+4)+(x^2-xy-x+y)=0\Leftrightarrow(y-2)^2+(x-1)(x-y)=0$.

Cum membrul stâng este pozitiv, rezultă x= y= 2.

$\boxed{\text{G:753}}$. **Fie $A=\{1,9,17,25,33,....\}$ o mulţime cu n+1 elemente şi $B=\{8k-1|1\le k\le n;n,k\in\mathbb{N}^*\}$.**

a) Aflaţi numărul elementelor mulţimii $A\cap B$;

b) Arătaţi că numărul elementelor mulţimii $A\times B$ nu este pătrat perfect ;

c) Calculaţi suma $S=1+7+9+15+17+23+25+31+....+(8n-7)+(8n-1)+(8n+1)$;

d) Arătaţi că oricare ar fi *x* şi *y* din $A\cup B$ numărul $\dfrac{x^2-y^2}{16}$ este număr întreg.

Dana Badea, Ploiești

Rezolvare:

a) $x\in A\Leftrightarrow x=8h+1;0\le h\le n\quad x\in B\ \Rightarrow 4k-4h=1\Rightarrow 4|1(fals)$

Deci, $A\cap B=\varnothing\Rightarrow \text{card}(A\cap B)=0$

b) $\text{card}(A\times B)=n^2+n$ şi $n^2<n^2+n<(n+1)^2$.

c) S este suma elementelor mulţimii A plus suma elementelor mulţimii B

$$\Rightarrow S=\frac{(8n+2)(n+1)}{2}+\frac{(8n+6)(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(16n+8)}{2}=(n+1)(8n+4)$$

d) $x,y\in A\cup B\Rightarrow x=8h+1$ şi $y=8k-1\Rightarrow$

$$\frac{x^2-y^2}{16}=\frac{(x-y)(x+y)}{16}=\frac{(8h+1-8k+1)(8h+1+8k-1)}{16}=\frac{16(4h-4k+1)(h+k)}{16}=(4h-4k+1)(h+k)\in\mathbb{Z}$$

$\boxed{\text{G:754}}$. **a) Scrieţi, ca diferenţă de 2 fracţii, o fracţie ce conţine termenii 1, a, a+1.**

b) Cercetaţi egalitatea $\frac{2017}{2018}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2018}\right)+\dots\dots\dots+\left(\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}\right)=\frac{5}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots\dots\dots\dots+\frac{1}{2018}$.

Ion Stănescu, Buzău

Rezolvare:

a) $\frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}$.

b) $\frac{2017}{2018}=\frac{1}{2018}+\frac{1}{2018}+---+\frac{1}{2018}\;(2017\; fracţii)$.

La stânga egalităţii date se reduc fracţiile opuse.

$\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+---+\frac{1}{2018}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+---+\frac{1}{2018}\;(A).$$

$\boxed{\text{G:755}}$. **Determinaţi toate perechile (x,y) de numere întregi astfel încât**

$x^2y^2-x^2-xy-x-y^2-y=0$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare:

$$x^2y^2-x^2-xy-x-y^2-y=0\Leftrightarrow(x^2y^2-x^2-y^2+1)-(xy+x+y+1)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x^2-1)(y^2-1)-(x+1)(y+1)=0\Leftrightarrow(x+1)(y+1)[(x-1)(y-1)-1]=0.$$

Aşadar avem două familii de soluţii: $(x,y)=(-1,a)$ şi $(x,y)=(b,-1)$, unde a şi b sunt numere întregi, precum şi soluţiile care provin din $(x-1)(y-1)-1=0$.

Soluţiile ecuaţiei $(x-1)(y-1)-1=0\Leftrightarrow(x-1)(y-1)=1\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=1\\y-1=1\end{cases}$ sau $\begin{cases}x-1=-1\\y-1=-1\end{cases}$

sunt $(x,y)=(2,2)$ respectiv $(x,y)=(0,0)$.

Prin urmare ecuaţia are soluţiile : $(x,y)\in\{(-1,a),(b,-1),(0,0),(2,2)\}$, unde $a\in Z, b\in Z$. □

$\boxed{\text{G:756}}$. **Să se determine triunghiurile dreptunghice de laturi numere naturale şi raza cercului înscris un număr prim.**

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Rezolvare *:* Cu notaţiile cunoscute, avem relaţia S = pr, unde a este ipotenuza triunghiului. Cum 2p = a +b + c, şi pentru triunghiul dreptunghic 2S = bc, avem relaţia:

bc =r(a + b + c) $\Leftrightarrow a=\frac{bc-rb-rc}{r}=\frac{bc}{r}-b-c$

şi cum $a^2=b^2+c^2$, din cele două relaţii, deducem:

$$\frac{b^2c^2}{r^2}+b^2+c^2-\frac{2b^2c}{r}-\frac{2bc^2}{r}+2bc=b^2+c^2\Leftrightarrow bc-2rb-2rc+2r^2=0\Leftrightarrow(b-2r)(c-2r)=2r^2.$$

(*)

Din ultima relaţie rezultă că cel putin unul dintre numerele b sau c este număr par.

Fie b = 2n, n$\in N^*$. Relaţia ultimă, devine:(n-r)(c-2r)=r^2,
de unde rezultă că (n-r)/r^2, şiatunci avem situaţiile:

1). $n-r=1\Rightarrow n=r+1\Rightarrow b=2r+2, c=r^2+2r, a=r^2+2r+2$;

2). $n-r=r\Rightarrow n=2r\Rightarrow b=4r, c=3r, a=5r$;

3). $n-r=r^2\Rightarrow n=r^2+r\Rightarrow b=2r(r+1).c=2r+1, a=2r^2+2r+1$.

În concluzie, triunghiurile dreptunghice căutate sunt de laturi:
$(r^2+2r+2;2r+2;r^2+2r),(5r;4r;3r),(2r^2+2r+1;2r^2+2r,2r+1)$, unde r este un număr prim.

$\boxed{\text{G:757}}$. **Să se arate că $2^k+22^k+32^k+\ldots+92^k$ se divide cu 470, pentru fiecare k natural impar.**

Petre Rău, Galați

Rezolvare: Pentru un k fixat, fiecare termen se termină cu aceeași cifră cu care se termină și numărul 2^k. Fiind zece termeni, înseamnă că numărul A se va termina cu 0, deci este divizibil cu 10.
Pe de altă parte, dacă grupăm câte doi termeni de la extremități, și știind că a^k+b^k este multiplu de (a+b) pentru orice k natural impar, avem că numărul A se divide cu 2+92 = 12+82 = 22+72 = 32+62 = 42+52 = 94.
Așadar, numărul A se divide cu 470.

$\boxed{\text{G:758}}$. **Triunghiul ΔABC are $m(\sphericalangle A)=90^0$, $M\in AC$, (BM este bisectoarea unghiului B şi $N\in$ (BC) astfel încât [BN]≡[BA]. Arătaţi că :**
a) N este simetricul lui A faţă de BM; b) NB·NC = AM·AC . c) MB·AC = AN·BC.

Dana Badea, Ploiești

Rezolvare:

a) Deoarece BN=BA⇒ΔNBA isoscel şi cum (BM este bisectoarea $\sphericalangle B\Rightarrow BM\perp AN$ şi BM este mediatoarea lui [AN], deci N este simetricul lui A faţă de BM.

b) $\Delta ABM\equiv\Delta NBM$ (L.U.L.) $\Rightarrow[AM]\equiv[MN]$, $m(\sphericalangle MNB) = m(\sphericalangle MAB)=90^0\Rightarrow m(\sphericalangle MNC)=90^0$

$\Rightarrow\Delta CNM\sim\Delta CAB$ (U.U.)$\Rightarrow\dfrac{CN}{AC}=\dfrac{MN}{AB}\Rightarrow AC\cdot AM = CN\cdot AB$ de unde $AM\cdot AC=NB\cdot NC$.

c) Din ΔABM dreptunghic, $AN\perp BM\Rightarrow\sphericalangle MAN\equiv\sphericalangle MBN\Rightarrow\Delta ANC\sim\Delta BMC$ (U.U.)⇒
$\dfrac{AN}{BM}=\dfrac{AC}{BC}\Rightarrow AN\cdot BC=BM\cdot AC$.

$\boxed{\text{G:759}}$. **În triunghiul ABC medianele AM și BN sunt perpendiculare ($AM\cap BN=\{G\}$). Știind că GM = 6 cm și BG = 8 cm, calculați perimetrul și aria triunghiului ABC.**

Gheorghe Dârstaru, Buzău

Rezolvare:
Din GM = 6 cm avem AM = 18 cm și AG = 12 cm; Din BG = 8 cm avem BN = 12 cm și GN = 4 cm
Teorema lui Pitagora în triunghiul BGM rezultă BM = 10 cm și BC = 20 cm
Teorema lui Pitagora în triunghiul BGA rezultă BA = $4\sqrt{13}$ cm
Teorema lui Pitagora în triunghiul AGN rezultă AN = $4\sqrt{10}$ cm și AC $=8\sqrt{10}$ cm

$P_{ABC}=8\sqrt{10}+4\sqrt{13}+20$; $A_{ABN}=\dfrac{BN\cdot AG}{2}=\dfrac{12\cdot 12}{2}=72cm^2=A_{CBN}$ (proprietatea medianei)

$A_{ABC}=144\ cm^2$.

▪ Clasa a VIII-a

$\boxed{\text{G:760}}$. **Să se determine mulţimile de valori pe care le poate lua numerele reale a,b,c dacă**

$$2a^2+b^2+c^2+2ac-6a-6b-2c=2.$$

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Relaţia din enunţ se scrie $(a-2)^2+(b-3)^2+(a+c-1)^2=16$. Deci,

$(a-2)^2\le 16\Leftrightarrow|a-2|\le 4\Leftrightarrow -4\le a-2\le 4\Leftrightarrow a\in[-2,6]$, (1).

$(b-3)^2\le 16\Leftrightarrow|b-3|\le 4\Leftrightarrow -4\le b-3\le 4\Leftrightarrow b\in[-1,7]$, (2).

$(a+c-1)^2\le 16\Leftrightarrow|a+c-1|\le 4\Leftrightarrow -3\le a+c\le 5$, (3).

Din (1) rezultă $-6 \le -a \le 2$, (4). Adunând (3) cu (4) obținem $c \in [-9,7]$, (5).
Deci, $a \in [-2,6], b \in [-1,7], c \in [-9,7]$.

G:761. **Să se determine toate tripletele(p, q, r) de numere prime, soluții ale ecuației:** $p + 50q + 450r = 2017$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Cum $50q + 450r$ este număr par, atunci p trebuie să fie prim impar cu ulima cifră 7, deci p este de forma 10s+7 cu s natural.
Ecuația devine: $10s + 7 + 50q + 450r = 2017 \Rightarrow s + 5q + 45r = 201 \Rightarrow s - 1 + 5q + 45r = 200$. De aici, rezultă că s-1 trebuie să fie divizibil cu 5, deci s-1= 5k iar s = 5k+1.
Mai departe se obține ecuația: $5k + 5q + 45r = 200 \big| :5 \Rightarrow k + q + 9r = 40$, $k \in \mathbb{N}$, q,r prime.

Dacă $r \ge 5$ este prim, atunci $40 = k + q + 9r \rangle 9r \ge 45$, fals. Așadar, $r \in \{2;3\}$.

Fie r =2. Din k+q=22 și q prim rezultă $q \in \{2;3;5;7;11;13;17;19\}$.
Se obțin soluții doar pentru q=3 și q=13, q= 19.
Dacă q=3 rezultă k= 19 iar s=96. Atunci p = 967 e prim. $(p_1;q_1;r_1) = (967;3;2)$.
Dacă q= 13 rezultă k=9 iar s= 46. Atunci, p= 467 e prim. $(p_2;q_2;r_2) = (467;13;2)$.
Dacă q = 19 rezultă k=3 iar s= 16. Atunci, p= 167 e prim. $(p_3;q_3;r_3) = (167;19;2)$.

Fie r = 3.
Din ecuația $k + q + 9r = 40 \Rightarrow k + q = 13$, $k \in \mathbb{N}$ iar cum q este prim rezultă $q \in \{2;3;5;7;11;13\}$.
Dacă q = 7 rezultă k= 6 iar s = 31. Atunci p = 317 e număr prim. $(p_4;q_4;r_4) = (317;7;3)$.
Dacă q = 13 rezultă k= 0 iar s = 1. Atunci p = 17 e număr prim. $(p_5;q_5;r_5) = (17;13;3)$.

G:762. **Să se determine** $x \in \mathbb{R}$ **știind că:** $\left(x^2 + 3x - 4\right)^3 + \left(x^2 - 3x - 10\right)^3 = 8\left(x^2 - 7\right)^3$.

Iuliana Trașcă, Olt

Rezolvare: Fie $a = x^2 + 3x - 4,\ b = x^2 - 3x - 10 \Rightarrow a + b = 2\left(x^2 - 7\right)$

Relația din enunț devine $a^3 + b^3 = (a+b)^3$ sau $(a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) = (a+b)^3 \Leftrightarrow (a+b) \cdot ab = 0$

Avem 2 situații :

i) $a + b = 0 \Rightarrow x^2 - 7 = 0 \Rightarrow x \in \left\{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\right\}$;

ii) $a \cdot b = 0 \Rightarrow \left(x^2 + 3x - 4\right)\left(x^2 - 3x - 10\right) = 0$, $(x+4)(x-1)(x-5)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-4,\ -2,\ 1,\ 5\}$

Concluzie $x \in \left\{-4,\ -\sqrt{7},\ -2,\ 1,\ \sqrt{7},\ 5\right\}$.

G:763. **Să se determine valoarea minimă a raportului** $A = \dfrac{2b^2 + 6b + 3}{2a + 5}$, **unde numerele naturale a, b sunt pare, consecutive, crescătoare în această ordine.**

Marian Ciuperceanu, Craiova

Rezolvare:

Înlocuind b= a+2 în enunț, obținem: $A = \dfrac{2(a+2)^2 + 6(a+2) + 3}{2a+5} = \dfrac{2a^2 + 14a + 23}{2a+5}$. Dacă A ia valoarea minimă, atunci și dublul său va lua valoarea minimă

$2A = \dfrac{4a^2 + 28a + 46}{2a+5} = \dfrac{(2a+5)\cdot(2a+9)+1}{2a+5} = 2a + 9 + \dfrac{1}{2a+5} = 2a + 5 + \dfrac{1}{2a+5} + 4 \ge 2 + 4 = 6$. Așadar,

$2A \ge 6 \Rightarrow A \ge 3$, minimul lui A fiind 3. S-a folosit relația $x + \dfrac{1}{x} \ge 2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

G:764 **Dacă** $a,b,c>0$ **si** $a^2+b^2+c^2=1$, **arătați că are loc inegalitatea:**

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\le\frac{1}{2abc}.$$

Florin Stănescu, Găești, Dâmbovița

Rezolvare:

Putem scrie: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{(1+1)^2}{a+b}=\frac{4}{a+b}$ şi analoagele: $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{4}{b+c}$, $\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\ge\frac{4}{c+a}$,

de unde $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$. În continuare vom arăta că :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\Leftrightarrow ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2\Leftrightarrow$$
$$0\le(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2,$$

Astfel,

$$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\ge 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\Rightarrow\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}\ge\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\Rightarrow$$
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\le\frac{1}{2abc}.$$

G:765. **Fie a și b două numere reale strict pozitive, cu ab ≤ 1. Să se arate că** $\left(1+\frac{1}{a}\right)^k+\left(1+\frac{1}{b}\right)^k\ge 2^{k+1}$.

