„ Oamenii trec dar operele lor rămân”.
Augustin Louis Cauchy
(1789- 1857)

1. Istoria matematicii

Petrache Poenaru – primul inventator român

de Adrian Stan, Buzău

Născut la 10 ianuarie 1799 într-o mică localitate Băneşti din Vîlcea, **Petrache Poenaru (1799- 1875)** a fost matematicianul, pedagogul şi inginerul care a contribuit la organizarea învățământului dinainte de revoluția de la 1848 şi care a continuat şi după această dată să joace un rol important în viața culturală a Țării Româneşti.

Provenit dintr-o familie înstărită care îşi avea originea în marile familii de boieri din timpul lui Matei Basarab, Petrache a beneficiat de mic copil de cei mai buni dascăli acasă şi apoi la şcolile din Craiova sau de la Bucureşti, unde este primit în 1819 de către mitropolitul Dionisie Lupu să învețe la şcoala de pe lângă Mitropolie. Aici va face cunoştință cu profesorul său Gheorghe Lazăr şi va ajunge să predea şi el aici limba greacă.

În 1821 izbucneşte **Revoluția lui Tudor Vladimirescu**, iar Poenaru părăseşte şcoala de la Mitropolie şi devine secretar al lui Tudor Vladimirescu mijlocind pe această cale şi întâlnirea de la Cotroceni dintre Gheorghe Lazăr şi conducătorul revoluției, fapt pentru care Lazăr va fi acuzat mai târziu în procesul intentat de ocârmuirea vremii.

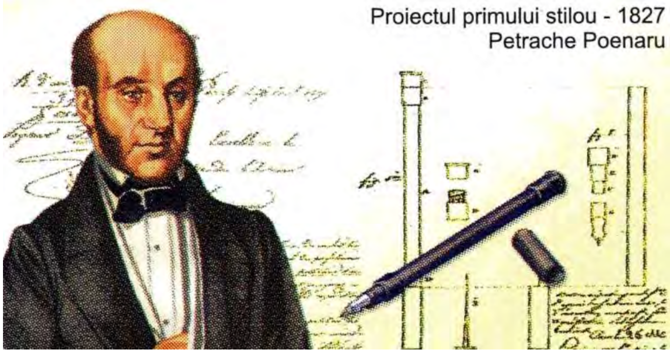
După uciderea lui Tudor, **Petrache Poenaru** pleacă la Sibiu unde se refugiaseră frații şi mama sa şi rămâne aici până în 1824, când pleacă la studii la Viena, trimis de Eforia Şcolilor din Bucureşti. Aici, el studiază greaca, latina, istoria universală, logica, matematica, fizica şi chimia, după care, în 1826 pleacă la Paris unde se înscrie la „Şcoala de aplicațiuni a inginerilor geografi” la care studiază trigonometria, topografia şi geografia. Participă la realizarea hărții Franței sub conducerea lui Puissant- membru al Academiei de Ştiințe din Paris care în 1828 îi înmânează certificatul de absolvire al şcolii de aplicațiuni, într-un mod elogios, lăudându-l pentru studiile şi lucrările făcute în Franța.

La numai 28 de ani, mai întâi la Viena şi apoi la Paris, **Poenaru** îşi breveta celebrul său stilou sub denumirea „**stilograf**”sau cum apare în acte “Condeiul portăreț fără sfârşit, alimentându-se însuşi cu cerneală” fiind primul toc rezorvor din lume, o invenție pe cât de simplă pe atât de importantă în inventarea pistonului de mai târziu. Poenaru devenea astfel la 28 mai 1827 primul român inventator primind brevetul său de inventator pentru tocul cu cerneală care avea să fie precursorul stiloului modern. Mai târziu, în 1884, Lewis E. Waterman a preluat ideea românului şi a realizat stiloul care se umplea prin intermediul peniței.

Se va întoarce în Bucureşti iar în 1832 este numit la recomandarea viitorului domn Barbu Ştirbei - un luptător pentru emanciparea poporului român, atât director la Colegiul Sf. Sava din Bucureşti, cât şi reprezentantul comisiei pentru învățământ ce redacta regulamentul pentru învățământ adoptat în acelaşi an în cadrul „Legiurii şcolare" sub Regulamentul Organic.

În acelaşi an, **Poenaru** devine director general, un fel de inspector general al tuturor şcolilor din Țara Românească până în 1847 calitate din care a înființat numeroase şcoli sub domnia lui Alexandru Ghica.

Participă activ la **Revoluția de la 1848** şi face parte din Comisia pentru dezrobirea țiganilor. După Revoluție este judecat şi i se ia toate funcțiile pe care le avea. De abia în 1850, Barbu Ştirbei ajuns domn al Țării Româneşti, îl numeşte în Cancelaria domnească şi dă legea pentru eliberarea țiganilor, aceasta fiind un eveniment excepțional al vremii, o lecție de emancipare pentru toți contemporanii şi pentru posteritate dată de domnitorul muntean.


Proiectul primului stilou - 1827
Petrache Poenaru

Alte funcții pe care le mai ocupă **Petrache Poenaru** sunt cele de la 1857 ca membru al Comisiei documentelor, iar din 1856 ca membru al Comisiei de Stat. În 1870 devine membru al Academiei Române şi fiind în vârstă, discursul său de admitere, citit de Alexandru Odobescu va fi dedicat mentorului său Gheorghe Lazăr care a întemeiat învățământul național.

Din calitatea de preşedinte a "Societății pentru învățarea poporului român" a reuşit să obțină ca şcolile normale să nu se desființeze aşa cum dorea ministrul învățământului de atunci.

Moştenirea sa matematică constă în publicarea primului curs de geometrie în limba română în 1837 înainte de apariția celui scris în 1838 de către Gheorghe Asachi la Iaşi. Intitulat **„Elemente de geometrie după Legendre"** , acesta traducea o parte din cartea celebrului matematician şi insera o parte din studiile pe care le făcuse Poenaru la Viena şi Paris, folosind o parte din terminologia pe care o folosea şi Gheorghe Lazăr.

Poenaru introducea însă termeni noi ca axiomă, demonstrație, ipoteză, simetrie, propoziție, proprietate, ş.a. Dă de asemenea descrierea tuturor figurilor geometrice, introducând termeni geometrici care ni s-au păstrat până acum: unghiuri adiacente, opuse la vârf, unghiuri coprespondente, unghiuri alterne interne, alterne externe, denumirile pentru poligoane sau expresiile centru, concentrice, circumscris, circumferință, semicerc, segment, tangent, etc. (1, pag. 138)

În 1841 traduce din latină cartea lui Appeltauer şi apare primul curs de algebră din Țara Românească fiind al doilea scris în româneşte după cel al lui Gh. Asachi de la Iaşi din 1837. Şi aici introduce termeni noi sau îi traduce pe cei din latină rămânând foarte mulți până în prezent.

Moare la 2 octombrie 1875 ca profesor, inginer şi inventator, rămânând o figură proeminentă alături de Gheorghe Lazăr şi Ion Heliade Rădulescu pentru organizarea şi dezvoltarea începuturilor învățământului românesc din Țara Românească.

Bibliografie:
1. George Şt. Andonie. Istoria Matematicii în Româna. Editura Ştiințifică. Bucureşti. 1965.
2. www.descoperă.ro

„ Matematica constă în a dovedi ceea ce este evident în cel mai puţin evident mod.”
George Polya
(1887- 1985)

2. Articole şi note matematice

Despre inegalitatea lui Hölder şi nu numai

de Bogdan-Marius Ioniță, Bucureşti şi **Titu Zvonaru,** Comăneşti

În rândurile ce urmează dorim să prezentăm necesitatea ca un rezolvitor să stăpânească mai multe instrumente pentru a putea aborda unele inegalități. În domeniul soluționării inegalităților apar uneori situații ce pot părea puțin paradoxale.

Printre inegalitățile utilizate se numără **inegalitatea lui Hölder**, un rezultat pe care cineva preocupat de inegalități trebuie să-l aibă în vedere. Forma cea mai simplă şi uşor de utilizat (care ne arată şi ’’înrudirea’’ ei cu mai cunoscuta inegalitate **Cauchy -Buniakovski - Schwarz**) este următoarea:

(H) $(a^3+b^3+c^3)(p^3+q^3+r^3)(x^3+y^3+z^3)\ge(apx+bqy+crz)^3$.

Să analizăm următoarele două inegalități asemănătoare

(1) $(x^2+xy+y^2)(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2)\ge(xy+yz+zx)^3$.

(propusă de **Vasile Cârtoaje şi Mircea Lascu** la Olimpiada Națională în 1995, redescoperită **de Sefket Arslanagic în Crux Mathematicorum, nr. 7/2004**).

(2) $3(x^2+xy+y^2)(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2)\ge(x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2$.

(propusă la Olimpiada de matematică din India în 2007).

Grupând convenabil şi folosind inegalitatea lui Hölder, obținem

$$(x^2+xy+y^2)(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2)=(xy+y^2+x^2)(x^2+z^2+zx)(y^2+yz+z^2)\ge (xy+yz+zx)^2.$$

Amintindu-ne inegalitatea $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)$ (echivalentă cu inegalitatea binecunoscută $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$), observăm imediat că inegalitatea (2) este mai tare decât (1). Dar nu întrevedem o cale de a demonstra inegalitatea (2) folosind Hölder. Aici intervine o situație cu care trebuie să ne obişnuim. Inegalitatea (2) poate fi demonstrată utilizând două inegalități destul de simple, uşor de justificat (prima este echivalentă cu $(x-y)^2\ge 0$, iar a doua se reduce, după desfacerea parantezelor, la inegalitatea mediilor):

(L1) $x^2+xy+y^2\ge\dfrac{3(x+y)^2}{4}$ **şi** **(L2)** $9(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8(x+y+z)(xy+yz+zx)$**.**

Folosind inegalitățile **(L1)** şi **(L2),** obținem succesiv

$$3(x^2+xy+y^2)(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2)\ge\frac{3^4}{4^3}(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2\ge$$

$$\ge\frac{3^4}{4^3}\cdot\frac{8^2}{9^2}(x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2=(x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2.$$

Chiar dacă inegalitățile (L1) şi (L2) ne-au permis demonstrarea inegalității (2), care este mai tare decât (1), nu trebuie să tragem concluzia că aceste inegalități sunt mai tari decât Hölder. Abordarea problemelor cu inegalități necesită atât cunoştințe, cât şi inspirație; de cele mai multe ori, soluția nu apare ca în reviste, ci e nevoie de încercări, unele nereuşite.

O nouă modalitate de rafinare a unor inegalități

de Marius Drăgan, Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

În [1] este prezentată o nouă metodă de rezolvare a inegalităților. Utilizând această tehnică vom rafina unele inegalități din RMT.

I. O rafinare pentru inegalitatea problemei IX.535. din RMT 1/2021.

IX.535. Fie $x, y, z \in (0,\infty)$. Arătați că $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3xyz}+\left(\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}\right)^3 \geq 2$.

Lorian Săceanu, Grong, Norvegia și Marian Cucoaneș, Mărășești.

Vom demonstra următoarea inegalitate:

$$\frac{\sum x^3}{3xyz}+\left(\frac{\sum xy}{\sum x^2}\right)^3 \geq \frac{\alpha-9}{3}+\frac{\alpha^3}{(2\alpha-9)^3}+1 \geq 2 \text{ , unde } \alpha=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Notăm $S=x+y+z$, $P=xyz$. Avem $\alpha=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$, $t=\dfrac{S^3}{P}\geq 27$,

$$\sum x^2=\frac{S^3-2P\alpha}{S},\ \sum x^3=S\sum x^2-\sum xy\sum x+3xyz=S^3-3P\alpha+3P,\ \sum xy=\frac{\alpha P}{S},$$

$$\frac{\sum x^3}{3xyz}+\left(\frac{\sum xy}{\sum x^2}\right)^3=\frac{t-3\alpha}{3}+1+\frac{\alpha^3}{(t-2\alpha)^3}.$$

Din inegalitatea lui Schur avem $S^3+9P\geq 4\sum xy \Leftrightarrow t=\dfrac{S^3}{P}\geq 4\alpha-9$, (*).

Notăm $t-2\alpha=u$ şi obținem $u\geq 2\alpha-9$. Considerăm funcția $f:[2\alpha-9,\infty)\to R$,

$$f(u)=\frac{u-\alpha}{3}+1+\frac{\alpha^3}{u^3} \text{ cu } f'(u)=\frac{1}{3}-\frac{3\alpha^3}{u^4} \text{ şi } u_0=\sqrt{3}\alpha^{\frac{3}{4}} \text{ punct de minim.}$$

Deoarece $2\alpha-9\geq\sqrt{3}\alpha^{\frac{3}{4}}$, $\forall\alpha\geq 9$, rezultă că f este crescătoare pe intervalul $[2\alpha-9,\infty)$, deci

$$f(u)\geq f(2\alpha-9)=\frac{\alpha-9}{3}+\frac{\alpha^3}{(2\alpha-9)^3}+1.$$

Aşadar, $\dfrac{\sum x^3}{3xyz}+\left(\dfrac{\sum xy}{\sum x^2}\right)^3\geq\dfrac{\alpha-9}{3}+\dfrac{\alpha^3}{(2\alpha-9)^3}+1$ şi pentru că

$$\frac{\alpha-9}{3}+\frac{\alpha^3}{(2\alpha-9)^3}+1\geq 2 \Leftrightarrow \frac{\alpha-9}{3}+\frac{\alpha^3}{(2\alpha-9)^3}\geq 1 \Leftrightarrow (\alpha-9)(2\alpha-9)^3+3\alpha^3\geq 3(2\alpha-9)^3 \Leftrightarrow$$

$(\alpha-9)^2\geq 0$, însemnă că am obținut o rafinare a inegalității din problema IX.535.

II. O rafinare pentru inegalitatea problemei OBJ.139. din RMT 2/2018.

OBJ.139. Fie a,b,c numere reale pozitive astfel încât $abc=1$. Arătați că

$$a^3+b^3+c^3+\frac{64}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 11.$$

***Titu Zvonaru**, Comăneşti*

Vom demonstra următoarea rafinare: $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}+\dfrac{64abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 11+\dfrac{(\alpha-9)^2}{\alpha-1}$, unde

$\alpha=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$.

Avem $\sum x^3=S^3-3P\alpha+3P$ şi $\prod(y+z)=\prod(S-x)=S^3-S\cdot S^2+\sum xyS-P=P\alpha-P$.

Deci $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+\frac{64abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{S^3-3P\alpha+3P}{P}+\frac{64P}{P\alpha-P}=$

$$=t+3-3\alpha+\frac{64}{\alpha-1}\overset{(*)}{\geq}4\alpha-9+3-3\alpha+\frac{64}{\alpha-1}=\alpha-6+\frac{64}{\alpha-1}=11+\alpha-6-11+\frac{64}{\alpha-1}=$$

$$=11+\alpha-17+\frac{64}{\alpha-1}=11+\frac{(\alpha-1)(\alpha-17)+64}{\alpha-1}=11+\frac{\alpha^2-18\alpha+81}{\alpha-1}=11+\frac{(\alpha-9)^2}{\alpha-1}.$$

III. O rafinare pentru o inegalitate din [3]. **RMT NR. 1/2020 publică problema:**
OBJ.192. Fie a,b,c numere reale strict pozitive. Arătaţi că

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{3abc}{a^3+b^3+c^3}\geq 4.$$ **Marius Stănean, Marin Chirciu şi Octavian Stroe**

În [3], Titu Zvonaru a demonstrat următoarea rafinare: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{9abc}{a^3+b^3+c^3}\geq 6$.

În continuare vom prezenta o rafinare pentru ultima inegalitate de mai sus, adică vom demonstra

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{9abc}{a^3+b^3+c^3}\geq 6+\frac{3(\alpha-9)^2}{(\alpha-6)(2\alpha-9)},$$ unde $\alpha=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$.

În [2] este demonstrată inegalitatea: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\geq 12$.

Dacă folosim din nou relaţiile demonstrate în [1], adică

$\sum a^2=\frac{S^3-2P\alpha}{S}$, $\sum a^3=S^3-3P\alpha+3P$ şi $\sum ab=\frac{\alpha P}{S}$, atunci, avem:

$$E=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{9abc}{a^3+b^3+c^3}\geq 12-\frac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9abc}{a^3+b^3+c^3}=$$

$$=12-\frac{9P\alpha}{S^3-2P\alpha}+\frac{9P}{S^3-3\alpha P+3P}=12-\frac{9\alpha}{t-2\alpha}+\frac{9}{t-3\alpha+3}=6+9-\frac{9\alpha}{t-2\alpha}+\frac{9}{t-3\alpha+3}-3=$$

$$=6+\frac{9(t-3\alpha)}{t-2\alpha}-\frac{3(t-3\alpha)}{t-3\alpha+3}=6+3(t-3\alpha)\left(\frac{3}{t-2\alpha}-\frac{1}{t-3\alpha+3}\right)=$$

$$=6+\underbrace{\frac{3(t-3\alpha)}{t-3\alpha+3}}_{u(t)}\cdot\underbrace{\left(\frac{3(t-3\alpha+3)}{t-2\alpha}-1\right)}_{v(t)}=f(t),$$ unde $f,u,v:[4\alpha-9,\infty)\to R$.

Avem $3t-9\alpha+9\geq t-2\alpha\Leftrightarrow t\geq\frac{7\alpha-9}{2}$, adevărată deoarece $\alpha\geq 9$, $t\geq 4\alpha-9\geq\frac{7\alpha-9}{2}$.

Deci $u(t)=1-\frac{1}{t-3\alpha+3}$ este crescătoare şi pozitivă, $v(t)=3\left(1-\frac{\alpha-3}{t-2\alpha}\right)-1$ este crescătoare şi pozitivă. Atunci, f este crescătoare şi pozitivă, adică $f(t)\geq f(4\alpha-9)=6+\frac{3(\alpha-9)^2}{(\alpha-6)(2\alpha-9)}$,

Q.E.D.

Bibliografie
1. M. Drăgan – *A Method to Solve and Refine some Algebraic Inequalities*, Recreații Matematice, Anul XXIII, Nr.1, Ianuarie – Iunie, 2021, pag. 14-17.
2. Pham Kim Hung – *Secrets in Inequalities*, vol. I, GIL Publishing House, 2007, pag. 193.
3. T. Zvonaru – *În legătură cu o inegalitate din RMT NR. 1/2020*, RMT NR. 2/2020, pag. 10–11.

Asupra unor probleme de tip Lalescu

de D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

În cele ce urmează vom rezolva câteva probleme cu limite de tip Lalescu.

Problema 1. Fie $(L_n)_{n\geq 1}$ şirul lui Traian Lalescu, $L_n = ((n+1)!)^{\frac{1}{n+1}} - (n!)^{\frac{1}{n}}, \forall n \in N^*$ şi $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $k \in N^*$. Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{x_{n+1}}\sqrt[n+1]{L_{n+1}} - e^{x_n}\sqrt[n]{L_n}\right)$.

Soluție. Fie $B_n = e^{x_{n+1}}\sqrt[n+1]{L_{n+1}} - e^{x_n}\sqrt[n]{L_n} = e^{x_n}\sqrt[n]{L_n}\left(\dfrac{e^{x_{n+1}}\sqrt[n+1]{L_{n+1}}}{e^{x_n}\sqrt[n]{L_n}} - 1\right) = e^{x_n}\sqrt[n]{L_n}(u_n - 1) =$

$= \dfrac{e^{x_n}}{n}\cdot\sqrt[n]{L_n}\cdot n(u_n - 1) = e^{x_n - \ln n}\cdot\sqrt[n]{L_n}\cdot n(u_n-1)$, (1), $u_n = \dfrac{e^{x_{n+1}}\sqrt[n+1]{L_{n+1}}}{e^{x_n}\sqrt[n]{L_n}}, \forall n \in N^*$.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} e^{x_{n+1}-x_n}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{L_{n+1}}}{\sqrt[n]{L_n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n+1}}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{L_{n+1}}}{\sqrt[n]{L_n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{L_{n+1}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{L_n}}, \ (2).$$

Deoarece se ştie că $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{e}$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{L_n} = 1$ şi atunci din (2) deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$ şi deci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n - 1}{\ln u_n} = 1;\ \lim_{n\to\infty} u_n^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{x_{n+1}}}{e^{x_n}}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{L_{n+1}}}\right) = \lim_{n\to\infty} e^{(x_{n+1}-x_n)n}\cdot 1\cdot 1 = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n}{n+1}} = e$$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - \ln n) = \gamma =$ constanta *Euler-Mascheroni*. Din (1) şi cele de mai sus obținem că:

$$\lim_{n\to\infty} B_n = e^{\gamma}\cdot 1\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_n - 1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n\right) = e^{\gamma}\cdot\ln\left(\lim_{n\to\infty} u_n^n\right) = e^{\gamma}\ln e = e^{\gamma}.$$

Problema 2. Fie $(F_n)_{n\geq 0}, F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \in N$ - şirul lui Fibonaci.
Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!F_{n+1}} - \sqrt[n]{n!F_n}\right)$.

Soluție. $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$, $\forall n \in N^* \Leftrightarrow \dfrac{F_{n+2}}{F_n} - \dfrac{F_{n+1}}{F_n} - 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{F_{n+2}}{F_{n+1}}\cdot\dfrac{F_{n+1}}{F_n} - \dfrac{F_{n+1}}{F_n} - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{F_{n+2}}{F_{n+1}}\cdot\dfrac{F_{n+1}}{F_n} - \dfrac{F_{n+1}}{F_n} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$, unde $x = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$, $x = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Deoarece $\dfrac{F_{n+1}}{F_n} > 0$, rezultă $x = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = \alpha$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!F_n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!F_n}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!F_{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!F_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{\alpha}{e}.$$

$$\sqrt[n+1]{(n+1)!F_{n+1}}-\sqrt[n]{n!F_n}=\sqrt[n]{n!F_n}(u_n-1)=\sqrt[n]{n!F_n}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n=$$

$$=\frac{\sqrt[n]{n!F_n}}{n}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n,\ \forall n\geq 2,\text{ unde } u_n=\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!F_{n+1}}}{\sqrt[n]{n!F_n}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!F_{n+1}}}{n+1}\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{n!F_n}}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\frac{\alpha}{e}\cdot\frac{e}{\alpha}\cdot 1=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n^n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!F_{n+1}}{n!F_n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!F_{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}\cdot\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!F_{n+1}}}=\alpha\cdot\frac{e}{\alpha}=e.$$

Obținem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!F_{n+1}}-\sqrt[n]{n!F_n}\right)=\frac{\alpha}{e}\cdot 1\cdot\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}u_n^n\right)=\frac{\alpha}{e}\cdot\ln e=\frac{\alpha}{e}\cdot 1=\frac{\alpha}{e}$.

