SCLIPIREA MINȚII

REVISTĂ NAȚIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICĂ; PUBLICAȚIE SEMESTRIALĂ, AN XV, NR XXX, 2022

SM

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEME PROPUSE

SM

ISTORIA MATEMATICII

CALEIDOSCOP MATEMATIC

Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

LICEUL TEHNOLOGIC " MESERII ȘI SERVICII ", BUZĂU

SCLIPIREA MINTII 30

Revistă naţională de cultură matematică, publicaţie semestrială, An XV, Nr. XXX, NOIEMBRIE 2022, BUZĂU

Colectivul de Redacţie

- **Membrii onorifici:**

Costică Ambrinoc – Preşedinte Filiala Râmnicu Sărat a Societăţii de Ştiinţe Matematice
Cătălin Iordache – Preşedinte Filiala Buzău a Societăţii de Ştiinţe Matematice
Cristina Drugă – Inspector matematică

D. M . Bătinetu – Giurgiu
Nicolae Ivăşchescu
Lucian Tuţescu
Marius Drăgan
Dorin Mărghidanu
Daniel Sitaru
Mihály Bencze
Gheorghe Ghiţă
Ionel Tudor

- **Director:**
Neculai Stanciu

- **Redactor şef:**
Adrian Stan

- **Redactori principali:**
Andrei Octavian Dobre
Marin Chirciu
Ion Stănescu
Iuliana Traşcă
Gabriel Tica
Constantin Dinu

CUPRINS

ISTORIA MATEMATICII..... 1
ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE.....12
PROBLEME REZOLVATE..... 30
PROBLEME PROPUSE 51
QUICKIES 58
CALEIDOSCOP MATEMATIC 61

GÂNDEŞTE CORECT

- **Membri:**

Orlando **Alecu**, Florică **Anastase**, Mădălin **Avram**, Flavia **Anton**, Daniela **Badea**, Mădălina **Buliga**, Gabriela **Buzea**, Anicuţa **Beţiu**, Doina Cristina **Călina**, Elena **Ciobîcă**, Constantin **Ciobîcă**, Ana **Cismaru**, Cristian **Catană**, Aurel **Chiriţă**, Simona **Chiriţă**, Marin **Chirciu**, Nela **Ciceu**, Marian **Ciuperceanu**, Claudiu **Ciulcu**, Cătălin **Cristea**, Tatiana **Cristea**, Marian **Cucoaneş**, Luiza Lorena **Cremeneanu**, Simona **Dascălu**, Mihaela **Daianu**, Camelia **Dană**, Simona **Dascălu**, Radu **Diaconu**, Ileana **Duma**, Camelia **Dana**, Gheorghe **Dârstaru**, Daniela **Dibu**, Otilia **Drăgan**, Ani **Drăghici**, Luiza **Dumitrescu**, Ileana **Duma**, Costel **Florea**, Alina Georgiana **Ghiţă**, Ovidiu **Ghiţă**, Robert **Gheorghiţă**, Mădălina **Giurgescu**, Lucian Dan **Grigorie**, Ramona-Carmen **Grigore**, Adrian **Gobej**, Ştefan **Gobeş**, Dorina **Goiceanu**, Carina **Ionescu**, Marin **Ionescu**, Mihai **Ionescu**, Adriana **Ioniţă**, Ionuţ **Ivănescu**, Vasile **Jiglău**, Bela **Kovacs**, Adalbert **Kovacs**, Dorin **Mărghidanu**, Mihaela **Mirea**, Mariana **Mitea**, Simona **Miu**, Cristian **Moanţă**, Minodora **Nica**, Constantin **Nicolau**, Irina **Nedelcu**, Kevin Soto **Palacios**, Petre **Păunescu**, Sorin **Pirlea**, Alin **Pop**, Emil C. **Popa**, Cătălin **Pană**, Vasile Mircea **Popa**, Florentina **Popescu,** Delia **Popescu**, Maria **Popescu**, Dumitru **Preoteasa**, Simona **Radu**, Nicolae **Radu**, Petre **Rău**, Florin **Rotaru**, Pal **Orban**, Nicolae **Oprea**, Cezar **Ozunu**, Iulia **Sanda**, Dumitru **Săvulescu**, Ilinca **Sebastian**, Cătălina **Stan**, Roxana **Stanciu**, Ileana **Stanciu**, Mihaela **Stancele**, Liviu **Smarandache**, Andreea **Stoica**, Doina **Stoica**, Mircea Mario **Stoica**, Daniela **Stoian**, Alina **Tigae**, Rareş **Tudorăşcu**, Ovidiu **Ţâţan**, Gabriela **Toader**, Eugenia **Turcu**, Rareş **Tudorăşcu**, Marius **Ursărescu**, Roxana **Vasile**, Carina-Irina **Viespescu**, Daniel **Văcaru**, Gigi **Zaharia**, Codruţ-Sorin **Zmicală**, Bogdan-Marius **Ioniţă**