Petre Rău, Galați

Rezolvare: Fie $E(a;b)=\left(1+\frac{1}{a}\right)^k+\left(1+\frac{1}{b}\right)^k$. Atunci $E(a;b)\ge 2\sqrt{\left(1+\frac{1}{a}\right)^k\cdot\left(1+\frac{1}{b}\right)^k}=$

$=2\sqrt{\left(1+\frac{a+b}{ab}+\frac{1}{ab}\right)^k}\ge 2\sqrt{\left(1+\frac{2}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{ab}\right)^k}\ge 2\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)^{2k}}=2\left(1+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)^k$. Dar $\sqrt{ab}\le 1$, deci

$1+\frac{1}{\sqrt{ab}}\ge 2$, de unde rezultă că $E(a,b)\ge 2^{k+1}$.

G:766. **Funcţia** $f:N^*\to Q_+^*$, **satisface condiţia:** $f(n)=\frac{\sum_{i=1}^{n}f(i)}{n^2}$, $\forall n\in N^*$. **Dacă** $f(1)=\frac{1}{2}$,

determinaţi $\sum_{i=1}^{2017}f(i)$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Scădem relaţiile: $f(1)+f(2)+...+f(n)=n^2f(n)$;

$f(1)+f(2)+...+f(n-1)=(n-1)^2f(n-1)$, şi obţinem

$f(n)=\frac{(n-1)^2}{n^2-1}f(n-1)=\frac{n-1}{n+1}f(n-1)$. Prin telescoparea formulei precedente obţinem:

$f(n)=2\cdot\frac{(n-1)!}{(n+1)!}\cdot f(1)=\frac{2f(1)}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. Deci, $f(n)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

Atunci, $f(1)+f(2)+...+f(2017)=\frac{1}{1}-\frac{1}{2018}=\frac{2017}{2018}$. □

G:767. **Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia:** $\left[x^2\sqrt{3}\right]+\left[x\sqrt{12}\right]+\left[\sqrt{299}\right]=2017$.

Dana Badea, Ploiești

Rezolvare: Din $\left[\sqrt{299}\right]=17\Rightarrow\left[x^2\sqrt{3}\right]+\left[x\sqrt{12}\right]=2000$.

Se deduce că orice soluţie verifică $x \le 33$. Se arată că $x = 33$ este soluţie
Se arată că numerele naturale $x < 33$ nu sunt soluţii.

G:768. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația: $18x^2 - 12x = 3xy - y$.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

Rezolvare:
$y(3x-1) = 18x^2 - 12x \Rightarrow y = \frac{18x^2-12x}{3x-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{2(9x^2-6x+1)-2}{3x-1} \in \mathbb{Z}, \frac{2(3x-1)^2-2}{3x-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$2(3x-1) - \frac{2}{3x-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3x-1 \in D_2$, $3x-1 \in \{-2,-1,1,2\}$ cu x = 0 și y= 0 sau x = 1și y = 3.

G:769. Să se arate că : $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}} \ge \frac{2n}{\sqrt{n+1}}, n \in N^*$.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Rezolvare: În inegalitatea: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}, a,b>0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)^2 \ge 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0, a,b>0,$

considerăm $a=\sqrt{k}, b=\sqrt{k+1}, k \in N^*$, şi atunci aceasta devine: $\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \frac{4}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = 4(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$.

Pentru $k=\overline{1.n-1}$, obţinem inegalităţile:

$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}} > 4(\sqrt{2}-\sqrt{1})$,

$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}} > 4(\sqrt{3}-\sqrt{2})$,

.

. şi cu ajutorul inegalităţii: $\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{4}{\sqrt{n}+1} = \frac{4(\sqrt{n}-1)}{n-1}$,

.

$\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}} > 4(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$,

prin adunarea lor, obţinem inegalitatea:

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 4(\sqrt{n}-1)+\frac{4(\sqrt{n}-1)}{n-1} = 4(\sqrt{n}-1)\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = \frac{4n}{\sqrt{n}+1} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{2n}{\sqrt{n}+1}.$$

Cum inegalitatea are loc şi pentru n = 1, devenind egalitate, rezultă că inegalitatea propusă este adevărată.

G:770. Se consideră $\triangle ABC$ echilateral. În exteriorul triunghiului se construiesc pătratele $ABDE$, $BCGF$ şi $ACHI$.
a) Arătaţi că aria suprafeţei nonagonului concav $AEDBFGCHI$ este mai mică decât aria suprafeţei pătratului $AKLM$, unde K este mijlocul laturii $[FG]$.
b) Arătaţi că aria suprafeţei hexagonului convex $EDFGHI$ este de patru ori mai mare decât aria suprafeţei $\triangle NFG$, unde N este mijlocul laturii $[EI]$.

Sorina Văcărean, Cluj-Napoca

Rezolvare: Fie a lungimea laturii $\triangle ABC$.

a) $A_{AEDBFGCHI} = A_{\triangle ABC} + 3 \cdot A_{ABDE} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3a^2 = \frac{a^2\left(12+\sqrt{3}\right)}{4}$. Fie P mijlocul laturii $[BC]$.

Punctele A, P şi K sunt coliniare, astfel că $AK = AP + PK = \frac{a\sqrt{3}}{2} + a = \frac{a\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}$.

$A_{AKLM} = AK^2 = \frac{a^2\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{4} = = \frac{a^2\left(7+4\sqrt{3}\right)}{4}$.

$A_{AEDBFGCHI} < A_{AKLM} \Leftrightarrow \frac{a^2\left(12+\sqrt{3}\right)}{4} < \frac{a^2\left(7+4\sqrt{3}\right)}{4} \Leftrightarrow 12+\sqrt{3} < 7+4\sqrt{3} \Leftrightarrow 5 < 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{25} < \sqrt{27}\ (A).$

b) $A_{EDFGHI} = A_{AEDBFGCHI} + 3\cdot A_{\triangle BDF}$. Cum $A_{\triangle BDF} = A_{\triangle ABC} \Rightarrow A_{EDFGHI} = \frac{a^2\left(12+\sqrt{3}\right)}{4} + 3\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} =$

$= a^2\left(3+\sqrt{3}\right)$. Punctele N, A şi K sunt coliniare, astfel că $NK = NA + AK = \frac{a}{2} + \frac{a\left(2+\sqrt{3}\right)}{2} =$

$= \frac{a\left(3+\sqrt{3}\right)}{2}$. $A_{\triangle NFG} = \frac{FG\cdot NK}{2} = a\cdot\frac{a\left(3+\sqrt{3}\right)}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{a^2\left(3+\sqrt{3}\right)}{4}$. $A_{EDFGHI} = 4\cdot A_{\triangle NFG} \Leftrightarrow a^2\left(3+\sqrt{3}\right) =$

$= 4\cdot\frac{a^2\left(3+\sqrt{3}\right)}{4}\ (A).$

G:771. Cubul $ABCDA^IB^IC^ID^I$ are AB = 1, O = centrul cubului, O_1 =centrul feţei ABCD, O_2 =centrul feţei $A^IB^IC^ID^I$, M = mijlocul lui $\left[AA^I\right]$, N = mijlocul lui CC^I.

a) Găsiţi un triunghi cu perimetrul $\frac{1}{2}\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$.

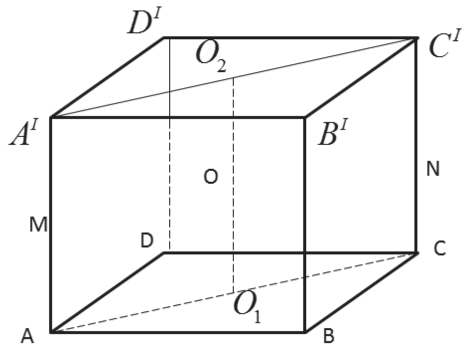
b) Identificaţi un romb cu aria $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ion Stănescu, Buzău

Rezolvare: Triunghiul A^IO_2O are $A^IO_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $O_2O = \frac{1}{2}$, $A^IO = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Perimetrul este

$P = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$.

b) Rombul O_2NO_1M are aria $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



▪ Clasa a IX-a

L:553. Să se demonstreze că $\sqrt{1}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+.....+\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1} \le (n+1)\sqrt{n+1}$.

Marian Ciuperceanu, Craiova

Rezolvare: Se folosește inegalitatea mediilor dintre cea aritmetică și cea pătratică.

$\sqrt{1}+\sqrt{2n+1} \le 2\sqrt{\frac{1+2n+1}{2}} = 2\sqrt{n+1}$,

$\sqrt{3}+\sqrt{2n-1} \le 2\sqrt{\frac{3+2n-1}{2}} = 2\sqrt{n+1}$,

…………………

Prin însumarea celor n+1 termeni din stânga, sau a celor (n+1):2 rânduri rezultă cerința.

L:554. Considerăm şirul $\left(a_n\right)_{n\ge1}$ definit prin $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+na_n}, n \ge 1$. Să se determine a_n şi să se

calculeze $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_k}$**.** **D.M. Bătineţu-Giurgiu,** Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

***Rezolvare*:** Se arată prin inducţie că $a_n > 0, \forall n$. Apoi, $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1+na_n}{a_n}=\frac{1}{a_n}+n, \forall n$.

Astfel că, $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{n(n-1)}{2}$. Deci, $\frac{1}{a_n}=1+\frac{n(n-1)}{2}$. Aşa că,

$\frac{1}{a_{2013}}=1+\frac{2012\cdot 2013}{2}=2025079$, şi urmează $a_{2013}=\frac{1}{2025079}$. Din $\frac{1}{a_k}=1+\frac{k(k-1)}{2}$ avem:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\left[1+\frac{k(k-1)}{2}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{k^2(k-1)}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n}k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^3-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left[n(n+1)+\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right].\square$$

L:555. Să se scrie aproximările zecimale prin lipsă şi prin adaos cu eroare de 10^{-2} **pentru numărul** $n=\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{3}{5\cdot 8}+\frac{4}{8\cdot 12}+......+\frac{18}{155\cdot 173}+\frac{19}{173\cdot 192}+\frac{20}{192\cdot 212}$**.**

Gheorghe Dârstaru, Buzău

Rezolvare: $n=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{173}-\frac{1}{192}+\frac{1}{192}-\frac{1}{212}$, $n=\frac{1}{3}-\frac{1}{212}$, $n=\frac{209}{636}\cong 0{,}32$.

L:556. Dacă $a,b,c\geq 0$ şi $a^3+b^3+c^3=192$, să se arate că $\sqrt{9+a^2}+\sqrt{9+b^2}+\sqrt{9+c^2}\leq 15$.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare:

$$\left(\sqrt{9+a^2}+\sqrt{9+b^2}+\sqrt{9+c^2}\right)^2\leq\left(1^2+1^1+1^2\right)\cdot\left(27+a^2+b^2+c^2\right)\leq 3\cdot 75=225\Rightarrow\ \sqrt{9+a^2}+\sqrt{9+b^2}+\sqrt{9+c^2}\leq 15.$$

S-a folosit faptul că $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}\geq\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\Leftrightarrow\sqrt[3]{\frac{192}{3}}\geq\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\Rightarrow 4\geq\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\leq 48$.

L:557. Dacă $a_i\in\mathbb{R}$, $i\in\{1,2,...,n\}$**, atunci să se demonstreze că** $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i^2+2}\leq\frac{n\sqrt{2}}{4}$**.**

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

Rezolvare: 1. Avem $\frac{a_i}{a_i^2+2}=\frac{\frac{a_i}{\sqrt{2}}}{2\left[\left(\frac{a_i}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{2\cdot\frac{a_i}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{a_i}{\sqrt{2}}\right)^2}\overset{\frac{a_i}{\sqrt{2}}=tg\frac{\alpha}{2}}{=}$

$\overset{\frac{a_i}{\sqrt{2}}=tg\frac{\alpha}{2}}{=}\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\sin\alpha\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$, de unde sumând pentru $i=\overline{1,n}$ obţinem concluzia.

Soluţia 2. Folosim metoda inducţiei complete.

Pentru $n=1$, avem $\frac{a_1}{a_1^2+2}\leq\frac{\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow\sqrt{2}(a_1-\sqrt{2})^2\geq 0$, adevărat.

Presupunem inegalitatea adevărată pentru orice n număr natural şi o demonstrăm pentru $n+1$.

Deci, $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i^2+2}\le\frac{n\sqrt{2}}{4}$ şi la fel ca în cazul pentru $n=1$ avem $\frac{a_n}{a_n^2+2}\le\frac{\sqrt{2}}{4}$, ceea ce implică

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{a_i}{a_i^2+2}\le\frac{n\sqrt{2}}{4}+\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}^2+2}\le\frac{n\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{(n+1)\sqrt{2}}{4}.$$

Soluţia 3. Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{x^2+2}$. Notăm $y=\frac{x}{x^2+2}\Leftrightarrow x^2y-x+2y=0$ şi deoarece $x\in R$ rezultă că $\Delta_x=1-8y^2\ge 0\Leftrightarrow y\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$. Deci, $f(x)\le\frac{\sqrt{2}}{4}$ este adevărată pentru $a_i\in R$, $i\in\{1,2,...,n\}$ care prin sumare conduce la concluzia dorită.

L:558. **Demonstraţi că** $(3-4\sin^2 9^0)(3-4\sin^2 27^0)=ctg9^0$.

Marin Chirciu, Piteşti

Rezolvare:

$$(3-4\sin^2 9^0)(3-4\sin^2 27^0)=\frac{(3\sin 9^0-4\sin^3 9^0)(3\sin 27^0-4\sin^3 27^0)}{\sin 9^0\cdot\sin 27^0}=\frac{\sin 3\cdot 9^0}{\sin 9^0}\cdot\frac{\sin 3\cdot 27^0}{\sin 27^0}=$$

$$=\frac{\sin 81^0}{\sin 9^0}=\frac{\cos 9^0}{\sin 9^0}=ctg\ 9^0.$$

L:559. **Arătaţi că dacă** $a,b,c>0$**, atunci** $\frac{16}{3}(\sum a^2-\sum ab)\ge\left(\sum|a-b|\right)^2$**.**

Neculai Stanciu, Buzău şi **Titu Zvonaru,** Comăneşti

Rezolvare: Fără a restrânge inegalitatea, putem presupune că $a\le b\le c$; fie $x,y\ge 0$ astfel încât $b=a+x, c=a+x+y$. Deoarece

$$\sum a^2-\sum ab=\frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+(x+y)^2\right)=x^2+xy+y^2,$$

inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu

$16(x^2+xy+y^2)\ge 3(x+y+x+y)^2\Leftrightarrow 4(x-y)^2\ge 0$, evident adevărată.

L:560. **Să se rezolve ecuaţia** $[x]+[2x]+[3x]=6x$**.**

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Se observă că orice număr întreg n verifică ecuația dată. Arătăm că $x\in\mathbb{R}\setminus\{\mathbb{Z}\}$ nu verifică ecuația dată. Conform proprietății $n[x]\le[nx]\le n[x]+n-1,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, înlocuind pe n cu 2 și cu 3 și adunând relațiile, se obține: $5[x]\le[2x]+[3x]\le 5[x]+3,\ \Rightarrow 6[x]\le[x]+[2x]+[3x]\le 6[x]+3,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Dacă x este soluție a ecuației atunci $6[x]\le 6x\le 6[x]+3\ \Rightarrow[x]\le x\le[x]+\frac{1}{2}\Rightarrow x-[x]\le\frac{1}{2},\ \{x\}\le\frac{1}{2}$.

Dacă $\alpha=\{x\}\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\Rightarrow x=n+\alpha,\ n\in\mathbb{Z}$. Dacă $\alpha=0\Rightarrow x=n\in\mathbb{Z}$ e soluție.