Problema 3. Fie $(L_n)_{n\geq 0}, L_0=2, L_1=1, L_{n+2}=L_{n+1}+L_n, \forall n\in N$ - şirul lui Lucas

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!L_{n+1}}-\sqrt[n]{n!L_n}\right)$.

Soluție. $L_{n+2}-L_{n+1}-L_n=0,\ \forall n\in N^*\Leftrightarrow\frac{L_{n+2}}{L_n}-\frac{L_{n+1}}{L_n}-1=0\Leftrightarrow\frac{L_{n+2}}{L_{n+1}}\cdot\frac{L_{n+1}}{L_n}-\frac{L_{n+1}}{L_n}-1=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+2}}{L_{n+1}}\cdot\frac{L_{n+1}}{L_n}-\frac{L_{n+1}}{L_n}-1\right)=0\Leftrightarrow x^2-x-1=0,\ x=\lim_{n\to\infty}\frac{L_{n+1}}{L_n},\text{ so } x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

$$\frac{L_{n+1}}{L_n}>0,\ x=\lim_{n\to\infty}\frac{L_{n+1}}{L_n}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\alpha.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!L_n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!L_n}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!L_{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!L_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{L_{n+1}}{L_n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{\alpha}{e}.$$

$$\sqrt[n+1]{(n+1)!L_{n+1}}-\sqrt[n]{n!L_n}=\sqrt[n]{n!L_n}(u_n-1)=\sqrt[n]{n!L_n}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n=$$

$$=\frac{\sqrt[n]{n!L_n}}{n}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n,\ \forall n\geq 2,\text{ unde } u_n=\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!L_{n+1}}}{\sqrt[n]{n!L_n}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!L_{n+1}}}{n+1}\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{n!L_n}}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\frac{\alpha}{e}\cdot\frac{e}{\alpha}\cdot 1=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n}=1,\text{ şi}$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n^n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!L_{n+1}}{n!L_n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!L_{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{L_{n+1}}{L_n}\cdot\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!L_{n+1}}}=\alpha\cdot\frac{e}{\alpha}=e.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!L_{n+1}}-\sqrt[n]{n!L_n}\right)=\frac{\alpha}{e}\cdot 1\cdot\ln\left(\lim_{n\to\infty}u_n^n\right)=\frac{\alpha}{e}\cdot\ln e=\frac{\alpha}{e}\cdot 1=\frac{\alpha}{e}.$$

Problema 4. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(2n+1)!!F_{n+1}}-\sqrt[n]{(2n-1)!!F_n}\right)$.

Soluție. Procedăm ca mai sus.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!F_n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n-1)!!F_n}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!F_{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{(2n-1)!!F_n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}\cdot\frac{F_{n+1}}{F_n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=2\cdot\alpha\cdot\frac{1}{e}=\frac{2\alpha}{e}.$$

$$\sqrt[n+1]{(2n+1)!!F_{n+1}}-\sqrt[n]{(2n-1)!!F_n}=\sqrt[n]{(2n-1)!!F_n}\,(u_n-1)=$$

$$=\sqrt[n]{(2n-1)!!F_n}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n=\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!F_n}}{n}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n,\forall n\ge 2,\ u_n=\frac{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!F_{n+1}}}{\sqrt[n]{(2n-1)!!F_n}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!F_{n+1}}}{n+1}\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!F_n}}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\frac{2\alpha}{e}\cdot\frac{e}{2\alpha}\cdot 1=1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n^n=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!F_{n+1}}{(2n-1)!!F_n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!F_{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}\cdot\frac{F_{n+1}}{F_n}\cdot\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!F_{n+1}}}=$$

$$=2\cdot\alpha\cdot\frac{e}{2\alpha}=e.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(2n+1)!!F_{n+1}}-\sqrt[n]{(2n-1)!!F_n}\right)=\frac{2\alpha}{e}\cdot 1\cdot\ln\left(\lim_{n\to\infty}u_n^n\right)=\frac{2\alpha}{e}\cdot\ln e=\frac{2\alpha}{e}\cdot 1=\frac{2\alpha}{e}.$$

Bibliografie
[1] Colecția revistei The Fibonacci Quarterly, 2014 – 2015.

O altă soluție pentru problema 27650 din G.M.-B nr. 2/2019

de Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Problema 27650, propusă de *Marius Stănean* are următorul enunț:
Fie AD, BE şi CF bisectoarele triunghiului ABC de laturi a,b şi c. Să se demonstreze că:

$$DE^2+EF^2+FD^2\le\frac{2abc(a+b+c)^2}{3(a+b)(b+c)(c+a)},\ (1).$$

În [1] este demonstrate inegalitatea:

$$DE^2+EF^2+FD^2\le\frac{2abc(ab+bc+ca)}{3(a+b)(b+c)(c+a)},\ (2).$$

În acest articol ne propunem să dăm o altă demonstrație pentru inegalitatea (2).
Pentru asta vom demonstra mai întâi egalitatea:

$$DE^2+EF^2+FD^2\le\frac{2abc(ab+bc+ca)}{3(a+b)(b+c)(c+a)}-$$

$$-\frac{abc(a+b+c)}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}\left((a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\right),\ (3).$$

Din teorema bisectoarei obținem: $AE=\dfrac{bc}{a+c}$, $AF=\dfrac{bc}{a+b}$. Din teorema cosinusului în ΔAEF

$$EF^2=AE^2+AF^2-2AE\cdot AF\cdot\cos A=\frac{b^2c^2}{(a+b)^2}+\frac{b^2c^2}{(a+c)^2}-\frac{2b^2c^2}{(a+b)(a+c)}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=$$

$$=\frac{b^2c^2}{(a+b)^2}+\frac{b^3c}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2c^2}{(a+c)^2}-\frac{bc^3}{(a+b)(a+c)}+\frac{a^2bc}{(a+b)(a+c)}=$$

$$=\frac{b^2c}{a+b}\left(\frac{c}{a+b}-\frac{b}{a+c}\right)+\frac{bc^2}{a+c}\left(\frac{b}{a+c}-\frac{c}{a+b}\right)+\frac{a^2bc}{(a+b)(a+c)}=$$

$$=\frac{b^2c}{a+b}\cdot\frac{(c-b)(a+b+c)}{(a+b)(a+c)}+\frac{a^2bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{bc^2}{a+c}\cdot\frac{(b-c)(a+b+c)}{(a+b)(a+c)}=$$

$$=\frac{a^2bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{bc(a+b+c)(b-c)}{(a+b)(a+c)}\left(\frac{c}{a+c}-\frac{b}{a+b}\right)=$$

$$=\frac{a^2bc}{(a+b)(a+c)}-\frac{abc(a+b+c)(b-c)^2}{(a+b)^2(a+c)^2}=\frac{a^2bc}{(a+b)(a+c)}-\frac{abc(a+b+c)(b^2-c^2)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2}$$. Deci,

$$EF^2=\frac{a^2bc}{(a+b)(a+c)}-\frac{abc(a+b+c)(b^2-c^2)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2}$$, (4), şi analog obținem egalitățile:

$$DF^2=\frac{ab^2c}{(a+b)(b+c)}-\frac{abc(a+b+c)(a^2-c^2)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2}$$, (5), respectiv

$$DE^2=\frac{abc^2}{(a+c)(b+c)}-\frac{abc(a+b+c)(a^2-b^2)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2}$$, (6).

Prin adunarea egalităților (4), (5) şi (6) obținem egalitatea (3). Din egalitatea (3) deducem inegalitatea (2). Din inegalitatea (2) şi binecunoscuta inegalitate $ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}$ obținem inegalitatea (1), Q.E.D.

Bibliografie

1. Marin Chirciu, *În legătură cu problema* 27650, G.M.-B nr. 6-7-8/2019.

Asupra unei inegalități din RMM

de Marian Dincă, Bucureşti

În Romanian Mathematical Magazine, ianuarie 2022, profesorul ***Marius Drăgan***, din Bucureşti în colaborare cu profesorul ***Neculai Stanciu***, din Buzău au propus următoarea problemă:

Demonstrați că în orice triunghi ABC, de arie S şi notațiile uzuale este adevărată inegalitatea $\frac{ab+bc+ca}{4\sqrt{3}S}\ge\sqrt{\frac{m_a}{s_a}}$**.**

Nota de față prezintă *o soluție*, *un comentariu* şi *o remarcă* la inegalitatea de mai sus.

Soluție. Folosind inegalitatea lui *Băndilă*, i.e. $\frac{R}{r}\ge\frac{b^2+c^2}{bc}$ e suficient să demonstrăm

$$\frac{(ab+bc+ca)^2}{48S^2}\ge\frac{R}{2r}=\frac{abc}{4S\cdot\frac{2S}{\frac{a+b+c}{2}}}\Leftrightarrow(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c),$$

adevărată deoarece avem $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)$, unde $x=ab, y=bc, z=ca$.

Comentariu. Deoarece $\frac{m_a}{s_a}=\frac{b^2+c^2}{2bc}$, inegalitatea din enunț poate fi scrisă astfel

$$\frac{ab+bc+ca}{4\sqrt{3}S}\ge\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2bc}}.$$

Remarcă. Inegalitatea problemei este de fapt - o întărire a inegalității lui *Gordon*, i.e.

$$ab+bc+ca\ge 4\sqrt{3}S.$$

Trigonometrical reflections about triangle inequality

by Daniel Văcaru, Piteşti

Let ΔABC, with $a \overset{not}{=} BC$, $b \overset{not}{=} CA$, $c \overset{not}{=} AB$. Then we know $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ another form for Cosinus Theorem.

We want to prove $a+b \geq c,\ b+c \geq a,\ c+a \geq b$ (1).

We work with $a \leq b+c$. Assume contrary, and use $a\rangle\ b+c \Rightarrow a^2\rangle\ (b+c)^2$. We obtain

$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\ \langle\ \dfrac{b^2+c^2-(b+c)^2}{2bc} \langle\ -1$, contradiction with the values domain for $\cos x \in [-1;1]$, for all $x \in \mathbb{R}$. Another way to show the relationships (1) is to use

$$\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1 \Leftrightarrow \cos^2\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2} = \frac{1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc} \qquad (2)$$

But $\cos^2\dfrac{A}{2} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc} \geq 0 \Rightarrow b+c \geq a$. For the sake of completeness, we write Pappus form for area of ΔABC. We know that $S_{ABC} = \dfrac{bc\sin A}{2} = bc\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$ (3)

Using $p \overset{not}{=} \dfrac{a+b+c}{2}$, from (2) we obtain $\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}$, (4)

We have

$$\cos A = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} \Rightarrow \sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2} = \frac{1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2} = \frac{a^2-(b+c)^2}{4bc} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc} \Rightarrow$$

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}. \qquad (5)$$

Using relationships (4) and (5) in (3), we obtain $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Noțiuni fundamentale ale matematicii (II)

de **Daniel Văcaru** , Piteşti

OMUL a observat că TIMPUL trece . Şi a observat succesiunea zi - noapte. Ştiați că există limbi în care există doar „**unu**” şi „**doi**”, şi apoi „**mai multe**”?

Mă gândesc că mi-aş putea plăti datoria din numărul trecut, căci dator fiind, puteam să-l obțin pe **0**, dar am fost neatent. Păi, Gopo al meu putea să scape de datorie dacă era mai isteț mai demult. Nu am băgat de seamă că 1 (omuleț) - 1 (mintea sa!) = 0. Şi suntem ca la început. Poate ne mai vine vreo inspirație şi atunci din 0 o să inventez şi **numerele negative**. Căci e **MATEMATICĂ**. Ne folosim de ce am primit de sus, mintea, şi nu-i cu păcat! nu uitați că eram dator cu minte (sau cuminte?) şi am ajuns la 0. Atunci $0-1=-1 \in \mathbb{Z}$. Şi am ajuns în clasa a V-a, a VI-a.

Ia să vedem: avem 2,3 **numere prime**. Cum verificăm dacă e număr prim? Îl scriem sub formă de produs. Pentru 2 este uşor. El este primul **număr par** nenul. La fel cu 3, este primul număr natural impar diferit de 1. El se scrie 3=3 × 1=1 × 3. Putem defini în acest moment

Definiție. Un număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ se numeşte **prim** dacă nu are decât divizori improprii. Prin divizor impropriu se înțelege 1 sau el însuşi.

Îl găsim pe $4 = 2 \times 2$. Acesta este un **<u>pătrat perfect</u>**. Urmează 5=4+1=1+4 , care este şi el un număr prim. Îl avem apoi pe 6=2 × 3 . Am găsit primul exemplu de **<u>descompunere în factori primi distincți</u>**.
Tot aşa, să vedem ce mai putem face cu 2. Îl putem împărți la 2 şi găsim câtul 1 şi restul 0. Apoi avem $3 = 1 \times 2 + 1$, $4 = 2 \times 2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0$. Se obține, după câteva împărțiri, **<u>algoritmul de transformare a unui număr natural din baza 10 în baza 2</u>.** Dar despre asta, mai încolo, nu am ajuns încă la 10.
Cum $4 = 2 \times 2 = 2^2$, putem scrie asta echivalent sub forma $2 = \sqrt{4}$, căci a **<u>extrage radicalul de ordin 2</u>** dintr-un număr a înseamnă a rezolva ecuația $x^2 = a$.
Vorbim acum despre <u>extragerea rădăcinii pătrate</u>. Pe vremea când a învățat povestitorul, clasa a VI-a elementară (de gimnaziu) .
Revin la 5. Avem 5=4+1=2 × 2+1. Să ne aducem aminte că 3=2 × 1+1 . În clasa a V-a, am învățat că asta este operația de împărțire cu rest. Am împărțit la 2, am obținut **câturile** 1 şi 2 şi **restul** 1. Şi avem ALGORITMUL ÎMPĂRȚIRII CU REST. Fie A un număr natural şi B un alt număr natural. Dacă A ≥ B, atunci căutăm cea mai mare valoare a unui număr Q care să verifice A-Q × B ≥ B. Încep cu Q=0, apoi adun Q:=Q+1, şi calculez A-QB , atâta timp cât rezultatul este în N . Când nu mai pot continua, scriu
$R = A - Q \cdot B \in \{\overline{0, B-1}\}$
În acest mod am obținut şi **Teorema împărțirii cu rest**, care se enunță astfel:

Dacă A şi B sunt numere naturale, există şi sunt unici Q şi R numere naturale care verifică relațiile:
1) $A = B \times Q + R$
2) $0 \leq R < B$.

Urmează 6, ca succesor al lui 5, cu inegalitățile $1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq 5 \leq 6$
Nu am spus ce înseamnă $a \leq b$ în $\mathbb{N}$. Înseamnă că există $k \in \mathbb{N}$, adică inclusiv 0, pentru care $b = a + k$. Cum nu avem egalitate între ele, scriem mai hotărât
$1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6$.
Am introdus <u>relația</u> <u>de ordine nestrictă</u> şi <u>relația de ordine strictă.</u>
Să observăm că $6 = 5 + 1 = 1 + 5 = 1 \times 6 = 2 \times 3 = 3 \times 2 = 6 \times 1$ este şi primul produs al lui 2 cu un alt număr prim. Este şi succesorul lui 5. Sau altfel, 5 este au altfel, 5 este **<u>predecesorul</u>** lui 6.
6 este şi eroul unei mici „poveşti – exercițiu”, anume
<u>Exercițiu.</u> Determinați numérele *a* şi *b* astfel încât 6 se poate scrie sub forma
$6 = (2a + 1)(3b + 1)$, cu ambele paranteze numere naturale.
Avem $6 = 1 \times 6 = 2 \times 3 = 3 \times 2 = 6 \times 1$ posibilele scrieri ale lui 6 ca produs de numere naturale. Obținem sistemele:
$2a + 1 = 1(1), 2a + 1 = 2(2), 2a + 1 = 3(3), 2a + 1 = 6(4)$
$3b + 1$=6(5),3b+1=3(6),3b+1=2(7),3b+1=1(8)
Rezolvând rând pe rând ecuațiile, observăm că mulțimea numerelor naturale nu mai poate adăposti toate soluțiile, şi atunci „inventăm”, cum au inventat babiloneenii, fracțiile. Anume fracția $\frac{1}{2}$ pentru ecuațiile (1) – (4) şi fracția $\frac{1}{3}$ pentru ecuațiile (5) – (8). Referința este lucrarea [1].
Avem, pe rând $2a + 1 = 1 \Rightarrow 2a = 1 - 1 \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{0}{2} \Rightarrow a = 0(1')$. Apoi $2a + 1 = 2 \Rightarrow 2a = 2 - 1 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}(2')$.
Găsim, pe urmă $2a + 1 = 3 \Rightarrow 2a = 3 - 1 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{2} \Rightarrow a = 1(3')$.
În fine, avem $2a + 1 = 6 \Rightarrow 2a = 6 - 1 \Rightarrow 2a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{2}(4')$
Să trecem la ecuațiile (5) – (8). Avem $3b + 1 = 6 \Rightarrow 3b = 6 - 1 \Rightarrow 3b = 5 \Rightarrow b = \frac{5}{3}(5')$.
Apoi $3b + 1 = 3 \Rightarrow 3b = 3 - 1 \Rightarrow 3b = 2 \Rightarrow b = \frac{2}{3}(6')$, găsind şi $3b + 1 = 2 \Rightarrow 3b = 2 - 1 \Rightarrow 3b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{3}(7')$, urmat, în fine, de

$3b+1=1 \Rightarrow b=\frac{0}{3} \Rightarrow b=0$, ($8^{l}$). Atunci mulțimea soluțiilor exercițiului este

$S=\left\{\left(0;\frac{5}{3}\right),\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right),\left(1;\frac{1}{3}\right),\left(\frac{5}{2};0\right)\right\} \subseteq \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.

Aşadar, am introdus numerele raționale pozitive. Nu povestesc aici despre **operațiile cu numere raționale.** Mi se pare, însă, esențial, să vă spun cum se ordonează numerele raționale.

Mai întâi, $S=\left\{\frac{a}{b}, a,b\in\mathbb{Z}, b\neq 0\right\}$. Spunem că rapoartele $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ sunt **echivalente**, sau **reprezintă acelaşi număr rațional**, dacă şi numai dacă $ad = bc$.

Pentru ordonare, se ține cont de operația de aducere la acelaşi numitor (sau, dacă este nevoie, la acelaşi numărător. Pentru a ordona fracțiile $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$, transformăm prin amplificare şi obținem $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$ şi $\frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}$. Acum este o simplă problemă de ordonare a numerelor întregi ad şi bc.

Exercițiu. Reamintiți – vă modul în care se făcea ordonarea numerelor întregi.

Urmează 7, care este număr prim. Aici, după ideea de mai devreme, aveți de rezolvat următorul

Exercițiu. Aflați pe $x, y \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $(2x-1)(2y-1)=7$.

Succesorul lui 7 este 8. Aici scriem clar $8=2^3$ şi observăm că ecuația $x^3=8$ are soluția unică $x=2$, căci funcția $x\to x^3$ este **strict crescătoare**. M – am grăbit, este o noțiune de clasa a IX – a, dar care poate apărea şi mai devreme, cum se vedem dacă ştiu ce înseamnă inegalitate. Şi acum ştim cu toții.

Soluția (unică. **De ce?**) ecuației de mai sus se notează $\sqrt[3]{8}=2$

Şi se numeşte **rădăcina cubică** (sau de ordin 3) din 8. Aceasta este o noțiune pe care povestitorul a învățat – o în clasa a IX – a şi o predă în clasa a X – a. ***O tempora, o mores***... – spunea Cicero.

Succesorul lui 8 este 9, care este pătrat perfect, iar soluțiile ecuației $x^2=a. a\geq 0$ sunt date de (**utilizând formule de calcul prescurtat**)

$$x^2-a=0 \Leftrightarrow x^2-\left(\sqrt{a}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{a}\right)\left(x+\sqrt{a}\right)=0$$

Obținem soluțiile ”gemene” $x_1=-\sqrt{a},\ x_2=\sqrt{a}$. Când $a=0$, obținem soluția dublă $x_1=x_2=0$.

Să ne reamintim de numerele prime. Până acum le – am întâlnit pe 2, 3, 5, 7. Să observăm că 9 nu este număr prim. O observație bună este că 2 este singurul număr prim par, toate celelalte numere pare având pe 2 ca **divizor propriu**. Aşadar, toate numerele prime diferite de 2 sunt impare, dar nu şi orice număr impar este prim.

O întrebare de bun – simț apare. O fi oare mulțimea numerelor prime **finită?** Să încercăm să răspundem cu da. Să notăm cu $p_1<p_2<\cdots<p_{n-1}<p_n$ enumerarea numerelor prime. Să ne gândim la numărul $p_1\cdot p_2\cdot\dots\cdot p_{n-1}\cdot p_n+1$.

Este clar că acest număr nu se divide cu niciun $p_i, i\in\{\overline{1,n}\}$. Aşadar el este prim, contradicție. Acesta este primul exemplu de **raționament prin reducere la absurd** din ARITMETICĂ. Ideea i – a aparținut lui **Euclid,** care nu este doar "părintele geometriei".

Să scriem şi **TEOREMA FUNDAMENTALĂ A ARITMETICII**, anume

Orice număr natural se poate scrie în mod unic sub forma $n=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot\dots\cdot p_n^{a_n}$ **unde** $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$ **.**

Demonstrația este foarte simplă. Dacă numărul n este prim, s – a terminat. Dacă nu, el se scrie sub forma $a\cdot b$, şi aplic teorema pentru *a*, respectiv *b*.

O problemă deschisă a matematicii este dacă şirul (*p*, *p* + 2) este infinit, adică dacă există o infinitate de **numere prime gemene**, cum ar fi (3,5), (5,7), (11,13), (17,19), etc. La fel, o problemă deschisă este cea a **numerelor prime veri**, cele de forma (*p*, *p* + 4), unde avem exemplele (3,7), (7,11), (13,17), etc.

Frumos, nu? Şi încă nu am vorbit despre toate lucrurile. Acum trebuie să apară şi o

BIBLIOGRAFIE:

[1] Viorel Gh. Vodă – Surprize în matematica elementară, Ed. Albatros, 1981.

