SCLIPIREA MINTII

REVISTĂ NAȚIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICA ; PUBLICATIE SEMESTRIALĂ, AN XIV, NR XXVII, 2021

SM

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEME PROPUSE

SM



ISTORIA MATEMATICII

CALEIDOSCOP MATEMATIC

Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

LICEUL TEHNOLOGIC " MESERII SI SERVICII ", BUZĂU

SCLIPIREA MINTII 27

Revistă naţională de cultură matematică, publicaţie semestrială, An XIV, Nr. XXVII, APRILIE 2021, BUZĂU

COLECTIVUL DE REDACTIE

- **Membrii onorifici:**

Costică Ambrinoc - **Preşedinte Filiala Râmnicu Sărat a Societăţii de Ştiinţe Matematice**
Lenuţa Pîrlog – **Preşedinte Filiala Buzău a Societăţii de Ştiinţe Matematice**
Cristina Drugă - **Inspector matematică**

D. M . Bătineţu – Giurgiu **Daniel Sitaru**
Nicolae Ivăşchescu **Mihály Bencze**
Lucian Tuţescu **Gheorghe Ghiță**
Marius Drăgan **Ionel Tudor**
Dorin Mărghidanu

- **Director:**
  Neculai Stanciu
- **Redactor şef:**
  Adrian Stan
- **Redactori principali:**

Andrei Octavian Dobre **Iuliana Traşcă**
Marin Chirciu **Gabriel Tica**
Ion Stănescu **Constantin Dinu**

- **Membri :**

Florică **Anastase**, Orlando **Alecu**, Lenuţa **Andrei,** Mădălin **Avram**, Daniela **Badea**, Gabriela **Buzea,** Anicuța **Bețiu,** Laura **Brutaru,** Elena **Ciobîcă,** Constantin **Ciobîcă,** Ana **Cismaru,** Aurel **Chiriţă,** Marin **Chirciu,** Nela **Ciceu,** Marian **Ciuperceanu,** Claudiu **Ciulcu,** Cătălin **Cristea,** Tatiana **Cristea,** Marian **Cucoaneş** , Luiza Lorena **Cremeneanu**, Dana **Cotfasă**, Mihaela **Daianu**, Camelia **Dană**, Radu **Diaconu**, Ileana **Didu,** Camelia **Dana,** Gheorghe **Dârstaru,** Otilia **Drăgan**, Ani **Drăghici**, Luiza **Dumitrescu,** Ileana **Duma,** Sorin **Dumitrescu,** Cristina **Ene,** Alina Georgiana **Ghiță,** Luminița **Ghiță,** Mădălina **Giurgescu,** Lucian Dan **Grigorie,** Ramona- Carmen **Grigore**, Adrian **Gobej**, Ștefan **Gobeș**, **Dorina** Goiceanu, Gabriela **Gogan**, Meda **Iacob,** Daniel **Iarca**, Mihai **Ionescu**, Adriana **Ioniță,** Ionuț **Ivănescu,** Vasile **Jiglău,** Bela **Kovacs,** Adalbert **Kovacs,** Dorin **Mărghidanu,** Mihaela **Mirea,** Mariana **Mitea,** Simona **Miu,** Cristian **Moanță,** Ionel **Morozenco**, Alexandrina **Năstase,** Gabriel **Nemțaru**, Constantin **Nicolau**, Kevin Soto **Palacios**, Petre **Păunescu**, Ion **Pătrașcu**, Stelian **Piscan,** Sorin **Pirlea,** Alin **Pop,** Victoria **Popa,** Emil C. **Popa**, Vasile Mircea **Popa**, Florentina **Popescu,** Adriana **Puescu,** Doina **Popescu,** Constantina **Prunaru**, Ramona **Puchiu**, Aurora **Porojnicu**, Angel **Plaza**, Simona **Radu**, Petre **Rău**, Nicolae **Oprea**, Robert **Gheorghiță**, Iulia **Sanda**, Livia **Stan**, Dumitru **Săvulescu,** Roxana **Stanciu**, Liviu **Smarandache,** Florin **Stănescu**, Andreea **Stoica,** Doina **Stoica,** Mircea Mario **Stoica,** Daniela **Stoian**, Alina **Tigae,** Laura **Tănase,** Hanganu **Aurel** Toma, Nicolae **Tomescu,** Diana **Trailescu,** Ovidiu **Ţâţan,** Dumitru **Tudor,** Eugenia **Turcu,** Marius **Ursărescu,** Roxana **Vasile,** Carina **Viespescu,** Ionuț-Florin **Voinea,** Marian **Voinea,** Daniel **Văcaru,** Sorina **Văcărean,** Florentin **Vișescu,** Elena **Zainea**

CUPRINS

ISTORIA MATEMATICII..... 1

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE..... 5

PROBLEME REZOLVATE..... 17

PROBLEME PROPUSE 37

QUICKIES 45

CALEIDOSCOP MATEMATIC 49

GÂNDEȘTE CORECT

REDACTIA
Liceul Tehnologic „ Meserii şi Servicii”, Buzău, Strada Bazalt, Nr. 15bis, Cod. 120167, Tel. 0238719223
E_mail: ady_stan2005@yahoo.com
Coordonator proiect: Adrian Stan



„Raţiunea este un arbitru între bine şi rău."
Seneca(1- 65 dHr.)



1. Istoria matematicii

Joseph Fourier (1768 - 1830)

de **Adrian Stan**, Buzău



Joseph Jean- Baptiste Fourier s-a născut în Franţa în localitatea Auxerre la 21.03.1768 ca fiu al unui croitor. Rămas orfan la vârsta de 8 ani este ajutat de episcopul local să urmeze cursurile unei şcoli militare unde este un elev foarte bun care excela la matematică dar originea sa modestă l-a împiedicat să obţină brevetul de ofiţer. Se spune că era atât de captivat de studiul matematicii încât studia şi noaptea la lumina resturilor de la lumânărilor celorlalţi, în timp ce aceştia dormeau. În 1787 întră într-o mănăstire benedictină în dorinţa lui de a se face preot dar o părăseşte dându-şi seama că nu are vocaţie.

Se înscrie mai departe ca profesor la Şcoala militară din Auxerre iar în această perioadă se instalează regimul de teroare al Revoluţiei în Franţa. El se decide se intre în politică deoarece fraterniza cu ideile revoluţionare iar ca membru al Comitetului Revoluţionar din Auxerre ajunge ca în 1794 chiar să fie arestat în urma unor evenimente dar scapă de ghilotină deoarece este anul când are loc sfârşitul lui Robiespiere.

După puţin timp se înscrie la Scoala Normală din Paris (**l'Ecole Normale**) unde îi întâlneşte pe matematicienii **Lagrange, Laplace şi Monge** dar spiritul revoluţionar îl conduce din nou la probleme. Este arestat din nou dar scapă repede fiind eliberat la insistenţele celor trei matematicieni.

În 1789 realizează primul memoriu referitor la soluţiile ecuaţiilor algebrice fiind citit în Academia de Ştiinţe. El perfecţionează procedeul de înmulţire şi împărţire prescurtată a fracţiilor zecimale precum şi rezolvarea aproximativă a ecuaţiilor algebrice printr-un procedeu care îl completează pe cel al lui Newton. De asemenea a enunţat teorema care îi poartă numele referitoare la numărul de rădăcini reale cuprinse într-un interval dat.

În 1797 devine profesor la Scoala Politehnică din Paris pe catedra lăsată vacantă de către Lagrange dar imediat în 1798 va face parte din expediţia lui **Napoleon Bonaparte** (1769- 1821) în Egipt, ca şi consilier ştiinţific alături de foarte mulţi oameni de ştiinţă între care şi Monge.

Aici, la vârsta de 30 de ani devine secretar al Institutului Egiptului înfiinţat de Napoleon pentru dezvoltarea unui sistem de învăţământ şi cultură în Egipt dar şi pentru a slăbi influenţa engleză în regiune, şi participă la explorarea sistematică a siturilor arheologice, realizează ateliere de lucru pentru soldaţii francezi pentru a realiza arme şi alte materiale pentru susţinerea războiului căci armata franceză era blocată pe continent de flota amiralului Nelson.

După capitularea armatei franceze în 1801 **Fourier** şi ceilalţi oameni de ştiinţă au fost capturaţi de englezi dar li s-a permis ulterior să plece chiar şi cu documentele oficiale ale muncii lor mai puţin cu piatra Rosetta - o stelă egipteană construită din granodiorit datând din anul 196 î Hr care conţinea mai multe inscripţii hieroglifice în limbi diferite şi care a fost luată, azi găsindu-se în Muzeul Naţional Britanic. Aceste inscripţii l-au ajuta pe fizicianul englez Thomas Young să traducă o serie de litere din scrierea hieroglifică de pe ea. Rezultatele cercetărilor din Egipt apar în cartea "Memorial d'expedition l' Egipt".

Întors în Franţa, la rugăminţile lui Napoleon acceptă încă din 1801 şi până în 1814 postul de prefect al unei regiuni cu capitala la Grenoble care îi lasă prea puţin timp să se mai ocupe de studiile sale şi totuşi aici

lucrează la opera sa de referinţă referitoare la conducţia căldurii , “ Theorie du movement de la chaleur dans les corp solides “ la care realizează două studii în 1807 şi 1812 pe care le prezintă în Academia de Ştiinţe. Institutul de matematică din Grenoble îi poartă numele ca urmare a înfiinţării de către el în 1811 a unei facultăţi de ştiinţe pe când era prefect.



Activităţile sale nu rămând indiferente, în 1809 este numit baron, în 1815 este numit director al Biroului de Statistică din Paris iar în 1817 devine membru al Academiei de Ştiinţă urmând ca din 1822 să devină şi secretar al acesteia. Mai târziu în 1826 este primit şi în Academia Franceză şi Academia de Medicină.

Ca omagiu adus activităţii sale, numele său se află inscripţionat pe Turnul Eiffel, în localitatea de naştere i s-a ridicat un bust iar multe descoperiri în matematică şi fizică îi poartă numele ca urmare a influenţei pe care a avut-o cu unele cercetări mai ales în domeniul ecuaţiilor cu derivate parţiale.

S-a preocupat să demonstreze că orice funcţie poate fi descompusă în serie trigonometrică dar de abia matematicienii Dirichlet, Lobacevschi, Riemann şi Cantor au reuşit să dezvolte această teorie conducând studiul lor la teoria mulţimilor.

Problema studiului propagării căldurii şi a coardelor vibrante l-au ajutat să introducă integralele curbilinii, el fiind şi autorul întroducerii notaţiei întegralei definite (în 1822), şi de asemenea a introdus funcţiile cilindrice,funcţiile calorice, funcţiile discontinue şi sumele ale cărui nume îl poartă, sumele Fourier pentru funcţii trigonometrice.

De numele său este legat şi transformata Fourier, o serie de ecuaţii cu numeroase aplicaţii în electricitate, procesul de difuzie, în rezolvarea problemelor de procesare a semnalului şi de mascare a undelor în mişcarea ondulatorie pentru funcţiile periodice precum şi în studiul mişcării planetelor sau al bătăilor de inimă al animalelor.

Transformata Fourier definită prin $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt$ descompune sau separă o undă sau o funcţie într-o sumă de sinusoide şi cosinusoide de frecvenţe diferite, de aceea este folosită în probleme de ştiinţe şi inginerie cum ar fi în optică, în fizica cuantică, în teoria probabilităţilor, etc., iar continuarea acestor cercetări a contribuit la utilizarea imaginilor scanate în ceea ce avem astăzi în medicină, CT-computer tomograf şi RMN sau IRM- (rezonanţa magnetica nucleară sau imagistică prin rezonanţă magnetică).

Fourier a fost primul matematician care a studiat creşterea temperaturii Pământului măsurând temperatura acestuia în foarte multe situaţii iar în urma experimentului său cu un model al Pământului închis într-un corp de sticlă a afirmat că atmosfera are rol de izolator şi de încălzire a planetei (- cunoscutul efect de seră, termen introdus mai târziu în 1900 de către meteorologul suedez Nils Ekholm) protejând Pământul de alte surse de radiaţii spaţiale. Mai târziu fizicianul John Tyndall a descoperit că creşterea temperaturii se datorează dioxidului de carbon.

Bibliografie:

Iulian Deac. Dictionar enciclopedic al matematicienilor. 2001.
Vasile Bobancu. Caleidoscop matematic. Editura Niculescu. Bucureşti. 2001.

Euclid – părintele geometriei

Gogan Gabriela, Suceava



Euclid (Euclides) a fost matematician grec, originar din Damasc (323 î.Hr., Syria – 275 î.Hr., Alexandria). A studiat la Academia din Atena și a fost profesor la școala pe care a întemeiat-o în Alexandria. Este considerat unul dintre marii matematicieni ai epocii elenistice (perioada 320 – 130 î. Hr.).

Despre viața sa, se cunosc foarte puține informații, de aceea se spune că viața lui se confundă cu opera. Textele păstrate despre viața lui **Euclid** îl înfățișează ca fiind o fire blândă, extrem de modestă și foarte preocupat de studiul geometriei.

O legendă a acelor vremuri spunea că regele, Ptolemeu I, a venit la **Euclid** şi i-a cerut să-i explice geometria, fără însă a mai învăţa teoremele şi axiomele. Acesta i-ar fi replicat că "în geometrie nu există drum pentru regi". O altă legendă evocă dezinteresul lui Euclid pentru a face bani din matematică. Un discipol l-ar fi întrebat ce câştig material va avea din studiul geometriei şi, drept răspuns, **Euclid** ar fi pus un servitor să îi dea discipolului trei oboli (monedă veche grecească), spunând: "dă-i omului ăstuia trei oboli, că el trebuie să câştige bani din ceea ce învaţă".

Însemnata sa operă, ***„Stoiheia" („Elemente")***, i-a adus o binemeritată și statornică glorie. Aceasta este alcătuită din treisprezece capitole și cuprinde bazele geometriei plane și spațiale și ale aritmeticii, conținând prima prezentare axiomatică a unei discipline științifice. A fost tradusă în aproape trei sute de limbi și a constituit timp de aproximativ două milenii cartea de căpătâi după care s-a predat matematica.

Primele şase părţi conţin teoremele geometriei plane, următoarele trei abordând teoria numerelor care include studiile lui **Euclid** asupra numerelor prime şi perfecte (un număr perfect este egal cu suma divizorilor săi, excluzându-se din şirul divizorilor însuşi numărul; exemplu: divizorii lui 6 sunt 1, 2, 3 şi 6=1+2+3). Partea a zecea continuă studiul început de Eudoxus asupra numerelor iraţionale, iar ultimele trei cărţi conţin elemente de geometria corpurilor solide.

Unul dintre rezultatele remarcabile îl reprezintă **Axioma paralelelor**: "Printr-un punct exterior unei drepte trece o singură paralelă la acea dreaptă". Enunţul original al axiomei era diferit pentru că **Euclid** nu a folosit termenul de "paralelism", ci de "prelungire infinită", adică două drepte pot fi prelungite la infinit fără ca acestea să se întâlnească vreodată. Deşi s-a încercat demonstrarea acestui postulat de-a lungul istoriei, abia în secolul XIX s-a dovedit că este imposibil de demonstrat. Încercările făcute de-a lungul celor 2000 de ani de a demonstra acest rezultat au dus la un pas foarte mare în înțelegerea a ce este matematica.

Proprietățile demonstrate fără a folosi axioma paralelelor, alcătuiesc ceea ce se numește „geometria absolută". Prin admiterea axiomei paralelelor (numită și **postulatul lui Euclid**) și în consecință a tuturor proprietăților ce decurg din ea se obține „**geometria euclidiană**". Astăzi, pe lângă geometria lui Euclid, a spaţiului plan, a mai apărut şi geometria spaţiilor curbe, hiperbolice sau parabolice.

Calea spre sinteza lui **Euclides** a fost pregătită și de către alți matematicieni ai antichității (Hippocrates, Eudoxos, Theetetos). Deși multe din rezultatele din *„Elemente"* au fost descoperite de matematicienii de dinainte, una dintre realizările lui Euclid a fost să le prezinte într-un singur cadru, logic și coerent, pentru a putea fi ușor folosite. A fost inclus și un sistem riguros de demonstrații matematice ce constituie baza matematicii încă și astăzi, 23 de secole mai târziu.

Euclides a adus și multe contribuții originale în matematică. A enunțat teorema catetei și teorema înălțimii unui triunghi dreptunghic, reciproca teoremei lui Pytagoras, concurența mediatoarelor unu triunghi, teorema împărțirii cu rest, algoritmul de determinare al celui mai mare divizor comun.

Pentru a obține c.m.m.d.c. a două numere întregi a și b, $b \neq 0$, prin algoritmul lui **Euclid**, împărțim pe a la b; dacă restul împărțirii este r_1 este zero, atunci b este c.m.m.d.c.; dacă nu, împărțim pe b la restul împărțirii anterioare, r_1, și obținem restul r_2; apoi împărțim pe r_1 la r_2 și obținem un nou rest r_3. Ultimul rest nenul este c.m.m.d.c. al celor două numere.

Exemplu:
Calculăm cel mai mare divizor comun al numerelor 3724 și 18468

$18468 = 3724 \cdot 4 + 3572$
$3724 = 3572 \cdot 1 + 152$
$3572 = 152 \cdot 23 + 76$
$152 = 76 \cdot 2 + 0$.

Aşadar, $(18468, 3572) = 76$

Pappos și Proclos, comentatori ai operei lui **Euclides,** amintesc și de alte lucrări remarcabile de matematică (referitoare la secțiuni conice), de astronomie și de optică, Optica și Catoptrica. În cel dintâi a prezentat noțiunea de rază de lumină și a formulat, pentru prima dată, legea propagării rectilinii a luminii: „Razele... se propagă în linie dreaptă și se duc la infinit". În continuare, **Euclid** a analizat probleme geometrice de aplicare a acestei legi: formarea umbrei, obținerea imaginilor cu ajutorul orificiilor mici, problema dimensiunilor aparente ale corpurilor și determinarea distanțelor până la ele. În Catoptrica Euclid a menționat că „tot ce este vizibil se vede în direcție rectilinie". În tratatul menționat a fost cercetată propagarea luminii de către corpuri.

Istoria consemnează moartea sa prin anul 270 î.Hr. Deşi nu se cunosc prea multe date despre viaţa sa şi multe dintre lucrările sale s-au pierdut de-a lungul vremii, prin munca sa, **Euclid** a reprezentat un pilon important în ştiinţa matematicii.

Bibliografie:
Bobancu, Vasile, "Caleidoscop matematic", ediția a III-a, Editura Niculescu
https://ro.wikipedia.org/wiki/Euclid
https://ro.wikipedia.org/wiki/Algoritmul_lui_Euclid
https://ro.wikipedia.org/wiki/Axioma_paralelelor

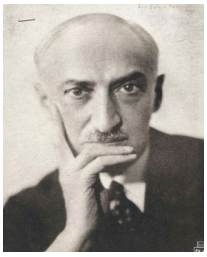
prof., Școala Gimnazială „Nicolae Labiș" Mălini, jud. Suceava

Ştiaţi că .....?

Schema lui Horner care face referire la determinarea coeficienţilor câtului şi restului împărţirii unui polinom $p(X) \in K[X]$ (K-corp comutativ) de grad $n \geq 1$ la un binom $X - a$ $(a \in K)$ a fost un procedeu folosit de matematicienii chinezi încă din secolul 2 î. Hr.

Francois Viete este cel care introduce în 1600 un procedeu asemănător cu schema lu Horner iar mult mai târziu, această metodă a matematicienilor chinezi este prezentată de către matematicienii **Paolo Ruffini** (în 1813) şi de **William Horner** (în 1819)- ultimul fiind şi cel care a rămas prin tradiţie cu numele asociat cu această metodă.

„ Raţionamentul făcut cu un limbaj prost ales
este asemenea cu o cântărire făcută cu greutăţi măsluite.”
André Maurois
(1885- 1967)



2. Articole și note matematice

Asupra unor inegalităţi în triunghi

de Marin Chirciu, Piteşti

Articolul pleacă de la problema L:810 din **Sclipirea Minții** numărul 26/2020, propusă de **Gheorghe Ghiță,** Buzău și dezvoltă inegalități în triunghi din aceeași clasă de probleme.

În ΔABC , $\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{C}{2}}\geq\sqrt{\dfrac{2r}{R}}$. Gheorghe Ghiță, Buzău

Soluție. Folosind $\sum\sin A=\dfrac{p}{R}$ și $\sum\cos\dfrac{A}{2}\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, (Jensen), avem:

$$Ms=\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}\geq\frac{\frac{p}{R}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\overset{(1)}{\geq}\sqrt{\frac{2r}{R}}=Md\text{ , unde }(1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\frac{p}{R}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\geq\sqrt{\frac{2r}{R}}\Leftrightarrow\frac{2p}{3\sqrt{3}R}\geq\sqrt{\frac{2r}{R}}\Leftrightarrow\frac{4p^2}{27R^2}\geq\frac{2r}{R}\Leftrightarrow 2p^2\geq 27Rr\text{ , (Coșniță\&Turtoiu).}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

Să determinăm o inegalitate de sens contrar.

In ΔABC, $\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{C}{2}}\leq\dfrac{2R}{R+2r}$. Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $\sum\sin A=\dfrac{p}{R}$ și $\sum\cos\dfrac{A}{2}\overset{Popoviciu}{\geq}\dfrac{p}{2R}+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\overset{Mitrinovic}{\geq}\dfrac{3\sqrt{3}r}{2R}+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\left(1+\dfrac{2r}{R}\right)$, avem:

$$Ms=\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}\leq\frac{\frac{p}{R}}{\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{2r}{R}\right)}\overset{Mitrinovic}{\leq}\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{2r}{R}\right)}=\frac{2}{1+\frac{2r}{R}}=\frac{2R}{R+2r}=Md\text{ .}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca. Se poate scrie dubla inegalitate:

In ΔABC, $\sqrt{\frac{2r}{R}} \le \frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}} \le \frac{2R}{R+2r}$.

Soluție.

Inegalitatea din dreapta.

Folosind $\sum \sin A = \frac{p}{R}$ și $\sum \cos\frac{A}{2} \overset{Popoviciu}{\ge} \frac{p}{2R}+\frac{3\sqrt{3}}{4} \overset{Mitrinovic}{\ge} \frac{3\sqrt{3}r}{2R}+\frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{2r}{R}\right)$, avem:

$$Ms = \frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}} \le \frac{\frac{p}{R}}{\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{2r}{R}\right)} \overset{Mitrinovic}{\le} \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{2r}{R}\right)} = \frac{2}{1+\frac{2r}{R}} = \frac{2R}{R+2r} = Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

Din $\sum \sin A = \frac{p}{R}$ și $\sum \cos\frac{A}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$, (Jensen), $\Rightarrow Ms = \frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}} \ge \frac{\frac{p}{R}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \overset{(1)}{\ge} \sqrt{\frac{2r}{R}} = Md$,

unde $(1) \Leftrightarrow \frac{\frac{p}{R}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \ge \sqrt{\frac{2r}{R}} \Leftrightarrow \frac{2p}{3\sqrt{3}R} \ge \sqrt{\frac{2r}{R}} \Leftrightarrow \frac{4p^2}{27R^2} \ge \frac{2r}{R} \Leftrightarrow 2p^2 \ge 27Rr$, (Coșniță&Turtoiu).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

În aceeași clasă de probleme

În ΔABC, $\sqrt{\frac{2r}{3R}} \le \frac{\cos A+\cos B+\cos C}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}} \le \frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{R+r}{R+2r}$. Marin Chirciu

Soluție.