Dacă $\alpha\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\Rightarrow[x]=[n+\alpha]=n+[\alpha]=n.$ Atunci, $[2x]=[2n+2\alpha]=2n+[2\alpha]=2n,$

$[3x]=[3n+3\alpha]=3n+[3\alpha]$. În acest caz ecuația devine $n+2n+3n+[3\alpha]=6(n+\alpha)\Rightarrow[3\alpha]=6\alpha.$

Dar $0\langle 3\alpha\langle\frac{3}{2}\Rightarrow[3\alpha]=\begin{cases}0\langle 6\alpha, daca\ 0\langle\alpha\langle\frac{1}{3}\\ 1,\ daca\frac{1}{3}\le\alpha\le\frac{1}{2}\end{cases}$. De aici rezultă că $[3\alpha]=0\langle 6\alpha$ și

$\left[3\alpha\right]=1=6\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{1}{6}\notin\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$, deci nu avem soluții în acest caz. Singurele soluții sunt $S=\mathbb{Z}$.

L:561. Să se rezolve ecuaţia: $[x+7]+[x+11]+...+[x+4n+3]=2\cdot n^2+6n, \forall n\in N^*$, unde $[x]$este partea întreagă a lui x.

Constantin Ciobîcă , Fălticeni

Rezolvare:

$$[x+7]+[x+11]+...+[x+4n+3]=[x]+7+[x]+11+...+[x]+4n+3=n\cdot[x]+7+11+...+4n+3$$

$$7+11+...+4n+3=(4+3)+(4\cdot2+3)+...+(4n+3)=4+4\cdot2+...+4n+\underbrace{3+3+...+}_{de\,n\,ori}=$$

$$=4\cdot(1+2+...+n)+3n=4\cdot\frac{n(n+1)}{2}+3n=2\cdot n^2+2n+3n=2\cdot n^2+5\cdot n$$

$n\cdot[x]+2n^2+5n=2n^2+6n$. Rezultă $n\cdot[x]=n|:n\Rightarrow[x]=1\Rightarrow1\le x<2\Rightarrow x\in[1,2)$.

L:562. a) Daca $a,b,c\ge0,$ astfel incat $a+b+c=3,$ arătați că:

$$abc\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)\le8.$$

b) Daca $x_1,x_2,...,x_n\ge0$, astfel incat $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}=\sum_{k=1}^{n}a_k$, aratați că are loc inegalitatea:

$$\sqrt{1+a_1^2}+\sqrt{1+a_2^2}+...+\sqrt{1+a_n^2}\le n\cdot\sqrt{2}.$$

Florin Stănescu, Găești, Dâmbovița

Rezolvare:

a)Cum $a+b+c=3,$ din inegalitatea mediilor, putem scrie:

$$(1+a)(1+b)(1+c)\le\left(\frac{1+a+1+b+1+c}{3}\right)^3=\left(\frac{3+3}{3}\right)^3=8.$$

Mai departe, tot cu ajutorul inegalității mediilor, avem:

$$abc\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)=\frac{1}{8}\cdot2a\left(1+a^2\right)\cdot2b\cdot\left(1+b^2\right)\cdot2c\left(1+c^2\right)\le$$

$$\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{2a+1+a^2}{2}\right)^2\left(\frac{2b+1+b^2}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{2c+1+c^2}{2}\right)^2=\frac{1}{8\cdot64}\left[(1+a)(1+b)(1+c)\right]^4\le\frac{1}{8\cdot64}\cdot8^4=2^3=8.$$

b) Daca $x\ge0,$ cu ajutorul inegalității *C-B-S,* putem scrie:

$$\left(1\cdot\sqrt{2x}+1\cdot\sqrt{1+x^2}\right)^2\le(1+1)\left[\sqrt{2x}^2+\sqrt{1+x^2}^2\right]=2\left(1+2x+x^2\right)=2(1+x)^2,$$

de unde , $\sqrt{2x}+1\cdot\sqrt{1+x^2}\le\sqrt{2(1+x)^2}=\sqrt{2}(1+x)\Rightarrow\sqrt{x}+\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}\le x+1\Rightarrow$

$$\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}\le1-\sqrt{x}+x.$$

Acum, luând pe rând în locul lui x $a_1,a_2,...a_n$ obținem:

$$\sqrt{\frac{a_k^2+1}{2}}\le1-\sqrt{a_k}+a_k, k=\overline{1,n},$$ iar prin însumare,

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{a_k^2+1}{2}}\le n+\left(-\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}+\sum_{k=1}^{n}a_k\right)=n\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k^2+1}\le n\cdot\sqrt{2}.$$

L:563. **Fie funcţia** $f:[1,\infty)\to R$, $f(x)=\sqrt{x+2\cdot\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\cdot\sqrt{x-1}}$. **Arătaţi că** f **este funcţie constantă pentru** $x\in[1,2)$.

Constantin Ciobîcă , Fălticeni

Rezolvare:

$$f(x)=\sqrt{x-1+2\cdot\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{x-1-2\cdot\sqrt{x-1}+1}=$$
$$=\sqrt{\sqrt{x-1}^2+2\cdot\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{\sqrt{x-1}^2-2\cdot\sqrt{x-1}+1}=$$
$$=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|$$
$$x\in[1,2)\Rightarrow 1\le x<2\Rightarrow 0\le x-1<1\Rightarrow 0\le\sqrt{x-1}<1$$
$$\Rightarrow -1\le\sqrt{x-1}-1<0\Rightarrow\left|\sqrt{x-1}-1\right|=1-\sqrt{x-1}\quad\Rightarrow 1\le\sqrt{x-1}+1<2\Rightarrow\left|\sqrt{x-1}+1\right|=\sqrt{x-1}+1$$
$x\in[1,2)\Rightarrow f(x)=\sqrt{x-1}+1+1-\sqrt{x-1}=2\Rightarrow$ f este funcţie constantă.

L:564. **Determinaţi valoarea minimă a expresiei**
$E(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$.

Laura Tănase, Buzău

Rezolvare: Folosind inegalitatea lui Minkovski obţinem

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(3-x)^2+(3-y)^2}\ \ge\sqrt{(x+3-x)^2+(y+3-y)^2}$$
$$=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

Se obţine egalitate pentru $\frac{x}{3-x}=\frac{y}{3-y}\Rightarrow x=y$

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(3-y)^2}+\sqrt{(3-x)^2+y^2}\ge\sqrt{(x+3-x)^2+(y+3-y)^2}$$
$$=3\sqrt{2}$$

Se obţine egalitate pentru $\frac{x}{3-x}=\frac{3-y}{y}\Rightarrow 6x=9\Rightarrow x=\frac{3}{2}$

Adunând cele două inegalităţi, se obţine $E(x,y)\ge 6\sqrt{2}$.

Egalitatea este adevărată pentru $x=\frac{3}{2}$,deci minimul expresiei este $6\sqrt{2}$.

L:565. **Să se arate că pentru orice numere reale x, y, z și orice k natural impar, expresia:**
$F(x,y,z) = (x+y+z)^k - (-x+y+z)^k - (x-y-z)^k - (x+y-z)^k$ se divide cu $8xyz$.

Petre Rău, Galați

Rezolvare: Facem transformarea: $-x+y+z=2a$, $x-y+z=2b$, $x+y-z=2c$ de unde avem $x=\frac{b+c}{2}$, $y=\frac{a+c}{2}$, $z=\frac{a+b}{2}$ și

$x+y+z=2(a+b+c)$, $8xyz=(a+b)(a+c)(b+c)$, și problema devine:
$F(a,b,c) = 2^k[(a+b+c)^k - a^k - b^k - c^k]$ trebuie să se dividă cu produsul $(a+b)(a+c)(b+c)$. Folosind Bézout, dacă: $a = -b$ avem că $F(-b,b,c) = 0$ deci F se divide cu a+b. La fel găsim și că $F(-c,b,c) = 0$, deci F se divide cu a+c și $F(a,-c,c) = 0$, deci F se divide cu b+c. În final avem că F(a,b,c) se divide cu (a+b)(a+c)(b+c).

L:566. **Fie ABC un triunghi oarecare de laturi *a , b , c* . Notăm cu** l_a,h_a **, bisectoarea , respectiv înălţimea corespunzătoare laturii *a=BC* , etc . Demonstraţi că** $\max\{\frac{l_a^2}{h_a^2},\frac{l_b^2}{h_b^2},\frac{l_c^2}{h_c^2}\}\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$.

Vasile Jiglău , Arad

Rezolvare: Putem presupune că $a\le b\le c$. Atunci $m(A)\le m(B)\le m(C)$ (1)

Să observăm ca în aceste condiții are loc : $\max\{\frac{l_a}{h_a},\frac{l_b}{h_b},\frac{l_c}{h_c}\}=\frac{l_b}{h_b}$ (2)

Într-adevăr , este cunoscut faptul că într-un triunghi arbitrar are loc $\frac{h_a}{l_a}=\cos\frac{B-C}{2}$;

De aici rezultă că $\frac{l_b}{h_b} \geq \frac{l_c}{h_c} \Leftrightarrow \cos\frac{B-A}{2} \geq \cos\frac{C-A}{2} \Leftrightarrow m(C) \geq m(B)$ - adevarată , conform (1) .

Asemănător $\frac{l_b}{h_b} \geq \frac{l_a}{h_a}$ În condițiile de mai sus , avem de demonstrat că :

$$\frac{l_b^2}{h_b^2} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \Leftrightarrow \frac{b^2}{4S^2}\cdot\frac{4acp(p-b)}{(a+c)^2} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \Leftrightarrow$$

$$(ab+bc+ca)ab^2c \geq (a^2+b^2+c^2)(a+c)^2(p-a)(p-c)$$

$$4(ab+bc+ca)ab^2c \geq (a^2+b^2+c^2)(a+c)^2(b^2-(c-a)^2)$$

$$\Leftrightarrow (c+a)^2(c-a)^2(a^2+b^2+c^2)+4ab^2c(ab+bc+ca) \geq b^2(a+c)^2(a^2+b^2+c^2) \qquad (3)$$

Din (1) rezultă că există *m, n* numere reale pozitive astfel încât *b=a+m , c=a+m+n* .

Înlocuind , prima parte a lui (3) devine , după efectuarea operațiilor :

$$12a^6+52a^5m+20a^5n+100a^4m^2+92a^4mn+20a^4n^2+100a^3m^3+160a^3m^2n+88a^3mn^2+20a^3n^3+55a^2m^4$$

$$+136a^2m^3n+134a^2m^2n^2+68a^2mn^3+15a^2n^4+16am^5+58am^4n+88am^3n^2+72am^2n^3+32amn^4+6an^5+$$

$$+2m^6+10m^5n+21m^4n^2+24m^3n^3+16m^2n^4+6mn^5+n^6$$ iar a doua :

$$12a^6+52a^5m+20a^5n+95a^4m^2+78a^4mn+15a^4n^2+94a^3m^3+122a^3m^2n+50a^3mn^2+6a^3n^3$$

$$+53a^2m^4+96a^2m^3n+62a^2m^2n^2+16a^2mn^3+a^2n^4+16am^5+38am^4n+34am^3n^2+14am^2n^3$$

$$+2amn^4+2m^6+6m^5n+7m^4n^2+4m^3n^3+m^2n^4$$

Din compararea coeficienților polinoamelor de mai sus rezultă imediat că prima parte a lui (5) e mai mare sau egală cu cea de-a doua , deci (3) e adevărată , astfel că și inegalitatea din enunț e adevărată . Egalitatea se realizează pentru cazul în care *m=n=0* , deci pentru cazul triunghiului echilateral .

Comentariu : problema propusă clarifică raportul dintre inegalitățile cunoscute $\frac{R}{2r} \geq \frac{l_b^2}{h_b^2}$ și $\frac{R}{2r} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$, care apare în GMB nr 3/1990 .

▪ Clasa a X-a

$\boxed{\text{L:567}}$. **Să se rezolve ecuația** $11+\log_2\frac{x}{x^4+48} = x+\frac{4}{\sqrt[4]{x-1}}$. **Marin Chirciu**, Pitești

Rezolvare:

Condițiile de existență impun $x\rangle 1$. Folosind inegalitatea mediilor se obține:

$$x^4+48 = x^4+16+16+16 \geq 4\sqrt[4]{x^4\cdot16\cdot16\cdot16} = 4\cdot x\cdot2\cdot2\cdot2 = 32x \Rightarrow$$

$$\frac{x}{x^4+48} \leq \frac{1}{32} \Rightarrow \log_2\frac{x}{x^4+48} \leq \log_2\frac{1}{32} = -5 \Rightarrow 11+\log_2\frac{x}{x^4+48} \leq 6. \ (1)$$

$$x+\frac{4}{\sqrt[4]{x-1}} = x-1+\frac{4}{\sqrt[4]{x-1}}+1 = t^4+\frac{1}{t}+\frac{1}{t}+\frac{1}{t}+\frac{1}{t}+1 \geq 5\sqrt[5]{t^4\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t}}+1 = 6 \ \ (2).$$

Din (1) și (2) rezultă că avem egalitate în enunț dacă și numai dacă x= 2; 2 este soluția unică.

$\boxed{\text{L:568}}$. **Rezolvaţi în $\mathbb{R}^+$ ecuaţia:**

$$(14^x-11^x)(61^x-50^x)(60^x-30^x)+(103^x-100^x)(14^x-3^x)(62^x-31^x) = 2013^x.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Observăm că $x=1$ este soluţia ecuaţiei.Vom arăta ca ecuaţia are soluţie unică.
Deoarece toate cantităţile sunt pozitive pentru $x>0$, împărţim prin $2013^x=(3\cdot 11\cdot 61)^x$ şi obţinem ecuaţia echivalentă: $\left(\left(\frac{14}{11}\right)^x-1^x\right)\left(1^x-\left(\frac{50}{61}\right)^x\right)(20^x-1^x)+\left(\left(\frac{103}{61}\right)^x-\left(\frac{100}{61}\right)^x\right)\left(\left(\frac{14}{3}\right)^x-1^x\right)(2^x-1^x)=1$.

Deoarece, cei doi termeni din membrul stâng sunt funcţii strict crescătoare (dacă $a>b\ge 1$ atunci funcţia a^x-b^x este strict crescătoare şi produsul unor funcţii pozitive strict crescătoare este de asemeni strict crescătoare pe $[0,\infty)$ şi suma unor funcţii pozitive strict crescătoare este de asemeni strict crescătoare pe $[0,\infty)$, rezultă că soluţia $x=1$ este unică.□

L:569. **Rezolvați în R ecuațiile:**

a) $10\cdot\left(4^{\log_{2017}x}+25^{\log_{2017}x}\right)=29\cdot 10^{\log_{2017}x}$; b) $\sqrt{\frac{x-7}{x+8}}+\sqrt{\frac{x+8}{x-7}}=\frac{17}{4}$.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

Rezolvare:

a) Se impune $x\rangle 0$, și notația $\log_{2017}x=t$. Ecuația dată devine: $10\cdot 4^t-29\cdot 10^t+10\cdot 25^t=0$, împărțim prin 25^t și notăm $\left(\frac{2}{5}\right)^t=y>0$ de unde $t_1=1$, $t_2=-1$ și $x_1=2017$, $x_2=\frac{1}{2017}$

b) $x\in(-\infty;-8)\cup(7;+\infty)$, Notăm $\sqrt{\frac{x-7}{x+8}}=y>0$ de unde $y_1=4$, $y_2=\frac{1}{4}$ și $x_1=-9$ și $x_2=8$.

L:570. **Fie** $x=\log_3 5+\log_5 7+\log_7 3$. **Să se calculeze [x].** **Petre Rău**, Galați

Rezolvare: Aplicând inegalitatea mediilor, rezultă că $x=\log_3 5+\log_5 7+\log_7 3=\frac{\ln 5}{\ln 3}+\frac{\ln 7}{\ln 5}+\frac{\ln 3}{\ln 7}\ge 3\sqrt[3]{\frac{\ln 5}{\ln 3}\cdot\frac{\ln 7}{\ln 5}\cdot\frac{\ln 3}{\ln 7}}\ge 3$. Dar $\log_3 5<\log_3\sqrt{27}=\frac{3}{2}$, $\log_5 7<\log_5\sqrt{5^3}=\frac{3}{2}$, $\log_7 3<\log_7\sqrt[5]{7^3}=\frac{3}{5}$. Așadar, $x<\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{5}=\frac{18}{5}<4$. Cum $3\le x<4$, rezultă $[x]=3$.