Inegalități cu mediane în triunghi

Marin Chirciu, Pitești

În jurnalul interactiv de matematică **Romanian Mathematical Magazine**, RMM Number 32, Spring Edition 2024, Founding Editor Daniel Sitaru, cunoscutul matematician George Apostolopoulos, Greece, este autorul problemei UP.479 .

Articolul prezintă soluția acesteia și propune o întărire a dublei inegalități cu mediane și razele cercurilor exînscrise în triunghi, care face obiectul problemei UP.479.
Este propusă în aceeași clasă de probleme o dublă inegalitate cu mediane și înălțimi în triunghi.
În final se stabilește o relație între cele două sume cu mediane, înălțimi și razele cercurilor exînscrise.

UP.479. In ΔABC, $72\frac{r^4}{R^3}\le\frac{m_a^2}{r_a}+\frac{m_b^2}{r_b}+\frac{m_c^2}{r_c}\le\frac{9}{16}\frac{R^4}{r^3}$.

George Apostolopoulos, Greece

Soluție:

Demonstrăm **Lema** In ΔABC, $\frac{m_a^2}{r_a}+\frac{m_b^2}{r_b}+\frac{m_c^2}{r_c}=\frac{p^2-4r^2-7Rr}{r}$.

<u>**Demonstrație**</u>

$$\sum\frac{m_a^2}{r_a}=\sum\frac{m_a^2}{\frac{S}{p-a}}=\frac{1}{S}\sum(p-a)m_a^2=\frac{1}{pr}\cdot p\left(p^2-4r^2-7Rr\right)=\frac{p^2-4r^2-7Rr}{r}.$$

Am folosit mai sus: $\sum(p-a)m_a^2=p\left(p^2-4r^2-7Rr\right)$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem: <u>Inegalitatea din dreapta</u>: $\sum\frac{m_a^2}{r_a}\le\frac{9}{16}\frac{R^4}{r^3}$.

$$\sum\frac{m_a^2}{r_a}=\frac{p^2-4r^2-7Rr}{r}\overset{Gerretsen}{\le}\frac{4R^2+4Rr+3r^2-4r^2-7Rr}{r}=\frac{4R^2-3Rr-r^2}{r}\overset{(1)}{\le}\frac{9}{16}\frac{R^4}{r^3},$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{4R^2-3Rr-r^2}{r}\le\frac{9}{16}\frac{R^4}{r^3}\Leftrightarrow 9R^4-64R^2r^2+48Rr^3+16r^4\ge 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (R-2r)\left(9R^3+18R^2r-28Rr^2-8r^3\right)\ge 0$, evident din inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

<u>Inegalitatea din stânga</u>: $\sum\frac{m_a^2}{r_a}\ge 72\frac{r^4}{R^3}$.

$$\sum\frac{m_a^2}{r_a}=\frac{p^2-4r^2-7Rr}{r}\overset{Gerretsen}{\ge}\frac{16Rr-5r^2-4r^2-7Rr}{r}=\frac{9Rr-9r^2}{r}=9r\overset{(2)}{\ge}72\frac{r^4}{R^3},$$

unde (2) $\Leftrightarrow 9r\ge 72\frac{r^4}{R^3}\Leftrightarrow R^3\ge 8r^3$, evident din inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă. Problema se poate întări.

In ΔABC, $9r\le\frac{m_a^2}{r_a}+\frac{m_b^2}{r_b}+\frac{m_c^2}{r_c}\le\frac{9}{8}\frac{R^3}{r^2}$. **Marin Chirciu**

Soluție Demonstrăm **Lema .** În ΔABC, $\frac{m_a^2}{r_a}+\frac{m_b^2}{r_b}+\frac{m_c^2}{r_c}=\frac{p^2-4r^2-7Rr}{r}$.

Demonstrație

$$\sum\frac{m_a^2}{r_a}=\sum\frac{m_a^2}{\frac{S}{p-a}}=\frac{1}{S}\sum(p-a)m_a^2=\frac{1}{pr}\cdot p\left(p^2-4r^2-7Rr\right)=\frac{p^2-4r^2-7Rr}{r}.$$

Am folosit mai sus: $\sum(p-a)m_a^2=p\left(p^2-4r^2-7Rr\right)$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

Inegalitatea din dreapta: $\sum\frac{m_a^2}{r_a}\le\frac{9}{8}\frac{R^3}{r^2}$.

$$\sum\frac{m_a^2}{r_a}=\frac{p^2-4r^2-7Rr}{r}\overset{Gerretsen}{\le}\frac{4R^2+4Rr+3r^2-4r^2-7Rr}{r}=\frac{4R^2-3Rr-r^2}{r}\overset{(1)}{\le}\frac{9}{8}\frac{R^3}{r^2},$$

unde (1) $\Leftrightarrow\frac{4R^2-3Rr-r^2}{r}\le\frac{9}{8}\frac{R^3}{r^2}\Leftrightarrow 9R^3-32R^2r+24Rr^2+8r^3\ge 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(R-2r)\left(9R^2-14Rr-4r^2\right)\ge 0$, evident din inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga: $\sum\frac{m_a^2}{r_a}\ge 9r$.

$$\sum\frac{m_a^2}{r_a}=\frac{p^2-4r^2-7Rr}{r}\overset{Gerretsen}{\ge}\frac{16Rr-5r^2-4r^2-7Rr}{r}=\frac{9Rr-9r^2}{r}=9r,$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

Inegalitatea dublă de mai sus întăreşte Problema UP.479 propusă de George Apostolopoulos în RMM, Number32, Spring Edition 2024.

Remarcă.

Se pot scrie inegalitățile

In ΔABC, $72\frac{r^4}{R^3}\le 9r\le\frac{m_a^2}{r_a}+\frac{m_b^2}{r_b}+\frac{m_c^2}{r_c}\le\frac{9}{8}\frac{R^3}{r^2}\le\frac{9}{16}\frac{R^4}{r^3}$.

Soluție

Vezi inegalitatea de mai sus $9r\le\frac{m_a^2}{r_a}+\frac{m_b^2}{r_b}+\frac{m_c^2}{r_c}\le\frac{9}{8}\frac{R^3}{r^2}$ şi inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă. În aceeaşi clasă de probleme.

Să înlocuim r_a cu h_a.

In ΔABC, $\frac{9R}{2}\le\frac{m_a^2}{h_a}+\frac{m_b^2}{h_b}+\frac{m_c^2}{h_c}\le\frac{9}{4}\frac{R^2}{r}$.

Marin Chirciu

Soluție

Demonstrăm **Lema:** In ΔABC, $\frac{m_a^2}{h_a}+\frac{m_b^2}{h_b}+\frac{m_c^2}{h_c}=\frac{p^2+5r^2+2Rr}{4r}$.

Demonstrație

$$\sum\frac{m_a^2}{r_a}=\sum\frac{m_a^2}{\frac{2S}{a}}=\frac{1}{2S}\sum am_a^2=\frac{1}{2pr}\cdot\frac{p}{2}\left(p^2+5r^2+2Rr\right)=\frac{p^2+5r^2+2Rr}{4r}.$$

Am folosit mai sus: $\sum am_a^2=\frac{p}{2}\left(p^2+5r^2+2Rr\right)$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.
Folosind **Lema** obținem:

Inegalitatea din dreapta: $\sum \frac{m_a^2}{h_a} \le \frac{9}{4}\frac{R^2}{r}$.

$$\sum \frac{m_a^2}{h_a} = \frac{p^2+5r^2+2Rr}{4r} \overset{Gerretsen}{\le} \frac{4R^2+4Rr+3r^2+5r^2+2Rr}{4r} = \frac{4R^2+6Rr+8r^2}{4r} \overset{(1)}{\le} \frac{9}{4}\frac{R^2}{r},$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{4R^2+6Rr+8r^2}{4r} \le \frac{9}{4}\frac{R^2}{r} \Leftrightarrow 5R^2-6Rr-8r^2 \ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (R-2r)(5R+4r) \ge 0$, evident din inegalitatea lui Euler $R \ge 2r$.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga: $\sum \frac{m_a^2}{h_a} \ge \frac{9R}{2}$.

$$\sum \frac{m_a^2}{h_a} = \frac{p^2+5r^2+2Rr}{4r} \overset{Gerretsen}{\ge} \frac{16Rr-5r^2+5r^2+2Rr}{4r} = \frac{18Rr}{4r} = \frac{9R}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

Între sumele $\frac{m_a^2}{h_a}+\frac{m_b^2}{h_b}+\frac{m_c^2}{h_c}$ şi $\frac{m_a^2}{r_a}+\frac{m_b^2}{r_b}+\frac{m_c^2}{r_c}$ există relația:

In ΔABC, $\frac{m_a^2}{h_a}+\frac{m_b^2}{h_b}+\frac{m_c^2}{h_c} \le \frac{m_a^2}{r_a}+\frac{m_b^2}{r_b}+\frac{m_c^2}{r_c}$. Marin Chirciu

Soluție

Folosind **Lemele** de mai sus avem sumele:

$\frac{m_a^2}{h_a}+\frac{m_b^2}{h_b}+\frac{m_c^2}{h_c} = \frac{p^2+5r^2+2Rr}{4r}$ şi $\frac{m_a^2}{r_a}+\frac{m_b^2}{r_b}+\frac{m_c^2}{r_c} = \frac{p^2-4r^2-7Rr}{r}$.

Inegalitatea $\frac{m_a^2}{h_a}+\frac{m_b^2}{h_b}+\frac{m_c^2}{h_c} \le \frac{m_a^2}{r_a}+\frac{m_b^2}{r_b}+\frac{m_c^2}{r_c}$ se scrie:

$\frac{p^2+5r^2+2Rr}{4r} \le \frac{p^2-4r^2-7Rr}{r} \Leftrightarrow p^2 \ge 10Rr+7r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \ge 16Rr-5r^2$.

Rămâne să arătăm că: $16Rr-5r^2 \ge 10Rr+7r^2 \Leftrightarrow R \ge 2r$,(Euler).

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Bibliografie:

1. O.Bottema, R.Z.Djordjevic, R.R.Janic, D.S.Mitrinovic, P.M.Vasic, Geometric Inequalities, Groningen 1969, The Netherlands.
2. George Apostolopoulos, Greece, UP.479, RMM Number 32, Spring Edition 2024.
3. Daniel Sitaru, RMM Number 32, Spring Edition 2024.
4. Marin Chirciu, Inegalități geometrice 2, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Piteşti, 2021.

Asupra unei clase de inegalități

de Gheorghe Ghiță, Buzău

Articolul se referă la generalizarea unor inegalități prezentate în articolul ''Asupra unei probleme date la ONM 2019'', din revista "**Sclipirea Minții**", nr.24/2019 de ***Marin Chirciu***, Piteşti, precum şi prezentarea altei inegalități din aceeaşi clasă.

I. Fie $a_1, a_2, ..., a_n \geq 1$ astfel încât $a_1 a_2 ... a_n = A^n > 1$. Dacă $n \in N^*$ şi $kA \geq m > 0$, atunci:

$$k(a_1 + a_2 + ... + a_n) - m\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \geq n\left(kA - \frac{m}{A}\right), (1),$$

Gheorghe Ghiță.

Soluție. Fie funcția $f : [1, \infty) \to R, f(x) = kx - \frac{m}{x} - \frac{kA^2 + m}{A} \ln \frac{x}{A}$;

$f'(x) = k + \frac{m}{x^2} - \frac{kA^2 + m}{Ax} = 0 \Rightarrow x_1 = A > 1, x_2 = \frac{m}{kA} \leq 1$ şi atunci $f'(x) < 0$ pentru $x \in [1, A)$ şi $f'(x) > 0$ pentru $x \in (A, \infty)$. Rezultă că funcția f admite minim în punctul $x_0 = A$, deci $f(x) \geq f(A) = kA - \frac{m}{A}$, atunci $kx - \frac{m}{x} \geq \frac{kA^2 + m}{A} \ln \frac{x}{A} + kA - \frac{m}{A}$, $\forall x \geq 1$, unde luăm $x = a_1, a_2, ..., a_n$, apoi sumând şi ținând cont de $a_1 a_2 ... a_n = A^n$, obținem concluzia. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = ... a_n = A$.

I.1. Dacă $a, b, c, d \geq 1$ astfel încât $abcd = 16$, atunci

$$a + b + c + d - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \geq 6,$$ ONM 2019, Clasa a 7-a,

Adrian Stan şi Neculai Stanciu, Buzău

Soluție. Se aplică inegalitatea (1) pentru $k = m = 1, A = 2, n = 4, kA = 2 \geq 1 = m$.

I.2. Dacă $a_1, a_2, ..., a_n \geq 1$, astfel încât $a_1 a_2 ... a_n = 2^n, n \geq 1$, atunci

$$a_1 + a_2 + ... + a_n - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} - ... - \frac{1}{a_n} \geq \frac{3n}{2},$$

Marin Chirciu, Piteşti.

Soluție. Aplicăm inegalitatea (1) pentru $k = m = 1, A = 2, kA = 2 \geq 1 = m$.

I.3. Dacă $a_1, a_2, ..., a_n \geq 1$, astfel încât $a_1 a_2 ... a_n = 2^n, n \geq 1$, atunci

$$a_1 + a_2 + ... + a_n - \frac{2}{a_1} - \frac{2}{a_2} - ... - \frac{2}{a_n} \geq n,$$

Marin Chirciu, Piteşti.

Soluție. Aplicăm inegalitatea (1) pentru $k = 1, m = 2, A = 2, kA = 2 \geq 2 = m$.

II. $$k(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) - m\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \geq n\left(kA^2 - \frac{m}{A}\right), (2),$$

***Gheorghe Ghiță**, Buzău*

Soluție. Fie funcția $f : [1, \infty) \to R, f(x) = kx^2 - \frac{m}{x} - \frac{2kA^3 + m}{A} \ln \frac{x}{A}$;

$f'(x)=2kx+\frac{m}{x^2}-\frac{2kA^3+m}{Ax}=0 \Rightarrow x_1=A>1, x_2<0, x_3=\frac{-kA^2+\sqrt{k^2A^4+2kmA}}{2kA}\le 1$ şi atunci $f'(x)<0$ pentru $x\in[1,A)$ şi $f'(x)>0$ pentru $x\in(A,\infty)$. Rezultă că funcția f admite minim în punctul $x_0=A$, deci $f(x)\ge f(A)=kA^2-\frac{m}{A}$; atunci $kx^2-\frac{m}{x}\ge\frac{2kA^3+m}{A}\ln\frac{x}{A}+kA^2-\frac{m}{A}$, $\forall x\ge 1$. Pentru $x=a_1,a_2,...,a_n$, sumând şi ținând seama că $a_1a_2...a_n=A^n$, obținem concluzia. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a_1=a_2=...a_n=A$.

II.1. Dacă $a,b,c\ge 1$, astfel încât $abc=8$, atunci $a^2+b^2+c^2-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\ge\frac{21}{2}$, ***Gheorghe Ghiță***.

Soluție. Aplicăm inegalitatea (2) pentru $k=m=1, A=2, kA=2\ge 1=m$.

II.2. Dacă $a_1,a_2,...,a_n\ge 1$, astfel încât $a_1a_2...a_n=3^n$, atunci

$$n(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)-(n+1)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)\ge\frac{n(26n-1)}{3},$$ ***Gheorghe Ghiță***.

Soluție. Aplicăm inegalitatea (2) pentru $k=n, m=n+1, A=3, kA=3n\ge n+1=m$.

II.3. Dacă $a_1,a_2,...,a_n\ge 1$, astfel încât $a_1a_2...a_n=(n+1)^n$, atunci

$$n(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)-(n+1)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)\ge n(n^3+2n^2+n-1),$$ ***Gheorghe Ghiță***.

Soluție. Aplicăm (2) pentru $k=n, m=n+1, A=n+1, kA=n^2=n\ge n+1=m$.

ŞTIAŢI CĂ .... ?

..... **în 1837** s-a descoperit tezaurul de la Pietroasele- Buzău, „Cloşca cu puii de aur”, fapt pentru care matematicianul **Petrache Poenaru** în calitatea sa de director al Eforiei Şcolilor- instituție care se ocupa cu organizarea învățământului în Țara Românească, a fost primul care s-a preocupat să colecteze informații ştiințifice despre acesta, fiind numit în prima comisie de anchetă asupra celor care au făcut descoperirea. Mai mult, a militat şi a reuşit să treacă acest tezaur de la celebrul colecționar şi om de cultură, Mihalache Ghika, la Muzeul de la Liceul “Sfântul Sava” Bucureşti, viitorul Muzeu Național de Istorie al României. La cererea lui Carol I al României, restaurarea tezaurului s-a făcut în 1895 la Berlin de către celebrul bijutier Paul Telge după schițele lui **Poenaru**.

..... **Dionisie Romano** (1806- 1873) a scris o carte de aritmetică pe care a tipărit-o în 1838 pe când era profesor la Şcoala Națională Primară din Buzău, unde fusese numit profesor în 1834.

Această carte reprezintă unul din cele mai vechi manuscrise de matematică care ni s-au păstrat şi este o primă încercare de a forma o terminologie matematică în limba română, ocupânduse de operațiile aritmetice, cu numere întregi, cu regula de trei simplă, cu dobânzi şi altele. El este şi autorul primei publicații biserviceşti tipărite în Tara Românească.

Din 1864 şi până la moartea sa în 1873 a fost şi episcop de Buzău iar întreaga sa bibliotecă care conținea peste 150 de manuscrise româneşti, slavone, greceşti si arabe şi peste 7000 de cărți în diferite limbi au intrat în patrimoniul Academiei Române, al cărei membru era.

de **Adrian Stan** şi **Gheorghe Ghiță**

„ Dacă ecuațiile sunt trenuri care traversează peisajul numerelor, atunci niciun tren nu oprește la pi.”
Richard Preston
(1954 , --)

3. Probleme rezolvate

▪ Clasa a V-a

G:1046. Pe o tablă sunt scrise 10 numere naturale consecutive. Este posibil ca suma cifrelor celui mai mic număr să fie 41 iar suma cifrelor celui mai mare număr să fie 14.

Lucian Tuțescu, Sanda Iulia, Craiova

Rezolvare:

Da! 59999, 60000, 60001, 60002, 60003, 60004, 60005, 60006, 60007, 60008. 5+9+9+9=41 şi 6+0+0+0+8=14.
Trebuie ca la cel mai mic număr să se ia cât mai multe cifre de 9 ca la următoarele numere să apară zerouri.

G:1047. Numerele naturale a, b, c nu sunt divizibile cu 3. Arătați că $a^{2020}+b^{2022}+c^{2024}$ este un număr divizibil cu 3.

elev **Rareş Tudoraşcu**, Craiova

Rezolvare:

Cum a nu e divizibil cu 3 rezultă $a=3k+1$ sau $a=3k+2$. Atunci, $a^2=M_3+1 \Rightarrow a^{2020}=M_3+1$, $b^2=M_3+1 \Rightarrow b^{2022}=M_3+1$, $c^2=M_3+1 \Rightarrow c^{2024}=M_3+1$. Atunci, $a^2+b^2+c^2=M_3+3=M_3$.

G:1048. Arătați că numărul $A=\left(\frac{1+2+3+...+2021}{1011}\right)^n+4$ este divizibil cu 5 pentru orice n număr natural.

Ion Stănescu, Buzău

Rezolvare:

$1+2+3+..+2021=\frac{2021\cdot 2022}{1011}=2021\cdot 1011 \Rightarrow A=\left(\frac{2021\cdot 1011}{1011}\right)^n+4=2021^n+4$ are ultima cifră 5 deoarece ultima cifră a lui 2021^n este 1, deci, A este divizibil cu 5.

G:1049. Dați exemple de numere naturale nenule x, y, z distincte două câte două astfel încât x+y+z să dividă pe $x^3+y^3+y^3$.

Eugenia Turcu, Craiova

Rezolvare:

$x=1, y=2, z=3 \Rightarrow 1+2+3=6, \quad 1^3+2^3+3^3=36$;
$x=3, y=4, z=5 \Rightarrow 3+4+5=12, \quad 3^3+4^3+5^3=6^3$.

G:1050. Să se rezolve în N*xN* ecuația px+qy = xy, unde p și q sunt numere prime date.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare:

Avem $y(x-q)=px-pq+pq \Leftrightarrow y(x-q)-p(x-q)=pq \Leftrightarrow (x-q)(y-p)=pq$ de unde se obțin situațiile:

1) $\begin{cases} x-q=1 \\ y-p=pq \end{cases}$, 2) $\begin{cases} x-q=p \\ y-p=q \end{cases}$, 3) $\begin{cases} x-q=q \\ y-p=p \end{cases}$, 4) $\begin{cases} x-q=pq \\ y-p=1 \end{cases}$,

cu soluțiile $(x;y)\in\{(q+1;p+pq),(p+q;p+q),(2q;2p),(pq+q;p+1)\}$.

$\boxed{\text{G:1051}}$. Numerele naturale x şi y verifică egalitatea $2x^3+3y^2=123456$. Să se arate că:
a) x este divizibil cu 6 şi y este divizibil cu 4;
b) numărul $10(x^2+y^2)+43004$ este divizibil cu 37037 unde x şi y verifică enunțul problemei.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

a) Cum $123456=3\cdot 2^6\cdot 643$ rezultă $x\vdots 3\Rightarrow x=3a$, $a\in\mathbb{N}$ şi $y\vdots 2\Rightarrow y=2b$, $b\in\mathbb{N}$ şi atunci, $2\cdot 27a^3+3\cdot 4b^2=3\cdot 2^6\cdot 643 |:6\Rightarrow 9a^3+2b^2=2^5\cdot 643$. De aici trebuie ca a să fie par adică $a=2k,\ k\in\mathbb{N}\Rightarrow 9\cdot 8k^3+2b^2=2^5\cdot 643 |:2\Rightarrow 36k^3+b^2=2^4\cdot 643$. De aici trebuie ca $b=2l,\ l\in\mathbb{N}$.
S-a găsit că $x=3a=6k$, deci x este divizibil cu 6 iar $y=2b=4l$ deci y este divizibil cu 4.

b) Pentru $x=6k$ şi $y=4l$, prin înlocuire în relația dată se obține $k=2$ şi $l=50$ adică $x=12,\ y=200$ Situațiile $k\in\{0;1;3;4;5;6\}$ implică $l^2=2572-9k^3$ care nu mai este pătrat perfect iar pentru $k\geq 7\Rightarrow l^2=2572-9k^3 \rangle\ 0$ ceea ce este fals.
Astfel, numărul $10(x^2+y^2)+43004=444444=12\cdot 37037$ este divizibil cu 37037.

