VIZITATI SI REVISTA ONLINE DE MATEMATICA MATEINFO.RO

REVISTA SCLIPIREA MINȚII
NR. 22 ANUL XI - NOIEMBRIE 2018

Cuprins

1. Istoria matematicii

Matematicieni români - contribuții la Marea Unire
de Adrian Stan 1

2. Articole și note matematice

Integrale euleriene de Adrian Stan..... 3

În legătură cu problema 27336 din GM 2/2017
de Marin Chirciu 6

O extindere şi o rafinare pentru inegalitatea lui Cesaro
de Neculai Stanciu şi Titu Zvonaru 7

Asupra unor funcţii și medii pe $_{*+}\mathbb{R}$ de D.M. Bătineţu-Giurgiu,
Neculai Stanciu și Gabriel Tica 8

3. Probleme rezolvate 10

4 Probleme propuse 41

5. Quickies 49

6. Caleidoscop matematic 52

7. Poșta redacției 55

editgraph

LEI 12 RON

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601

SCLIPIREA MINTII

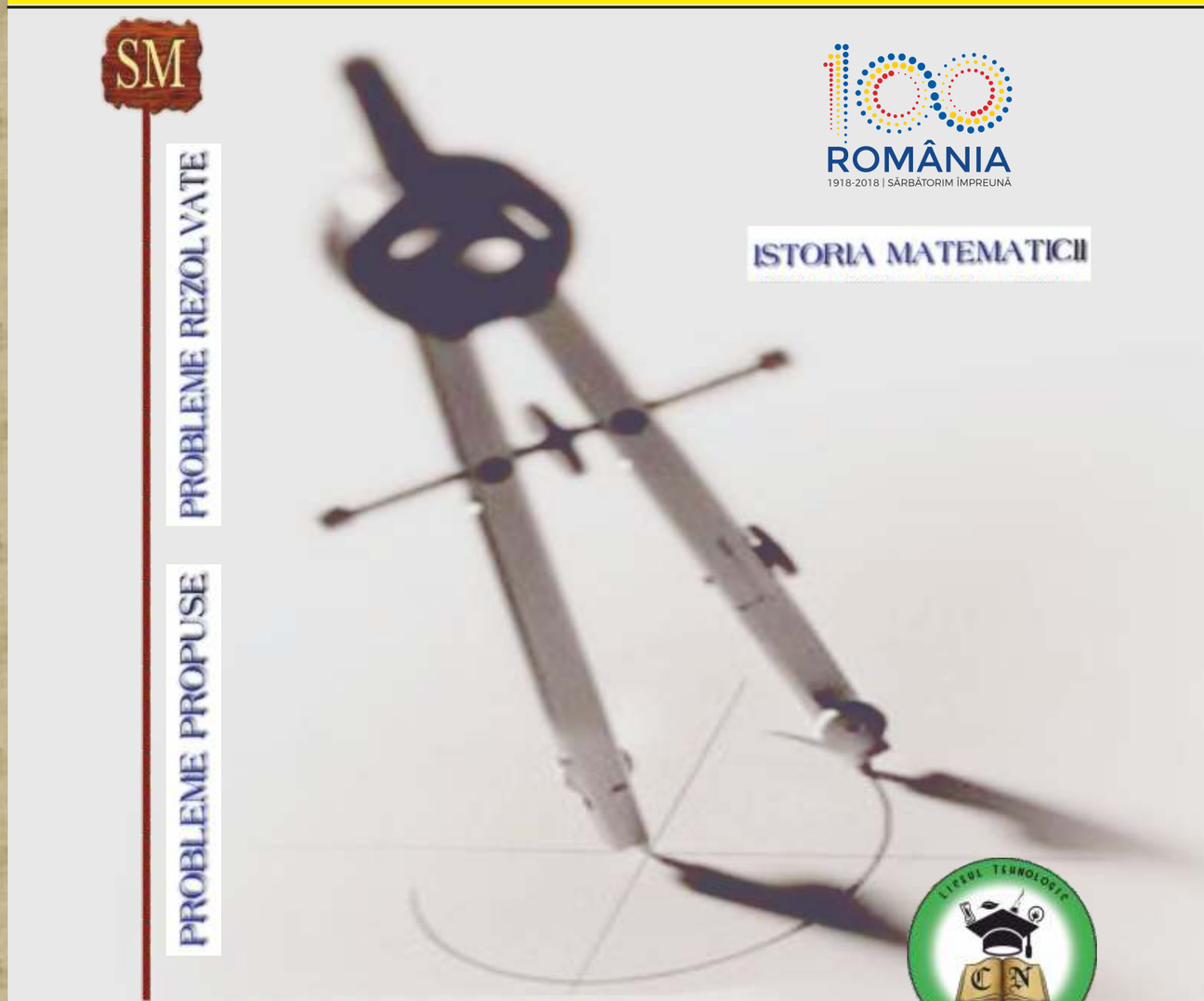
REVISTĂ NATIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICA; PUBLICATIE SEMESTRIALĂ, AN XI, NR XXII, 2018

SM PROBLEME REZOLVATE

PROBLEME PROPUSE

100 ROMÂNIA 1918-2018 | SĂRBĂTORIM ÎMPREUNĂ

ISTORIA MATEMATICII



SM CALEIDOSCOP MATEMATIC

Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,
LICEUL TEHNOLOGIC " COSTIN NENIŢESCU ", BUZĂU

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601

SCLIPIREA MINTII 22

Revistă naţională de cultură matematică, publicaţie semestrială, An XI, Nr. XXII, NOIEMBRIE 2018, BUZĂU

COLECTIVUL DE REDACŢIE

- **Membrii onorifici:**

Constantin Rusu - Preşedinte de onoare a Filialei Râmnicu Sărat a Societăţii de Ştiinţe Matematice

Costică Ambrinoc - Preşedinte Filiala Râmnicu Sărat a Societăţii de Ştiinţe Matematice

Lenuţa Pîrlog – Preşedinte Filiala Buzău a Societăţii de Ştiinţe Matematice

Cristina Drugă - Inspector matematică

D. M . Bătineţu – Giurgiu, **Daniel Sitaru**, **Nicolae Ivăşchescu**, **Mihály Bencze**, **Lucian Tuţescu**, **Gheorghe Ghiţă**, **Marius Drăgan**, **Ionel Tudor**

- **Director:** Neculai Stanciu
- **Redactor şef:** Adrian Stan
- **Redactori principali:** Andrei Octavian Dobre, Iuliana Traşcă, Marin Chirciu, Gabriel Tica, Ion Stănescu, Constantin Dinu

CUPRINS

ISTORIA MATEMATICII..... 1

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE..... 3

PROBLEME REZOLVATE..... 10

PROBLEME PROPUSE 41

QUICKIES 49

CALEIDOSCOP MATEMATIC 52

POŞTA REDACŢIEI..... 55

GÂNDEŞTE CORECT

- **Membri:**

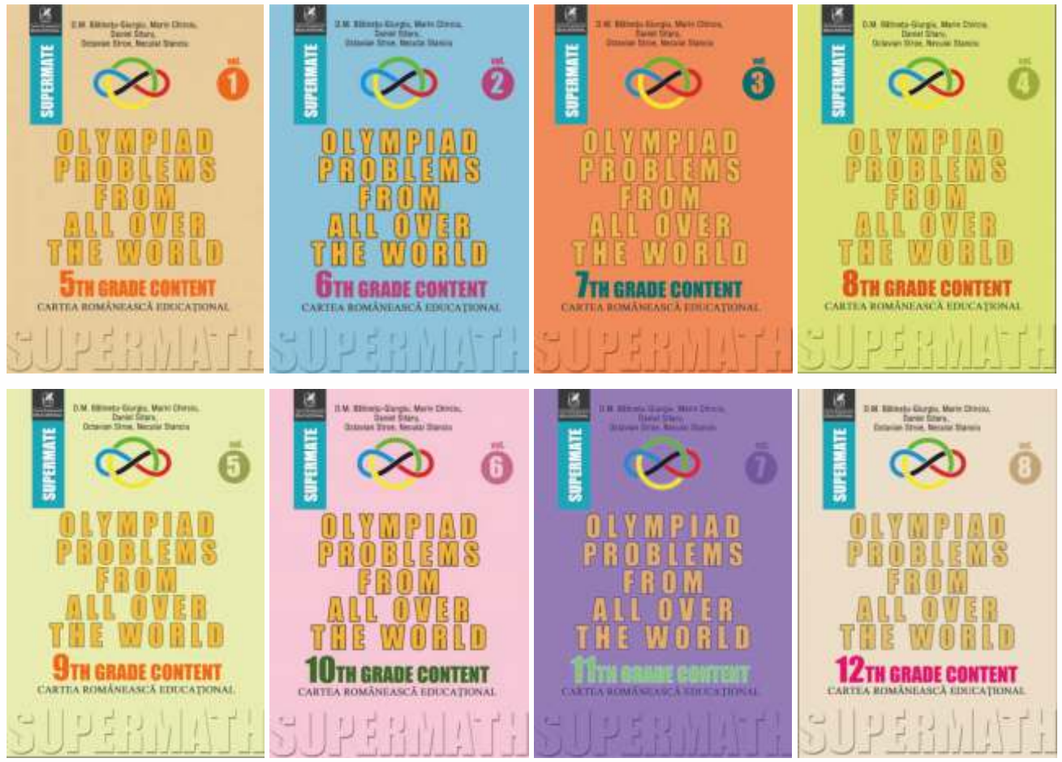
Daniela **Badea**, Gabriela **Buzea,** Maria **Boborel,** Kovacs **Bela,** Elena **Ciobîcă,** Constantin **Ciobîcă,** Ana **Cismaru,** Aurel **Chiriţă,** Marin **Chirciu,** Nela **Ciceu,** Marian **Ciuperceanu,** Tatiana **Cristea,** Marian **Cucoaneş**, Luiza Lorena **Cremeneanu**, Radu **Diaconu**, Ileana **Didu,** Camelia **Dana,** Gheorghe **Dîrstaru,** Denisa **Draghia,** Viorica **Dogaru**, Otilia **Drăgan**, Ani **Drăghici**, Luiza **Dumitrescu,** Lucian Dan **Grigore,** Ramona- Carmen **Grigore**, Adrian **Gobej**, Ştefan **Gobeş**, Cristina Dida **Isaia**, Ionuţ **Ivănescu,** Vasile **Jiglău,** Adalbert **Kovacs,** Simona **Miu,** Simion **Marin**, Mariana **Mitea,** Cristian **Moanţă,** Gabriela **Neguţescu**, Gabriel **Nemţaru**, Ana **Panaitescu,** Kevin Soto **Palacios**, Petre **Păunescu**, Stelian **Piscan,** Victoria **Popa,** Emil C. **Popa**, Vasile Mircea **Popa**, Adriana **Puescu,** Doina **Popescu,** Constantina **Prunaru**, Ramona **Puchiu**, Petre **Rău**, Dumitru **Săvulescu,** Roxana **Stanciu**, Liviu **Smarandache,** Florin **Stănescu**, Andreea **Stoica,** Doina **Stoica,** Mircea Mario **Stoica,** Alina **Tigae,** Laura **Tănase,** Gabriel **Tănase,** Hanganu **Aurel** Toma, Nicolae **Tomescu,** Diana **Trailescu,** Ovidiu **Ţâţan,** Roxana **Vasile,** Ionuţ-Florin **Voinea,** Marian **Voinea,** Daniel **Văcaru,** Sorina **Văcărean,** Florentin **Vişescu,** Elena **Zainea**

REDACŢIA
Liceul Tehnologic „Costin Nenitescu”,
Buzău, Strada Bazalt, Nr. 15bis,
Cod. 120167, Tel. 0238725206
E_mail: ady_stan2005@yahoo.com
Coordonator proiect: Adrian Stan

Tipar: editgraph Buzău, www.editgraph.ro

APARIŢII EDITORIALE

Olympiad Problems from all over the World
5-6-7-8-9-10-11-12th Grade Content



Autori: D.M. Bătineţu-Giurgiu; Marin Chirciu; Daniel Sitaru; Neculai Stanciu; Octavian Stroe
Domeniu: Educaţional, Matematică
Colecţie: Supermate

"The book contains 400 problems in algebra, number theory, combinatorics and geometry, from all over the world. It is an excellent text for preparing mathematics competitions of all levels. That is why I strongly recommend this book for mathematics teachers and gifted students"

Radu Gologan, President of Romanian Mathematical Society.

CARTEA ROMÂNEASCĂ

„ Prin unire cresc lucrurile mici,
prin dezbinare se prăbușesc cele mai mari”.
Gaius Sallustius
(86- 35 î.Hr)

1. Istoria matematicii

Matematicieni români - contribuții la Marea Unire

de prof. Adrian Stan, Buzău

Profesorul **Traian Lalescu**(12 iulie 1882- 15 iunie 1929) a făcut parte din elita culturală care activa pentru reîntregirea Banatului, pronunțându-se vehement în ziarele vremii și în publicațiile diasporei românești despre necesitatea dezmembrării Austro-Ungariei ca „**singura condiție a eliberării și unității popoarelor asuprite în imperiu**”.

Articolele sale apăreau în ziarul „**La Roumanie**” din Paris într-un moment când o misiune diplomatică din care făcea și el parte, a guvernului românesc de la Iași, căci din vechiul regat mai rămăseseră câteva județe în Moldova, a fost trimisă pentru a interveni pe lângă Marile Puteri pentru a susține cauza întregirii naționale.

Elev eminent la toate școlile cărora le-a trecut pragul în copilăria sa, Craiova, Roman, Iași și apoi Școala Națională de Poduri și Șosele(1900) și Facultatea de Științe(1903), secția Matematici a Universității București unde a funcționat și ca profesor la cele două, Lalescu a studiat și la Paris unde și-a luat în 1908 doctoratul.

Fiind preocupat mai ales de problema Banatului de unde își avea originile după tată,(deși născut în București, comuna Cornea de lângă Caransebeș a purtat-o întodeauna în inima sa), Traian Lalescu inițiază un studiu etnografic al regiunii Banatului, „ **Le Probleme ethnographique du Banat** ” realizând o serie de discuții, statistici și în care își expune lucrările privind multiculturalismul regiunii. El cuprinde în acest studiu influența civilizațiilor romane și austro-ungare asupra zonei și insistă pe rolul jucat în apărarea hotarelor Europei împotriva invaziilor turcești.

În acest studiu prezentat și la Conferința de Pace de la Paris din 1919, el reiterează ideea comunității românești supuse unor numeroase exemple de depopulare, strămutarea pe aceste meleaguri a unor populații germanice, sârbe și maghiare și în tot acest timp, populația românească a ținut piept năvălirilor turcești, s-a luptat pentru rezistență și pentru apărarea drepturilor sale. Prin studiul realizat asupra tuturor comunelor a căutat să demonstreze că populația românească este majoritară astfel, din cele 795 de comune, 472 erau cu populație majoritară românească iar celelalte 148 cu populație majoritar germană, 109 sârbească, 55 maghiară și încă alte 11 comune cu alte minorități. Astfel, el milita pentru acordarea titlului de provincie românească și alipirea ei la țara mamă.

Lui i se datorează înființarea **Școlii Politehnice din Timișoara** în noiembrie 1920 unde a și devenit rector dar la care a trebuit să renunțe din cauza morții premature a soției lui la vîrsta de 28

de ani. De asemenea, a înființat **Revista de matematică din Timișoara** pe 15 martie 1921 iar tratatul său despre ecuațiile integrale din 1911 este primul din lume.

Pentru contribuțiile sale la efortul întregirii națiunii dar și pentru impresionanta activitate didactică și de cercetare, Lalescu a fost decorat cu numeroase ordine militare și decorații(deși nu a participat efectiv la război întrucât nu a putut fi înrolat din cauza unor probleme de sănătate, ci doar însărcinat cu un rol auxiliar în cadrul armatei) el a primit Steaua României în grad de comandor, Legiunea de onoare în grad de cavaler și altele.

Un rol important în timpul războiului l-a avut și astronomul **Gheorghe Demetrescu** (1885-1969) de la Observatorul Astronomic din București, care fiind mobilizat pe frontul din Moldova ca locotenent, la cererea generalului francez Berthelot a înființat patru stații meteorologice care transmiteau informații aviației și artileriei.

Lui i se datorează o serie de scrieri științifice care se refereau la „**Instrucțiuni practice de meteorologie**”, având un nivel ridicat al conținutului, în care prezintă într-un mod elaborat tot ceea ce ținea de fenomenele atmosferice(temperatura și umiditatea aerului, presiunea atmosferică, influența vântului și norilor, despre ceață, ploaie, zăpadă, furtuni și diverse fenomene optice).

Profesorul **Gheorghe Bratu**(1881- 1941) de la Universitatea din Iași a participat voluntar începând din anul 1916 ca sergent sub comanda locotenentului **Octav Onicescu** (1892- 1983) (viitorul academician, 1937) care se afla la comanda corpului de aerostație de la Iași. Cei doi matematicieni s-au înțeles foarte bine, Onicescu apreciindu-i sfaturile mai vârstnicului său coleg, care de altfel a și fost recompensat cu titlul de sublocotenent în 15 decembrie 1917 și apoi pe 7 iulie 1919 a primit înalta distincție Crucea comemorativă a războiului 1916-1918.

Profesorul **Constantin Al. Pârvulescu** (1890- 1945) s-a angajat voluntar în aviație în 1916 iar în dimineața zilei de 6 august în timp ce se afla într-un zbor de recunoaștere a observat în dreptul Pădurii Negre că frontul rus de la Mărășești fusese spart iar nemții avansau vertiginos. Aliații ruși abandonaseră linia frontului fără să anunțe. În acest timp, echipajul avionului au anunțat de grabă comandamentul care a reușit să ia măsuri ca să umple cu forțe golul lăsat de ruși și astfel să evite un dezastru total.

Această acțiune cât și altele i-au adus sublocotenentului Pârvulescu numeroase onoruri militare: Ordinul de război Virturtea militară, Steaua României cu panglica de Virtute militară, Virtutea aeronautică cu baretă, etc. (1, pag 254-255).

În 1930 îi regăsim pe G. Bratu, Pârvulescu și Gh. Demetrescu fondatori ai Comitetului național român de astronomie, Demetrescu devenind ulterior director (1943-1963) al Observatorului Astronomic de la București.

Ion Inculeț (5.04.1884- 18.11.1940) a fost un om politic, profesor, academician, președinte al Sfatului Țării din Basarabia, președinte al partidului țărănesc din Basarabia(1921-1923), care s-a implicat activ în mișcarea de unificare, fiind ales în unanimitate în 1917 la 4 decembrie de către cei 150 de deputați ca președinte al Sfatului Țării până la data reunificării din 27 martie 1918.
Pe 10 octombrie 1918 devenea membru al Academiei Române.

Absolvent al Facultății de Științe Fizico-matematice din Sankt Petersburg(1911), Inculeț a fost doctor conferențiar în matematică la Universitatea din Petrograd după care s-a întors în Basarabia unde în 1917 devenea președintele noii Republici Democrate Moldovenești până la reunificarea cu România unde de asemenea a avut mai multe portofolii în guvernul României.

Bibliografie:

Andonie, George Șt. Istoria matematicilor aplicate clasice din România. Editura Academiei R. S. România. București. 1971.

„ Acolo unde există o voință, există și un drum”.
(proverb german)

2. Articole și note matematice

Integrale euleriene

de prof. **Adrian Stan**,
Liceul Tehnologic “Costin Nenițescu” Buzău

Acest material prezintă o serie de tipuri de integrale din categoria celor generalizate numite euleriene. Pentru aceasta, se definesc următoarele tipuri de integrale:

Integrala gamma: $\Gamma(a)=\int_0^{\infty} x^{a-1}\cdot e^{-x}dx,\ \ a\rangle 0.$ având următoarele proprietăți:

1) $\Gamma(1)=1$;

2) $\Gamma(a)=(a-1)\cdot\Gamma(a-1),\ \ \forall a\rangle 1;$

3) $\Gamma(n)=(n-1)!,\ \ \forall n\in\mathbb{N};$

4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$

Integrala beta: $\beta(a,b)=\int_0^{1} x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-1}dx,\ \ a\rangle 0, b\rangle 0.$

Proprietăți:

1) $\beta(a,b)=\beta(b;a),\ \ \forall a,b\rangle 0.$

2) $\beta(a,b)=\dfrac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\ ,\ \ a\rangle 0, b\rangle 0.$

3) $\beta(a,b)=\int_0^{\infty}\dfrac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}dx.$

4) dacă a+b=1, atunci $\beta(a,b)=\dfrac{\pi}{\sin(a\pi)}$.

Exemple de integrale de tip euleriene:

1). $I=\int_2^{\infty} x^2\cdot e^{-x+2}dx.$

Rezolvare: Mai întâi se folosește schimbarea de variabilă, $-x+2=-t\Rightarrow -x=-t-2\Rightarrow$ $x=t+2\Rightarrow dx=dt$. Schimbăm limitele de integrare și obținem $x=2\Rightarrow t=0$ și $x=\infty\Rightarrow t=\infty$.

Atunci, integrala dată este egală cu $I=\int_0^{\infty}(t+2)^2\cdot e^{-t}dt=\int_0^{\infty}(t^2+4t+4)\cdot e^{-t}dt=$

$=\int_0^\infty t^2\cdot e^{-t}dt+4\int_0^\infty t\cdot e^{-t}dt+4\int_0^\infty e^{-t}dt=I_1+I_2+I_3$, care este suma a trei integrale din care primele două sunt euleriene de tip gamma.

Pentru I_1 observăm că în $\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}\cdot e^{-x}dx,\ a\rangle 0.$ avem a-1 =2 adică a =3 și atunci

$I_1=\Gamma(3)=(3-1)!=2!=2$.

Pentru I_2 observăm că în $\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}\cdot e^{-x}dx,\ a\rangle 0.$ avem a-1 =1 adică a =2 și atunci

$I_2=\Gamma(2)=(2-1)!=1!=1$, iar pentru

I_3 avem $I_3=\int_0^a e^{-t}dt=\left(-e^{-t}\right)\Big|_0^a=-e^{-a}+e^0=-\frac{1}{e^a}+1=1$. Așadar, $I=\int_2^\infty x^2\cdot e^{-x+2}dx=2+4\cdot 1+4=10.$

2) $I=\int_1^\infty x^3\cdot e^{-2x}dx.$

Rezolvare: Mai întîi facem notația $-2x=-t\Rightarrow x=\frac{t}{2}\Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt$ și schimbăm și limitele de integrare,

astfel $x=1\Rightarrow t=2,\ x=\infty\Rightarrow t=\infty$

Rezultă, $I=\int_2^\infty\left(\frac{t}{2}\right)^3\cdot e^{-t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{16}\cdot\int_2^\infty t^3\cdot e^{-t}dt$

Observăm că integrala obținută este una euleriană și anume, o integrală gamma de forma

$\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}\cdot e^{-x}dx,\ a\rangle 0,$ unde facem notația 3 = a-1 adică a = 4 și atunci obținem:

$I=\frac{1}{16}\cdot\Gamma(4)=\frac{1}{16}\cdot(4-1)!=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}.$

3. $I=\int_0^\infty\sqrt{x}\cdot e^{-3x}dx$.

Rezolvare: Se face substituția $-3x=-t\Rightarrow x=\frac{t}{3}\Rightarrow dx=\frac{1}{3}dt$. Pentru $x=0\Rightarrow t=0$ și $x=\infty\Rightarrow t=\infty$.

Astfel, $I=\int_0^\infty\sqrt{x}\cdot e^{-3x}dx=\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-3x}dx=\int_0^\infty\left(\frac{t}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-t}\cdot\left(\frac{1}{3}dt\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}\cdot\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-t}dt=$

Am obținut o integrală gamma unde facem notația $\frac{1}{2}=a-1\Rightarrow a=\frac{3}{2}$.

Atunci, $I=\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\pi}.$

4) $I=\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt[4]{x}(1+x)}dx$.

Rezolvare: Integrala dată se mai scrie de forma $I=\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt[4]{x}(1+x)}dx=\int_0^\infty\frac{x^{-\frac{1}{4}}}{x+1}dx=\beta(a,b)$,

care este o integrală beta $\beta(a,b)=\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}dx.$, în care facem notația $a-1=-\frac{1}{4}\Rightarrow a=\frac{3}{4}$ și conform definiției, cum $a+b=1\Rightarrow \beta(a;b)=\frac{\pi}{\sin(\frac{3}{4}\pi)}$. S-a folosit formula $\beta(a,b)=\frac{\pi}{\sin(a\pi)}$, dacă a+b=1.

5). $I=\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}dx$.

Rezolvare: În integrala dată se face substituția $x^2=t\Rightarrow x=\sqrt{t}\Rightarrow dx=\frac{1}{2\sqrt{t}}dt$. Atunci,

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}dx=\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{\sqrt{t}}}{(1+t)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{1}{4}}}{(1+t)^2\cdot t^{\frac{1}{2}}}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{(1+t)^2}dt=\frac{1}{2}\cdot\beta(a;b).$$

Aceasta este o integrală beta, în care facem notația $a-1=-\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$, și din $a+b=2\Rightarrow b=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. Așadar,

$$I=\frac{1}{2}\cdot\beta(\frac{1}{2},\frac{3}{2})=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\cdot\left(\frac{3}{2}-1\right)\Gamma(\frac{3}{2}-1)}{(2-1)!}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{(2-1)!}=\pi.$$

S-au folosit formulele $\beta(a,b)=\frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ **și** $\Gamma(a)=(a-1)\Gamma(a-1),\ \forall a\rangle 1$, $\Gamma(n)=(n-1)!,\forall n\in\mathbb{N}$.