Inegalitatea din dreapta.

Folosind $\cos A = 1+\frac{r}{R}$ și $\sum \cos\frac{A}{2} \overset{Popoviciu}{\ge} \frac{p}{2R}+\frac{3\sqrt{3}}{4} \overset{Mitrinovic}{\ge} \frac{3\sqrt{3}r}{2R}+\frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{2r}{R}\right)$, avem:

$$Ms = \frac{\cos A+\cos B+\cos C}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}} \le \frac{1+\frac{r}{R}}{\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{2r}{R}\right)} \le \frac{1+\frac{r}{R}}{\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{2r}{R}\right)} = \frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{1+\frac{r}{R}}{1+\frac{2r}{R}} =$$

$= \frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{R+r}{R+2r} = Md$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

Din $\cos A = 1+\frac{r}{R}$ și $\sum \cos\frac{A}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$, (Jensen), $\Rightarrow Ms = \frac{\cos A+\cos B+\cos C}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}} \ge \frac{1+\frac{r}{R}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \overset{(1)}{\ge} \sqrt{\frac{2r}{3R}} = Md$,

unde $(1) \Leftrightarrow \frac{1+\frac{r}{R}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \ge \sqrt{\frac{2r}{3R}} \Leftrightarrow \frac{\left(1+\frac{r}{R}\right)^2}{\frac{27}{4}} \ge \frac{2r}{3R} \Leftrightarrow \frac{2\left(R^2+2Rr+r^2\right)}{27R^2} \ge \frac{2r}{3R} \Leftrightarrow 2R^2-5Rr+2r^2 \ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (R-2r)(2R-r)\geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

În aceeași clasă de probleme.

$$\text{In } \Delta ABC,\ \sqrt{\frac{6r}{R}}\leq \frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}\leq \frac{6\sqrt{3}}{5R+2r}.$$ Marin Chirciu

Soluție.

Inegalitatea din dreapta.: Din $\sum \sin A=\frac{p}{R}$ și $\sum \sin\frac{A}{2}\overset{Popoviciu}{\geq}\frac{r}{2R}+\frac{5}{4}$, avem:

$$Ms=\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}\leq \frac{\frac{p}{R}}{\frac{r}{2R}+\frac{5}{4}}\overset{Mitrinovic}{\leq}\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{r}{2R}+\frac{5}{4}}=\frac{6\sqrt{3}}{5R+2r}=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

Din $\sum \sin A=\frac{p}{R}$ și $\sum \sin\frac{A}{2}\leq\frac{3}{2}$, (Jensen) $\Rightarrow Ms=\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}\geq\frac{\frac{p}{R}}{\frac{3}{2}}\overset{(1)}{\geq}\sqrt{\frac{6r}{R}}=Md$, unde (1)

$\Leftrightarrow \frac{\frac{p}{R}}{\frac{3}{2}}\geq\sqrt{\frac{6r}{R}}\Leftrightarrow\frac{2p}{3R}\geq\sqrt{\frac{6r}{R}}\Leftrightarrow\frac{4p^2}{9R^2}\geq\frac{6r}{R}\Leftrightarrow 2p^2\geq 27Rr$, (Coșniță&Turtoiu).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

În aceeași clasă de probleme.

$$\text{În } \Delta ABC,\ \sqrt{\frac{2r}{R}}\leq \frac{\cos A+\cos B+\cos C}{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}\leq \frac{4R+4r}{5R+2r}.$$ Marin Chirciu

Soluție.

Inegalitatea din dreapta.

Din $\sum\cos A=1+\frac{r}{R}$ și $\sum\sin\frac{A}{2}\overset{Popoviciu}{\geq}\frac{r}{2R}+\frac{5}{4}\Rightarrow Ms=\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}\leq\frac{1+\frac{r}{R}}{\frac{r}{2R}+\frac{5}{4}}=\frac{4R+4r}{5R+2r}=Md.$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

Din $\sum\cos A=1+\frac{r}{R}$ și $\sum\sin\frac{A}{2}\leq\frac{3}{2}$, (Jensen), $\Rightarrow Ms=\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}\geq\frac{1+\frac{r}{R}}{\frac{3}{2}}\overset{(1)}{\geq}\sqrt{\frac{2r}{R}}=Md$, unde (1)

$\Leftrightarrow\frac{1+\frac{r}{R}}{\frac{3}{2}}\geq\sqrt{\frac{2r}{R}}\Leftrightarrow\frac{2(R+r)}{3R}\geq\sqrt{\frac{2r}{R}}\Leftrightarrow\frac{4(R+r)^2}{9R^2}\geq\frac{2r}{R}\Leftrightarrow 2R^2-5Rr+2r^2\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (R-2r)(2R-r)\geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

O metodă pentru generarea n-uplelor pitagoreice

de Neculai Stanciu, Buzău

Abstract: Lucrarea prezintă o metodă pentru obţinerea numerelor naturale $a_1, a_2, ..., a_n$ care verifică relaţiile $a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < a_n$ şi $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{n-1}^2 = a_n^2$ oricare ar fi $n \geq 3$,

Definiţie. Dacă $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt numere naturale nenule care verifică relaţiile $a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < a_n$ şi $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{n-1}^2 = a_n^2$ oricare ar fi $n \geq 3$, atunci $(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n)$ se numeşte *n-uplu pitagoreic*.
Deoarece $3 < 4 < 5$ şi $3^2 + 4^2 = 5^2$, atunci $(3,4,5)$ este un triplet pitagoreic.

O Metodă pentru obţinerea unui n-uplu pitagoreic.
Fie numerele naturale a, b, c astfel încât $a < b < c$ cu $a^2 + b^2 = c^2$.
Aplicăm relaţia $x^m - y^m = (x-y)(x^{m-1} + x^{m-2}y + ... + xy^{m-2} + y^{m-1}) = (x-y)\sum_{k=0}^{m-1} x^k y^{m-k-1}$ în care luăm $x = c^2, y = a^2, m = n-2$ şi avem

$$(c^{n-2})^2 - (a^{n-2})^2 = (c^2)^{n-2} - (a^2)^{n-2} = (c^2 - a^2)\sum_{k=0}^{n-3}(c^2)^k (a^2)^{n-3-k} =$$

$$= b^2 \sum_{k=0}^{n-3}(c^2)^k (a^2)^{n-3-k} = \sum_{k=0}^{n-3}(bc^k a^{n-3-k})^2 \text{ , i.e.}$$

$$(a^{n-2})^2 + \sum_{k=0}^{n-3}(bc^k a^{n-3-k})^2 = (c^{n-2})^2 .$$

Deci,

$$a_1 = a^{n-2}, a_{k+2} = bc^k a^{n-3-k} \ (0 \leq k \leq n-3), a_n = c^{n-2}, \text{ i.e.}$$

$$a_1 = a^{n-2},\ a_2 = ba^{n-3},\ a_3 = bca^{n-4}, a_4 = bc^2 a^{n-5}, ..., a_{n-2} = bc^{n-4}a, a_{n-1} = bc^{n-3}, a_n = c^{n-2}$$

care verifică egalitatea $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{n-1}^2 = a_n^2$ şi condiţiile

$a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < a_n$ (echivalente cu $a < b$, $a < c$ şi $b < c$ care sunt adevărate).

Evident există o infinitate de numere naturale nenule care verifică definiţia *n-uplelor pitagoreice*.

Un exemplu de 2020-uplu pitagoreic. Pornim cu $(a,b,c) = (3,4,5)$ şi obţinem următorul 2020-uplu pitagoreic

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{2018}, a_{2019}, a_{2020}) = (3^{2018}, 3^{2017} \cdot 4, 3^{2016} \cdot 4 \cdot 5, 3^{2015} \cdot 4 \cdot 5^2, ..., 3 \cdot 4 \cdot 5^{2016}, 4 \cdot 5^{2017}, 5^{2018})$$

Repartiția primelor cifre ale numerelor naturale

de Petre Rău, Galaţi

În cartea sa "***Doamna șansă"*** (Editura Științifică, București, 1969), **Warren Weaver** ne vorbește despre repartiția primelor cifre ale numerelor naturale și afirmă că, într-o serie de numere, raportul dintre numărul celor care încep cu cifrele 1, 2, 3 sau 4 și celelalte care au prima cifră egală cu 5, 6, 7, 8 sau 9 este de 7:3. Practic, din 10 numere alese la întâmplare dintr-un astfel de set, 7 încep cu una din cifrele 1, 2, 3 sau 4 și doar 3 au prima cifră 5, 6, 7, 8 sau 9.

Discrepanța pare foarte mare, deoarece o distribuție cât de cât "normală" ar fi trebuit să se situeze în jurul raportului de 4/9. În pofida intuiției noastre sau, dacă vreți, a bunului nostru simț matematic, lucrurile stau însă exact așa cum ne sugerează primul raport, adică 7/3. Așa încât, dacă s-ar pune un pariu, am fi mirați să constatăm că va câștiga (și încă destul de consistent) cel care mizează pe prima variantă a alegerii, adică pe apariția cirelor 1, 2, 3 sau 4.

Să ne înțelegem bine: este vorba de repartiția primei cifre a numerelor dintr-o serie naturală de numere, luată mai degrabă din viața de toate zilele, și nu una generată aleator. S-a dovedit că acest rezultat se aplică unei game largi de seturi de date, de exemplu la: facturile de energie electrică, adresele stradale, prețurile acțiunilor, prețurile locuințelor, numărul populației, ratele de deces, lungimile râurilor, constantele fizice și matematice etc.

Filosofic vorbind, din asta am putea înțelege că tot ce se întâmplă în jurul nostru nu este deloc întâmplător, ci poartă cumva o "doză" de intervenție umană.

Legea de repartiție a primei cifre a numerelor este cunoscută azi ca **Legea lui Benford**, sau uneori Legea Newcomb-Benford. Fizicianul **Frank Benford** a publicat această descoperire a sa în anul 1938, într-o lucrare intitulată "**Legea numerelor anormale**", dar ea a fost menționată anterior și de Simon Newcomb în 1881. Seturile de date pe care Benford le-a analizat cuprindea suprafețele a 335 de râuri, dimensiunile a 3.259 de populații din SUA, 104 constante fizice, 1.800 greutăți moleculare, 5.000 de intrări dintr-un manual matematic, 308 numere conținute într-o ediție a Reader's Digest, adresele stradale ale primelor 342 persoane listate în American Men of Science și 418 de rate de deces. Numărul total de observații utilizate în lucrare a fost de 20.229.

Vizând numeroase seturi de date numerice din viața reală, pe scurt legea afirmă că în majoritatea colecțiilor de numere naturale, prima cifră semnificativă are o probabilitate foarte ridicată să fie mică. De exemplu, cifra 1 apare ca cea mai semnificativă cifră în proporție de cca. 30% din totalul numerelor din set, în timp ce cifra 9 apare ca cifră semnificativă într-o proporție mai mică, de cca. 5%.

Se spune despre un set de numere că satisface **Legea lui Benford** dacă prima cifră semnificativă a acestor numere are probabilitatea dată de formula:

$$P(c) = \lg\left(1+\frac{1}{c}\right), \text{ unde } c \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

Iată în tabloul de mai jos distribuția procentuală (cu o zecimală exactă) a cifrelor semnificative:

c	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P(c)	30,1 %	17,6 %	12,5 %	9,7 %	7,9 %	6,7 %	5,8 %	5,1 %	4,6 %

Matematicianul **Roger S. Pinkham** a demonstrat că repartiția log(n+1) este singura care își păstrează natura (este invariantă) la orice schimbare de scară: (1, 10), (10, 100), (100, 1000) etc.

Deși **Legea lui Benford** face, de asemenea, estimări și despre distribuția cifrei a doua, a treia, a combinațiilor de cifre ș.a., întâmplător, cea de-a doua cifră a unui număr este aproape aleatorie, dar indică totuși o ușoară influență a repartiției logaritmice, care favorizează întregii inferiori. Când însă se trece la a treia cifră, efectul logaritmic dispare cu totul.

Așadar, doar prima cifră respectă aproape riguros legea de repartiție amintită.

Evident, niciun număr nu poate începe cu cifra 0, conform convenției care se referă la neutralitatea cifrelor nesemnificative. Așa încât, cifra c=0 nu se ia în considerație. Totodată, se înțelege că, dacă cifrele ar fi distribuite uniform (de exemplu, dacă setul de numere ar fi generat pur aleator), fiecare dintre cele 9 cifre semnificative care pot ocupa prima poziție într-un număr ar apărea în circa 11,1% din cazuri.

Graficul cu distribuția procentuală a primei cifre semnificative prezintă **legea lui Benford** pentru baza de numerație 10. Există însă și o generalizare a legii la numerele exprimate în alte baze (de exemplu, în baza 16) și, de asemenea, o generalizare de la o cifră la n cifre.

Așadar, legea este valabilă și pentru ale baze de numerație. De exemplu, în baza b legea lui Benford arată astfel:

$$\mathbf{P(c) = \log_b\left(1+\frac{1}{c}\right).}$$

Desigur, cazul b=2 este unul banal, baza de numerație având doar două cifre (simboluri) 0 și 1 și numai 1 poate fi cifră semnificativă. Deci $P(1) = \log_2 2 = 1$, adică 100%.

Dacă vom considera cazul b=3, baza de numerație având doar două cifre (0, 1 și 2, și numai 1 și 2 sunt semnificative), atunci $P(1) = \log_3 2 = 0{,}6309$, adică 63,09% și $P(2) = \log_3 \frac{3}{2} = 1 - \log_3 2 =$ 0,3691, adică 36,91%.

Iată mai jos tabelul cu toate aceste procente pentru baze de numerație cuprinse între 2 și 10 și cifrele (simbolurile) corespunzătoare acestor baze. Tabelul a fost realizat pe calculator în baza unui program construit în limbajul C++.

Tabel cu calculul procentelor de repartiție a cifrelor pe prima poziție: $P(c) = \log_b\left(1+\frac{1}{c}\right)$

b \ c	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	100,00	-	-	-	-	-	-	-	-
3	63,09	36,91	-	-	-	-	-	-	-
4	50,00	29,25	20.75	-	-	-	-	-	-
5	43,07	25,19	17,87	13,87	-	-	-	-	-
6	38,69	22,63	16,06	12,45	10,17	-	-	-	-
7	35,62	20,84	14,78	11,47	9,37	7,92	-	-	-
8	33,33	19,50	13,84	10,73	8,77	7,41	6,42	-	-
9	31,55	18,45	13,09	10,16	8,30	7,01	6,08	5,36	-
10	30,10	17,61	12,49	9,69	7,92	6,69	5,80	5,12	4,58

Studiul pe baza sprijinului oferit de calculator se poate ușor extinde pentru probleme precum: analiza statistică a diferitelor seturi de date numerice, analiza repartiției unor grupe de cifre etc.

Pornind de la observația făcută la începutul acestui studiu referitoare la ponderea maximă a procentelor de repartizare pentru prima parte a cifrelor, la o privire mai atentă în tabelul de mai sus vom constata că regula se păstrează pentru fiecare bază de numerație.

Astfel, suma primei jumătăți de procente este:

$$\log_b\left(1+\frac{1}{1}\right) + \log_b\left(1+\frac{1}{2}\right) + \log_b\left(1+\frac{1}{\left[\frac{b-1}{2}\right]}\right) = \log_b\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{\left[\frac{b-1}{2}\right]}\right) =$$

$$\log_b \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{\left[\frac{b-1}{2}\right]+1}{\left[\frac{b-1}{2}\right]} = \log_b\left(\left[\frac{b-1}{2}\right]+1\right).$$

Vom demonstra următoarea teoremă:

Teorema 1: Pentru n>2, avem $\log_n\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]+1\right) \geq \frac{1}{2}$.

Demonstrație: Inegalitatea este echivalentă cu următoarea $\left|\frac{n-1}{2}\right|+1 \geq \sqrt{n}$.

Dacă n este impar, n = 2k+1, cu k≥1, inegalitatea devine: $k+1 \geq \sqrt{2k+1} \Leftrightarrow k^2 \geq 0$, adevărat.

Dacă n este par, n = 2k, cu k>2, inegalitatea devine: $\left[\frac{2k-1}{2}\right]+1 \geq \sqrt{2k} \Leftrightarrow \left[k-\frac{1}{2}\right]+1 \geq \sqrt{2k}$ $\Leftrightarrow k \geq \sqrt{2k} \Leftrightarrow k^2 \geq 2k$, adevărat.

Tot tabelul prezentat mai sus ne sugerează că putem îmbunătăți inegalitatea din teorema 1 prin următoatea teoremă:

Teorema 2: Pentru n>4, avem $\log_n\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]+1\right) \geq \frac{3}{5}$.

Demonstrație: Inegalitatea este echivalentă cu următoarea

$$\left|\frac{n-1}{2}\right|+1 \geq \sqrt[5]{n^3}.$$

Dacă n este impar, n = 2k+1, cu k≥2, inegalitatea devine: $k+1 \geq \sqrt[5]{(2k+1)^3} \Leftrightarrow (k+1)^5 \geq (2k+1)^3$, $\Leftrightarrow k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 \geq 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 \Leftrightarrow k^5 + 5k^4 + 2k^3 - 2k^2 - k \geq 0$ $\Leftrightarrow k^4 + 5k^3 + 2k^2 - 2k - 1 \geq 0$ este adevărată, $\forall k \geq 2$.

Dacă n este par, n = 2k, cu k≥3, inegalitatea devine: $\left[\frac{2k-1}{2}\right]+1 \geq \sqrt[5]{(2k)^3} \Leftrightarrow \left[k-\frac{1}{2}\right]+1 \geq \sqrt[5]{(2k)^3} \Leftrightarrow k \geq \sqrt[5]{(2k)^3} \Leftrightarrow k^5 \geq (2k)^3$, este adevărată pentru $\forall k \geq 3$.

Desigur, procesul de îmbunătățire poate continua, căutând un x din intervalul $(\frac{3}{5}, 1)$, astfel încât $\log_n\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]+1\right) \geq x$.

Regarding an inequality

by Daniel Văcaru, Piteşti

The starting point of this note is a problem from Mathematical Reflections, 2/2020.

J516. Let a,b,c be pozitive real numbers. Then it is showed that $\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \sqrt{\frac{3}{2}(a+b+c)}$ (1).

The author of the problem is Professor Mircea Becheanu, Canada now.

We use the solution provided by Professor Nguyen Hung Viet, curent at Hanoi University of Since, Vietnam.

To prove this relationship, we use **Cauchy- Buniakowski- Schwartz** under the **Bergstrom (Titu Andreescu) form, concavity of** $t \to \sqrt{t}$ **and S.O.S techniques**, in this order, and we write

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}} \overset{Bergstrom}{\geq} \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}} \overset{Concavity}{\geq}$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{(a+b+c)\left[a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)\right]}} = \sqrt{\frac{(a+b+c)^3}{2(ab+ac+bc)}} \overset{S.O.S}{\geq} \sqrt{\frac{3(a+b+c)}{2}}.$$

We have a lot of application, as in

1. If $a = F_n,\ b = F_{n+1},\ c = F_{n+2}$, we have

$$\frac{F_n}{\sqrt{F_{n+1}+F_{n+2}}}+\frac{F_{n+1}}{\sqrt{F_n+F_{n+2}}}+\frac{F_{n+2}}{\sqrt{F_n+F_{n+1}}} \geq \sqrt{\frac{3(F_n+F_{n+1}+F_{n+2})}{2}} = \sqrt{3F_{n+2}}.$$ We obtain

$$\frac{F_n}{\sqrt{F_{n+1}+F_{n+2}}}+\frac{F_{n+1}}{\sqrt{F_n+F_{n+2}}} \geq \left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{F_n}.$$

2. As an exercise, prove $\frac{L_n}{\sqrt{L_{n+1}+L_{n+2}}}+\frac{L_{n+1}}{\sqrt{L_n+L_{n+2}}}\geq\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{L_n}$.

3. Let a, b, c the sides of a triangle. Then $\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\geq\sqrt{\frac{3(a+b+c)}{2}}\Leftrightarrow\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\geq\sqrt{3s}$.

4. Consider $m=s-a,\ n=s-b,\ p=s-c$. We find $m+n=2s-a-b=c$. Using (1), we find $\frac{s-a}{\sqrt{a}}+\frac{s-b}{\sqrt{b}}+\frac{s-c}{\sqrt{c}}\geq\sqrt{3s}$.

5. Let $a=\cos A,\ b=\cos B,\ c=\cos C$ in an acute triangle. Then $\frac{\cos A}{\sqrt{\cos B+\cos C}}+\frac{\cos B}{\sqrt{\cos C+\cos A}}+\frac{\cos C}{\sqrt{\cos B+\cos A}}\geq\sqrt{\frac{3}{2}\left(\cos A+\cos B+\cos C\right)}=\sqrt{\frac{3}{2}\left(1+\frac{r}{R}\right)}$.

6. Consider $a=\sin A,\ b=\sin B,\ c=\sin C$ in an scalene triangle. We obtain $\sum\frac{\sin A}{\sqrt{\sin B+\sin C}}\geq\sqrt{\frac{3}{2}\sum\sin A}=\sqrt{\frac{3s}{2R}}$.

7. To prove $\sum\frac{r_a}{\sqrt{r_b+r_c}}\geq\sqrt{\frac{3}{2}(4R+r)}$, let $a=r_a,\ b=r_b,\ c=r_c\Rightarrow r_a+r_b+r_c=4R+r$, and (1) prove the required relationship.

8. Taking $a=\sin^2\frac{A}{2},\ b=\sin^2\frac{B}{2},\ c=\sin^2\frac{C}{2}$, and knowing that $\sum\ \sin^2\frac{A}{2}=\frac{2R-r}{2R}$, (1) leds us to $\sum\ \frac{\sin^2\frac{A}{2},}{\sqrt{\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}}}\geq\sqrt{\frac{3(2R-r)}{4R}}$.

9. For $a=\cos^2\frac{A}{2},\ b=\cos^2\frac{B}{2},\ c=\cos^2\frac{C}{2}$, we have $\sum\ \cos^2\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{2R}$, (1) is followed by $\sum\ \frac{\cos^2\frac{A}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}}}\geq\sqrt{\frac{3(4R+r)}{4R}}$.

We ask the readers of these lines to think of a generalization for n numbers, and to continue to customize the relation for different other values.

Bibliography.

1. Mathematical Reflections 2,3/2020.
2. Octogon, 24 No 2, October 2016, proposed problem 25714.

„Matematica este ca urcuşul la munte. Efortul este răsplătit de privelişti măreţe. Ca şi pe munte, ascensiunile în matematică sunt frumoase dacă nu eşti obsedat doar de locul unde vrei să ajungi şi dacă eşti în stare să savurezi tot ceea ce întâlneşti pe parcurs.“

Solomon Marcus

Asupra unei inegalităţi a lui A. Padoa

de D.M. Bătineţu-Giurgiu şi Neculai Stanciu

Inegalitatea lui **A. Padoa**: *În orice triunghi ABC de semiperimetru s are loc inegalitatea*

$$8(s-a)(s-b)(s-c)\le abc\,.$$

Inegalitatea de mai sus a fost publicată de A. Padoa în *Period. Mat. (4)5(1925), 80-85* şi apoi a fost publicată în *Geometric Inequalities*, de **O. Bottema** ş.a., 1969.