$\boxed{\text{G:1052}}$. Să se arate că numărul $A=17^n-14^n-11^n-8^n-5^n,\ n\in\mathbb{N}$ este un număr întreg divizibil cu 3.

Simona Dascălu, Craiova

Rezolvare:

$A=17^n-14^n-11^n-8^n-5^n=(18-1)^n-(15-1)^n-(12-1)^n-(9-1)^n-(6-1)^n=$
$=M_3+(-1)^n-M_3-(-1)^n-M_3-(-1)^n-M_3-(-1)^n-M_3-(-1)^n=M_3-3\cdot(-1)^n=M_3$

$\boxed{\text{G:1053}}$. Determinați numărul $\overline{abc}$ cu cifre impare consecutive, nu neapărat în această ordine, astfel încât $a\cdot\overline{bc}\cdot\overline{cb}+c\cdot(b+1)=2021$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Rezolvare:

Cifrele impare consecutive pe care le putem alege sunt (1,3,5), (3,5,7), (5,7,9) şi permutările lor.
În cazul 3) am avea $5\cdot 79\cdot 97+9\cdot(7+1)\ \rangle\ 2021$.
În cazul 2) am avea cazul cu cel mai mic produs $7\cdot 35\cdot 53+5\cdot(3+1)\ \rangle\ 2021$, cu atât mai mult celelalte permutări nu convin.
Rămâne să verificăm toate situațiile de la 1): (1,3,5), (1,5,3), (3,1,5), (3,5,1), (5,1,3), (5,3,1).
Singurul triplet care verifică relația data în enunț este $\overline{abc}=513$.

▪ Clasa a VI-a

$\boxed{\text{G:1054}}$. Se consideră în plan un unghi $\sphericalangle XOY$ cu măsura cunoscută $4^0 45'$. Folosind rigla negradată şi compasul să se obțină unghiul de 1^0.

elevă **Carina Viespescu**, Craiova

Rezolvare:

$4\cdot 4^0 45' = 19^0$ și $19\cdot 19^0 = 361^0$. Cu vârful compasului în O, trasăm un arc de cerc cu o măsură egală cu a unghiului $\sphericalangle XOY$, apoi reluăm procedeul până când obținem un unghi de 19^0, trasăm în continuare arce de cer cu măsura de 19^0 până când obținem 19 arce cu o măsură de 361^0, adică măsura unui cerc și unghiul de 1^0.

G:1055. Aflați numerele întregi a și b din relația $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=-2$. **Ion Stănescu**, Buzău

Rezolvare:

$b+2a=-2ab \Rightarrow b(2a+1)=-2a \Rightarrow b=\frac{2a}{2a+1}=-\frac{2a+1-1}{2a+1}=-1+\frac{1}{2a+1} \Rightarrow 2a+1=\pm 1$ Convine doar $2a+1=-1 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow b=-2.$

G:1056. Să se arate că numerele $a=\frac{5^{807}}{31}$ și $b=\frac{5^{2021}+5^{2020}}{31}$, nu sunt naturale, dar suma lor este număr natural. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Cum 31 și 5 sunt prime între ele atunci $\frac{5^{807}}{31}\notin \mathbb{N}$. De asemenea,

$b=\frac{5^{2021}+5^{2020}}{31}=\frac{5^{2020}\cdot 6}{31}=\frac{30\cdot 5^{2019}}{31}\notin \mathbb{N}$.

Așadar, $a+b=\frac{5^{807}}{31}+\frac{5^{2021}+5^{2020}}{31}=\frac{5^{807}\left(1+5^{1213}+5^{1214}\right)}{31}=\frac{5^{807}\cdot M_{31}}{31}\in \mathbb{N}$ deoarece

$1+5\cdot 5^{3\cdot 404}+5^2\cdot 5^{3\cdot 404}=1+5(31\cdot 4+1)^{404}+25(31\cdot 4+1)^{404}=1+5(M_{31}+1)+25(M_{31}+1)=M_{31}+31=M_{31}$.

G:1057. Determinați numerele naturale x, y, z, u știind că x și y sunt direct proporționale cu numerele 6 și 7, numerele y și z sunt direct proporționale cu 21 și 8 iar z și u sunt direct proporționale cu 16 și 9 și că suma tuturor numerelor este de 1030. **Nicolae Ivășchescu**, Canada

Rezolvare:

Din datele problemei avem: $\frac{x}{6}=\frac{y}{7}\Big|\cdot\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x}{18}=\frac{y}{21}$, $\frac{y}{21}=\frac{z}{8}\cdot\Big|\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{y}{42}=\frac{z}{16}$, $\frac{z}{16}=\frac{u}{9}$. Deci

$\frac{x}{18}=\frac{y}{21}=\frac{z}{16}=\frac{u}{9}=\frac{x+y+z+u}{18+21+16+9}=\frac{1030}{103}=10$. Așadar, $x=360$, $y=420$, $z=160$, $u=90.$

G:1058. Fie x cel mai mic număr întreg de 38 de cifre cu suma cifrelor egală cu 182. Dacă $y=\underbrace{8000....0}_{17\ cifre\ de\ 0}$, să se arate că y-x este pătrat perfect. **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare:

Fie $x=-\underbrace{999....9}_{20\ cifre\ de\ 9}\,2\,\underbrace{000...0}_{17\ cifre\ de\ 0}$. Atunci, $-x=\underbrace{999....9}_{20\ cifre\ de\ 9}\,2\,\underbrace{000...0}_{17\ cifre\ de\ 0}$ are un număr impar de zerouri finale

și rezultă $y-x=8\underbrace{000...0}_{17\ cifre\ de\ 0}+\underbrace{999....9}_{20\ cifre\ de\ 9}\,2\,\underbrace{000...0}_{17\ cifre\ de\ 0}=10^{38}$ care este pătrat perfect.

G:1059. Fie x și y două numere naturale nenule astfel încât: $\frac{2010}{2011}<\frac{x}{y}<\frac{2011}{2012}$.

Calculați cea mai mică valoare a sumei $x+y$. **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Fie $y=x+d$ .Deci, $1-\frac{1}{2011}<1-\frac{d}{y}<1-\frac{1}{2012} \Leftrightarrow \frac{1}{2011}>\frac{d}{y}>\frac{1}{2012}$.

Dacă $d=1$, nu avem soluție. Dacă $d=2$, obținem $y=4023$şi $x=4021$. Atunci $x+y=8044$. Dacă $d>2$, atunci $x,y>6000 \Rightarrow x+y>12000$. Deducem că valoarea minimă a sumei $x+y$ este 8044.

Remarca 1. În general dacă $\frac{n}{n+1}<\frac{x}{y}<\frac{n+1}{n+2}$, cea mai mică sumă $x+y$ se realizează atunci când $x=2n+1, y=2n+3$.Deci, $x+y=4n+4$.

Remarca 2. Pentru orice două fracții ireductibile $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, fracția $\frac{a+c}{b+d}$ satisface relația $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$. Dacă, în plus avem $bc-ad=1$, atunci fracția $\frac{a+c}{b+d}$ este fracția din intervalul $\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right)$ cu cel mai mic numitor .

$\boxed{\text{G:1060}}$. **Aflați numerele naturale x, y, z ştiind că** $\frac{x}{q^2}=\frac{y}{pq^2}=\frac{p^2q}{z}$ **unde p şi q sunt numere prime diferite date.**

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Din relația dată se obține $y=px$ şi $xz=p^2q^3$. De aici x divide pe p^2q^3 şi ținând cont că p şi q sunt prime şi diferite şi că p^2q^3 are 12 divizori obținem cele 12 soluții ale problemei:

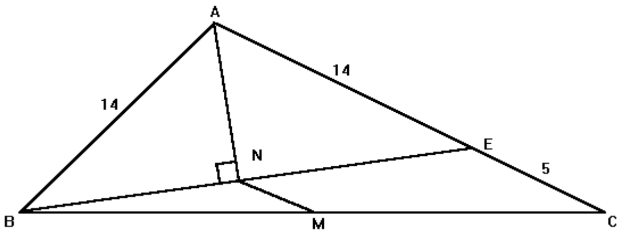
$(x;y;z)\in\left\{(1,p,p^2q^3),(q,pq,p^2q^2),(q^2,pq^2,p^2q),(q^3,pq^3,p^2),(p,p^2,pq^3),(pq,p^2q,pq^2)\right\}$

$(x;y;z)\in\left\{(pq^2,p^2q^2,pq),(pq^3,p^2q^3,p),(p^2,p^3,q^3),(p^2q,p^3q,q^2),(p^2q^2,p^3q^2,q),(p^2q^3,p^3q^3,1)\right\}$

$\boxed{\text{G:1061}}$. **În triunghiul ABC, M este mijlocul laturii BC, AN este bisectoarea unghiului BAC, BN este perpendiculară pe AN. Dacă** $AB=14$, $AC=19$ **să se afle MN.**

Flavia Anton, Vaslui

Rezolvare:



Prelungim BN şi notăm $BN\cap AC=\{E\}$. Se arată uşor că $\Delta BNA\equiv\Delta ENA$, deci N este mijlocul segmentului BE; avem $AB=AE=14$ şi $EC=5$. MN este deci linie mijlocie în triunghiul BEC $\rightarrow MN=\frac{EC}{2}=\frac{5}{2}$.

▪ Clasa a VII-a

$\boxed{\text{G:1062}}$. **Aflați numerele** $a,b\in\mathbb{Z}$ **astfel încât** $8b^2-3a^2-10ab+5=0$

Gabriela Florina Toader, Buzău

Rezolvare:

$8b^2-3a^2-10ab+5=0 \Leftrightarrow 9b^2-6ab+a^2-(4a^2+4ab+b^2)=-5 \Leftrightarrow (a-3b)^2-(2a+b)^2=-5 \Leftrightarrow$

$(a-3b-2a-b)(a-3b+2a+b)=-5 \Leftrightarrow (-a-4b)(3a-2b)=-5 \Rightarrow$

$\begin{cases}-a-4b=-1\\3a-2b=5\end{cases}$, $\begin{cases}-a-4b=1\\3a-2b=-5\end{cases}$, $\begin{cases}-a-4b=-5\\3a-2b=1\end{cases}$, $\begin{cases}-a-4b=5\\3a-2b=-1\end{cases}$,

dintre care doar ultimele două au soluții în mulțimea numerelor întregi: $(a,b)\in\{(-1,-1);(1,1)\}$.

$\boxed{\text{G:1063}}$. **Să se arate că există numere naturale x şi y pentru care numerele** x^2+2021 **şi** y^2+2021^2 **sunt simultan pătrate perfecte.** **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Un exemplu de astfel de numere sunt următoarele:

$2^2+2021=2025=25\cdot 81=(5\cdot 9)^2=45^2$, deci x =2;

Cum $2021^2=(2025-4)^2=(45^2-2^2)^2=(45^2)^2-2\cdot 45^2\cdot 2^2+(2^2)^2 \Rightarrow$

$y^2+2021^2=y^2-4\cdot 45^2\cdot 2^2+(45^2+2^2)^2 \Rightarrow\ y^2+2021^2=y^2-180^2+2029^2$. Pentru y=180 obținem

$y^2+2021^2=2029^2$.

$\boxed{\text{G:1064}}$. **Fie** $k\in\mathbb{R}$ **şi** $a,b\rangle 0$ **astfel încât** $a\cdot b=1$. **Arătați că** $k^2\cdot a\ge 2k-b$. **Când avem egalitate ?**

Maria Popescu, Rm. Vâlcea, **Alecu Orlando**, Roşiorii de Vede

Rezolvare:

Cum $b=\dfrac{1}{a}\Rightarrow k^2a-2k+\dfrac{1}{a}\ge 0 \overset{a\rangle 0}{\Leftrightarrow} k^2a^2-2ka+1\ge 0\Rightarrow (ka-1)^2\ge 0$. Egalitatea are loc pentru

$a=\dfrac{1}{k},\ k\rangle 0.$ Pentru $k\langle 0$ nu putem avea egalitate.

$\boxed{\text{G:1065}}$. **Există** $x,y\in\mathbb{N}^*$ **astfel încât** $\dfrac{x}{y+2}+\dfrac{y}{x+2}=\dfrac{1}{2}$? **Justificați.**

Adriana Ioniță, Aurel Chiriță, Slatina

Rezolvare: După aducerea la acelaşi numitor a relației din enunț obținem

$2x^2+2x+2y^2+2y-xy-4=0|\cdot 2\Rightarrow\quad x^2+(x-y)^2+2(x+1)^2+2(y+1)^2+y^2=12$

Pentru $x=0\Rightarrow 2y^2+2(y+1)^2=10\Rightarrow (y+1)^2\le 5\Rightarrow y\in\{0;1\}$ care nu convin;

Pentru $x=1\Rightarrow (y-1)^2+2(y+1)^2=3\Rightarrow 2(y+1)^2\le 3\Rightarrow y\in\{0;1\}$ care nu convin.

Dacă $x\ge 2\Rightarrow x^2+2(x+1)^2\ge 4+2\cdot 9\ge 12$ ceea ce nu convine.

Analog pentru y (prin simetrie). Aşadar, nu există $x,y\in\mathbb{N}^*$ care să verifice relația dată.

$\boxed{\text{G:1066}}$. **Aflați numerele naturale x, y, p, cu p număr prim dat, astfel încât** $x^2-p^{2y}=2021$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: $(x-p^y)(x+p^y)=2021=34\cdot 37,\ \forall x,y\ne 0$. Obținem:

1) $\begin{cases}x-p^y=1\\x+p^y=2021\end{cases}\Rightarrow p^y=1010$, fals. 2) $\begin{cases}x-p^y=43\\x+p^y=47\end{cases}\Rightarrow x=45, p^y=2\Rightarrow p=2, y=1$.

$\boxed{\text{G:1067}}$. **Se dau 7 numere naturale** $a_1, a_2,.........,a_7$ **care au următoarea proprietate: daca le aranjăm pe un cerc în ordinea dată fiecare din ele este media aritmetică a vecinilor lui. Arătați că suma lor este divizibilă cu 7.** **Flavia Anton**, Vaslui

Rezolvare: Avem $a_2=(a_1+a_3):2,\ a_4=(a_3+a_5):2$ Adunăm membru cu membru relațiile şi obținem: $a_2+a_4=(a_1+a_5):2+a_3\to 2a_2+2a_4=a_1+a_5+2a_3\to 2a_3=a_1+a_5$ unde am folosit că

$a_3 = (a_2 + a_4):2$. Analog avem $2a_6 = a_1 + a_4$, $2a_7 = a_2 + a_5$. Calculăm

$2(a_1 + ... + a_7) = 2(a_1 + a_2 + a_4 + a_5) + 2a_3 + 2(a_6 + a_7) = 8a_3 + 2a_3 + 2(a_4 + a_1 + a_5 + a_2) =$

$8a_3 + 2a_3 + 4a_3 = 14a_3 \to a_1 + ... + a_7 = 7a_3 \to (a_1 + ... + a_7) \vdots 7$

Se poate arăta că toate numerele sunt egale: Fie a1, a2, ..., a7 numerele; presupunem că a1 este cel mai mic. Atunci din $2a_1 = a_2 + a_7$ şi $a_1 = a_2$, $a_1 \le a_7$ deducem $a_1 = a_2 = a_7$. Din aproape în aproape, rezultă că toate numerele sunt egale.

G:1068. Să se determine soluțiile naturale ale ecuațiilor; a) $x^2 - 3xy = 3y - x + 2021$; **b)** $a^2 - 2a = b^2 + 2b + 2021$ **.**

Mariana Mitea, Cugir, Alba

Rezolvare: a) Avem: $x^2 - 3xy = 3y - x + 2021$, ce este echivalentă cu : $x^2 + x - 3xy - 3y = 2021$, de unde $x(x+1) - 3y(x+1) = 2021$, iar apoi $(x+1)(x-3y) = 2021$.

Dar 2021=43·47=47·43=1·2021=2021·1. iar atunci se obțin $(x, y) \in \{(46; 1), (2020; 673)\}$.

b) Avem: $a^2 - 2a = b^2 + 2b + 2021$, ceea ce este echivalent cu $a^2 - b^2 - 2(a+b) = 2021$, de unde $(a+b)(a-b-2) = 2021$ şi cum 2021=1·2021=43·47, iar $a + b > a - b - 2$, obținem:

i) $\begin{cases} a+b=2021 \\ a-b-2=1 \end{cases}$ cu soluția $\begin{cases} a=1012 \\ b=1009 \end{cases}$; ii) $\begin{cases} a+b=47 \\ a-b-2=43 \end{cases}$ cu soluția $\begin{cases} a=46 \\ b=1 \end{cases}$.

Observație.

Ecuația este echivalentă şi cu: $(a-1)^2 = (b+1)^2 + 2021$, de unde $(a+b)(a-b-2) = 2021$.

G:1069. Demonstrați că: $\sqrt{\frac{1}{2021}} + \sqrt{\frac{2}{2020}} + \sqrt{\frac{3}{2019}} + ... + \sqrt{\frac{2021}{1}} > 2021.$

Adrian Gobej, Curtea de Argeş şi **Marin Ionescu**, Piteşti

Rezolvare: Vom grupa suma de radicali astfel:

$$S = \left(\sqrt{\frac{1}{2021}} + \sqrt{\frac{2021}{1}}\right) + \left(\sqrt{\frac{2}{2020}} + \sqrt{\frac{2020}{2}}\right) + ... + \left(\sqrt{\frac{1010}{1012}} + \sqrt{\frac{1012}{1010}}\right) + \sqrt{\frac{1011}{1011}}$$ şi folosind

inegalitatea mediilor MA $\ge$ MG, obținem

$$S \ge 2\sqrt{\sqrt{\frac{1}{2021}} \cdot \sqrt{\frac{2021}{1}}} + 2\sqrt{\sqrt{\frac{2}{2020}} \cdot \sqrt{\frac{2020}{2}}} + ... +$$
$$+ 2\sqrt{\sqrt{\frac{1010}{1012}} \cdot \sqrt{\frac{1012}{1010}}} + 1 = \underbrace{2 + 2 + ... + 2}_{1010 \text{ termeni}} + 1 = 2021 \cdot$$

Şi această problemă admite o generalizare frumoasă $\sum_{i=2k+1}^{1} \sqrt{\frac{2k+2-i}{i}} > 2k+1, \ k \in \mathbb{N}^*$.

G:1070. Demonstrați că pentru $a \in [-1, \infty)$, **are loc inegalitatea:**

$$\frac{\sqrt{a+1}}{a+2} + \frac{\sqrt{a+2}}{a+3} + \frac{\sqrt{a+3}}{a+4} + ... + \frac{\sqrt{a+2020}}{a+2021} < 1010.$$

Adrian Gobej, Curtea de Argeş şi **Marin Ionescu**, Piteşti

Rezolvare:

Din MG $\le$ MA $\Rightarrow \sqrt{(\alpha+\beta) \cdot 1} \le \frac{\alpha+\beta+1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\alpha+\beta} \le \frac{\alpha+\beta+1}{2}$ (1) pentru orice $\alpha, \beta \ge 0$, egalitate pentru cazul $\alpha + \beta = 1$.

Relația (1) mai poate fi aşezată sub forma: $\frac{\sqrt{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta+1} \le \frac{1}{2}$.

Aşadar, $S=\frac{\sqrt{a+1}}{a+2}+\frac{\sqrt{a+2}}{a+3}+\frac{\sqrt{a+3}}{a+4}+...+\frac{\sqrt{a+2020}}{a+2021}\le\left(\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2}}_{\text{2020 de termen}}\right)==\frac{2020}{2}=1010,$

egalitatea putând avea loc doar dacă $a+1=1,\ a+2=1,\ ...,\ a+2020=1$ FALS, deci inegalitatea este strictă.

$\boxed{\text{G:1071}}$. Fie ABCD un romb şi O punctul de intersecție a diagonalelor sale şi I_1,I_2,I_3,I_4 centrele cercurilor înscrise în triunghiurile $\Delta AOB,\ \Delta BOC,\ \Delta COD$ respectiv ΔDOA. Arătați că $I_1I_2I_3I_4$ este pătrat. **Ileana Duma, Meda Iacob**, Craiova

Rezolvare:

$\Delta AOB\equiv\Delta BOC\equiv\Delta COD\equiv\Delta DOA$ şi atunci $OI_1=OI_2=OI_3=OI_4$. Cum $m(\sphericalangle(I_1OI_2))=m(\sphericalangle(I_2OI_3))=m(\sphericalangle(I_3OI_4))=m(\sphericalangle(I_4OI_1))=90^0\Rightarrow I_1,O,I_3$ şi I_2,O,I_4 coliniare, $I_1I_3\perp I_2I_4$ şi cum $OI_1=OI_2=OI_3=OI_4\Rightarrow I_1I_2I_3I_4$ este pătrat.

$\boxed{\text{G:1072}}$. Se dă unghiul xOy cu măsura de 150^0. Pe laturile unghiurilor $(Ox$ şi $(Oy$ se iau punctele A şi B astfel ca $[OA]\equiv[OB]$. Folosind un echer construiți triunghiul ΔABC. (cu un echer se pot trasa drepte şi unghiuri drepte). **Nicolae Ivăşchescu**, Canada

Rezolvare:

Construim mediatoarele segmentelor $[OA]$ *si* $[OB]$ adică $[MC$, $[NC$ unde C este punctul lor de intersecție. Deoarece $[MC$, $[NC$ sunt mediatoare şi cele trei mediatoare ale triunghiului AOB sunt concurente rezultă că $[OC$ este mediatoarea segmentului $[AB]$. $\Delta OCB\equiv\Delta OCA$ (*), isoscele. În ΔOAB isoscel cu $m(\sphericalangle AOB)=150^0\Rightarrow m(\sphericalangle OAB)=m(\sphericalangle OBA)=15^0$.

Dar $m(\sphericalangle COB)=75^0=m(\sphericalangle CBO)$. Atunci, în $\Delta OBC\Rightarrow m(\sphericalangle OCB)=180^0-2\cdot75^0=30^0$

$\Rightarrow m(\sphericalangle BCA)=2\cdot30^0=60^0$. (**)

Din (*) şi (**) rezultă ΔABC este echilateral.

Problema găsirii mijloacelor M şi N a segmentelor $[OA]$ *si* $[OB]$ se rezolvă construind cu ajutorul echerului pe un segment, de exemplu $[PQ]$ astfel: cu echerul construim $\lfloor Px$ *si* $\lfloor Qy$ perpendicularele pe PQ. Fie $R\in\lfloor Px$. Construim $RS\perp Qy$, rezultă că $PRSQ$ este dreptunghi cu diagonalele RQ, PS concurente în T. Construim cu echerul $TU\perp PQ$ unde U va fi mijlocul lui $[PQ]$.