6). $I=\int_0^1\sqrt{x}\cdot\ln^3 x\ dx$.

Rezolvare: Se face substituția $\ln x=t\Rightarrow x=e^t\Rightarrow dx=e^t dt$ și $\sqrt{x}=\sqrt{e^t}=e^{\frac{t}{2}}$.

Din schimbarea limitelor de integrare $x=0\Rightarrow t=-\infty$, $x=1\Rightarrow t=0$ se obține o integrală gama $I=\int_0^1\sqrt{x}\cdot\ln^3 x\ dx=\int_{-\infty}^0 e^{\frac{t}{2}}\cdot t^3\cdot e^t\ dt=\int_{-\infty}^0 t^3\cdot e^{\frac{3t}{2}}dt$ în care trebuie să facem notațiile $\frac{3t}{2}=-y\Rightarrow t=-\frac{2}{3}y\Rightarrow dt=-\frac{2}{3}dy$ și schimbând limitele $t=-\infty\Rightarrow y=\infty$ și $t=0\Rightarrow y=0$ obținem:

$$I=\int_0^1\sqrt{x}\cdot\ln^3 x\ dx=\int_{-\infty}^0 t^3\cdot e^{\frac{3t}{2}}dt=\int_{\infty}^0\left(-\frac{2}{3}y\right)^3\cdot e^{-y}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)dy=-\frac{16}{81}\cdot\int_0^{\infty}y^3\cdot e^{-y}dy=-\frac{16}{81}\cdot\Gamma(4)=-\frac{32}{27}.$$

Bibliografie:

Matematici aplicate în economie. Silvia Dedu, Florentin Șerban. Editua Teocora. 2009

„ Ultimul pas al rațiunii este de a recunoaște că există o infinitate de lucruri care o depășesc”.

Pascal

În legătură cu problema 27336 din GM 2/2017
Clasa a IX-a

Marin Chirciu[1]

Fie numerele $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in (0,\infty)$ **cu proprietatea că** $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_3}+\frac{1}{1+x_4}+\frac{1}{1+x_5}+\frac{1}{1+x_6}=5$ **.**

Să se arate că $\frac{1}{1+25x_1}+\frac{1}{1+25x_2}+\frac{1}{1+25x_3}+\frac{1}{1+25x_4}+\frac{1}{1+25x_5}+\frac{1}{1+25x_6}\geq 1$.

Lucian Tuțescu și Liviu Smarandache, Craiova

Soluție

Cu substituția $\frac{1}{1+x}=y$, avem $x=\frac{1-y}{y}$, iar problema se reformulează:

Fie numerele $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \in (0,\infty)$ cu proprietatea că $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6=5$.

Să se arate că $\frac{y_1}{25-24y_1}+\frac{y_2}{25-24y_2}+\frac{y_3}{25-24y_3}+\frac{y_4}{25-24y_4}+\frac{y_5}{25-24y_5}+\frac{y_6}{25-24y_6}\geq 1$.

Folosind inegalitatea lui Bergström obținem

$\sum\frac{y_1}{25-24y_1}=\sum\frac{y_1^2}{25y_1-24y_1^2}\geq\frac{\left(\sum y_1\right)^2}{25\sum y_1-24\sum y_1^2}=\frac{25}{25\cdot 5-24\sum y_1^2}\geq 1$, unde ultima inegalitate este echivalentă cu $25\geq 25\cdot 5-24\sum y_1^2 \Leftrightarrow 24\sum y_1^2\geq 100 \Leftrightarrow 6\sum y_1^2\geq 25$, adevărată tot din inegalitatea lui Bergström:

Într-adevăr, $\frac{y_1^2}{1}+\frac{y_2^2}{1}+\frac{y_3^2}{1}+\frac{y_4^2}{1}+\frac{y_5^2}{1}+\frac{y_6^2}{1}\geq\frac{(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6)^2}{1+1+1+1+1+1}=\frac{25}{6}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $y_1=y_2=y_3=y_4=y_5=y_6=\frac{5}{6}$, adică pentru

$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=x_6=\frac{1}{5}$.

Notă.

Problema se poate dezvolta:

Fie numerele $x_1, x_2, .., x_n \in (0,\infty)$ cu proprietatea că $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+...+\frac{1}{1+x_n}=n-1$, $n\in \boldsymbol{N}$, $n\geq 3$.

Să se arate că $\frac{1}{1+(n-1)^2x_1}+\frac{1}{1+(n-1)^2x_2}+...+\frac{1}{1+(n-1)^2x_n}\geq 1$. Marin Chirciu, Pitești

Soluție

Cu substituția $\frac{1}{1+x}=y$ avem $x=\frac{1-y}{y}$ și problema se reformulează:

Fie numerele $y_1, y_2, ..., y_n \in (0,\infty)$ cu proprietatea că

$y_1+y_2+...+y_n=n-1$.

Să se arate că $\frac{y_1}{(n-1)^2-(n^2-2n)y_1}+\frac{y_2}{(n-1)^2-(n^2-2n)y_2}+...+\frac{y_n}{(n-1)^2-(n^2-2n)y_n}\geq 1$.

---

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești*

Folosind **inegalitatea lui Bergström**

obținem $\sum \frac{y_1}{(n-1)^2-(n^2-2n)y_1}=\sum \frac{y_1^2}{(n-1)^2 y_1-(n^2-2n)y_1^2}\geq \frac{\left(\sum y_1\right)^2}{(n-1)^2\sum y_1-(n^2-2n)\sum y_1^2}=$

$=\frac{(n-1)^2}{(n-1)^3-(n^2-2n)\sum y_1^2}\geq 1$, unde ultima inegalitate este echivalentă cu

$(n-1)^2\geq (n-1)^3-(n^2-2n)\sum y_1^2 \Leftrightarrow (n^2-2n)\sum y_1^2\geq (n-1)^3-(n-1)^2 \Leftrightarrow$

$(n^2-2n)\sum y_1^2\geq (n-1)^2(n-2)\Leftrightarrow n\sum y_1^2\geq (n-1)^2$, adevărată tot din inegalitatea lui Bergström:

Într-adevăr $\frac{y_1^2}{1}+\frac{y_2^2}{1}+...+\frac{y_n^2}{1}\geq \frac{(y_1+y_2+...+y_n)^2}{1+1+...+1}=\frac{(n-1)^2}{n}$.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $y_1=y_2=...=y_n=\frac{n-1}{n}$, adică pentru

$x_1=x_2=...=x_n=\frac{1}{n-1}$.

Pentru $n=6$ se obține problema 27336 din GM 2/2017.

O extindere şi o rafinare pentru inegalitatea lui Cesaro

de Neculai Stanciu, Buzău şi Titu Zvonaru, Comăneşti

Inegalitatea lui *Cesaro*:

Dacă $x,y,z>0$, atunci $(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8xyz$, (C).

Vom demonstra următoarea intercalare pentru inegalitatea (C) :

Dacă $x,y,z>0$ şi $m\geq 1$, atunci

$$\frac{24xyz}{(m+2)(x+y)(y+z)(z+x)}\leq \frac{x}{mx+y+z}+\frac{y}{x+my+z}+\frac{z}{x+y+mz}\leq \frac{3}{m+2}, (*).$$

Pentru inegalitatea din stânga: cu inegalitatea MA-MH avem

$$\frac{1}{yz(mx+y+z)}+\frac{1}{zx(x+my+z)}+\frac{1}{xy(x+y+mz)}\geq \frac{9}{3mxyz+x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+x^2z+xz^2}.$$

Rămâne de arătat că

$$\frac{9}{3mxyz+x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+x^2z+xz^2}\geq \frac{24}{(m+2)(x+y)(y+z)(z+x)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(m+2)(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+x^2z+xz^2)+6(m+2)xyz\geq$$

$$\geq 24mxyz+8(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+x^2z+xz^2)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (3m-2)(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+x^2z+xz^2)\geq 6(3m-2)xyz$, adevărat cu MA-MG.

Pentru inegalitatea din dreapta avem:

$$\sum_{ciclic}\frac{x}{mx+y+z}-\frac{3}{m+2}=\sum_{ciclic}\left(\frac{x}{mx+y+z}-\frac{1}{m+2}\right)=\frac{1}{m+2}\sum_{ciclic}\left(\frac{x-y}{mx+y+z}+\frac{x-z}{mx+y+z}\right)=$$

$$=\frac{1}{m+2}\sum_{ciclic}\left(\frac{x-y}{mx+y+z}+\frac{y-x}{x+my+z}\right)=\frac{1}{m+2}\sum_{ciclic}\frac{-(m-1)(x-y)^2}{(mx+y+z)(x+my+z)}\leq 0$$

Asupra unor funcţii şi medii pe $\mathbb{R}_+^*$

de D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu şi Gabriel Tica

Vom nota cu $M(\mathbb{R}_+^*)$ mulţimea tuturor mediilor care se pot defini pe $\mathbb{R}_+^*$ iar cu $F(\mathbb{R}_+^*)$ mulţimea tuturor funcţiilor $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$. Să mai notăm cu A media aritmetică, G media geometrică, H media armonică şi P media pătratică, adică:

$$A(a_1,a_2,...,a_n)=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n};\ G(a_1,a_2,...,a_n)=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_n};$$

$$H(a_1,a_2,...,a_n)=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}};\ P(a_1,a_2,...,a_n)=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}},$$

unde $n\in N, n\geq 2$ şi $a_1,a_2,...,a_n\in R_+^*$.

Este evident că $\{A,G,H,P\}\subset M(R_+^*)$ şi să considerăm propoziţiile:

p:'' $M(M(x,y),M(z,t))=M(x,y,z,t),\ \forall x,y,z,t\in R_+^*$ cu $M\in M(R_+^*)$'';

q:'' $M(x,y,z,M(x,y,z))=M(x,y,z),\ \forall x,y,z\in R_+^*$ cu $M\in M(R_+^*)$'';

r:'' $M(x,y,z,t)=t\Rightarrow t=M(x,y,z)$ cu $x,y,z\in R_+^*$ şi $M\in M(R_+^*)$''.

Să notăm $N(R_+^*)=\{M\in M(R)|\ M$ verifică propoziţiile $p,q,r\}$.

Deoarece $\{A,G,H,P\}\subset N(R_+^*)$ rezultă că $N(R_+^*)\neq\varnothing$.

Să demonstrăm acum următoarea:

Propoziţie. Fie $f\in F(R_+^*)$ şi $M,N\in N(R_+^*)$. Dacă:

$$M(f(x),f(y))=f(N(x,y)),\ \forall x,y\in R_+^* \qquad (1)$$

atunci,

$$M(f(x),f(y),f(z))=f(N(x,y,z)),\forall x,y,z\in R_+^* \qquad (2)$$

Demonstraţie. Deoarece $M\in N(R_+^*)$, atunci:

$$M(f(x),f(y),f(z),f(t))=M(M(f(x),f(y)),M(f(z),f(t))),\ \forall x,y,z,t\in R_+^* \quad (3)$$

Deoarece $M(f(x),f(y))=f(N(x,y))$, $\forall x,y\in R_+^*$ din relaţia (3) deducem:

$$M(f(x),f(y),f(z),f(t))=M(f(N(x,y),f(N(z,t))=$$
$$=f(N(N(x,y),N(z,t)))=f(N(x,y,z,t)),\forall x,y,z,t\in R_+^* \qquad (4)$$

Dacă în relaţia (4) luăm $t=N(x,y,z)$ rezultă (conform q):

$$M(f(x),f(y),f(z),f(t))=f(N(x,y,z))=f(t),\forall x,y,z\in R_+^* \qquad (5)$$

Conform cu proprietatea r din relaţia (5) obţinem că:

$$f(t)=M(f(x),f(y),f(z)),\forall x,y,z\in R_+^*\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow M(f(x),f(y),f(z))=f(N(x,y,z)),\forall x,y,z\in R_+^*,$$

şi cu aceasta propoziţia este demonstrată.

Să observăm că $\{A,G,H,P\}\subset N(R_+^*)$ şi atunci conform propoziţiei demonstrate, pentru orice $f\in F(R_+^*)$ şi pentru orice $(X,Y)\in\{A,G,H,P\}\times\{A,G,H,P\}$ dacă:

$$X(f(x),f(y))=f(Y(x,y)),\forall x,y\in R_+^* \qquad (6)$$

atunci:

$$X(f(x),f(y),f(z))=f(Y(x,y,z)),\ \forall x,y,z\in R_+^* \qquad (7)$$

Aplicaţii

1. Dacă $X=A, Y=G$ şi dacă $f\in F(\mathbb{R}_+^*)$ are proprietatea că

$$f(x)+f(y)=2\cdot f(\sqrt{xy}),\forall x,y\in\mathbb{R}_+^*,\text{ atunci:}$$

$$f(x)+f(y)+f(z)=3\cdot f(\sqrt[3]{xyz}),\forall x,y,z\in\mathbb{R}_+^*,$$

adică am obţinut problema C.6.1 din R.M.T nr. 2/1983, autor *Marian Dincă*.

2. Dacă $X=A, Y=H$ și dacă $f\in F(R_+^*)$ are proprietatea că

$$f(x)+f(y)=2\cdot f\left(\frac{2xy}{x+y}\right),\forall x,y\in\mathbb{R}_+^*,\text{ atunci:}$$

$$f(x)+f(y)+f(z)=3\cdot f\left(\frac{3xyz}{xy+yz+zx}\right),\forall x,y,z\in\mathbb{R}_+^*,$$

adică am obţinut una dintre problemele propuse la Olimpiada Locală de Matematică, Suceava 1987, autor *Vasile Monacu*.

3. Dacă (X,Y) parcurge toate elementele produsului cartezian $\{A,G,H,P\}\times\{A,G,H,P\}$ iar $f\in F(R_+^*)$ verifică relaţia (6) atunci ea verifică și relaţia (7). Am obţinut astfel toate propoziţiile demonstrate în [1].

Bibliografie:

1. Bătineţu-Giurgiu, **M.D.**, *În legătură cu două probleme de concurs*, Revista de Matematică din Craiova, ''Cardinal'', Anul VIII, nr. 1, 1997/1998, pp. 1-4.

Caleidoscop matematic

Puteți completa spațiul punctat cu cifra corespunzătoare?

1111 – 0	3333 – 0
1011 – 1	3518 – 2
2222 – 0	5588 – 4
2134 – 0	6853 – 3
3303 – 1	7777 – 0
3125 – 0	9885 – 5
5610 – 2	7069 – 3
2789 – 3	9567 – 2
8801 – 4	9886 – .....???

Răspuns la pagina 56.

„ Cel care cunoaște toate răspunsurile,
nu a fost întrebat suficient”.
Confucius
(551- 479)

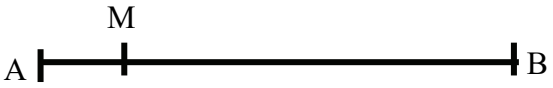
3. Probleme rezolvate

▪ Clasa a V-a

G:772. **Punctul M aparţine segmentului $[AB]$ şi $[MB]$ este de 23 ori jumătatea treimii sfertului segmentului $[AB]$. A câta parte din $[AB]$ este $[AM]$?** **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

Rezolvare:

$$MB = 23\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot AB = \frac{23}{24}AB \Rightarrow AM = \frac{1}{24}AB$$



G:773. **Precupeața Ioana vinde în piață ouă. Ea reușește să vândă întreaga cantitate în 4 zile după cum urmează:**
În prima zi vinde $\frac{2}{3}$ din cantitatea totală de ouă și $\frac{1}{3}$ dintr-un ou,
În a doua zi vinde $\frac{2}{3}$ din cantitatea rămasă după prima zi și $\frac{1}{3}$ dintr-un ou,
În a treia zi vinde $\frac{2}{3}$ din cantitatea rămasă după a doua zi și $\frac{1}{3}$ dintr-un ou,
În cea de-a patra zi vinde $\frac{2}{3}$ din cantitate după a treia zi și $\frac{1}{3}$ dintr-un ou ramânând astfel fără niciun ou după cele patru zile. Câte ouă a avut precupeața inițial?
Ramona- Carmen Grigore, Maria Boborel , Craiova

Rezolvare:
Notăm cu x - numărul total de ouă
În prima zi vinde: $\frac{2}{3}\cdot x+\frac{1}{3}$ rămânând: $x-\left(\frac{2}{3}\cdot x+\frac{1}{3}\right)=\frac{x}{3}-\frac{1}{3}$- ouă (noul rest),
În a doua zi vinde: $\frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}$ rămânând: $\frac{x}{3}-\frac{1}{3}-\left[\frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\right]=\frac{x}{9}-\frac{4}{9}$- ouă (noul rest),
În a treia zi vinde: $\frac{2}{3}\left(\frac{x}{9}-\frac{4}{9}\right)+\frac{1}{3}$ rămânând: $\frac{x}{9}-\frac{4}{9}-\left[\frac{2}{3}\left(\frac{x}{9}-\frac{4}{9}\right)+\frac{1}{3}\right]=\frac{x}{27}-\frac{13}{27}$- ouă (noul rest),
În cea de-a patra zi vinde: $\frac{2}{3}\left(\frac{x}{27}-\frac{13}{27}\right)+\frac{1}{3}$ rămânând: $\frac{x}{27}-\frac{13}{27}-\left[\frac{2}{3}\left(\frac{x}{27}-\frac{13}{27}\right)+\frac{1}{3}\right]=\frac{x}{81}-\frac{40}{81}$ - ouă (noul rest), însă după cea de-a patra zi precupeața rămânând fără niciun ou înseamnă că noul rest este 0.
Deci: $\frac{x}{81}-\frac{40}{81}=0 \Leftrightarrow \frac{x}{81}=\frac{40}{81} \Rightarrow x=40$ ouă.
Precupeața a avut inițial 40 de ouă.

G:774. **Determinați numărul natural $\overline{ab}$ știind că $\overline{aa}^2+\overline{aa}\times\left(\overline{ab}-b\right)+b=2018$.**
Nicolae Ivășchescu , Canada

Rezolvare:
Evident $\overline{aa}$ nu poate fi mai mare decât 45, deoarece $45^2=2025\rangle 2018$ iar atunci dând valori lui $\overline{aa}$ și cum 44 nu verifică relația dată, găsim a=3 și prin înlocuire se obține b=5. Așadar, $\overline{ab}=35$.

G:775. Fie numărul $x=2^{2018n+2}\cdot 5^{2018n+6}-7,\ n\in\mathbb{N}^*$. Să se afle n ştiind că: suma cifrelor numărului x este 36348.

IulianaTraşcă, Olt

Rezolvare:

$x=2^{2018n+2}\cdot 5^{2018n+6}-7\Rightarrow x=5^4\cdot 10^{2018n+2}-7$; $\quad x=625\underbrace{000...0}_{2018n+2}-7\Rightarrow x=624\underbrace{999...9}_{2018n+1}3$

Suma cifrelor numărului x este $6+2+4+3+9\cdot(2018n+1)=24+18162n.$

$24+18162n=36348\Rightarrow n=2$

G:776. Să se scrie numerele 38, 38^2, $38^n, n\in\mathbb{N}$ ca sumă de trei pătrate perfecte nenule şi distincte.

Marin Chirciu, Piteşti

Rezolvare: $38=2^2+3^2+5^2$; $\ 38^2=(2\cdot 19)^2=2^2\cdot(1+6^2+18^2)=2^2+12^2+36^2$.

$38^n=38^{2k}=38^{2k-2}\cdot 38^2=(38^{k-1}\cdot 2)^2+(38^{k-1}\cdot 12)^2+(38^{k-1}\cdot 36)^2$, dacă n este par, n=2k;

$38^n=38^{2k+1}=38^{2k}\cdot 38=(38^k\cdot 2)^2+(38^k\cdot 3)^2+(38^k\cdot 5)^2$,, dacă n este impar, n=2k+1;

G:777. Scrieţi numărul 1035 ca diferenţă de două pătrate perfecte.

Diaconu Radu, Sibiu

Rezolvare: Avem $x^2-y^2=1035\Leftrightarrow(x-y)\cdot(x+y)=3^2\cdot 5\cdot 23$. Cum $x,y\in\mathbb{N}$, trebuie ca $x-y\geq 1$.

Cum $x-y,x+y\in\mathbb{N}$, putem avea posibilităţile: $(x-y,x+y)\in\{(1;1035),(3;345),(9;115),(15;69)\}$.

Rezultă $(x;y)\in\{(518;517),(174;171),(62;53),(42;27)\}$

G:778. Determinaţi valorile naturale ale lui n pentru care numărul $a=0,7+1,7+2,7+....+\overline{n,7}$ este, de asemenea natural.

Marian Ciuperceanu , Craiova

Rezolvare:

Cum $n(n+1)$ este par, deducem $\frac{n(n+1)}{2}\in\mathbb{N}$.Atunci, $a\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{7}{10}(n+1)\in\mathbb{N}\Rightarrow n+1=10^k,\ k\in\mathbb{N}^*$.

Deci, $n=10^k-1$, adică $n\in\{9;99;999;....;\overline{99...9},...\}$.

G:779. Să se determine cifrele a şi b ştiind că în sistemul zecimal restul împărţirii numărului $\overline{aaaa}$ la $\overline{ba}$ este $\overline{ab}$.

Petre Rău, Galaţi

Rezolvare:

$A=\overline{aaaa}-\overline{ab}=11111a-10a-b=11101a-b=11101(10b+a)-111011b=11101\overline{ba}-31\cdot 3581b$.

Ştiind că A se divide cu $\overline{ba}$, rezultă că produsul $31\cdot 3581b$ se divide cu $\overline{ba}$. Cum 3581 este prim, atunci 31b se divide cu $\overline{ba}$. $\frac{31b}{10b+a}=3+\frac{b-3a}{10b+a}\Rightarrow b=3a$. Aşadar, $(a,b)\in\{(1;3),(2;6),(3;9)\}$.

G:780. Determinaţi numerele prime p şi q astfel încât p^4-q şi p^4+q să fie de asemenea numere prime.

Lucian Tuţescu , Grigore Dan – Lucian, Craiova

Rezolvare: Evident p şi q nu pot fi simultan impare. Aşadar avem două cazuri:

Dacă $p=2\Rightarrow(16-q,16+q)=1$; convine **q=3, q=13.**

Dacă **q=2** atunci p^4-2 **şi** p^4+2 trebuie să fie numere prime. Pentru $p=3k\pm 1\Rightarrow p^4+2=M_3$

şi $p^4+2\rangle 3$, aşadar, **p=3k** de unde **p=3** şi atunci $p^4-2=79$, **şi** $p^4+2=83$.

În concluzie, $(p;q)=\{(2;3),(2;13),(3;2)\}$.

G:781. Arătaţi că numărul $N=\underbrace{\overline{111...1}}_{2010\text{ de }1}$ este compus.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

***Rezolvare*:** $N=1+10+...+10^{2009}=\frac{10^{2010}-1}{10-1}=\frac{1}{9}(10^{2010}-1)$.

$2010=2\cdot 1005\Rightarrow 10^{2010}-1=(10^2)^{1005}-1=(10^2-1)(1+10^{1\cdot 2}+10^{2\cdot 2}+10^{3\cdot 2}+...+10^{1004\cdot 2})$ Rezultă

$N=\frac{1}{9}(10^{2010}-1)=(\frac{10^2-1}{9})(1+10^{1\cdot 2}+10^{2\cdot 2}+10^{3\cdot 2}+...+10^{1004\cdot 2})=$

$=11\cdot(1+10^{1\cdot 2}+10^{2\cdot 2}+10^{3\cdot 2}+...+10^{1004\cdot 2})=$ număr compus.

Observaţie: Se știe că orice număr cu un număr par de cifre identice este un multiplu de 11.

G:782. Să se arate că numărul $2^{3n+2}\cdot 3^{2n+1}+7^n$ este divizibil cu 13 pentru orice număr natural n.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Rezolvare: Avem: $2^{3n+2}\cdot 3^{2n+1}+7^n=4\cdot 8^n\cdot 3\cdot 9^n+7^n=12\cdot 72^n+7^n=13\cdot 72^n-(72^n-7^n)$

Deoarece $(a^n-b^n)\vdots(a-b)$ pentru orice două numere naturale a şi b (a>b) şi n natural, deducem că numărul $(72^n-7^n)\vdots(72-7)$, adică se divide la $65=5\cdot 13$ şi deci la 13. Cum şi celălalt număr se divide la 13 rezultă că numărul dat se divide la 13.

G:783. Determinaţi câtul și restul împărțirii numărului 7^{2018} la $8\cdot 7^{2015}$ **IulianaTrașcă,** Olt

Rezolvare: $7^{2018}=343\cdot 7^{2015}=(336+7)\cdot 7^{2015}=(8\cdot 7^{2015})\cdot 42+7^{2016}$.

Cum $7^{2016}<8\cdot 7^{2015}\Rightarrow$ câtul este 42, iar restul este 7^{2016}.

G:784. Notăm cu A mulţimea numerelor de cinci cifre distincte formate cu elementele mulţimii $\{1,2,3,7,8\}$. Determinaţi $m\in A$ astfel încât $4m\in A$.(În legătură cu problema E:14596)

Titu Zvonaru, Comăneşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Trebuie determinate cifrele a,b,c,d,e şi x,y,z,t,u astfel încât $\{a,b,c,d,e\}=\{x,y,z,t,u\}=\{1,2,3,7,8\}$ şi $4\cdot\overline{abcbde}=\overline{xyztu}$.