I. Soluţia dată de **Padoa**. $\sqrt{a^2-(b-c)^2}\le a$, $\sqrt{b^2-(c-a)^2}\le b$, $\sqrt{c^2-(a-b)^2}\le c$, deci

$$\prod_{ciclic}\sqrt{a^2-(b-c)^2}\le abc\Leftrightarrow\prod_{ciclic}\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)}\le abc\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(a+b-c)^2((b+c-a)^2(c+a-b)^2}\le abc\Leftrightarrow(a+b-c)((b+c-a)(c+a-b)\le abc\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(a+b+c-2c)(b+c+a-2a)(c+a+b-2b)\le abc\Leftrightarrow 8(s-a)(s-b)(s-c)\le abc\,,\text{ q.e.d.}$$

II. O soluţie recentă, dată de **Florentin Vişescu** în *''A simple proof for Padoa's inequality'', Romanian Mathematical Magazine, No. 28, 2021, p.10* .

Considerăm funcţia $f:(0,\pi)\to R$, $f(x)=\ln(1-\cos x)$, $f'(x)=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$,

$f''(x)=\dfrac{1}{\cos x-1}<0$. Deci f este concavă pe $(0,\pi)$ şi conform inegalităţii lui Jensen avem

$f\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)\ge\dfrac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}$, $\forall x,y,z(0,\pi)$.

Deci, $f\left(\dfrac{A+B+C}{3}\right)\ge\dfrac{f(A)+f(B)+f(C)}{3}$, $A+B+C=\pi$, atunci

$$\ln\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)\ge\frac{1}{3}\left(\ln(1-\cos A)+\ln(1-\cos B)+\ln(1-\cos C\right)=$$

$$=\ln\sqrt[3]{(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\ge\sqrt[3]{(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{8}\ge(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)\Leftrightarrow\frac{1}{8}\ge 8\prod_{ciclic}\sin^2\frac{A}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{64}\ge\prod_{ciclic}\frac{(s-b)(s-c)}{bc}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{64}\ge\prod_{ciclic}\frac{(s-a)^2}{a^2b^2c^2}\Leftrightarrow\Leftrightarrow\frac{1}{8}\ge\prod_{ciclic}\frac{(s-a)}{abc}\Leftrightarrow abc\ge 8(s-a)(s-b)(s-c)\,,\text{ q.e.d.}$$

III. În continuare prezentăm *o soluţie mai simplă*. Notăm cu F aria triunghiului ABC. Conform inegalităţii lui Euler $2r\le R\Leftrightarrow 2sr\le sR\Leftrightarrow 2F\le sR\Leftrightarrow 8F^2\le 4sRF\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8F^2\le sabc\Leftrightarrow 8s(s-a)(s-b)(s-c)\le sabc\Leftrightarrow 8(s-a)(s-b)(s-c)\le abc$, q.e.d.

"Matematica este un mod de exprimare a legilor naturale, este cel mai simplu şi cel mai potrivit chip de a înfăţişa o lege generală sau curgerea unui fenomen, este cea mai perfectă limbă în care se poate povesti un fenomen natural. "

Gheorghe Ţiţeica (1873- 1939)

An inequality in triangle concerning sides and cevians

de Vasile Jiglău , Arad

In *Mathematical Reflections* no. 2/2017 the following problem has appeared as problem O 408

With usual notations in a triangle , the following inequality holds :

$$\frac{a}{m_a}+\frac{b}{m_b}+\frac{c}{m_c}\geq 2\sqrt{3}$$

(The problem is not new apparently, it appears for instance in [1] as problem 7.1.37 (e)).
Below I'll prove a generalization of this inequality .

Proposition : Let ABC be an arbitrary triangle and $P\in$ Int ABC a point having the barycentric coordinates x,y,z . Denote by $A'=AP\bigcap BC$ and by k_a the length of the cevian *AA'* ; in the same way we define k_b,k_c . Then :

$$x\frac{a}{k_a}+y\frac{b}{k_b}+z\frac{c}{k_c}\geq 2\sqrt{xy+yz+zx} \qquad \textbf{(1)}$$

Proof : Since $P\in$ Int ABC, x,y,z are positive and the expression $xy+yz+zx$ is strictly positive . We prove the following :

Lemma : The following inequality holds : $\frac{xa^2+yb^2+zc^2}{4S\sqrt{xy+yz+zx}}\geq\frac{k_a}{h_a}$ **(2)**

The proof of the lemma : Since P has the barycentric coordinates *x,y,z* , it follows that *A'* divides the segment BC in the ratio *y/z* . We have

$$\frac{xa^2+yb^2+zc^2}{4S\sqrt{xy+yz+zx}}\geq\frac{k_a}{h_a}\Leftrightarrow xa^2+yb^2+zc^2\geq 2ak_a\sqrt{xy+yz+zx}\Leftrightarrow (xa^2+yb^2+zc^2)^2\geq 4a^2(xy+yz+zx)k_a^2$$

From Stewart's theorem it results that : $k_a^2=b^2\frac{y}{y+z}+c^2\frac{z}{y+z}-a^2\frac{yz}{(y+z)^2}$ so (2) becomes equivalent to :

$$x^2a^4+y^2b^4+z^2c^4+2xya^2b^2+2yzb^2c^2+2xza^2c^2\geq 4a^2b^2\frac{y(\sum xy)}{y+z}+4a^2c^2\frac{z(\sum xy)}{y+z}-4a^4\frac{yz(\sum xy)}{(y+z)^2}$$

$$\Leftrightarrow [a^2\frac{-xy-xz-2yz}{y+z}+b^2y+c^2z]^2\geq 0$$

Similarly , $\frac{xa^2+yb^2+zc^2}{4S\sqrt{xy+yz+zx}}\geq\frac{k_b}{h_b}\Leftrightarrow [a^2x+b^2\frac{-xy-yz-2xz}{x+z}y+c^2z]^2\geq 0$ (3)

and $\frac{xa^2+yb^2+zc^2}{4S\sqrt{xy+yz+zx}}\geq\frac{k_c}{h_c}\Leftrightarrow [a^2x+b^2y+c^2\frac{-yz-xz-2xy}{x+y}z]^2\geq 0$ (4)

Clearly (1) imply $\frac{h_a}{k_a}\geq\frac{4S\sqrt{xy+yz+zx}}{xa^2+yb^2+zc^2}$ (2')

We prove now the inequality from the enunciation . Applying (2') and its analogues which results from (3) and (4) , we have :

$$x\frac{a}{k_a}+y\frac{b}{k_b}+z\frac{c}{k_c}=\frac{1}{2S}(xa^2\frac{h_a}{k_a}+yb^2\frac{h_b}{k_b}+zc^2\frac{h_c}{k_c})\geq\frac{1}{2S}(xa^2\frac{4S\sqrt{\sum xy}}{xa^2+yb^2+zc^2}+yb^2\frac{4S\sqrt{\sum xy}}{xa^2+yb^2+zc^2}$$

$$+zc^2\frac{4S\sqrt{\sum xy}}{xa^2+yb^2+zc^2})=\frac{1}{2S}\cdot 4S\sqrt{\sum xy}(\frac{xa^2}{xa^2+yb^2+zc^2}+\frac{yb^2}{xa^2+yb^2+zc^2}+\frac{zc^2}{xa^2+yb^2+zc^2})=2\sqrt{\sum xy}$$

q.e.d.

Comments ::1. Taking in the enunciation of the proposition P=G – the centre of gravity of the triangle ABC , one obtains the problem O 408 from Mathematical Reflections nr 2/2017 .

2. Taking in (2) P=G – the centre of gravity of the triangle ABC one obtains the following inequality due to M. Bencze (see [2])

$$a^2+b^2+c^2\geq 4S\sqrt{3}\max\{\frac{m_a}{h_a},\frac{m_b}{h_b},\frac{m_c}{h_c}\}$$

3 . From Stewart's theorem one may easily obtains the „linear" version of (2) , whose proof is left for the reader : $xa^2+yb^2+zc^2\geq 4S\sqrt{xy+yz+zx}+(y+z)(k_a^2-h_a^2)$ (5)

Taking in (5) P=G , one obtains the theorem 2.1 from [3] .

References :

[1] Sedrakyan H , Sedrakyan N – Geometric Inequalities . Methods of Proving , Springer , 2017

[2] Bencze M – Problem 2732 , Crux Mathematicorum

[3] Stoica E , Minculete N , Barbu C – New aspects of Ionescu-Weitzenbock's inequality , Balkan Journal of Geometry and Its applications , vol 21 , no 2 , 2016

Two short proofs for AM - GM inequality

by dr. Dorin Mărghidanu , Corabia

In this short note are presented two very short demonstrations for AM-GM inequality - obtained by using simple analytical inequalities.

Keywords : *AM-GM inequality , arithmetic mean, geometric mean.*

2010 *Mathematics Subject Classification* : 26D15

There are known many demonstrations of the famous inequality between the *arithmetic mean*, $A_n[a]:=\frac{a_1+a_2+.....+a_n}{n}$ and the *geometric mean* , $G_n[a]:=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot.....\cdot a_n}$ of numbers $a_i\rangle 0,\ i=\overline{1;n}$. (see for example [1] – [16]) .

In the following we will give two new and very short proofs. For this we need some helpful results, obtained from simple considerations of algebra and analysis. The first is well known:

Lemma 1. For $x>0$, has the following inequality $x-1\geq \ln x$, with equality for $x=1$.

Proof. Indeed , the function $\varphi:(0,\infty)\longrightarrow R$, $\varphi(x)=x-1-\ln x$, has the derivative , $\varphi^I(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$, hence $x=1$ is the minimum point.

From here it is clear that $\varphi(x)\geq\varphi(1)=0$, for any $x>0$, so $x-1\geq \ln x$, with equality for $x=1$.

Lemma 2. For $a, b > 0$, there is the inequality $a - b \geq \ln\left(\frac{a}{b}\right)^b$, with equality when $a = b$.

Proof. With substitution $x = \frac{a}{b} > 0$ in *Lema* 1 , we have , $\frac{a}{b} - 1 \geq \ln\frac{a}{b} \Leftrightarrow$

$a - b \geq b \cdot \ln\frac{a}{b} \Leftrightarrow a - b \geq \ln\left(\frac{a}{b}\right)^b$ with equality for $\frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b.$

Theorem (AM - GM inequality). For any $n \in \mathbb{N}^*$, $a_k \geq 0$, $k = \overline{1;n}$, holds $A_n \geq G_n$, with equality if and only if $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Proof. With easy preparations and using Lemma 2, we have successively:

$$n \cdot (A_n - G_n) = n \cdot A_n - n \cdot G_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - n \cdot G_n =$$

$$= (a_1 - G_n) + (a_2 - G_n) + \ldots + (a_n - G_n) \overset{Lemma\ 2}{\geq} \ln\left(\frac{a_1}{G_n}\right)^{G_n} +$$

$$+ \ln\left(\frac{a_2}{G_n}\right)^{G_n} + \ldots + \ln\left(\frac{a_n}{G_n}\right)^{G_n} = \ln\left(\frac{a_1}{G_n}\right)^{G_n}\left(\frac{a_2}{G_n}\right)^{G_n} \cdots \left(\frac{a_n}{G_n}\right)^{G_n} =$$

$$= \ln\frac{\left(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n\right)^{G_n}}{\left(G_n\right)^{n \cdot G_n}} = \ln\frac{\left(G_n^n\right)^{G_n}}{G_n^{n \cdot G_n}} = \ln 1 = 0 .$$ Hence , $A_n \geq G_n$.

Equality is achieved when we have $a_k = G_n$, $k = \overline{1, n}$.

By exponentiation in *Lemma* 2 , it results :

Lemma 3. For any $a, b > 0$, holds $\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq e^{a-b}$, with equality if $a = b$.

Demonstration of AM-GM Inequality (using Lemma 3). We have successively :

$$\left(\frac{G_n}{A_n}\right)^{n \cdot A_n} = \left[\left(\frac{G_n}{A_n}\right)^n\right]^{A_n} = \left[\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{\left(A_n\right)^n}\right]^{A_n} =$$

$$= \left(\frac{a_1}{A_n}\right)^{A_n} \cdot \left(\frac{a_2}{A_n}\right)^{A_n} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a_n}{A_n}\right)^{A_n} \overset{Lemma\ 3}{\leq}$$

$$\overset{Lemma\ 3}{\leq} e^{a_1 - A_n} \cdot e^{a_2 - A_n} \cdot \ldots \cdot e^{a_n - A_n} =$$

$$= e^{\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) - n \cdot A_n} = e^0 = 1 ,$$

so $G_n \leq A_n$. Equality occurs when we have $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ ($= A_n$) .

References :

1. **Mărghidanu D.** & **Bencze M.**, *New Proofs for AM – GM and Pondered AM – GM Inequalities*, OCTOGON Mathematical Magazine, pp. 233-235 , Vol.**12** , nr. **1** , April , 2004 .
2. **Mărghidanu D.,** *Trei demonstraţii pentru inegalitatea mediilor* (*Cauchy*), *SFERA*, III , nr.**5**.
3. **Mărghidanu D.**, *Inegalitatea lui Lagrange este echivalentă cu inegalitatea mediilor, ARHIMEDE* , nr. 3-4 , pp. 17-19 , 2005 .
4. **Mărghidanu D. & Bencze M.**, *New Means and Refinements for AM-GM-HM Inequalities*, OCTOGON Mathematical Magazine , Vol 13, No. 2 , pp.999-1001 , October , 2005 .

„Exemplele sunt ramuri care nu se usucă niciodată.”

Şerban Cioculescu
(1902-1998)



3. Probleme rezolvate

▪ Clasa a V-a

G:979. Aflaţi numărul a din egalitatea $2019\cdot\{2018:[2017\cdot(2016-2a-1)+1]\}+1=2020$.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare: Se utilizează metoda mersului invers.

$\{2018:[2017\cdot(2016-2a-1)+1]\}=1\Rightarrow[2017\cdot(2016-2a-1)+1]=2018\Rightarrow(2016-2a-1)=1\Rightarrow$

$2a=2014\Rightarrow a=1007$.

G:980. Determinaţi numerele $\overline{abc}$ **cu proprietatea că** $\overline{aa}^2+\overline{bb}^2+\overline{cc}^2=5929$.

Adrian Gobej, Argeş

Rezolvare:

$\overline{aa}^2+\overline{bb}^2+\overline{cc}^2=11^2(a^2+b^2+c^2)=5929\vdots 11^2\Rightarrow a^2+b^2+c^2=7^2$. Obţinem soluţiile:

$\overline{abc}\in\{236,263,326,362,623,632\}$.

G:981. Arătaţi că nu există numere naturale a,b,c **astfel încât** $(a+b)(b+c)(c+a)=28920$.

Carina Viespescu şi Mihai Ionescu, Craiova

Rezolvare: $28920=120\cdot 241$. Fără a restrânge generalitatea presupunem $a\le b\le c$.

$a\le b\le c\Rightarrow b+c\ge 241, a+b\le 120, a+c\le 120\Rightarrow 2a+b+c\le 240$, contradicţie cu $b+c\ge 241$.

Deci nu există a,b,c care să satisfacă condiţia problemei.

G:982. Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ **şi** $k\in\mathbb{N}$ **astfel încât** $n(n+34)=\underbrace{1111....1}_{k\ de\ 1}$.

eleva **Carina Viespescu**, Craiova

Rezolvare:

$n^2+34n+17^2=\underbrace{1111....1}_{k\ de\ 1}+17^2\Rightarrow(n+17)^2=111....1400$, unde 1 apare de k-3 ori.

$(n+17)^2=111....14\cdot 10^2$ este pătrat perfect pentru k=3 adică $(n+17)^2=400\Rightarrow n+17=20\Rightarrow n=3$.

Pentru $k\ge 4$ nu mai obţinem soluţii pentru n deoarece rezultă că $\underbrace{1111....1}_{k-3\ de\ 1}14$ este un M_4+2 care nu e pătrat perfect.

G:983. Să se determine toate numerele naturale nenule n, mai mici decât 2020, pentru care numărul $a=n^{2020}+8\cdot n^{2019}$ este cub perfect.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Numărul $a=n^{2019}(n+8)=\left(n^{673}\right)^3\cdot(n+8)$ este cub perfect dacă n+8 este cub perfect cu $n+8\langle 2028$.

Cum $13^3=2197\rangle 2028$ rezultă $n+8\in\left\{3^3;4^3;5^3;.....;12^3\right\}$.

Astfel, se obţine $n\in\{19;56;117;208;335;504;721;992;1323;1720\}$.

G:984. **Să se arate că numărul $A=35^n+1225^k$ este pătrat perfect pentru n=2k+1, oricare ar fi $k\in\mathbb{N}$.**

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Rezolvare:

$A=35^n+1225^k=35^{2k+1}+1225^k=35^{2k}\cdot 35+35^{2k}=35^{2k}\cdot 36=(35^k\cdot 6)^2\Rightarrow$ A este pătrat perect.

▪ Clasa a VI-a

G:985. **a) Arătaţi că numărul $x=1+9^2+9^4+9^6+...+9^{1006}$ este divizibil cu 82.**

b) Scrieţi într-o formă restrânsă numărul $y=80+80\cdot 81+80\cdot 81^2+....+80\cdot 81^{503}$ şi apoi arătaţi că fracţia $F=\dfrac{9^{1009}-9}{x}$ reprezintă produsul a trei numere naturale consecutive.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

a) $x=1+81+81^2+81^3+81^4+...+81^{503}=(1+81)+81^2(1+81)+81^4(1+81)+.....81^{502}(1+81)=$

$=82(1+81^2+81^4+81^6+....+81^{502})\vdots 82$.

b) $y=80+80\cdot 81+80\cdot 81^2+....+80\cdot 81^{503}=81-1+(81-1)\cdot 81+(81-1)\cdot 81^2+.....+(81-1)\cdot 81^{503}=$

$=81-1+81^2-81+81^3-81^2+81^4-81^3+....+81^{505}-81^{503}=81^{504}-1$

Cum $y=80+80\cdot 81+80\cdot 81^2+....+80\cdot 81^{503}=80\left(1+9^2+9^4+.....+9^{1006}\right)$ de unde

$1+9^2+9^4+.....+9^{1006}=\dfrac{y}{80}=\dfrac{81^{504}-1}{80}$. Aşadar, $F=\dfrac{9^{1009}-9}{x}=$

$=\dfrac{9^{1009}-9}{1}\cdot\dfrac{80}{81^{504}-1}=9\cdot\left(9^{1008}-1\right)\cdot\dfrac{80}{81^{504}-1}=9\cdot 80\cdot\dfrac{(9^2)^{504}-1}{81^{504}-1}=9\cdot 80=8\cdot 9\cdot 10$.

G:986. **Demonstraţi că numărul $A=1+3+3^2+3^3+....+3^{2020}+3^{2021}$ este multiplu de 13.**

Nicolae Ivăşchescu, Canada

***Rezolvare**:*

$A=\left(1+3+3^2\right)+\left(3^3+3^4+3^5\right)+....+\left(3^{2019}+3^{2020}+3^{2021}\right)=$

$=\left(1+3+3^2\right)+3^3\left(1+3+3^2\right)+....+3^{2019}\left(1+3\ +3^2\right)=\ =13\left(1+3^3+3^6+.....+3^{2019}\right)\Rightarrow A\vdots 13$.

G:987. **Arătaţi că numărul $x=\overline{20ab}-\overline{b(a+1)}$ este pătrat perfect, ştiind că are loc egalitatea $x=\overline{abba}+\overline{abb}-\overline{aa}-b=1+3+5+7+....+89+25^{3^2}:25^{2^3}$.**

Mariana Mitea, Cugir, Alba

Rezolvare:

$\overline{abba}+\overline{abb}-\overline{aa}-b=1090a+120b$,

$1+3+5+7+....+89=45^2=2025$, $25^{3^2}:25^{2^3}=25$ iar ecuaţia $1090a+120b=2050$ are doar soluţia a=1 şi b=8.

G:988. **Fie triunghiul** ABC **cu** $m(\sphericalangle A)=35^0$, $m(\sphericalangle B)=83^0$, **şi punctele** D, E **şi** F **pe laturile** BC, CA **şi respectiv** AB **astfel încât** $DE \| AB$, $FE \| BC$ **şi** $FD \| AC$. **Dacă bisectoarele unghiurilor** $\sphericalangle EDF$ **şi** $\sphericalangle ABC$ **se intersectează în punctul** P, **atunci determinaţi măsura unghiului** $\sphericalangle BPD$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Din paralelism rezultă uşor că: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle EFD$ şi $\sphericalangle BAC = \sphericalangle EDF$ apoi

$$\sphericalangle BPD = 180^0 - \sphericalangle PBD - \sphericalangle PDB = 180^0 - \frac{83^0}{2} - \left(\frac{35^0}{2} + 62^0\right) = 59^0.$$

▪ Clasa a VII-a

G:989. **Fie** $a,\ b \in (0;\infty)$ **astfel încât** $a \cdot b > a+b$. **Arătaţi că** $a+b \geq 4$.

Roxana Vasile, Meda Iacob, Craiova

Rezolvare: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \geq 2ab + 2ab = 4ab \geq 4(a+b) \Rightarrow a+b \geq 4$.

G:990. **Să se rezolve în** $\mathbb{R}$ **ecuaţia:** $x - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} + \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)^2 = 2020$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Evident $x \neq 0$, $x+1 \neq 0$ impune $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$. Ecuaţia devine:

$$\frac{x^3-1}{x^2} + \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)^2 - \left(\frac{1}{x+1}\right)^2 = 2020 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^3-1}{x^2} + \frac{x+1}{x}\left(\frac{x+1}{x} - \frac{2}{x+1}\right) = 2020 \Leftrightarrow \frac{x^3-1}{x^2} + \frac{x^2+1}{x^2} = 2020 \Rightarrow x+1 = 2020 \Rightarrow x = 2019.$$

G:991. **Găsiţi numerele naturale n pentru care** $\sqrt{\frac{16n+17}{n-16}} \in \mathbb{N}$. **Nicolae Ivăşchescu**, Canada

Rezolvare:

Din $\frac{16n+17}{n-16} \in \mathbb{N} \Rightarrow n-16 \mid 16n+17$ şi cum $n-16 \mid n-16 \Rightarrow n-16 \mid [16n+17-16(n-16)] \Rightarrow$

$n-16 \mid 273 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \Rightarrow n-16 \in \{1,3,7,13,21,39,91,273\}$. Convine doar n-16=1 adică n=17 deoarece

$\frac{16 \cdot 17 + 17}{17-16} = 17^2$.

G:992. **Fie patrulaterul ABCD cu** $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ADC) = 90^0$, $\sphericalangle ACD = 2 \cdot \sphericalangle ACB$ **şi** $AD = 2020$. **Calculaţi distanţa de la punctul** B **la dreapta AC.**

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Notăm cu **O** mijlocul lui **AC.** deci **O** este centrul cercului circumscris patrulaterului **ABCD**; **AC=2BO**. Obţinem uşor că triunghiurile ACD şi BOE sunt asemenea (cazul U.U.).

Deci $\frac{BE}{AD} = \frac{BO}{AC} = \frac{1}{2}$, rezultă că $BE = \frac{AD}{2} = 1010$.