$\boxed{\text{G:1073}}$. Se consideră în plan punctele A(2;4), B(a;b), C(6,8), D(c;d), M(1;2) astfel încât $[AM]$ să fie mediană în triunghiul ΔABC iar $[AD]$ să fie înălțime şi mediană în triunghiul ΔABM. Aflați coordonatele lui B şi aria triunghiului ABC. **Ion Stănescu**, Buzău

Rezolvare: BM=MC, $1=\frac{a+6}{2}\Rightarrow a=-4;\ 2=\frac{b+8}{2}\Rightarrow b=-4;$

$A_{ABC}=\frac{BC\cdot AD}{2}$. $BC=\sqrt{(6+4)^2+(8+4)^2}=2\sqrt{61}$. $BD=DM\Rightarrow c=\frac{-4+1}{2}=-\frac{3}{2}$, $d=\frac{-4+2}{2}=-1$.

$\Rightarrow AD=\sqrt{(-\frac{3}{2}-2)^2+(-1-4)^2}=\frac{\sqrt{149}}{2}$. Atunci, $A=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{61}\cdot\frac{\sqrt{149}}{2}=\frac{\sqrt{9089}}{2}$.

▪ Clasa a VIII-a

G:1074. Descompuneți în factori expresia $E(a;b)=a^2(b-2)+a(1-2b)+a^3+b$.

Ion Stănescu, Buzău

Rezolvare:

$$E(a;b)=a^3-2a^2+a+b(a^2-2a+1)=a(a^2-2a+1)+b(a^2-2a+1)=(a-1)^2(a+b)$$

G:1075. Arătați că există o infinitate de numere întregi m, n care verifică ecuația $m^2=n^3-3n+2$.

Flavia Anton, Vaslui

Rezolvare: $n^3-3n+2=(n-1)^2(n+2)$ deci dacă $n+2$ este pătrat perfect atunci n^3-3n+2 este pătrat perfect pentru care există m întreg astfel ca $m^2=n^3-3n+2$. Dar $n+2$ este pătrat perfect pentru o infinitate de valori întregi ale lui n.

G:1076. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ **ecuația:** $\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3+\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=2020$. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Utilizând formula de descompunere $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ pentru $a=x+\frac{\sqrt{3}}{3}$ și $b=x-\frac{\sqrt{3}}{3}$ obținem: $2x\left[\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-\left(x^2-\frac{1}{3}\right)+\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right]=2020|:2\Rightarrow x(x^2+1)=1010$. Aducând ecuația la forma $\left(x^3-1000\right)+(x-10)=0$ sau $(x-10)(x^2+10x+101)=0$ obținem din x-10=0 soluția reală x=10. Cealaltă ecuație de gradul doi nu are soluții reale deoarece discriminantul ecuației este negativ.

G:1077. Fie $x,y,z\in\mathbb{R}$. **Arătați că**
$(x^2+2)(y^2+2)+(y^2+2)(z^2+2)+(z^2+2)(x^2+2)\geq 9+6(xy+yz+zx)$. **În ce caz avem egalitate ?**

Călina Doina Cristina, Simona Radu, Craiova

Rezolvare:

Efectuând calculele obținem $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+4(x^2+y^2+z^2)+12\geq 9+6(xz+yz+zx)$ și mai mult $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-2(xz+yz+zx)+3\geq 0\Rightarrow$ $(xy-1)^2+(zy-1)^2+(zx-1)^2\geq 0$ cu egalitate pentru $xy=yz=zx=1$. Cum și $x=y=z$ rezultă egalitate pentru $x=y=z=1$ sau $x=y=z=-1$.

G:1078. Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax+b,\quad g\left(f(x)-1\right)=\frac{1}{2}g^2(x)+2,\ a,b\in\mathbb{R}$. **Arătați că** $b\rangle 1$.

Ilinca Sebastian, Pârscoveni, Olt

Rezolvare: Presupunem prin reducere la absurd că $b\leq 1$. Considerăm ecuația $x^2+(a-1)x+b-1=0$ cu $\Delta=(a-1)^2-4(b-1)\geq 0$ de unde rezultă că ecuația $f(x)=x+1$ are soluție, fie aceasta a.

$f(a)-1=a\Rightarrow g\left(f(a)-1\right)=g(a)=\frac{1}{2}g(a)^2+2$, contradicție.

G:1079. Să se demonstreze inegalitatea $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+9\geq 2\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}^*$

Gabriela Florina Toader, Buzău

Rezolvare: $\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+9-2\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}-2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{x}+3+\frac{1}{y^2}-2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{y}+3+\frac{1}{z^2}-2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{z}+3\geq 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}-\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{1}{y}-\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{1}{z}-\sqrt{3}\right)^2 \geq 0$ ceea ce este adevărat $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{G:1080}}$. Fie numerele reale pozitive a şi b cu $a>b$ **şi cu proprietatea că** $a+b=505$. **Demonstraţi că** $\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}<\sqrt{2021}$.

Adrian Gobej, Curtea de Argeş şi **Marin Ionescu**, Piteşti

Rezolvare:

Se observă că (1) $\sqrt{\left(\sqrt{a-b}\right)^2-2\sqrt{a-b}\cdot\sqrt{a+b}+\left(\sqrt{a+b}\right)^2}=\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}$ iar

(2) $\sqrt{\left(\sqrt{a-b}\right)^2+2\sqrt{a-b}\cdot\sqrt{a+b}+\left(\sqrt{a+b}\right)^2}=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}$.

Conform observaţiilor (1) şi (2), inegalitatea de demonstrat devine:

$$\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{\left(\sqrt{a-b}-\sqrt{a+b}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\right)^2}=$$

$$\underbrace{\left|\sqrt{a-b}-\sqrt{a+b}\right|}_{<0}+\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}=\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}=2\sqrt{a+b}=$$

$$=2\sqrt{505}=\sqrt{2020}<\sqrt{2021}.$$

$\boxed{\text{G:1081}}$. Se consideră numerele reale nenegative x, y, z şi t cu proprietatea că $x^2+y^2+z^2+t^2=2021$ **Demonstraţi că** $\sqrt{2021-x^2}+\sqrt{2021-y^2}+\sqrt{2021-z^2}+\sqrt{2021-t^2}\geq\sqrt{3}(x+y+z+t)$

Adrian Gobej, Curtea de Argeş şi **Marin Ionescu**, Piteşti

Rezolvare:

Folosind faptul că $x^2+y^2+z^2+t^2=2021$ avem $\sqrt{2021-x^2}+\sqrt{2021-y^2}+\sqrt{2021-z^2}+\sqrt{2021-t^2}=$

$$\sqrt{y^2+z^2+t^2}+\sqrt{x^2+z^2+t^2}+\sqrt{x^2+y^2+t^2}+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\geq$$

$$\geq\frac{y+z+t}{\sqrt{3}}+\frac{x+z+t}{\sqrt{3}}+\frac{x+y+t}{\sqrt{3}}+\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}=\frac{3(x+y+z+t)}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}(x+y+z+t)\text{, c.t.t.d.}$$

S-a folosit inegalitatea $\sqrt{x^2+y^2+z^2}\geq\frac{x+y+z}{\sqrt{3}},\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

Generalizare: Fie $x_1,x_2,...x_n\in\mathbb{R}_+$ cu $\sum_{i=1}^{n}x_n=S,\ n\geq2,\ n\in\mathbb{N}$ atunci $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{S-x_i^2}\geq\sqrt{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i$

$\boxed{\text{G:1082}}$. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ **ecuaţia** $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x^2-4x+6$.

Ionuţ Ivănescu, Simona Vladimirescu, Craiova

Rezolvare:

Evident $x\in[1;3]$. Cum $x^2-4x+6=(x-2)^2+2\geq2\Rightarrow\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\geq2\,|()^2\Rightarrow$

$x-1+3-x+2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{3-x}\geq4\Rightarrow\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{3-x}\geq1$ sau $(x-1)(3-x)\geq1\Rightarrow0\geq(x-2)^2\Rightarrow$

$x-2=0\Rightarrow x=2$ este singura soluţie.

$\boxed{\text{G:1083}}$. Să se arate că $\frac{xa^3+yb^3+zc^3}{a^3+bc(b+c)}+\frac{ya^3+zb^3+xc^3}{b^3+ca(c+a)}+\frac{za^3+xb^3+yc^3}{c^3+ab(a+b)}\geq x+y+z$, $a,b,c,x,y,z\rangle0$.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Rezolvare:

Deoarece $a^3+bc(b+c)\leq a^3+b^3+c^3 \Leftrightarrow bc(b+c)\leq(b+c)(b^2-bc+c^2)\Leftrightarrow0\leq(b-c)^2$, se obţine

$$\frac{1}{a^3+bc(b+c)} \geq \frac{1}{a^3+b^3+c^3} \Leftrightarrow \frac{xa^3+yb^3+zc^3}{a^3+bc(b+c)} \geq \frac{xa^3+yb^3+zc^3}{a^3+b^3+c^3}$$ şi analog pentru celelalte.

Adunând cele trei inegalităţi obţinem

$$\frac{xa^3+yb^3+zc^3}{a^3+bc(b+c)}+\frac{ya^3+zb^3+xc^3}{b^3+ca(c+a)}+\frac{za^3+xb^3+yc^3}{c^3+ab(a+b)} \geq \frac{(x+y+z)(a^3+b^3+c^3)}{a^3+b^3+c^3}=x+y+z$$, cu egalitate pentru a= b= c.

G:1084. Fie triunghiul ΔABC, cu $AB=AC=4\left(\sqrt{2}+1\right)cm$ şi $m(\sphericalangle BAC)=30^0$. În punctul C se ridică perpendiculara CV pe planul triunghiului cu $CV=4\sqrt{2}cm$. Aflați tangenta unghiului format de planul (ABC) cu planul (VMA), unde M este mijlocul lui $\left[BC\right]$ şi tangent unghiului format de planele (VAB) şi (ABC).

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Rezolvare:

În ΔABC, cum (MA este bisectoarea unghiului A şi $m(\sphericalangle BAC)=30^0 \Rightarrow m(\sphericalangle MAB)=15^0$. Evident ΔAMB este dreptunghic în M. Atunci, $\sin 15^0=\frac{MB}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{MB}{4(\sqrt{3}+1)} \Rightarrow$

$MB=2\sqrt{2} \Rightarrow BC=2BM=4\sqrt{2}$.

Din $VC \perp (ABC),\ CM \perp MA,\ MA \subset (ABC) \overset{T3\perp}{\Rightarrow} VM \perp AM \Rightarrow AM \perp BC$. Perpendicularele în M pe AM adică, CM şi VM formează unghiul planelor, adică unghiul $\sphericalangle(CMV)$ este unghiul dintre planele (ABC) şi (VMA). În triunghiul ΔVCM, $m(\sphericalangle C)=90^0$, $tg\left(\sphericalangle CMV\right)=\frac{VC}{CM}=\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=2$.

Fie $CD \perp AB$ şi din $CV \perp (ABC) \overset{T3\perp}{\Rightarrow} VD \perp AB \Rightarrow\ m\left[\sphericalangle\left((VAB),(ABC)\right)\right]=m(\sphericalangle CDV)$

În triunghiul ΔVCD, $tg\left(\sphericalangle CDV\right)=\frac{CV}{CD}=\frac{4\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}+1)}=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$, unde $CD=2(\sqrt{3}+1)$ se poate calcula în mai multe moduri, de exemplu, scriind aria triunghiului ABC în două moduri.

▪ Clasa a IX-a

L:878. Ştiind că $\left(1+3+5+.....+2021\right)^{2+4+6+.....+2p}=9^{12}\cdot 337^{24}$, să se determine numărul natural p.

Petre Păunescu, Roşiorii de Vede

Rezolvare: Se ştie că suma primelor 1011 numere impare este egală cu 1011^2 iar $2+4+6+...+2p=2(1+2+3+...+p)=p(p+1)$. Rezultă $1011^{2p(p+1)}=1011^{24} \Rightarrow 2p(p+1)=24 \Rightarrow p=3$

L:879. Demonstrați că pentru orice $n \in N,\ n \geq 2021,$ are loc inegalitatea:

$$\left(1-\frac{1}{2021^k}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2022^k}\right)\cdot.......\cdot\left(1-\frac{1}{n^k}\right)\rangle\frac{2020}{2021},\ k \geq 3,\ k \in \mathbb{N}.$$

Adrian Gobej, Curtea de Argeş şi **Marin Ionescu**, Piteşti

Rezolvare:

Avem $1-\frac{1}{2021^k}\ \rangle\ 1-\frac{1}{2021^2}=\left(1-\frac{1}{2021}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2021}\right)=\frac{2020}{2021}\cdot\frac{2022}{2021}$,

$$1-\frac{1}{2022^k}>1-\frac{1}{2022^2}=\left(1-\frac{1}{2022}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2022}\right)=\frac{2021}{2022}\cdot\frac{2023}{2022},$$

……………………..

$$1-\frac{1}{n^k}>1-\frac{1}{n^2}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

Prin înmulţirea relaţiilor se obţine:

$$\left(1-\frac{1}{2021^k}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2022^k}\right)\cdot\ldots\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^k}\right)>\frac{2020}{2021}\cdot\frac{2022}{2021}\cdot\frac{2021}{2022}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{2020}{2021}\cdot\frac{n+1}{n}>\frac{2020}{2021}$$

$\boxed{\text{L:880}}$. **Dacă "a" este soluţia pozitivă a ecuaţiei $x^3-x-1=0$ şi b este soluţia pozitivă a ecuaţiei $y^6-y-3a=0$, să se compare numerele a şi b.** **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Fie $a,\ b>0$. Dacă a=b se obţine $(a+1)^2=4a\Rightarrow(a-1)^2=0\Rightarrow a=b=1$ şi nu verifică ecuaţiile date.

Fie $a\neq b$. Presupunem că $a<b$ cu $a^3=a+1$ şi $b^6=3a+b$. Atunci, $\frac{3a+b}{4a}<\frac{3b+b}{4a}=\frac{b}{a}$,

deci $\left(\frac{b}{a}\right)^6=\frac{3a+b}{(a+1)^2}<\frac{3a+b}{4a}<\frac{b}{a}\Rightarrow\left(\frac{b}{a}\right)^6<\frac{b}{a}\Rightarrow\left(\frac{b}{a}\right)^5<1$ deoarece $\frac{b}{a}>0$. Aşadar, $0<\frac{b}{a}<1\Rightarrow b<a$ contradicţie cu presupunerea făcută. Deci, $a>b$.

$\boxed{\text{L:881}}$. **Fie $x,y,z>0$ astfel încât $xyz(x+y+z)=1$. Demonstraţi că $(x+y)(y+z)(z+x)>2\sqrt{2}$.**

Călina Doina Cristina, Simona Radu, Craiova

Rezolvare:

$(x+y)(y+z)=x^2+xz+yx+yz=x(x+y+z)+yz=\frac{1}{yz}+yz\geq 2$, cu egalitate $\Leftrightarrow yz=1$.

Analog pentru celelalte inegalităţi. Rezultă $(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2\ \geq\ 8$, deci $(x+y)(y+z)(z+x)>2\sqrt{2}$ cu egalitate $\Leftrightarrow xy=yz=zx=1\Leftrightarrow x=y=z=1$ dar care nu verifică relaţia din enunţ, prin urmare $(x+y)(y+z)(z+x)>2\sqrt{2}$.

$\boxed{\text{L:882}}$. **Fie $x,y\in\mathbb{R}-\{-1\}$ astfel încât $\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}=1$. Arătaţi că $\frac{1-x}{1-x+x^2}+\frac{1-y}{1-y+y^2}\geq 0$. În ce caz avem egalitate ?** **Mihaela Daianu, Mihaela Mirea**, Craiova

Rezolvare: După aducere la acelaşi numitor a relaţiei

$$\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}=1\Rightarrow 1+y^3+1+x^3=1+y^3+x^3+x^3y^3\Rightarrow x^3y^3=1\Rightarrow xy=1\Rightarrow y=\frac{1}{x}.$$

Atunci, $\frac{1-x}{1-x+x^2}+\frac{1-y}{1-y+y^2}=\frac{1-x}{1-x+x^2}+\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{(1-x)^2}{1-x+x^2}\geq 0$ cu egalitate pentru x = 1 de unde rezultă că y=1; Observaţie: $1-x+x^2=\left(1-\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3x^2}{4}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{L:883}}$. **Fie $x_k>0,\ k=\overline{1,n}$ astfel încât $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}=n$. Să se arate că $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_k^2+x_k+7}}\leq\frac{n}{3}$.**

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Rezolvare: Mai întâi se demonstrează inegalitatea $\frac{1}{\sqrt{x^2+x+7}} \le \frac{5x+1}{18x}, \forall x\rangle 0$ care este echivalentă cu $25x^4+35x^3-138x^2+71x+7\ge 0,\ \forall x\rangle 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\left(25x^2+85x+7\right)\ge 0,\ \forall x\rangle 0$ cu egalitate pentru x = 1. Inegalitatea de mai sus se aplică tuturor numerelor $x_k\rangle 0,\ k=\overline{1,n}$ şi însumând relaţiile obţinute şi ţinând cont de relaţia din ipoteză se obţine:

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{{x_k}^2+x_k+7}} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{5x_k+1}{18x_k}=\frac{5}{18}\cdot\sum_{k=1}^{n}1+\frac{1}{18}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}=\frac{5n+n}{18}=\frac{n}{3}$ cu egalitate pentru $x_k=1$.

$\boxed{\text{L:884}}$. **În triunghiul oarecare ABC se cunosc AB=3, BC=7 şi mediana BD are lungimea egală cu 4. Să se afle aria triunghiului ABC.** **Luiza Cremeneanu**, Craiova

Rezolvare:

Se calculează mediana BD, $BD^2=\frac{2(BA^2+BC^2)-AC^2}{4} \Rightarrow AC=\sqrt{52}$. Din formula lui Heron, rezultă $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)=\frac{1}{16}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=$

$=\frac{1}{16}\left(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4\right)$.

Prin înlocuirea lui **a** cu 7, a lui **b** cu $\sqrt{52}$, şi a lui c cu 3 obţinem: $S=6\sqrt{3}$

$\boxed{\text{L:885}}$. **Arătaţi că nu există** $x,y,z\in\mathbb{R}^*_+$ **astfel încât** $\begin{cases} x^2+xy+y^2=a^2 \\ x^2+xz+z^2=b^2 \\ y^2+yz+z^2=(a+b)^2 \end{cases}$.

Lucian Tuţescu, Craiova, **Cătălin Pană**, Rm Vâlcea

Rezolvare:

Presupunem că există astfel de numere. Atunci, din teorema cosinusului aplicată unghiurilor de 120^0 dintre segmentele cu lungimi x şi y, x şi z, şi dintre y şi z, putem construi atunci un triunghi ABC de laturi a, b şi respective a+b. Dacă ar exista x, y, z atunci $AB+AC\ \rangle\ BC$ ceea ce este fals. $a+b\ \rangle\ a+b$.

$\boxed{\text{L:886}}$. **Arătaţi că în orice triunghi ascuţitunghic ABC există relaţia**

$$\frac{A\sin\frac{A}{2}+B\sin\frac{B}{2}+C\sin\frac{C}{2}}{A\cos\frac{A}{2}+B\cos\frac{B}{2}+C\cos\frac{C}{2}}\ge\frac{2}{3\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{5}{4}+\frac{r}{2R}\right),$$ **notaţiile fiind cele uzuale.**

Radu Diaconu, Sibiu

Rezolvare:

Fie $f:\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$ funcţie concavă pentru care aplicăm inegalitatea lui Popoviciu şi egalitatea $\sum_{cyc}\cos A=1+\frac{r}{R}$: $\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}+\cos\frac{A+B+C}{3}\le\frac{2}{3}\cdot\sum_{cyc}\cos\frac{A+B}{2}=\frac{2}{3}\cdot\sum_{cyc}\sin\frac{C}{2}$.

$\sum_{cyc}\cos A+\frac{3}{2}\le 2\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2} \Leftrightarrow 2\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2}\ge\frac{3}{2}+1+\frac{r}{R}=\frac{5}{2}+\frac{r}{R}\Rightarrow\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2}\ge\frac{5}{4}+\frac{r}{2R}$. Din inegalitatea lui Jensen rezultă $\sum_{cyc}\cos\frac{A}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Mai departe se aplică inegalitatea lui Cebîşev:

$$\sum_{cyc} A\sin\frac{A}{2} \geq \frac{\pi}{3}\cdot\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2} \geq \frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{5}{4}+\frac{r}{2R}\right) \quad \textbf{(1)}$$

$$\sum_{cyc} A\cos\frac{A}{2} \leq \frac{\pi}{3}\cdot\sum_{cyc}\cos\frac{A}{2} \leq \frac{\pi}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sum_{cyc} A\cos\frac{A}{2}} \geq \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \quad \textbf{(2)}$$

Prin înmulțirea celor două relații se obține relația din enunț.

▪ Clasa a X-a

L:887. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2^x+3^x+5^x=10$. **Petre Păunescu**, Roşiorii de Vede

Rezolvare: Când x = 1 avem 2+ 3+ 5 = 10, deci x = 1. Presupunem că ecuația mai admite cel puțin o soluție mai mare ca 1 sau mai mică decât 1. Fie $y \rangle 1$ o altă soluție. Atunci, $2^y\rangle 2^1,\ 3^y\rangle 3^1,\ 5^y\rangle 5^1 \Rightarrow 2^y+3^y+5^y\rangle 2+3+5=10 \Rightarrow y\rangle 1$ nu este soluție. Analog pentru situația $y \langle 1$. Aşadar, singura soluție a ecuației este 1.
Obs. Când x=1,avem:2+3+5=10, deci x=1 soluție. Presupunem ca ecuația mai admite o soluție care poate fi >1 sau <1. Fie y>1 altă soluție, atunci, $2^y \rangle 2^1,\ 3^y \rangle 3^1$ Adunând, vom avea: $2^y+3^y+5^y\rangle 2+3+5=10$, deci $y\rangle 1$, nu e soluție. Analog pentru cazul $y\langle 1$. Aşadar, x=1 este soluție unică.