Se vede uşor că $a=1$ sau $a=2$, iar din motive de paritate, $u=2$ sau $u=8$.

1) $4\cdot\overline{1bcde}=\overline{xyztu}$. Deoarece $x\geq 4$ şi $4\cdot 18732=74928$, rezultă că $x=7$.

Pentru a obţine $x=7$, trebuie ca $b=7$ sau $b=8$.

(i) Fie $b=7$, trebuie ca $c=8$ (altfel nu obţinem cifra de transport 3):

$4\cdot 17823=71292$; $4\cdot 17832=71328$ care este soluţie.

(ii) Fie $b=8$. Avem $4\cdot\overline{18cde}=\overline{7yztu}$.

-Dacă $u=2$, atunci $4\cdot\overline{18cde}=\overline{7yzt2}\Rightarrow 4\cdot\overline{18cd3}=\overline{7yzt2}$ şi trebuie să verificăm posibilităţile:

$4\cdot 18273=73092$ şi $4\cdot 18723=74892$ şi nu obţinem soluţii.

-Dacă $u=8$, atunci $4\cdot\overline{18cde}=\overline{7yzt8}\Rightarrow 4\cdot\overline{18cd2}=\overline{7yzt8}$ sau $4\cdot\overline{18cd7}=\overline{7yzt8}$ şi avem posibilităţile:

$4\cdot 18372=73488$, $4\cdot 18732=74928$, $4\cdot 18237=72948$, $4\cdot 18327=73308$; nu obţinem soluţii.

2) $4\cdot\overline{2bcde}=\overline{xyztu}$. Deducem uşor că $b=1, x=8$ şi atunci nu putem avea decât $4\cdot\overline{21cde}=\overline{8yzt2}$, adică $e=3$ sau $e=8$:

$4\cdot 21783=87132$, $4\cdot 21873=87612$, $4\cdot 21378=85512$, $4\cdot 21738=86952$.

Am obţinut două soluţii $4\cdot 17832=71328$ şi $4\cdot 21783=87132$.

G:785. a)Determinaţi cel mai mic număr natural de forma a^2+b^2 care are 25 de divizori cu proprietatea că a şi b sunt numere naturale, prime între ele;

b) Determinaţi toate perechile (a,b) de numere naturale, prime între ele, astfel încât a^2+b^2 este cel mai mic număr care are 25 de divizori.

Marius Drăgan, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

***Rezolvare*: a)** Fie $A=a^2+b^2$. Deoarece A are 25 de divizori, atunci $A=p^{24}$ sau $A=p^4q^4$, unde p şi q sunt numere prime distincte. Se mai ştie că un număr natural A este sumă de două pătrate perfecte, prime între ele, dacă şi numai dacă A este de forma $4k+1$ sau $4k+2$. Deci, $A=5^4\cdot 13^4=17850625$.

b) Fie $A=a^2+b^2$. Deoarece A are 25 de divizori, atunci $A=p^{24}$ sau $A=p^4q^4$, unde p şi q sunt numere prime distincte. A este de forma $4k+1$ sau $4k+2$. Deci, $A=5^4\cdot 13^4=17850625$.

După ceva calcule am obţinut 12 perechi (a,b); dintre acestea doar două verifică condiţia $(a,b)=1$ şi anume $(a,b)=(2016,3713)$, respectiv $(a,b)=(2047,3696)$.

G:786. Să se demonstreze că $10^{n+k}-10^n$ se poate scrie ca sumă a $18k$ pătrate perfecte nenule oricare ar fi n şi k numere naturale nenule.

Marius Drăgan, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

***Rezolvare*:** Avem: $10^{n+k}-10^n=9(10^n+10^{n+1}+...+10^{n+k-1})$;

$1^2+3^2=10\Rightarrow 10^{2k+1}=10^{2k}(1^2+3^2)=\left(10^k\right)^2+\left(3\cdot 10^k\right)^2$, (1);

$6^2+8^2=10^2\Rightarrow 10^{2k+2}=10^{2k}(6^2+8^2)=\left(10^k\cdot 6\right)^2+\left(8\cdot 10^k\right)^2$, (2).

Din (1) și (2) rezultă că oricare ar fi t număr natural nenul există numerele natural nenule a şi b astfel încât: $10^t=a^2+b^2$, (3). Dar, $10^{n+k}-10^n=9(10^n+10^{n+1}+...+10^{n+k-1})$, (4).

Din (3) şi (4) rezultă concluzia.

G:787. Să se arate că fracția $F=\dfrac{46391}{34289}$, este reductibilă.

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare: Arătăm că fracția $F=\dfrac{a}{b}$ este reductibilă $\Leftrightarrow \dfrac{a-b}{b}$ este reductibilă.

"$\Rightarrow$" Fie $F=\dfrac{a}{b}$ reductibilă. Atunci, $a=md$, $b=nd$, $d\in\mathbb{Z}-\{-1;0;1\}, m,n\in\mathbb{Z}^*$.

$\Rightarrow \dfrac{a-b}{b}=\dfrac{(m-n)d}{nd}=\dfrac{m-n}{n}$ este reductibilă.

"$\Leftarrow$" Dacă $\dfrac{a-b}{b}$ este reductibilă , atunci $a-b=kd$, $b=nd$, $d\in\mathbb{Z}-\{-1;0;1\}, k,n\in\mathbb{Z}^*$

$\Rightarrow \dfrac{a-b}{b}=\dfrac{kd}{nd}=\dfrac{k}{n}\Rightarrow \dfrac{a}{b}-1=\dfrac{k}{n}\Rightarrow \dfrac{a}{b}=\dfrac{b+kd}{b}=\dfrac{nd+kd^{(d}}{nd}=\dfrac{n+k}{n}$, adică $F=\dfrac{a}{b}$ este reductibilă.

Pentru $a=46391, b=34289$ obținem $F=\dfrac{a}{b}=\dfrac{23\cdot 2017}{17\cdot 2017}=\dfrac{46391}{34289}$.

▪ Clasa a VI-a

G:788. Aflaţi x, y, z, întregi, dacă $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{3}{y}=\dfrac{z}{x-1}$. **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

Rezolvare: Relaţia dată presupune: 1) y(x+1) = 6. 2) yz = 3(x-1). 3) (x+1)(x-1) = 2z.. Obținem: $(x,y,z)\in\{(5;1;12),(-7,-1,24),(-3,-3,4)\}$.

G:789. Găsiți cel mai mare și cel mai mic număr natural cu cifre diferite, astfel încât cifra miilor să fie7, iar produsul cifrelor din stânga lui 7 să fie maxim și egal cu produsul cifrelor din dreapta lui 7.

Petre Păunescu, Roșiorii de Vede, Teleorman

Rezolvare: .Din 1·2·3·…·9=7o·72^2=70·72·72,avem 72=3·4·6=1·8·9.Deci 9817643 e cel mai mare, iar 897346 e cel mai mic.

G:790. Să se arate că numărul m=4072324 este pătrat perfect iar numărul n=1357441 este compus.

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare:Numărul m este divizibil cu 4 și îl scriem succesiv:

$m = 4\cdot 1018081 = 4(1000000+18000+81) = 4(1000^2+2\cdot 1009+9^2) = 4\cdot(1009)^2 = 2018^2$;

$$n = 1357441 = \frac{4072323}{3} = \frac{2018^2-1}{3} = \frac{(2017+1)(2019-1)-1}{3} = \frac{2017\cdot 2019}{3} = 2017\cdot 673.$$

G:791. Determinați câte regiuni determină 2019 dreptre coplanare, oricare două neparalele și oricare trei neconcurente.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Rezolvare: Numărul de regiuni determinate de n drepte coplanar este egal cu $\frac{n(n+1)}{2}+1$. În cazul nostru n = 2109 iar numărul de regiuni este egal cu $2019\cdot 1010+1$.

G:792. Rezolvați în numere întregi ecuația: $x+7xy=-11$.

Radu Diaconu, Sibiu

Rezolvare. Ecuația se scrie astfel: $x+7xy=-11 \Leftrightarrow x\cdot(1+7y)=-11$.

Deoarece $x, 1+7y, -11$, sunt numere întregi, avem posibilitățile:

a). $x=-11$. Atunci $1+7y=1 \Rightarrow y=0$.

b). $x=-1$. Atunci $1+7y=11 \Rightarrow y=\frac{10}{7}\notin Z$.

c). $x=1$. Obținem $1+7y=-11 \Rightarrow y=-\frac{12}{7}\notin Z$.

d). $x=11$. Obținem $1+7y=-1 \Rightarrow y=-\frac{2}{7}\notin Z$.

Soluția ecuației este: $S=\{(-11,0)\}$.

G:793. Determinați numerele naturale x, y și z știind că satisfac simultan condițiile:

1) $\frac{x}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z}{4}$**; 2)** $xyz=2xy+xz+5yz$ **;**

Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Evident, din 1) rezultă $x=5k,\ y=2k,\ z=4k,\ k\in\mathbb{N}$. Atunci, $xyz=40k^3,\ 2xy+xz+5yz=80k^2$. Din 2) rezultă $k\in\{0;2\}$ iar $x=0, y=0, z=0$ sau $x=10, y=4, z=8$.

G:794. Fie $a,b,c\in\mathbb{N}$**, pentru care există numerele prime între ele x și y cu** $x+y=n$**, unde** $n\in\mathbb{N}$ **astfel încât** $2na=xb+yc$**. Arătați că** $\frac{(2a-b)(c-2a)}{xy}\in\mathbb{N}$**.**

Marin Chirciu, Pitești

Rezolvare: Din datele problemei rezultă $2a(x+y)=xb+yc \Leftrightarrow x(2a-b)=y(c-2a)$. Cum $(x,y)=1 \Rightarrow 2a-b=M_y$ și $c-2a=M_x \Rightarrow 2a-b=yA$ și $c-2a=xB,\ A,B\in\mathbb{N}$.

Atunci, $\frac{(2a-b)(c-2a)}{xy}=\frac{yA\cdot xB}{xy}=AB\in\mathbb{N}$.

G:795. Să se arate că pentru orice k natural, k≥1, numărul A = $9^k+19^k+29^k+\ldots+99^k$ se divide cu 540 atunci când k este impar și cu 30 atunci când k este par.

Petre Rău, Galați

Rezolvare:

***Rezolvare*:** În afară de termenii cu baza 19, 29, 49, 69, 79 și 89, ceilalți sunt multipli de 3. Se poate observa că 19, 49 și 79 dau restul 1 la împărțirea cu 3 iar 29, 69 și 89 dau restul 2 la împărțirea cu 3. Din (3a+1)k = 3$\mathcal{M}$+1 și (3b+2)k = $\mathcal{M}$3+2k, avem că A = $\mathcal{M}$3+ 3·1 + 3·2k = $\mathcal{M}$3. Așadar, numărul A se divide cu 3.

Totodată, fiecare termen al lui A se termină cu aceeași cifră cu care se termină și numărul 9^k. Fiind zece termeni, înseamnă că numărul A se va termina cu 0, deci este divizibil cu 10. Așadar, indiferent de paritatea lui k, A se divide cu 3·10 = 30.

Să ne ocupăm acum în mod special de cazul în care k ar fi un număr impar.

Se observă că dacă grupăm câte doi termeni de la extremități, și știind că a^k+b^k este multiplu de (a+b) pentru orice k≥1 natural impar, avem că numărul A se divide cu 9+99 = 19+89 = 29+79 = 39+69 = 49+59 = 108. Cum am arătat deja că A se divide cu 5, rezultă că, pentru k impar, A se divide cu 108·5 = 540.

G:796. Să se arate că oricare ar fi cifra nenulă x, numărul $A = 2081^{\overline{2018x}} + 8102^{\overline{x2081}} + 2083^{\overline{x2091}}$ este divizibil cu zece.

IulianaTrașcă, Olt

Rezolvare: $U(2081^{\overline{2018x}}) = 1$

$\overline{x2081} = x\cdot 10^4 + 2080 + 1 \in M_4 + 1 \Rightarrow U\left(8102^{\overline{x2081}}\right) = 2 \qquad \overline{x2091} = x\cdot 10^4 + 2088 + 3 \in M_4 + 3 \Rightarrow U\left(2083^{\overline{x2091}}\right) = 7$.

$U(A) = U\left(2081^{\overline{2018x}} + 8102^{\overline{x2081}} + 2083^{\overline{x2091}}\right) = 0 \Rightarrow A \vdots 10$

G:797. Demonstraţi că numărul $\underbrace{\overline{999...9}}_{2011\text{ de }9} + \overline{1\underbrace{99...9}_{1005\text{ de }9}\underbrace{00...0}_{1005\text{ de }0}}$ este compus.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare : $A = \underbrace{\overline{999...9}}_{2011\text{ de }9} = 10^{2011} - 1$; $B = \overline{1\underbrace{99...9}_{1005\text{ de }9}\underbrace{00...0}_{1005\text{ de }0}} = 2\cdot 10^{2010} - 1005$.

$A + B = 10^{2011} + 2\cdot 10^{2010} - 10^{1005} - 1 = 12\cdot 10^{2010} - 10^{1005} - 1 =$

$= (3\cdot 10^{1005} - 1)(4\cdot 10^{1005} + 1) = \overline{2\underbrace{999...9}_{1005\text{ de }9}} \cdot \overline{4\underbrace{000...0}_{1004\text{ de }0}1}$ = număr compus.

G:798. Să se determine numerele $\overline{abcd}$, ştiind că: $\dfrac{ab+ac+b}{2a+3} = \dfrac{ac+ad+2c}{3a+3} = \dfrac{ab+ad+b+2d}{4a^2+5a}$.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Rezolvare : Conforom proprietăţii şirului de rapoarte egale, avem:

$$\frac{ab+ac+b}{2a+3} = \frac{ac+ad+2c}{3a+3} = \frac{ab+ad+b+2d}{4a^2+5a} = \frac{2ab+2ac+2ad+2b+2c+2d}{4a^2+10a+6} =$$

$$= \frac{a(b+c+d)+(b+c+d)}{2a^2+5a+3} = \frac{(a+1)(b+c+d)}{(a+1)(2a+3)} = \frac{b+c+d}{2a+3} \Rightarrow$$

$$\frac{ab+ac+b}{2a+3} = \frac{b+c+d}{2a+3} \Leftrightarrow ab+ac = c+d \Leftrightarrow d = ab+ac-c \Rightarrow$$

$$\frac{ab+ac+b}{2a+3} = \frac{ac+2c+a^2b+a^2c-ac}{3a+3} \Leftrightarrow b(2a^3-6a-3)+c(2a^3+a+6) = 0.$$

Dacă $a = 1 \Rightarrow 7b = 9c \Rightarrow b = c = d = 0$ sau $b = 9, c = 7, d = 9 \Rightarrow \overline{abcd} \in \{1000, 1979\}$;

Dacă $a \geq 2 \Rightarrow 2a^3 - 6a - 3 > 0$ şi egalitatea de mai sus este verificată numai dacă

$b = c = 0 \Rightarrow d = 0 \Rightarrow \overline{abcd} \in \{2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000\}$.

În concluzie $\overline{abcd} \in \{1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000, 1979\}$.

G:799. Trei copii au împreună 410 lei. După ce fiecare cheltuie din banii proprii 75% , 80% respectiv 85%, atunci rămân cu sume egale de bani. Câţi bani a avut fiecare la început?

Marian Ciuperceanu , Craiova

Rezolvare: $a+b+c=410;\ (1)\quad a-\frac{75}{100}\cdot a=x,\ b-\frac{80}{100}\cdot b=x,\ c-\frac{85}{100}\cdot c=x\Rightarrow$

$a=4x, b=5x, c=\frac{100}{15}x$. *Înlocuind în (1) rezultă* $x=30\Rightarrow a=120lei,\ b=150lei,\ c=200lei$.

G:800. Stabiliţi paritatea numărului $A=(n+2011)(3n+5)(n+2018)+7^n$, unde $n\in\mathbb{N}$.

IulianaTraşcă, Olt

Rezolvare: $(n+2018)-(n+2011)=7\Rightarrow$ numerele $n+2018$ şi $n+2011$ au parităţi diferite, deci unul este par

Deci: produsul $(n+2011)(3n+5)(n+2018)$ este par. Numărul 7^n este impar, $\forall n\in\mathbb{N}$. Deci A este impar

G:801. a) Fie k şi m numere naturale nenule. Arătaţi că dacă $A=(n_1+1)\cdot(n_2+1)\cdot\ldots\cdot(n_k+1)-1$ şi $B=(n_{k+1}+1)\cdot(n_{k+2}+1)\cdot\ldots\cdot(n_{k+m}+1)-1$, atunci $AB+A+B=(n_1+1)\cdot(n_2+1)\cdot\ldots\cdot(n_{k+m}+1)-1$.

b) Pe o tablă sunt scrise inversele numerelor 1, 2, 3,…, 2017. Alegem două dintre numerele de pe tablă, le ştergem şi în locul lor scriem numărul obţinut prin adunarea sumei lor cu produsul lor. Continuăm procedeul până când pe tablă rămâne un singur număr. Care este ultimul număr rămas pe tablă?

Marius Drăgan, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare:

a) Observăm că $A=(A+1)-1$, $B=(B+1)-1$. Scriind $AB+A+B=(A+1)(B+1)-1$ rezultatul rezultă imediat.

b) De la punctul a) rezultă imediat că dacă pe tablă sunt scrise numerele $n_1,n_2,\ldots,n_t$ şi aplicăm operaţiile procedeului acestor numere până când pe tablă rămâne un singur număr acesta este $(n_1+1)\cdot(n_2+1)\cdot\ldots\cdot(n_t+1)-1$. În cazul nostru, numerele scrise la început pe tablă sunt $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{2017}$ iar ultimul număr răs pe tablă va fi

$$(1+1)\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{3}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{2017}+1\right)-1=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2018}{2017}=2018-1=2017.$$

G:802. Dacă două şiruri $a_1,a_2,\ldots,a_{2013}$ şi $b_1,b_2,\ldots,b_{2013}$ sunt construite după regulile :

(i) $a_1=1999$ **şi** $a_2=2003$ **;(ii)** $b_1=2011$ **şi** $b_2=2017$ **;(iii)** $\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{b_{n-1}+b_{n-2}}\ (n>2)$ **şi fiecare fracţie $\frac{a_n}{b_n}$ se consideră ireductibilă, atunci determinaţi cea mai mare şi cea mai mică fracţie de forma $\frac{a_n}{b_n}$.**

Marius Drăgan, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

***Rezolvare*:** Observăm că numerele 1999, 2003, 2011 şi 2017 sunt numere prime.

Lemă. Dacă $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\ (a,b,c,d>0)$, unde ambele fracţii sunt ireductibile, atunci $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$.

Demonstraţie. Deoarece $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, avem $ad<cb$, de unde

$\frac{a+c}{b+d}=\frac{b(a+c)}{b(b+d)}=\frac{ab+cb}{b(b+d)}>\frac{ab+ad}{b(b+d)}=\frac{a(b+d)}{b(b+d)}=\frac{a}{b}$. Similar se demonstraează şi cealaltă inegalitate

Astfel, dacă luăm $c_n=\frac{a_n}{b_n}$, vedem că de fiecare dată putem crea un nou termen, "care este" între cei doi termeni precedenţi. Aşadar, obţinem:

$c_2<c_4<c_6<c_8<c_{10}<\ldots<c_{2n}<\ldots<c_{2n-1}<\ldots<c_9<c_7<c_5<c_3<c_1$.

Deci, cea mai mare fracţie este $c_1 = \frac{1999}{2011}$ şi cea mai mică fracţie este $c_2 = \frac{2003}{2017}$.

G:803. Să se arate că există o infinitate de fracţii $\frac{x}{y}$ şi $\frac{z}{t}$ cu $x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{x}{y} + \frac{z}{t} = \frac{x}{y} \cdot \frac{z}{t}$. **Viorica Dogaru** , Giurgiu

Rezolvare: După eliminarea numitorilor în egalitatea din enunţ obţinem:

$xt + yz = xz;\ xt = xz - yz;\ xt = (x-y)z \Rightarrow t = \frac{(x-y)z}{x}$ (*) Impunem condiţiile $x>x-y>0$.

În (*) avem $t \in \mathbb{N}^*$, doar dacă $x|z$ (deoarece $\frac{x-y}{x} \langle 1$).

Pentru $x = m \in \mathbb{N}^*$, arbitrar fie $z = kx$ şi $x - y = n\langle m$, unde $n, k \in \mathbb{N}^*$. Deci $y = x - n = m - n \in \mathbb{N}^*$ şi $z = mk \in \mathbb{N}^*$. În (*) rezultă $t = \frac{n \cdot mk}{m} = nk \in \mathbb{N}^*$.

Astfel, pentru $m, n, k \in \mathbb{N},\ m\rangle n$ avem $x = m, y = m - n, z = mk, t = nk \in \mathbb{N}^*$ şi fracţiile $\frac{x}{y} = \frac{m}{m-n}$, $\frac{z}{t} = \frac{mk}{nk} = \frac{m}{n}$ care verifică egalitatea din enunţ.

▪ Clasa a VII-a

G:804. Rezolvaţi, în R, ecuaţia $\frac{2x}{5} + \frac{2x+2}{7} + \frac{2x+6}{11} + \frac{2x+8}{13} = 4$. **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

Rezolvare:

Ecuaţia dată este echivalentă cu $\frac{2x}{5} - 1 + \frac{2x+2}{7} - 1 + \frac{2x+6}{11} - 1 + \frac{2x+8}{13} - 1 = 0 \Rightarrow$

$(2x-5)\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$.

G:805. Fie $a, b > 0$ astfel încât $a^3 + b^3 = 2018ab$. Arătaţi că: $a + b \le 2018$.

Diaconu Radu, Sibiu

Rezolvare: Arătăm că:

$a^3 + b^3 \ge ab(a+b) \Leftrightarrow a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2(a-b) - b^2(a-b) \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)(a^2 - b^2) \ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) \ge 0$, ceea ce este evident. Atunci $ab(a+b) \le a^3 + b^3 = 2018ab$. Rezultă:

$ab(a+b) \le 2018ab \Leftrightarrow a + b \le 2018$.

G:806. Numerele reale strict pozitive $a_0, a_1, a_2, \ldots$ verifică relaţia $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, oricare ar fi numărul natural n. Să se demonstreze că a_{1985}, a_{1986},…, a_{2047} sunt mai mari decât 63.

Marius Drăgan, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Vom demonstra că a_{1985}, a_{1986},…, a_{2047} sunt mai mari ca 63.

$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} \Rightarrow a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2} > a_n^2 + 2$; deci

$a_1^2 > 2, a_2^2 > 2+2 = 2\cdot 2, a_3^2 > 4+2 = 2\cdot 3, ..., a_n^2 > 2(n-1)+2 = 2n$, aşadar $a_n > \sqrt{2n}$.

Prin urmare $a_{1985} > \sqrt{3970} > 63, \ldots, a_{2047} > \sqrt{4094} > 63$.

G:807. Să se arate că numărul 284^n se scrie ca o sumă de 8 pătrate perfecte pentru n număr impar şi ca o sumă de 64 de pătrate perfecte pentru n număr par.

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Pentru $n = 2k+1$ avem:

$$284^{2k+1} = (284^k)^2(284) = (284^k)^2(2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2) =$$
$$= (2\cdot 284^k)^2 + (3\cdot 284^k)^2 + (4\cdot 284^k)^2 + (5\cdot 284^k)^2 + (6\cdot 284^k)^2 + (7\cdot 284^k)^2 + (8\cdot 284^k)^2 +$$
$$+ (9\cdot 284^k)^2 = \text{sumă de 8 pătrate perfecte.}$$

Pentru $n = 2k$ avem: $284^{2k} = 284^{2k-2}\cdot 284^2 = (284^{k-1})^2(2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2)^2 =$ sumă de 64 de pătrate perfecte.

G:808. Să se arate că pentru orice număr natulal n, numărul $\frac{81n^5}{40} - \frac{9n^3}{8} + \frac{n}{10}$ este natural.

Petre Rău, Galați

Rezolvare: Numărul dat se mai poate scrie: $\frac{1}{40}n(81n^4 - 45n^2 + 4) = \frac{1}{40}n(9n^2-4)(9n^2-1) =$

$= \frac{1}{120}(3n+2)(3n+1)3n(3n-1)(3n-2)$. Avem astfel de-a face cu produsul a 5 numere naturale consecutive și trebuie arătat că un astfel de număr este divizibil cu 120. Cum 120 = $2^3\cdot 3\cdot 5$, printre cele 5 numere naturale consecutive există cu siguranță unul care este multiplu de 5, cel puțin unul care este multiplu de 3 și cel puțin unul care este multiplu de 4 și încă cel puțin un altul distinct multiplu de 2, deci produsul lor este multiplu de $8=2^3$.

G:809. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $x^2 + y^2 - 65x + 21y + 1166 = 0$.

Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

Ecuația dată este echivalentă cu $(x-33)(x-32) + (y+10)(y+11) = 0$. Știm că $n\cdot(n+1) \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Atunci, fiecare termen este egal cu 0. Rezultă $S = \{(32;-11),(32;-10),(33;-11),(33;-10)\}$.

G:810. Determinați câte numere naturale mai mici decât 999999 , se pot scrie în forma $n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n$, unde $n \in \mathbb{N}$ Care este cel mai mare dintre ele ?