REDACŢIA
Liceul Tehnologic „Meserii şi Servicii”, Buzău, Strada Bazalt, Nr. 15bis, Cod. 120167, Tel. 0238719223
E-mail: ady_stan2005@yahoo.com
Coordonator proiect: Adrian Stan

Tipar: editgraph Buzău, www.editgraph.ro

„ Matematica este fundația de nezdruncinat a științei și fântâna inepuizabilă a foloaselor pentru treburile omenești”.
Isaac Barrow
(1630- 1677)

1. Istoria matematicii

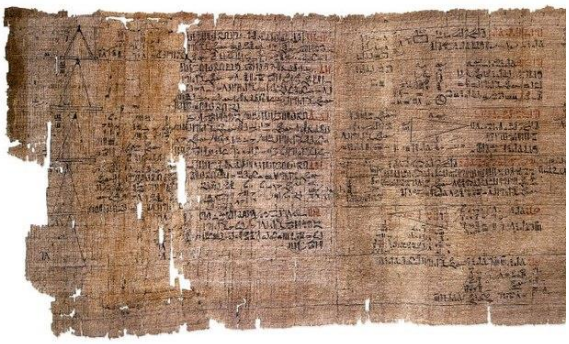
500 de ani de la nașterea lui Lodovico Ferrari - rezolvitorul ecuațiilor algebrice de gradul 4, prin radicali

de prof. **Ionel Tudor**, prof. **Adrian Stan**

La împlinirea a 500 de ani de la nașterea matematicianului italian **Lodovico Ferrari** (1522- 1565), cel care a rezolvat prin radicali, pentru prima dată ecuația generală de gradul patru, prezentăm un istoric ar rezolvării ecuațiilor algebrice de gradul al III-lea și al IV-lea.

Rezolvarea ecuațiilor algebrice a constituit multă vreme obiectul principal al algebrei, iar teoria ecuațiilor urmărește găsirea diferitelor proprietăți ale unei ecuații, care să permită calculul exact sau aproximativ al radicalilor și să emită concluzii asupra rădăcinilor când coeficienții ecuației au anumite proprietăți.

Vechii egipteni erau preocupați nu doar de problemele reale ale vieții, ci și de probleme teoretice, căutând să găsească și să generalizeze un model matematic. Astfel, manualul „**Papirusul Rhind**” este o copie în scriere hieratică executată de scribul egiptean **Ahmes**, a unui text mai vechi din perioada 1900- 1800 î. Hr. Acest papirus scris între 1788- 1780 î. Hr, a fost descoperit de egiptologul scoțian **Rhind** (1833- 1863) în Valea Nilului, în anul 1858 și publicat în 1877 de către **A. Eisenlohr**. Este poate cel mai important și complet document pe care-l avem despre matematica egipteană veche (sec. XVIII î.Hr.)



El cuprinde un set de probleme de aritmetică- algebră, fie sub formă de reguli-formule, fie calcule de arii și volume în cazul problemelor de geometrie. Acest manual, ne arată că egiptenii cunoșteau ecuațiile de gradul I, fracțiile și calculul aproximativ al ariei cercului (considerau $\pi \simeq \frac{256}{81}$).

În secolele 25- 16 î. Hr., în Mesopotamia, civilizația sumeriană dezvoltă un sistem complex de metrologie, realizează tabele de multiplicări, probleme de geometrie și de divizibilitate rămase pe tăblițe de lut. Alte probleme conțineau metode de rezolvare a ecuațiilor liniare și pătratice. Chestiuni de ordin practic, în scopul măsurărilor au condus în sec. XX- XVIII î.Hr la ecuații de gradul doi în scrierile cuneiforme pe tăblițe de lut, ale matematicienilor babilonieni care au obținut astfel un progres față de algebra egipteană.

Soluția babilonienilor la rezolvarea ecuației de gradul doi $x^2 = px + q,\ \ p,q \rangle 0$ este

$x=\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}+\frac{p}{2}$(doar cea pozitivă) obținută prin formarea pătratului perfect $\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=x^2-px+\frac{p^2}{4}=q+\frac{p^2}{4}$ (deci cunoșteau formulele $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$).

Progresele în calculul numeric, rezolvarea ecuației de gradul întâi, dar mai ales reducerea ecuației de gradul doi la formele $x^2=px+q,\ x^2=px+q$ sau $x^2+q=px,\ p,q\rangle 0$ și rezolvarea lor, au constituit realizări remarcabile ale matematicii babiloniene. Mai mult, ei au considerat și rezolvat și unele cazuri particulare de ecuații cubice, care se reduc la extrageri de rădăcină cubică cu ajutorul unor algoritmi și calcule aproximative.

Cercetări cu privire la extragerea rădăcinii pătrate, le găsim și la matematicienii indieni, în special **Bhaskara** (n.114 d.Hr).

Începând cu secolul VI î. Hr., matematica greacă (elenestică) se deosebește de cultura premergătoare ei (deoarece locul raționamentului inductiv este luat de raționamentul deductiv, prin folosirea logicii și a unui sistem de definiții și axiome în care se folosea rigoarea matematică pentru demonstrarea afirmațiilor).