L:888. Să se calculeze partea întreagă a numărului $\log_2 2021+\log_3 2021+\log_4 2021$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Se arată mai întâi că $\frac{87}{8} \langle \log_2 2021 \langle 11$, (1)

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{87}{8}} = \sqrt[8]{2^{87}} = 2^{10}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{128}} \langle 1024\cdot\sqrt[4]{11{,}31} \langle 1024\cdot\sqrt{3{,}363} \langle 1024\cdot 1{,}833 \langle 2021 \text{ şi } 2^{11}=2048\rangle 2021$$

Analog se arată că: $\frac{55}{8}\langle \log_3 2021 \langle 7$, (2) şi $\frac{43}{8}\langle\log_4 2021 \langle\frac{11}{2}$, (3).

Din adunarea inegalităților (1), (2) şi (3) rezultă:
$\frac{87}{8}=23{,}125 \langle \log_2 2021+\log_3 2021+\log_4 2021 \langle\frac{47}{3}=23{,}5 \Rightarrow$ partea întreagă este egală cu 23.

L:889. Arătați că numărul $2021!\cdot 2022!$ se poate scrie ca suma a 2021 numere naturale consecutive dar nu se poate scrie ca suma a 2022 de numere naturale consecutive.

Cătălina Doina Cristina, Simona Radu, Craiova

Rezolvare:
Fie $x\in\mathbb{N}$, $2021!\cdot 2022! = x+(x+1)+(x+2)+....+(x+2020) \Rightarrow$
$2021!\cdot 2022! = 2021x+1010\cdot 2021 \Rightarrow x = 2020!\cdot 2022! - 1010$.
Presupunem că numărul dat se poate scrie ca suma a 2022 de numere naturale consecutive:

$2021!\cdot 2022! = x+(x+1)+(x+2)+....+(x+2021)\Rightarrow$

$2021!\cdot 2022! = 2022x+2021\cdot 1011 \Rightarrow 2022x = 2021!\cdot 2022! - 2021\cdot 1011$ fals deoarece membrul stâng este par iar membrul drept este impar.

$\boxed{\text{L:890}}$. Arătați că soluția reală a ecuației $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2021}=2$ este suma a 2021 numere reale în progresie geometrică.

Ionel Tudor, Călugăreni,. Giurgiu

Rezolvare:

$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2021}=2 \Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{x}=\sqrt[2021]{2}\Rightarrow\ x=\dfrac{1}{\sqrt[2021]{2}-1}$. Prin raționalizare se obține soluția reală

$x=1+\sqrt[2021]{2}+\sqrt[2021]{2^2}+.....+\sqrt[2021]{2^{2020}}$ adică suma a 2021 de termeni ai unei progresii geometrice cu primul termen 1 şi rația $\sqrt[2021]{2}$.

$\boxed{\text{L:891}}$. Să se determine partea întreagă a numărului $a=\log_2 59049+\log_3 10484576$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

$$a=\log_2 3^{10}+\log_3 2^{20}=10\cdot\left(\log_2 3+2\log_3 2\right)$$

Cu inegalitatea mediilor $\log_2 3+2\log_3 2 > 2\sqrt{\log_2 3\cdot 2\log_3 2}=2\sqrt{\log_2 3\cdot 2\cdot\dfrac{1}{\log_2 3}}=2\sqrt{2}>2\cdot 1,41=2,82$.

Arătăm că $\log_2 3+2\log_3 2=\log_2 3+\dfrac{2}{\log_2 3} < 2,9$ adică $x=\log_2 3\in(1;2)$ este soluție a inecuației $x^2-2,9x+2 < 0$. Cum $x_1\simeq 1,13$ şi $x_2\simeq 1,77$ şi atunci $x=\log_2 3\in\left(1,13;\ 1,77\right)$. Mai mult, $1,5 < \log_2 3 < 1,75$ şi atunci $x=\log_2 3\in\left(1,5;\ 1,75\right)\subset\left(1,13;\ 1,77\right)$.

$1,5 < \log_2 3\Leftrightarrow\dfrac{3}{2} < \log_2 3\Leftrightarrow 3 < \log_2 9\Leftrightarrow\log_2 2^3 < \log_2 9\Leftrightarrow\log_2 8 < \log_2 9$, Adevărat.

$\log_2 3 < 1,75\Leftrightarrow\log_2 3 < \dfrac{7}{4}\Leftrightarrow\log_2 3^4 < \log_2 2^7\Leftrightarrow\log_2 81 < \log_2 128$, Adevărat.

Aşadar, $a=10\cdot\left(\log_2 3+2\log_3 2\right)\in(28;29)\Rightarrow[a]=28$.

$\boxed{\text{L:892}}$. Arătați că nu există $a\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$ astfel încât $\log_{\frac{a^2+1}{a^2-1}}(x^2-x+1) < 1,\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Adriana Ioniță, Aurel Chiriță, Slatina

Rezolvare:

Evident, $x^2-x+1\geq\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2>0,\ \ \forall x\in\mathbb{R}$. Punem condiția $\dfrac{a^2+1}{a^2-1}>0$ şi avem situațiile:

i) $\dfrac{a^2+1}{a^2-1}\in(0;1)\Rightarrow x^2-x+1 > \dfrac{a^2+1}{a^2-1},\forall x\in\mathbb{R}$. Din $\dfrac{3}{4}>\dfrac{a^2+1}{a^2-1}>0\Rightarrow -7>0$, ceea ce e fals.

ii) $\dfrac{a^2+1}{a^2-1}>1\Rightarrow x^2-x+1 < \dfrac{a^2+1}{a^2-1},\ \ \forall x\in\mathbb{R}$, ceea ce este fals.

$\boxed{\text{L:893}}$. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $4\cos^4 x=\cos 2x+2\cos^2 x\cdot\cos 8x$.

Sorin Pîrlea, Simona Radu, Craiova

Rezolvare: Ecuația data este echivalentă cu ecuația de gradul doi în ($\cos^2 x$): $4\cos^4 x-2(1+\cos 8x)\cos^2 x+1=0$ pentru care discriminantul este $\Delta=4(1+\cos 8x)^2-16\geq 0\Rightarrow$ $|1+\cos 8x|\geq 2\Rightarrow 1+\cos 8x=2\Rightarrow \cos 8x=1$. Înlocuind în relația anterioară obținem $(2\cos^2 x-1)^2=0\Rightarrow \cos 2x=0.$ Aşadar , din $\cos 2x=0$ şi $\cos 8x=1\Rightarrow x=(2k+1)\dfrac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{L:894}}$. **Fie $a\rangle 0,\ a\neq 1$ fixat. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:**

a) $\log_x(x+2021)=\log_a(a+2021)$; **b)** $\log_x(x^{2021}+2021)=\log_a(a^{2021}+2021)$.

Dan Grigorie, Luiza Cremeneanu, Craiova

Rezolvare:

a) La ecuația data schimbăm baza şi obținem: $\dfrac{\ln(x+2021)}{\ln(a+2021)}=\dfrac{\ln x}{\ln a}$ sau $\log_{a+2021}(x+2021)=\log_a x=y$

$\Rightarrow x=a^y,\quad x+2021=(a+2021)^y\Rightarrow a^y+2021=(a+2021)^y\Leftrightarrow\left(\dfrac{a}{a+2021}\right)^y+2021\left(\dfrac{1}{a+2021}\right)^y=1$

Cum $\dfrac{a}{a+2021}\langle 1$ *si* $\dfrac{1}{a+2021}\langle 1\Rightarrow$ y=1 este soluție unică. Atunci, x = a.

b) Asemănător ca la a) se obține

$\log_{a^{2021}+2021}(x^{2021}+2021)=\log_a x=y\Rightarrow x=a^y\Rightarrow(a^{2021}+2021)^y=x^{2021}+2021\Rightarrow$

$\left(\dfrac{a^{2021}}{a^{2021}+2021}\right)^y+2021\left(\dfrac{1}{a^{2021}+2021}\right)^y=1$ cu soluția unică y=1 şi de aici x=a.

$\boxed{\text{L:895}}$. **Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația** $\sqrt{2}x\sin\dfrac{\pi x}{x^2+4}+\dfrac{x^2}{2}+1=0$.

Mihaela Dăianu, Mihaela Mirea, Craiova

Rezolvare:

Cum $\sin^2\dfrac{\pi x}{x^2+4}+\cos^2\dfrac{\pi x}{x^2+4}=1$ ecuația dată se mai scrie $\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\sin\dfrac{\pi x}{x^2+4}\right)^2+\cos^2\dfrac{\pi x}{x^2+4}=0$

Rezultă $\cos\dfrac{\pi x}{x^2+4}=0\Rightarrow\sin\dfrac{\pi x}{x^2+4}=\pm 1$. Cum şi $\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\sin\dfrac{\pi x}{x^2+4}=0$ avem două cazuri:

a) $\sin\dfrac{\pi x}{x^2+4}=-1\Rightarrow\dfrac{x}{\sqrt{2}}-1=0\Rightarrow x=\sqrt{2}$ şi $\cos\dfrac{\pi x}{x^2+4}=\cos\dfrac{\pi\sqrt{2}}{6}\neq 0.$

b) $\sin\dfrac{\pi x}{x^2+4}=1\Rightarrow\dfrac{x}{\sqrt{2}}+1=0\Rightarrow x=-\sqrt{2}$ şi $\cos\dfrac{\pi x}{x^2+4}=\cos\dfrac{-\pi\sqrt{2}}{6}\neq 0.$ Ecuația nu are soluții.

$\boxed{\text{L:896.}}$ **Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația** $\sin^{2021}x+\cos^{2021}x+\sin^{2022}x=2$. **Delia Popescu**, Craiova

Rezolvare:

$\sin^{2021}x+\cos^{2021}x\leq\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Cum $\sin^{2021}x+\cos^{2021}x=2-\sin^{2022}x\Rightarrow\sin^{2022}x\geq 1\Rightarrow$ $\sin^{2022}x=1$ şi de aici $\sin^{2021}x+\cos^{2021}x=1$.

Din $\sin^{2022}x=1\Rightarrow a)\ \sin x=-1\Rightarrow -1+\cos^{2021}x=1\Rightarrow\cos^{2022}x=2$ Fals.

b) $\sin x=1\Rightarrow 1+\cos^{2021}x=1\Rightarrow\cos^{2021}x=0\Rightarrow\cos x=0$. Aici găsim soluțiile $x\in\left\{\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

$\boxed{\text{L:897}}$. **Fie numerele reale $a\neq b\neq c\neq a$. Arătați că** $\sqrt[3]{a^3-b^3}+\sqrt[3]{b^3-c^3}+\sqrt[3]{c^3-a^3}\neq 0$.

Daniela Stoian, Roxana Vasile, Craiova

Rezolvare:

În identitatea $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xz-xz+yz)$ se ia $x=\sqrt[3]{a^3-b^3}, y=\sqrt[3]{b^3-c^3}, z=\sqrt[3]{c^3-a^3}$. Presupunem că $x+y+z=0 \Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz$ așadar $3\cdot\sqrt[3]{a^3-b^3}\cdot\sqrt[3]{b^3-c^3}\cdot\sqrt[3]{c^3-a^3}=a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3=0$ ceea ce e fals deoarece niciunul din factorii din membrul stâng nu este 0 deoarece $a\neq b\neq c\neq a$. Rezultă că $a^3\neq b^3\neq c^3\neq a^3$.

▪ Clasa a XI-a

$\boxed{\text{L:898}}$. **Fie A o matrice pătratică de ordinul doi cu proprietățile** $\det(A+2I_2)=0$ **și** $\det(A-4I_2)=36$**. Să se calculeze** $(A+2I_2)^{2022}$**.** **Iuliana Trașcă**, Olt

Rezolvare:

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$. Din $\det(A+2I_2)=0 \Rightarrow ad-bc+2(a+d)+4=0$ și din $\det(A-4I_2)=36 \Rightarrow ad-bc-4(a+d)+16=36$, prin scăderea relațiilor se obține $a+d=4$ și $ad-bc=-4$. Conform Teoremei lui Hamilton- Cayley rezultă $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=O_2 \Rightarrow$ $A^2+4A+4I_2=O_2 \Rightarrow (A+2I_2)^2=O_2 \Rightarrow (A+2I_2)^{2022}=O_2$.

$\boxed{\text{L:899}}$. **Să se determine funcția continuă** $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$**, astfel încât să avem relația** $f(2^x)-f(2^{x-1})=2^{x+1},\ \forall x\in\mathbb{R}$**.** **Cezar Ozunu** Daneți, Dolj

Rezolvare:

Notând $2^x=t$ relația dată devine $f(t)-f(\frac{t}{2})=2t$ (*) și scriind relația (*) pentru valorile $\frac{t}{2},\frac{t}{2^2},\frac{t}{2^3},.....,\frac{t}{2^{n-1}}$ și adunându-le obținem:

$$f(t)-f(\frac{t}{2^n})=2t\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=2t\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=4t \text{ deoarece } f(\frac{t}{2^n})=f(0)\Rightarrow$$

$f(t)-f(0)=4t \Rightarrow f(t)=4t+c$, c= constantă.

$\boxed{\text{L:900}}$. **Să se calculeze limita** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\left(\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)\right)}{x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)}$. **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\left(\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)\right)}{\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-\cos x)}{\frac{\pi}{2}(1-\cos x)}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}(1-\cos x)}{x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\pi}{2}\left(1-1+2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}\sin x}{\frac{\pi}{2}\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\pi}{2}\sin x}{x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{x^2}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{4x^2}=\frac{1}{2}$$

S-a folosit $\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos x\right)=\sin\frac{\pi}{2}(1-\cos x)$ şi $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$.

$\boxed{\text{L:901}}$. **Fie şirul** $(x_n)_{n\geq1}$, $x_1=a+1$, $x_2=a$, $x_{n+2}=\sqrt{(a-1)x_n+x_{n+1}}$, $n\geq1, a>1$. **Să se arate că** $x_n\leq a+\frac{2}{n}$, $\forall n\geq1$. **Să se calculeze** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ **Gheorghe Ghiță,** Buzău

Rezolvare: Se demonstrează prin inducție matematică:

$$x_{n+2}=\sqrt{(a-1)x_n+x_{n+1}}<\sqrt{(a-1)(a+\frac{2}{n})+a+\frac{2}{n+1}}<a+\frac{2}{n+2}\Leftrightarrow\frac{an+a-1}{n^2+n}<\frac{2an+4a+2}{n^2+4n+4}\Leftrightarrow$$

$$an^3+(a+3)n^2+(6-4a)n-4a+4>0\Leftrightarrow a(n+1)(n^2-4)+3n^2+6n+4>0,\ \forall n\geq2;$$

Cum $x_1=a+1<a+2,\ x_2=a<a+2,\ x_3=\sqrt{a^2+a-1}<a+\frac{2}{3}\Rightarrow x_n\leq a+\frac{2}{n},\ \forall n\geq1$.

Tot prin inducțiue matematică se demonstrează că $a\leq x_n<a+\frac{2}{n}$ şi conform teoremei cleştelui, limita şirului este a.

$\boxed{\text{L:902}}$. **Arătați că** $\sum\limits_{0\leq i<j\leq n}(i+j)C_n^iC_n^j=n(2^{2n-1}-C_{2n-1}^n)$. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

În identitatea $2\sum\limits_{0\leq i<j\leq n}a_i\cdot a_j=\left(\sum\limits_{0\leq i<j\leq n}a_i\right)^2-\sum\limits_{0\leq i<j\leq n}a_i^2$ considerăm $a_i=x^i\cdot C_n^i$ şi atunci

$2\sum\limits_{0\leq i<j\leq n}x^{i+j}C_n^iC_n^j=\left(\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^ix^i\right)^2-\sum\limits_{i=0}^{n}\left(C_n^ix^i\right)^2=(1+x)^{2n}-\sum\limits_{i=0}^{n}x^{2i}\left(C_n^i\right)^2$. Derivând în raport cu x şi simplificând cu 2 obținem: $\sum\limits_{0\leq i<j\leq n}(i+j)x^{i+j-1}C_n^iC_n^j=n(1+x)^{2n-1}-\sum\limits_{i=0}^{n}ix^{2n-1}\left(C_n^i\right)^2$.

Pentru x = 1 relația anterioară devine: $\sum\limits_{0\leq i<j\leq n}(i+j)C_n^iC_n^j=n\cdot2^{2n-1}-\sum\limits_{i=0}^{n}i\left(C_n^i\right)^2$ (*).

Suma $\sum\limits_{i=0}^{n}i\left(C_n^i\right)^2$ se calculează astfel: $\sum\limits_{i=0}^{n}(n-i)\left(C_n^{n-i}\right)^2$ şi atunci $2S=\sum\limits_{i=0}^{n}(i+n-i)\left(C_n^i\right)^2=\sum\limits_{i=0}^{n}n\left(C_n^i\right)^2=n\sum\limits_{i=0}^{n}\left(C_n^i\right)^2=n\cdot C_{2n}^n$. Deci $S=\frac{n}{2}C_{2n}^n=\frac{n}{2}\cdot\frac{2n}{n}C_{2n-1}^{n-1}=nC_{2n-1}^n$ care se înlocuieşte în relația (*) rezultând identitatea din enunț.

▪ Clasa a XII-a

L:903. Să se calculeze: $\int_0^1 \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}\right)}{x^2-x+1}dx$ **Gheorghe Ghiță**, Buzău

Rezolvare: Conform proprietății "Dacă $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ este continuă atunci $\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b [f(x)+f(a+b-x)]dx$", integrala dată se scrie:

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)\left(\arcsin\sqrt{x}+\arcsin\sqrt{1-x}\right)}{x^2-x+1}dx=\frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x^2-x+1}dx+=\frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-x+1}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x^2-x+1}dx$$. S-a aplicat faptul că

$\arcsin\sqrt{x}+\arcsin\sqrt{1-x}=\frac{\pi}{2}$ iar în a doua integrală s-a făcut schimbarea de variabilă, x = t-1 şi s-a constatat că este egală cu prima integrală.

Mai departe, efectuând schimbarea de variabilă $\sqrt{x}=t,\ dx=2tdt$ se obține:

$$I=\pi\int_0^1 \frac{t^2}{t^4-t^2+1}dt=\pi\int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{t}{t^2-\sqrt{3}t\ +1}-\frac{t}{t^2+\sqrt{3}t\ +1}\right)dt=$$

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{12}\ln\frac{t^2-\sqrt{3}t+1}{t^2+\sqrt{3}t+1}\Bigg|_0^1+\frac{\pi}{2}\left[arctg\left(2t-\sqrt{3}\right)+arctg\left(2t+\sqrt{3}\right)\right]\Bigg|_0^1=\frac{\pi\sqrt{3}}{12}\ln(2-\sqrt{3})+\frac{\pi^2}{4}.$$

L:904. Să se determine toate polinoamele $f\in\mathbb{R}[X]$ care verifică relația $(x-1)f(x)=xf(x-2021),\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Dând succesiv lui x valorile 0, 2021, 4042, 8084, ... obținem faptul că acestea reprezintă un şir infinit de rădăcini ale lui f, prin urmare polinomul f nu poate avea gradul finit. Singurul polinom care verifică enunțul este polinomul nul, f = 0.

L:905. Arătați că $\int_0^1 \frac{x^{2020}-1}{\ln x}dx=\ln 2021$. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Considerăm integrala $A=\int_0^{2020} t^x dx,\ t\rangle 0$. $A=\int_0^{2020} e^{x\ln t}dx$. Cu substituția $y=x\ln t$ avem $x=\frac{y}{\ln t}\Rightarrow dx=\frac{dy}{\ln t}$. Atunci, $A=\int_0^{2020\ln t} e^y\cdot\frac{dy}{\ln t}=\frac{1}{\ln t}\int_0^{\ln t^{2020}} e^y dy=\frac{1}{\ln t}\cdot e^y\Bigg|_0^{\ln t^{2020}}=\frac{t^{2020}-1}{\ln t}$.

Integrala din enunț este:

$$I=\int_0^1 \frac{t^{2020}-1}{\ln t}dt=\int_0^1 A\ dt=\int_0^1\left(\int_0^{2020} t^x dx\right)dt=\int_0^{2020}\left(\int_0^1 t^x dt\right)dx=\int_0^{2020}\left(\frac{t^{x+1}}{x+1}\Bigg|_0^1\right)dx=\int_0^{2020}\frac{1}{x+1}dx=$$

$$=\ln(x+1)\Bigg|_0^{2020}=\ln 2021.$$

L:906. **Calculaţi** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^8 - x^2}{x^{12} + 2x^9 + 4x^6 + 2x^3 + 1} dx$. **Costel Florea,** Bucuresti

Rezolvare: $$I = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \frac{x^2(3x^6 - 3)}{x^{12} + 2x^9 + 4x^6 + 2x^3 + 1} dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \frac{x^2 \cdot x^4\left(3x^2 - \frac{3}{x^4}\right)}{x^6\left(x^6 + 2x^3 + 4 + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^6}\right)} dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \frac{\left(3x^2 - \frac{3}{x^4}\right)}{\left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) + 2\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 4} dx.$$ Notăm $x^3 + \frac{1}{x^3} = t$, $\left(3x^2 - \frac{3}{x^4}\right)dx = dt$ şi obţinem

$$I = \frac{1}{3}\int_{-2}^{2} \frac{dt}{(t^2 - 2) + 2t + 4} = \frac{1}{3}\int_{-2}^{2} \frac{dt}{t^2 + 2t + 2} = \frac{1}{3} arctg(t+1)\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{3}\left(arctg3 + \frac{\pi}{4}\right).$$

L:907. **Arătaţi că** $\displaystyle\int_{1}^{2} \sqrt{x}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx < 2 - \sqrt{2}.$ **Codruţ-Sorin Zmicală, Sighetu Marmaţiei**

Rezolvare:

Vom demonstra că $\ln(1+x) < x, \forall x > 0.$ În acest scop, considerăm funcţia $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x - \ln(1+x)$. Funcţia f este continuă pe domeniul de definiţie şi $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1} > 0,$ pentru orice $x \in (0,+\infty)$. Prin urmare, f este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, deci $f(x) > f(0), \forall x \in (0,+\infty) \Rightarrow \ln(1+x) < x, \forall x > 0.$

Din $\ln(1+x) < x, \forall x > 0,$ rezultă că $\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) < \frac{1}{x^2},$ deci $\sqrt{x}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) < \frac{\sqrt{x}}{x^2}, \forall x > 0.$ Integrând inegalitatea precedentă pe intervalul $[1,2]$, obţinem că

$$\int_{1}^{2} \sqrt{x}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx < \int_{1}^{2} \frac{\sqrt{x}}{x^2}dx = \int_{1}^{2} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}dx = \int_{1}^{2} x^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\Bigg|_{1}^{2} = -2\left(2^{-\frac{1}{2}} - 1\right) = 2 - 2^{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{2}.$$

L:908. **Să se calculeze** $\displaystyle\int \frac{e^x - x \cdot e^x}{x^2 - e^{2x}} dx$. **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare:

$$\frac{e^x - x \cdot e^{x(e^{2x}}}{x^2 - e^{2x}} = \frac{\frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x}}{\frac{x^2}{e^{2x}} - 1} = \frac{\frac{e^x - x \cdot e^x}{e^{2x}}}{\left(\frac{x}{e^x}\right)^2 - 1} \Rightarrow \int \frac{e^x - x \cdot e^x}{x^2 - e^{2x}} dx = \int \frac{\left(\frac{x}{e^x}\right)^I}{\left(\frac{x}{e^x}\right)^2 - 1} dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{x}{e^x} - 1}{\frac{x}{e^x} + 1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x - e^x}{x + e^x}\right| + C.$$

L:909. **Fie** $a, b \in R,\ a < b$ **şi funcţiile continue** $f, g: R \to R$ **astfel încât** $f(x)f(a+b-x) = 1, g(x) = g(a+b-x),\ \forall x \in R$. **Să se arate demonstreze că**

$$\int_{a}^{b} \frac{g(x)}{1 + f(x)} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{a}^{b} g(x)dx.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Fie $I=\int_a^b \frac{g(x)}{1+f(x)}dx$ în care facem schimbarea de variabilă $x=u(t)=a+b-t$, cu $u'(t)=-1, u(a)=b, u(b)=a$ şi obţinem: $I=\int_a^b \frac{g(a+b-t)}{1+f(a+b-t)}dt=\int_a^b \frac{g(x)}{1+\frac{1}{f(x)}}dx=\int_a^b \frac{f(x)g(x)}{1+f(x)}dx$ şi atunci: $2I=I+I=\int_a^b \frac{g(x)}{1+f(x)}dx+\int_a^b \frac{f(x)g(x)}{1+f(x)}=\int_a^b \frac{(1+f(x))g(x)}{1+f(x)}dx=\int_a^b g(x)dx$, şi deci $I=\frac{1}{2}\cdot\int_a^b g(x)dx$.