G:993. **Aflaţi unghiul dintre diagonalele AC şi BD ale patrulaterului convex ABCD, dacă AB = 5, BC= 7, CD= 5,5 și AD = 2,5.**

Anicuţa Beţiu, Sorin Petrişor Dumitrescu, Craiova

***Rezolvare*:**

Deoarece $AB^2+DC^2=BC^2+AD^2$ diagonalele sunt perpendiculare, rezultă că unghiul cerut are măsura de 90^0.

G:994. **În triunghiul ABC de semiperimetru p, notăm AB=c, BC=a, CA=b şi fie $[AD]$ bisectoarea interioară a triunghiului. Dacă $BD\le p-b$, atunci $DC\le p-b$.**

Emil C. Popa, Sibiu

Rezolvare:

Din teorema bisectoarei $\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b}$. Dar $BD+DC=a$ aşa că $DC\ge p-c$. Deci $\frac{c}{b}\ge\frac{p-DC}{p-BD}$ şi $\frac{BD}{DC}\ge\frac{p-DC}{p-BD}\Rightarrow \quad BD(p-BD)\ge DC(p-DC)\Rightarrow \quad (BD-DC)(BD+DC-p)\le 0$. Deoarece $p\rangle a\Rightarrow BD-DC\ge 0$ sau $DC\le BD\le p-b$.

Altfel: Cum $BD=\frac{ac}{b+d}$ şi $DC=\frac{ab}{b+c}$ se obţine uşor că $BD\le p-b\Leftrightarrow c\ge b$ şi $DC\le p-b\Leftrightarrow c\ge b$.

(Soluţie Titu Zvonaru)

G:995. **Se dau ABCD = paralelogram, M = simetricul lui D faţă de B, N = simetricul lui A faţă de C. Dacă aria lui ABCD = 10, aflaţi aria lui BMNC.**

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare:

$\Delta OBC\sim\Delta OMN$ (LUL) $\frac{OB}{OM}=\frac{BC}{MN}=\frac{1}{3}$. $\quad A_{OBC}=\frac{1}{4}A_{ABCD}$.

$\frac{A_{OBC}}{A_{OMN}}=\left(\frac{BC}{MN}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}\Rightarrow\frac{A_{OBC}}{A_{BMNC}}=\frac{1}{8}\Rightarrow A_{BMNC}=8\cdot\frac{1}{4}\cdot 10=20$.

▪ Clasa a VIII-a

G:996. **Fie $x,y,z\in(0;\infty)$ astfel încât $2020(xy+yz+zx)\rangle x+y+z$. Arătaţi că $x+y+z\rangle\frac{3}{2020}$.**

Iulia Sanda, Claudiu Ciulcu, Craiova

Rezolvare: $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz\rangle xy+xz+yz+2xy+2xz+2yz=$

$=3(xy+xz+yz)\rangle\frac{3}{2020}(x+y+z)\big|:(x+y+z)\Rightarrow x+y+z\rangle\frac{3}{2020}$.

G:997. **Raportul dintre produsul a două numere naturale nenule distincte şi suma lor este 2017. Să se arate că suma cuburilor celor două numere este divizibilă cu bipătratul celui mai mic.**

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Fie $x,y\in\mathbb{N}^*$ cu $x\langle y$ şi $\frac{xy}{x+y}=2017\Rightarrow\ x\ge 1,y\ge 2,\ xy=2017x+2017y\big|+2017^2$

$\Rightarrow(x-2017)(y-2017)=2017^2$. Obţinem $x=2018,\ y=2017\cdot 2018$.

Deci $x^3+y^3=2018^3+2017^3\cdot 2018^3=2018^3(1+2017^3)=2018^3(1+2017)(1-2017+2017^2)=$
$2018^4\cdot(2017^2-2016)\vdots 2018^4$.

G:998. **Fie** $x\rangle 0$. **Arătaţi că** $(x+1)^2+\dfrac{4}{x(x^2+1)}\geq 2\left(\dfrac{x^2+1}{x}+1\right)$. **În ce caz avem egalitatea?**

Eugenia Turcu, Iuliana Tigae, Craiova

Rezolvare:

Inegalitatea data devine $x^2+2x+1+\dfrac{4}{x(x^2+1)}\geq 2x+\dfrac{2}{x}+1\Leftrightarrow\ x^3(x^2+1)+4\geq 2(x^2+1)+x(x^2+1)$.

Rezultă $x^5+x^3+4\geq 2x^2+2+x^3+x\Rightarrow\ x^5-2x^2-x+2\geq 0\ \Leftrightarrow x(x^4-1)-2(x^2-1)\geq 0\Leftrightarrow$
$(x-1)^2(x+1)(x^2+x+2)\geq 0$ ceea ce este adevărat, cu egalitate pentru x = 1.

G:999. **Arătaţi că** $A=\sqrt{n(n+9)(n+16)(n+25)+5184}\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Rezolvare: Se observă că $\underline{n(n+9)}\underline{(n+16)}\underline{(n+25)}+5184=(n^2+25)(n^2+25n+144)+5184=$
$=(n^2+25)^2+(n^2+25)\cdot 2\cdot 72+5184$
Cum $5184=72^2\Rightarrow A=\sqrt{(n^2+25n+72)^2}=n^2+25n+72\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N}$.

G:1000. **Să se demonstreze că** $\left\{x\middle| x=\dfrac{b(a+b)}{a^2+b^2},a>0,b>0\right\}=\left(0,\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$.

Gabriel Tica, Băileşti, Dolj şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Fie $A=\left\{x\middle| x=\dfrac{b(a+b)}{a^2+b^2},a>0,b>0\right\}$ şi $B=\left(0,\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$.

Demonstrăm că $A\subseteq B$. Fie $x=\dfrac{a}{b}>0$, avem:

$$k=\frac{ab+b^2}{a^2+b^2}=\frac{\frac{a}{b}+1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1}=\frac{x+1}{x^2+1}\Leftrightarrow kx^2-x+k-1=0\text{, are soluţii reale pozitive .}$$

Deci $\Delta\geq 0\Leftrightarrow(2k-1)^2\leq 2\Leftrightarrow\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\leq k\leq\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$. Deoarece $k>0$ rezultă $k\in\left(0,\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$.

Demonstrăm că $B\subseteq A$. Fie $k\in\left(0,\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$. $(2k-1)^2\leq 2\Leftrightarrow 1\geq 4k(k-1)\Leftrightarrow kx^2-x+k-1=0$ are
soluţia pozitivă $x=\dfrac{1+\sqrt{1-4k(k-1)}}{2k}$. Atunci, $k(x^2+1)=x+1\Leftrightarrow\dfrac{x+1}{x^2+1}=k$, unde luăm $x=\dfrac{a}{b}>0$ şi
obţinem că $\dfrac{ab+b^2}{a^2+b^2}\in\left(0,\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$. Deci, $A=B$.

G:1001. **Să se demonstreze că** $\left(1+\dfrac{1}{2}-2\cdot\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-2\cdot\dfrac{1}{6}\right)+\ldots+\left(\dfrac{1}{3n-2}+\dfrac{1}{3n-1}-2\cdot\dfrac{1}{3n}\right)=$

$=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{3n-1}+\dfrac{1}{3n}$ **pentru orice** $n\in N^*$.

Dorin Mărghidanu, Corabia, Olt

Rezolvare: $\left(1+\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-2\cdot\frac{1}{6}\right)+...+\left(\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-2\cdot\frac{1}{3n}\right)=$

$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}\right)-3\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{3n}\right)=$

$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}.$

G:1002. **Fie** $a\geq 1,\ b\in\mathbb{R}$ **şi ecuaţia** $a\cdot(x+a)+(a+1)(x+a+1)=b.$

1) Determinaţi soluţiile ecuaţiei pentru a=1, b = 2020;

2) Să se arate că pentru $a\geq 1,\ b\in\mathbb{R}$ **ecuaţia are una sau două soluţii.**

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Rezolvare : Ecuaţia se rescrie:

$a\cdot(x+a)+(a+1)(x+a+1)-(a+1)(x+a)-a-1=b\Leftrightarrow (a+1)(x+a+1)(x+a)-a-1=b\Leftrightarrow$

$(x+a)(a+1)-(x+a)=b\Leftrightarrow (x+a)=(x+a)(a+1)-b=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow$

$x(a+1)+a^2+a-b=k\Leftrightarrow x=\frac{k-a^2-a+b}{a+1}\Rightarrow k\leq\frac{k-a^2-a+b}{a+1}+a\ \langle\ k+1\Leftrightarrow$

$k\leq\frac{k+b}{a+1}\langle\ k+1\Leftrightarrow ka\leq b\langle ka+a+1\Leftrightarrow k\in\left(\frac{b-a-1}{a},\frac{b}{a}\right]$

1) Pentru a = 1, b = 2020 $a=1,\ b=2020\Rightarrow k\in(2018,2020)\cap\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{2019,2020\}$. Rezultă $x_1=2018,5;\ x_2=2019$

2) lungimea intervalului $\left(\frac{b-a-1}{a},\frac{b}{a}\right]$ este egală cu $1+\frac{1}{a}\leq 2$ şi este mai mare ca 1, şi atunci ecuaţia are una sau două soluţii $\forall a\geq 1$ şi $b\in\mathbb{R}$

G:1003. **Un paralelipiped dreptunghic având lungimea diagonalei 3 şi aria totală 7are lungimea muchiei laterale egală cu media geometrică a dimensiunilor bazei. Să se afle volumul paralelipipedului.**

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Fie L şi l dimensiunile bazei. Atunci lungimea muchiei laterale este $h=\sqrt{L\cdot l}$ (1) , lungimea diagonalei este $d=\sqrt{L^2+l^2+h^2}=3\Leftrightarrow L^2+l^2+h^2=9$ (2) iar aria totală este $A_t=2(Ll+Lh+lh)=7$.

Cum $(L+l+h)^2=L^2+l^2+h^2+2(Ll+Lh+lh)=9+7=16\Rightarrow L+l+h=4$. (3).

Din (1), (2), (3) obţinem $L^2+l^2+h^2+2Ll=9+2h^2\Rightarrow (L+l)^2=h^2+9$ sau ţinând cont de (3) rezultă $(4-h)^2=h^2+9\Rightarrow h=\frac{7}{8}$ iar volumul este $V=h^3=\frac{343}{512}$.

▪ Clasa a IX-a

L:799. **Fie** $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ **astfel încât** $a^5+a^2\cdot b^3+a\cdot c+d=0$**. Arătaţi că numărul** $A=c^2-4(a^3+b^3)\cdot d$ **este pătratul unui număr natural.**

Dan Grigorie, Alina Tigae, Craiova

Rezolvare:

Relaţia din enunţ devine $\left(a^3+b^3\right)\cdot a^2+a\cdot c+d=0$. (*) Dacă $a^3+b^3=0\Rightarrow A=c^2$.

Dacă $a^3+b^3\neq 0\Rightarrow\left(a^3+b^3\right)x^2+cx+d=0$, din (*) rezultă că ecuaţia are soluţia întreagă x=a.

Discriminantul acestei ecuaţiei este $\Delta=A=c^2-4(a^3+b^3)\cdot d$ care este pătrat perfect.

L:800. **Găsiţi valoarea maximă şi valoarea minimă a expresiei** $E(x)=\dfrac{x^3}{x^6+2x^3+2}$.

Adriana Ioniţă, Alina Tigae, Craiova

Rezolvare: $E(x)=\dfrac{1}{x^3+2+\dfrac{2}{x^3}}\le\dfrac{1}{2+2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ deoarece $x^3+\dfrac{2}{x^3}\ge 2\sqrt{x^3\cdot\dfrac{2}{x^3}}=2\sqrt{2}$.

Avem egalitate pentru $x^3=\dfrac{2}{x^3}\Leftrightarrow x^6=2\Rightarrow x^3=\sqrt{2}$, $x=\sqrt[6]{2}$ punct în care se realizează maximul expresiei şi anume $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Cum $E(-x)=\dfrac{1}{2-(x^3+\dfrac{2}{x^3})}\ge\dfrac{1}{2-2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ atunci, valoarea minimă este $-\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

L:801. **Arătaţi că numărul** $n=\sqrt[3]{\sqrt{50}-7}+\sqrt[3]{\sqrt{4901}+70}-\sqrt[3]{\sqrt{50}+7}-\sqrt[3]{\sqrt{4901}-70}$ **este natural.**

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Numărul n se poate scrie ca $n=a-b$ unde $a=\sqrt[3]{\sqrt{4901}+70}-\sqrt[3]{\sqrt{4901}-70}$ şi $b=\sqrt[3]{\sqrt{50}+7}-\sqrt[3]{\sqrt{50}-7}$.

Ridicând la puterea a treia obţinem ecuaţiile $a^3+3a-140=0\Leftrightarrow(a-5)(a^2+5a+28)=0$ şi $b^3+3b-14=0\Leftrightarrow(b-2)(b^2+2b+7)=0$ cu singurele soluţii naturale a=5 şi b=2. Prin urmare **n= a- b=3.**

L:802. **Fie** $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ **cu** $f(0)=f(1)$**. Dacă pentru orice** $x,y\in[0;1]$ **cu** $x\neq y$ **avem** $|f(x)-f(y)|<|x-y|$ **arătaţi că** $|f(x)-f(y)|<\dfrac{1}{2}$.

Simona Miu, Craiova

Rezolvare: Fie $0\le x<y\le 1\Rightarrow|f(x)-f(y)|<|x-y|=y-x$. (1)

Deoarece $f(0)=f(1)\Rightarrow$

$|f(x)-f(y)|=|f(x)-f(0)+f(1)-f(y)|\le|f(x)-f(0)|+|f(y)-f(1)|<|x-0|+|y-1|=x+1-y\Rightarrow$

$|f(x)-f(y)|<x-y+1$. (2) Din (1)+(2) rezultă $|f(x)-f(y)|<\dfrac{1}{2}$.

L:802. Există funcţii $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ cu rădăcini reale distincte astfel încât $f(2x)\cdot f(\dfrac{x+1}{2})=f(x^2+x+1),\ \forall x\in\mathbb{R}$. ?

Cristian Moanţă, Mihaela Mirea. Craiova

Rezolvare:

Se va arăta că nu există astfel de funcţii. Pentru aceasta fie 2x=y adică $x=\dfrac{y}{2}$ şi atunci

$f(y)\cdot f(\frac{y+2}{4})=f(\frac{y^2}{4}+\frac{y}{2}+1)$. Fie $y_1\langle y_2$ cu $f(y_1)=f(y_2)=0$ cele două soluţii reale distincte ale lui f(x)=0. Atunci, $0=f(y_2)\cdot f(\frac{y_2+2}{4})=f(\frac{y_2^2}{4}+\frac{y_2}{2}+1)\Rightarrow f(\frac{y_2^2}{4}+\frac{y_2}{2}+1)=0$.

Cum $y_2\langle\frac{y_2^2}{4}+\frac{y_2}{2}+1\Leftrightarrow \frac{y_2^2}{4}-\frac{y_2}{2}+1\rangle 0\Leftrightarrow\left(\frac{y_2}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\rangle 0$ adică $\frac{y_2^2}{4}+\frac{y_2}{2}+1$ ar fi a treia rădăcină a lui f ceea ce e fals.

L:803. **Câte cifre are numărul** 2^{40} **?**

Gabriel Tica, Băileşti, Dolj şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Soluţia 1. $2^{40}=1099511627\ 776$, deci 2^{40} are 13 cifre.

Soluţia 2. $2^{10}=1024\approx 1000$, $2^{40}=(2^{10})^4\approx(10^3)^4=10^{12}$, deci 2^{40} are 13 cifre.

Soluţia 3. Numărul de cifre ale numărului n este $[\lg n]+1$. Avem $\lg 2\approx 0{,}31$ şi obţinem:
$[\lg 2^{40}]+1=[40\lg 2]+1\approx[40\cdot 0{,}31]+1=[12{,}4]+1=12+1=13$.

L:804. **Fie** $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ **şi** $a_k\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, $k=\overline{1,n}$, **iar** σ **este o permutare a mulţimii** $\{1,2,...,n\}$. **Să se afle extremele expresiei** $E(a_1,a_2,.....,a_n)=a_{\sigma(1)}\cdot(1-a_1)+a_{\sigma(2)}\cdot(1-a_2)+.....+a_{\sigma(n)}\cdot(1-a_n)$.

Dorin Mărghidanu, Corabia

***Rezolvare*:** Cu substituţia $a_k=x_k+\frac{1}{2}$, $x_k\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\forall k=\overline{1,n}$ avem

$E(a_1,a_2,...,a_n)==E(x_1,x_2,...,x_n)=\left(\frac{1}{2}+x_{\sigma(1)}\right)\left(\frac{1}{2}-x_1\right)+\left(\frac{1}{2}+x_{\sigma(2)}\right)\left(\frac{1}{2}-x_2\right)+\ldots+$

$\left(\frac{1}{2}+x_{\sigma(n)}\right)\left(\frac{1}{2}-x_n\right)=\quad=\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}x_{\sigma(k)}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}x_k-\sum_{k=1}^{n}x_kx_{\sigma(k)}=\frac{n}{4}-\sum_{k=1}^{n}x_kx_{\sigma(k)}$.

Deci, $\min E=0$, când $x_1=x_2=...=x_n=\frac{1}{2}$, adică $a_1=a_2=...=a_n=1$;

$\max E=0$, când $x_1=x_2=...=x_n=0$, adică $a_1=a_2=...=a_n=\frac{1}{2}$.

L:805. **Rezolvaţi în** $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ **sistemul** $\begin{cases}2x+2xy-7y+2y^2=0\\2x^2+2xy-3y=0\end{cases}$.

Iulia Sanda, Camelia Dană. Craiova

Rezolvare: Observăm că sistemul admite soluţia banală (0,0).

Presupunem $x\neq 0$, $y\neq 0$ şi împărţim ecuaţiile sistemului cu 2y. Rezultă $\begin{cases}\frac{x}{y}+x+y=\frac{7}{2}\\\frac{x}{y}(x+y)=\frac{3}{2}\end{cases}$. Făcând notaţiile

$\frac{x}{y}=a$, $x+y=b$ obţinem $\begin{cases}a+b=\frac{7}{2}\\a\cdot b=\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow(a;b)\in\left\{(3;\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},3)\right\}$. Înlocuind în notaţiile făcute se obţine

$(x;y)\in\left\{(0;0),(1;2),(\frac{3}{8};\frac{1}{8})\right\}$.

L:806. **Fie** $a,b,c\geq 0$ **cu** $a+b+c=\frac{3}{2}$ **și** $n\geq 7$ **. Arătați că**

$$\frac{1}{n+(b+c)^2}+\frac{1}{n+(c+a)^2}+\frac{1}{n+(a+b)^2}\leq\frac{3}{n+1}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Rezolvare:

Notând $b+c=x, c+a=y, a+b=z$, avem $x,y,z>0$ și $x+y+z=3$ și problema se reformulează:

Fie $a,b,c\geq 0$ astfel încât $x+y+z=3$ și $n\geq 7$. Arătați că

$$\frac{1}{n+x^2}+\frac{1}{n+y^2}+\frac{1}{n+z^2}\leq\frac{3}{n+1}.$$

Căutăm o inegalitate de forma $\frac{1}{n+x^2}\leq ax+b$, cu proprietatea că $x=1$ să fie rădăcină dublă pentru ecuația polinomială atașată.

Obținem $\begin{cases} a+b=\frac{1}{n+1} \\ a(n+1)^2=-2 \end{cases}$, de unde $a=\frac{-2}{(n+1)^2}$ și $b=\frac{n+3}{(n+1)^2}$.

Avem $\frac{1}{n+x^2}\leq\frac{n+3-2x}{(n+1)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2(2x+1-n)\leq 0$, evident pentru $0\leq x\leq 3$ și $n\geq 7$.

Rezultă: $\sum\frac{1}{n+x^2}\leq\sum\frac{n+3-2x}{(n+1)^2}=\frac{(n+3)3-2\sum x}{(n+1)^2}=\frac{3n+9-2\cdot 3}{(n+1)^2}=\frac{3n+3}{(n+1)^2}=\frac{3}{n+1}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$.

L:807. **Dacă S_n este suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice de rație $r\in\mathbb{R}^*$ pentru orice numere întregi și nenule p și q are loc relația:** $\frac{S_{pn}-pS_n}{S_{qn}-qS_n}=\frac{p(p-1)}{q(q-1)}$.

Petre Rău, Galaţi.

***Rezolvare*:** Fie $S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)r]$ suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice. Vom demonstra mai întâi că, pentru orice întreg nenul k are loc relația $S_{kn}-kS_n=\frac{k(k-1)}{2}n^2r$. Într-adevăr, avem că $S_{kn}-kS_n=\frac{n}{2}\{k[2a_1+(kn-1)r]-k[2a_1+(n-1)r]\}=\frac{k(k-1)}{2}n^2r$.

În această formulă, dând pe rând lui k valorile k=p și k=q și făcând raportul celor doi membri, găsim formula din enunț.

L:808. **Fie** $(a_n)_{n\geq 1}$ **un șir de numere reale în progresie aritmetică.**

a) Demonstrați că șirul $s_n=a_{4n+1};\ \forall n\geq 1$ **este un șir de numere reale în progresie aritmetică.**

b) Demonstrați că $\frac{1}{s_1\cdot s_2}+\frac{1}{s_2\cdot s_3}+\ldots+\frac{1}{s_{2020}\cdot s_{2021}}=\frac{2020}{a_5\cdot a_{8085}}$.

c) Dacă S_n **este suma primilor n termeni ai șirului** s_n**, atunci are loc relația:**

$$\frac{a_9}{S_1\cdot S_2}+\frac{a_{13}}{S_2\cdot S_3}+\ldots+\frac{a_{4n+5}}{S_n\cdot S_{n+1}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}a_{4k+5}}{a_5\cdot\sum_{k=0}^{n}a_{4k+5}}$$

Elena şi Constantin Ciobîcă. Fălticeni

Rezolvare:

$s_n = a_{4n+1},\ \forall n \geq 1$. Șirul s_n este sir de numere reale în progresie aritmetică, dacă:

$$s_n = \frac{s_{n-1} + s_{n+1}}{2},\ \forall n \geq 2 \Leftrightarrow a_{4n+1} = \frac{a_{4(n-1)+1} + a_{4(n+1)+1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(a_1 + 4nr) = a_1 + 4(n-1)r + a_1 + 4(n+1)r \Leftrightarrow 2a_1 + 8nr = 2a_1 + 8nr.$$

$s_1 = a_{4\cdot 1+1} = a_5$, $s_2 = a_{4\cdot 2+1} = a_9$, $s_3 = a_{4\cdot 3+1} = a_{13}$,

$s_{2020} = a_{4\cdot 2020+1} = a_{8081}$, $s_{2021} = a_{8085}$

$$S = \frac{1}{a_5 \cdot a_9} + \frac{1}{a_9 \cdot a_{13}} + \ldots + \frac{1}{a_{8081} \cdot a_{8085}} = \frac{1}{4r}\left(\frac{1}{a_5} - \frac{1}{a_{8085}}\right) = \frac{2020}{a_5 \cdot a_{8085}}.$$

$S_1 = a_5$, $S_2 = a_5 + a_9$, $S_3 = a_5 + a_9 + a_{13}$

$S_n = a_5 + a_9 + \ldots + a_{4n+1}$, $S_{n+1} = a_5 + a_9 + \ldots + a_{4n+1} + a_{4n+5}$

$$\frac{1}{S_1 \cdot S_2} = \frac{1}{a_5(a_5 + a_9)} = \frac{1}{a_9}\left(\frac{1}{a_5} - \frac{1}{a_5 + a_9}\right)$$

$$\frac{1}{S_2 \cdot S_3} = \frac{1}{(a_5 + a_9)(a_5 + a_9 + a_{13})} = \frac{1}{a_{13}}\left(\frac{1}{a_5 + a_9} - \frac{1}{a_5 + a_9 + a_{13}}\right)$$

$$\frac{1}{S_n \cdot S_{n+1}} = \frac{1}{a_{4n+5}}\left(\frac{1}{a_5 + a_9 + \ldots + a_{4n+1}} - \frac{1}{a_5 + a_9 + \ldots + a_{4n+5}}\right)$$

$$T = \frac{1}{a_5} - \frac{1}{a_5 + a_9} + \frac{1}{a_5 + a_9} - \frac{1}{a_5 + a_9 + a_{13}} + \ldots + \frac{1}{a_5 + a_9 + \ldots + a_{4n+5}}$$

$$T = \frac{1}{a_5} - \frac{1}{a_5 + a_9 + \ldots + a_{4n+5}} = \frac{a_9 + a_{13} + \ldots + a_{4n+5}}{a_5(a_5 + a_9 + \ldots + a_{4n+5})} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_{4k+5}}{a_5 \cdot \sum_{k=0}^{n} a_{4k+5}}$$

L:809. **Arătați că** $\frac{a^2}{b^2 + nab} + \frac{b^2}{c^2 + nbc} + \frac{c^2}{a^2 + nca} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(n+1)(ab+bc+ca)}$, $\forall a,b,c \rangle 0,\ n \geq 0$.