L:571. **Să se rezolve în** $\mathbb{R}_+$ **ecuația** $\frac{4^x}{\log_2(x+1)}+\frac{25^x}{\log_5(x+1)}=\frac{10^x}{\lg(x+1)}$. **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: Ecuația dată este echivalentă cu $4^x\lg 2+25^x\lg 5=10^x\,\big|:25^x\Rightarrow\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}\lg 2-\left(\frac{2}{5}\right)^x+\lg 5=0$.

Notăm cu $\left(\frac{2}{5}\right)^x=t\rangle 0$, rezultă ecuația $\lg 2\cdot t^2-t+\lg 5=0$ cu soluțiile $t_1=1\Rightarrow x_1=0$;

și $t_2=\frac{\lg 5}{\lg 2}\Rightarrow x_2=\log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{\lg 5}{\lg 2}\right)$.

L:572. **Fie** $a,b,c>0$ **astfel astfel incat** $a+b+c=3$. **Aratati ca are loc inegalitatea:**

$$\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2b+b^2c+c^2a}+n\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\ge 3+n,\qquad \textbf{unde } 0\le n\le 2.$$

Florin Stănescu, Găești, Dâmbovița

Rezolvare:

Pentru început vom arăta că dacă $a,b,c>0$ astfel astfel încat $a+b+c=3$, atunci $a^2+b^2+c^2\ge a^2b+b^2c+c^2a$. Astfel, $3\left(a^2+b^2+c^2\right)=a^2(3-c)+b^2(3-a)+c^2(3-b)+$
$+ab^2+bc^2+ca^2=a^2(a+b)+b^2(b+c)+c^2(c+a)+ab^2+bc^2+ca^2=a^3+$

$+ab^2+bc^2+ca^2=a^2(a+b)+b^2(b+c)+c^2(c+a)+ab^2+bc^2+ca^2=a^3+$
$b^3+c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2=(a^3+a^2b+ab^2)+(b^3+b^2c+bc^2)+$
$(c^3+c^2a+ca^2)\underset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{a^3\cdot a^2b\cdot ab^2}+3\sqrt[3]{b^3\cdot b^2c\cdot bc^2}+3\sqrt[3]{c^3\cdot c^2a\cdot ca^2}=3(a^2b+b^2c+c^2a)$, de unde $a^2+b^2+c^2\geq a^2b+b^2c+c^2a.$ Acum, revenind la enunț,

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2b+b^2c+c^2a}+n\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2+b^2+c^2}+n\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}=$$

$a^2+b^2+c^2+n\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$, deci este suficient să arătăm că $a^2+b^2+c^2+n\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\geq n+3$.

Notăm, $t=a^2+b^2+c^2\Rightarrow ab+bc+ca=\frac{9-t}{2}$. Astfel, $a^2+b^2+c^2+n\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\geq n+3$

$$\Leftrightarrow t+n\cdot\frac{9-t}{2t}\geq 3+n\Leftrightarrow 2t^2+9n-nt\geq 6t+2nt\Leftrightarrow 2t^2-3t(n+2)+9n\geq 0\Leftrightarrow(t-3)(2t-3n)\geq 0.$$

Ultima inegalitate este adevărată deoarece $9=(a+b+c)^2\leq 3(a^2+b^2+c^2)\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq 3$, iar $2t\geq 6\geq 3n\Leftrightarrow 0\leq n\leq 2$.

L:573. **Dacă a, b, c > 1 și n$\in N^*$, să se arate că** $\log_a\frac{b^{n+1}+c^{n+1}}{b^2+c^2}+\log_b\frac{c^{n+1}+a^{n+1}}{c^2+a^2}+\log_c\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^2+b^2}\geq 3n-3.$

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Vom stabili mai întâi următoarea inegalitate:

Dacă a, b, c > 0, și n$\in N^*$, atunci: $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^2+b^2}\geq\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)^{n-1}$.

Demonstrație. Pentru n = 1, inegalitatea este evidentă. Fie $n\in N, n\geq 2$.

In inegalitatea lui Hölder, pentru două perechi de numere reale pozitive,

$x_1=\frac{a^2}{a^{\frac{n-1}{n}}}, x_2=\frac{b^2}{b^{\frac{n-1}{n}}}; y_1=a^{\frac{n-1}{n}}, y_2=b^{\frac{n-1}{n}}, p=n, q=\frac{n}{n-1}$, avem:

$$\left[\left(\frac{a^2}{a^{\frac{n-1}{n}}}\right)^n+\left(\frac{b^2}{b^{\frac{n-1}{n}}}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}\left[\left(a^{\frac{n-1}{n}}\right)^{\frac{n}{n-1}}+\left(b^{\frac{n-1}{n}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right]^{\frac{n-1}{n}}\geq\frac{a^2}{a^{\frac{n-1}{n}}}\cdot a^{\frac{n-1}{n}}+\frac{b^2}{b^{\frac{n-1}{n}}}\cdot b^{\frac{n-1}{n}}\Leftrightarrow$$

$$\left(a^{n+1}+b^{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}(a+b)^{\frac{n-1}{n}}\geq a^2+b^2\Rightarrow\left(a^{n+1}+b^{n+1}\right)(a+b)^{n-1}\geq\left(a^2+b^2\right)^n\Leftrightarrow\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^2+b^2}\geq\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)^{n-1}.$$

Scriem relațiile analoage, aplicăm logaritmul în bazele supraunitare c, b, a, și prin adunarea lor, avem: $\sum\log_c\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^2+b^2}\geq\sum\log_c\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)^{n-1}=(n-1)\sum\log_c\frac{a^2+b^2}{a+b}\geq(n-1)\sum\log_c\sqrt{ab}=$

$$=\frac{n-1}{2}\sum\log_c ab=\frac{n-1}{2}\sum(\log_c a+\log_c b)\geq\frac{n-1}{2}\cdot 6=3n-3.$$

În ultimele trei inegalități s-au aplicat inegalitățile:

$\frac{x^2+y^2}{x+y}\geq\sqrt{xy}; x,y>0,\quad \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2; x,y>0.$

L:574. **Arătați că în orice triunghi nedreptunghic** ABC **avem:** $\frac{1}{2+tg^2A}+\frac{1}{2+tg^2B}+\frac{1}{2+tg^2C}>\frac{1}{2}$**.**

Neculai Stanciu, Buzău și **Titu Zvonaru,** Comănești

Rezolvare: Notând $x = tgA, y = tgB, z = tgC$, inegalitatea dată devine:

$$\frac{1}{2+x^2}+\frac{1}{2+y^2}+\frac{1}{2+z^2}\ge\frac{1}{2}.$$

Eliminând numitorii și ținând cont de faptul că $x+y+z=xyz$, inegalitatea este ehivalentă succesiv cu

$$16+4x^2+4y^2+4z^2\ge x^2y^2z^2 \Leftrightarrow 16+4(x^2+y^2+z^2)\ge(x+y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow 16+3(x^2+y^2+z^2)-2(xy+yz+zx)\ge 0 \Leftrightarrow 16+x^2+y^2+z^2+(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0,$$

adevărată.

Inegalitatea este strictă. Egalitatea are loc dacă triunghiul ABC este degenerat, adică două dintre unghiuri sale sunt drepte și unul este nul.

L:575. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $8\sin x\cdot\cos^2 x=\sqrt{5}$ și să se arate că ecuația are o infinitate de soluții $x = n^0$, cu $n\in\mathbb{N}$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Evident $\sin x\rangle 0\Rightarrow x\in\left(2k\pi;(2k+1)\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}$. Ecuația dată este echivalentă cu $4\sin 2x\cdot\cos x=\sqrt{5}$.

Dacă $x\in\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \pi+2k\pi\right)\Rightarrow \cos x\langle 0$ și $\sin 2x = 2\sin x\cos x\langle 0$, deci $\sin 2x\cdot\cos x\rangle 0$. Domeniul de existență al soluțiilor reale ale ecuației este $D=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(2k\pi;\ (2k+1)\pi\right)\setminus\left(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}\right)\subset\mathbb{R}$

Dacă ecuația inițială o scriem ca $2\sin 2x\cos x=\frac{\sqrt{5}}{2}\Rightarrow \sin 3x+\sin x=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Sau mai departe putem scrie $8\sin^3 x-8\sin x+\sqrt{5}=0$. Notând $y=2\sin x\in\left(0;\ 2\right)$ și ecuația devine $y^3-4y+\sqrt{5}=0\Rightarrow$

$y^3+\left(\sqrt{5}\right)^3-4(y+\sqrt{5})=0\Rightarrow(y+\sqrt{5})\left(y^2-y\sqrt{5}+1\right)=0\Rightarrow\ y^2-y\sqrt{5}+1=0$ cu soluțiile:

$y_{1,2}=\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}\in\left(0;2\right)$. Cum $y=2\sin x\Rightarrow\ S_1=\left\{(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{4}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$,

$S_2=\left\{(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{5}+1}{4}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$. Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației este $S=S_1\cup S_2$.

Pentru a demonstra existența infinității soluțiilor ecuației de tipul $x=n^0$, cu $n\in\mathbb{N}$, vom considera cazurile pentru k par și impar după ce scriem $S_1=\left\{(-1)^k\cdot 18^0+180^0\cdot k\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$ și

$S_2=\left\{(-1)^k\cdot 54^0+180^0\cdot k\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

S-a folosit faptul că $\cos\frac{\pi}{5}=\cos 36^0=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\Rightarrow$

$\cos 72^0=2\cos^2 36^0-1=2\cdot\frac{6+2\sqrt{5}}{16}-1=\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\sin 18^0\Rightarrow\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{4}=18^0$, iar

$\arcsin\frac{\sqrt{5}+1}{4}=\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{\sqrt{5}+1}{4}=90^0-36^0=54^0.$

Pentru k par: $k=2m\in\mathbb{N}\Rightarrow x_1=18^0+180^0\cdot 2m=(20m+1)\cdot 18^0$, și

$x_2=54^0+180^0\cdot 2m=(20m+3)\cdot 18^0$, cu m natural;

Pentru k impar: $k=2m+1\in\mathbb{N}\Rightarrow x_1'=-18^0+180^0+180^0\cdot 2m=(20m+9)\cdot 18^0$, iar

$x_2'=-54^0+180^0+180^0\cdot 2m=(20m+7)\cdot 18^0$, cu m natural;

L:576. a) Să se determine $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$ **pentru care** $(1+x+nx)(1+x)^{n-1} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ **și pentru orice** $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

b) Calculați suma: $S = 1 - 2\cdot 2C_n^1 + 3\cdot 2^2 C_n^2 - 4\cdot 2^3 C_n^3 + ... + (-1)^n (n+1) 2^n C_n^n$ **.**

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

a) Fie $f(x) = (1+x+nx)(1+x)^{n-1} = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1}$. Folosind binomul lui Newton, membrul stâng se scrie restrâns astfel: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k + \sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k = \sum_{k=0}^{n} (k+1) C_n^k x^k$ și identificând cu membrul drept se găsesc coeficienții $a_k = (k+1)C_n^k \in \mathbb{N},\ \forall k = \overline{0,n}.$

b) Din a) rezultă $1 + \cdot 2C_n^1 x + 3C_n^2 x^2 + ... + (n+1)C_n^n x^n = (1+x+nx)(1+x)^{n-1}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$

Pentru x= - 2 se obține $S = (-1)^n (2n+1),\ \forall n \in \mathbb{N}.$

▪ Clasa a XI-a

L:577. a) Dovediți inegalitățile: $\cos\frac{3\pi}{16} \rangle \frac{3}{4};\ \cos\frac{21\pi}{100} \langle \frac{7}{8};$

b) Rezolvați în $\mathbb{N}^*$ **ecuația** $\sin\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}+\sqrt{2}}{4}.$

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

a) Cum $0 \langle \frac{3\pi}{16} \langle \frac{3\pi}{15} \langle \frac{\pi}{2}$ și funcția cosinus e descrescătoare pe $\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos\frac{3\pi}{16} \rangle \cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \rangle \frac{3}{4}.$

b) Cu formula $\sin a + \cos a = \sqrt{2}\cdot\cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$, ecuația devine: $4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{n} + \sqrt{2} \Big| \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$

$8\cos\left(\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{x} + 2,\ (*)$, unde s-a notat 2n cu x; Evident, x trebuie să un număr par din mulțimea $[4;36]$; Fie $f:[4;36] \to \mathbb{R},\ f(x) = 8\cos\left(\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{x} - 2$ derivabilă cu derivata

$f^{I}(x) = \frac{8\pi}{x^2}\sin\left(\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{x}} \langle 0 \Rightarrow$ f este strict descrescătoare pe $[4;36]$. Cum $f(4)\cdot f(36) \langle 0 \Rightarrow \exists x_0 \in [4;36]$ unic , astfel încât $f(x_0) = 0$ (conform Proprietății lui Darboux). Se găsește x = 20 adică n= 10.

L:578. Rezolvați ecuația $3^{\frac{3(1-x)}{2}} \cdot x = 1$.

Marin Chirciu, Pitești

Rezolvare: Evident x trebuie să fie pozitiv. Ecuația dată este echivalentă cu $\frac{3^{\frac{3(x-1)}{2}}}{x} = 1$. Fie funcția $f:(0;\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{3^{\frac{3(x-1)}{2}}}{x}$ având derivata $f^{I}(x) = \frac{3^{\frac{3(x-1)}{2}}\left(\frac{3x}{2}\ln 3 - 1\right)}{x^2}$. Cum $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \lim_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}} f(x) = \infty,$ din tabelul de variație al funcției se observă că ecuația f(x)=1 are cel mult două soluții. Acestea sunt $x_1=\frac{1}{3}\in\left(0;\frac{2}{3\ln 3}\right)$ și $x_2=1\in\left(\frac{2}{3\ln 3},\infty\right)$.

L:579. **Determinaţi funcţiile continue $f:R\to R$ pentru care** $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)(x^2+xy+y^2),\forall x,y\in R.$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Rezolvare. Înmulţim relaţia dată cu 5 şi aceasta devine:

$$5f(x+y)=5f(x)+5f(y)+5xy(x^3+2x^2y+2xy^2+y^3)\Leftrightarrow$$
$$5f(x+y)=5f(x)+5f(y)+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4\Leftrightarrow$$
$$5f(x+y)=5f(x)+5f(y)+(x+y)^5-x^5-y^5\Leftrightarrow 5f(x+y)-(x+y)^5+5f(x)-x^5+5f(y)-y^5.$$

Notăm $g(x)=5f(x)-x^5, g:R\to R$ şi atunci ultima relaţie devine:

$g(x+y)=g(x)+g(y),\forall x,y\in R$ (ecuaţia funcţională Cauchy)

Cum funcţia f este continuă rezultă că şi funcţia g continuă şi cum g verifică ecuaţia de mai sus, atunci $g(x)=ax, a\in R^*$. Funcţia dată este $f(x)=\frac{ax+x^5}{5}, a\in R^*$.

L:580. **Dacă $a_i\in\mathbb{R}$, $i\in\{1,2,...,n\}$, atunci să se demonstreze că şirul $x_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2e^{a_i}}{a_i^2+e^{a_i}}$ este mărginit.**

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Cu inegalitatea MH-MG avem $\frac{2a_i^2e^{a_i}}{a_i^2+e^{a_i}}\le\sqrt{a_i^2e^{a_i}}$, $i=\overline{1,n}$, (1).