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare: Găsim atâtea numere care verifică enunțul , câte valori naturale ale lui n verifică inegalitatea $n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n \langle\ 999999 \Leftrightarrow n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1 \langle 1000000 \Leftrightarrow\ (n-1)^4 \langle 1000000 = 1000^2 \Rightarrow$ $n \langle 1 + 10\sqrt{10} \approx 32,6 \Rightarrow n \in \{0;1;2;3;....;32\}$. Așadar, există 33 de numere care verifică inegalitatea. Cel mai mare este $(n-1)^4 - 1 = 31^4 - 1 = 923520$.

G:811. Rezolvați ecuația $\sqrt{6 - x\sqrt{5}} - \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} = \sqrt{2} - 1$. **Nicolae Ivăşchescu**, Canada

Rezolvare: Cum $7 - 2\sqrt{10} = \left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)^2$, prin calcul găsim că $\sqrt{6 - x\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$ după care ridicăm la pătrat și găsim x=2.

G:812. Arătați că $\dfrac{\sqrt{2017\cdot 2018 - \sqrt{2017\cdot 2018 - \sqrt{2017\cdot 2018}}}}{\sqrt{2016\cdot 2017 + \sqrt{2016\cdot 2017 + \sqrt{2016\cdot 2017}}}} \rangle\ 1$.

Marian Ciuperceanu , Craiova

Cum $\sqrt{2017\cdot 2018} > \sqrt{2017\cdot 2017} = 2017 \Rightarrow$

$2017\cdot 2018-\sqrt{2017\cdot 2018} < 2017\cdot 2018-2017 = 2017^2$ sau $\sqrt{2017\cdot 2018-\sqrt{2017\cdot 2018}} < 2017$ și

$2017\cdot 2018-\sqrt{2017\cdot 2018-\sqrt{2017\cdot 2018}} > 2017\cdot 2018-2017 = 2017^2$, deci

$\sqrt{2017\cdot 2018-\sqrt{2017\cdot 2018-\sqrt{2017\cdot 2018}}} > 2017$. *(1)*

Analog, $\sqrt{2016\cdot 2017-\sqrt{2016\cdot 2017-\sqrt{2016\cdot 2017}}} < 2017$. (2). Din (1) și (2) rezultă c.c.t.d.

G:813. Să se calculeze partea întreagă a numărului: $\frac{\sqrt{7}}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\sqrt{12}}{2\cdot 3\cdot 4}+...+\frac{\sqrt{n^2+3}}{(n-1)n(n+1)}, n\in N, n\geq 2.$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Rezolvare: Din faptul că: $\sqrt{k^2+3}<k+1 \Leftrightarrow k^2+3<k^2+2k+1 \Leftrightarrow k\geq 2,$

avem: $\sum_{k=2}^{n}\frac{\sqrt{k^2+3}}{(k-1)k(k+1)}<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)k}=1-\frac{1}{n}<1,$ şi din faptul că numărul este pozitiv, rezultă că partea întreagă este egală cu zero.

G:814. Aflaţi perimetrul triunghiului ΔABC , ştiind că $m(\sphericalangle A)=105^0$, $m(\sphericalangle B)=15^0$, $AC=2\sqrt{3}$ *cm.*

Badea Daniela, Ploiești, Prahova

Rezolvare: Fie AD⊥AC, D∈(BC). În ΔADC dreptunghic, m(∢A)=90^0 avem m(∢C)=60^0 ⇒ m(∢ADC)=30^0 ⇒ DC=$4\sqrt{3}$ cm. Din ΔABD isoscel (∢B≡∢DAB) ⇒ [BD]≡[AD].

Din ΔADC dreptunghic, m(∢A)=90^0 ⇒DC=$4\sqrt{3}$ cm, AD=6cm ⇒BD=6cm şi BC=(6+$4\sqrt{3}$)cm.

Fie AM⊥BC, M ∈(BC) şi din ΔMAC dreptunghic ⇒ MC=$\sqrt{3}$ cm, AM=3cm şi BM=(6+$3\sqrt{3}$)cm.

Din ΔMAB cu m(∢M)=90^0 ⇒AB = 3($\sqrt{2}+\sqrt{6}$)cm . Atunci P_{ABC}=(6+$3\sqrt{6}$ + $6\sqrt{3}$ +$3\sqrt{2}$)cm .

G:815. Determinaţi aria trapezului ABCD, cu $AB \parallel CD$, $AB=64$ *cm*, $BC=40$ *cm*, $CD=14$ *cm* **şi** $DA=30$ *cm*.

Marian Ciuperceanu , Craiova

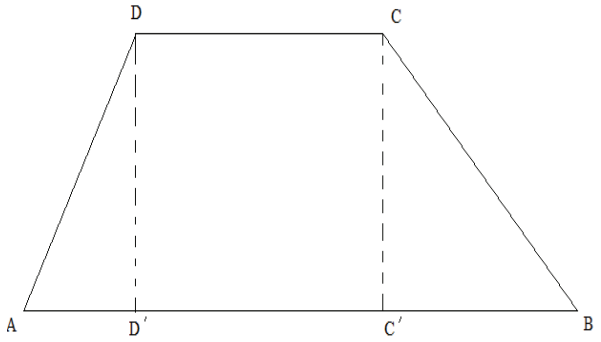
Rezolvare: Ducem înălțimile *DD' , CC' în trapez şi notăm AD' = x, DD' = CC' = h .*

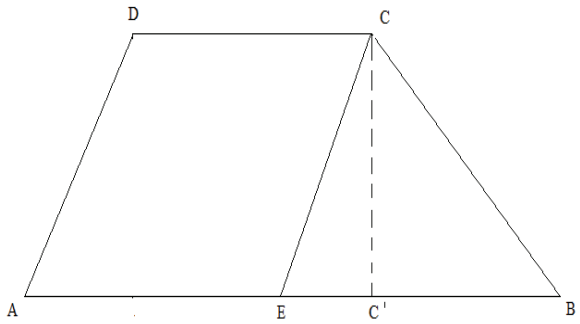
Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice $\Delta AD^{I}D$, $\Delta CC^{I}B$,

obținem: $h^2+x^2=30^2$, $h^2+(64-14-x)^2=40^2$

Scăzând cele două relații obținem x =18 cm ,

h= 24 cm, $A_{ABCD}=1248cm^2$





Ducem $CE \parallel AD$, $E \in (AB)$ și înălțimea trapezului CC^I. Cum $DC \parallel AE$ și $CE \parallel AD \Rightarrow ADCE$ este paralelolgram și CE=AD=30 cm, iar AE=DC=14 cm.
Cum EB=AB-AE=64-14=50 cm, iar
$CE^2 + CB^2 = BE^2 \Rightarrow$
(cu reciproca teoremei lui Pitagora) că triunghiul BCE este dreptunghic în C și înălțimea
$h = \frac{CE \cdot CB}{EB} = 24cm$ Aria trapezului ABCD este: $A_{ABCD} = 1248cm^2$.

G:816. Dacă un triunghi oarecare este asemenea cu triunghiul format de medianele sale atunci determinaţi raportul de asemănare.

Nela Ciceu, Roşiori, Bacău şi **Roxana Mihaela Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Dacă triunghiul oarecare are lungimile laturilor $b < a < c$, atunci avem $m_b > m_a > m_c$.
Din asemănarea celor două triunghiuri avem:

$$\frac{m_b}{c} = \frac{m_c}{b} = \frac{m_a}{a} = k \Rightarrow \frac{m_b^2}{c^2} = \frac{m_c^2}{b^2} = \frac{m_a^2}{a^2} = \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = k^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = k^2(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (1)$$

Din formulele medianelor avem:

$$\begin{cases} 4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \\ 4m_b^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2 \\ 4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 \end{cases}$$, care adunate membru cu membru dau relaţia:

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) \qquad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă raportul de asemănare: $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

▪ Clasa a VIII-a

G:817. Rezolvați ecuația $5x^2 + 10y^2 + 10 + 14xy - 10x - 12y = 0$. **Nicolae Ivăşchescu**, Canada

Rezolvare:

Grupând convenabil termenii obținem

$$(4x^2 + 9y^2 + 1 + 12xy - 4x - 6y) + (x^2 + y^2 + 9 + 2xy - 6x - 6y) = 0 \Leftrightarrow (2x + 3y - 1)^2 + (x + y - 3)^2 = 0.$$

Egalând cu 0 fiecare paranteză se obține soluția $S = \{(8; -5)\}$.

G:818. Dacă $x \in \mathbb{R}$ **rezolvaţi ecuaţia** $3 \cdot |2x+3| + [2x+3] = 13$ **, unde** $|x|$**, respectiv,** $[x]$ **reprezintă modul din x respectiv partea întreagă a lui x**. **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

Rezolvare: Din $|2x+3| = \begin{cases} -2x-3, & x < -\frac{3}{2} \\ 2x+3, & x \geq -\frac{3}{2} \end{cases}$ ecuația dată devine $3(2x+3) + [2x+3] = 13$ și

$4[2x+3] + 3\{2x+3\} = 13$ cu soluția $\frac{1}{6}$.

G:819. Ştiind că inegalitatea $1895x(x^2-4)+1004(x-2)\geq 0$, **este adevărată, atunci să se arate că dacă** $a,b>0$, **atunci are loc inegalitatea** $1895\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)\geq 891\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+2008.$ **Gheorghe Ghiţă,** Buzău

Rezolvare: Cu notaţia $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=x\geq 2$ inegalitatea se rescrie succesiv:

$$1895\left[\left(\frac{a}{b}\right)^3+\left(\frac{b}{a}\right)^3\right]\geq 891\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+2008\Leftrightarrow 1895\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^3-3\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\right]\geq 891\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+2008\Leftrightarrow$$

$$1895(x^3-3x)\geq 891x+2008\Leftrightarrow 1895x^3-5685x-891x-2008\geq 0\Leftrightarrow$$

$$1895x^3-7580x+1004x-2008\geq 0\Leftrightarrow \text{c.c.t.d.}$$

G:820. Determinaţi toate tripletele de numere reale nenule (a,b,c)**, care verifică relaţiile:**

$$a-\left(\frac{b}{c}\right)^2=b-\left(\frac{c}{a}\right)^2=c-\left(\frac{a}{b}\right)^2=1.$$ **Marius Drăgan**, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Relaţiile din enunţ sunt echivalente cu $a^2+b^2=c\cdot b^2$, $b^2+c^2=a\cdot c^2$, $c^2+a^2=b\cdot a^2$.
Se observă imediat că numerele a,b,c trebuie să fie pozitive. Cu inegalitatea mediilor obţinem:

$c\cdot b^2=a^2+b^2\geq 2ab\Rightarrow cb\geq 2a$, (1); $a\cdot c^2=b^2+c^2\geq 2bc\Rightarrow ac\geq 2b$, (2);

$b\cdot a^2=c^2+a^2\geq 2ca\Rightarrow ba\geq 2c$, (3). Dacă înmulţim relaţiile (1) şi (2) obţinem $c^2\geq 4$, dar cum $c>0$ rezultă $c\geq 2$. Analog $a\geq 2$ şi $b\geq 2$.

Din enunţ deducem $a-1=\left(\frac{b}{c}\right)^2$, $b-1=\left(\frac{c}{a}\right)^2$, $c-1=\left(\frac{a}{b}\right)^2$, care prin înmulţire conduc la $(a-1)(b-1)(c-1)=1$, iar ţinând cont de $a\geq 2$, $b\geq 2$, $c\geq 2$ obţinem singura soluţie $(a,b,c)=(2,2,2)$.

G:821. Pentru ce valori naturale ale lui a expresia $E=a^{1010}-a^{1009}+a^2-a$ **se divide cu 2018 ?**

Petre Rău, Galaţi

Rezolvare: Pentru a=0 și a=1 avem E = 0, deci E se divide cu 2018. Pentru a≥2, avem că E = a(a-1)(a^{1008}-1) și, conform teoremei lui Fermat, a^{1008}-1 se divide cu 1009 dacă (a;1009)=1, iar produsul a(a-1) este par pentru orice a≥1. Cum 2018 = 2·1009, rezultă că E se divide cu 2018 pentru orice număr natural a prim cu 1009 sau a e multiplu de1009.

G:822. Cu formule de calcul prescurtat, descompuneţi în factori:

$$A=\frac{2ab+3cd}{6}+\sqrt{\frac{2abcd}{3}}-1,\ a,b,c,d\rangle 0, \text{reale.}$$ **Petre Păunescu**, Roşiorii de Vede, Teleorman

Rezolvare: Din $A=\frac{2ab+3cd}{6}=\frac{2ab}{6}+\frac{3cd}{6}=\frac{ab}{3}+\frac{cd}{2}=\left(\sqrt{\frac{ab}{3}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{cd}{2}}\right)^2$. Deci

$A=x^2-1=(x-1)(x+1)$ unde $x=\sqrt{\frac{ab}{3}}+\sqrt{\frac{cd}{2}}$.

G:823. a) Să se arate că există numerele naturale nenule x **şi** y**, cu** $x>y$ **astfel încât** $x^2-y^2=(k+1)^3-k^3, \forall k\in\mathbb{N}^*$ **şi deduceţi suma** $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) Determinaţi $n\in\mathbb{N}^*$ **, pentru care** $\frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{1+2+3+...+n}$**, este număr natural.**

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare:

a) Din $(k+1)^3-k^3=3k(k+1)+1$, dând valori de la 1 la n pentru k și însumând relațiile se obține $(n+1)^3-1^3=3S_2+3S_1+n$, unde $S_1=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$, iar $S_2=1^2+2^2+....+n^2$ se calculează din relația de mai sus adică $S_2=\frac{(n+1)^3-n-1}{3}-S_1=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) Se folosește punctul a)

$$\frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{1+2+3+...+n}=\frac{S_2}{S_1}=\frac{n(n+1)(2n+1)\cdot 2}{6n(n+1)}=\frac{2n+1}{3}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow n=3k+1,\ k\in\mathbb{N}.$$

G:824. Fie $x,y\rangle 0$ și $x^3+y^3=x-y$. Să se arate că: $x\cdot y\langle 1$ și $x^2+y^2\langle 1$.

Alina Tigae, **Simona Miu**, Craiova

Rezolvare: $x^2+xy+y^2=\frac{x^3-y^3}{x-y}\langle\frac{x^3+y^3}{x-y}=1\Rightarrow xy\langle 1$ și $x^2+y^2\langle 1$.

G:825. Să se arate că:

i) $\frac{a+1}{2}\geq\frac{a(a^2+1)}{a^3+1}$, $\forall a>0$; ii) $\frac{a+1}{2}\leq\frac{a^3+1}{a^2+1}$, $\forall a>0$; iii) $\frac{a^3+1}{a^2+1}\geq\sqrt{a^2-a+1}\geq\sqrt[4]{\frac{a^4+1}{2}}$, $\forall a>0$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: i) Într-adevăr,

$$\frac{a+1}{2}\geq\frac{a(a^2+1)}{a^3+1}\Leftrightarrow(a+1)(a^3+1)\geq 2a(a^2+1)\Leftrightarrow a^4-a^3-a+1\geq 0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a^3(a-1)-(a-1)=(a-1)(a^3-1)=(a-1)^2(a^2+a+1)\geq 0$. Egalitatea are loc pentru $a=1$.

ii) $\frac{a+1}{2}\leq\frac{a^3+1}{a^2+1}\Leftrightarrow(a+1)(a-1)^2\geq 0$. Egalitatea are loc pentru $a=1$.

iii) După ridicare la pătrat şi calcule algebrice inegalitatea

$\frac{a^3+1}{a^2+1}\geq\sqrt{a^2-a+1}$, este echivalentă cu $a(a-1)^2\geq 0$.

Similar, inegalitatea $\sqrt{a^2-a+1}\geq\sqrt[4]{\frac{a^4+1}{2}}$, se reduce la $(a-1)^4\geq 0$. Cu egalitate pentru a = 1.

G:826. Dacă $x,y\geq 0$ și $x^3+y^3+(x+y)^3+18(x+y)+27xy=1620$, calculați $x+y$.

Marin Chirciu, Pitești

Rezolvare: Evident, $(x+y-9)(2x^2+xy+2y^2+118x+18y+180)=0$. Cum a doua paranteză este pozitivă rezultă $x+y-9=0\Rightarrow x+y=9$.

G:827. Rezolvați, în numere reale, inecuația: $x^4-2x^3-x+2\langle 0$.

Marian Ciuperceanu, Craiova

Rezolvare: $(x-2)(x^3-1)\langle 0\Leftrightarrow(x-2)(x-1)(x^2+x+1)\langle\Rightarrow x\in(1;2)$ **deoarece**

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\rangle 0.$$

G:828. Să se demonstreze că $\frac{a+1}{2}\leq\frac{a^3+1}{a^2+1}$, $\forall a>0$.

Nela Ciceu, Roşiori, Bacău şi **Roxana Mihaela Stanciu,** Buzău

Rezolvare: $\frac{a+1}{2}\leq\frac{a^3+1}{a^2+1}\Leftrightarrow(a+1)(a-1)^2\geq 0$, q.e.d. Egalitatea are loc pentru $a=1$.

G:829. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, notăm $AB = a, BC = b, AA' = c$. Știind că latura c verifică ecuația $4x^3 - 5x - 2 = 0$, arătați că: $\frac{S[BDD']}{\sqrt{S[ABCD]}} \geq \frac{1+\sqrt{17}}{4\sqrt{2}}$, unde $S[BDD']$ este aria triunghiului BDD', iar $S[ABCD]$ este aria dreptunghiului $ABCD$. **Radu Diaconu**, Sibiu

Rezolvare. Ecuația este echivalentă cu: $4x^3 - x = 4x + 2$ care se mai poate scrie
$x(2x-1)(2x+1) = 2(2x+1) \Leftrightarrow (2x+1)(2x^2 - x - 2) = 0.$
Obținem ecuațiile: $2x+1=0$ și $2x^2 - x - 2 = 0$. Ecuația $2x+1=0$ are o soluție reală $x_1 = -\frac{1}{2}$. Ecuația $2x^2 - x - 2 = 0$ are două soluții reale distincte și anume $x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$ și $x_3 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$. Soluția acceptată este $x = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$. Deci $c = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$.
Cum triunghiul BDD' este dreptunghic în D, folosind inegalitatea mediilor, avem:

$$S[BDD'] = \frac{BD \cdot DD'}{2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2} \cdot c}{2} = \frac{c}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{c}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{ab} = \frac{c}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{S[ABCD]}.$$

Deci: $\frac{S[BDD']}{\sqrt{S[ABCD]}} \geq \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{17}}{4\sqrt{2}}$.

▪ Clasa a IX-a

L:593. Fie m un parametru întreg astfel încât ecuația $x^2 - mx + m + 2010 = 0$ are o rădăcină număr întreg. Rezolvați ecuația și determinați parametrul m.

Nela Ciceu, Roşiori, Bacău şi **Roxana Mihaela Stanciu,** Buzău

Rezolvare:
Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuației date. Din relațiile lui Viète avem:
$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = m + 2010 \end{cases}$. Deoarece ecuația are o rădăcină întreagă rezultă că ambele rădăcini sunt întregi.
(Dacă $x_1 \in Z, m \in Z \Rightarrow x_2 = m - x_1 \in Z$ .Analog $x_2 \in Z, m \in Z \Rightarrow x_1 = m - x_2 \in Z$).
Avem $x_1 x_2 = x_1 + x_2 + 2010 \Rightarrow x_1 = \frac{x_2 + 2010}{x_2 - 1} = 1 + \frac{2011}{x_2 - 1} \in Z \Rightarrow x_2 - 1 \in \{\pm 2011\}$.
Se obține: $(x_1, x_2; m) \in \{(2,2012;2014); (0,-2010;-2010)\}$.

L:594. Să se demonstreze că $(pq-1)^2 \geq 16(p-1)(q-1)$, oricare ar fi $p, q \geq 3$.

Neculai Stanciu, Buzău, şi **Titu Zvonaru,** Comăneşti

Rezolvare: $(pq-1)^2 \geq 16(p-1)(q-1) \Leftrightarrow p^2q^2 - 18pq + 16p + 16q - 15 \geq 0$.
Cu inegalitatea mediilor avem $16p + 16q \geq 32\sqrt{pq}$, și este suficient să arătăm că

$$p^2q^2 - 18pq + 32\sqrt{pq} - 15 \geq 0, (1).$$

Notăm $pq = t^2$, avem $t \geq 3$ și (1) devine

$$t^4 - 18t^2 + 32t - 15 \geq 0 \Leftrightarrow (t-3)(t^3 + 3t^2 - 9t + 5) \geq 0, \text{ adevărată, deoarece}$$

$$t^3 - 9t \geq 0 \Leftrightarrow t^2 \geq 9.$$

Avem egalitate dacă și numai dacă $t = 3$ și $p = q$, adică $p = q = 3$.

L:595. Să se determine cel mai mare număr întreg " a " , așa încât ecuația $x^3-4x^2+(4-a)x+2a=0$ **să aibă o rădăcină întreagă și celelalte nereale.** **Petre Rău,** Galați

Rezolvare: Dacă există o rădăcină întreagă, atunci aceasta ar trebui să fie printre divizorii termenului liber 2a. Chiar dacă nu-i putem ști pe toți acești prezumtivi divizori, putem încerca cel puțin numerele întregi ±1, ±2, ±a. Vom găsi astfel că $x_1=2$ este o soluție a ecuației date. După descompunerea în factori avem ecuația $(x-2)(x^2-2x-a) = 0$. Așadar, ecuația $x^2-2x-a = 0$ are soluții nereale (complexe) dacă $\Delta = 4+4a < 0$, de unde găsim $a<-1$. Așadar, cel mai mare număr întreg a care îndeplinește condiția din enunț este a=-2.

L:596. Să se arate că: $\dfrac{1^4+2^4+3^4+....+n^4}{n}\ge\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^4,\ \forall n\ge 1.$ **Ionel Tudor** , Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare: Se utilizează inducția matematică.

Notăm cu P(n) inegalitatea $\dfrac{1^4+2^4+3^4+....+n^4}{n}\ge\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^4,\ \forall n\ge 1.$ $P(1):\ 1\ge\left(\dfrac{2}{2}\right)^4\Leftrightarrow 1=1$ Adevărat.

Presupunem propoziția P(n) adevărată și să arătăm că propoziția P(n+1) este adevărată , adică :

$\dfrac{1^4+2^4+3^4+....+n^4+(n+1)^4}{n+1}\ge\left(\dfrac{n+2}{2}\right)^4,\ \forall n\ge 1.$ (*). Folosind P(n) adevărată rezultă

$$1^4+2^4+3^4+....+n^4+(n+1)^4\ge n\cdot\frac{(n+1)^4}{16}+(n+1)^4\Leftrightarrow\frac{1^4+2^4+3^4+....+n^4+(n+1)^4}{n+1}\ge(n+1)^3(\frac{n}{16}+1)$$

Rămâne să demonstrăm că $(n+1)^3(\dfrac{n}{16}+1)\ge\left(\dfrac{n+2}{2}\right)^4$ ceea ce este echivalentă cu inegalitatea

$11n^3+27n^2+17n\ge 0,\ \forall n\ge 1.$ care este adevărată.

L:597. Fie $(b_n)_{n\ge1}$ **o progresie geometrică crescătoare cu termenii pozitivi. Demonstrați că** $b_{2n}-b_1\ge(2n-1)(b_{n+1}-b_n),\forall n\in\mathbb{N}^*.$ **Marin Chirciu**,Pitești

Rezolvare: $b_1q^{n-1}-b_1\ge(2n-1)(b_1q^n-b_1q^{n-1})\Leftrightarrow\ b_1\left(q-1\right)\left(q^{2n-2}+q^{2n-3}+....+q+1-(2n-1)q^{n-1}\right)\ge 0$, inegalitate adevărată cu ajutorul inegalității mediilor.