Marin Chirciu, Pitești

Rezolvare:

$$M_s = \sum \frac{a^2}{b^2 + nab} = \sum \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2}{1 + n\left(\frac{a}{b}\right)} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{a}{b}\right)^2}{3 + n\sum \frac{a}{b}} \overset{(1)}{\geq} \frac{1}{n+1}\sum \frac{a}{b} \overset{(2)}{\geq} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} = M_d$$, unde (1) rezultă din

$\frac{x^2}{nx+3} \geq \frac{1}{n+1}x \Leftrightarrow x \geq 3$, adevărată din AM-GM: $x = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3$ și

$(2) \Leftrightarrow \sum \frac{a}{b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$, care rezultă din inegalitatea lui Begström : $\sum \frac{a}{b} = \sum \frac{a^2}{ab} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate dacă și numai dacă $a = b = c$.

L:810. **Sa se arate că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea:** $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}} \geq \sqrt{\frac{2r}{R}}$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Din identitatea cunoscută:

$\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\Leftrightarrow\sin A+\sin B=\sin C+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ rezultă:

$$\sin A+\sin B\geq 2\sqrt{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin C\cos\frac{C}{2}}=4\sqrt{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos^2\frac{C}{2}}=4\sqrt{2\cdot\frac{r}{4R}}\cos\frac{C}{2}=2\sqrt{\frac{2r}{R}}\cos\frac{C}{2}$$

(s-a folosit egalitatea cunoscută $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$. Egalitatea are loc numai dacă:

$$\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\Leftrightarrow\frac{c}{4R}=4\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}\cdot\frac{(p-a)(p-c)}{ac}\cdot\frac{p(p-c)}{ab}}\Leftrightarrow 2c=a+b.$$

Scriind şi relaţiile analoage prin adunarea lor, rezultă: $2\sum\sin A\geq 2\sqrt{\frac{2r}{R}}\sum\cos\frac{A}{2}$, de unde rezultă inegalitatea propusă. Evident, egalitatea are loc atunci când triunghiul este echilateral.

L:811. **În triunghiul ΔABC avem $\sin A=\frac{3}{5}$ şi $\cos B=\frac{5}{13}$. Aflaţi cos C.**

Ileana Duma, Alina Ghiţă, Craiova

Rezolvare: Cum $\cos A=\pm\sqrt{1-\sin^2 A}=\pm\frac{4}{5}$ iar $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{12}{13}$ rezultă

$\sin C=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{3}{13}\pm\frac{48}{65}$. Cum $\sin C\rangle 0\Rightarrow\cos A=\frac{4}{5}\Rightarrow$

$\cos C=-\cos(A+B)=\sin A\sin B-\cos A\cos B=\frac{16}{65}$.

▪ Clasa a X-a

L:812. **Să se rezolve $\mathbb{R}^*$ sistemul de ecuaţii:** $\begin{cases}xy=2\\ x^y\cdot y^x=2^{\sqrt{2}}\end{cases}$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Se arată că singura soluţie este $(x;y)\in\left\{\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\right\}$. Evident $x=0, y=0$ nu verifică prima ecuaţie. Cum $x\cdot y=2\rangle 0$ atunci x şi y au acelaşi semn şi de asemenea puterile x^y şi y^x au sens pentru $x,y\in(0;\infty)$ sau x şi y strict negative. Dacă $x=-m,\ y=-n,\ m,n\in\mathbb{N}^*$ atunci $x\cdot y\langle 1$, deci sistemul nu admite soluţii.

Dacă $x,y\in(0;1)\Rightarrow x\cdot y\langle 1$ şi nu convine iar dacă $x\in(1;\infty)\ si\ y\in(0;1)$ rezultă $0\langle x^y y^x\langle xy\langle 2$ dar $2^{\sqrt{2}}$ nu este mai mic decât 2 , deci nu convine.

Atunci se ia $x\rangle 1,\ y\rangle 1$. Dacă $x,y\in\left(1;\sqrt{2}\right)\Rightarrow 1\langle xy\langle 2$ şi nu se verifică prima ecuaţie.

Dacă $x\rangle\sqrt{2}$ şi $y\rangle\sqrt{2}$ rezultă $xy\rangle\sqrt{2}$, deci nu verifică.

Dacă $x\in\left(\sqrt{2};\infty\right)\ si\ y=\sqrt{2}$ sau $y\in\left(\sqrt{2};\infty\right)\ si\ x=\sqrt{2}$ obţinem $xy\rangle\sqrt{2}$ ceea ce nu convine.

Prin urmare singurul caz care convine este pentru $x=y=\sqrt{2}$ deoarece $xy=\sqrt{2}^2=2$ şi $x^y\cdot y^x=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}^{\sqrt{2}}=2^{\sqrt{2}}$.

L:813. **Fie** $a,b,c\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $|(a-b)(b-c)(c-a)|=3$**. Găsiţi cea mai mică valoare a expresiei** $|a|+|b|+|c|$**.**

Dana Cotfasă, Alexandrina Năstase, Craiova

Rezolvare: Presupunem fără a restrânge din generalitate că $a\geq b\geq c$ şi atunci

$$3=(a-b)(b-c)(c-a)\leq\left(\frac{a-b+b-c}{2}\right)^2(a-c)=\frac{(a-c)^3}{4}\Rightarrow a-c\geq\sqrt[3]{12}.$$

$$|a|+|b|+|c|\geq|a-c|+|b|\geq\sqrt[3]{12}+0=\sqrt[3]{12}.$$

Pentru ca minimul să fie $\sqrt[3]{12}$ acesta trebuie să fie atins. Pentru aceasta b=0 şi

$$a-c=\sqrt[3]{12}\Rightarrow|a|\cdot|-c|\cdot|a-c|=3\Rightarrow ac=\frac{3}{\sqrt[3]{12}}\Rightarrow a=\frac{\sqrt[3]{12}}{2},b=0,c=-\frac{\sqrt[3]{12}}{2}.$$

L:814. **Să se rezolve ecuaţia** $\sqrt[3]{x+\sqrt[2]{2^{3x+6}}}-\sqrt[2x-2]{64^{x-3}}=0$, $x\geq 2$**.** **Adrian Stan,** Buzău

***Rezolvare*:**

$$\sqrt[3]{x+\sqrt[2]{2^{3x+6}}}=\sqrt[2x-2]{64^{x-3}}\,|()^3\Rightarrow\sqrt[x+2]{2^{3x+6}}=64^{\frac{(x-3)\cdot3}{2x-2}}\Rightarrow 2^{\frac{3x+6}{x+2}}=2^{\frac{6\cdot(x-3)\cdot3}{2x-2}}\Rightarrow 3(2x-2)=18(x-3)\Rightarrow x=4.$$

L:815. **Rezolvaţi în** $\mathbb{R}$ **ecuaţia** $9^{x\cdot\arcsin x}+9^{x\cdot\arccos x}=2\cdot3^{\frac{\pi x}{2}}$**.** **Claudia Ciulcu, Iulia Sanda**, Craiova

Rezolvare:

Cum $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$, $\forall x\in[-1;1]$ rezultă $\left(3^{x\cdot\arcsin x}\right)^2+\left(3^{x\cdot\arccos x}\right)^2-2\cdot3^{x(\arcsin x+\arccos x)}=0\Rightarrow$

$\left(3^{x\cdot\arcsin x}-3^{x\cdot\arccos x}\right)^2=0\Rightarrow 3^{x\cdot\arcsin x}=3^{x\cdot\arccos x}\Rightarrow x\cdot\arcsin x=x\cdot\arccos x\Rightarrow x_1=0$ şi

$\arcsin x=\arccos x=\frac{\pi}{4}$. Rezultă $x\in\left\{0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

L:816. **Fie** $a_1,a_2,.....,a_n\in(0;1)$, $n\geq2$, $n\in\mathbb{N}$ **şi** $k,l\in\mathbb{N}$ **astfel încât** $2\leq k,l\leq n$**. Arătaţi că** $\sqrt[k]{a_1a_2...a_n}+\sqrt[l]{(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)}\leq1$**. Mai rămâne proprietatea adevărată dacă cel puţin unul din numerele k sau l este mai mare strict decât n? (în legătură cu G 344 pag 2/2002, G.M)**

Dorina Goiceanu, Lucian Tuţescu, Craiova

Rezolvare:

$\sqrt[k]{a_1a_2...a_n}\leq\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$ respectiv $\sqrt[l]{(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)}\leq\sqrt[n]{(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)}$.

Din inegalitatea mediilor rezultă

$$\sqrt[k]{a_1a_2...a_n}+\sqrt[l]{(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)}\leq\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}+\sqrt[n]{(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)}\leq$$

$$\leq\frac{a_1+...+a_n}{n}+\frac{1-a_1+...+1-a_n}{n}=1.$$

Propoziţia nu mai rămâne adevărată dacă cel puţin unul dintre numerele k sau l este mai mare strict decât n.

De exemplu, fie $k=n$, $l=n+1$, $a_1=a_2=...=a_n=\frac{1}{2}\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}+\sqrt[n+1]{(1-\frac{1}{2})^n}\leq1\Leftrightarrow\sqrt[n+1]{(\frac{1}{2})^n}\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$ ceea ce e fals.

L:817. **Descompuneţi numărul 1004006004001 în produs de factori primi.**

Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare: $1004006004001 = 1+1000^1\cdot 4+1000^2\cdot 6+1000^3\cdot 4+1000^4\cdot 1=(1000+1)^4=1001^4=$
$=(7\cdot 11\cdot 13)^4=7^4\cdot 11^4\cdot 13^4$.

L:818. Să se determine valoarea expresiei $E(z,w)=\left(\frac{z}{z+w}\right)^{2021}+\left(\frac{w}{z+w}\right)^{2021}$ **unde z şi w sunt numere complexe nenule astfel încât** $z^2+zw+w^2=0$.

Aurel Chiriţă, Slatina, Ani Drăghici, Craiova

Rezolvare:

Dacă $z=w\Rightarrow 3z^2=0\Rightarrow z=0$ ceea ce e fals. contradicție cu z nenul.

Atunci pentru $z\neq w\Rightarrow z^3-w^3=0\Rightarrow z=\varepsilon\cdot w$ cu $\varepsilon^3=1,\ \varepsilon\neq 1\Rightarrow \varepsilon^2+\varepsilon=-\varepsilon^2$. Atunci,

$$E(z,w)=\left(\frac{\varepsilon w}{\varepsilon w+w}\right)^{2021}+\left(\frac{w}{\varepsilon w+w}\right)^{2021}=\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\right)^{2021}+\left(\frac{1}{\varepsilon+1}\right)^{2021}=\frac{\varepsilon^{2021}+1}{(\varepsilon+1)^{2021}}=\frac{\varepsilon^2+1}{(-\varepsilon^2)^{2021}}=\frac{-\varepsilon}{-\varepsilon^{4042}}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon}=1$$

L:819. Fie a > 1 şi b ≥ 0 **sau a > 0 şi** $b\geq 1$**. Să se rezolve ecuaţia:** $\log_{a^n+b}x=\log_{a^x+b}n$, **unde** $n\in N^*$.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Rezolvare: Pentru $x\in(0,1)$ cum $a^n+b>1$ şi $a^x+b>1$ avem că $\log_{a^n+b}x<0$ şi $\log_{a^x+b}n\geq 0$ ecuaţia este imposibilă.

Pentru $x\geq 1$ ecuaţia se mai scrie sub forma

$$\log_{a^n+b}x=\frac{\log_{a^n+b}n}{\log_{a^n+b}(a^x+b)}\Leftrightarrow(\log_{a^n+b}x)\log_{a^n+b}(a^x+b)=\log_{a^n+b}n.$$

Deoarece $x\geq 1$ avem că $a^x+b>1, a^n>1$ şi atunci $\log_{a^n+b}x>0, \log_{a^n+b}(a^x+b)>0$. Funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_{a^n+b}x\cdot\log_{a^n+b}(a^x+b)$ este strict crescătoare ca produs de funcţii strict crescătoare cu valori pozitive, deci injectivă, şi atunci ecuaţia $f(x)=\log_{a^n+b}n$ are soluţie unică. Se verifică uşor că x = n este soluţie a ecuaţiei date.

L:820. Rezolvaţi în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ **ecuaţia** $(x!)^{125}\cdot(y!)^{1895}=(z!)^{2021}$.

Cristian Moanţă, Lucian Tuţescu, Craiova

Rezolvare:

Dacă $z\in\{0;1\}$ se găseşte $x,y\in\{0;1\}$. Presupunem că $z\geq 2$ şi fie p cel mai mare număr prim, $p\leq z$. Evident $p^{2021}\left|(z!)^{2021}\right.\Leftrightarrow p^{2021}\left|(x!)^{125}\cdot(y!)^{1895}\right.$. Cum 125+1895 =2020 este mai mic decât 2021 se obţine că $p^{126}\left|(x!)^{125}\right.$ sau $p^{1896}\left|(y!)^{1895}\right.\Rightarrow p^2\left|x!\right.$ sau $p^2\left|y!\right.$. Considerăm $p^2\left|x!\right.$ şi atunci în dezvoltarea lui $x!$ mai apare pe lângă factorul p şi factorul 2p. Cum pentru $p\geq 2$ între p şi 2p se mai află un număr prim $q\in(p;2p)$. (Bertrand).

Rezultă $q\left|z!\right.$ şi $p\langle q$ care contrazice maximalitatea lui p. La fel se procedează pentru $p^2\left|y!\right.$. Aşadar pentru $z\geq 2$ nu avem soluţii şi atunci singurele soluţii în $\mathbb{N}$ sunt $x,y,z\in\{0;1\}$.

L:821. a) Rezolvaţi în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ **ecuaţia** $(x!)^2+(y!)^2=(z!)^2$.

b) Aflaţi cel mai mic număr natural $n\in\mathbb{N}^*$ **pentru care ecuaţia** $(x_1!)^2+(x_2!)^2+....+(x_n!)^2=(y!)^2$ **are soluţii în** $n\in\mathbb{N}$.

Cristian Moanţă, Lucian Tuţescu, Craiova

Rezolvare: a) Cum $(x!)^2\langle(y!)^2\Rightarrow x!\langle y!$ şi $x\langle y\Rightarrow x\leq z-1$. Analog $y\leq z-1$. Se observă că pentru $z=0$ şi $z=1$ ecuaţia nu are soluţii.

Fie $z \geq 2 \Rightarrow \quad (z!)^2 = (x!)^2 + (y!)^2 \leq \left[(z-1)!\right]^2 + \left[(z-1)!\right]^2 = 2 \cdot \left[(z-1)!\right]^2$ de unde $z^2 \leq 2$ adică $z \in \{0;1\}$ ceea ce este fals deoarece am presupus că $z \geq 2$. Rezulă că ecuaţia nu are soluţii în $\mathbb{N}^3$.

b) Pentru $y \in \{0;1\}$ ecuaţia nu are soluţii naturale iar pentru $y \geq 2 \Rightarrow x_i \leq y-1, \ \forall i = \overline{1,n} \Rightarrow$

$(y!)^2 = (x_1!)^2 + (x_2!)^2 + ... + (x_n!)^2 \leq n \cdot \left[(y-1)!\right]^2 \Rightarrow \ y^2 \leq n \Rightarrow y \leq \sqrt{n}.$

Pentru n=2 şi n=3 nu avem soluţii naturale. Pentru n=4 şi cum $y \geq 2$ se ia y=2 şi ecuaţia devine $(x_1!)^2 + ... + (x_4!)^2 = 4$ care are soluţiile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0;1\}$ aşadar, cel mai mic număr natural cerut este n=4.

L:822. **Să se arate că în orice triunghi oarecare ABC avem:**

$$\min\left\{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}, \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}, \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right\} \leq \frac{3}{8}.$$

Emil C. Popa, Sibiu

Rezolvare:

Cum orice triunghi are un unghi mai mic sau cel mult egal cu 60^0, fie de exemplu $0 \langle \frac{A}{2} \leq 30^0$. Deci

$\sin\frac{A}{2} \leq \frac{1}{2}$ sau $\cos\frac{B+C}{2} \leq \frac{1}{2}$. Deoarece $\cos\frac{B-C}{2} \leq 1$ rezultă că $\frac{\cos\frac{B+C}{2} + c\cos\frac{B-C}{2}}{2} \leq \frac{3}{4}$ sau

$\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} \leq \frac{3}{4}\Big|\cdot\sin\frac{A}{2} \Rightarrow \sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} \leq \frac{3}{8}$ obţinând că minimul este $\frac{3}{8}$ cu egalitate pentru

$m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) = 60^0$.

▪ Clasa a XI-a

L:823. **Să se calculeze** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{n^{1895}+1} + \frac{1}{n^{1895}+2} + ... + \frac{1}{n^{2020}}\right)$.

Daniela Stoian, Lenuţa Andrei, Craiova

Rezolvare:

Folosim $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln n\right) = c \in (0;1)$ (constanta lui Euler).

$$\frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{n^{1895}+1} + \frac{1}{n^{1895}+2} + ... + \frac{1}{n^{2020}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\ln n}\left[\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n^{2020}} - \ln n^{2020}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n^{1985}} - \ln n^{1895}\right) + \ln n^{2020} - \ln n^{1895}\right]$$

Trecând la limită obţinem rezultatul $\frac{\ln n^{2020} - \ln n^{1895}}{\ln n} = \frac{\ln n^{2020-1895}}{\ln n} = 125$ deoarece

$$\frac{1}{\ln n}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n^{2020}} - \ln n^{2020}\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ şi } \frac{1}{\ln n}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n^{18950}} - \ln n^{1895}\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Observaţie. Anul 1895 este anul înfiinţării Gazetei Matematice. În 2020 s-au împlinit 125 de ani de la înfiinţare.

L:824. **Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{tgx-1}{\sin^2 x\cdot\cos x-\cos^3 x}$; **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tgx-1}{\sin^2 x\cdot\cos x-\cos^3 x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-1}{\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cancel{\sin x-\cos x}}{\cos^2 x\cdot(\cancel{\sin x-\cos x})(\sin x+\cos x)}=\sqrt{2}$$

L:825. **Demonstrați că** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\ln x)+\sin(\ln x^2)+\ldots+\sin(\ln x^n)}{arctg(e^x-e)+arctg(e^{x^2}-e)+\ldots+arctg(e^{x^n}-e)}=e^{-1}$, $\forall n\geq 1$.

Ciobîcă Constantin ; Ciobîcă Elena, Fălticeni

Rezolvare:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\ln x)+\sin(\ln x^2)+\ldots+\sin(\ln x^n)}{arctg(e^x-e)+arctg(e^{x^2}-e)+\ldots+arctg(e^{x^n}-e)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{\sin(\ln x)}{\ln x}\cdot\dfrac{\ln x}{x-1}\right]+\ldots+\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\ln x^n)}{\ln x^n}\cdot\dfrac{\ln x^n}{x-1}}{\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{arctg(e^x-e)}{e^x-e}\cdot\dfrac{e^x-e}{x-1}+\ldots+\dfrac{arctg(e^{x^n}-e)}{e^{x^n}-e}\cdot\dfrac{e^{x^n}-e}{x-1}\right]}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1+1)}{x-1}+\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^2-1+1)}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2-1}{x-1}+\ldots+\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^n-1+1)}{x^n-1}\cdot\dfrac{x^n-1}{x-1}}{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e(e^{x-1}-1)}{x-1}+\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e\left(e^{x^2-1}-1\right)}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2-1}{x-1}+\ldots+\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e(e^{x^n-1}-1}{x^n-1}\cdot\dfrac{x^n-1}{x-1}}=$$

$$=\frac{1+\lim\limits_{x\to 1}(x+1)+\ldots+\lim\limits_{x\to 1}\left(x^{n-1}+x^{n-2}+x+1\right)}{e+e\lim\limits_{x\to 1}(x+1)+\ldots+e\lim\limits_{x\to 1}\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1\right)}=\frac{1+2+\ldots+n}{e(1+2+\ldots.+n)}=\frac{1}{e}=e^{-1}$$

L:826. **Calculaţi limita şirului** $(a_n)_{n\geq 1}$ **definit prin următoarea relaţie**: $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\sum\limits_{i=1}^{k}i(i+1)\right]^{-1}$.

Vasile Mircea Popa, Sibiu

Rezolvare : Calculăm: $\sum\limits_{i=1}^{k}i(i+1)=\sum\limits_{i=1}^{k}(i^2+i)=\sum\limits_{i=1}^{k}i^2+\sum\limits_{i=1}^{k}i$. Utilizăm relaţiile cunoscute: $\sum\limits_{i=1}^{k}i=\dfrac{k(k+1)}{2}$; $\sum\limits_{i=1}^{k}i^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ care se demonstrează uşor prin inducţie. Obţinem:

$\sum\limits_{i=1}^{k}i(i+1)=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\dfrac{k(k+1)}{2}=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}$. Deci: $\left[\sum\limits_{i=1}^{k}i(i+1)\right]^{-1}=\dfrac{3}{k(k+1)(k+2)}$

Descompunem această fracţie în fracţii simple şi obţinem:

$$\frac{3}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{k}-\frac{6}{k+1}+\frac{3}{k+2}\right).$$

Făcând k=1,2,...,n şi adunând, avem:

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{n+1}+\frac{3}{n+2}\right).$$ (reducerile care intervin formează aşa-zisa „reducere telescopica” a sumei). Putem calcula acum limita şirului: $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{3}{4}$. Astfel, problema este rezolvată.

L:827. **Să se separe rădăcinile reale ale ecuaţiei**
$\ln x = x^9 + 2x^8 + x^7 + 6x^6 + 7x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 12x - 8$

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Se consideră funcţiile $f, g : (0;\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ şi
$g(x) = x^9 + 2x^8 + x^7 + 6x^6 + 7x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 12x - 8$.