Considerăm funcţia $f:R\to R, f(x)=x^2e^x$. Deoarece,

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{-x}}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=0,$$ rezultă că $y=0$ este asimptotă orizontală la $-\infty$.

Funcţia f este continuă şi derivabilă deoarece este produs de funcţii elementare continue şi derivabile. Avem $f'(x)=e^x(2x+x^2)$ şi $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ sau $x=-2$. Rezultă următorul tabel de variaţie

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		+++++++++++++++++	0	----------------------	0	++++++++++++++++++++++++++++	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Deducem că f are un maxim absolut egal cu $\frac{4}{e^2}$. Deci, $x^2e^x\le\frac{4}{e^2}\Leftrightarrow\sqrt{x^2e^x}\le\frac{2}{e}$, $\forall x\in R$, (2).

Din (1) şi (2) obţinem $\frac{2a_i^2e^{a_i}}{a_i^2+e^{a_i}}\le\frac{2}{e}$, care sumate pentru $i=\overline{1,n}$ conduc la

$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2e^{a_i}}{a_i^2+e^{a_i}}\le\frac{n}{e}\Leftrightarrow x_n\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$, i.e. concluzia dorită.

L:581. **Pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$, să se calculeze $\lim_{x\to\infty}\frac{\left(3x+\sqrt{x^2-2}\right)^n+\left(3x-\sqrt{x^2-2}\right)^n}{x^n}$;**

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare:

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+x\sqrt{1-\frac{2}{x^2}})^n+(3x-x\sqrt{1-\frac{2}{x^2}})^n}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^n}\cdot\left[(3+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}})^n+(3-\sqrt{1-\frac{2}{x^2}})^n\right]}{\cancel{x^n}}=4^n+2^n.$$

$\boxed{\text{L:582}}$. **Fie A o matrice pătratică de ordinul 2 cu proprietățile** $\det(A+3I_2)=4$ **și** $\det(A-2I_2)=9$. **Să se calculeze** $(A+I_2)^{2018}$. **Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare:

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})\Rightarrow\ A+3I_2=\begin{pmatrix} a+3 & b\\ c & d+3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A+3I_2)=4\Leftrightarrow(a+3)d+3)-bc=4$.

$A-2I_2=\begin{pmatrix} a-2 & b\\ c & d-2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A-2I_2)=9\Leftrightarrow(a-2)(d-2)-bc=9$. Scăzând ultimele două relații se obține că $a+d=-2$ și $ad-bc=1$. Din relația $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=O_2$ se obține prin înlocuire că $A^2+2A+I_2=O_2\Leftrightarrow(A+I_2)^2=O_2\Rightarrow\left(A+I_2\right)^{2018}=O_2$.

▪ Clasa a XII-a

$\boxed{\text{L:583}}$. **Să se determine primitivele funcției:** $f:(0;\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{tgx}{1+\cos^3 x}$.

Marin Chirciu, Pitești

Rezolvare : $\int f(x)dx=\int\frac{\sin x}{\cos x(1+\cos^3 x)}dx=\int\frac{1}{\cos x(1+\cos^3 x)}\cdot(-\cos x)^I dx=$

$=\int\cos^2 x\cdot(\frac{1}{\cos^3 x}-\frac{1}{1+\cos^3 x})\cdot(-cosx)^I dx=$

$-\int\frac{(\cos x)^I}{\cos x}dx+\int\frac{\cos^2 x}{1+\cos^3 x}(\cos x)^I dx=-\ln(\cos x)+\frac{1}{3}\ln(1+\cos^3 x)+C$.

$\boxed{\text{L:584}}$. **Să se calculeze integrala** $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{4\cdot(2x-1)^{2016}}{(2x+1)^{2018}}dx$. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

(dată la Concursul interjudețean "Laurențiu Panaitopol"- Giurgiu, 2017)

Rezolvare:

$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{4\cdot(2x-1)^{2016}}{(2x+1)^{2018}}dx=\int_{-1}^{0}t^{2016}dt=\frac{1}{2017}$. S-a folosit substituția $t=\frac{2x-1}{2x+1}\Rightarrow dt=\frac{4dx}{(2x+1)^2}$.

$\boxed{\text{L:585}}$. **Să se rezolve în** $\mathbb{C}$ **ecuațiile:** **a)** $64x^4-64x^3+8x+1=0$;
b) $x^4+8x^3+24x^2+32x-65092608=0$. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

a) $64x^4-64x^3+8x+1=0\Leftrightarrow 64x^4+16x^2+1-64x^3-16x^2+8x=0\Leftrightarrow(8x^2-4x-1)^2=0$.

Din $8x^2-4x-1=0\Rightarrow x\in\left\{\frac{1\pm\sqrt{3}}{4}\right\}$.

b) Se face substituția $x=2y$ rezultând $16y^4+64y^3+96y^2+64y-65092608=0\Leftrightarrow$

$(y+1)^4=4068289=2017^2\Leftrightarrow\ \left[(y+1)^2-2017\right]\cdot\left[(y+1)^2+2017\right]=0$ cu soluțiile

$y \in \left\{-1 \pm \sqrt{2017}, -1 \pm i\sqrt{2017}\right\}$, de unde, $x \in \left\{-2 \pm 2\sqrt{2017}, -2 \pm i\sqrt{2017}\right\}$.

L:586. Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației $x^3 - x - a = 0,\ a \in \mathbb{R}^*$, calculați suma

$S = \frac{1-x_1}{1+x_1} + \frac{1-x_2}{1+x_2} + \frac{1-x_3}{1+x_3}$. **Marin Chirciu**, Pitești

Rezolvare: Cu substituția $t = \frac{1-x}{1+x}$ suma căutată este $S = t_1 + t_2 + t_3$, unde t_1, t_2, t_3 sunt rădăcinile ecuației $at^3 + (3a-4)t^2 + (3a+4)t + a = 0$; Rezultă $S = \frac{4-3a}{a}$.

L:587. Să se arate că ecuația $x^{2n+1} + C_n^1 x^{2n-1} + C_n^2 x^{2n-3} + \ldots + C_n^{n-1} x^3 + 2C_n^n x + m = 0$ are cel puțin o rădăcină nulă, m fiind un parametru real.

Petre Rău, Galați

Rezolvare: Știm că $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2n+1} = 0$ **și** $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{2n+1} = -m$. Pentru $m \neq 0 \Rightarrow$ ecuația nu are rădăcini nule și poate fi scrisă de forma $x\left[\left(x^2+1\right)^n + 1\right] = -m.$ Atunci, cel puțin o rădăcină a ecuației date este pozitivă și cel puțin o rădăcină este negativă. Fie, de exemplu, x_1 rădăcina pozitivă iar x_2 rădăcina negativă. În acest caz din ecuația restrânsă, pentru x_1 pozitiv rezultă că m este negativ, iar din x_2 negativ rezultă că m este pozitiv. În concluzie rezultă că m=0, ceea ce înseamnă că ecuația dată are cel puțin o rădăcină nulă.

L:588. Dacă ecuația (1): $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ (unde $a, b, c, d, e \in R^*$) are rădacini reale distincte în progresie aritmetică, atunci, determinaţi rădăcinile ecuaţiei (2): $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d = 0$, în funcţie de rădăcinile ecuaţiei (1) şi arătaţi că sunt tot în progresie aritmetică.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, București și **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Fie x_1, x_2, x_3, x_4 soluţiile ecuaţiei $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$.

Din ipoteză rezultă $\frac{x_1 + x_4}{2} = \frac{x_2 + x_3}{2} \overset{(1)}{=} k$.

$f(x) = a\prod_{k=1}^{4}(x - x_k) = a(x^2 - 2kx + m)(x^2 - 2kx + n)$, unde am notat $m = x_1 x_4$ şi $n = x_2 x_3$. Deoarece $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d = f'(x)$ avem că ecuaţia (2) $f'(x) = 4a(x-k)(x^2 - 2kx + \frac{m+n}{2}) = 0$ are soluţiile: $y_1 = \frac{x_1 + x_4}{2} + \sqrt{x_1^2 + x_4^2 - 2x_2 x_4}$; $y_2 = \frac{x_1 + x_4}{2}$; $y_3 = \frac{x_1 + x_4}{2} - \sqrt{x_1^2 + x_4^2 - 2x_2 x_4}$.

Deoarece $\frac{y_1 + y_3}{2} = y_2$ rezultă că şi rădăcinile ecuaţiei (2) sunt în progresie aritmetică.

L:589. Fie $f, g, h : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos^4 x,\ g(x) = \sin^4 x,\ h(x) = 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x.$ Să se calculeze $\int [f(x) + g(x) - 3h(x)]dx$. **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: $f(x) + g(x) - 3h(x) = \cos^4 x + \sin^4 x - 6\sin^2 x\cos^2 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 8\sin^2 x\cos^2 x = $ $= 1 - 2\sin^2 2x = \cos 4x$. Atunci, $\int [f(x) + g(x) - 3h(x)]dx = \int \cos 4x dx = \frac{\sin 4x}{4} + C.$

L:590. Să se determine funcţia derivabilă $f: R \to R$ cu proprietatea că :

$f(x)=\sin x+\int_0^x e^{-t}f(x-t)dt, \forall x\in R$ **şi** $f(0)=0.$ **Gheorghe Ghiţă**, Buzău

Rezolvare : Cu schimbarea de variabilă $x-t=u,$ avem:

$$f(x)=\sin x-\int_x^0 e^{u-x}f(u)du, \forall x\in R \Leftrightarrow f(x)=\sin x+e^{-x}\int_0^x e^u f(u)du, \forall x\in R \Leftrightarrow e^x f(x)=e^x\sin x+\int_0^x e^u f(u)du, \forall x\in R.$$

Prin derivare, obţinem: $e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x+e^x f(x), \forall x\in R \Leftrightarrow f'(x)=\sin x+\cos x, \forall x\in R.$
Prin integrare, rezultă că $f(x)=\sin x-\cos x+C.$
Din condiţia $f(0)=0,$ rezultă $C=1,$ şi atunci funcţia cerută este $f(x)=\sin x-\cos x+1.$

L:591. **Să se calculeze** $\int e^x\cdot\frac{e^x\cos x+\sin^2 x}{(e^x+\sin x)^2}dx$ **,** $x\in R_+$**.** **Constantin Rusu**, Râmnicu Sărat

Rezolvare: $\int e^x\cdot\frac{e^x\cos x+\sin^2 x}{(e^x+\sin x)^2}dx=$

$$=\int e^x\cdot\frac{e^x\cos x+e^x\sin x+\sin^2 x+\sin x\cos x-e^x\sin x-\sin x\cos x}{(e^x+\sin x)^2}dx=$$

$$=\int\frac{e^x(\sin x+\cos x)(e^x+\sin x)-e^x\sin x(e^x+\cos x)}{(e^x+\sin x)^2}dx=$$

$$=\int\frac{(e^x\sin x)'(e^x+\sin x)-e^x\sin x(e^x+\sin x)'}{(e^x+\sin x)^2}dx=\int\left(\frac{e^x\sin x}{e^x+\sin x}\right)'dx=\frac{e^x\sin x}{e^x+\sin x}+C.$$

L:592. **Dacă** $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ **este o funcție integrabilă, arătați că are loc inegalitatea:**

$$\int_0^1\sqrt{f^4(x)+\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^4}\le\sqrt{2}\cdot\int_0^1 f^2(x)dx.$$

Florin Stănescu, Găești, Dâmbovița

Rezolvare: Dacă $x\ge 0,$ cu ajutorul inegalitatii *C-B-S,* putem scrie:

$$\left(1\cdot\sqrt{2x}+1\cdot\sqrt{1+x^2}\right)^2\le(1+1)\left[\sqrt{2x}^2+\sqrt{1+x^2}^2\right]=2\left(1+2x+x^2\right)=2(1+x)^2,$$ de unde ,

$$\sqrt{2x}+1\cdot\sqrt{1+x^2}\le\sqrt{2(1+x)^2}=\sqrt{2}(1+x)\Rightarrow\sqrt{x}+\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}\le x+1\Rightarrow\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}\le 1-\sqrt{x}+x.$$

Acum, înlocuind pe x cu x^2, rezultă $\sqrt{\frac{1+x^4}{2}}\le 1-x+x^2.$

Dacă $\int_0^1 f(x)dx=0,$ atunci inegalitatea din enunț este evidentă.

Presupunem că $\int_0^1 f(x)dx\ne 0.$ În ultima inegalitate, punând $\frac{f(x)}{\int_0^1 f(t)dt}$, în loc de $x,$ și apoi integrând inegalitatea rezultată, se obține cerința problemei.

„Oamenii pot fi făcuți să urmeze o cale de acțiune, dar se poate să nu fie făcuți și pentru a o înțelege.”
Confucius
(551- 479)

4. Probleme propuse

▪ Clasa a V-a

G:772. Punctul M aparţine segmentului $[AB]$ şi $[MB]$ este de 23 ori jumătatea treimii sfertului segmentului $[AB]$. A câta parte din $[AB]$ este $[AM]$?

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:773. Precupeața Ioana vinde în piață ouă. Ea reușește să vândă întreaga cantitate în 4 zile după cum urmează:
În prima zi vinde $\frac{2}{3}$ din cantitatea totală de ouă și $\frac{1}{3}$ dintr-un ou,
În a doua zi vinde $\frac{2}{3}$ din cantitatea rămasă după prima zi și $\frac{1}{3}$ dintr-un ou,
În a treia zi vinde $\frac{2}{3}$ din cantitatea rămasă după a doua zi și $\frac{1}{3}$ dintr-un ou,
În cea de-a patra zi vinde $\frac{2}{3}$ din cantitate după a treia zi și $\frac{1}{3}$ dintr-un ou ramânând astfel fără niciun ou după cele patru zile. Câte ouă a avut precupeața inițial?

Ramona- Carmen Grigore, Maria Boborel , Craiova

G:774. Determinați numărul natural $\overline{ab}$ știind că $\overline{aa}^2+\overline{aa}\times\left(\overline{ab}-b\right)+b=2018$.

Nicolae Ivășchescu , Canada

G:775. Fie numărul $x=2^{2018n+2}\cdot 5^{2018n+6}-7,\ n\in\mathbb{N}^*$. Să se afle n știind că: suma cifrelor numărului x este 36348.

IulianaTrașcă, Olt

G:776. Să se scrie numerele 38, 38^2, $38^n, n\in\mathbb{N}$ ca sumă de trei pătrate perfecte nenule și distincte.

Marin Chirciu, Pitești

G:777. Scrieți numărul 1035 ca diferență de două pătrate perfecte.

Diaconu Radu, Sibiu, Sclipirea Minții, 21/2018

G:778. Determinați valorile naturale ale lui n pentru care numărul $a=0,7+1,7+2,7+....+n,7$ este, de asemenea natural.

Marian Ciuperceanu , Craiova

G:779. Să se determine cifrele a şi b ştiind că în sistemul zecimal restul împărţirii numărului $\overline{aaaa}$ la $\overline{ba}$ este $\overline{ab}$.

Petre Rău, Galați

G:780. Determinați numerele prime p și q astfel încât p^4-q și p^4+q să fie de asemenea numere prime.