$\boxed{\text{L:910.}}$ **Calculaţi integrala:** $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\arccos x}{1-x^2}dx$. **Vasile Mircea Popa,** Sibiu

Rezolvare:

Notăm: $I=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\arccos x}{1-x^2}dx$; $J=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{1-x^2}dx$.

Avem: $I+J=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\arccos x+\arcsin x}{1-x^2}dx=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}dx$.

Scriem relaţia pentru familia de primitive ale funcţiei $f(x)=\frac{1}{1-x^2}, x\in(-1,1)$:

$\int \frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C=F(x)+C$ unde C este o constantă arbitrară.

Pentru calculul familiei de primitive descompunem fracţia care reprezintă funcţia f(x) în fracţii simple şi primitiva rezultă imediat. Relaţia se poate evident verifica prin derivare. Cititorul este invitat să efectueze aceste calcule simple.

Folosind expresia primitivei $F(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ şi formula Leibniz-Newton, avem:

$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}dx=F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(-\frac{1}{2}\right)=\ln 3$ Prin urmare putem scrie: $I+J=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\pi\ln 3$

Dar integrala J este egală cu zero, deoarece avem integrala unei funcţii impare pe un interval simetric faţă de origine.

Rezultă $I=\frac{1}{2}\pi\ln 3$.

„ Ştiinţa noastră este suma gândurilor şi experienţelor a nenumărate minţi”.

Ralph Waldo Emerson (1803-1882)

4. Probleme propuse

▪ Clasa a V-a

G:1085. Să se calculeze $S = 52\cdot 50 - 53\cdot 49 + 54\cdot 48 - 55\cdot 47 + ... + 100\cdot 2 - 101\cdot 1$

elev **Ionescu Mihai**, Craiova

G:1086. Găsiţi o scriere a numerelor 10^{2022} şi 10^{2023} ca sumă de două pătrate perfecte.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:1087. Aflaţi restul împărţirii numărului $A = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{2022}$ la 15. **Camelia Dană**, Craiova

G:1088. În Germania, la 18 ani două treimi din numărul elevilor sunt în şcoli profesionale, jumătate din cei care dau bacalaureatul îl pică, iar trei sferturi nu termină facultatea. Dacă într-un colegiu sunt 1200 de elevi, atunci aflaţi:

a) Câţi elevi din acel colegiu merg la profesională ?

b) Câţi elevi din acel colegiu termină liceul ?

c) Câţi elevi din acel colegiu termină facultatea ?

Neculai Stanciu, Buzău

G:1089. Se consideră numerele naturale impare $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ care împărţite la 100 dau resturi diferite două câte două.

a) Aflaţi cel mai mic număr $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care mulţimea acestor resturi să coincidă cu mulţimea tuturor resturilor posibile ale împărţirii tuturor numerelor naturale impare la 100;

b) Demonstraţi că pentru acel **n**, suma $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ se divide cu 100.

Adrian Gobej, Curtea de Argeş

G:1090. Fie numărul $x = 2^{n+5}\cdot 5^n + 2022$, unde n este număr natural, $n\rangle\ 4$. Calculaţi suma cifrelor numărului x. **Doina şi Mircea Mario Stoica**, Arad

G:1091. Fără a se efectua ridicările la putere, arătaţi că numărul

$a = \frac{1}{4}\cdot\left(2023^3 - 2021^3 - 2023^2 - 2021^2\right)$ este un număr natural pătrat perfect.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:1092. Aflaţi cel mai mic număr natural n, în baza 10, care are suma cifrelor egală cu 2022. Cât este restul împărţirii lui n la 9? Determinaţi numărul p, minim, astfel încât $n + p$ să fie divizibil cu 9.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, Bucureşti

▪ Clasa a VI-a

G:1092. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația $2^x = \frac{16-16x}{x-7}$. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

G:1093. Să se arate că numărul 2^{2022} are cel puțin 607 cifre.
Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, Bucureşti

G:1094. Determinați numerele prime a, b, şi c astfel încât $a+13b+7c=184$.
Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

G:1095. Demonstrați că numărul A este natural, unde

$$A=\left\{\left[\frac{0,(3)-0,2}{0,(3)+0,2}\right]^{-1}-1\right\}\cdot\left\{\left[\frac{0,(142857)-0,(1)}{0,(142857)+0,(1)}\right]^{-1}-6\right\}\cdot\left[\left(\frac{\frac{1}{439}-\frac{1}{441}}{\frac{1}{439}+\frac{1}{441}}\right)^{-1}-3\right].$$

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:1096. Găsiți cele trei numere prime magice p_1, p_2, p_3 astfel încât
$p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot\overline{ab}=\overline{abababab}$, oricare ar fi numărul $\overline{ab}$. **Neculai Stanciu,** Buzău

G:1097. Se consideră numărul $N=2021^n+(n+2022)(n+2019),\ \forall n\in\mathbb{N}$. Să se arate că N e impar. **Adrian Stan,** Buzău

G:1098. Numerele naturale nenule *a*, *b* şi *c* verifică egalitățile $\frac{a}{5}=\frac{b}{13}=\frac{c}{31}$.
Să se arate că $a^2+b^2+c^2$ este divizibil cu patru numere prime consecutive.
Să se afle cea mai mică valoare a rapoartelor, pentru care $a+b+c$ este pătrat perfect.
Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, Bucureşti

G:1099. Să se arate că oricare ar fi numerele naturale **k, l, n**, restul împărțirii numărului
$N=2018^{2k+1}+2019^{2l+1}+2022^{2n+1}+2023^{2l+1}+2024^{2k+1}$ la 2021 este acelaşi.
Gheorghe Ghiță, Buzău

G:1100. Fie H ortocentrul triunghiului ABC . Dacă $CH=AB$ şi $BH=AC$ aflați unghiurile triunghiului ABC.
elev **Tudoraşcu Rareş**, Craiova

▪ Clasa a VII-a

G:1101. Determinați numărul $\overline{ab}$ pentru care $\sqrt{\overline{aab}}-\sqrt{\overline{ab}}=a\cdot b$.
Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:1102. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că $a^2+4b^2+9c^2=6a+16b+12c+20$. Să se determine care este cea mai mare valoare posibilă pentru a, b sau c ?
Adrian Stan, Buzău

G:1103. Raționalizați numitorul fracției $F=\dfrac{1+\sqrt{2}x+8x^6+8\sqrt{2}x^7}{1-\sqrt{2}x+8x^6-8\sqrt{2}x^7}$, unde $x\in\mathbb{Q}^*$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:1104. Există valori ale numărului real a astfel încât numerele $x=\dfrac{2a+3}{4}$ și $y=\dfrac{3a-1}{2}$ să fie simultan numere întregi? **Doina și Mircea Mario Stoica**, Arad

G:1105. Să se compare fracțiile: $\dfrac{10^{2020}+1}{10^{2021}+1}$ și $\dfrac{10^{2021}+1}{10^{2022}+1}$. **Camelia Dană,** Craiova

G:1106. Să se rezolve în mulțimea numerelor raționale ecuația

$$\sqrt{202}-\sqrt{x+2022-\sqrt{2022}}=k\cdot y,\quad k\in\mathbb{Q}^*.$$

Gheorghe Ghiță, Buzău

G:1107. Să se arate că dacă numerele întregi a, b și c satisfac egalitatea $337a+2b=3c$, atunci produsul $(167a+b)(5c-3a)(335b-334c)$ este divizibil cu numărul 2022.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga,** București

G:1108. Fie pătratul $ABCD$ cu lungimea laturii l. Fie punctele M și N pe laturile BC și CD astfel încât $BM=a<\dfrac{l}{2}$. Dacă MN intersectează AB în E și AD în F astfel încât $A_{ABCD}=A_{AEF}$, atunci calculați în funcție de l și a lungimea segmentului DF.

Neculai Stanciu, Buzău

▪ Clasa a VIII-a

G:1109. Fie $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $x-y=1$. Aflați cea mai mică valoare a expresiei $E(x;y)=x^3-y^3-xy$ și valorile lui x și y pentru care este atins acest minim.

elevă **Viespescu Călina Maria**, Craiova

G:1110. Fie $A=\sqrt{3^{2020}+3^{2021}+3^{2022}+3^n}$, $n\in\mathbb{N}$. Să se determine o valoare a lui **n** astfel încât A să fie rațional.

Adrian Stan, Buzău

G:1111. Arătați că dacă numărul natural n verifică egalitatea

$(n+2021)\sqrt{n+2021}-\sqrt{n^2+2021n}-n\sqrt{n}=2n+2021,$ atunci n este pătrat perfect.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:1112. Să se rezolve în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ecuația: $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{xy}=p^2-1$, unde p este un număr prim.

Gheorghe Ghiță, Buzău

G:1113. Numerele reale a și b verifică relația $a^2+b^2-3a-5b+7{,}5=0$. Să se arate că $a+b\in[2;6]$

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

G:1114. Rezolvați în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ecuația $\dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}=1$. **Adrian Gobej**, Curtea de Argeș

G:1115. Fie $x, y, z \rangle 0$ astfel încât $x+y+z=3$. Arătați că $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z} \leq \frac{6}{xy+yz+zx}$. În ce caz avem egalitate ?

Dorina Goiceanu, Simona Dascălu, Craiova

G:1116. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, să se arate că: $(\frac{a}{bc}+4)(\frac{b}{ac}+4)(\frac{c}{ab}+4) \geq \frac{64}{\sqrt{abc}}$.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu

G:1117. Fie un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a, b, c. Arătați că $A_t=\frac{1}{4}\left[3S^2-(S-2a)^2-(S-2b)^2-(S-2c)^2\right]$, unde $A_t=2(ab+bc+ac)$ este aria totală iar $S=a+b+c$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

▪ Clasa a IX-a

L:911. Fie $a_n=2^n\cdot 3^{1-n},\ n\in\mathbb{N}^*$. a) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este o progresie geometrică.

b) Determinați $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $a_1+a_2+.....+a_n=\frac{38}{9}$.

Constantin Dinu, Buzău

L:912. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție care verifică condiția (*) $x\cdot f(x)+(2-x)\cdot f(-x)=x+2$;
a) Să se calculeze f(2) şi f (- 2) ;
b) Să se determine funcția de gradul doi care verifică condiția (*).

Constantin Dinu, Buzău

L:913. a) Să se arate că $x^4-8x^3+64x+64\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$;
b) Comparați numerele $a=1^4+2^4+3^4+.....+(n-1)^4$ şi $B=n^4+4n^3-30n^2-96n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:914. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $4(x-\sqrt{x-1})+\left[2x-\frac{7}{4}\right]^2=3$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Sebastian Ilinca, Pîrşcoveni, Olt

L:915. Dacă $2\sqrt{x-2}+4\sqrt{y-3}=x+y,\ \forall x,y\in\mathbb{R},\ x\geq 2, y\geq 3$ atunci să se determine suma x+y .

Adrian Stan , Buzău

L:916. Fie a,b,c numere reale astfel încât $a+b+c\neq 0$. Arătați că

$$\frac{6(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}+\frac{(a^2+b^2+c^2)}{6(a^2+b^2+c^2)}\geq\frac{5}{2}.$$ În ce caz avem egalitate ?

Ileana Duma, Lucian Tuțescu, Craiova

L:917. Dacă $a,b,c,m,n \rangle 0$ atunci $\sum_{cyc}\frac{8a}{ma^2+nbc}\leq(m+n)\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)\cdot\left(\sum_{cyc}\frac{a}{bc}\right)$.

Florică Anastase, Lehliu-Gară, Călăraşi

L:918. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $x+\frac{x}{2x-1}+\frac{x^2}{x^2-2x+1}=\frac{25}{4}$

Béla Kovács, Satu Mare

L:919. Se consideră următoarele şiruri de numere $a_n=\frac{2022^n+2021n-2023}{x}$ şi $b_n=\frac{2022^n-2021n+2023}{x}$, $n\geq 1,\ x\in\mathbb{R}^*$.

a) Arătați că şirul $c_n=a_n-b_n$ este o progresie aritmetică.

b) Demonstrați că $\frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{a_n+b_n}$ nu depinde de n.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

L:920. Să se determine n numere întregi consecutive pentru care suma cuburilor lor este egală cu pătratul sumei lor.

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:921. **Dacă** $a,b,c\rangle 0,\ a+b+c=3$, atunci $3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 2\left(a^2+b^2+c^2\right)+ab+bc+ca$.

Marin Chirciu, Piteşti

L:922. Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este definit astfel: $a_1=5,\ a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{2},\ n\ par\\ \frac{a_n+51}{2},\ n\ impar\end{cases}$. Calculați a_{2022}.

Dorina Goiceanu, Craiova

▪ Clasa a X-a

L:923. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3^x+3^{-x}$.

a) Demonstrați că $f(x)+f(-x)\geq 4,\ \forall x\in\mathbb{R}$; b) Rezolvați ecuația $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x^{2022}+1}},\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

L:924. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile: a) $x^2+2\sqrt{x^2-6x+5}=6x-5$; b) $\log_4(-5x+6)\cdot\log_x 2=1$;

Constantin Dinu, Buzău

L:925. Rezolvați în numere reale strict pozitive sistemul de ecuații: $\begin{cases}x^y=y^x\\ x^{2021}=y^{2022}\end{cases}$.

Alecu Orlando, Roşiori De Vede

L:926. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația

$$4^x+4^y+4^z+2^{x+y}+2^{y+z}+2^{z+x}-2^{\frac{2x+y+z+2}{2}}-2^{\frac{2y+x+z+2}{2}}-2^{\frac{2z+x+y+2}{2}}=0.$$

Pál Orbán, Târgu Secuiesc

L:927. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $x^3+\left(\frac{4x}{5x-4}\right)^3=\frac{289}{25}$.

Kovács Béla, Satu Mare

L:928. Determinați coordonatele punctelor de intersecție cu axele de coordonate ale graficului funcției $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(1+x)+56e^{x}+71e^{2x}+16e^{3x}+e^{4x}-144$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:929. Fie a,b,c,d numere reale din intervalul $\left[\frac{1}{\sqrt{2}};\infty\right)$. Arătați că $a^2b^2c^2d^2+a^2+b^2+c^2+d^2\ge 4abcd+1$. În ce caz avem egalitate ?

Lucian Tuțescu, Ileana Duma, Craiova

L:930. Să se demonstreze că triunghiul de afixe a, b, c este echilateral dacă şi numai dacă triunghiul de afixe $a^2+ab+b^2,\ b^2+bc+c^2,\ c^2+ca+a^2$ este echilateral.

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:931. Rezolvați în mulțimea $(0^0,90^0)$ ecuația $\frac{1-\sqrt{3}\cdot tgx}{1-2\cdot\sin x}=2$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:932. Să se arate că în triunghiul ascuțitunghic ABC avem inegalitatea:
$\frac{a^2}{A}\left(\frac{\sin^5 A}{B}+\frac{\cos^5 A}{C}\right)+\frac{b^2}{B}\left(\frac{\sin^5 B}{C}+\frac{\cos^5 B}{A}\right)+\frac{c^2}{C}\left(\frac{\sin^5 C}{A}+\frac{\cos^5 C}{B}\right)\rangle\ \frac{3p^2}{\pi^2}$, notațiile fiind cele obişnuite într-un triunghi (unghiurile sunt măsurate în radiani).

Emil C. Popa, Radu Diaconu, Sibiu

Clasa a XI-a

L:933. Separați rădăcinile reale ale ecuației $\ln 3x+2\ln(1-x)+1=0$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:934. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & b & 0\\ c & a & c\\ 0 & -b & a\end{pmatrix}$, $a,b,c\in\mathbb{R}^*$. Să se arate că $Tr^3\left(A^n\right)=3^3\cdot\det\left(A^n\right),\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:935. Pentru $x\ge 0$ rezolvați ecuația $\sqrt{x}=\log_2 x$.

Adrian Gobej, Curtea de Argeş

L:936. Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{\ln(2-\cos^2 x)}$.

Adrian Stan, Buzău

L:937. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă astfel încât $f(0)=0$ şi $f(x)\cdot f^{I}(x)+f^2(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Să se arate că $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Adrian Stan, Buzău

L:938. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\sqrt[n]{n!})}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

L:939. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ şir de numere reale definit prin $x_1 = 0$ şi $x_n = \dfrac{(1-n)x_{n-1}+1-2n}{nx_{n-1}+2n}$. Să se calculeze $L = \lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}(2+x_k)$.

Florică Anastase, Lehliu-Gară, Călăraşi

L:940. Pentru $a\rangle 0,\ b\rangle\ 1$, să se calculeze $L = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(a+b^k)\tan^{-1}\left(\dfrac{n^2}{n^2-kn+k^2}\right)}{b^k+2a+b^{n-k}}$.

Mihåly Bencze-Săcele, Braşov, **Florică Anastase,** Lehliu-Gară, Călăraşi

L:941. Considerând şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \dfrac{n!e^n}{n^{n+1}}$. Se cere: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^{\frac{1}{n}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{1}{a_n}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}n^{a_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n{}^2)^{\frac{n}{2}}$.

Emil C. Popa, Sibiu.

Clasa a XII-a

L:942. Să se calculeze integrala $I = \displaystyle\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{dx}{x^{2022}+x^{2020}+x^2+1}$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:943. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $6x^4+\sqrt{21}x^3-40x^2-2\sqrt{21}x+15=0$ ştiind că $\dfrac{x_1+x_2}{x_3+x_4} = -\dfrac{3}{2}$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:944. Demonstrați inegalitatea: $\displaystyle\int_{\frac{1}{2022}}^{3}\frac{\sqrt{\sin x}}{x}dx < 2+\ln 3$.

Béla Kovács, Satu Mare

L:945. Considerăm funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f continuă, F derivabilă, $F(1)\ \langle\ \dfrac{3}{4}$. Dacă $F(cosx)+(\cos x)\cdot f(\cos x)\geq \sin x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ atunci F(x) nu este o primitivă a funcției f(x).

Emil C. Popa , Sibiu

L:946. Fie $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ integrabilă astfel încât $\dfrac{n}{(2m-1)(2m+1)}\leq f\left(\dfrac{m}{n}\right)\leq\dfrac{n}{m!+(m+1)!}$. Calculați $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

Sebastian Ilinca, Pârşcoveni, Olt

L:947. Să se calculeze: $\displaystyle\int\frac{x^2\left(\ln^6 x-2\ln^5 x\right)}{x^6-\ln^{12}x}dx,\ x\in(e,\infty)$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:948. Pentru $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ se consideră şirul de integrale $(I_n)_{n\geq 2}, I_n = \displaystyle\int_1^n\frac{1}{\{x\}+1}dx.$

a) Arătați că $I_3 = \ln 4$. **b)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n^2]{I_n}$.

Codruț-Sorin Zmicală, Sighetu Marmației

L:949. Se defineşte integrala având limita superioară infinită prin egalitatea: $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$. Să se calculeze integrala $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\mathrm{arctg}\,x}{x^2+4x+1}dx$.

Vasile Mircea Popa, Sibiu

„ **Believe you can and you are halfway there.”**
Theodore Roosevelt
(1882 - 1945)

5. QUICKIES

A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader's name, full address, and an e-mail address. Submited solutions should arrive before <u>September 01, 2022.</u>

PROPOSALS – QUICKIES

Q77. Proposed by Florin Rotaru, Focşani, Romania.

If ABC is an acute triangle, then prove that $3\sqrt{\frac{R}{2r}} \geq \sec\left(\frac{A-B}{2}\right)+\sec\left(\frac{B-C}{2}\right)+\sec\left(\frac{C-A}{2}\right)$.

Q78. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania.

If $a,b>0$, then prove that $\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{a^2+ab+b^2} \geq \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}(a+b+|a-b|)$.

Q79. Proposed by Marin Chirciu, Piteşti, Romania.

Prove that in any ΔABC holds the following inequality $AI^4+BI^4+CI^4 \geq 48r^4$.

Q80. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

If M is a point in the interior of triangle ABC such that $MA=x, MB=y, MC=z$, then prove the following inequality $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \geq 1+\frac{1}{2}\sum_{cyc}\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2$.

Q81. Proposed by Costel Florea, Bucharest, Romania.

Find $n \in N^*$ such that

$$\int_0^{\ln n} \frac{(x+1)(2xe^x+1)e^x}{x^4e^{4x}+2x^3e^{3x}+3x^2e^{2x}+2xe^x+1}dx = 1-\frac{1}{n\ln(108e)\ln n-6\ln 2\cdot\ln 3+1}.$$

SOLUTIONS - QUICKIES

Q71. Proposed by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania.