Funcţia f(x) este strict concavă deoarece $f^{II}(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ iar funcţia g(x) este strict convexă deoarece
$g^{II}(x) = 72x^7 + 112x^6 + 42x^5 + 180x^4 + 2(70x^2 - 12x + 9) > 0,\ \forall x > 0$ deoarece discriminantul trinomului $70x^2 - 12x + 9$ este negativ.
Prin urmare ecuaţia dată are cel mult două soluţii pozitive: Se verifică pentru x=1;
Dacă $h : (0;\infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - g(x)$ atunci $f(x) = g(x) \Leftrightarrow h(x) = 0$.

Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x - g(0) = -\infty - (-8) = -\infty$ iar $h(\frac{1}{2}) > 0$ rezultă $\left(\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x)\right) \cdot h(\frac{1}{2}) < 0$

Atunci funcţia continuă h are proprietatea lui Darboux şi există $x_2 \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ cu $h(x_2) = 0$.

Cu ajutorul unui calculator se găseşte $x_2 \simeq 0,000334120$.

L:828. **Determinaţi funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât**
$f(x+y) = f(x) + f(y) + 5xy(x^2 + xy + y^2),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Mădălina Giurgescu, Marian Voinea, Bucureşti

Rezolvare:

Deoarece $(x+y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy(x^2 + xy + y^2)$ ecuaţia se scrie $f(x+y) - (x+y)^5 = f(x) - x^5 + f(y) - y$ şi notând $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x^5$, funcţie continua obţinem $g(x+y) = g(x) + g(y)$ (ecuaţia funcţională a lui Cauchy) cu soluţia $g(x) = kx,\ k \in \mathbb{R}$.
Aşadar, $f(x) = kx + x^5$.

L:829. **Fie şirul** $x_n = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} + ... + \frac{1}{\sqrt{x+n-1}} - 2\sqrt{x+n-1},\ n \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 1$. **Să se arate că şirul** $(x_n)_{n\geq 1}$ **este convergent. Dacă** $l_x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ **să se calculeze** $\lim\limits_{x\to\infty} l_x$.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Rezolvare: . a) Prin însumarea inegalităţilor:

$\frac{1}{\sqrt{x+k-1}} > 2\left(\sqrt{x+k} - \sqrt{x+k-1}\right)$, pentru $k = \overline{1,n}$, avem:

$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x+k-1}} > 2\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt{x+k} - \sqrt{x+k-1}\right) = 2(\sqrt{x+n} - \sqrt{x}) > 2\cdot(\sqrt{x+n-1} - \sqrt{x}) \Rightarrow$

$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x+k-1}} - 2\sqrt{x+n-1} > -2\sqrt{x} \Rightarrow x_n > -2\sqrt{x}$.

Avem $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{x+n}} - 2\sqrt{x+n} + 2\sqrt{x+n-1} < 0$. (uşor de verificat), şi deci (x_n) este un şir descrescător, şi atunci $x_n \leq x_1 = \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}$.

Avem că $-2\sqrt{x}\langle\ x_n \le -2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}},\ \forall x\ge 1 \Rightarrow (x_n)_n$ şir mărginit,şi cum este şi monoton este convegent.

b) Din dubla inegalitate de mai sus rezultă că $l_x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le -2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ şi deorece

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(-2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} l_x=-\infty$.

▪ Clasa a XII-a

L:830. **Fie M o mulţime finită cu cel puţin două elemente. Definiţi pe M o lege de compoziţie** $" * ": M\times M\to M$ **astfel încât să fie îndeplinite simultan condiţiile:**

a) $x*y\ne y*x,\ \forall x,y\in M;$ **b)** $x*(y*z)\ne (x*y)*z,\ \forall x,y,z\in M;$

Iulia Sanda, Dorina Goiceanu, Craiova

Rezolvare:

Fie $\varphi: M\to M$ bijecţie fără puncte fixe (adică să nu existe $c\in M$ astfel încât $\varphi(c)=c$).

Definim legea $*: M\times M\to M, x*y=\varphi(x),\ \forall x,y\in M$. Atunci dacă $x\ne y\Rightarrow \varphi(x)\ne\varphi(y)$ deci $x*y\ne y*x,\ \forall x,y\in M;$

În plus $x*(y*z)=x*\varphi(y)=\varphi(x)$ iar $(x*y)*\left(x*z\right)=\varphi(x)*\varphi(x)=\varphi\left(\varphi(x)\right)$ şi evident $\varphi(x)\ne\varphi\left(\varphi(x)\right),\ \forall x\in M.$

Dacă presupunem că există $x\in M$ astfel încât $\varphi(x)\ne\varphi\left(\varphi(x)\right)\Rightarrow x=\varphi(x)$ ceea ce este fals deoarece φ nu are puncte fixe.

L:831. **a) Rezolvaţi în** $\mathbb{R}$ **ecuaţia** $2x^4+7x^3-4x-14=0$.

b) Să se raţionalizeze numitorul fracţiei $F=\frac{3}{2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-1}$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

a) $f(X)=2X^4+7X^3-4X-14=2X^4+2X+7X^3-7-2x-7=\ (2X+7)\left(X^3-(\sqrt[3]{2})^3\right)=$

$=(2X+7)\left(X-(\sqrt[3]{2})\right)\left(X^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}\right)\Rightarrow$ ecuaţia $f(x)=0\Rightarrow\ x_1=-\frac{7}{2},\ x_2=\sqrt[3]{2}$.

b) Notăm $\sqrt[3]{2}=\alpha$ şi atunci $F=\frac{3}{2\alpha^2+\alpha-1}$. Considerăm $f(X)=2X^4+7X^3-4X-14$ şi $g(X)=2X^2+X-1$ şi atunci $f(X)=(2X^2+X-1)(X^2+3x-1)-15$. Conform punctului a) din $f(\alpha)=0\Rightarrow(2\alpha^2+\alpha-1)(\alpha^2+3\alpha-1)=15\Rightarrow\ 2\alpha^2+\alpha-1=\frac{15}{\alpha^2+3\alpha-1}\Rightarrow$

$F=\frac{3}{2\alpha^2+\alpha-1}=3\cdot\frac{\alpha^2+3\alpha-1}{15}\Rightarrow\ F=\frac{\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}-1}{5}$.

L:832. **Să se calculeze:** $\int\frac{\cos^2 x+3\sin x\cdot\cos x}{\sin x\cdot(\sin x+\cos x)}dx,\ x\in\mathbb{R}-\left\{(k\pi)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+k\pi\right)\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Adrian Stan, Buzau

Rezolvare:

$$\int \frac{1-\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x+\sin x\cos x}{\sin x\cdot(\sin x+\cos x)}dx=\int \frac{\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x+\sin x\cos x}{\sin x\cdot(\sin x+\cos x)}dx=$$

$$=\int \frac{(\sin x+\cos x)^2+\sin x(\cos x-\sin x)}{\sin x\cdot(\sin x+\cos x)}dx==\int \frac{(\sin x+\cos x)}{\sin x}dx+\int \frac{(\sin x+\cos x)^I}{\sin x+\cos x}dx=$$

$$=\int (1+ctgx)dx+\ln\left|\sin x+\cos x\right|=x+\ln\left|\sin x\right|+\ln\left|\sin x+\cos x\right|+C$$

L:833. **Determinaţi primitivele funcţiei** $f:\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{tgx}{1+\cos^5 x}$. **Generalizare**

Orlando Alecu, Roşiori de Vede, Teleorman

Rezolvare: Notăm $y=\cos x$.

$$\int \frac{\sin x}{\cos x\cdot(1+\cos^5 x)}dx=-\int \frac{(\cos x)^I}{\cos x\cdot(1+\cos^5 x)}dx=-\int \frac{dy}{y(1-y^5)}=-\int\frac{dy}{y}+\int\frac{y^4}{1+y^5}dy=-\ln y+\frac{1}{5}\ln(1+y^5)+C$$

$\int f(x)dx=-\ln\cos x+\frac{1}{5}\ln(1+\cos^5 x)+C$. $\int \frac{tgx}{1+\cos^n x}dx=-\ln(\cos x)+\frac{1}{n}\ln(1+\cos^n x)$.

L:834. **Să se arate că** $\int_{-2}^{2}\frac{x^{2n}}{1+e^x}dx=\int_{0}^{2}x^{2n}dx$. **Aurel Chiriţă, Iulia Sanda**, Craiova

Rezolvare:

$I=\int_{-2}^{2}\frac{x^{2n}}{1+e^x}dx=\int_{-2}^{2}\frac{(-t)^{2n}}{1+e^{-t}}d(-t)=-\int_{-2}^{2}\frac{t^{2n}}{1+\frac{1}{e^t}}dt=\int_{-2}^{2}\frac{e^t\cdot t^{2n}}{1+e^t}dt=2\int_{0}^{2}\frac{e^t\cdot t^{2n}}{1+e^t}dt=J$, deoarece funcţia

$f(t)=\frac{e^t\cdot t^{2n}}{1+e^t}$ este funcţie pară.

Dar $I+J=\int_{-2}^{2}\frac{x^{2n}}{1+e^x}dx+\int_{-2}^{2}\frac{e^x\cdot x^{2n}}{1+e^x}dx=\int_{-2}^{2}\frac{x^{2n}(1+e^x)}{1+e^x}dx=\int_{-2}^{2}x^{2n}dx=\frac{2^{2n+1}}{2n+1}$.

L:835. **Să se calculeze primitivele funcţiei** $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x\cdot\frac{\cos^2 x-e^x\cdot\sin x}{(e^x+\cos x)^2}$.

Lucian Tuţescu. Craiova, Marian Voinea. Bucureşti

Rezolvare:

Deoarece $\left(\frac{e^x\cdot\cos x}{e^x+\cos x}\right)^I=\frac{(e^x\cdot\cos x-e^x\cdot\sin x)\cdot(e^x+\cos x)-e^x\cdot\cos x\cdot(e^x-\sin x)}{(e^x+\cos x)^2}=$

$=\frac{e^x\left[(\cos x-\sin x)(e^x+\cos x)-\cos x(e^x-\sin x)\right]}{(e^x+\cos x)^2}=e^x\cdot\frac{\cos^2 x-e^x\cdot\sin x}{(e^x+\cos x)^2}$ integrala cerută este

$\int f(x)dx=\frac{e^x\cos x}{e^x+\cos x}+C$.

L:836. **Se consideră** $I(m,n,p)=\int_{1}^{e}x^m\cdot\ln^n x\cdot\cos^p x\,dx$. **Arătaţi că** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[I(m,1,1)+I(m,1,-1)\right]=\infty$.

Nicoleta Oprea, Claudiu Ciulcu, Craiova

Rezolvare:

$$I(m,1,1)+I(m,1,-1)=\int_1^e x^m\cdot\ln\ x\cdot\cos\ x\ dx+\int_1^e x^m\cdot\ln^n x\cdot\cos^{-1}x\ dx=\int_1^e x^m\cdot\ln^n x\cdot\left(\cos x+\frac{1}{\cos x}\right)\ dx\geq$$

$$\geq 2\int_1^e x^m\cdot\ln x\ dx=2\int_1^e\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)'\cdot\ln\ x\ dx=2\frac{x^{m+1}}{m+1}\ln x\Big|_1^e-2\cdot\frac{1}{m+1}\int_1^e x^m dx.$$

Obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty}\left[I(m,1,1)+I(m,1,-1)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{2m}{m+1}\cdot\frac{e^{m+1}}{m+1}+\frac{2}{(m+1)^2}\right]=\infty$.

L:837. **Fie** $a\in(0;1)\cup(1;\infty)$, $b,c\in\mathbb{R}$ **şi** $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **o funcţie derivabilă pe intervalul I cu derivata continuă astfel încât** $a^{f(x)}+bf(x)\ln a+b+c\in\mathbb{R}^*,\ \forall x\in I$. **Să se calculeze integrala:**

$$\int\frac{a^{f(x)}\left[bf(x)\ln a+c\right]f'(x)}{\left[a^{f(x)}+bf(x)\ln a+b+c\right]^2}dx.$$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Rezolvare: Avem:

$$I=\int\frac{a^{f(x)}[bf(x)\ln a+c]f'(x)}{[a^{f(x)}+bf(x)\ln a+b+c]^2}dx=$$

$$\int\frac{ba^{f(x)}f(x)\ln a+b^2f(x)\ln a+ba^{f(x)}+b^2+ca^{f(x)}+bc}{[a^{f(x)}+bf(x)\ln a+b+c]^2}f'(x)dx-$$

$$-b\int\frac{f'(x)}{a^{f(x)}+bf(x)lna+b+c}dx=$$

$$=\int\frac{bf(x)lna\left[a^{f(x)}+b\right]+b\left[a^{f(x)}+b\right]+c\left[a^{f(x)}+b\right]}{[a^{f(x)}+bf(x)+b+c]^2}f'(x)dx\ -$$

$$-b\int\frac{f'(x)}{a^{f(x)}+bf(x)lna+b+c}dx=$$

$$=\int\frac{\left[a^{f(x)}+b\right][bf(x)lna+b+c]}{[a^{f(x)}+bf(x)+b+c]^2}f'(x)dx\ -b\int\frac{f'(x)}{a^{f(x)}+bf(x)+b+c}dx=$$

$$=\int\left\{-\frac{1}{lna[a^{f(x)}+bf(x)+b+c]}\right\}'[bf(x)lna+b+c]dx-b\int\frac{f'(x)}{a^{f(x)}+bf(x)lna+b+c}dx.$$

Integrând prin părţi prima integrală, integrala propusă, avem:

$$I=-\frac{bf(x)lna+b+c}{lna[a^{f(x)}+bf(x)lna+b+c]}+\frac{1}{lna}\int\frac{bf'(x)lna}{a^{f(x)}+bf(x)lna+b+c}dx-$$

$$-b\int\frac{f'(x)}{a^{f(x)}+bf(x)\ln a+b+c}dx=-\frac{bf(x)\ln a+b+c}{\ln a\left[a^{f(x)}+bf(x)\ln a+b+c\right]}+C.$$

L:838. **Calculaţi limita şirului** $(a_n)_{n\geq 1}$ **definit prin următoarea relaţie:** $a_n=\int_n^{2n}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x+1}dx$

Vasile Mircea Popa, Sibiu

Rezolvare: Considerăm funcţia: $f:(0,\infty)\to(1,\infty), f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

Se poate arăta uşor că această funcţie este strict descrescătoare pe domeniul de definiţie şi că avem $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$. Putem deci scrie: $e^{\frac{1}{n}}>e^{\frac{1}{x}}>e^{\frac{1}{2n}}$ pentru $x\in[n,2n]$, unde $n\in N^*$.

Împărţim cu x+1 dubla inegalitate de mai sus: $\frac{e^{\frac{1}{n}}}{x+1}>\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x+1}>\frac{e^{\frac{1}{2n}}}{x+1}$.

Integrăm pe intervalul: $[n,2n]$ şi obţinem: $e^{\frac{1}{n}}\cdot\ln\frac{2n+1}{n+1}>\int_n^{2n}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x+1}dx>e^{\frac{1}{2n}}\cdot\ln\frac{2n+1}{n+1}$.

În această dublă inegalitate se trece la limită pentru $n\to\infty$. În conformitate cu criteriul cleştelui se obţine limita cerută în enunţul problemei şi care are valoarea $a=\ln 2$.

Întâmplări cu matematicieni

Moisil și ora de curs



De la matematicianul **Grigore C. Moisil** (1906- 1973) ne-au rămas o serie de povestiri și întâmplări dintre care una se referă la cursurile pe care el le preda la Universitate:

De fiecare dată, Moisil scria pe tablă iar dacă la începutul orei de curs, literele erau scrise vizibil și mare pe tablă, pe parcursul orei literele deveneau din ce în ce mai mici, iar la un moment dat un student mai îndrăzneț din amfiteatru îi spune maestrului:

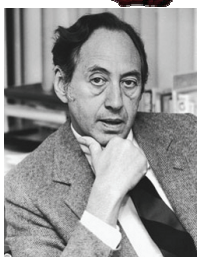
- **Domnulel profesor, nu se vede**!
- **Dar se aude**! îi replica Moisil cu înțelegere.

Spre sfârșitul orei, când vocea profesorului devenea mai joasă, din cauza efortului depus în prezentarea lecției, și nu se mai auzea până în ultimele bănci, studentul respectiv găsea prilejul să-i spună:

- **Domnule profesor dar nu se aude**!
- **Da, dar acum se vede**!, răspundea sugubăț savantul, după ce făcea literele mai mari pe tablă, provocând în felul acesta o serie de râsete în sala de curs.

„ Mai bine să greşeşti din prea multă îndrăzneală decât din prea multă prudenţă”

Alvin Toffler (1928-2016)



4. Probleme propuse

▪ Clasa a V-a

G:1004. Un elev parcurge un drum în formă de pătrat şi un alt drum în formă de dreptunghi a cărui lungime este de trei ori cât lăţimea. Ştiind că al doilea drum este de două ori mai lung decât primul, să se compare lăţimea dreptunghiului cu latura pătratului.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:1005. Arătaţi că numărul $A=\overline{\underbrace{11...11}_{2021}\underbrace{22...22}_{2021}}+\overline{\underbrace{33..33}_{2021}\underbrace{44...44}_{2021}}-\overline{\underbrace{11...11}_{2021}0}$ este pătrat perfect.

Adrian Gobej, Curtea de Argeş

G:1006. Rezolvaţi ecuaţia $x^x=2020^{2020^{2021}}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

G:1007. Care sunt ultimele două cifre ale numărului $N=6\cdot5^{2021}-4\cdot5^{2020}+2\cdot5^{2019}$ **?**

Livia-Emilia Stan, Buzău

G:1008. Determinaţi numerele naturale $\overline{abc}$, pentru care este îndeplinită relaţia: $\overline{abc}+\overline{bc}+c=\overline{cbc}$.

Sanda Mitea, Cugir, Alba

G:1009. Determinaţi cifrele în baza 10 astfel încât $\frac{\overline{aa}+\overline{bb}}{a+b}+\frac{\overline{ab}}{2}=57$.

Adrian Stan, Buzău

G:1010. Determinaţi numerele $\overline{abc}$ pentru care $\overline{abc}=\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

G:1011. Arătaţi că există un număr prim p astfel încât $\frac{44447}{p}$ să fie număr natural pătrat perfect.

Ionel Tudor, Călugăreni,Giurgiu

▪ Clasa a VI-a

G:1012. Aflaţi numărul real x din egalitatea $\left\{\left[\left(\frac{x}{43}-1\right)\cdot\frac{1}{46}+\frac{1}{43}\right]\cdot\frac{43}{44}:\frac{2020}{2021}-\frac{1}{2020}\right\}-1=0$.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:1013. Arătaţi că dublul sumei numerelor naturale care împărţite la 2021 dau câtul şi restul egale, se poate scrie ca produsul a trei numere naturale consecutive.

Livia- Emilia Stan, Buzău

G:1014. Rezolvaţi în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ecuaţia $2xy+7=(x+1)(y+5)$. **Doina** şi **Mircea Mario Stoica**, Arad

G:1015. Determinaţi a, b, c, d ştiind **că** $\frac{a}{6}=\frac{b}{9}$, $\frac{b}{6}=\frac{c}{3}$, $\frac{c}{9}=\frac{d}{16}$ şi $3a-2b+4c-d=40$**.**

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:1016. Să se arate că oricare ar fi n natural, numărul $N=2017^{n+2}+2021^{n+1}+2023^{n}$ nu este pătrat perfect. Să se arate că numărul nu este pătrat perfect oricare ar fi n număr natural.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

G:1017. Aflați numerele naturale prime a, b, c, știind că indeplinesc condițiile:

$43\cdot a^2+86\cdot b-16\cdot c=2021$, precum și $a+b+c$ este un număr natural prim.

Sanda Mitea, Cugir, Alba

G:1018. Se dau n fracții pozitive. Să se arate că fracția care are numărătorul egal cu suma numărătorilor celor n fracții și numitorul egal cu suma numitorilor celor n fracții este mai mare decât cea mai mică dintre fracțiile date și mai mică decât cea mai mare dintre fracțiile date.

Petre Rău, Galați

G:1019. Să se rezolve în numere întregi ecuația: $x^2-2x-4080399=0$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:1020. Pentru $x,y,z\in\mathbb{Z}^*$ şi $\frac{x+y}{z}=\frac{y+z}{x}=\frac{z+x}{y}$, determinaţi valoarea raportului $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$.

Adrian Gobej, Curtea de Argeş

G:1021. a) Să se determine măsura unui unghi, știind că o treime din complementul său, este cu 19 mai mic decât sfertul suplementului său.
b) Dacă m(∢AOB) este cea determinată la punctul a), CO⊥AO , OM este bisectoarea suplementului unghiului AOB, arătați că m(∢AOB)= 2·m(∢COM), B,C,M de aceeiași parte a lui AD.

Sanda Mitea, Cugir, Alba

▪ Clasa a VII-a

G:1022. Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC. Dacă $a^2+b^2+c^2-10a-10b-14c+99=0$, arătaţi că triunghiul ABC este isoscel.

Doina şi Mircea Mario Stoica, Arad

G:1023. Se consideră mulţimea: $A=\left\{p\in\mathbb{N}\,\middle|\,p=3n^2+2,\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

a) Să se ararte că numărul $2030\in A$;
b) Să se scrie numărul 2030 ca suma a trei pătrate perfecte. **Adrian Stan,** Buzău

G:1024. Dacă $a,\ b\in\mathbb{R}_+$ şi $a+b=2\sqrt{25+ab}$ determinaţi $a-b$. **Livia- Emilia Stan,** Buzău

G:1025. Să se scrie fracția $F=\dfrac{17\cdot 2^{102}+59}{93\cdot 2^{101}-93}$ ca suma a trei fracții cu numărătorul 1. Arătați că numărul $\left(2^{2020}-1\right)\cdot F$ este natural.

Ionel Tudor, Călugăreni,Giurgiu

G:1026. Aflaţi $x\in\mathbb{Z}$ astfel încât $\sqrt{x^2+4x+2021}\in\mathbb{Z}$. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

G:1027. Să se arate că numărul $A=\sqrt{1+2017\sqrt{1+2018\sqrt{1+2019\sqrt{1+2020\sqrt{1+2021\cdot 2023}}}}}$ este raţional.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:1028. a) Arătați că numărul $A=\sqrt{51+4\sqrt{47}}\cdot\sqrt{51-4\sqrt{47}}\cdot\sqrt{55-4\sqrt{51}}\cdot\sqrt{55+4\sqrt{51}}$ este număr natural.

b) Arătați că numărul $B=\sqrt{43^{2022}+47^{2020}}$ este irațional.

Sanda Mitea, Cugir, Alba

G:1029. Demonstraţi că pentru orice numere $x,y,z\in\mathbb{R}$, avem $\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz+x+y+z\right)^2\geq 4\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)$. **Adrian Gobej,** Curtea de Argeş

G:1030. Fie $a=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot.....\cdot n$. Găsiţi valoarea minimă a lui **n**, astfel ca **a** să fie divizibil cu $\mathbf{p^2}$, unde **p** este cel mai mare număr prim de două cifre.

Petre Păunescu, Roşiorii de Vede, Teleorman

G:1031. Să se arate că numărul natural de 2n+1 cifre, A = $1\underbrace{00\ldots0}_{\text{n-2 cifre de 0}}18\ \underbrace{00\ldots0}_{\text{n-2 cifre de 0}}81$ este un pătrat perfect, n fiind un număr natural oarecare.