Lucian Tuțescu , Grigorie Dan – Lucian, Craiova

G:781. Arătaţi că numărul $N=\underbrace{111...1}_{2010\,\text{de}\,1}$ este compus.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

G:782. Să se arate că numărul $2^{3n+2}\cdot 3^{2n+1}+7^n$ este divizibil cu 13 pentru orice număr natural n.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

$\boxed{G:783}$. Determinați câtul și restul împărțirii numărului 7^{2018} la $8\cdot 7^{2015}$ **IulianaTrașcă,** Olt

$\boxed{G:784}$. Notăm cu A mulţimea numerelor de cinci cifre distincte formate cu elementele mulţimii $\{1,2,3,7,8\}$. Determinaţi $m\in A$ astfel încât $4m\in A$.(În legătură cu problema E:14596)

Titu Zvonaru, Comăneşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

$\boxed{G:785}$. a)Determinaţi cel mai mic număr natural de forma a^2+b^2 care are 25 de divizori cu proprietatea că a şi b sunt numere naturale, prime între ele.;

b) Determinaţi toate perechile (a,b) de numere naturale, prime între ele, astfel încât a^2+b^2 este cel mai mic număr care are 25 de divizori.

Marius Drăgan, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

$\boxed{G:786}$. Să se demonstreze că $10^{n+k}-10^n$ se poate scrie ca sumă a $18k$ pătrate perfecte nenule oricare ar fi n şi k numere naturale nenule.

Marius Drăgan, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

$\boxed{G:787}$. Să se arate că fracția $F=\dfrac{46391}{34289}$ este reductibilă.

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

▪ Clasa a VI-a

$\boxed{G:788}$. Aflaţi x, y, z, întregi, dacă $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{3}{y}=\dfrac{z}{x-1}$. **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

$\boxed{G:789}$. Găsiți cel mai mare și cel mai mic număr natural cu cifre diferite, astfel încât cifra miilor să fie7, iar produsul cifrelor din stânga lui 7 să fie maxim și egal cu produsul cifrelor din dreapta lui 7.

Petre Păunescu, Roșiorii de Vede, Teleorman

$\boxed{G:790}$. Să se arate că numărul m=4072324 este pătrat perfect iar numărul n=1357441 este compus.

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

$\boxed{G:791}$. Determinați câte regiuni determină 2019 dreptre coplanare, oricare două neparalele și oricare trei neconcurente.

Nicolae Ivășchescu, Canada

$\boxed{G:792}$. Rezolvați în numere întregi ecuația: $x+7xy=-11$.

Radu Diaconu, Sibiu

$\boxed{G:793}$. Determinați numerele naturale x, y și z știind că satisfac simultan condițiile:

1) $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{4}$; 2) $xyz=2xy+xz+5yz$; **Mircea Mario Stoica**, Arad

$\boxed{G:794}$. Fie $a,b,c\in\mathbb{N}$, pentru care există numerele prime între ele x și y cu $x+y=n$, unde $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $2na=xb+yc$. Arătați că $\dfrac{(2a-b)(c-2a)}{xy}\in\mathbb{N}$. **Marin Chirciu**, Pitești

$\boxed{G:795}$. Să se arate că pentru orice k natural, k≥1, numărul A = $9^k+19^k+29^k+\ldots+99^k$ se divide cu 540 atunci când k este impar și cu 30 atunci când k este par.

Petre Rău, Galați

$\boxed{G:796}$. Să se arate că oricare ar fi cifra nenulă x, numărul $A=2081^{\overline{2018x}}+8102^{\overline{x2081}}+2083^{\overline{x2091}}$ este divizibil cu zece.

IulianaTrașcă, Olt

$\boxed{G:797}$. Demonstrați că numărul $\underbrace{\overline{999...9}}_{2011de9}+\overline{1\underbrace{99...9}_{1005de9,}\underbrace{00...0}_{1005de0}}$ este compus.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

$\boxed{G:798}$. Să se determine numerele $\overline{abcd}$, ştiind că: $\dfrac{ab+ac+b}{2a+3}=\dfrac{ac+ad+2c}{3a+3}=\dfrac{ab+ad+b+2d}{4a^2+5a}$.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

G:799. Trei copii au împreună 410 lei. După ce fiecare cheltuie din banii proprii 75% , 80% respectiv 85%, atunci rămân cu sume egale de bani. Câți bani a avut fiecare la început?

Marian Ciuperceanu , Craiova

G:800. Stabiliţi paritatea numărului $A=(n+2011)(3n+5)(n+2018)+7^n$, unde $n\in\mathbb{N}$.

IulianaTrașcă, Olt

G:801. a) Fie k şi m numere naturale nenule. Arătaţi că dacă $A=(n_1+1)\cdot(n_2+1)\cdot\ldots\cdot(n_k+1)-1$ şi $B=(n_{k+1}+1)\cdot(n_{k+2}+1)\cdot\ldots\cdot(n_{k+m}+1)-1$, atunci $AB+A+B=(n_1+1)\cdot(n_2+1)\cdot\ldots\cdot(n_{k+m}+1)-1$.
b) Pe o tablă sunt scrise inversele numerelor 1, 2, 3,…, 2017. Alegem două dintre numerele de pe tablă, le ştergem şi în locul lor scriem numărul obţinut prin adunarea sumei lor cu produsul lor. Continuăm procedeul până când pe tablă rămâne un singur număr. Care este ultimul număr rămas pe tablă?

Marius Drăgan, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

G:802. Dacă două şiruri $a_1, a_2,..., a_{2013}$ şi $b_1, b_2,..., b_{2013}$ sunt construite după regulile :

(i) $a_1=1999$ şi $a_2=2003$;(ii) $b_1=2011$ şi $b_2=2017$;(iii) $\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{b_{n-1}+b_{n-2}}$ $(n>2)$ şi fiecare fracţie $\frac{a_n}{b_n}$ se consideră ireductibilă, atunci determinaţi cea mai mare şi cea mai mică fracţie de forma $\frac{a_n}{b_n}$.

Marius Drăgan, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

G:803. Să se arate că există o infinitate de fracții $\frac{x}{y}$ şi $\frac{z}{t}$ cu $x,y,z,t\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{x}{y}+\frac{z}{t}=\frac{x}{y}\cdot\frac{z}{t}$

Viorica Dogaru , Giurgiu

▪ Clasa a VI-a

G:804. Rezolvaţi, în R, ecuaţia $\frac{2x}{5}+\frac{2x+2}{7}+\frac{2x+6}{11}+\frac{2x+8}{13}=4$. **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

G:805. Fie $a,b>0$ astfel încât $a^3+b^3=2018ab$. Arătați că: $a+b\le 2018$.

Diaconu Radu, Sibiu,

G:806. Numerele reale strict pozitive $a_0, a_1, a_2,...$ verifică relaţia $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$, oricare ar fi numărul natural n. Să se demonstreze că a_{1985}, a_{1986},…, a_{2047} sunt mai mari decât 63.

Marius Drăgan, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

G:807. Să se arate că numărul 284^n se scrie ca o sumă de 8 pătrate perfecte pentru n număr impar şi ca o sumă de 64 de pătrate perfecte pentru n număr par.

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

G:808. Să se arate că pentru orice număr natulal n, numărul $\frac{81n^5}{40}-\frac{9n^3}{8}+\frac{n}{10}$ este natural.

Petre Rău, Galați

G:809. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $x^2+y^2-65x+21y+1166=0$.

Mircea Mario Stoica, Arad

G:810. Determinați câte numere naturale mai mici decât 999999 , se pot scrie în forma $n^4-4n^3+6n^2-4n$, unde $n\in N$. Care este cel mai mare dintre ele ? **Ionel Tudor** , Călugăreni , Giurgiu

G:811. Rezolvați ecuația $\sqrt{6-x\sqrt{5}}-\sqrt{7-2\sqrt{10}}=\sqrt{2}-1$. **Nicolae Ivășchescu**, Canada

G:812. Arătați că $\dfrac{\sqrt{2017\cdot 2018-\sqrt{2017\cdot 2018-\sqrt{2017\cdot 2018}}}}{\sqrt{2016\cdot 2017+\sqrt{2016\cdot 2017+\sqrt{2016\cdot 2017}}}}\rangle 1$.

Marian Ciuperceanu , Craiova

G:813. Să se calculeze partea întreagă a numărului: $\frac{\sqrt{7}}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\sqrt{12}}{2\cdot 3\cdot 4}+...+\frac{\sqrt{n^2+3}}{(n-1)n(n+1)}, n\in N, n\geq 2$.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

G:814. Aflaţi perimetrul triunghiului ΔABC , ştiind că $m(\sphericalangle A)=105^0,\ m(\sphericalangle B)=15^0,\ AC=2\sqrt{3}\ cm.$

Badea Daniela, Ploiești, Prahova

G:815. Determinați aria trapezului ABCD, cu $AB \parallel CD$, $AB=64\ cm, BC=40\ cm, CD=14\ cm$ și $DA=30\ cm$.

Marian Ciuperceanu , Craiova

G:816. Dacă un triunghi oarecare este asemenea cu triunghiul format de medianele sale atunci determinaţi raportul de asemănare.

Nela Ciceu, Roşiori, Bacău şi **Roxana Mihaela Stanciu,** Buzău

▪ Clasa a VIII-a

G:817. Rezolvați ecuația $5x^2+10y^2+10+14xy-10x-12y=0$. **Nicolae Ivășchescu**, Canada

G:818. Dacă x $\in \boldsymbol{R}$, rezolvaţi ecuaţia $3\cdot|2x+3|+[2x+3]=13$, unde $|x|$, respectiv, $[x]$ reprezintă modul din x respectiv partea întreagă a lui x. **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

G:819. Știind că inegalitatea $1895x(x^2-4)+1004(x-2)\geq 0$, este adevărată, atunci să se arate că dacă $a,b>0$, atunci are loc inegalitatea $1895\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)\geq 891\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+2008$. **Gheorghe Ghiţă,** Buzău

G:820. Determinaţi toate tripletele de numere reale nenule (a,b,c), care verifică relaţiile:

$a-\left(\frac{b}{c}\right)^2=b-\left(\frac{c}{a}\right)^2=c-\left(\frac{a}{b}\right)^2=1$. **Marius Drăgan**, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

G:821. Pentru ce valori naturale ale lui a expresia $E=a^{1010}-a^{1009}+a^2-a$ se divide cu 2018 ?

Petre Rău, Galați

G:822. Cu formule de calcul prescurtat, descompuneți în factori:

$A=\frac{2ab+3cd}{6}+\sqrt{\frac{2abcd}{3}}-1,\ a,b,c,d\rangle 0$, reale. **Petre Păunescu**, Roșiorii de Vede, Teleorman

G:823. a) Să se arate că există numerele naturale nenule x și y, cu $x>y$ astfel încât $x^2-y^2=(k+1)^3-k^3, \forall k\in\mathbb{N}^*$ și deduceți suma $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{6},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) Determinați $n\in\mathbb{N}^*$, pentru care $\frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{1+2+3+...+n}$, este număr natural.

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

G:824. Fie $x, y\rangle 0$ și $x^3+y^3=x-y$. Să se arate că: $x\cdot y\langle 1$ și $x^2+y^2\langle 1$.

Alina Tigae, **Simona Miu** , Craiova

G:825. Să se arate că:

i) $\frac{a+1}{2}\geq\frac{a(a^2+1)}{a^3+1}$, $\forall a>0$; ii) $\frac{a+1}{2}\leq\frac{a^3+1}{a^2+1}$, $\forall a>0$; iii) $\frac{a^3+1}{a^2+1}\geq\sqrt{a^2-a+1}\geq\sqrt[4]{\frac{a^4+1}{2}}$, $\forall a>0$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

G:826. Dacă $x, y\geq 0$ și $x^3+y^3+(x+y)^3+18(x+y)+27xy=1620,$ calculați $x+y.$

Marin Chirciu, Pitești

G:827. Rezolvați, în numere reale, inecuația: $x^4-2x^3-x+2\ \langle\ 0$.

Marian Ciuperceanu , Craiova

G:828. Să se demonstreze că $\frac{a+1}{2}\leq\frac{a^3+1}{a^2+1}, \forall a>0$.

Nela Ciceu, Roşiori, Bacău şi **Roxana Mihaela Stanciu,** Buzău

G:829. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, notăm $AB=a, BC=b, AA'=c.$ Știind că latura c verifică ecuația $4x^3-5x-2=0$, arătați că: $\frac{S[BDD']}{\sqrt{S[ABCD]}}\geq\frac{1+\sqrt{17}}{4\sqrt{2}}$, unde $S[BDD']$ este aria triunghiului BDD', iar $S[ABCD]$ este aria dreptunghiului $ABCD.$ **Radu Diaconu**, Sibiu

▪ Clasa a IX-a

L:593. Fie m un parametru întreg astfel încât ecuaţia $x^2-mx+m+2010=0$ are o rădăcină număr întreg. Rezolvaţi ecuaţia şi determinaţi parametrul m.

Nela Ciceu, Roşiori, Bacău şi **Roxana Mihaela Stanciu,** Buzău

L:594. Să se demonstreze că $(pq-1)^2\geq 16(p-1)(q-1)$, oricare ar fi $p,q\geq 3$.

Neculai Stanciu, Buzău, şi **Titu Zvonaru,** Comăneşti.

L:595. Să se determine cel mai mare număr întreg a, așa încât ecuația $x^3-4x^2+(4-a)x+2a=0$ să aibă o rădăcină întreagă și celelalte nereale. **Petre Rău,** Galați

L:596. Să se arate că: $\frac{1^4+2^4+3^4+....+n^4}{n}\geq\left(\frac{n+1}{2}\right)^4$, $\forall n\geq 1.$ **Ionel Tudor** , Călugăreni , Giurgiu

L:597. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică crescătoare cu termenii pozitivi. Demonstrați că $b_{2n}-b_1\geq(2n-1)(b_{n+1}-b_n), \forall n\in\mathbb{N}^*.$ **Marin Chirciu**,Pitești

L:598. Fie funcția f:R→R care verifică relația $\frac{1}{2}$f(x)+$\frac{1}{3}$f(2018-x)= $\frac{5}{2018}x+\frac{5}{2}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$. Arătați că f(x)+f(2018-x)=12 oricare ar fi x∈R . Determinați funcția f.

Constantin Dinu, Buzău

L:599. În triunghiul ABC, se dau $a+b=2\sqrt{2}$, $b\geq c$ și $m(\hat{A})=162^\circ$. Să se arate că: $S<\frac{2\sqrt[4]{2}}{15}$, notațiile fiind cele cunoscute într-un triunghi. **Emil C. Popa, Radu Diaconu,** Sibiu

L:600. Să se rezolve ecuaţia: $2n\{x\}^2-n^2x+1=0, n\in N^*$. **Gheorghe Ghiţă,** Buzău

L:601. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale nenule sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2y}=2(x^2+y^2) \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2y}=y^2-x^2 \end{cases}$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

L:601. Fie $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir de numere reale în progresie geometrică de raţie q diferit de 1, atunci demonstraţi egalitatea:

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \sum_{k=1}^{n} b_{k+1}}+\frac{q}{\sum_{k=1}^{n} b_{k+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} b_{k+2}}+\frac{q^2}{\sum_{k=1}^{n} b_{k+2} \cdot \sum_{k=1}^{n} b_{k+3}}+\ldots+\frac{q^i}{\sum_{k=1}^{n} b_{k+i} \cdot \sum_{k=1}^{n} b_{k+i+1}}=$$

$$=\frac{q^{i+1}-1}{q-1}\cdot\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \sum_{k=1}^{n} b_{k+i+1}}, \forall n\in N^*, \forall i \in N.$$

Constantin Ciobîcă , Fălticeni, Suceava

L:602. Fie ABC un triunghi oarecare , w_a lungimea bisectoarei interioare corespunzătoare laturii *a=BC* a triunghiului dat , etc. Demonstraţi că : $\frac{a}{w_a}+\frac{b}{w_b}+\frac{c}{w_c}\geq 2\sqrt{3}\,\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$.

Vasile Jiglău , Arad

L:603. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Pe ipotenuza $[BC]$ considerăm punctul D astfel încât $\frac{CD}{DB}=\frac{3}{2}$. Ştiind că $m(\sphericalangle CDA)=45^0$, să se demonstreze că $AB=2\cdot AC$.