L:598. Fie functia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **care verifică relația** $\dfrac{1}{2}f(x)+\dfrac{1}{3}f(2018-x)=\dfrac{5}{2018}x+\dfrac{5}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}$**.**

Arătați că $f(x)+f(2018-x)=12,\ \forall x\in\mathbb{R}$ **. Determinați funcția f.**

Constantin Dinu, Buzău

Rezolvare: Se înlocuiește în relația dată x cu 2018-x și se obține sistemul:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}f(x)+\dfrac{1}{3}f(2018-x)=\dfrac{5}{2018}x+\dfrac{5}{2}\\ \dfrac{1}{3}f(x)+\dfrac{1}{1}f(2018-x)=\dfrac{5}{2018}(2018-x)+\dfrac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow f(x)+f(2018-x)=12.$$ În final, $f(x)=\dfrac{15}{1009}x-9$

L:599. În triunghiul ABC**, se dau** $a+b=2\sqrt{2}$**,** $b\ge c$ **și** $m(\hat{A})=162^\circ$**. Să se arate că:** $S<\dfrac{2\sqrt[4]{2}}{15}$**, notațiile fiind cele cunoscute într-un triunghi.** **Emil C. Popa, Radu Diaconu,** Sibiu

Rezolvare. Cum $\hat{B}+\hat{C}=18^\circ$ și $m(\hat{B})\ge m(\hat{C})$, rezultă că $m(\hat{C})\le 9^\circ$. Avem:

$$S=\frac{ab\cdot\sin(\hat{C})}{2}\le\frac{(a+b)^2\cdot\sin(\hat{C})}{8}=\sin(\hat{C})\le\sin 9^\circ\overset{(1)}{<}\frac{2\sqrt[4]{2}}{15}.$$

Calculăm separat $\sin 9^\circ$. Folosim egalitatea: $\cos 36^\circ=\cos(90^\circ-54^\circ)=\sin 54^\circ$, sau $\cos(2\cdot 18^\circ)=\sin(3\cdot 18^\circ)$. $(*)$. Folosind formulele

$\cos(2\cdot 18^\circ)=1-2\sin^2 18^\circ$, $\sin(3\cdot 18^\circ)=3\sin 18^\circ-4\sin^3 18^\circ$

și notând cu $y=\sin 18^\circ$, ecuația $(*)$, devine:

$1-2y^2=3y-4y^3\Leftrightarrow 4y^3-2y^2-3y+1=0\Leftrightarrow(y-1)(4y^2+2y-1)=0.$

Găsim $y=\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Apoi $\cos(2\cdot 18^\circ)=1-2y^2=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Putem scrie

$$\cos 18^\circ=\sqrt{\frac{1+\cos 36^\circ}{2}}=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}};\sin 9^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos 18^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}}}.$$

Inegalitatea

$$(1)\Leftrightarrow 225\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}}\right)<4\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{225}{2}\cdot\sqrt{\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}}>\frac{225}{2}-4\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}}>1-\frac{8\sqrt{2}}{225}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}>1+\frac{128}{50625}-\frac{16\sqrt{2}}{225}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{5}}{8}+\frac{16\sqrt{2}}{225}>1+\frac{128}{50625}-\frac{5}{8}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{5}}{8}+\frac{16\sqrt{2}}{225}>\frac{152899}{405000}\Leftrightarrow 0.380074...>0.3775(283950617).$$

L:600. Să se rezolve ecuaţia: $2n\{x\}^2-n^2x+1=0, n\in N^*$. **Gheorghe Ghiţă,** Buzău

Rezolvare. Din ecuaţie rezultă $n^2x=2n\{x\}^2+1\in[1,2n+1)\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{n^2},\frac{2n+1}{n^2}\right)$.

Pentru $n\ge 3\Rightarrow\frac{2n+1}{n^2}<1\Leftrightarrow n^2-2n-1>0\Leftrightarrow(n-1)^2>2\Leftrightarrow n>1+\sqrt{2}$. De aici rezultă că

$[x]=0\Rightarrow\{x\}=x$ şi ecuaţia se scrie $2nx^2-n^2x+1=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{n^2\pm\sqrt{n^4-8n}}{4n}$, şi se constată că doar

$x=\frac{n^2-\sqrt{n^4-8n}}{4n}$ este soluţie a ecuaţiei($\frac{n^2-\sqrt{n^4-8n}}{4n}\ge\frac{1}{n^2}\Leftrightarrow n^3-4\ge n\sqrt{n^4-8n}$; $\frac{n^2-\sqrt{n^4-8n}}{4n}<$

$<\frac{2n+1}{n^2}\Leftrightarrow n^3-n\sqrt{n^4-8n}<8n+4\Leftrightarrow n^3-8n-4<n\sqrt{n^4-8n}\Leftrightarrow n^4>(2n+1)^2\Leftrightarrow n^2>2n+1$).

Pentru $n=1\Rightarrow x\in[1,3)\Rightarrow[x]\in\{1,2\}$.

Dacă $[x]=1\Rightarrow\{x\}=x-1\Rightarrow 2(x-1)^2-x+1=0\Leftrightarrow 2x^2-5x+3=0\Rightarrow x_1=1, x_2=\frac{3}{2}$;

Dacă $[x]=2\Rightarrow\{x\}=x-2\Rightarrow 2x^2-9x+11=0\Rightarrow$ nu există soluţii;

Pentru $n=2\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right)\Rightarrow[x]\in\{0,1\}$.

Dacă $[x]=0\Rightarrow\{x\}=x\Rightarrow 4x^2-4x+1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$;

Dacă $[x]=1\Rightarrow\{x\}=x-1\Rightarrow 4x^2-12x+5=0\Rightarrow x_1=\frac{5}{2}, x_2=\frac{1}{2}$, care nu sunt soluţii în acest caz.

In concluzie, dacă

$$n=1\Rightarrow S=\left\{1,\frac{3}{2}\right\}, n=2\Rightarrow S=\left\{\frac{1}{2}\right\}, n\geq 3\Rightarrow S=\left\{\frac{n^2-\sqrt{n^4-8n}}{4n}\right\}.$$

L:601. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2y}=2(x^2+y^2)\\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2y}=y^2-x^2\end{cases}.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Adunăm şi scădem ecuaţiile sistemului şi obţinem sistemul:

$$\begin{cases}\dfrac{4}{x}=x^2+3y^2\\ \dfrac{1}{y}=y^2+3x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+3xy^2=4\\ 3x^2y+y^3=1\end{cases}$$ Adunăm şi scădem ecuaţiile sistemului precedent şi obţinem sistemul:

$$\begin{cases}(x+y)^3=5\\ (x-y)^3=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\sqrt[3]{5}\\ x-y=\sqrt[3]{3}\end{cases}$$ Adunăm şi scădem ecuaţiile sistemului precedent şi obţinem soluţiile:

$$x=\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}}{2},\quad y=\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}{2}.$$

L:601. Fie $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir de numere reale în progresie geometrică de raţie q diferit de 1, atunci demonstraţi egalitatea:

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}b_k\cdot\sum_{k=1}^{n}b_{k+1}}+\frac{q}{\sum_{k=1}^{n}b_{k+1}\cdot\sum_{k=1}^{n}b_{k+2}}+\frac{q^2}{\sum_{k=1}^{n}b_{k+2}\cdot\sum_{k=1}^{n}b_{k+3}}+\ldots+\frac{q^i}{\sum_{k=1}^{n}b_{k+i}\cdot\sum_{k=1}^{n}b_{k+i+1}}==\frac{q^{i+1}-1}{q-1}\cdot\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}b_k\cdot\sum_{k=1}^{n}b_{k+i+1}}$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall i\in\mathbb{N}$.

Constantin Ciobîcă , Fălticeni, Suceava

Rezolvare: $\sum_{k=1}^{n}b_{k+1}-\sum_{k=1}^{n}b_k=b_{n+1}-b_1=b_1\cdot q^n-b_1=b_1\cdot\left(q^n-1\right)$

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}b_k\cdot\sum_{k=1}^{n}b_{k+1}}=\frac{1}{b_1\cdot\left(q^n-1\right)}\cdot\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}b_k}-\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}b_{k+1}}\right)$$. Analog pentru celelalte. Mai general,

$$\sum_{k=1}^{n}b_{k+i+1}-\sum_{k=1}^{n}b_{k+i}=b_{n+i+1}-b_{i+1}=b_1\cdot q^{n+i}-b_1\cdot q^i=b_1\cdot q^i\cdot\left(q^n-1\right)$$

$$S=\frac{1}{b_1\cdot\left(q^n-1\right)}\cdot\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}b_k}-\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}b_{k+i+1}}\right)$$

$$\frac{q^i}{\sum_{k=1}^{n}b_{k+i}\cdot\sum_{k=1}^{n}b_{k+i+1}}=\frac{1}{b_1\cdot\left(q^n-1\right)}\cdot\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}b_{k+i}}-\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}b_{k+i+1}}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}b_{k+i+1}-\sum_{k=1}^{n}b_k=b_{i+2}-b_1+b_{i+3}-b_2+\ldots+b_{n+i+1}-b_n=$$

$$=b_1\cdot\left(q^{i+1}-1\right)+b_1\cdot q\cdot\left(q^{i+1}-1\right)+\ldots+b_1\cdot q^{n-1}\cdot\left(q^{i+1}-1\right)=$$

$$= b_1 \cdot \left(q^{i+1}-1\right)\left(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}\right) = b_1 \cdot \left(q^{i+1}-1\right) \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$$

$$S = \frac{1}{b_1 \cdot \left(q^n-1\right)} \cdot \frac{b_1 \cdot \left(q^{i+1}-1\right)\left(q^n-1\right)}{q-1} \cdot \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} b_k} \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} b_{k+i+1}} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \sum_{k=1}^{n} b_{k+1}} + \frac{q}{\sum_{k=1}^{n} b_{k+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} b_{k+2}} + \frac{q^2}{\sum_{k=1}^{n} b_{k+2} \cdot \sum_{k=1}^{n} b_{k+3}} + \ldots + \frac{q^i}{\sum_{k=1}^{n} b_{k+i} \cdot \sum_{k=1}^{n} b_{k+i+1}} =$$

$$= \frac{q^{i+1}-1}{q-1} \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \sum_{k=1}^{n} b_{k+i+1}}, \forall n \in N^*, \forall i \in N.$$

L:602. Fie ABC un triunghi oarecare , w_a lungimea bisectoarei interioare corespunzătoare laturii *a=BC* a triunghiului dat , etc. Demonstrați că : $\frac{a}{w_a} + \frac{b}{w_b} + \frac{c}{w_c} \geq 2\sqrt{3}\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$.

Vasile Jiglău , Arad

Rezolvare: Lemă : Are loc dubla inegalitate : $\frac{ab+bc+ca}{4S\sqrt{3}} \geq \sqrt{\frac{R}{2r}} \geq \frac{w_a}{h_a}$. Într-adevăr :

$$\frac{ab+bc+ca}{4S\sqrt{3}} \geq \sqrt{\frac{R}{2r}} \Leftrightarrow \left(\frac{p^2+r^2+4Rr}{4rp\sqrt{3}}\right)^2 \geq \frac{R}{2r} \Leftrightarrow (p^2+r^2+4Rr)^2 \geq 24Rrp^2$$

$$\Leftrightarrow p^2(p^2-16Rr+5r^2)+r^2((4R+r)^2-3r^2) \geq 0$$

această din urmă inegalitate fiind adevărată conform celei de-a doua inegalități a lui Gerretsen și a inegalității cunoscute $(4R+r)^2 \geq 3r^2$, care rezultă imediat din prima inegalitate a lui Gerretsen .

Utilizând $\cos\frac{B-C}{2} = \frac{h_a}{w_a}$ (formulă cunoscută) și $\frac{R}{2r} \geq \frac{1}{\cos^2\frac{B-C}{2}}$ (problema 2382 „ Crux mathematicorum “) obținem imediat cea de-a doua inegalitate din enunțul lemei . Din lema de mai sus , avem

$$\frac{a}{w_a} + \frac{b}{w_b} + \frac{c}{w_c} = \frac{1}{2S}\left(a^2\frac{h_a}{w_a} + b^2\frac{h_b}{w_b} + c^2\frac{h_c}{w_c}\right) \geq \frac{1}{2S}\left(a^2\frac{4S\sqrt{3}}{ab+bc+ca} + b^2\frac{4S\sqrt{3}}{ab+bc+ca} + c^2\frac{4S\sqrt{3}}{ab+bc+ca}\right) =$$

$$= \frac{1}{2S}\frac{4S\sqrt{3}}{ab+bc+ca}(a^2+b^2+c^2) = 2\sqrt{3}\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

de unde și inegalitatea din enunțul problemei.

L:603. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Pe ipotenuza BC considerăm punctul D astfel încât $\frac{CD}{DB} = \frac{3}{2}$. Ştiind că $\angle CDA = 45^0$, să se demonstreze că $AB = 2 \cdot AC$. **Titu Zvonaru,** Comăneşti

Rezolvare: Notăm $x = \angle ABC$, avem $\angle BAD = 45^0 - x$, $\angle DAC = 45^0 + x$. Folosind raportul ariilor triunghiurilor BAD şi CAD obţinem

$$\frac{CD}{DB} = \frac{Aria(\Delta CAD)}{Aria(\Delta BAD)} = \frac{CA\sin(45^0+x)}{BA\sin(45^0-x)} = \frac{b(\sin x+\cos x)}{c(\cos x-\sin x)} \Rightarrow \frac{3}{2} = tgx \cdot \frac{tgx+1}{1-tgx} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2tg^2x + 5tgx - 3 = 0$. Rezultă $tgx = \frac{1}{2}$, deci $AB = 2 \cdot AC$.

▪ Clasa a X-a

L:604. Folosind eventual identitatea $x^3-19x+30=(x-3)(x-2)(x+5)$ **rezolvați ecuațiile**

a) $3^{3x}-19\cdot 3^x+30=0$; **b)** $\lg^3 x-19\lg x+30=0$. **Constantin Dinu**, Buzău

Rezolvare:

a) Notând $3^x=t$ rezultâ că $x\in\{1;\log_3 2\}$ .b) Impunem $x>0$, notăm $t=\lg x\Rightarrow x\in\left\{100;100;\frac{1}{10^5}\right\}$.

L:605. Să se arate că ecuația $\log_{16}\left(\frac{x^2}{2}+2\right)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2}$ **nu are soluții reale.** **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: Evident, $x\in(-\infty;-1]\cup[1;\infty)$ iar din $\frac{x^2}{2}+2\ \rangle\ 2\Rightarrow\log_{16}\left(\frac{x^2}{2}+2\right)\rangle\log_{16}2=\frac{1}{4}$, (1) și din

$\frac{1}{4}\geq\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2}$, (2) $\Leftrightarrow 2x^2\geq 4\sqrt{x^2-1}\Rightarrow x^4-4x^2+4\geq 0\Leftrightarrow(x^2-2)^2\geq 0$, adevărat,

$\forall x\in(-\infty;-1]\cup[1;\infty)$. Din (1) și (2) , ecuația dată nu are soluții.

L:606. Dacă $a,b,z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ **atunci,**

$|z_1-z_2|\cdot|az_1+az_2+b|\leq|z_2-z_3|\cdot|az_2+az_3+b|+|z_3-z_1|\cdot|az_3+az_1+b|$. **Gheorghe Ghiță,** Buzău

Rezolvare: Fie punctele $M_k(az_k{}^2+bz_k)$, $k=\overline{1,3}$. Din inegalitatea triunghiului $M_1M_2\leq M_2M_3+M_3M_1$ și din faptul că $M_1M_2=|az_1{}^2+bz_1-az_2{}^2-bz_2|=|a(z_1-z_2)(z_1+z_2)+b(z_1-z_2)|=|z_1-z_2|\cdot|az_1+az_2+b|$ ca și din celelalte două distanțe analoage rezultă inegalitatea propusă.

L:607. Rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ **sistemul de ecuaţii** $\begin{cases}x^3+y^3=13\\x^2y+xy^2=-4\end{cases}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Ecuaţia a doua este echivalentă cu $xy(x+y)=-4$, (1).

Avem $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)=13-12=1\Rightarrow x+y=1\overset{(1)}{\Rightarrow}xy=-4$.

Rezultă că x şi y verifică ecuaţia $x^2-x-4=0$.

Soluţiile sistemului (simetric) sunt $(x,y)\in\left\{\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2},\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right);\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2},\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)\right\}$.

L:608. Rezolvați ecuația $29^{2x}+31^{2x}+1961^{2x}=29^x\cdot 31^x+29^x\cdot 1961^x+31^x\cdot 1961^x$.

Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Se folosește inegalitatea $a^2+b^2+c^2\geq a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c$ în care se ia $a=29^x,b=31^x,c=1961^x$. Cun avem egalitate, rezultă $a=b=c\Leftrightarrow x=0$

L:609. Rezolvați ecuația $\log_{a^2}(x^2-2ax+2a^2)=\frac{ax}{x^2-ax+a^2}$, $a\rangle 1$. **Marin Chirciu**, Pitești

Rezolvare:

Cum $\frac{ax}{x^2-ax+a^2}\leq 1\Rightarrow\log_{a^2}(x^2-2ax+2a^2)\leq 1\Leftrightarrow\ x^2-2ax+2a^2\leq a^2\Leftrightarrow(x-a)^2\leq 0\Leftrightarrow x=a$.

L:610. Să se rezolve ecuația: $arctg\left(3^{\frac{1}{2}-x}\right)+artcg\left(3^{x}\right)=\frac{7\pi}{12}$. **Ovidiu Țâțan,** Râmnicu Sărat

Rezolvare: Cum $tg\frac{7\pi}{12}=-2-\sqrt{3}$, aplicând funcția tangentă în ambii membrii ai relației din enunț se obține:

$\frac{\frac{\sqrt{3}}{3^x}+3^x}{1-\sqrt{3}}=-2-\sqrt{3}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3^x}+3^x=1+\sqrt{3}$ ecuație cu soluțiile 0 și $\frac{1}{2}$.

Se poate arăta, utilizând analiza matematică, faptul că imaginea funcției

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=arctg\left(3^{\frac{1}{2}-x}\right)+artcg\left(3^{x}\right)$ este intervalul $\left(\frac{\pi}{2},2arctg\left(\sqrt[4]{3}\right)\right]$, funcția având un singur punct de extrem $x=\frac{1}{4}$ (punct de maxim).

Cum $2arctg\left(\sqrt[4]{3}\right)>2\cdot 52^0 46'>105^0=\frac{7\pi}{12}$, ecuația are doar cele două soluții.

L:611. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ **fixat , să se rezolve ecuația :** $C_x^n\cdot C_{x+n}^n\cdot C_{x+2n}^n=\frac{(4n)!}{4\cdot(n!)^4}$ **.**

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Evident, $x\in\mathbb{N},\ x\geq n$ **.**

$$C_x^n\cdot C_{x+n}^n\cdot C_{x+2n}^n=\frac{(4n)!}{4\cdot(n!)^4}\Leftrightarrow\frac{x!}{n!\cdot(x-n)!}\cdot\frac{(x+n)!}{n!\cdot x!}\cdot\frac{(x+2n)!}{n!\cdot(x+n)!}=\frac{(4n)!}{4\cdot(n!)^4}\Rightarrow$$

$$\frac{(x+2n)!}{(x-n)!\cdot\cancel{(n!)^3}}=\frac{(4n)!}{4\cdot(n!)^{\cancel{4}}}\Rightarrow A_{x+2n}^{3n}=\frac{(4n)!}{4\cdot n!}.\quad C_{x+2n}^{3n}=C_{4n-1}^{3n}\Rightarrow\ x=2n-1\geq n.$$

L:612. Fie $x,y,z\rangle 0$ **astfel încât** $(x+y)(y+z)(z+x)=1$**. Arătați că** $\sum\frac{(x+y)\sqrt{x^2+xy+y^2}}{x+y+2xy}\geq\sqrt{3}$ **. În ce caz avem egalitate ?**

Marian Cucuoaneș, Mărășești, **Lucian Tuțescu** , Craiova

Rezolvare: Din $x^2+xy+y^2\geq\frac{3}{4}(x+y)^2\Rightarrow\sqrt{x^2+xy+y^2}\geq\frac{(x+y)\sqrt{3}}{2}$**. (1)**

$$\frac{(x+y)\sqrt{x^2+xy+y^2}}{x+y+2xy}=\frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{1+\frac{2xy}{x+y}}\geq\frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{1+\frac{x+y}{2}}=\frac{2\sqrt{x^2+xy+y^2}}{x+y+2}\overset{1)}{\geq}\frac{(x+y)\sqrt{3}}{(x+y+2)}$$

Mai departe se arată că $\sum\frac{(x+y)\sqrt{3}}{(x+y+2)}\geq\sqrt{3}\Leftrightarrow\sum\frac{(x+y)}{(x+y+2)}\geq 1$.

Fie $x+y=a,\ y+z=b,\ z+x=c\Rightarrow abc=1$. Se arată că $\frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}\geq 1$

L:613. Să se rezolve sistemul de ecuații: $\begin{cases}x\cdot C_{n+p-2}^{k+p-1}-\frac{n+p-1}{k+p-1}\cdot y=\alpha\cdot\frac{k+p}{n+p-1}\\ x\cdot C_{n+p-2}^{k+p-2}+\frac{n+p-1}{k+p}\cdot y=\beta\cdot\frac{k+p-1}{n+p-1}\end{cases}$,

unde $n,p,k\in N^*, n\geq k+1,\alpha,\beta\in R.$

Radu Diaconu, Sibiu

Rezolvare:

Rezolvare. Înmulțim prima ecuație cu $\frac{1}{k+p}$ și ecuația a doua cu $\frac{1}{k+p-1}$ și prin adunare, obținem:

$$x\left[\frac{1}{k+p}\cdot\frac{(n+p-2)!}{(k+p-1)!(n-k-1)!}+\frac{1}{k+p-1}\cdot\frac{(n+p-2)!}{(k+p-2)!(n-k)!}\right]=\frac{\alpha+\beta}{n+p-1};$$

$$x\cdot\left[\frac{(n+p-2)!}{(k+p)!(n-k-1)!}+\frac{(n+p-2)!}{(k+p-1)!(n-k)!}\right]=\frac{\alpha+\beta}{n+p-1};$$

$$x\cdot\frac{(n+p-2)!}{(k+p-1)!(n-k-1)!}\left[\frac{1}{k+p}+\frac{1}{n-k}\right]=\frac{\alpha+\beta}{n+p-1};$$

$$x\cdot\frac{(n+p)!}{(h+p)!(n-k)!}=\alpha+\beta\Rightarrow x=\frac{\alpha+\beta}{C_{n+p}^{k+p}}.$$

Înlocuind valoarea lui x în prima ecuație a sistemului obținem:

$$-\frac{n+p-1}{k+p-1}\cdot y=\alpha\cdot\frac{k+p}{n+p-1}-\frac{(\alpha+\beta)(k+p)!(n-k)!}{(n+p)!}\cdot\frac{(n+p-2)!}{(k+p-1)!(n-k-1)!};$$

$$-\frac{n+p-1}{k+p-1}\cdot y=\alpha\cdot\frac{k+p}{n+p-1}-\frac{(\alpha+\beta)(k+p)(n-k)}{(n+p-1)(n+p)};$$

$$-\frac{n+p-1}{k+p-1}\cdot y=\frac{k+p}{n+p-1}\left(\alpha-\frac{(\alpha+\beta)(n-k)}{(n+p)}\right);$$

$$y=-\frac{(k+p-1)(k+p)[(\alpha+\beta)k+\alpha p-\beta n]}{(n+p-1)^2\cdot(n+p)}.$$

Deci, soluțiile sistemului sunt: $\begin{cases} x=\dfrac{\alpha+\beta}{C_{n+p}^{k+p}} \\ y=-\dfrac{(k+p-1)(k+p)[(\alpha+\beta)k+\alpha p-\beta n]}{(n+p-1)^2\cdot(n+p)} \end{cases}.$

L:614. Dacă ABC este un triunghi cu notaţiile uzuale, atunci aflaţi mulţimea acestor triunghiuri care verifică relaţia $b^2+c^2\ge 2a^2$.

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

***Rezolvare*:** Cu teorema cosinusului relaţia $b^2+c^2\ge 2a^2$, devine

$$b^2+c^2\ge 2(b^2+c^2-2bc\cos A)\Leftrightarrow b^2+c^2-4bc\cos A\le 0,$$

iar dacă împărţim ultima inegalitate cu c^2 şi notăm $\frac{b}{c}=x$, atunci obţinem

$$x^2-4x\cos A+1\le 0,\ (1).$$

Ţinând cont de faptul că ecuaţia $x^2-4x\cos A+1=0$ trebuie să aibă rădăcinile

$$x_{1,2}=2\cos A\pm\sqrt{1+2\cos A},$$

reale şi strict pozitive deducem că

$$\begin{cases}\Delta\ge 0\\ x_1+x_2>0\\ x_1x_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\ge 0\\ \cos A>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 2A\ge-\dfrac{1}{2}\\ \cos A>0\end{cases}\Leftrightarrow A\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right].$$

Soluţia inecuaţiei (1) este $x\in(2\cos A-\sqrt{1+\cos 2A},2\cos A+\sqrt{1+\cos 2A})$, iar soluţia problemei este

$S = \bigcup_{A\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right]} S(A)$, unde $S(A) = \left\{\Delta ABC \middle| \frac{b}{c} \in (x_1, x_2)\right\}$.

În (1) avem egalitate dacă şi numai dacă $A = \frac{\pi}{3}$.

L:615. Să se demonstreze că în orice triunghi ascuţitunghic ABC este adevărată inegalitatea:

$$\sum \sin A \sin B \cos C \le \frac{9}{8}.$$

Neculai Stanciu, Buzău şi **Titu Zvonaru,** Comăneşti

Rezolvare: Cu teorema sinusurilor și teorema cosinusului membrul stâng al inegalității se scrie:

$$\sum \frac{a}{2R}\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{1}{8R^2}\sum\left(a^2+b^2-c^2\right) = \frac{1}{8R^2}\sum a^2.$$

Inegalitatea se scrie: $\frac{1}{8R^2}\sum a^2 \le \frac{9}{8} \Leftrightarrow \sum a^2 \le 9R^2$ (Inegalitatea lui Leibniz).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Notă. Din demonstrație nu este necesară condiția ca triunghiul ABC să fie ascuțitunghic .

(Soluție dată de Marin Chirciu, Piteşti.)

L:616. Dacă a,b,c sunt numere reale strict pozitive, arătați că are loc inegalitatea:

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}+\frac{a^2+b^2+c^2}{2\left(ab+bc+ca\right)} \le \frac{2}{3}\cdot\left(a+b+c\right).$$

Florin Stănescu, Găești, Dâmbovița

Rezolvare:

I. Conform problemei săptămânii 89 de pe site-ul ''Pregatirematematicaolimpiadajuniori'' este adevărată inegalitatea $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a} \le \frac{3(ab+bc+ca)}{2(a+b+c)}$, (1).