Petre Rău, Galați

G:1032. Dacă $p\rangle 3$ este un număr prim, atunci $p^6=M_{72}+1$. **Dorin Mărghidanu**, Corabia

G:1033. Dacă $a,b,c\geq 0$ astfel încât $a^2+b^2+c^2=a+b+c=2$ atunci $\sum_{cyc}\dfrac{a}{a^2+1}\geq 1$.

Marin Chirciu, Piteşti

G:1034. Arătaţi că patrulaterul cu vârfurile $A(\sqrt{2};1-\sqrt{2})$, $B(\sqrt{3};1-\sqrt{3})$, $C(1-\sqrt{3};\sqrt{3})$, $D(1-\sqrt{2};\sqrt{2})$ este dreptunghi.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:1035. Pe laturile pătratului ABCD de centru O, se iau punctele M∈BC, E∈CD, astfel încât AM=8 , ME=6, AE= 10. Dacă Q este mijlocul lui AE, arătați că $18<P_{ABQ}<19$.

Sanda Mitea, Cugir, Alba

▪ Clasa a VIII-a

G:1036. Să se determine partea întreagă a raportului $\frac{a}{b}$, unde $a=\sqrt{5-\sqrt{3}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$, și $b=\sqrt{2+\sqrt{2}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}}-1$.

Livia-Emilia Stan, Buzău

G:1037. Rezolvaţi ecuaţia $x+y+26=6\sqrt{x-3}+10\sqrt{y-5}$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:1038. Dacă $a,b,c,d\rangle 0$ atunci $1+\frac{4}{ab+bc+cd+da}\geq\frac{8}{a+b+c+d}$. Când are loc egalitatea ?

Marin Chirciu, Piteşti

G:1039. Se consideră ecuația cu soluții reale $2021x^2-223x+6=0$.
Fără a rezolva ecuația să se arate că soluțiile sunt strict pozitive și subunitare.
Rezolvați ecuația folosind relațiile între rădăcini și coeficienți(relațiile lui Viète)

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:1040. Să se rezolve ecuaţia: $\left\{\frac{x-2}{3}\right\}=\left\{\frac{x+2}{4}\right\}$, unde $\{\alpha\}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ reprezintă partea fracţionară a lui a.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

G:1041. Se consideră triunghiul ABC cu notaţiile uzuale $a=BC$, $b=AC$ şi $c=AB$. Demonstraţi că $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$ dacă şi numai dacă $m(\sphericalangle ABC)=60^0$.

Adrian Gobej, Curtea de Argeş

G:1042. Dacă $1^3+2^3+3^3+.....+9^3=a^2$, atunci cu cât este egal a ?
Folosind relaţia de mai sus, arătaţi că $b=(99^3+100^3+101^3)\vdots 10002$.

Petre Păunescu, Roşiorii de Vede, Teleorman

G:1043. Fie x, y, z trei numere reale și distincte două câte două. Să se demonstreze identitatea:
$$\frac{z-y}{(y-x)(x-z)}+\frac{x-z}{(z-y)(y-x)}+\frac{y-x}{(x-z)(z-y)}+\frac{2}{y-x}+\frac{2}{z-y}+\frac{2}{x-z}=0$$

Petre Rău, Galați

G:1044. Jumătate dintr-un cilindru metalic având raza de 3 şi înălţimea de 6 se topeşte şi se obţine un con cu raza de $r=3\sqrt{3}$. Aflaţi unghiul de la vârful conului.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:1045. Fie E, F, G, H mijloacele laturilor BC, CD, DA, AB ale pătratului ABCD de centru O, AC∩EF={M}. iar MN⊥(ABC). Dacă AB=2a, MN=$a\sqrt{2}$.
a) Aflați volumul piaramidei NMGH și măsura unghiului diedru dintre (NGH) și (ABC).
b) Arătați că $BN^2>AM\cdot CN$.

Mariana Mitea, Gugir, Alba

▪ Clasa a IX-a

L:839. Fie x_1, x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2-x-3=0$. Să se calculeze expresia: $\frac{x_1^4-x_1^3+1}{x_1^2-3}+\frac{x_2^4-x_2^3+1}{x_2^2-3}$.

Prof. Livia- Emilia Stan, Buzău

L:840. Fie $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ astfel încât $f(x+y)+f(2x-y)=42x+40,\ \forall x,y\in\mathbb{R}_+$. Să se determine f(x) şi să se arate că $f\left(\frac{x}{2021}+\frac{2021}{x}\right)\rangle\ 48$.

Adrian Stan, Buzău

L:841. Determinaţi numerele naturale n pentru care numărul $8^n+72n+1$ este cub perfect.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

L:842. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $(f\circ f\circ f)(x)=(f\circ f)(x)+2021x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Arătaţi că f(x) este injectivă şi calculaţi f(0).

Constantin Dinu, Buzău

L:843. Determinaţi ultimele două cifre ale numărului 2021^{2021}.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

L:844. Demonstrați că $2^n+3^n+....+p^n\ \rangle\ \frac{(p-1)(np+1)}{2},\ \forall n\geq 1$.

Ciobîcă Constantin, Ciobîcă Elena. Fălticeni

L:845. Dacă $a\in(-4;1),\ b\in(-3;2),\ c\in(-2;3),\ d\in(-1;4)$, astfel încât $a+b+c+d=5$, să se demonstreze că: $81\cdot(1-a)\cdot(2-b)\cdot(3-c)\cdot(4-d)\leq(4+a)\cdot(3+b)\cdot(2+c)\cdot(1+d)$ şi să se precizeze când are loc egalitatea.

Dorin Mărghidanu, Corabia, Olt

L:846. Fie $a,b\in\mathbb{R}^*_+$. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{a^2+b^2-x^2}+x\sqrt{a^2+b^2-x^2}+x=a+ab+b$.

Marin Chirciu, Piteşti

L:847. Să se determine $\min\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\,\frac{1}{100}\ \langle\ \{\sqrt{n}\}\ \langle\ \frac{1}{10}\right\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

Dorin Mărghidanu, Corabia

L:848. Să se demonstreze că, pentru orice unghi real x, are loc inegalitatea $\sin^{123}x+\cos^{321}x\leq 1$.

Petre Rău, Galați

L:849. Rezolvaţi în $\mathbb{N}^*$, ecuaţiile *a)* $\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{\pi}{4}$; *b)* $\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{\sqrt{n}}{4}$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

▪ Clasa a X-a

L:850. Fie $x=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}$ și $y=\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$. Să se arate că $x^2+y^2=7$.

Livia-Emilia Stan, Buzău

L:851. Să se rezolve în $\mathbb{R}_+$ * sistemul de ecuații: $\begin{cases}\log_2(\lg x-\lg y)+\log_2(\lg x)=3\\ \log_3(\lg x+\lg y)-\log_3(\lg x)=1\end{cases}$.

Adrian Stan, Buzău

L:852. Pentru numerele reale $a,b\in(1;\infty)$ să se rezolve ecuaţia $a^{\log^2_b x}+x^{\log_b x}\le a+b$.

Adrian Gobej, Curtea de Argeş

L:853. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to R$, $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$. Calculați $f\left(\frac{9}{2}\right)$.

Demonstrați că $\operatorname{Im} f=\left[\sqrt{2},+\infty\right)$.

Ciobîcă Constantin; Ciobîcă Elena, Fălticeni, Suceava

L:854. Fie $a\rangle 1$. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x^{\log_a\sqrt{a+1}}=\sqrt{x}+1$. **Marin Chirciu**, Piteşti

L:855. Rezolvaţi ecuaţia $\log_2(x-1)^3=2+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$. **Constantin Dinu**, Buzău

L:856. Să se rezolve ecuaţia: $2021^{2x}-2019x\cdot 2021^x-2021^{x-1}=2020x^2+\left(2021-\frac{2020}{2021}\right)x+\frac{2020}{2021}$.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

L:857. Să se rezolve ecuaţia $\log_x(bx+c)=\log_a(ab+c)$, $c\rangle\ a\rangle\ 1$, $b\rangle 0$.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

L:858. Să se rezolve ecuația $\sqrt{3}\cdot\cos\frac{9x}{2}-3(1+2\cos 3x)\cdot\sin\frac{3x}{2}=2\sqrt{3}$

Petre Rău, Galați

L:859. Determinați numărul natural x , pentru care

$$x^2=\left[\left(C^0_{2021}\right)^2+\left(C^2_{2021}\right)^2+\left(C^4_{2021}\right)^2+.....\left(C^{2020}_{2021}\right)^2\right]\cdot\left[\left(C^1_{2021}\right)^2+\left(C^3_{2021}\right)^2+\left(C^5_{2021}\right)^2+.....\left(C^{2021}_{2021}\right)^2\right]$$

Ionel Tudor, Călugăreni

L:860. Dacă $a,b,c\ge\frac{3}{4}$ să se demonstreze că

$$6+\sqrt[3]{(2a-1)(3b-2)(4c-3)}+\sqrt[3]{(2b-1)(3c-2)(4a-3)}+\sqrt[3]{(2c-1)(3a-2)(4b-3)}\le 3(a+b+c)$$

şi să se precizeze când are loc egalitatea .

Dorin Mărghidanu , Corabia

▪ Clasa a XI-a

L:861. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{1+\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+.....+\frac{1}{\ln n}}$. **Adrian Gobej,** Curtea de Argeş

L:862. Să se calculeze limita de funcţii $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-\cos(x^2-x-2)}{\sin^2(x^3+x^2-2x-2)}$.

Livia Emilia Stan, Buzău

L:863. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+3}-ax-b\right)=4$;

Adrian Stan, Buzău

L:864. Fie $A=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{a}\right\}$, $a>1$ și $f:A\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{ax^2-3ax+a+1}{(ax-1)^2}$. Determinați $\min\limits_{x\in A} f(x)$.

Marin Chirciu, Argeş

L:865. Fie $x,y\in(1;\infty)$. Arătaţi că dacă $x+y\rangle 8\sqrt{2}$ atunci $x^{x^2}+y^{y^2}\rangle 2^{80}$.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

L:866. Să se arate că ecuația $64x^3-112x^2+56x-7=0$ are soluția $\sin^2\dfrac{\pi}{7}$.

Rezolvați în $\mathbb{N}^*$, ecuația : $64\cdot\sin^6\dfrac{\pi}{n}-112\cdot\sin^4\dfrac{\pi}{n}+56\cdot\sin^2\dfrac{\pi}{n}=n$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:867. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 2022\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. Determinaţi matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X^{2021}+X=A$.

Constantin Dinu, Buzău

▪ Clasa a XII-a

L:868. Să se determine funcțiile derivabile $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$ astfel încât $x^2+2x+\int_0^x f(t)dt=(x+1)f(x),\ \forall x\in(0;\infty)$. **Livia-Emilia Stan,** Buzău

L:869. Găsiți o primitivă a funcției $f:[0;\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\sqrt{x+4-4\sqrt{x}}$ cu proprietatea $F(5)+F(1)=10\cdot\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}-1\right)$. **Adrian Stan**, Buzău

L:870. Să se arate că $\int_0^3\sqrt[4]{x^2+16}dx\le\sqrt{22,5+24\ln 2}$. **Gheorghe Dârstaru**, Buzău

L:871. Fie $f:\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă care verifică relaţia $4I^3-12I\sin\alpha+3\sin\alpha-\sin 3\alpha+4=0$, $\alpha\in\mathbb{R}$ unde $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$. Să se calculeze I.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:872. a) Se consideră funcția $f_n:[n,+\infty)\to R;\ f_n(x)=\sqrt{n+\sqrt{2nx-n^2}}+\sqrt{n-\sqrt{2nx-n^2}};\ \forall n\geq 1$.

Arătați că: $\int_n^{2n} f_n(x)dx=\frac{n\sqrt{n}}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)$

b) Demonstrați că $\int_3^6 g(x)dx=\sqrt{2}\left(9-\sqrt{3}\right)$, unde $g(x)=\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}+\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}$.

Ciobîcă Constantin. Ciobîcă Elena, Fălticeni, Suceava

L:873. Calculaţi $\int\frac{(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot.....\cdot(1+x^{2^{n-1}})}{x^{2^n}}dx,\ x\in[1;\infty),\ n\in\mathbb{N}^*$.

Adrian Gobej, Curtea de Argeş

L:874. Se dă polinomul $f(X)=X^3-9X-12\in\mathbb{Z}[X]$. Arătaţi că există $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ cu $\alpha+\alpha^2\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ şi $\alpha^3\in\mathbb{Q}$ astfel încât $f\left(\alpha+\alpha^2\right)=0$. Dacă f are rădăcinile x_1, x_2, x_3 atunci $\frac{x_1^{3n}+x_2^{3n}+x_3^{3n}}{(3x_1+4)^{3n}+(3x_2+4)^{3n}+(3x_3+4)^{3n}}=\alpha^{3n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Rezolvaţi ecuaţia f(x)=0.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:875. Să se calculeze $\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^n\cdot\ln bx}{x^{2n+2}+x^{n+1}+1}dx,\ \forall a,b\rangle 0,\ n\in\mathbb{N}$. **Gheorghe Ghiţă**, Buzău

L:876. Calculaţi integrala: $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\operatorname{arctg}x}{2x^2+x+2}dx$ **Vasile Mircea Popa**, Sibiu

L:877. Fie funcţia $f:(0,\infty)\to G, f(x)=\frac{x-a}{x+b}$, unde $a, b\in(0,\infty)$.

a) Să se determine mulţimea G şi legea de compoziţie $\Delta: G\to G$ astfel încât $\left(R_+^*,\ \cdot\right)\cong\left(G,\ \Delta\right)$.

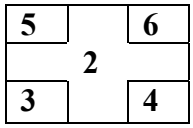
b) Să se calculeze $\underbrace{x\,\Delta\,x\,\Delta\,...\,\Delta\,x}_{\text{de } n \text{ ori } x}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

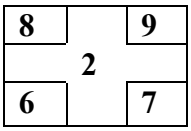
Marin Chirciu, Argeş

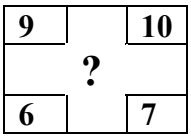
CALEIDOSCOP MATEMATIC

1. Ce număr ar trebui să înlocuiască semnul de întrebare ?

a) 2; **b) 3;** **c) 4;** **d) 5;** **e) 6.**







2. Într-un joc de 12 jucători care durează 65 de minute, trei rezerve îi înlocuiesc în mod egal pe toţi jucătorii. Asta înseamnă că toţi jucătorii, inclusiv rezervele, stau pe teren aceeaşi durată de timp. Cât anume?

a) 20 min; **b) 25 min;** **c) 30 min;** **d) 45 min;** **e) 52 min;**

„ There cannot be a language more universal and more simple, more free from errors and obscurities. Mathematical analysis is a extensive as nature itself, and it defines all perceptible relations."

Joseph Fourier (1768 - 1830)



5. QUICKIES

A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader's name, full address, and an e-mail address. Submited solutions should arrive before September 01, 2021.

PROPOSALS – QUICKIES

Q67. Proposed by Dorin Mărghidanu, Corabia, Romania. Solve the equation

$$x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+...}}}=x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot...}}}\text{, where } x>0.$$

Q68. Proposed by Dorin Mărghidanu, Corabia, Romania. If $a_k, b_k > 0$ for any $k=\overline{1,n}$, then prove that $\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}+\frac{1}{\sqrt[n]{b_1b_2...b_n}}\geq\frac{4}{\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}}$.

Q69. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania. Let the positive real sequence $(a_n)_{n\geq 1}$, such that $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{na_n\sqrt[n]{n!}}=a\in R_+^*$. Compute $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sqrt[n+1]{a_{n+1}}-\sqrt[n]{a_n})$.

Q70. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania. Prove that in all scalene triangle ABC holds $\sum\frac{a^2+ab+b^2}{(a-b)^2}\geq\frac{9}{4}$.

SOLUTIONS - QUICKIES

Q63. Proposed by Dorin Mărghidanu, Corabia, Romania.

If $0\leq a<b$ are real numbers, then prove that

$$\sqrt{ab}\leq\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{(ka+(n-k)b)((n-k)a+kb)}\leq\frac{a+b}{2}.$$

Solution 1 by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania. Using Cauchy-Buniakovski-Schwarz inequality we obtain $\sum\limits_{k=0}^{n}\sqrt{(ka+(n-k)b)((n-k)a+kb)}\geq\sum\limits_{k=0}^{n}\left(k\sqrt{ab}+(n-k)\sqrt{ab}\right)=$

$=n\sqrt{ab}\sum\limits_{k=0}^{n}1=n(n+1)\sqrt{ab}$, i.e. LHS inequality. Using AM-GM inequality we obtain

$$\sum_{k=0}^{n}\sqrt{(ka+(n-k)b)((n-k)a+kb)}\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{ka+(n-k)b+(n-k)a+kb}{2}=\frac{n(a+b)}{2}\sum_{k=o}^{n}1=$$

$=\frac{n(n+1)(a+b)}{2}$, i.e. RHS inequality.

Solution 2 by Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain.

The left-hand side inequality follows because for any real number x with $0 \le x \le 1$, then $\big(xa+(1-x)b\big)\big((1-x)a+xb\big) \ge ab$ because it is equivalent to $(a-b)^2\big(1-x\big)x \ge 0$

The right-hand side inequality follows by the AM-GM inequality, since

$$\sqrt{\big(ka+(n-k)b\big)\big((n-k)a+kb\big)} \le \frac{n\big(a+b\big)}{2}.$$

Solution 3 by author. It is easy to show that $\sqrt{ab} \le \frac{1}{n}\cdot\sqrt{\big(ka+(n-k)b\big)\big((n-k)a+kb\big)} \le \frac{a+b}{2}$ and if we take $k=\overline{0,n}$ and adding up we obtain the desired inequality.

Remark. Mihály Bencze, Braşov, Romania proved that If $a_i > 0 \ \ (i=1,2,...,m)$, then

$$m\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m} a_i} \le \sum_{cyc}\sqrt{a_1a_2} \le \frac{1}{n(n+1)}\sum_{cyc}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{(ka_1+(n-k)a_2)((n-k)a_1+ka_2)} \le \sum_{i=1}^{m} a_i\,,$$

which represents a refinement of AM-GM inequality.
Also solved by Marius Drăgan, Bucharest, Romania.

Q64. Proposed by Dorin Mărghidanu, Corabia, Romania.

If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=1$, then prove that $\frac{a^2+b}{b+c}+\frac{b^2+c}{c+a}+\frac{c^2+a}{a+b} \ge 2$. When does the equality holds ?

Solution 1 by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania. By homogenization the given inequality becomes successively $\frac{a^2+b(a+b+c)}{b+c}+\frac{b^2+c(a+b+c)}{c+a}+\frac{c^2+a(a+b+c)}{a+b} \ge 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+a^3b+b^3c+c^2a-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2-a^2bc-ab^2c-abc^2 \ge 0$, which is true, because it results by adding the following inequalities

$a^4+b^4+c^4 \ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$, $(a^3b+a^3b+a^3b+a^3b+b^3c+c^3a+c^3a)/7 \ge a^2bc$,

$(b^3c+b^3c+b^3c+b^3c+c^3a+a^3b+a^3b)/7 \ge ab^2c$,

$(c^3a+c^3a+c^3a+c^3a+a^3b+b^3c+b^3c)/7 \ge abc^2$. Equality occurs iff $a=b=c=1/3$.

Solution 2 by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania.

$$\sum\frac{a^2+b}{b+c}=\sum\frac{(1-(b+c))^2+b}{b+c}=\sum\left(\frac{b+1}{b+c}-2+(b+c)\right)=-6+2+\sum\frac{b+a+b+c}{b+c}=$$

$$=-4+\sum\left(\frac{a+b}{b+c}+1\right)=-1+\sum\frac{a+b}{b+c}\ge -1+3\sqrt[3]{\frac{a+b}{b+c}\cdot\frac{b+c}{c+a}\cdot\frac{c+a}{a+b}}=2.$$

Solution 3 by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania.

$$\sum\frac{a^2+b}{b+c}=\sum\frac{a+b+a^2-a}{b+c}=\sum\frac{a+b}{b+c}+\sum\frac{a(a-1)}{1-a}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a+b}{b+c}\cdot\frac{b+c}{c+a}\cdot\frac{c+a}{a+b}}-\sum a=2.$$

Solution 4 by Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain.

Since $a+b+c=1$, the inequality may be written homogeneously as

$$\frac{a^2+b(a+b+c)}{(a+b+c)(b+c)}+\frac{b^2+c(a+b+c)}{(a+b+c)(c+a)}+\frac{c^2+a(a+b+c)}{(a+b+c)(a+b)}$$

Now, after clarifying denominators and simplifying we get $a^3-ab^2+b^3-a^2c-bc^2+c^3 \ge 0$
which follows by the rearrangement inequality. Notice that the equality holds if and only if $a=b=c=1/3$.

Solution 5 by author.

$\frac{a^2+b}{b+c}+\frac{b^2+c}{c+a}+\frac{c^2+a}{a+b}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2+b}{b+c}+a+\frac{b^2+c}{c+a}+b+\frac{c^2+a}{a+b}+c\geq 2+a+b+c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{a(a+b+c)+b}{b+c}+\frac{b(a+b+c)+c}{c+a}+\frac{c(a+b+c)+a}{a+b}\geq 3 \Leftrightarrow \frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\geq 3$, true by AM-GM. The equality occurs if and only if $\frac{a+b}{b+c}=\frac{b+c}{c+a}=\frac{c+a}{a+b}=\frac{a+b+b+c+c+a}{b+c+c+a+a+b}=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a+b=b+c, b+c=c+a, c+a=a+b \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Solution 6 by Marius Drăgan, Bucharest, Romania. After deconditionated we obtain $\frac{a^2+b}{b+c}+\frac{b^2+c}{c+a}+\frac{c^2+a}{a+b}\geq 2 \Leftrightarrow \sum\frac{a^2+b(a+b+c)}{b+c}\geq 2(a+b+c)$, where if we denote $b+c=x, c+a=y, a+b=z$, i.e. $a=\frac{y+z-x}{2}, b=\frac{z+x-y}{2}, c=\frac{x+y-z}{2}, a+b+c=\frac{x+y+z}{2}$, and after some algebra the last inequality becomes $\sum\frac{z^2+yz}{x}\geq 2(x+y+z)$, which is true because

$\sum\frac{z^2}{x}\geq\frac{(\sum z)^2}{\sum x}=x+y+z$ and $\sum\frac{yz}{x}=\frac{\sum(yz)^2}{xyz}\geq\frac{yzxy+xyzx+zxyz}{xyz}=x+y+z$.

Also solved by Marin Chirciu, Piteşti, Romania.

Q65. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

Let $\gamma_n=-\ln n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, $\lim\gamma_n=\gamma=Euler-Mascheroni$ constant. Find $\lim_{n\to\infty}(\gamma_n-\gamma)\sqrt[n]{n!}$.