Titu Zvonaru, Comăneşti

▪ Clasa a X-a

L:604. Folosind eventual identitatea $x^3-19x+30=(x-3)(x-2)(x+5)$ rezolvați ecuațiile

a) $3^{3x}-19\cdot 3^x+30=0$; b) $\lg^3 x-19\lg x+30=0$.

Constantin Dinu, Buzău

L:605. Să se arate că ecuația $\log_{16}\left(\frac{x^2}{2}+2\right)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2}$ nu are soluții reale.

Adrian Stan, Buzău

L:606. **Dacă** $a,b,z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ atunci,

$|z_1-z_2|\cdot|az_1+az_2+b|\leq|z_2-z_3|\cdot|az_2+az_3+b|+|z_3-z_1|\cdot|az_3+az_1+b|$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:607. Rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x^3+y^3=13 \\ x^2y+xy^2=-4 \end{cases}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

L:608. Rezolvați ecuația $29^{2x}+31^{2x}+1961^{2x}=29^x\cdot 31^x+29^x\cdot 1961^x+31^x\cdot 1961^x$.

Mircea Mario Stoica, Arad

L:609. Rezolvați ecuația $\log_{a^2}(x^2-2ax+2a^2)=\frac{ax}{x^2-ax+a^2}$, $a\rangle 1$.

Marin Chirciu, Pitești

L:610. Să se rezolve ecuația: $arctg\left(3^{\frac{1}{2}-x}\right)+artcg\left(3^x\right)=\frac{7\pi}{12}$. **Ovidiu Țâțan,** Râmnicu Sărat

L:611. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ fixat , să se rezolve ecuația : $C_x^n\cdot C_{x+n}^n\cdot C_{x+2n}^n=\frac{(4n)!}{4\cdot(n!)^4}$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:612. Fie $x,y,z\rangle 0$ astfel încât $(x+y)(y+z)(z+x)=1$. Arătați că $\sum\frac{(x+y)\sqrt{x^2+xy+y^2}}{x+y+2xy}\geq\sqrt{3}$. În ce caz avem egalitate ?

Marian Cucuoaneș, Mărășești, **Lucian Tuțescu** , Craiova

L:613. Să se rezolve sistemul de ecuații: $\begin{cases} x\cdot C_{n+p-2}^{k+p-1}-\dfrac{n+p-1}{k+p-1}\cdot y=\alpha\cdot\dfrac{k+p}{n+p-1} \\ x\cdot C_{n+p-2}^{k+p-2}+\dfrac{n+p-1}{k+p}\cdot y=\beta\cdot\dfrac{k+p-1}{n+p-1} \end{cases}$,

unde $n,p,k\in N^*, n\geq k+1,\alpha,\beta\in R.$

Radu Diaconu, Sibiu

L:614. Dacă ABC este un triunghi cu notaţiile uzuale, atunci aflaţi mulţimea acestor triunghiuri care verifică relaţia $b^2+c^2\geq 2a^2$.

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

L:615. Să se demonstreze că în orice triunghi ascuţitunghic ABC este adevărată inegalitatea:

$$\sum\sin A\sin B\cos C\leq\frac{9}{8}.$$

Neculai Stanciu, Buzău şi **Titu Zvonaru,** Comăneşti

L:616. Dacă a,b,c sunt numere reale strict pozitive, arătați că are loc inegalitatea:

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}+\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}\leq\frac{2}{3}\cdot(a+b+c).$$

Florin Stănescu, Găești, Dâmbovița

▪ Clasa a XI-a

L:617. Se consideră determinantul: $d=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&1&3b\\3b&a&1\end{vmatrix}=0;\quad a,b\in\mathbb{R}.$

a) Să se calculeze d. b) Să se rezolve ecuația $d=0$.
c) Dacă a, $3b$ sunt rădăcinile ecuației $x^2-2x+2=0$, să se calculeze d.

Radu Diaconu , Sibiu

L:618. Fie matricea $X=\begin{pmatrix}50&53\\27&29\end{pmatrix}$. Determinați $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $X^2=x\cdot X+y\cdot I_2$.

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

L:619. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2017\\1\\0\end{pmatrix}$ și $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ cu $x,y,z\in\mathbb{Z}$.

Să se rezolve ecuația $A^{2018}\cdot X=B$. **Constantin Dinu**, Buzău

L:620. Să se calculeze A^n, unde $A=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ c & d & e \end{pmatrix}, a\neq e.$ **Gheorghe Ghiță**, Buzău

L:621. Fie $n\rangle m\rangle 1$ și matricele $A,B\in M_2(\mathbb{R})$ care îndeplinesc condițiile:
(i) $\det(A+n\cdot B)=\det(n\cdot A+B)$;
(ii) $\det(A+m\cdot B)=\det(m\cdot A+B)$. Să se demonstreze că $\det(A)=\det(B)$.

Marin Chirciu,Pitești

L:622. Fie $a\in(-2;2)$ fixat, iar $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2^x+2^{x^2-(a+2)x+3}$. Să se arate că $f(\mathbb{R})\subset[3;\infty)$.

Adrian Stan, Buzău

L:623. Fie $s_n=-2\sqrt{n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$, $\lim_{n\to\infty}s_n=s$ (constanta lui Ioachimescu).
Claculați $\lim_{n\to\infty}(s_n-s)\sqrt[2n]{(2n-1)!!}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

L:624. Să se demonstreze inegalitățile : $2+\ln(tg^2a)\ \langle\ \frac{tg^2a-1}{\ln(tga)}\ \langle\ 2+tg^4a\cdot\ln(tg^2a),\ \forall a\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

L:625. Fie $a\in(0;1)$ și $(x_n)_{n\geq 0}$ un șir cu $x_0=b>0$ și $x_n=a^2+a+\sqrt{x_{n-1}}-2a\sqrt{a+\sqrt{x_{n-1}}},\ n\geq 1$.
Arătați că $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent și calculați $\lim_{n\to\infty}x_n$.

Lorena – Luiza Cremeneanu , Constantina Prunaru , Craiova

▪ CLASA a XII-a

L:626. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x\cdot\left(\sin^2x+2018\right)+1$,

a) Arătați că $f(x)-f^I(x)=1-e^x\cdot\sin 2x$; b) Calculați $I=\int\frac{-\sin 2x+e^{-x}}{\sin^2x+e^{-x}+2018}dx$.

Constantin Dinu, Buzău

L:627. Să se determine funcțiile derivabile $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $F'\left(\sqrt{x}\right)=\frac{x^2+x+1}{x+1},\forall x>0.$

Ovidiu Tâțan, Rm. Sărat

L:628. Să se arate că: $\int_0^1\frac{e^{-x}}{x^2-x+1}dx\leq\frac{\sqrt{(e^2-1)(9+2\pi\sqrt{3})}}{3\sqrt{3}e}$.

Radu Diaconu , Sibiu

L:629. Determinați primitivele funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos^3x\cdot\cos ax,\ x\in\mathbb{R},$ unde $a\in\mathbb{R},$ a este dat.

Marin Chirciu, Pitești

L:630. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie pozitivă, derivabilă cu derivata continuă care are proprietatea $f(a)=f(b)$. Să se demonstreze că $\int_a^b \left((2x^3-3(a+b)x^2+6abx\right)f'(x)dx \geq (a-b)^3 f(a)$.

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

L:631. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcţie de două ori derivabilă cu proprietatea că există a < b, astfel încât f(a) = f(b) (f este neinjectivă), atunci există c∈(a; b) astfel încât:

$$f''(c)\int_a^c f(x)dx = f'(c)[f(a)-3f(c)].$$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

L:632. Calculaţi: $\int_0^2 \frac{(x+\sqrt{x^2+4})^n-(x-\sqrt{x^2+4})^n}{\sqrt{x^2+4}}dx$, $(n\in\mathbb{N}^*)$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

L:633. Să se calculeze $I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$. **Gabriel Tănase**, Buzău

L:634. Se consideră operaţia: X*Y = XY - YX, definită pe mulţimea matricelor pătratice de ordin n. Să se arate că submulţimea M(A) = {X∈M_n | AX = XA} pentru orice A∈M, A nesingulară, este parte stabilă în raport cu operaţia indusă.

Petre Rău, Galați

L:635. Se consideră ecuația $x^3-(2x_1+2x_2+1)x^2+(x_1+x_2+2018)x-x_1-x_2-1=0$, care are toate rădăcinile reale x_1,x_2,x_3. Să se arate că : $(1+x_1)(1+x_2)=1+x_3$; Rezolvați ecuația în $\mathbb{R}$.

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

L:636. Să se calculeze limita şirului $(a_n)_{n\geq 0}$ având termenul general:

$$a_n=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{|\cos(2n+1)x|}{x}dx.$$

Vasile Mircea Popa, Sibiu

(în legătură cu problema C.O: 5074 din Gazeta Matematică nr. 11/2009).

L:637. **Să se calculeze limita şirului $(u_n)_{n\geq 1}$ având termenul general:**

$$u_n=\operatorname{arg\,th}\frac{1}{n+1}+\operatorname{arg\,th}\frac{1}{n+2}+...+\operatorname{arg\,th}\frac{1}{2n},$$

unde prin argth x am notat funcţia inversă a funcţiei tangentă hiperbolică (în legătură cu problema 26295 din G.M. nr. 4/ 2010). **Vasile Mircea Popa**, Sibiu

De unde se nasc erorile? Este de ştiut că doar din faptul că voinţa fiind cu mult mai amplă şi mai întinsă decât intelectul, ea nu se înglobează între aceleaşi limite, ci se extinde şi la lucruri pe care nu le înţelege, care fiindu-i în sine indiferente, o fac să se rătăcească cu extremă uşurinţă, şi alege răul în locul binelui sau falsul pentru adevăr.

Descartes

„In order to improve the mind, we ought
less to learn, then to contemplate”.
Rene Descartes

5. QUICKIES

A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader's name, full address, and an e-mail address. Submited solutions should arrive before October 31, 2018.

PROPOSALS – QUICKIES

Q41. Proposed by Mihàly Bencze, Bucharest, Romania.

If $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, then prove that $\frac{8}{\sin^2 2x} + \frac{3}{\sin^4 x + \cos^4 x} \ge 14$.

Q42. Proposed by Mihàly Bencze, Bucharest, Romania.

If $x, y, z > 0$ and $x + y + z = 1$, then prove that $\sum \frac{az + by}{x + yz} \ge (a+b)\sum \frac{x}{x + yz}$, for all $a, b > 0$.

Q43. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

If ABC is a triangle with area S and usual notations, then prove that

$$\sqrt{(a^4+1)(b^4+1)} + \sqrt{(b^4+1)(c^4+1)} + \sqrt{(c^4+1)(a^4+1)} \ge 8\sqrt{3}S.$$

Q44. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

Let $f : R \to R$ be a continuos and odd function and $g : R_+^* \to R$ be a continuos function such that

$g\left(\frac{1}{x}\right) = -g(x), \forall x \in R_+^*$. Compute $\int\limits_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{1}{(1+x^2)\left(1+a^{(f\circ g)(x)}\right)}dx$, where $a > 1$.

SOLUTIONS – QUICKIES

Q37. Proposed by Kevin Soto Palacios, Huarmey, Peru.

Let ABC be an acuted triangle. Prove that

$$\tan A + \tan B + \tan C + \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \ge \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Solution by Marin Chirciu, Piteşti, Romania. Using well-known identities

$$\sum \text{tanA} = \frac{2rp}{p^2 - (2R+r)^2} \text{ and } \sum \sin 2A = \frac{2rp}{R^2},$$

the inequality becomes $\frac{2rp}{p^2-(2R+r)^2} + \frac{2rp}{R^2} \ge \frac{9\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{p^2-(2R+r)^2} + \frac{1}{R^2} \ge \frac{9\sqrt{3}}{4rp} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{p^2-(2R+r)^2} + \frac{1}{R^2} \ge \frac{9\cdot p\sqrt{3}}{4rp^2}$. Taking into account by

$4R + r \ge p\sqrt{3}$ (Doucet inequality); $p^2 \ge 2R^2 + 8Rr + 3r^2$ (Walker inequality, in acute triangle);

(Yang Xue Zhi inequality), it suffices to show that:

$$\frac{1}{4R^2+4Rr+3r^2-\frac{r^2(R-2r)}{R-r}-(2R+r)^2}+\frac{1}{R^2}\geq\frac{9(4R+r)}{4r(2R^2+8Rr+3r^2)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{R^2-Rr+r^2}{R^2r^2}\geq\frac{9(4R+r)}{4r(2R^2+8Rr+3r^2)}\Leftrightarrow 8R^4-12R^3r-21R^2r^2+20Rr^3+12r^4\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (R-2r)(8R^3+4R^2r-13Rr^2-6r^3)\geq 0,$$ true by Euler inequality $R\geq 2r$.

The equality occurs iff triangle ABC is equilateral.

Solution by author. Lemma. If $x,y,z>0$, such that $xy+yz+zx=1$, then

$$\frac{1}{xyz}+\frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)}\geq\frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Indeed, $1=xy+yz+zx\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\Leftrightarrow\frac{1}{27}\geq x^2y^2z^2\Leftrightarrow\frac{1}{xyz}\geq 3\sqrt{3}$, (1).

$$8=(2xy+2yz+2zx)^3=\left((xz+yz)+(yx+zx)+(zx+yx)\right)^3\overset{AM-GM}{\geq}27(xz+yz)(yx+zx)(zx+yx)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{(xz+yz)(yx+zx)(zx+yx)}\geq\frac{27}{8},\ (2).\qquad \frac{1}{xyz}+\frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)}=$$

$$=\frac{1}{2xyz}+\frac{1}{2xyz}+\frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)}\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{\frac{1}{2xyz}\cdot\frac{1}{2xyz}\cdot\frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)}}=$$

$$=3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}\cdot\frac{1}{(xz+yz)(yx+zx)(zy+xy)}}\underset{(2)}{\overset{(1)}{\geq}}3\sqrt[3]{3\sqrt{3}\cdot\frac{27}{8}}=3\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Now we make the trigonometric substitutions $x=\cot A, y=\cot B, z=\cot C$, $\forall A,B,C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ and $A+B+C=\pi$. By Lemma and the facts

$$\frac{1}{\cot A+\cot B}=\frac{\sin A\sin B}{\sin C},\ \frac{1}{\cot B+\cot C}=\frac{\sin B\sin C}{\sin A},\ \frac{1}{\cot C+\cot A}=\frac{\sin C\sin A}{\sin C},$$

and the formulas

$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$, respectively $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

we obtain $$\frac{1}{\cot A\cot B\cot C}+\frac{4}{(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)}\geq\frac{9\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\tan A\tan B\tan C+4\sin A\sin B\sin C\geq\frac{9\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\tan A+\tan B+\tan C+\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\geq\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\tan A+\tan B+\tan C+\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\geq\frac{9\sqrt{3}}{2},$$ q.e.d

Also solved by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania and Marius Drăgan, Bucharest, Romania.

Q38. Proposed by Mihàly Bencze, Bucharest, Romania.

Prove that if $a,b,c>0$, then $\left(\sum a^8\right)\left(\sum\frac{1}{a^8}\right)\geq\left(\sum a\right)\left(\sum\frac{1}{a}\right)$.

Solution by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania.