Folosind (1) este suficient să demonstrăm că

$$\frac{3(ab+bc+ca)}{2(a+b+c)}+\frac{a^2+b^2+c^2}{2(a+b+c)} \le \frac{2(a+b+c)}{3} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 9(ab+bc+ca)+3(a^2+b^2+c^2) \le 4(a+b+c)^2 \Leftrightarrow ab+bc+ca \le a^2+b^2+c^2$, adevărată.

II. Inegalitatea de demonstrat se poate scrie $\frac{a^2+b^2+c^2}{2(a+b+c)} - \frac{a+b+c}{6} \le \sum\left(\frac{a+b}{4}-\frac{ab}{a+b}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum\frac{(a-b)^2}{6(a+b+c)} \le \sum\frac{(a-b)^2}{4(a+b)} \Leftrightarrow \sum\frac{(3a+3b+c)(a-b)^2}{12(a+b+c)(a+b)} \ge 0$, adevărată.

În mod asemănător se poate demonstra inegalitatea mai tare

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}+\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4(a+b+c)} \le \frac{3(a+b+c)}{4}.$$

(Soluţii date de Titu Zvonaru, Comăneşti)

▪ Clasa a XI-a

L:617. Se consideră determinantul: $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 3b \\ 3b & a & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad a,b \in \mathbb{R}.$

a) Să se calculeze d. **b) Să se rezolve ecuația** $d=0$.
c) Dacă $a,\ 3b$ **sunt rădăcinile ecuației** $x^2-2x+2=0$, **să se calculeze** d.

Radu Diaconu , Sibiu

Rezolvar:. a) $d=a^2+9b^2-a-3b-3ab+1$.
b) $d=0 \Leftrightarrow a^2+9b^2-a-3b-3ab+1=0$. Înmulțim cu 2 relația și avem:
$2a^2+18b^2-6ab-2a-6b+2=0 \Leftrightarrow (a^2-6ab+9b^2)+(a^2-2a+1)+(9b^2-6b+1)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a-3b)^2+(a-1)^2+(3b-1)^2=0$, cu soluțiile $a=1,\ \ b=\frac{1}{3}$.
c) Aplicând relațiile lui Viete, avem: $a+3b=2,\ \ 3ab=2$. Atunci:
$d=(a+3b)^2-9ab-(a+3b)+1=4-6-2+1=-3$.

L:618. Fie matricea $X=\begin{pmatrix}50 & 53\\ 27 & 29\end{pmatrix}$. **Determinați** $x,y\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $X^2=x\cdot X+y\cdot I_2$.

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare :
$X^2=\begin{pmatrix}3931 & 4187\\ 2133 & 2272\end{pmatrix}$, (1) $\qquad x\cdot X+y\cdot I_2=\begin{pmatrix}50x+y & 53x\\ 27x & 29x+y\end{pmatrix}$, (2). Din (1)= (2) rezultă
$50x+y=3931;\ 53x=4187;\ 27x=2133;\ 29x+y=2272$. Rezultă $x=79,\ \ y=-19$.

L:619. Se considera matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2017\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ **și** $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ **cu** $x,y,z\in\mathbb{Z}$.

Să se rezolve ecuația $A^{2018}\cdot X=B$. **Constantin Dinu**, Buzău

Rezolvare: Ecuația devine $\begin{pmatrix}1 & 2018 & 6053\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2017\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ cu soluția $X=\begin{pmatrix}z-1\\ 1-3z\\ z\end{pmatrix}$, $z\in\mathbb{Z}$.

L:620. Să se calculeze A^n, **unde** $A=\begin{pmatrix}a & b & 0\\ 0 & a & 0\\ c & d & e\end{pmatrix}, a\neq e.$ **Gheorghe Ghiţă**, Buzău

Rezolvare: Avem:
$$A^2=\begin{pmatrix}a^2 & 2ab & 0\\ 0 & a^2 & 0\\ ac+ce & bc+ad+de & e^2\end{pmatrix}, A^3=\begin{pmatrix}a^3 & 3a^2b & 0\\ 0 & a^3 & 0\\ a^2c+ace+ce^2 & 2abc+bce+a^2d+ade+de^2 & e^3\end{pmatrix},$$
şi atunci: $A^n=\begin{pmatrix}a^n & na^{n-1}b & 0\\ 0 & a^n & 0\\ x_n & y_n & e^n\end{pmatrix}$.

Din
$$A^{n+1}=A^nA=\begin{pmatrix}a^{n+1} & (n+1)a^nb & 0\\ 0 & a^{n+1} & 0\\ ax_n+ce^n & bx_n+ay_n+de^n & e^{n+1}\end{pmatrix}, A^{n+1}=AA^n=\begin{pmatrix}a^{n+1} & (n+1)a^nb & 0\\ 0 & a^{n+1} & 0\\ a^nc+ex_n & na^{n-1}bc+a^nd+ey_n & e^{n+1}\end{pmatrix}\Rightarrow$$
$$\begin{cases} ax_n+ce^n=a^nc+ex_n\Rightarrow x_n=c\dfrac{a^n-e^n}{a-e} \\ bx_n+ay_n+de^n=na^{n-1}bc+a^nd+ey_n\Rightarrow y_n=\dfrac{na^{n-1}bc}{a-e}+\dfrac{a^n-e^n}{(a-e)^2}(ad-de-bc)\end{cases}, \text{ şi atunci}$$

$$A^n=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ c\dfrac{a^n-e^n}{a-e} & \dfrac{na^{n-1}bc}{a-e}+\dfrac{a^n-e^n}{(a-e)^2}(ad-de-bc) & e^n \end{pmatrix}.$$

L:621. Fie $n\rangle m\rangle 1$ și matricele $A,B\in M_2(\mathbb{R})$ care îndeplinesc condițiile:
(i) $\det(A+n\cdot B)=\det(n\cdot A+B)$;
(ii) $\det(A+m\cdot B)=\det(m\cdot A+B)$. **Să se demonstreze că** $\det(A)=\det(B)$.

Marin Chirciu,Pitești

Rezolvare: Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\det(A+xB)-\det(x\cdot A+B),\ (*)$, unde $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$, iar $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, unde α,β,γ se deduc în funcție de elementele lui A și B.

Din (i), (ii) și (*) obținem $f(n)=f(m)=f(1)=0$, ceea ce înseamnă că ecuația de gradul doi f(x)= 0 are trei rădăcini reale distincte. Atunci, f este funcția nulă, iar f(0) = 0 și det(A)=det(B).

L:622. Fie $a\in(-2;2)$ fixat, iar $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2^x+2^{x^2-(a+2)x+3}$. Să se arate că $f(\mathbb{R})\subset[3;\infty)$.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: Utilizând inegalitatea mediilor obținem
$2^{x-1}+2^{x-1}+2^{x^2-(a+2)x+3}\ge 3\sqrt[3]{2^{2x-2+x^2-(a+2)x+3}}=3\cdot\sqrt[3]{2^{x^2-ax+1}}\ge 3\cdot\sqrt[3]{2^0}=3$, deoarece
$x^2-ax+1\rangle 0,\forall a\in(-2;2)$. Rezultă $f(\mathbb{R})\subseteq[3;\infty)$ și cum $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}$ și $f(\mathbb{R})\subset[3;\infty)$.

L:623. Fie $s_n=-2\sqrt{n}+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$ (constanta lui Ioachimescu). Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n-s)\sqrt[2n]{(2n-1)!!}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Fie $x_n=(s_n-s)\sqrt[2n]{(2n-1)!!}=\sqrt{n}(s_n-s)\sqrt{\dfrac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n}}$ (1).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n-1)!!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+1)!!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{(2n-1)!!}\right)=\ =\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{2}{e},$$

(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(s_n-s)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{s_n-s}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\overset{C-S}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{s_{n+1}-s_n}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}(s_n-s_{n+1})=$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(-2\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}+2\sqrt{n+1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(2n+1-2\sqrt{n(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{2n+1+2\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{2},\ (3).$$

Din (1), (2) şi (3) obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n-s)\sqrt[2n]{(2n-1)!!}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{e}}=\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$.

L:624. Să se demonstreze inegalitățile : $2+\ln(tg^2a) \langle \frac{tg^2a-1}{\ln(tga)} \langle 2+tg^4a\cdot\ln(tg^2a),\ \forall a\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare: Cu substituția $x=tg^2a\rangle 1$, inegalitățile devin : $2+\ln x \langle \frac{x-1}{\ln\sqrt{x}} \langle 2+x^2\cdot\ln x,\ \forall x\rangle 1$.

Prin înmulțire cu $\ln\sqrt{x}$ rezultă $1+\ln x+\frac{1}{2}\ln^2 x \langle x \langle 1+\ln x+\frac{x^2}{2}\ln^2 x,\ \forall x\rangle 1$.

Pentru prima inegalitate se arată că funcția $f:(1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x+\ln x-x+1$ verifică inegalitatea $f(x)\langle 0,\ \forall x\in(1;\infty)$. (f este strict descrescătoare) și pentru a doua inegalitate se ia funcția $g:(1;\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x+\ln x-x$ care verifică inegalitatea $g(x)\rangle 0,\forall x\rangle 1$. (g este strict crescătoare).

Se folosește faptul că $f^I(x)$ este strict descrescătoare iar $f^{II}(x)=-\frac{\ln x}{x^2}\langle 0,\ \forall x\rangle 1$, iar $g^I(x)$ este crescătoare iar $g^{II}(x)=\ln^2 x=3\ln x+(x-1)\cdot\frac{x+1}{x^2}\rangle 0,\ \forall x\rangle 1$.

L:625. Fie $a\in(0;1)$ **și** $(x_n)_{n\geq 0}$ **un șir cu** $x_0=b>0$ **și** $x_n=a^2+a+\sqrt{x_{n-1}}-2a\sqrt{a+\sqrt{x_{n-1}}},\ n\geq 1$.
Arătați că $(x_n)_{n\geq 0}$ **este convergent și calculați** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Lorena – Luiza Cremeneanu , Constantina Prunaru , Craiova

Rezolvare:

Evient, $x_n=\left(\sqrt{a+\sqrt{x_{n-1}}}-a\right)^2\geq 0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. **Din** $a\rangle a^2,\ \forall a\in(0;1)\Rightarrow a+\sqrt{x_{n-1}}\geq a^2$

$\Rightarrow\sqrt{a+\sqrt{x_{n-1}}}\geq a$. Deci, $\Rightarrow\sqrt{x_n}=\sqrt{a+\sqrt{x_{n-1}}}-a$ adică $\Rightarrow a+\sqrt{x_n}=\sqrt{a+\sqrt{x_{n-1}}}$.

Fie $\Rightarrow y_n=\sqrt{a+\sqrt{x_n}}$ cu $y_0=\sqrt{a+b}\Rightarrow {y_n}^2=y_{n-1}\Rightarrow {y_n}^{2^{-n}}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=1$, si din $x_n={y_n}^2-a\Rightarrow(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent cu $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1-a$.

▪ CLASA a XII-a

L:626. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x\cdot\left(\sin^2 x+2018\right)+1$,

a) Arătați că $f(x)-f^I(x)=1-e^x\cdot\sin 2x$; **b) Calculați** $I=\int\frac{-\sin 2x+e^{-x}}{\sin^2 x+e^{-x}+2018}dx$.

Constantin Dinu, Buzău

Rezolvare: a) Calcul direct

b) $I=\int\frac{-\sin 2x+e^{-x}}{\sin^2 x+e^{-x}+2018}dx=\int\frac{-e^{-x}\cdot\sin 2x+1}{e^x(\sin^2 x+2018)+1}dx=\ln\left|e^x\left(\sin^2 x+2018\right)+1\right|+C$.

L:627. Să se determine funcțiile derivabile $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ **cu proprietatea**

$F'\left(\sqrt{x}\right)=\frac{x^2+x+1}{x+1},\forall x>0.$

Ovidiu Tâțan, Rm. Sărat

Rezolvare: $F'\left(\sqrt{x}\right)=x+\frac{1}{x+1},\forall x>0.$ Împărțim ambii membrii ai relației cu $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ și obținem:

$$F'\left(\sqrt{x}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}},\forall x>0\Rightarrow\ \left(F\left(\sqrt{x}\right)\right)'=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)'+\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2+1}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'\Rightarrow$$

$F\left(\sqrt{x}\right)=\frac{x\sqrt{x}}{3}+arctg\sqrt{x}+C$, de unde $F\left(x\right)=\frac{x^3}{3}+arctg\left(x\right)+C,\forall x\in\left(0,\infty\right)$.

L:628. Să se arate că: $\int_0^1\frac{e^{-x}}{x^2-x+1}dx\le\frac{\sqrt{(e^2-1)(9+2\pi\sqrt{3})}}{3\sqrt{3}e}.$

Radu Diaconu , Sibiu

Rezolvare: Cu inegalitatea Cauchy – Buniakovschi – Schwarz, obținem:

$$\left(\int_0^1 e^{-x}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}dx\right)^2\le\int_0^1 e^{-2x}dx\cdot\int_0^1\frac{1}{\left(x^2-x+1\right)^2}dx=I_1\cdot I_2.\quad(1)$$

Calculăm separat I_1 și I_2 și avem:

$$I_1=\int_0^1 e^{-2x}dx=\frac{e^{-2x}}{-2}\Big|_0^1=\frac{e^2-1}{2e^2}.$$

$$I_2=\int_0^1\frac{1}{(x^2-x+1)^2}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{4(x^2-x+1)-(2x-1)^2}{(x^2-x+1)^2}dx==\frac{4}{3}\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{3}\int_0^1(2x-1)\cdot\left(\frac{1}{x^2-x+1}\right)'dx=$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^1\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{2x-1}{3(x^2-x+1)}\Big|_0^1-\frac{2}{3}\int_0^1\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

$$I_2=\frac{2}{3}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{18+4\pi\sqrt{3}}{27}.$$

Înlocuind I_1 și I_2 în (1) obținem inegalitatea cerută.

L:629. Determinați primitivele funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos^3x\cdot\cos ax,\ x\in\mathbb{R}$, **unde** $a\in\mathbb{R}$, **a este dat.**

Marin Chirciu, Pitești

Rezolvare:

$$f(x)=\cos^3x\cdot\cos ax=\frac{1}{8}\cdot4\cos x\cdot\cos ax\cdot2\cos^2x=\frac{1}{8}\cdot2\cos ax\left(\cos3x+\cos x+2\cos x\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(2\cos ax\cdot\cos3x+3\cdot2\cos ax\cdot\cos x\right)=\frac{1}{8}\left(\cos(a+3)x+\cos(a-3)x+3\cos(a+1)x+3\cos(a-1)x\right).$$

Pentru $a\notin\{-3;-1;1;3\}$ primitivele funcției f sunt

$\int f(x)dx=\frac{1}{8}\left[\frac{\sin(a+3)x}{a+3}+\frac{\sin(a-3)x}{a-3}+3\cdot\frac{\sin(a+1)x}{(a+1)}+3\cdot\frac{\sin(a-1)x}{a-1}\right]+C$. În rest , acestea ies imediat.

Rezolvare: Dacă $x\in[a,b]$, atunci $x^2-(a+b)x+ab\le0$. Deci, din proprietatea de monotonie a integralei

avem $\int_a^b \left(x^2-(a+b)x+ab\right)f(x)dx \le \int_a^b 0dx$. Aplicând metoda de integrare prin părţi obţinem

$$\int_a^b \left(x^2-(a+b)x+ab\right)f(x)dx = \int_a^b \left(\frac{x^3}{3}-(a+b)\cdot\frac{x^2}{2}+abx\right)' f(x)dx =$$

$$=[\left(\frac{x^3}{3}-(a+b)\cdot\frac{x^2}{2}+abx\right)f(x)]\Big|_a^b - \int_a^b \left(\frac{x^3}{3}-(a+b)\cdot\frac{x^2}{2}+abx\right)f'(x)dx \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b \left(\frac{x^3}{3}-(a+b)\cdot\frac{x^2}{2}+abx\right)f'(x)dx \ge \left(\frac{b^3}{3}-(a+b)\cdot\frac{b^2}{2}+ab^2\right)f(b) -$$

$$-\left(\frac{a^3}{3}-(a+b)\cdot\frac{a^2}{2}+a^2b\right)f(a) \overset{f(a)=f(b)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{f(a)=f(b)}{\Leftrightarrow} \int_a^b \left((2x^3-3(a+b)x^2+6abx\right)f'(x)dx \ge \left(2(b^3-a^3)-3(a+b)^2(b-a)+6ab(b-a)\right)f(a)$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b \left((2x^3-3(a+b)x^2+6abx\right)f'(x)dx \ge (b-a)(2b^2+2ba+2a^2-3a^2-6ab-3b^2+6ab)f(a)$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b \left((2x^3-3(a+b)x^2+6abx\right)f'(x)dx \ge (b-a)(-a^2+2ab-b^2)f(a)$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b \left((2x^3-3(a+b)x^2+6abx\right)f'(x)dx \ge (a-b)^3 f(a),$$ Q.E.D.

L:631. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcţie de două ori derivabilă cu proprietatea că există a < b, astfel încât f(a) = f(b) (f este neinjectivă), atunci există c∈(a; b) astfel încât:

$$f''(c)\int_a^c f(x)dx = f'(c)[f(a)-3f(c)].$$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Rezolvare. Fie $g(x)=[f(a)-f(x)]\int_a^x f(t)dt$. Cum g(a) = g(b) =0, atunci conform teoremei lui Rolle $\exists d\in(a;b)$ a.î. $g'(d)=0$. Dar $g'(x)=-f'(x)\int_a^x f(t)dt+[f(a)-f(x)]f(x)$, şi cum $g'(a)=g'(d)=0$, conform aceleaşi teoreme a lui Rolle $\exists c\in(a;d)$ a.î. $g''(c)=0$.

Derivând încă o dată funcţia g, avem:

$$g''(x)=-f''(x)\int_a^x f(t)dt-f'(x)f(x)-f'(x)f(x)+[f(a)-f(x)]f'(x)=$$

$$=-f''(x)\int_a^x f(t)dt-3f'(x)f(x)+f(a)f'(x),$$ şi din faptul că $g''(c)=0$, rezultă relaţia propusă.

L:632. Calculaţi: $\int_0^2 \frac{(x+\sqrt{x^2+4})^n-(x-\sqrt{x^2+4})^n}{\sqrt{x^2+4}}dx$, $(n\in\mathbb{N}^*)$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Notăm $I_n = \int_0^2 \frac{(x+\sqrt{x^2+4})^n - (x-\sqrt{x^2+4})^n}{\sqrt{x^2+4}}dx$ şi vom calcula

$\frac{I_n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \int_0^2 \frac{(x+\sqrt{x^2+4})^n - (x-\sqrt{x^2+4})^n}{\sqrt{x^2+4}}dx$. Facem substituţia

$x = 2sh(t) = e^t - e^{-t}, dx = 2ch(t)dt$ mai sus şi obţinem $\frac{I_n}{2^{n+1}} = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{e^{nt} + (-1)e^{-nt}}{2}dt =$

$\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} ch(nt)dt = \frac{1}{n}sh(\ln(1+\sqrt{2})^n) = \frac{1}{2n}((\sqrt{2}+1)^n - (\sqrt{2}-1)^n), daca\ n = impar$ şi

$\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} sh(nt) = \frac{1}{n}ch(\ln(1+\sqrt{2})^n) - \frac{1}{n}ch(0) = \frac{1}{2n}((\sqrt{2}+1)^n + (\sqrt{2}-1)^n) - \frac{1}{n}, daca\ n = par$

Deci $I_n = \frac{2^n}{n}((\sqrt{2}+1)^n - (\sqrt{2}-1)^n)$, dacă n este număr impar, respectiv

$I_n = \frac{2^n}{n} \cdot \left[(\sqrt{2}+1)^n + (\sqrt{2}-1)^n - 2\right]$, dacă n este număr par.

L:633. **Să se calculeze** $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx$. **Gabriel Tănase**, Buzău

Rezolvare:

$I = \int_0^{\pi} \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx$ şi cu schimbarea de variabilă $x - \pi = t$ în a doua integrală, rezultă $I = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx\right)$

În a doua integrală se face schimbarea de variabilă $x - \frac{\pi}{2} = t$ şi se obţine $I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx$.

$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx = 4\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx\right)$

În a doua integrală se face schimbarea de variabilă $x = \frac{\pi}{2} - t$ şi se obţine $I = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx$. Mai departe folosim formulele $\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}$ şi $\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x}$

$I = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(\frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+tg^2 x}\right)^2}dx = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+tg^2 x)(tgx)'}{tg^4 x + 1}dx$

Se face schimbarea de variabilă $tgx = t$ şi rezultă $I = 8\int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^4}dt$.

$$I=8\int_0^1\frac{1+t^2}{\left(t^2+1\right)^2-2t^2}dt=8\int_0^1\frac{1+t^2}{\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)}dt=4\int_0^1\left(\frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}+\frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right)dt=$$

$$=4\int_0^1\frac{\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)'}{\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}dt+4\int_0^1\frac{\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)'}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}dt=4\sqrt{2}arctg\left(\sqrt{2}t-1\right)\Big|_0^1+4\sqrt{2}arctg\left(\sqrt{2}t+1\right)\Big|_0^1=$$

$$=4\sqrt{2}\left[arctg\frac{1}{\sqrt{2}+1}+arctg\left(\sqrt{2}+1\right)\right]=4\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2}=2\sqrt{2}\pi$$

L:634. Se consideră operaţia: X*Y = XY - YX, definită pe mulţimea matricelor pătratice de ordin n. Să se arate că submulţimea M(A) = {X∈M_n | AX = XA} pentru orice A∈M, A nesingulară, este parte stabilă în raport cu operaţia indusă.

Petre Rău, Galați

Rezolvare: Fie $X,Y\in M(A)\Rightarrow AX=XA$ și $AY=YA$. Fie $X*Y=XY-YX$.

A(X*Y)-(X*Y)A = A(XY-YX)-(XY-YX)A = AXY-AYX-XYA+YXA=XAY-YAX-XYA+ YXA = XYA-YXA-XYA+YXA = 0.

L:635. Se consideră ecuația $x^3-(2x_1+2x_2+1)x^2+(x_1+x_2+2018)x-x_1-x_2-1=0$, **care are toate rădăcinile reale** x_1,x_2,x_3. **a)Să se arate că :** $(1+x_1)(1+x_2)=1+x_3$ **; b) Rezolvați ecuația în** $\mathbb{R}$.

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare: a) Din relațiile lui Viète avem: $x_3=x_1+x_2+1$ și $x_1\cdot x_2\cdot x_3=x_1+x_2+1=x_3$.

Dacă $x_3=0\Rightarrow x_1+x_2=-1\Rightarrow\ x^3+x^2+2017x=0\Leftrightarrow x(x^2+x+2017)=0$ care nu admite soluții reale ($\Delta\langle 0$). Atunci, din $x_1\cdot x_2\cdot x_3=x_3\Rightarrow x_1x_2=1$. Obținem: $(1+x_1)(1+x_2)=(1+x_1+x_2)+x_1x_2=1+x_3$.

b) Fie x_1 **rădăcină a ecuației date. Cum** $x_1x_2=1$ ecuația dată devine $x_1^3-2015x_1+\frac{1}{x_1}=0$ care este echivalentă cu ecuația bipătrată $x_1^4-2015x_1^2+1=0$ în care se notează $x_1^2=y\rangle 0$ obținându-se ecuația $y^2-2015y+1=0$ cu soluțiile $y_{1,2}=\frac{2015\pm\sqrt{2015^2-4}}{2}\rangle 0$ iar $x_1=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2015\pm\sqrt{2015^2-4}}=$

$=\pm\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2017}\pm\sqrt{2013}\right)$. Pentru $x_1=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2017}+\sqrt{2013}\right)$.

Rezultă $x_2=\frac{1}{x_1}=\frac{2}{\sqrt{2017}+\sqrt{2013}}=\frac{\sqrt{2017}-\sqrt{2013}}{2}$, iar

$x_3=1+x_1+x_2=1+\sqrt{2017}$. Aceleași rezultate se obțin pentru $x_1=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2017}-\sqrt{2013}\right)$.

Analog, pentru $x_{1,2}{}^I=-\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2017}+\sqrt{2013}\right)$ se obține $x_3{}^I=1-\sqrt{2017}$.

L:636. Să se calculeze limita şirului $(a_n)_{n\geq 0}$ **având termenul general:** $a_n=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{|\cos(2n+1)x|}{x}dx$.

(în legătură cu problema C.O: 5074 din Gazeta Matematică nr. 11/2009). **Vasile Mircea Popa**, Sibiu

Rezolvare: Pentru rezolvarea acestei probleme, vom folosi o formulă de medie din calculul integral, pe care o reproducem în continuare.

Formulă de medie

Dacă f(x) este o funcţie continuă iar g(x) este o funcţie integrabilă şi pozitivă pe intervalul [a,b], există un număr $\xi \in [a,b]$ astfel încât:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

Revenind la rezolvarea problemei, vom considera următoarele funcţii:

$$f:\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\to R,\ f(x)=\frac{1}{x},\qquad g:\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\to R_+,\ g(x)=\left|\cos(2n+1)x\right|,\ n\in N.$$

Pentru un n oarecare, $n \in N$, notăm cu x_i rădăcinile ecuaţiei g(x)=0 aparţinând intervalului $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, i=0,1,…,2n+1. Observăm că: $x_i = \frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2n+1}$, i=0,1,…,2n+1.

Intervalul $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ este divizat de punctele $x_0, x_1, ..., x_{2n+1}$ în 2n+1 intervale de lungime egală.