If $a,b,c>0$ with $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{64}{9}$, then prove that $\frac{a^4+b^3}{a^3+b^3}+\frac{b^4+c^3}{b^3+c^3}+\frac{c^4+a^3}{c^3+a^3} \geq \frac{21}{8}$.

Solution by author. We note that for $a=b=c=\frac{3}{4}$ we have equality. First by AM-GM inequality and then by HM-AM we obtain:

$$\sum\frac{a^4+b^3}{a^3+b^3}=\sum\frac{\frac{a^4}{3}+\frac{a^4}{3}+\frac{a^4}{3}+\frac{27}{256}+b^3-\frac{27}{256}}{a^3+b^3}\overset{(AM-GM)}{\geq}\sum\frac{4\sqrt[4]{\frac{a^4}{3}\cdot\frac{a^4}{3}\cdot\frac{a^4}{3}\cdot\frac{27}{256}}+b^3-\frac{27}{256}}{a^3+b^3}=$$

$$=\sum\frac{a^3+b^3-\frac{27}{256}}{a^3+b^3}=3-\frac{27}{256}\sum\frac{1}{a^3+b^3}\overset{(HM-AM)}{\geq}3-\frac{27}{256}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{a^3}\right)=$$

$$=3-\frac{27}{256}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=3-\frac{27}{256}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{64}{9}=3-\frac{3}{8}=\frac{21}{8}.$$

Q72. Proposed by Rovsen Pirkuliyev, Sumgait, Azerbaijan.

If ABC is a triangle with usual notations, then prove that $AH^4+BH^4+CH^4\geq 3R^4$.

Solution 1 by author. By Bergström inequality and the identities

$AH^2=4R^2-a^2, BH^2=4R^2-b^2, CH^2=4R^2-c^2$, we have that

$$AH^4+BH^4+CH^4\geq\frac{(AH^2+BH^2+CH^2)^2}{3}=\frac{(12R^2-(a^2+b^2+c^2)^2}{3},$$

and if we take into account by $\sum a^2\leq 9R^2$, then we obtain the desired inequality.

Solution 2 Marin Chirciu, Piteşti, Romania. We use $AH=2R|\cos A|$, then inequality becomes

$16R^4\left(\cos^4 A+\cos^4 B+\cos^4 C\right)\geq 3R^4\Leftrightarrow\cos^4 A+\cos^4 B+\cos^4 C\geq\frac{3}{16}$, which yields from

$\sum\cos^4 A\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum\cos^2 A\right)^2}{3}\overset{(1)}{\geq}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{3}=\frac{3}{16}$, where (1) is $\sum\cos^2 A\geq\frac{3}{4}$, true since

$\sum\cos^2 A=\frac{6R^2+4Rr+r^2-p^2}{2R^2}\overset{(2)}{\geq}\frac{3}{4}$, where (2) is $\frac{6R^2+4Rr+r^2-p^2}{2R^2}\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2p^2\leq 9R^2+8Rr+2r^2$, which by Gerretsen's inequality $p^2\leq 4R^2+3Rr+3r^2$.

It remains to show that $2\left(4R^2+3Rr+3r^2\right)\leq 9R^2+8Rr+2r^2\Leftrightarrow R^2\geq 4r^2$, true by Euler's inequality $R\geq 2r$.

Equality holds iff triangle ABC is equilateral.

Q73. Proposed by Dorin Mărghidanu, Corabia, Romania.

If $a_k>0$ for any $k=\overline{1,5}$, then prove that

$$\frac{a_1-a_4}{a_2+a_3+a_4}+\frac{a_2-a_5}{a_3+a_4+a_5}+\frac{a_3-a_1}{a_4+a_5+a_1}+\frac{a_4-a_2}{a_5+a_1+a_2}+\frac{a_5-a_3}{a_1+a_2+a_3}\geq 0.$$

Solution 1 by author. Adding 5 in both members, we obtain successively:

$$\frac{a_1-a_4}{a_2+a_3+a_4}+1\ \frac{a_2-a_5}{a_3+a_4+a_5}+1\ \frac{a_3-a_1}{a_4+a_5+a_1}+1\ \frac{a_4-a_2}{a_5+a_1+a_2}+1\ \frac{a_5-a_3}{a_1+a_2+a_3}+1\geq 5$$

$\Leftrightarrow\frac{a_1+a_2+a_3}{a_2+a_3+a_4}+\frac{a_2+a_3+a_4}{a_3+a_4+a_5}+\frac{a_3+a_4+a_5}{a_4+a_5+a_1}+\frac{a_4+a_5+a_1}{a_5+a_1+a_2}+\frac{a_5+a_1+a_2}{a_1+a_2+a_3}\geq 5$, whic is true by AM-GM inequality. Equality occurs iff $a_1=a_4,\ a_2=a_5,\ a_3=a_1,\ a_4=a_2,\ a_5=a_3$, so finally iff $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5$.

Q74. Proposed by Florin Rotaru, Focşani, Romania.

Prove that in any triangle ABC is true the following inequality $\frac{abc}{a+b+c} \geq 8r^2 - R^2$.

Solution 1 by author. Using

$p \geq 3\sqrt{3}R \Rightarrow p^2 \geq 27r^2 \Rightarrow 2p^2 \leq 54r^2; 9R^2 \geq a^2+b^2+c^2; ab+bc+ca = p^2+r^2+4Rr$ and

$a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca)$ (Schur inequality) we deduce that

$$9R^2+\frac{9abc}{a+b+c} \geq a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9R^2+\frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca) = 2(p^2+r^2+4rR) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2p^2+2r^2+8rR-9R^2 \geq 54r^2+2r^2+8Rr-9R^2 \overset{Euler}{\geq} 54r^2+2r^2+16r^2-9R^2 =$$

$= 72r^2-9R^2$. Hence, $\frac{abc}{a+b+c} \geq 8r^2-R^2$, q.e.d.

Solution 2 Marin Chirciu, Piteşti, Romania. Using $abc = 4Rrp$ and $a+b+c = 2p$, the inequality becomes $\frac{4Rrp}{2p} \geq 8r^2-R^2 \Leftrightarrow 2Rr \geq 8r^2-R^2 \Leftrightarrow R^2+2Rr-8r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(R+4r) \geq 0$, true by Euler's inequality $R \geq 2r$.

Equality holds iff triangle ABC is equilateral.

Solution 3 by Mihály Bencze, Braşov, Romania. $\frac{abc}{a+b+c} \geq 8r^2-R^2 \Leftrightarrow \frac{4sRr}{2s} \geq 8r^2-R^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2Rr \geq 8r^2-R^2 \Leftrightarrow (R+r)^2 \geq 9r^2 \Leftrightarrow R+r \geq 3r \Leftrightarrow R \geq 2r$, Euler inequality.

Remark. In all triangle ABC holds $\frac{4s^2}{27} \geq \frac{abc}{a+b+c} \geq 8r^2-R^2$.

Indeed, $\frac{abc}{a+b+c} \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \frac{1}{a+b+c} = \frac{(a+b+c)^2}{27} = \frac{4s^2}{27}$.

Q75. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

Compute $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(2n-1)!!}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{(n+1)^2} - \frac{\sqrt[n]{n!}}{n^2}\right)$.

Solution by author. We have $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$ snd $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n} = \frac{2}{e}$. Denote

$u_n = \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$, $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n} = 1$

and $\lim_{n\to\infty} u_n^n = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}\frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} = \frac{1}{e^2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} = \frac{1}{e}$. So,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(2n-1)!!}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{(n+1)^2} - \frac{\sqrt[n]{n!}}{n^2}\right) = = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n}\right)^2 \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot \ln u_n^n = \frac{4}{e^2}\cdot\frac{1}{e}\cdot 1\cdot \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{4}{e^3}.$$

Also solved by Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain.

Q76. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania.

If $a,b,c>0$ and $abc=1$, then prove that $\sum\frac{1}{(a+c)b+a+b+4}\le\frac{3}{8}$.

Solution by author. Since $abc=1$ there exists $x,y,z>0$ such that $a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}$.

We have $(a+c)b+a+b+4=\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+4=\frac{x+y}{z}+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4\ge\frac{x+y+6z}{z}$.

Then we have to prove that $\sum\frac{z}{x+y+6z}\le\frac{3}{8}$. We can write

$$\sum\left(\frac{z}{x+y+6z}-\frac{1}{8}\right)=\sum\frac{z-x}{8(x+y+6z)}+\sum\frac{z-y}{8(x+y+6z)}=$$

$$=\sum\frac{z-x}{8(x+y+6z)}+\sum\frac{x-z}{8(6x+y+z)}=\sum(x-z)\left(\frac{1}{8(6x+y+z)}-\frac{1}{8(x+y+6z)}\right)=$$

$$=\sum\frac{(x-z)(x+y+6z-6x-y-z)}{8(6x+y+z)(x+y+6z)}=-\sum\frac{5(x-z)^2}{8(6x+y+z)(x+y+6z)}\le 0.$$

So $\sum\frac{z}{x+y+6z}\le\frac{3}{8}$, and we are done.

GLUME....

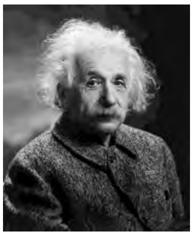
- În ce grupă clasificăm şarpele cu ochelari ? întreabă profesorul.
- În cea a animalelor cu vederea slabă, a răspuns un elev.

- Care sunt factorii indispensabili vieții, copii ? întreabă profesorul.
- Soarele, aerul, apa şi ....telefonul, răspunse un elev.

- Când este timpul cel mai potrivit pentru culegeerea merelor ? întreabă învățătorul.
- Când doarme paznicul ! răspunse Gigel.

- Nu înțeleg de ce latina îți pune atâtea probleme : doar e o limbă moartă.
- Da, tăticule, dar profesorii trăiesc.

„ Adevăratul semn al inteligenței nu sunt cunoştințele, ci imaginația ”
Albert Einstein
(1879 - 1955)



6. Caleidoscop matematic

DESPRE 2022

de Kovács Béla, Satu Mare

Suntem în anul calendaristic **2022**. Putem să ne gândim de câte ori vom scrie acest număr, de câte ori vom vede sau ne vom întâlni cu numărul 2022. **Este un număr natural**. Ce mai putem şti, ce se poate afla despre acest număr. Iată o mică prezentare despre 2022, deschisă şi pentru o posibilă completare, adăugare, alte descoperiri.

Este un număr compus, număr par, descompunerea în factori primi: $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$
Divizorii lui sunt: 1 , 2 , 3 , 6 , 337 , 674 , 1011 , 2022
Total 8 divizori.
Suma divizorilor mai mici ca numărul însuşi este: 2034. **Este un număr abundent.**
Este egal cu suma divizorilor mai mici ca numărul însuşi luate cu semnul plus sau cu semnul minus: $1 + 2 + 3 - 6 + 337 + 674 + 1011 = 2022$.
Este un număr admirabil.
Se poate scrie ca suma a trei divizori ai lui: $337 + 674 + 1011 = 2022$
Este divizibil cu suma cifrelor sale: $2022 = (2 + 0 + 2 + 2) \cdot 337$

Se poate scrie ca **o sumă de numere naturale consecutive**:
$2022 = 673 + 674 + 675$
$2022 = 504 + 505 + 506 + 507$
$2022 = 163 + 164 + 165 + 166 + 167 + 168 +169 + 170 + 171 + 172 + 173 + 174$
Este un număr politicos, gradul lui de politețe este 3.

Se poate scrie ca **o sumă de numere naturale pare consecutive**:
$2022 = 1010 + 1012$
$2022 = 672 + 674 + 676$
$2022 = 332+334+336+338+340+342$
Scriem ca o sumă de numere prime: $2022 = 11 + 2011$ $2022 = 1009 + 1013$
$2022 = 2 + 3 + 2017$ $2022 = 2 + 17 + 2003$ $2022 = 2 + 929 + 1091$
$2022 = 3 + 5 + 17 + 1997$ $2022 = 5 + 7 + 991 + 1019$

Folosind termeni din **şirul lui Fibonacci**:
$2022 = F(2) + F(7) + F(9) + F(14) + f(17) = 1 + 13 + 34 + 377 + 1597$

Cu puterile lui 2:

$2022 = 2^{11} - 2^4 - 2^3 - 2$

$2022 = 2^{11} - 2^5 + 2^3 - 2$

$2022 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^2 + 2$

$2022 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 - 2^3 - 2$

Cu puterile lui 3: $2022 = 3^7 - 3^5 + 3^4 - 3$

Ca o sumă de trei pătrate perfecte:

$2022 = 2^2 + 13^2 + 43^2$ $\quad 2022 = 5^2 + 29^2 + 34^2$ $\quad 2022 = 7^2 + 23^2 + 38^2$

$2022 = 10^2 + 31^2 + 31^2$ $\quad 2022 = 11^2 + 26^2 + 35^2$ $\quad 2022 = 13^2 + 22^2 + 37^2$

Între numere Pitagorice: $1050^2 + 1728^2 = 2022^2$ $\quad 2022^2 + 2696^2 = 3370^2$

Inversul ca o sumă de fracții egiptene: $\frac{1}{2022} = \frac{1}{2023} + \frac{1}{4090506} = \frac{1}{2023} + \frac{1}{2022 \cdot 2023}$

$\frac{1}{2022} = \frac{1}{2024} + \frac{1}{2046264}$ $\quad \frac{1}{2022} = \frac{1}{2025} + \frac{1}{1364850}$

$\frac{1}{2022} = \frac{1}{2026} + \frac{1}{1024143}$ $\quad \frac{1}{2022} = \frac{1}{2028} + \frac{1}{683436}$

$\frac{1}{2022} = \frac{1}{2031} + \frac{1}{456298}$ $\quad \frac{1}{2022} = \frac{1}{2034} + \frac{1}{342729}$

$\frac{1}{2022} = \frac{1}{2040} + \frac{1}{229160}$ $\quad \frac{1}{2022} = \frac{1}{2058} + \frac{1}{115591}$

$\frac{1}{2022} = \frac{1}{2359} + \frac{1}{14154}$ $\quad \frac{1}{2022} = \frac{1}{2696} + \frac{1}{8088}$

$\frac{1}{2022} = \frac{1}{3033} + \frac{1}{6066}$ $\quad \frac{1}{2022} = \frac{1}{3370} + \frac{1}{5055}$

$\frac{1}{2022} = \frac{1}{4044} + \frac{1}{4044} = \frac{1}{2 \cdot 2022} + \frac{1}{2 \cdot 2022}$

Inversul ca o diferență de fracții egiptene:

$\frac{1}{2022} = \frac{1}{674} - \frac{1}{1011}$ $\quad \frac{1}{2022} = \frac{1}{1011} - \frac{1}{2022}$

$\frac{1}{2022} = \frac{1}{1348} - \frac{1}{4044}$ $\quad \frac{1}{2022} = \frac{1}{1685} - \frac{1}{10110}$

$\frac{1}{2022} = \frac{1}{1986} - \frac{1}{111547}$ $\quad \frac{1}{2022} = \frac{1}{2004} - \frac{1}{225116}$

$\frac{1}{2022} = \frac{1}{2010} - \frac{1}{338685}$ $\quad \frac{1}{2022} = \frac{1}{2013} - \frac{1}{452254}$

$\frac{1}{2022} = \frac{1}{2016} - \frac{1}{679392}$ $\quad \frac{1}{2022} = \frac{1}{2018} - \frac{1}{1020099}$

$\frac{1}{2022} = \frac{1}{2019} - \frac{1}{1360806}$ $\quad \frac{1}{2022} = \frac{1}{2020} - \frac{1}{2042220}$

$\frac{1}{2022} = \frac{1}{2021} - \frac{1}{4086462} = \frac{1}{2021} - \frac{1}{2021 \cdot 2022}$

Cu factoriali: $2022 = \frac{8!}{4!} + \frac{6!}{2!} - 4! + 3!$ $\quad 2022 = \frac{7!}{2!} - \frac{6!}{2!} - 5! - 4! + 3!$

$2022 = 7! - \frac{9!}{5!} + 3!$ $\quad 2022 = 3 \cdot 6! - 5! - 4! + 3!$ $\quad 2022 = \frac{10!}{6!} - \frac{9!}{5!} + 3!$

Folosind o singură cifră:

$2022 = (1111 - 111 + 11) \cdot (1 + 1)$, $\quad 2022 = 2222 - 222 + 22$

$2022 = 3 + (3 + 3)(3 + 333) + 3,$ $\qquad 2022 = \frac{3333-333+33}{3}\cdot\frac{3+3}{3}$

$2022 = \frac{4444-444+44}{4}\cdot\frac{4+4}{4},$ $\qquad 2022 = \frac{5555-555+55}{5}\cdot\frac{5+5}{5}$

$2022 = \frac{6666-666+66}{6}\cdot\frac{6+6}{6},$ $\qquad 2022 = \frac{7777-777+77}{7}\cdot\frac{7+7}{7}$

$2022 = \frac{8888-888+88}{8}\cdot\frac{8+8}{8},$ $\qquad 2022 = \frac{9999-999+99}{9}\cdot\frac{9+9}{9}$

Folosind toate cifrele, ordonate crescător, respectiv descrescător:
$-1 \cdot 2 + (3 + 4 \cdot 5)(6 - 7 + 89) = [9 + 8(7 \cdot 6 - 5 + 4)](3 + 2 + 1) = 2022$

Într-un alt sistem de numerație:
$2022_{10} = 11111100110_2$ $\qquad 2022_{10} = 2202220_3$ $\qquad 2022_{10} = 133212_4$
$2022_{10} = 31042_5$ $\qquad 2022_{10} = 13210_6$ $\qquad 2022_{10} = 5616_7$
$2022_{10} = 3746_8$ $\qquad 2022_{10} = 2686_9$ $\qquad 2022_{10} = 1579_{11}$
$2022_{10} = 1206_{12}$
În baza 7: $\quad 2022_7 = 16_7 \cdot 105_7 \quad 2022_7 = 35_7 \cdot 36_7$
În baza 11: $\quad 2022_{11} = 31_{11} \cdot 72_{11}$

Încadrat în inegalități: $\qquad 1936 = 44^2 < 2022 < 45^2 = 2025$
$1.1^{79} < 2022 < 1.1^{80}$

$\sum_{k=1}^{209}\sqrt{k} < 2022 < \sum_{k=1}^{210}\sqrt{k}, \qquad \sum_{k=1}^{403}\ln k < 2022 < \sum_{k=1}^{404}\ln k, \qquad \sum_{k=1}^{815}\lg k < 2022 < \sum_{k=1}^{816}\lg k$

$2.717 < \left(1+\frac{1}{2022}\right)^{2022} < 2.718 < e$

Într-o ecuație Pell: $x^2 - 2022y^2 = 1$ cu soluția fundamentală: $x = 1349$ és $y = 30$

2022 scris cu cifre romane: MMXXII

În final 2022 = (exprimat cu numerele 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 , 12 folosind cele patru operații elementare)

$$= 12+\frac{3}{2-\frac{3}{2}}-\frac{2\cdot 4}{3-\frac{2\cdot 4}{3}}+\frac{3\cdot 5}{4-\frac{3\cdot 5}{4}}-\frac{4\cdot 6}{5-\frac{4\cdot 6}{5}}+\frac{5\cdot 7}{6-\frac{5\cdot 7}{6}}-\frac{6\cdot 8}{7-\frac{6\cdot 8}{7}}+\frac{7\cdot 9}{8-\frac{7\cdot 9}{8}}+\frac{8\cdot 10}{9-\frac{8\cdot 10}{9}}+\frac{9\cdot 11}{10-\frac{9\cdot 11}{10}}$$

În acest articol numărul 2022 apare de 112 ori.

Bibliografie:
Derive 6.10 soft
https://nrich.maths.org/2074 (polite numbers)
https://www.numbersaplenty.com/set/admirable_number/
https://www.cuemath.com/algebra/fibonacci-numbers/
https://en.wikipedia.org/wiki/Pell%27s_equation

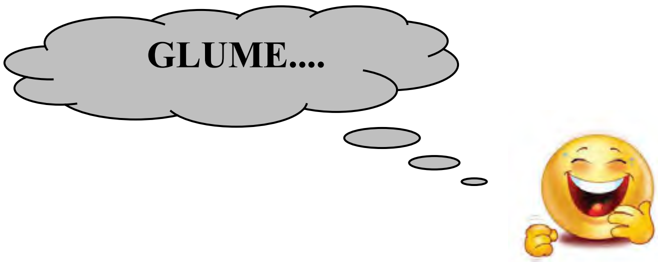
AMURG ROTUND

De ard, iscate din eternul Soare,
Săgeți prelungi, menite a-ncălzi,
Tot în amurg se sting, în solitara zare
Cernită-n lat şi-n lung, himeră de o zi...

Mă-ntreb: prin scrisuri întâlnit-am, oare,
Cum c-ar ieşi iar dintr-un răsărit?
Dar cum altfel, telurică splendoare?
Rotund amurg, recent rupt din zenit...

Notă.
Prin ligamente, se găsesc 8 noțiuni referitoare la cerc.
(Ligamentul este un procedeu din rebus, prin care într-o propoziție sau frază, terminația unui cuvânt se lipeşte de începutul cuvântului următor, rezultând un nou cuvânt).

Dumitru Preoteasa, Giurgiu



- Ionescule, dacă te rătăceşti ziua în pădure şi nu ai busola la tine, cum afli unde este nordul ?
- Foarte simplu, domnule profesor. Mă duc acasă şi o iau !

O maşină trece pe roşu. Agentul de circulație o opreşte.
- Ştiți ce înseamnă când ridic eu mâna ? întreabă polițistul.
- Cum să nu, doar sunt de 30 de ani profesor......

SOLUȚIE - AMURG ROTUND

De ar**d**, **isc**ate din eternul Soare,
Săgeți pre**lungi**, **me**nite a-ncălzi,
Tot în amurg se sting, în solita**ra** **za**re
Cernită-n lat şi-n l**ung**, **hi**meră de o zi...

Mă-ntreb: pr**in** **scris**uri întâlnit-am, oare,
Cum c-**ar** **ie**şi iar dintr-un răsărit?
Dar **c**um altfel, telurică splendoare?
Rotund amurg, re**cent** **ru**pt din zenit...

Soluție alternativă, AMURG ROTUND: disc/lungime/raza/unghi/inscris/arie/arc/centru.