Solution 1 by author. Let $x_n=(\gamma_n-\gamma)\sqrt[n]{n!}=n(\gamma_n-\gamma)\cdot\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, (1); It is well-known that $\lim\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$, (2). We have

$$\lim n(\gamma_n-\gamma)=\lim\frac{\gamma_n-\gamma}{\frac{1}{n}}\overset{Cesaro-Stolz}{=}\lim\frac{\gamma_{n+1}-\gamma_n}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}=\lim n(n+1)(\gamma_n-\gamma_{n+1})=$$

$$=\lim n(n+1)\left(\ln\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim n\left((n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{\frac{x+1}{x}\ln(1+x)-1}{x}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{(x+1)\ln(1+x)-x}{x^2}\overset{L'Hospital}{=}\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{\ln(1+x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2},\ (3).$$

From (1), (2) and (3) we get $\lim_{n\to\infty}(\gamma_n-\gamma)\sqrt[n]{n!}=\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2e}$.

Also solved by Marius Drăgan, Bucharest, Romania.

Q66. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania.

If $x,y,z,t>0$, then $\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\right)\left(\frac{z^2}{t}+\frac{t^2}{z}\right)\geq 2(xz+yt)$.

Solution 1 by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania. By Hölder's inequality and AM-GM inequality we obtain $\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\right)\left(\frac{z^2}{t}+\frac{t^2}{z}\right)=\frac{(1+1)(x^3+y^3)(z^3+t^3)}{2xyzt}\geq$

$$\geq\frac{(xz+yt)^3}{2xyzt}=\frac{(xz+yt)^2}{4xyzt}\cdot 2(xz+yt)\geq 2(xz+yt).$$

Solution 2 by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania. By symmetry we can assume $x\geq y$ and $z\leq t$. Since $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\geq\frac{(x+y)^2}{x+y}=x+y$ and $\frac{z^2}{t}+\frac{t^2}{z}\geq z+t$ it suffices to prove that

$(x+y)(z+t)\geq 2(xz+yt)\Leftrightarrow xt-xz+yz-yt\geq 0$

$\Leftrightarrow x(t-z)-y(t-z)\geq 0\Leftrightarrow (x-y)(t-z)\geq 0$, and we are done.

Solution 3 by Marius Drăgan, Bucharest, Romania. $xz=a, yt=b, xt=c, yz=d$, so $ab=cd$.

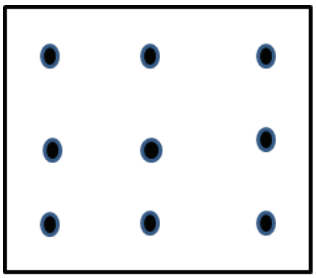
$\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\right)\left(\frac{z^2}{t}+\frac{t^2}{z}\right)\geq 2(xz+yt)\Leftrightarrow\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{d}+\frac{d^2}{c}\geq 2(a+b)$. Since

$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{d}+\frac{d^2}{c}\geq\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+2\sqrt{cd}=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+2\sqrt{ab}$ it remains to prove that

$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+2\sqrt{ab}\geq 2(a+b)$. We denote $a+b=S, ab=P, \frac{S}{\sqrt{P}}=t\geq 2$ and the last inequality becomes $\left(\frac{S}{\sqrt{P}}\right)^3-5\cdot\frac{S}{\sqrt{P}}+2\geq 0\Leftrightarrow (t-2)(t^2-1+2t)\geq 0$, which is true.

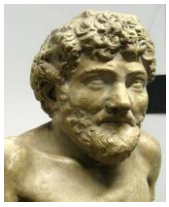
CALEIDOSCOP MATEMATIC

1. Puteţi desena încă două pătrate astfel încât cele nouă puncte din figura alăturată să fie toate separate între ele de laturile pătratelor ?



2. Aflaţi-l pe x din ecuaţia $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+.....}}}=2$.

„ Obişnuinţa îndulceşte chiar şi lucrurile înspăimântătoare”
Esop
(cca 564 î. Hr)



6. Caleidoscop matematic

Probleme recreative de logică și de creativitate

Kovács Béla, Satu Mare

(2)

Să se scrie numerele naturale folosind doar patru cifre de 4 utilizând orice fel de operații, semne și paranteze.

Patru cifre de 4 este un caz aparte, foarte important și foarte interesant. În jurul anilor 1900 a fost la modă, foarte mulți în foarte multe locuri s-au ocupat de ele, ajungâng cât mai departe. La început numai cu cele patru operații elementare, apoi introducând din ce în ce mai multe și mai complexe operații.

De la 0 la 9 numai operațiile de bază:

$0 = 4 - 4 + 4 - 4$
$1 = (4 + 4) : (4 + 4)$
$2 = 4 : 4 + 4 : 4$
$3 = (4 + 4 + 4) : 4$
$4 = 4 + 4 \cdot (4 - 4)$
$5 = (4 \cdot 4 + 4) : 4$
$6 = (4 + 4) : 4 + 4$
$7 = 4 + 4 - 4 : 4$
$8 = 4 + 4 + 4 - 4$
$9 = 4 + 4 + 4 : 4$

De la 10 la 20 au folosit radicalul și virgula zecimală. (sau punctul zecimal)
($.4 = 0.4 = 4/10 = 2/5$, $4.4 = 4{,}4 = 22/5$)

$10 = 4 \cdot \sqrt{4} + 4 : \sqrt{4}$
$10 = 44 : 4.4$
$11 = 44 : (\sqrt{4} + \sqrt{4})$
$12 = 4 \cdot (4 - 4 : 4)$
$13 = 44 : 4 + \sqrt{4}$
$14 = 4 \cdot 4 - 4 + \sqrt{4}$
$15 = 4 \cdot 4 - 4 : 4$
$16 = 4 \cdot 4 + 4 - 4$
$17 = 4 \cdot 4 + 4 : 4$
$18 = 4 \cdot 4 + 4 - \sqrt{4}$
$19 = (4 + \sqrt{4}) : .4 + 4$
$20 = 4 \cdot 4 + \sqrt{4} + \sqrt{4}$

De la 21 la 30 au indrodus semnul ! factorial:

$21 = 4! - 4 + 4 : 4$
$22 = 4 \cdot 4 + 4 + \sqrt{4}$
$23 = 4! - \sqrt{4} + 4 : 4$
$24 = 4 \cdot 4 + 4 + 4$
$25 = 4! + \sqrt{4} - 4 : 4$
$26 = 4! + \sqrt{4} - 4 + 4$
$27 = 4! + 4 - 4 : 4$
$28 = 4 \cdot (4 + 4) - 4$
$29 = 4! + 4 + 4 : 4$
$30 = 4 \cdot (4 + 4) - \sqrt{4}$

Și tot așa până la 50 , apoi mai departe până la 100, (folosind și ridicare la putere), cu excepția câtorva numere. Se pot folosi orice semne de operație. Încercați!

Un exemplu: $100 = \left(4 + 4 + \sqrt{4}\right)^{\sqrt{4}}$, însă pentru 99 nu s-a găsit o exprimare simplă.

Se poate accepta $\left(\frac{4}{4}\right)\% - (4:4)\% = 100\% - 1\% = 99\%$? (patru pătrimi egal sută la sută)

Matematiceanul fizician englez Paul Dirac (1902 – 1984) căruia i-au plăcut foarte mult astfel de probleme – enigme, a găsit o rezolvare genială, general aplicabilă, prin care orice număr natural se poate exprima cu patru cifre de 4. A folosit logaritmul, radicalul și fracția. Iată:

$\log_{\frac{\sqrt{4}}{4}}\left(\log_4\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{4}}}\right) = n$, unde numărul radicalilor este n. $(n \geq 1)$

Într-adevăr: $\log_{\frac{\sqrt{4}}{4}}\left(\log_4\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{4}}}\right) = \log_{\frac{2}{4}}\left(\log_4 4^{\frac{1}{2^n}}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2^n} = n$

Alex Bellos: Tudod a megoldást? (Cunoști soluția? Editura Partvonal)
Partvonal Könyvkiadó, Budapest, 2018
http://mathforum.org/ruth/four4s.puzzle.html
Alex Bellos: CAN YOU SOLVE MY PROBLEMS?

CURIOZITĂŢI

1 x 9 + 2 = 11
12 x 9 + 3 = 111
123 x 9 + 4 = 1111
1234 x 9 + 5 = 11111
12345 x 9 + 6 = 111111
123456 x 9 + 7 = 1111111
1234567 x 9 + 8 = 11111111
12345678 x 9 + 9 = 111111111
123456789 x 9 +10 = 1111111111

9 x 9 + 7 = 88
98 x 9 + 6 = 888
987 x 9 + 5 = 8888
9876 x 9 + 4 = 88888
98765 x 9 + 3 = 888888
987654 x 9 + 2 = 8888888
9876543 x 9 + 1 = 88888888
98765432 x 9 + 0 = 888888888

1 x 8 + 1 = 9
12 x 8 + 2 = 98
123 x 8 + 3 = 987
1234 x 8 + 4 = 9876
12345 x 8 + 5 = 98765
123456 x 8 + 6 = 987654
1234567 x 8 + 7 = 9876543
12345678 x 8 + 8 = 98765432
123456789 x 8 + 9 = 987654321

Răspuns la problemele de la pagina 44.

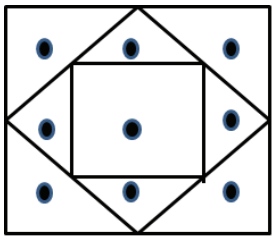
1. Răspuns: b) 3; $9 \cdot 7 - 6 \cdot 10 = 63 - 60 = 3$ **;**

2. Răspuns d) 52 min;

$\frac{65\,\text{min} \times 12\,jucatori\,/\,meci}{15\,jucatori} = 52\,\text{min}$ **de stat pe teren pentru fiecare jucător inclusiv rezervele.**

Răspuns la problemele de la pagina 48.

1



2. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots\ldots}}} = 2 \;|()^2 \Rightarrow\; x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots\ldots}}} = 2^2 \Rightarrow\; x+2=4 \Rightarrow x=2.$

Omagiu lui Traian Lalescu

de D. M. Bătineţu-Giurgiu, şi Neculai Stanciu



Traian Lalescu s-a născut la București, la data de 12 iulie 1882 și tot acolo avea să-și găsească sfârșitul prematur la data de 15 iunie 1929.

Tatăl său, un modest funcţionar de bancă purta același prenume, *Traian* şi era de origine din comuna Cornea, comitatul Caraş-Severin. A scris în 1876 o lucrare privind probleme economice ale agriculturii şi o alta,''Agenda băncilor populare şi metodul de coeficient Lalescu", care se găsesc la Biblioteca Academiei Române. Mama era din părțile ardelene. Savantul se prezenta ca fiind de obârșie din satul de lângă Caransebeș.

Începe studiile primare în Bucureştiul natal. Primele două clase gimnaziale în Craiova. Următoarele două clase le face în Moldova, la Roman, studiind apoi, din clasa a V-a, la Liceul Internat din Iaşi. Numele său este înscris pe tabla de onoare a liceului. *Traian Lalescu* a purtat toată viața amprenta mediului atât de variat în care s-a format datorită peregrinărilor din copilărie pe care le-a făcut împreună cu familia: a fost temeinic ca bănățeanul, vorbăreţ ca oltenul, serios ca ardeleanul, iubitor de frumos ca moldoveanul și cu spiritul sprințar ca bucureșteanul.

Pe tot parcursul studiilor, *Traian Lalescu* a fost premiantul I al clasei şi preminantul de onoare al şcolii, devenind din clasa a VI-a corespondent al Gazetei Matematice.

În 1900 intră primul la Școala Națională de Poduri și Șosele din București. În primul an de studii este ajutat financiar de profesorul *Andrei Ioachimescu* care, l-a luat acasă la el şi l-a tratat ca pe propriul copil un an de zile.

În 1901, publică prima notă matematică originală a Gazetei Matematice, *Asupra unei sumări de serii.*

În 1903 se retrage şi trece la Facultatea de Ştiinţe a Universităţii din Bucureşti, Secţia Matematici.

În 1905 devine membru al redacţiei Gazeta Matematică.

La 17 iunie 1905 obţine licenţa în matematici cu calificativul ''foarte bine''.

Tot în 1905 obţine prin concurs, reuşind din nou primul, o bursă ''*Adamachi*'' pentru continuarea studiilor la Paris, Sorbona, unde îşi obţine din nou Licenţa în Matematici. Aici este ajutat financiar şi de profesorul *Ion Ionescu-Bizeţ*.

Între anii 1906-1910 este profesor de matematică la gimnaziul din Giurgiu. În 1906 este atras de cursul de ecuaţii integrale ţinut de *Émile Picard* la Sorbona.

În 1907 publică patru note în Comptes Rendus des Séances de l'Academie des Sciences de Paris (CRASP).

În 1908 îşi susţine Teza de Doctorat ''Sur l'équation de Volterra'', sub conducerea lui *Émile Picard*, pe care o publică atât în Editura Gauthier-Villars cât şi în revista de mare prestigiu, Journal de Mathématiques Pures et Appliquèes, Paris . Tot în 1908 publică şi o lucrare de Teorie Galois. Graţie ajutorului acordat de Academia Română î-şi prezintă rezultatele la Congresul Internaţional al Matematicienilor de la Roma, 6-11 aprilie 1908. Aici îl întâlneşte pe *Vito Volterra*. Rezultatele obţinute sunt prezentate şi în România, în Bulletin de la Société des Sciences, Bucureşti (BSS).

Din vara lui 1908 până în primăvara lui 1909, era în alt mare centru matematic, la Göttingen, unde se aflau *David Hilbert* şi şcoala pe care acesta o crease. Participă la cursurile lui *D. Hilbert* şi prezintă o comunicare la Societatea de Matematică din Göttingen, într-o şedinţă prezidată de *Felix Klein*, iar la data de 15 iunie 1909 obţine titlul ştiinţific de docent.

Debutează în învăţământul superior la data de 1 iunie 1909, ca asistent de lucrări grafice al lui *Ion Ionescu*. Aici stă până la data de 15 mai 1910.

După o revenire scurtă în ţară se întoarce la Göttingen pentru perioada 1910-1911, unde ţine o serie de comunicări despre propriile sale cercetări, comunicări apreciate de *David Hilbert*, *Erhardt Schmidt* şi *Felix Klein.* Apoi, pleacă din nou la Paris, unde publică alte trei articole în CRASP şi la noi în ţară în BSS.

Între anii 1910-1913 este conferenţiar de algebra superioară la Universitatea din Bucureşti.

Între anii 1911-1912 este transferat de la Giurgiu la Bucureşti, la Seminarul Central, apoi, la Gimnaziile Şincai şi Dimitrie Cantemir.

În 1911 publică prima monografie semnificativă din lume, înaintea lui *Hilbert*, despre ecuaţiile integrale (în anul următor apare în traducere în limba franceză). Această monografie a fost tradusă şi editată în 1918, în limba polonă de către *S. Mazurkiewicz* în cadrul Academiei Polone de Ştiinţe şi Litere, iar cum spunea *Hugo Steinhauss*, aceasta a fost cartea din care matematicienii polonezi au învăţat teoria ecuaţiilor integrale. Cartea aceasta a fost apoi reeditată de Editura Academiei din România în 1957. *Vito Volterra* şi *Édouard Goursat* au subliniat, în cărţile lor, importanţa cercetărilor lui *Traian Lalescu* privind ecuaţiile integrale. Ecourile despre lucrările lui *Traian Lalescu*, despre rezultatele obţinute în teoria ecuaţiilor integrale au continuat mult după dispariţia sa fizică. În particular, prof. *Albrecht Pietsch* de la Jena, în 1980, aflat într-o vizită la Institutul Academiei Române i-a spus prof. *Nicolae Popa* că *Traian Lalsecu*, împreună cu *Şerban Gheorghiu*, au fost primii care au demonstrat că produsul a doi operatori *Hilbert-Schmidt* este un operator cu urmă.

În 1911 este numit profesor titular la Şcoala de Şosele şi Poduri, la catedra de geometrie analitică, în locul lui *Spiru Haret* şi tot în 1911 este profesor de mecanică raţională la Universitatea din Bucureşti.

Din 1912 este asistent la catedra de geometrie descriptivă la Universitatea din Bucureşti.

După apariţia ultimului număr din anul XXI (al *Gazetei Matematice*) începe Primul război mondial. Din anul următor apar la Bucureşti numai primele două numere, ocuparea oraşului de către trupele germane şi distrugerea tipografiei fac imposibilă apariţia revistei. În decembrie 1917, la locuinţa lui *T. Lalescu* din Iaşi se hotărăşte tipărirea revistei în capitala Moldovei, la tipografia „H. Goldner“, unde majoritatea lucrătorilor erau bătrâni şi infirmi. Ca să-i stimuleze la tipărirea *Gazetei*, *T. Lalescu* şi *V. Teodoreanu* le aduceau alimente din raţiile proprii !

Numărul de pagini pe număr se micşorează şi apar disfuncţionalităţi mari în apariţia revistei: numărul din decembrie 1916 apare în aprilie 1917, iar nr. 3 din vol. XXII apare la sfârşitul războiului! Şi conţinutul articolelor este altul. Se scriu articole de balistică sau de aplicaţii ale matematicii în ştiinţele militare.

Numărul 1 din vol. XXIII este deschis de vibrantul articol *„Către ostaşii români“* şi este dedicat soldaţilor aflaţi în prima linie (*Gazeta* avea autorizaţia de a fi distribuită pe front). Şedinţele redacţiei se ţin regulat, sub preşedinţia venerabilului profesor *C. Climescu,* iniţiatorul *Recreaţiilor ştiinţifice*. Încă de prin anii 1920 se preconizează construcţia unui local al *Gazetei Matematice*. *N. Nicolescu* donează primii 500 lei în acest scop. Trei ani mai târziu *Traian Lalescu* propune lui *Tancred Constantinescu*, pe atunci Director General al Căilor Ferate, să doneze o parcelă dintr-un loc de lângă Gara de Nord pentru construcţia localului. Începută în septembrie 1933, este terminată în august 1934, iar în 27 ianuarie 1935, într-o duminică, este inaugurată. Sunt de faţă toţi cei patru „stâlpi“ ai *Gazetei*. *„...Dintre toate problemele propuse în Gazeta Matematică n-a fost niciuna mai grea, mai frumoasă şi mai interesantă decât problema Casei Gazetei Matematice“*, remarca *Gh. Ţiţeica* cu acest prilej.

În 1919 obţine diploma de inginer electrician după absolvirea Şcolii Superioare de Electricitate din Paris.

Pentru a susţine eforturile delegaţiei României la Conferinţa de Pace de la Paris (1919), delegaţie din care *Traian Lalescu* făcea parte, savantul a scris o monografie despre problema etnografică a Banatului, furnizând argumente ştiinţifice privind apartenenţa la România a acestei regiuni.*Traian Lalescu* a fost deputat de Caransebeş. A întocmit și prezentat în Parlament un Raport al exerciţiului bugetar pentru anul 1925. A scris dialoguri filosofice pe teme matematice fiind „în primul rând interesat de idee, de eleganţa demonstraţiei, de sensurile profunde ale teoremelor”.

A militat pentru infiintarea Scolii Politehnice din Timisoara al carei prim rector (sau director) a fost în 1920.

A publicat 28 de articole în Gazeta Matematică, 9 articole în Revista de Matematică din Timişoara, 24 de articole ştiinţifice/cărţi în limba română şi 36 de articole ştiinţifice/cărţi într-o limbă străină.

Profesorul *Traian Lalescu* a avut un rol important în apariția la 15 martie 1921 a *Revistei de Matematică* din Timișoara.

Din anul 1990 devine membru post-mortem al Academiei Romane.

„Adâncimea gândirii duce la puterea caracterului”.
C. Narly



7. Poşta redacţiei

Dragi cititori, elevi şi profesori, a apărut **numărul 27** al revistei de matematică „ **SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noştri, şi care, sperăm noi, va aduna tot mai mulţi elevi şi profesori împreună, pentru a face din obiectul matematicii o activitate atractivă și performantă.

Profesorii şi elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciţii şi probleme cu enunţ şi rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătăţii calitatea acestei reviste, o pot face trimiţând materialele membrilor colectivului de redacţie sau pe adresa de e_mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate(**salvate în Word 2003-2007**) , fie scrise de mână şi scanate. **Materialele primite trebuie să fie originale şi să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise şi către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparţine redacţiei.

Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările şi comenzile pentru **numărul 28** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **01 SEPTEMBRIE 2021**. Vă urăm succes şi vă aşteptăm.



ELEVI REZOLVITORI

Colegiul Economic „ Maria Teiuleanu” Pitești, Argeș.:
Clasa a XI-a: Chiriac Maria Elisa, Ștefan Denis. **Prof. Daniel Văcaru.**

Școala Gimnazială „ Armand Călinescu” nr. 5, Curtea de Argeș:
Clasa a VI-a: Gobej Adrian, **Prof. Constantin Nicolau**;

Școala Gimnazială ” Rareș Vodă” Ploiești, Prahova
Clasa a VIII-a: Păduraru Cătălina, Mihai Alexandra, Găitănaru Andreea, Călinescu Alin, Niţoiu Vlad, Boboc Gabriel, Savu Gabriel**. Prof. Daniela Badea**

Liceul Tehnologic „Meserii și Servicii”, Buzău:
Clasa a X-a: Găvăneanu Adriana, Berechet Ștefan, Modruz Ștefania, Crăciun Elena, Penteliuc Ioana**; Clasa a XI-a :** Știrbu Cătălin; Ilie Aniţa, Gegea Andreea. **Clasa a XII-a:** Catinca Teodora; Trifan Mircea, Moise Andrei. **Prof. Adrian Stan.**

Scoala Gimnazială Nicolae Labis , Mălini, Suceava:
Clasa a VI-a: Gogan Maria Veronica, **Prof. Gabriela Gogan.**

„Scoala Preuniversitară de Măsură” Smeeni, Buzău:
Clasa a V-a: Neacșu Gabriela, Mîrzu Diana, Prună Mihaela; **Clasa a VI-a**: Mîrzu Alexandru; **Clasa a VI-a:** Anghel Marius, Sava Alexandra **Clasa a VIII-a**: Stănescu Irina; **Clasa a IX-a :** Constantin Ioana; Clasa a XI-a: Alexandru Nicolae, Dobre Daniel, Tănase Marina; **Clasa a XII-a:** Nicolae Mirabela; **Profesori:**
Ion Stănescu , **Neagu Manuela, Dragu Andreea, Nichita Georgiana, Dumitrache Florica.**

VIZITAȚI SI REVISTA ONLINE DE MATEMATICA MATEINFO.RO

REVISTA SCLIPIREA MINŢII

NR. 27 ANUL XIV - APRILIE 2021

Cuprins

1. Istoria matematicii

Joseph Fourier
de Adrian Stan 1

Euclid- părintele geometriei
de Gabriela Gogan 3

2. Articole şi note matematice

Asupra unor inegalităţi în triunghi
de Marin Chirciu 5

O metodă pentru generarea n-uplelor pitagoreice
de Neculai Stanciu 8

Repartiţia primelor cifre ale numerelor naturale
de Petre Rău 9

Regarding an inequality
de Daniel Văcaru 11

Asupra unei inegalităţi a lui A. Padoa
de D.M Bătineţu- Giurgiu, Neculai Stanciu 13

A inequality in triangle concerning sides and cevians
de Vasile Jiglău 14

Two short proofs AM-GM inequality
de Dorin Mărghidanu 15

3. Probleme rezolvate 17

4. Probleme propuse 37

5. Quickies 45

6. Caleidoscop matematic 49

7. Poşta redacţiei 53

editgraph
editură | tipar offset | tipar digital
www.editgraph.ro

LEI 12 RON

ISSN 2247 – 6601
ISSN – L 2247 - 6601