Putem scrie: $a_n = \int_{x_0}^{x_1} f(x)g(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)dx + ... + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx + ... + \int_{x_{2n}}^{x_{2n+1}} f(x)g(x)dx$.

Pentru orice interval $[x_{i-1}, x_i]$ funcţiile f(x) şi g(x) îndeplinesc condiţiile din formula de medie, deci putem scrie: $a_n = f(\xi_1)\int_{x_0}^{x_1} g(x)dx + f(\xi_2)\int_{x_1}^{x_2} g(x)dx + ... + f(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx + ... + f(\xi_{2n+1})\int_{x_{2n}}^{x_{2n+1}} g(x)dx$

unde $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, i=1,2,…,2n+1.

Observăm că avem: $\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx = \frac{2}{\pi}(x_i - x_{i-1})$. Deci:

$$a_n = f(\xi_1)\frac{2}{\pi}(x_1 - x_0) + f(\xi_2)\frac{2}{\pi}(x_2 - x_1) + ... + f(\xi_i)\frac{2}{\pi}(x_i - x_{i-1}) + ...$$
$$+ f(\xi_{2n+1})\frac{2}{\pi}(x_{2n+1} - x_{2n}) = \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{2n+1} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

S-a pus astfel în evidenţă pentru un n oarecare o sumă Riemann asociată funcţiei f(x), intervalului $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, diviziunii echidistante Δ_n definite de punctele x_i de mai sus şi punctelor intermediare ξ_i de asemenea definite mai sus.

Norma diviziunii Δ_n este $\nu(\Delta_n) = \frac{\pi}{2n+1}$.

Putem deci scrie: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{\nu(\Delta_n)\to 0} \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{2n+1} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{x}dx = \frac{2\ln 3}{\pi}$

S-a obţinut în acest fel limita şirului din enunţul problemei: $a = \frac{2\ln 3}{\pi}$.

L:637. Să se calculeze limita şirului $(u_n)_{n\geq 1}$ având termenul general:

$u_n = \arg\text{th}\frac{1}{n+1} + \arg\text{th}\frac{1}{n+2} + \ldots + \arg\text{th}\frac{1}{2n}$**, unde prin argth x am notat funcţia inversă a funcţiei tangentă hiperbolică** (în legătură cu problema 26295 din G.M. nr. 4/ 2010).

Vasile Mircea Popa, Sibiu

Rezolvare:

Considerăm funcţia $f:(0,1)\to R$, $f(x)=\frac{\arg\text{th}\, x}{x}$, unde $\arg\text{th}\, x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ este funcţia argument tangentă hiperbolică de x, adică funcţia inversă a funcţiei tangentă hiperbolică:

$\text{th}\, x = \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $x \in R$.

Se poate demonstra că funcţia $f(x)$ este strict crescătoare pe $(0,1)$ şi cititorul este invitat să facă acest lucru, ca exerciţiu (se pot folosi în acest scop derivatele).

De asemenea, se obţine uşor că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1$. (1)

În continuare utilizăm un rezultat cunoscut, care se poate verifica imediat.

Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sunt $2n$ numere reale strict pozitive astfel încât:

$\frac{a_1}{b_1} > \frac{a_2}{b_2} > \ldots > \frac{a_n}{b_n}$, atunci:

$\frac{a_1}{b_1} > \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} > \frac{a_n}{b_n}$. Putem scrie: $\frac{\arg\text{th}\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} > \frac{\arg\text{th}\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+2}} > \ldots > \frac{\arg\text{th}\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}}$,

deoarece funcţia $f(x)$ este strict crescătoare.

Rezultă: $\frac{\arg\text{th}\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} > \frac{\arg\text{th}\frac{1}{n+1} + \arg\text{th}\frac{1}{n+2} + \ldots + \arg\text{th}\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}} > \frac{\arg\text{th}\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}}$. (2)

Şirul: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$ este convergent şi are limita $\ln 2$.

Pentru demonstraţie considerăm funcţia $g:[1,2]\to R$, $g(x)=\frac{1}{x}$, diviziunea intervalului $[1,2]$ în n părţi egale, precum şi suma Darboux inferioară asociată. Ţinând seama de definiţia integralei, obţinem imediat:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2.$$

Ţinând seama de (1) putem scrie: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\arg\text{th}\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} = 1$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\arg\text{th}\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}} = 1$.

Trecând la limită în inegalitatea dublă (2) pentru $n\to\infty$, obţinem imediat:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\arg\text{th}\frac{1}{n+1} + \arg\text{th}\frac{1}{n+2} + \ldots + \arg\text{th}\frac{1}{2n}\right) = \ln 2$,

şi cu aceasta problema este rezolvată.

„Neștiința dă naștere la înfumurări,
iar știința la modestie."
Tucidide
(460- 398, î.Hr)

4. Probleme propuse

▪ Clasa a V-a

G:830. Echipa olimpică la matematică a clasei a 5- a trimite rezolvări de probleme la Gazeta Matematică. De două ori numărul de rezolvări expediate de fiecare fată plus de 3 ori numărul de rezolvări expediate de fiecare băiat fac 56 probleme rezolvate. De 5 ori rezolvările înaintate de fiecare fată plus de patru ori rezolvările înaintate de fiecare băiat fac 98 probleme.Câte rezolvări a trimis o fată şi câte rezolvări a trimis un băiat ?

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:831. Produsul a 2018 numere naturale este egal cu 2018. Aflați cea mai mica sumă posibilă a acestor numere.

elev **Gobej Ștefan**, Curtea de Argeș

G:832. a) Calculați: $1^3+1^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3$.
b) Arătați că numărul 2018^{2017} se poate scrie ca o sumă de nouă cuburi perfecte diferite de zero.

Dârstaru Gheorghe, Buzău

G:833. Arătaţi că dacă numerele naturale a,b,c,d,e,f verifică egalitatea $a^5+b^5+c^5+d^5+e^5+f^5=46656$, atunci

$$\frac{(a+b+c+d+e+f)^6}{a^5+b^5+c^5+d^5+e^5+f^5}=36^3.$$

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:834. Să se arate că mărind suma $S=0,01+0,11+1,11+11,11+111,11+....+11111111,11$ cu 111111110, rezultatul este număr natural.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:835. Aflați numerele naturale nenule x,y,z,t, dacă: $\frac{56}{15}=x+\cfrac{1}{y+\cfrac{2}{z+\cfrac{3}{t}}}$. **Radu Diaconu,** Sibiu

G:836. Determinaţi numerele $\overline{abcd}$ care verifică relaţia $4\cdot\overline{abcd}=\overline{dcba}$. **Neculai Stanciu,** Buzău

G:837. Aflați numerele naturale m și n, cu $m\langle n$, astfel încât suma numerelor naturale mai mari ca m, dar mai mici decât n să fie 2019.

Marian Ciuperceanu, Craiova

▪ Clasa a VI-a

G:838. Determinați numerele întregi x și y, știind că: $(3-2y)(x+2)+(y-1)(x+4)+6=0$.

Radu Diaconu, Sibiu

G:839. Se consideră șirul de numere naturale 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, ...
a) Găsiți al 2018-lea termen al șirului;
b) Aflați numerele din șir a căror diferență este 4037.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:840. Aflaţi x din $\left\{\left[\left(x+\frac{1}{2018}\right):\frac{1}{2018}-1\right]+2018\right\}:2018=2019$. **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

G:841. Dacă numerele $a_1,a_2,...,a_n;b_1,b_2,...,b_k\,(n,k\in N^*)$ sunt numere intregi care nu se divid la 5, să se arate că fracţia: $\frac{a_1^4+a_2^4+...+a_n^4-n}{b_1^4+b_2^4+...+b_k^4+4k}$ este o fracţie reductibilă prin 5. **Gheorgeh Ghiță**, Buzău

G:842. Arătați că: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot.....\cdot\frac{9999}{10000}\langle\ 0,01$. **Ciuperceanu Marian**, Craiova

G:843. Să se demonstreze că numărul $11^{2010}+11^{2011}+11^{2012}+11^{2013}-2004$ are un număr par de divizori.

Titu Zvonaru, Comăneşti, şi Neculai Stanciu, Buzău

G:844. Cât este măsura unui unghi dacă măsura suplementului său este cu 63^0 mai mare decât triplul măsurii complementului său ?

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:845. Arătaţi că: $A=4^{3n}+3\cdot4^{2n}-4$ se divide cu 108, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Gobej Adrian , Curtea de Argeș

G:846. În triunghiul ABC cunoaștem că $m(\widehat{A})=\alpha$, $0\langle\alpha 90^0$ și AC=2AB. Să se determine natura triunghiului ABC, în cazurile:
a) $0\langle\alpha\langle 60^0$; b) $\alpha=60^0$; c) $60^0\langle\alpha\langle 90^0$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:847. În triunghiul ABC, AB<AC, punctul M este mijlocul laturii BC, punctul N ∈ (AC) astfel încât [NC] ≡[NB], MN∩AB = {P} și BN∩PC = {R}.
a) Arătați că [PC] ≡ [PB] și [NA] ≡ [NR];
b) Dacă pe latura [AB] se iau punctele distincte A, A_1, A_2, A_3, ..., A_{99}, B în această ordine și se colorează primul segment [AA_1] și apoi fiecare al șaselea segment după cel colorat, adică [A_7A_8], [$A_{14}A_{15}$] etc. (se numără și segmentele colorate întâlnite pe parcurs), demonstrați că segmentul [AB] poate fi colorat în două nuanțe.

Dârstaru Gheorghe, Buzău

▪ Clasa a VII-a

G:848. Aflaţi $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât expresia $x^{2018}+2^{2018}\cdot y^{2018}-2^{1010}\cdot x^{1009}+2^{1010}\cdot y^{1009}+2^{2018}+1$ să fie minimă. **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

G:849. Arătați că $\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{5}{3n}}+\sqrt{\frac{8}{3}+\frac{4}{3n}}+\sqrt{\frac{7}{3}-\frac{3}{n}}<4$, $\forall n\in N, n\geq 2$. **Radu Diaconu,** Sibiu

G:850. Să se arate că dacă $a,b\in\mathbb{N}^*$, $a\neq b$, atunci numărul $n=2018a^2+2019b^2$ se poate scrie ca suma a 2019 pătrate perfecte.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:851. Să se demonstreze că $\frac{a+1}{\sqrt{a}}+\frac{a+2}{\sqrt{a+1}}+\frac{a+3}{\sqrt{a+2}}+...+\frac{a+1009}{\sqrt{a+1008}}>2018$, $\forall a\in\mathbb{N}^*$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:852. Să se determine numerele naturale n şi k, pentru care numărul $\sqrt{2^n+4^k}$ este raţional.

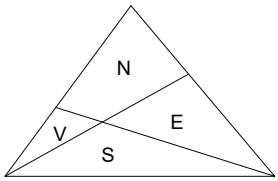
Gheorghe Ghiță, Buzău

G:853. Determinaţi numerele $\overline{abc}$ ştiind că $\sqrt{\overline{abc}}=\overline{ab}-\sqrt{c}$. **Gobej Adrian**, Curtea de Argeș

G:854. În triunghiul ABC, mediana BD cu $D\in[AC]$ și bisectoarea CE cu $E\in[AB]$ se intersectează în M, iar AM intersectează BC în N. Arătați că:
a) $EN \parallel AC$; b) Triunghiul CEN este isoscel. **Dârstaru Gheorghe**, Buzău

G:855. Un fermier are un teren triunghiular ca în figura de mai jos.
În zona de vest pot paşte 6 capre, în zona sudică 12 capre, iar în est 8 capre. Ştiind că toate caprele pot mânca aceeaşi cantitate de iarbă, aflaţi câte capre pot paşte în zona de nord a terenului?

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău



▪ Clasa a VIII-a

G:856. Cercetaţi dacă $2+\sqrt{3}$, $3+\sqrt{2}$, $\sqrt{2(9+2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}$ pot fi laturile unui triunghi dreptunghic.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:857. Fie $x,y,z\geq -1$, astfel încât $x+y+z=-1$. Demonstrați că: $x^3+y^3+z^3\geq -\frac{3}{2}$.

Radu Diaconu , Sibiu

G:858. Fie $a,b,c\in[0;1]$ și notăm $E(a;b;c)=\frac{a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}}{1+\sqrt{ab}}+\frac{b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}}{1+\sqrt{bc}}+\frac{c\sqrt{ab}+a\sqrt{bc}}{1+\sqrt{ca}}$. Să se arate că $3abc\leq E(a;b;c)\leq a+b+c$. **Emil C. Popa**, Sibiu

G:859. Să se rezolve în $\mathbb{R}^3$ sistemul de ecuații: $\begin{cases} y^2-1=2xz \\ y-1=2x+z \\ (y+1)^2=2x(z+1)\end{cases}$. **Radu Diaconu**, Sibiu

G:860. Determinați numerele întregi x, care verifică ecuația $x^2+(x+1)^2=\frac{4x^4+1}{41}$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:861. Să se demonstreze că dacă $a+b+c+d=1009$, cu $a,b,c,d\in\mathbb{R}_+$, atunci $\sqrt{a(b+c+d)}+\sqrt{b(c+d+a)}+\sqrt{c(d+a+b)}+\sqrt{d(a+b+c)}\le 2018$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:862. Determinaţi numerele reale strict pozitive a,b,c ştiind că

$$\frac{6}{\sqrt{a+12-\sqrt{12a}}+\sqrt{b+6-\sqrt{20b}}+\sqrt{c+10-\sqrt{24c}}}\in\mathbb{N}.$$

Gobej Adrian , Curtea de Argeş

G:863. a) Arătați că $\frac{x+y}{2}\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},\forall x,y\in\mathbb{R}_+$.

b) Dacă $x,y,z,t\ge 0$ și $x+y+z+t=\sqrt{2}$ demonstrați că

$\sqrt{4x^2+9y^2}+\sqrt{16z^2+25t^2}+\sqrt{25x^2+16y^2}+\sqrt{9z^2+4t^2}\ge 7$

Dârstaru Gheorghe, Buzău

G:864. Să se rezolve în **Z** ecuaţia: $a^2+3ab+3b^2=3a+5b$.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

G:865. *Tom* se află la 10 *m* distanţă de *Jerry*. *Tom* aleargă cu 3 *m/s* iar *Jerry* alergă cu 2 *m/s*. *Jerry* este prins după ce parcurge x metri într-o anumită direcţie sau y metri în direcţia opusă. Să se arate că $x+y\ge 8\sqrt{5}\ m$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

G:866. Triunghiul ABC dreptunghic isoscel cu $m(A)=90^0$ are vârful A situat într-un plan α. AB şi AC formează cu planul α unghiuri de aceeaşi măsură u. Fie B', C' proiecţiile vârfurilor B, respectiv C pe planul α.

a) Demonstraţi că $B'C'\|BC$. b) Determinaţi intervalul în care se află măsura u.

Gobej Adrian , Curtea de Argeş

▪ Clasa a IX-a

L:638. Rezolvați ecuația: $\left[\sqrt{n^2+8n+25}\right]=\frac{n^2+8}{3}$ unde [a] reprezintă partea întreagă a lui a și n∈ **N.**

Dârstaru Gheorghe, Buzău

L:639. Rezolvaţi ecuaţia: $\sqrt[3]{31x+1}=x+1$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

L:640. Să se determine partea fracţionară a numărului $A=\frac{7^{2018}+8^{2018}+9^{2018}}{10}$.

Adrian Stan, Buzău

L:641. Să se rezolve sistemul de ecuații: $\begin{cases}\sqrt{2x+y}+\sqrt{x-y}=6\\ 2x+2\sqrt{x-y}=19\end{cases}$, unde $x,y\in\mathbb{R}$.

Diaconu Radu, Sibiu

L:642. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[4]{x-1}+\sqrt[4]{3-x}=2+\sqrt[4]{x-2}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

L:643. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x+\frac{4}{x}=2^{-x^4+7x^2+4x-18}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

L:644. Un şir $(a_n)_{n\geq 0}$ de numere reale având $a_0 \neq 0$ cunoscut, verifică relaţia: $a_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} \cdot k \cdot a_{k-1}$, $\forall n \geq 1$. Determinaţi formula temenului general. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

L:645. Să se arate că în orice triunghi are loc inegalitatea:
$\frac{l_a}{m_a}+\frac{l_b}{m_b}+\frac{l_c}{m_c} \leq \frac{2}{\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}}+\frac{2}{\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{b}}}+\frac{2}{\sqrt{\frac{c}{a}}+\sqrt{\frac{a}{c}}}.$, unde a, b, c; l_a, l_b, l_c; m_a, m_b, m_c reprezintă notaţiile consacrate în triunghi. **Gheorghe Ghiţă**, Buzău

L:646. Fie semidreptele $(Ox,(Oy,(Oz$ şi punctele $A \in (Ox, B \in (Oy, C \in (Oz$. Dacă $OA = x, OB = y, OC = 1$ şi $(Ox \perp (Oy,(Oy \perp (Oz,(Oz \perp (Ox$, atunci să se determine $x, y \in N^*$ astfel încât $m(\angle BAC) = 60^0$. Poate fi $\angle BAC$ drept ?

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

L:647. Calculaţi: $\sqrt{3}\left(\cos 5^0\right)^2 + (\sin 10^0)^2 + (\sin 20^2)^2$. **Marian Ciuperceanu**, Craiova

L:648. În triunghiul ABC, $m(\hat{A}) = 75^\circ$. Arătaţi că: $\frac{S}{m_a^{\ 2}} < \frac{4}{5}$. **Diaconu Radu,** Sibiu

L:649. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A cu $B = \frac{\pi}{16}$ şi $AB = 1$. Să se arate că $r < 0.09$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC. **Diaconu Radu,** Sibiu

L:650. Într-un triunghi de laturi a.b.c notăm cu h_a şi w_a lungimile înălţimii , respectiv a bisectoarei interioare aferente laturii a ,etc , celelalte notaţii fiind cele uzuale . Demonstraţi că :
$\frac{w_a}{h_a} \cdot \frac{w_b}{h_b} \cdot \frac{w_c}{h_c} \geq \frac{(4R+r)^2}{3p^2}$. **Vasile Jiglău** , Arad

L:651. Să se demonstreze egalitatea: $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{22} - 4\cos\frac{2\pi}{11} - 4\cos\frac{4\pi}{11} = 2$.

Vasile Mircea Popa, Sibiu

▪ Clasa a X-a

L:652. Dacă a,b,c sunt numere reale strict pozitive, astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = \sqrt{3} + 3$, să se arate că
$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \langle \frac{2\sqrt[4]{2}}{abc}$. **Radu Diaconu**, Sibiu

L:653. Fie $z \in \mathbb{Q}$, $|z| \leq \frac{5}{6}$. Să se arate că

$$\left|(1+i)z^3 + z^2 + (1-i)z + \frac{3}{20}i\right| \langle \ |1+z| + \frac{36}{25} \cdot |1-z^2| + \frac{36}{25} \cdot |1-z^3|$$

Emil C. Popa, Radu Diaconu, Sibiu

L:654. Să se arate că: a) $\frac{1}{C_n^0} + \frac{1}{C_n^1} + \ldots.. + \frac{1}{C_n^n} \geq \frac{(n+1)^2}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

b) $\frac{1}{\left(C_n^0\right)^2} + \frac{1}{\left(C_n^1\right)^2} + \ldots.. + \frac{1}{\left(C_n^0\right)^2} \geq \frac{(n+1)^2}{C_{2n}^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

L:655. Să se rezolve ecuația : $2^x - x\cdot 2^x = x+1$. **Dârstaru Gheorghe**, Buzău

L:656. Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\sin x + tgx = \dfrac{n\cdot tg\frac{x}{2}}{1-tg^n\frac{x}{2}}, -\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:657. Fie $a_1,a_2,a_3,...,a_{2017}\in[2;3]$, demonstrați că:
$\log_{a_1}(5a_2-6)+\log_{a_2}(5a_3-6)+...+\log_{a_{2016}}(5a_{2017}-6)+\log_{a_{2017}}(5a_1-6)\ge 4034$.

Gobej Adrian , Curtea de Argeș

L:658. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\dfrac{x}{x^2+1}=\log_4(x^n-nx+n+1)$, unde $n\ge 1, n\in\mathbb{N}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

L:659. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3\dfrac{x}{x^2+2}=x^4-5x^2+3$, $x>0$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

L:660. Să se rezolve ecuația $C_{x+3}^{x^2-3x+6}+C_{3x}^{x^2-2x+4}=37$. **Adrian Stan**, Buzău

L:661. Să se rezolve ecuaţia: $\log_{ax}^{a}+\log_{ax}^{a}\log_{ax^2}^{a}+...+\log_{ax^n}^{a}\log_{ax^{n+1}}^{a}=\dfrac{n+1}{n+2}, a>0, a\ne 1, n\in N^*$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

▪ Clasa a XI-a

L:662. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to R$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Definim distanţa de la un punct A la graficul funcţiei f notat cu G_f, astfel: $d(A,G_f)=\min\limits_{M\in G_f}\{AM\}$. Calculaţi această distanţă dacă $A(-1,0)$.

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

L:663. a) Să se determine valorile parametrului real a pentru care funcția $f:R\to R, f(x)=\ln(2x^2+x+1)-ax$ este monoton crescătoare pe R. Pentru $a=-\dfrac{9}{4}$, știind că $2.3978<\ln 11<2.3979$, să se afle valoarea lui $\frac{1}{4}\cdot f(2)$ cu patru zecimale exacte.

b) Să se discute numărul de soluții reale ale ecuației $e^x=a\cdot\left(2x^2+x+1\right)$ după valorile parametrului real a. Pentru $a=\dfrac{1}{e\cdot\sqrt{e}}$ să se arate că ecuația are o rădăcină reală în intervalul $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$.

Radu Diaconu , Sibiu

L:664. Arătaţi că dacă $A, B,$ şi C sunt unghiurile unui triunghi ascuţitunghic, atunci:

$$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\ge 6.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti, şi **Neculai Stanciu,** Buzău

L:665. Calculați limita șirului $(a_n)_{n\ge 0}$ cu $a_0=a>0$ și $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+2}$ pentru orice număr natural n.

Dârstaru Gheorghe, Buzău

L:666. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale strict pozitive cu $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=r\in\mathbb{R}_+^*$, $u,v\in\mathbb{R}$ cu $u+v=1$ Dacă notăm $a_n!=a_1a_2...a_n$, $G_n=(a_n!)^{\frac{1}{n}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, atunci să se calculeze:
$\lim\limits_{n\to\infty}\left((n+1)^u\sqrt[n+1]{(G_{n+1}!)^v}-n^u\sqrt[n]{(G_n!)^v}\right)$.

D.M. Bătineţu – Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

L:667. a) Stabiliți domeniul maxim de definiție și semnul funcției
$f(x)=(2-x)\ln(2-x)-(1+x)\ln(1+x)$.

b) Stabiliți monotonia și extremele funcției $g:\left(\frac{1}{e},e^2\right)\to\mathbb{R},\quad g(x)=\ln(1+\ln x)\cdot\ln(2-\ln x)$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:668. Dacă $A,B\in M_n(C)$ astfel încât $ABA=BA+A$, atunci: $AB^kA=(BA)^2(BA-I_n)^{k-2},\forall k\in N,k\geq 2$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:669. Să se afle numărul real a astfel încât dreptele $\begin{cases}ax+y-1=0\\x-ay+1=0\\x+3y-a=0\end{cases}$ să fie concurente.

Tănase Gabriel, Buzău

L:670. Dacă a,b,c sunt dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic, atunci volumul său se poate calcula cu formula $V=\frac{1}{8}\cdot\begin{vmatrix}a&b&c&1\\-a&b&x&y\\-a&-b&c&z\\-a&-b&-c&1\end{vmatrix}$, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

▪ Clasa a XII-a

L:671. Aflaţi rădăcinile polinomului $P(X)=X^3-63X^2+756X-1728$ ştiind că x_2 este media geometrică a celorlalte două rădăcini x_1 şi x_3.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

L:672. Să se rezolve în $\mathbb{R}$, ecuația:
$x^{4034}+x^{4032}+x^{4030}+....+x^{2020}+x^{2018}-2018x^{2017}+x^{2016}+x^{2014}+....+x^4+x^2+1=0$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:673. Să se calculeze: $I=\int\limits_2^3\frac{2x^5-19x^4+68x^3-125x^2+131x-81}{(x^2-x+2)\cdot(2x^2-9x+11)}\cdot\ln(x-1)dx.$

Radu Diaconu, Sibiu

L:674. Să se calculeze $\int\limits_0^4\frac{arctgx}{4x^2-4x+3}dx.$

Radu Diaconu, Sibiu

L:675. Să se arate că: $3\langle 2e^{\int\limits_0^1\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2x^2+1}dx}\langle 4$

Emil C. Popa, Radu Diaconu, Sibiu

L:676. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care are proprietatea $f(x)+2f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos^4 x, \forall x\in\mathbb{R}$.

Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

L:677. Se defineşte integrala având limita superioară infinită prin egalitatea:

$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$. Să se calculeze integrala: $\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{(x+1)^2}dx$.

Vasile Mircea Popa, Sibiu

L:678. Calculaţi $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ln(\sin x+\cos x)dx$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

---

Newton parlamentarul

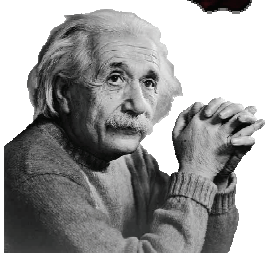
Isaac Newton(1642-1727), cel mai mare om de știință englez, descoperitorul printre altele a atracției gravitaționale, a derivatelor, a principiului acțiunii și reacțiunii forțelor, a fost întodeauna o persoană timidă și introvertită pe de o parte și fizicului plăpând și sensibil.