Using the inequality $x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx$, we have

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \ge \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}+\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}+\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \text{ and}$$

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2} \ge \frac{a}{c}\cdot\frac{b}{a}+\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}+\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}=\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}.$$

Yields

$$\left(\sum a^2\right)\left(\sum \frac{1}{a^2}\right)=3+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2} \ge$$

$$\ge 3+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}=\left(\sum a\right)\left(\sum \frac{1}{a}\right).$$

Then, we obtain

$$\left(\sum a^8\right)\left(\sum \frac{1}{a^8}\right) \ge \left(\sum a^4\right)\left(\sum \frac{1}{a^4}\right) \ge \left(\sum a^2\right)\left(\sum \frac{1}{a^2}\right) \ge \left(\sum a\right)\left(\sum \frac{1}{a}\right), \text{ Q.E.D.}$$

Remark. By induction yields $\left(\sum a^{2^n}\right)\left(\sum \frac{1}{a^{2^n}}\right) \ge \left(\sum a\right)\left(\sum \frac{1}{a}\right), n \in N$.

Also solved by Marius Drăgan, Bucharest, Romania.

Q39. **Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania.**

If $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ and $b = \arcsin a$, then calculate $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}\left(\sin\left(\frac{b \cdot \sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)-a\right)$.

Solution by Marius Drăgan, Bucharest, Romania. We have $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$.

If we denote $u_n=\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{e}\cdot\frac{e}{2}\cdot 1=1$ so

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n}=1$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}=e$.

Therefore $x_n=\sqrt[n]{n!}\left(\sin\left(\frac{b\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)-a\right)=\sqrt[n]{n!}(\sin bu_n-\sin b)=$

$$=2\cdot\sqrt[n]{n!}\cdot\sin\frac{b}{2}(u_n-1)\cdot\cos\frac{b}{2}(u_n+1)=b\cdot\sqrt[n]{n!}\cdot\frac{\sin\frac{b}{2}(u_n-1)}{\frac{b}{2}(u_n-1)}\cdot\cos\frac{b}{2}(u_n+1)\cdot(u_n-1)=$$

$$=b\cdot\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot\frac{\sin\frac{b}{2}(u_n-1)}{\frac{b}{2}(u_n-1)}\cdot\cos\frac{b}{2}(u_n+1)\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n.$$

Hence, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=b\cdot\frac{1}{e}\cdot 1\cdot\cos b\cdot 1\cdot\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty} u_n^n\right)=\frac{b\cos b}{e}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\arcsin a$.

Q40. **Proposed by D.M. Bătineţu – Giurgiu, Bucharest, Romania.**

Consider a triangle ABC with sides a,b,c, medians m_a, m_b, m_c, interior bisectors w_a, w_b, w_c and the area F.

Prove that $(m_a^2+m_b^2+m_c^2)\left(\frac{w_a^2}{a^2}+\frac{w_b^2}{b^2}+\frac{w_c^2}{c^2}\right)\geq\frac{27\sqrt{3}}{4}F$.

Solution by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania.

We have $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)\overset{Ionescu-Weitzenbock}{\geq}\frac{3}{4}\cdot 4\sqrt{3}F=3\sqrt{3}F$, (1).

Also we have $w_a\geq h_a, w_b\geq h_b, w_c\geq h_c$, so $\sum_{cyc}\frac{w_a^2}{a^2}\geq\sum_{cyc}\frac{h_a^2}{a^2}$, (2).

By, $a=h_a(ctgB+ctgC)\Rightarrow\frac{h_a}{a}=\frac{1}{ctgB+ctgC}$ and analogously yields that

$\sum_{cyc}\left(\frac{h_a}{a}\right)^2=\sum_{cyc}\frac{1}{(ctgA+ctgB)^2}$, (3).

By Iranian's inequality $(xy+yz+zx)\sum_{cyc}\frac{1}{(x+y)^2}\geq\frac{9}{4},\forall x,y,z>0$, where we put

$x=ctgA, y=ctgB, z=ctgC$ and using $\sum_{cyc}ctgActgB=1$ we deduce $\sum_{cyc}\frac{1}{(ctgA+ctgB)^2}\geq\frac{9}{4}$, (4).

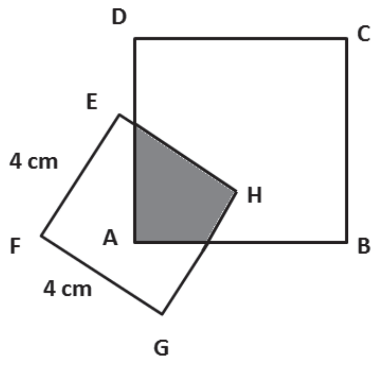
By (1), (2), (3) and (4) we obtain $(m_a^2+m_b^2+m_c^2)\left(\frac{w_a^2}{a^2}+\frac{w_b^2}{b^2}+\frac{w_c^2}{c^2}\right)\geq\frac{9}{4}\cdot 3\sqrt{3}F=\frac{27\sqrt{3}}{4}F$, q.e.d.

Equality occurs if triangle ABC is equilateral

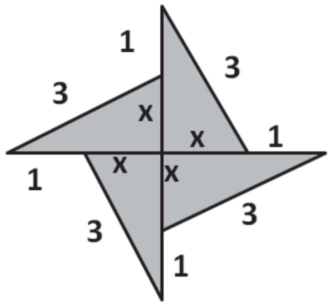
Also solved by Marius Drăgan, Bucharest, Romania.

CALEIDOSCOP MATEMATIC

P1. În figura alăturată centrul pătratului EFGH, cu lungimea laturii de 4 cm, este situat în vârful A al pătratului ABCD. Fără a şti care este lungimea laturii pătratului ABCD sau măcar a vreunui unghi făcut de o latură a pătratului ABCD cu o latură a pătratului EFGH, putem oare noi calcula aria suprafeţei haşurate ?



P2. În figura alăturată sunt patru triunghiuri dreptunghice congruente având dimensiunile ca în figură. Cu cât este egală aria unui triunghi?



Răspunsuri la pag 59.

„ Aceia care merg foarte încet, dacă țin drumul drept,
pot înainta mult mai departe decât cei care merg repede,
dar se abat de la acest drum.”.
Descartes
(1596- 1650)

7. Caleidoscop matematic

1. Inegalități aproape fără cuvinte

D.M. Bătinețu-Giurgiu, București, **Dan Sitaru**, Drobeta Turnu-Severin, **Neculai Stanciu**, Buzău

Inegalitatea Tsintsifas: Dacă $x, y, z > 0$**, atunci în orice triunghi** ABC **:**

$$\frac{x}{y+z}a^2 + \frac{y}{z+x}b^2 + \frac{z}{x+y}c^2 \geq 2\sqrt{3}\cdot[ABC], \textbf{(T).}$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = y = z$ şi $a = b = c$.

Inegalitatea Nesbitt-Ionescu:Dacă $x, y, z > 0$**, atunci:** $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$**, (N-I).**

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = y = z$.

Inegalitatea Ionescu-Weitzenböck: Dacă ABC **este un triunghi, atunci:**

$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\cdot[ABC]$**, (I-W).** Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c$.

(T)$\Rightarrow$(N-I): În (T) luăm $a = b = c$.

(T)$\Rightarrow$ (I-W): În (T) luăm $x = y = z$.

2. Numere naturale care se regăsesc în puterile lor

Prof. Kovacs Bela, Satu Mare

Cuburi perfecte, care se termină cu aceleaşi cifre, respectiv grupe de cifre identice cu cifrele bazei.

1. Numere cu o singură cifră: $0^3 = 0;\ 1^3 = 1;\ 4^3 = 64;\ 5^3 = 125;\ 6^3 = 216;\ 9^3 = 729.$

2. Numare naturale cu două cifre:

$24^3 = 13824;\ 25^3 = 15625;\ 49^3 = 117649;\ 51^3 = 132651;\ 75^3 = 421875;\ 76^3 = 437876;\ 99^3 = 970299.$

3. Numere naturale formate din trei cifre:

$125^3 = 1953125;\ 249^3 = 15438249;\ 251^3 = 15813251;\ 375^3 = 52734375;\ 376^3 = 53157376,$

$499^3 = 124251499;\ 624^3 = 242970624;\ 625^3 = 244140625;\ 749^3 = 420189749;\ 751^3 = 423564751,$

$875^3 = 669921875;\ 999^3 = 997002999;$.

4. Numere naturale cu patru cifre:

$\mathbf{1249}^3$ = 1.948.441**.249**	$\mathbf{3751}^3$ = 52.776.57**3.751**	$\mathbf{4375}^3$ = 83.740.23**4.275**
$\mathbf{4999}^3$ = 124.925.01**4.999**	$\mathbf{5625}^3$ = 177.978.51**5.625**	$\mathbf{8751}^3$ = 670.151.58**8.751**
$\mathbf{9375}^3$ = 823.974.60**9.375**	$\mathbf{9376}^3$ = 824.238.30**9.376**	$\mathbf{9999}^3$ = 999.700.02**9.999**

5. Numere naturale cu cinci cifre:

$\mathbf{18.751}^3$ = 6.592.851.6**18.751**	$\mathbf{31.249}^3$ = 30.514.648.5**31.249**
$\mathbf{40.625}^3$ = 67.047.119.1**40.625**	$\mathbf{49.999}^3$ = 124.992.500.1**49.999**
$\mathbf{59.375}^3$ = 209.320.068.3**59.375**	$\mathbf{68.751}^3$ = 324.965.351.7**68.751**
$\mathbf{81.249}^3$ = 536.357.148.6**81.249**	$\mathbf{90.625}^3$ = 744.293.212.8**90.625**
$\mathbf{99.999}^3$ = 999.970.000.2**99.999**	

6. Numere naturale cu şase cifre:

109.375^3 = 1.308.441.162.**109.375** | **109.376**^{3} = 1.308.477.051.**109.376**
281.249^3 = 22.247.077.149.**281.249** | **390.625**^{3} = 59.604.644.775.**390.625**
499.999^3 = 124.999.250.001.**499.999** | **609.375**^{3} = 226.284.027.099.**609.375**
781.249^3 = 476.835.327.150.**781.249** | **890.625**^{3} = 706.455.230.712.**890.625**

Generalizare: Tot aşa mai departe, putem obţine astfel de numere, din ce în ce mai mari. De exemplu, un număr de 10 cifre, cu astfel de proprietate este:

1.787.109.376^3 = 5.707.598.300.918.769.84**1.787.109.376**

Presupunere: Există numere oricât de mari, cu proprietatea, că puterea a treia se termină cu aceaşi grupă de cifre ca şi cifrele bazei.

3. Un împărat a dorit să-l pună la încercare pe înţeleptul curţii supunându-l la o probă de încercare. Astfel, împăratul a cerut să i se aducă două urne în care, în una erau cincizeci de bile albe iar în cealaltă erau cinczeci de bile negre. Înţeleptului curţii i s-a cerut să aranjeze cum vrea el bilele în cele două urne astfel, atunci când va extrage o bilă fără să vadă bilele şi cele două urne de unde extrage, dacă va ieşi o bilă albă va primi un dar preţios dar dacă va scoate o bilă neagră va trebui să părăsească curtea.

Cum a procedat înţeleptul ca să-şi maximizeze şansa de a extrage o bilă albă şi astfel de a rămâne la curte?

Rezolvare:

Înţeleptul curţii a procedat astfel: În prima urnă a lăsat o singură bilă albă iar în a doua urnă, pe lângă cele 50 de bile negre le-a adăugat şi pe celelalte 49 de bile albe.

Astfel, în prima urnă există o bil albă iar în a doua urnă sunt 99 bile din care 49 albe iar 50 negre.

Problema revine la calculul unei probabilităţi totale adică, dacă considerăm următoarele evenimente:

A- reprezintă evenimentul ca bila extrasă să fie albă;

A1- reprezintă evenimentul ca extragerea să fie făcută din prima urnă;

A2- reprezintă evenimentul ca extragerea să fie făcută din a doua urnă.

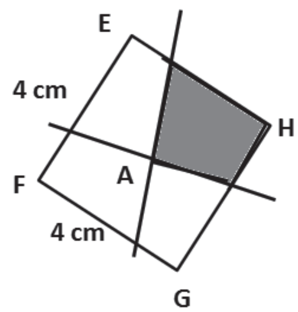
Atunci, probabilitatea ca bila extrasă să fie albă este dată de

$$P(A)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A)+P(A_2)\cdot P_{A_2}(A)=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{49}{99}=0,5+0,5\cdot 0,49=0,5+0,245=0,745.$$

Răspunsurile problemelor de la pag. 57.

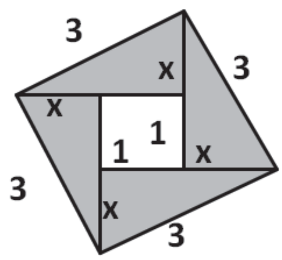
P1.

Se prelungesc dreptele BA şi DA până intersectează FE respectiv FG. Astfel că pătratul EFGH este format din patru patrulatere congruente care au aceeaşi arie datorită proprietăţii de simetrie a pătratului faţă de centrul său. Aria patrulaterul haşurat este o pătrime din aria pătratului EFGH, adică 16:4 = 4 cm^2.



P2. b) Cele patru triunghiuri se translatează ca în figura alăturată obţinându-se un pătrat de latură 3 iar în centru un pătrat de latură 1. Atunci,

$$3^2=1^2+4A_\Delta \Rightarrow A_\Delta=2\ .$$



„ Adevăratul defect e să ai defecte și să nu le îndrepți”.
(Confucius
(551- 479)

8. Poşta redacţiei

Dragi cititori, elevi şi profesori, a apărut **numărul 21** al revistei de matematică „ **SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noştri, şi care, sperăm noi, va aduna tot mai mulţi elevi şi profesori împreună, pentru a face din obiectul matematicii o activitate atractivă și performantă.

Profesorii şi elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciţii şi probleme cu enunţ şi rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătăţii calitatea acestei reviste, o pot face trimiţând materialele membrilor colectivului de redacţie sau pe adresa de e_mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate(**salvate în Word 2003**) , fie scrise de mână şi scanate. **Materialele primite trebuie să fie originale şi să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise şi către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparţine redacţiei.

Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările şi comenzile pentru **numărul 22** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **15 Octombrie 2018**. Vă urăm succes şi vă aşteptăm.

ELEVI REZOLVITORI

Şcoala Gimnazială “Gh. Popescu” Mărgineni- Slobozia, Scornicești, Olt
Clasa a VI-a: 28p. Mindreanu Florentina, Vlaicu Liliana; **Clasa a VII-a**: 35 p. Sima Iuliana, 27p. Ionescu Miruna, 25p. Screciu Constantin; **Prof. Iuliana Trașcă.**

Şcoala Gimnazială Padina, Buzău
Clasa a V-a: 19p. Andronache Oana, Spătaru Alexandra, **18p:** Iacob Mariana, 16**p**. Filipoiu Denisa, Spătaru Denisa.
Clasa a VI-a: 29p. Hermeneanu Lavinia, 27. Balica Costin, 26p. Spătaru Maria; Iasăgeanu Gabriela,
Clasa a VII-a: 29p. Dinu Cristina, 28p. Dumitroiu Elena, 26p. Radu Mihaela, Jega Mihaela, 8p. **Clasa a VIII-a:** 29p. Nedelcu Daniela, 28p. Ceauș Andreea, 26p. Fogor Antonia, 25p. Burlacu Alin, 8p. Păltinațu Laura; **Prof. Stănescu Ion.**

Şcoala Gimnazială ” Rareş Vodă” Ploieşti, Prahova
Clasa a V-a: 20p. Păduraru Cătălina, Mihai Alexandra, Găitănaru Andreea, Călinescu Alin, 19p Niţoiu Vlad, 8p Boboc Gabriel, Savu Gabriel
Clasa a VIII-a: 25p. Radu Elena, Săvulescu Ionuţ, 23p. Stănescu Alina, Nicolae Andreea. **Prof. Daniela Badea**

REVISTA SCLIPIREA MINŢII

NR. 21 ANUL XI - MAI 2018

Cuprins

editgraph

ISSN 2247 – 6601

ISSN-L 2247 – 6601