În calitatea sa de profesor la Cambridge, a devenit membru al Parlamentului englez, unde era cunoscut ca un taciturn notoriu, căci nu lua niciodată cuvântul la ședințele în plen.

Într-o zi când se discuta aprins asupra unor chestiuni, Newton se ridică în picioare și ridică mâna pentru a i se permite să spună ceva. În acel moment, toți parlamentarii amuțiseră căci erau extremi de curioși ce avea să spună marele matematician despre chestiunea care se dezbătea.

- **Am o propunere: să se închidă fereastra, căci e curent și mă trage!”** , după care s-a așezat impasibil pe scaun, ceea ce a creat o mare rumoare în sală.

„The only way to escape the effect of the corruptible effect of praise is to go on working.”.
Albert Einstein
(1879-1955)



5. QUICKIES

A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader's name, full address, and an e-mail address. Submited solutions should arrive before March 31, 2019.

PROPOSALS – QUICKIES

Q45. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

Let $a,b\in[0,\infty), a<b, P_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}$, n is positive integer.

Find $\int_a^b \frac{x^n+n!(\sin x-\cos x)}{e^x+\sin x+P_n(x)}dx$.

Q46. Proposed by Mihaly Bencze, Bucharest, Romania.

If $a,b,c>0$, then prove that $\sum\frac{a(2a+3b+3c)}{(b+c)(2a+b+c)}\ge 3$.

Q47. Proposed by Marian Cucoaneş, Mărăşeşti, Romania and Marius Drăgan, Bucharest, Romania.

(i) If $x,y,z\in(0,e)$ such that $x+y+z=1$, then prove that $(xyz)^3\ge x^{\frac{1}{x}}y^{\frac{1}{y}}z^{\frac{1}{z}}$;

(ii) If $x,y,z>0$ such that $x+y+z=1$, then prove that

$$(x+1)^3(y+1)^3(z+1)^3\ge(x+1)^{\frac{1}{x}}(y+1)^{\frac{1}{y}}(z+1)^{\frac{1}{z}}.$$

Q48. Proposed by Marian Cucoaneş, Mărăşeşti, Romania

Prove that in any triangle ABC holds the following inequality

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\le 4\cdot\frac{R}{r}-2.$$

Q49. Proposed by Marin Chirciu and Octavian Stroe, Piteşti, Romania.

Let a,b,c,n be positive real numbers such that $ab+bc+ca=3abc$. Prove that

$$\frac{1}{na^2+b^2}+\frac{1}{nb^2+c^2}+\frac{1}{nc^2+a^2}\le\frac{3}{n+1}.$$

SOLUTIONS – QUICKIES

Q41. Proposed by Mihàly Bencze, Bucharest, Romania.

If $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, then prove that $\frac{8}{\sin^2 2x} + \frac{3}{\sin^4 x + \cos^4 x} \geq 14$.

Solution 1 by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania.

We have $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$.

We denote $\sin^2 2x = t > 0$, then the inequality to prove becomes

$$\frac{8}{t} + \frac{6}{2-t} \geq 14 \Leftrightarrow 8 - 4t + 3t \geq 14t - 7t^2 \Leftrightarrow 7t^2 - 15t + 8 \geq 0$$

$\Leftrightarrow (t-1)(7t-8) \geq 0$, true for $t \in (0,1)$. The proof is complete.

Solution 2 by Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain.

Since $\sin^2 2x = 4\sin^2 x \cos^2 x$, the proposed inequality, by Bergström's inequality

$$\frac{8}{\sin^2 2x} + \frac{3}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{2^2}{2\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{\sin^4 x + \cos^4 x} \geq \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2} = \left(2+\sqrt{3}\right)^2 = 13.92820 > 14.$$

Solution 3 by Marin Chirciu, Piteşti, Romania. Denoting $\sin^2 2x = t$ we have $0 < t \leq 1$.

The inequality becomes: $\frac{8}{t} + \frac{6}{2-t} \geq 14 \Leftrightarrow 7t^2 - 15t + 8 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)(7t-8) \geq 0$,

true since $t - 1 \leq 0$ and $7t - 8 < 0$. The equality occurs iff $t = 1$, i.e. $x = \frac{\pi}{4}$.

Also solved by Marian Cucoaneş, Mărăşeşti, Romania and Marius Drăgan, Bucharest, Romania.

Q42. Proposed by Mihàly Bencze, Bucharest, Romania.

If $x, y, z > 0$ and $x + y + z = 1$, then prove that $\sum \frac{az + by}{x + yz} \geq (a+b)\sum \frac{x}{x + yz}$, for all $a, b > 0$.

Solution 1 by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania.

Because $x + yz = x(x+y+z) + yz = (x+y)(x+z)$ the inequality to prove is written successively

$$\sum \frac{az + by}{(x+y)(x+z)} \geq \sum \frac{ax + bx}{(x+y)(x+z)} \Leftrightarrow \sum (az+by)(y+z) \geq \sum (ax+bx)(y+z)$$

$$\Leftrightarrow a\sum yz + a\sum z^2 + b\sum y^2 + b\sum yz \geq a\sum xy + a\sum xz + b\sum xy + b\sum xz$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\sum x^2 + (a+b)\sum xy \geq 2(a+b)\sum xy$$

$\Leftrightarrow (a+b)\sum x^2 \geq (a+b)\sum xy \Leftrightarrow \sum x^2 \geq \sum xy$, true and we are done.

Remark. We observe that the inequality is true in weaker condition $a + b \geq 0$.

Solution 2 by Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain.

By the symmetry in the numerator at the left-hand and the summand yz at the denominator, it is enough to prove that for any $a > 0$, then

$$\sum \frac{az}{x + yz} \geq a\sum \frac{x}{x + yz} \Leftrightarrow \sum \frac{z}{x + yz} \geq \sum \frac{x}{x + yz} \Leftrightarrow \sum \frac{z}{(x+y+z)x + yz} \geq \sum \frac{x}{(x+y+z)x + yz}$$

where in the last inequality we have used that $x + y + z = 1$. Last inequality is equivalent to

$x^2 + xy + y^2 + xz + yz + z^2 \geq 2(xy + xz + yz)$, which follows by the rearrangement inequality.

Also solved by Marin Chirciu, Piteşti, Romania, Marian Cucoaneş, Mărăşeşti, Romania and Marius Drăgan, Bucharest, Romania.

Q43. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

If ABC is a triangle with area S and usual notations, then prove that

$$\sqrt{(a^4+1)(b^4+1)}+\sqrt{(b^4+1)(c^4+1)}+\sqrt{(c^4+1)(a^4+1)}\ge 8\sqrt{3}S.$$

Solution 1 by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania.

First we note that $\sqrt{(x^4+1)(y^4+1)}\ge x^2+y^2, \forall x,y\in R_+^*$., (*).

Indeed, $\sqrt{(x^4+1)(y^4+1)}\ge x^2+y^2 \Leftrightarrow (x^2y^2-1)^2\ge 0$, which is true with equality iff $xy=1$.

So, $\sum_{cyclic}\sqrt{(a^4+1)(b^4+1)}\overset{(*)}{\ge}\sum_{cyclic}(a^2+b^2)=2\sum_{cyclic}a^2=2(a^2+b^2+c^2)$, (1).

By Ionescu-Weitzenböck inequality we have $a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S$, (2).

From (1) and (2) we get the conclusion and we are done.

We have equality iff $a=b=c=1$.

Solution 2 by Marin Chirciu, Piteşti, Romania. By AM-GM we have $a^4+1\ge 2a^2$, with equality for $a=1$. We obtain that

LHS=$\sum\sqrt{\left(b^4+1\right)\left(c^4+1\right)}\ge\sum\sqrt{2b^2\cdot 2c^2}=\sum 2bc=2\left(p^2+r^2+4Rr\right)$.

It suffices to show that $2\left(p^2+r^2+4Rr\right)\ge 8\sqrt{3}rp$, which yields by Doucet's inequality $p\sqrt{3}\le 4R+r$ and from Gerretsen's inequality $p^2\ge 16Rr-5r^2$.

It remains to prove that $16Rr-5r^2+r^2+4Rr\ge 4r\left(4R+r\right)\Leftrightarrow R\ge 2r$, true by Euler's inequality.

The equality occurs from $a=b=c=1$.

Also solved by Marian Cucoaneş, Mărăşeşti, Romania, Marius Drăgan, Bucharest, Romania and Daniel Văcaru, Piteşti, Romania.

Q44. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

Let $f:R\to R$ be a continuos and odd function and $g:R_+^*\to R$ be a continuos function such that $g\left(\frac{1}{x}\right)=-g(x), \forall x\in R_+^*$. Compute $\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{1}{(1+x^2)\left(1+a^{(f\circ g)(x)}\right)}dx$, where $a>1$.

Solution by author. Let $x=u(t)=\frac{1}{t}$, $u'(t)=-\frac{1}{t^2}$, $u\left(\sqrt{2}-1\right)=\sqrt{2}+1$, $u\left(\sqrt{2}+1\right)=\sqrt{2}-1$.

Therefore, $I=\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{1}{(1+x^2)\left(1+a^{(f\circ g)(x)}\right)}dx=\int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}-1}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+a^{(f\circ g)(\frac{1}{t})}\right)}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=$

$$=\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{1}{(1+t^2)\left(1+a^{f(-g(t))}\right)}dt==\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{1}{(1+x^2)\left(1+a^{-(f\circ g)(x)}\right)}dx.$$

So, $2I=\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\left(\frac{1}{(1+x^2)\left(1+a^{(f\circ g)(x)}\right)}+\frac{1}{(1+x^2)\left(1+a^{-(f\circ g)(x)}\right)}\right)dx=\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{1+a^{(f\circ g)(x)}}{(1+x^2)\left(1+a^{(f\circ g)(x)}\right)}dx=$

$=\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}=\arctan(\sqrt{2}+1)-\arctan(\sqrt{2}-1)=\arctan\frac{\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)}{1+(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=$

$=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$. Hence, $I=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$.

Also solved by Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain, Marian Cucoaneş, Mărăşeşti, Romania, Marin Chirciu, Piteşti, Romania and Marius Drăgan, Bucharest, Romania.

„ O vorbă înțeleaptă
încremenește într-o ureche tare.”.
Goethe
(1749-1832)

6. Caleidoscop matematic

1. O problemă de tip Zenon ! de prof. Neculai Stanciu, Buzău

Un număr infinit de matematicieni intră într-un bar. Primul cere o bere, al doilea cere jumătate de bere, al treilea un sfert de bere, ş.a.m.d.

Barmanul face calculul (o "rezolvare" frumoasă):

$$A=1+1/2+1/4+1/8+...\Rightarrow 2A=2+A\Rightarrow A=2.$$

"Luați două beri!" zice barmanul.

O rezolvarea riguroasă necesită noţiunea de serie formală, adică

$$A=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k, \text{ unde } \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+...+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}\right)=1, \text{ deci } A=1+1=2.$$

Iată alte două probleme asemănătoare propuse de **Sfetoslav Cremarenco.**

I. Să se rezolve ecuaţia: $\sqrt{x+\sqrt{x+...\sqrt{x+...}}}=5$, unde avem o infinitate de radicali.

Rezolvare: Ridicăm la pătrat şi rezultă $x+\sqrt{x+\sqrt{x+...\sqrt{x+...}}}=25\Rightarrow x+5=25\Rightarrow x=20$.

II. Să se afle $\sqrt{6+\sqrt{6+...\sqrt{6+...}}}$.

Rezolvare: $\sqrt{6+\sqrt{6+...\sqrt{6+...}}}=x\Rightarrow 6+x=x^2\Rightarrow x^2-x-6=0\Rightarrow x=3$, deoarece $\sqrt{6+\sqrt{6+...\sqrt{6+...}}}>0$.

O rezolvarea riguroasă necesită noţiunea de şir convergent !

2. Totul = Nimic (O glumă simpatică) !

O demonstraţie culeasă de pe Facebook

Pr *of that nothing is everthing*

$$\frac{1}{\infty}=0$$

$$-18=0 \quad (rotate\ by\ \frac{\pi}{2})$$

$$-10=8 \quad (add\ \ 8)$$

$$\frac{0}{1}=\infty \quad (rotate\ by\ \frac{\pi}{2})$$

$$0=\infty \quad Q.E.D$$

3. Numere naturale, care se găsesc (se regăsesc) în puterile lor mai mari

de Kovacs Bela, Satu Mare

Puterea a cincea al fiecărui număr natural de o singură cifră se termină cu aceeași cifră ca și baza.

$0^5 = 0$	$3^5 = 243$	$6^5 = 7776$	$9^5 = 59049$
$1^5 = 1$	$4^5 = 1024$	$7^5 = 16807$	
$2^5 = 32$	$5^5 = 3125$	$8^5 = 32768$	

Numerele naturale de două cifre, ale căror puterea a cincea se termină cu aceași grupă de cifre, ca și cifrele bazei:

	$57^5 = 601.692.057$
$24^5 = 7.962.624$	$68^5 = 1.453.933.568$
$25^5 = 9.765.625$	$75^5 = 2.373.046.875$
$32^5 = 33.554.432$	$76^5 = 2.535.525.376$
$43^5 = 147.008.443$	$93^5 = 6.956.883.693$
$49^5 = 282.475.249$	$99^5 = 9.509.900.499$
$51^5 = 345.025.251$	

Numerele naturale de o singură cifră, ale căror orice putere se termină cu aceași cifră, ca și cifra bazei sunt: 0 , 1 , 5 , 6 . (exponentul ≥ 1)

Numerele naturale de două cifre, ale căror orice putere se termină cu aceași grupă de cifre, ca și cifrele bazei:

exponentul	**puterile lui 25**	**puterile lui 76**
1	**25**	**76**
2	6**25**	5.7**76**
3	15.6**25**	438.9**76**
4	390.6**25**	33.362.1**76**
5	9.765.6**25**	2.535.525.3**76**
6	244.140.6**25**	192.699.928.5**76**
7	6.103.515.6**25**	14.645.194.571.7**76**
8	152.587.890.6**25**	1.113.034.787.454.9**76**
9	3.814.697.265.6**25**	84.590.643.846.578.1**76**
10	95.367.431.640.6**25**	6.428.888.932.339.941.3**76**

Numerele naturale de trei cifre, ale căror orice putere se termină cu aceași grupă de cifre, ca și cifrele bazei sunt: 625 și 376.

Număr natural de patru cifre cu astfel de proprietate există unu singur: 9376

Singurul număr natural cu cinci cifre este: 90625

Numere naturale cu șase cifre sunt: 109.376 și 890.625.

Generalizare: Presupunere: Există numere naturale oricât de mari, în a căror orice putere se regăsește numărul respectiv.

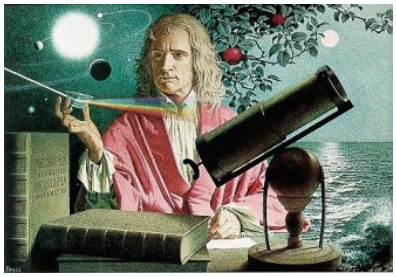
Un număr de 27 cifre, în al cărui pătrat se regăsește numărul respectiv:

380.022.607.743.740.081.787.109.376^2 =

144.417.182.396.352.539.175.410.357.**380.022.607.743.740.081.787.109.376**

4. DESPRE NEWTON

Newton și mărul



Legenda lui Newton și a mărului său este cea mai cunoscută întâmplare care e transmisă din generație în generație de către mai toți profesorii de fizică. Ea face referire la faptul că atunci când se plimba prin grădina sa, Newton a meditat îndelung asupra fenomenului observat de el atunci cînd cădeau din copac merele. Atunci, i-a venit idea că așa cum merele se desprind și cad pe pământ datorită unei forțe care le atrage în jos – gravitația, tot astfel, ” și planetele și stelele între ele nu se supun aceluiași principiu” ? Studierea acestei probleme l-a condus la descoperirea legi atracției universale în care ”forța de atracție a două corpuri este direct proporțională cu masele și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele”.

Puțini știu faptul, că atunci când a intuit această teorie, Newton se afla la casa sa din micul orășel natal Woolsthorpe căci Anglia fusese lovită de ciumă, iar școlile și universitățile fuseseră închise, inclusiv Cambridge. În liniștea casei sale și a naturii înconjurătoare, Newton a avut timp să realizeze o serie de experiențe care să-i permită să găsească proprietățile luminii și să emită mai târziu teoria corpusculară a luminii, precum și să intuiască existența gravitației universale. Descoperirea derivatelor mai târziu i-au permis să determine științific viteza corpurilor iar construirea telescopului său cu reflexie l-a ajutat să fie premiat de Societatea Regală din Londra și chiar să devină membru al ei. În multe dintre întâlnirile cu prietenii săi povestea că cei doi ani petrecuți la casa sa din Woolsthorpe au reprezentat cei mai fecunzi ani ai săi în descoperiri și lucrări științifice.

Cina lui Newton

O altă istorisire rămasă cu Newton ne povestește cât de pasionat era fizicianul atunci când se apuca de un lucru, căci uneori chiar uita să mai mănânce.

O dată, a venit la el în vizită un doctor, William Stukeley pentru a lua cina împreună, însă la un moment dat Newton s-a dus în cabinetul său de lucru și s-a apucat să lucreze la ceva ce îi venise în minte.

Cum doctorul Stukeley rămăsese singur de ceva vreme iar foamea îl biruise și nu se mai putea abține, s-a așezat la masă și s-a ospătat singur din tot ce era pe masă, inclusiv cu un pui ale cărei oscioare le puse la loc sub clopotul de stică unde fusese puiul și după care plecă fără să mai anunța gazda neospitalieră.

Când într-un târziu, Newton își terminase treaba și apăru în sufragerie, văzu masa pusă și atunci se așeză și el ca să mănânce ceva. Dar când ridică clopotul unde se presupune că ar fi trebuit să fie puiul bine rumenit găsi doar oasele.

Atunci, se bătu cu palma peste frunte ca și cum și-ar fi adus aminte de ceva:

- Poftim, că am uitat că am cinat deja! Și se întoarse înapoi în cabinet ca să mai lucreze ceva.

Newton în vizită

Următoarea întâmplare se referă la momentul unei vizite a lui Newton, acasă la aleasa inimii sale cu care trebuia să se căsătorească.

Invitat la ea acasă, Newton din momentul în care a ajuns, a început să-i citească o piesă de a lui Shakespeare, ” Troilus și Cressida”, până la sfârșitul piesei când stând câteva clipe cufundat în tăcere și meditând, se apropie de fată și-i luă degetul în mână.

Tânara fată se emoționă crezând că Newton vrea să facă cererea în căsătorie și atunci închise și ea ochii, dar stupoare. Atunci, simți o arsură bruscă la deget și când deschise ochii, văzu că Newton cufundat în meditație, probabil gândindu-se la vreo problemă nu-și dădu seama că luase degetul fetei și îndesă de câteva ori cu el jarul din căușul pipei.

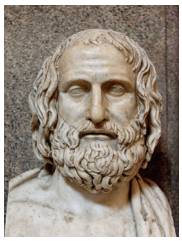
Bine-nțeles că acest lucru nu a împedicat-o ca să se căsătorească cu el mai târziu.

Despre măreția și contribuția marelui matematician și fizician la dezvoltarea științelor, stă dovadă însuși epitaful de pe mormântul său care se află la Westminster Abecy, locul unde sunt înmormântați toți regii și episcopii Angliei:

” Muritori, puteți fi mândri că a trăit un om atât de mare, care face onoare rasei umane”.

Din cartea „O scurtă istorie a matematicii”, Adrian Stan și colab. . Ed. Editgraph, Buzău. 2015

„ Nevoia îl învață pe om,
chiar când pricepe greu”.
(Euripides
(480- 406 î.Hr)



7. Poşta redacţiei

Dragi cititori, elevi şi profesori, a apărut **numărul 22** al revistei de matematică „ **SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noştri, şi care, sperăm noi, va aduna tot mai mulţi elevi şi profesori împreună, pentru a face din obiectul matematicii o activitate atractivă și performantă.

Profesorii şi elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciţii şi probleme cu enunţ şi rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătăţii calitatea acestei reviste, o pot face trimiţând materialele membrilor colectivului de redacţie sau pe adresa de e_mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate(**salvate în Word 2003**) , fie scrise de mână şi scanate. **Materialele primite trebuie să fie originale şi să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise şi către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparţine redacţiei.

Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările şi comenzile pentru **numărul 23** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **15 MARTIE 2019**. Vă urăm succes şi vă aşteptăm.

ELEVI REZOLVITORI

Şcoala Gimnazială “Gh. Popescu” Mărgineni- Slobozia, Scorniceşti, Olt
Clasa a VII-a: . Mindreanu Florentina, Vlaicu Liliana; **Clasa a VIII-a**: . Sima Iuliana, Screciu Iuliana;
Prof. Iuliana Trașcă.

Scoala Gimnazială "George Emil Palade" Buzău
Clasa a V-a: Barcan Diana Teodora, Apostol Andrei, Enică Luca Florin, Popa Mladin Andrei, Agheană Codruț Andrei, Nedelcu Mario, **Prof. Neculai Stanciu**;

Şcoala Gimnazială ” Rareş Vodă” Ploieşti, Prahova
Clasa a VI-a: Păduraru Cătălina, Mihai Alexandra, Găitănaru Andreea, Călinescu Alin, Nițoiu Vlad, Boboc Gabriel, Savu Gabriel**. Prof. Daniela Badea**

Liceul cu Program Sportiv „Iolnda Balaș Soter", Buzău:
Clasa a VII-a: Frățilă Mario, Giurea Măălin; **Clasa a VIII-a**: Ceaușel Darius, Dragomir Nicoleta; Iosif Gabriel, Suditu Alecsandra. **Prof. Corbu Violeta**.

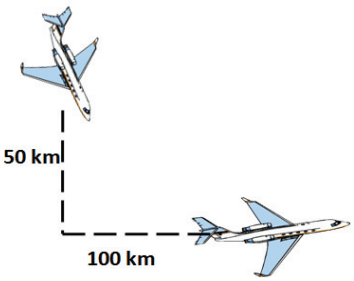
Colegiul Economic Buzău:
Clasa a X-a: Buga Marius**; ; Clasa a XI-a:** Perțea Elena**; Clasa a XII-a:** Aldea Aurel**; Prof. Dinu Constantin;**

Liceul Tehnologic Costin Nenițescu, Buzău:
Clasa a IX-a : Știrbu Cătălin, Dobre Anca, Dobre Ioana, Chiricioiu Georgiana, Cană Cristina, Macsim Mihaela; **Clasa a X-a:** Moraru Cristina; Moraru Irina; Catinca Teodora; Moise Andrei**; Clasa a XI-a:** Vizitiu Anamaria, Gheorghiță Ruxandra**; Clasa a XII-a:** Pascu Elena; Dumitrache Mihaela, Pantazi Gabriela**; Prof. Adrian Stan;**

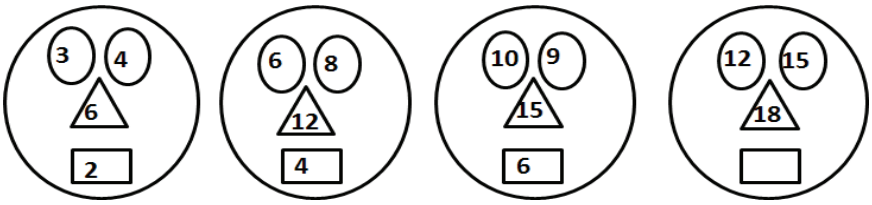
Colegiul Național Mihai Eminescu Buzău:
Clasa a X-a: Botan Bianca, Brataon Ancuța, Bundă Cristian, Ionescu Alexandra, Marin Diana, Neagu Simona, Perțea Andreea, Râmbeț Marina, Necula Nicoleta, Tomica Elena, Zamfir Izabela, Zamfir Izabela, Zaharia Cosmin; **Clasa a XI-a:** Antonie daria, Bălan Mădălina, Bărău Cătălina, Chivu Mihaela, Coman Izabela, Copoiu Iulia, Dinu Ștefania, Dughiană Mădălina, Matei Mihai, Nedeluș Alexandra, Stana Alexandru, Ștefan Alexandru, Tarău Alexandra; Tătulescu Iulia; Ursu Florina;
Clasa a XII-a: Badea Vlăduț, Gheorgeh Oana, Hozu Alina, Iuga Valentin, Potecă Daniel, Sterian Bianca, Trifan Georgiana, Toma Sebastian, Zaharescu Anamaria; **Prof. Laura Tănase**

CALEIDOSCOP MATEMATIC

Un avion decolează de la Polul Nord și zboară spre Polul Sud, 50 km. Apoi zboară spre est încă 100 km. La ce distanță se află avionul de Polul Nord ?



Analizând cele trei cercuri, găsiți numărul lipsă din al patrulea cerc.



Răspuns la problema de la pagina 9.

Fiecare cifră din dreapta numerelor reprezintă numărul de zerouri sau ovaluri care se găsesc în scrierea numerelor din stânga:
Astfel, de exemplu, la numărul 1011 avem un singur zero, deci avem numărul 1; la numărul 5601 există 2 zerouri/ ovaluri , deci punem numărul 2; la numărul 2789 există 3 zerouri:
Atunci, la numărul 9886 există 6 de zerouri /ovaluri, deci punem numărul 6.