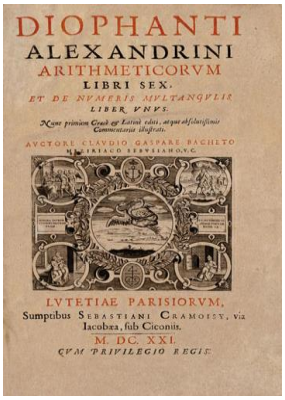
Matematica greacă antică s-a ocupat de probleme algebrice tratate geometric, prin construcții grafice. Cum rădăcina pătrată poate fi construită cu rigla și compasul, matematicienii greci reușeau să rezolve ecuații de gradul doi așa cum există prezentate în cartea a X-a a „**Elementelor lui Euclid**" (300 î. Hr.).

În Alexandria, centrul științific al Egiptului Antic, începând cu Heron și cu Diophant se fac pași importanți în stabilirea unor reguli de rezolvare a ecuațiilor algebrice.

Matematicianul și inginerul **Heron din Alexandria** (100 d. Hr.) a preluat tradiția babiloniană în ceea ce privește rezolvarea ecuațiilor de gradul doi prin aproximarea soluțiilor prin extragerea rădăcinii pătrate, metodă găsită și la **Arhimede** (287- 212 d. Hr).

În sec. III d Hr., a trăit matematicianul grec **Diophant din Alexandria** (c. 210- c. 294 d. Hr), unul dintre matematicienii remarcabili ai perioadei târzii alexandrine.

Precursor al algebrei clasice, Diophant aduce mari contribuții în teoria numerelor și în studiul ecuațiilor prin opera sa „**Arithmetika**" – o colecție de 13 cărți de algebră din care s-au păstrat 7 (primele trei în versiune greacă și ultimele în versiune arabă), și în care apar notațiile sale literale și semne pentru diverse mărimi necunoscute. Este primul care renunță la reprezentarea geometrică intuitivă a mărimilor numerice prin segmente sau arii și folosește notațiile literale.



Rezolvarea ecuațiilor liniare și pătratice, Diophant o făcea cu metoda reducerii termenilor asemenea și eliminarea termenilor negativi până când se ajungea la forma $ax^n=b$ și găsea soluția pozitivă și rațională. Plecând de la rezolvarea unor sisteme de ecuații ajunge și la rezolvarea unor ecuații pătratice $Ax^2+Bx+C=y,\quad Ax^2+C=y^2,$ și este posibil să fi ajuns și la găsirea rădăcinii pătratice cu semn negativ pe care nu le-a luat în discuție. Ecuațiile de forma $x^2-Dy^2=1$ (unde D nu este pătrat perfect) au fost numite mai târziu de către Euler, ecuații Pell.

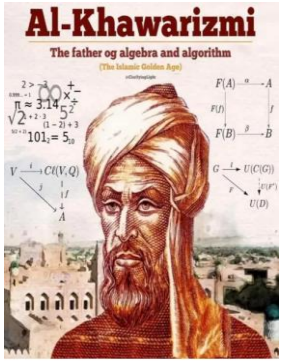
Legat de rezolvarea ecuațiilor de gradul 3, a rămas de la el ecuația $x^3+3x-3x^2-4=x^2+2x$, pe care o aduce la forma mai simplă $x^3+x=4x^2+4$ și la care dă răspunsul direct x = 4.

Fiind preocupat de rezolvarea ecuațiilor nedefinite de ordin superior $Ax^n+Bx^{n-1}+.....+Kx-M=y^2,(sau\ y^3)$ numele său va fi asociat mai târziu la rezolvarea unor ecuații numite în onoarea sa "ecuații diofantice" – ecuații cu coeficienți și soluții întregi, opera sa fiind sursă de inspirație pentru numeroși matematicieni ca Bombelli, Viète, Fermat, Bernoulli, etc.

În anul 628 matematicianul și astronomul indian **Brahmagupta** (598 - 670) scrie un manual în versuri "***Brāhmasphuṭasiddhānta*** " ("Deschiderea Universului") în care expune pe lângă calculul cu fracții, raționalizarea numitorilor, calculul rădăcinii pătrate, probleme de astronomie și modul de rezolvare ale unor ecuații, inclusiv o regulă algebrică de rezolvare a ecuației de gradul doi. Aici apare pentru prima dată cifra zero considerată ca număr și sunt descrise operațiile de adunare și scădere a numerelor negative.

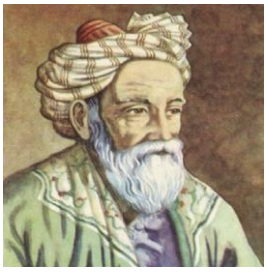
Din cartea lui, matematicienii islamici au luat cunoștință de sistemul zecimal indian și l-au adaptat la ceea ce numim acum sistemul cu numere arabe.

În Evul Mediu, în lumea arabă, la începutul sec. al IX-lea, matematicianul și astronomul persan **Al Khwarizmi** (780 - 850), în lucrarea sa "**Hisab al-jabr w'al-muqabala**" ("Calculul prin adăugare și aproximare"), cuprinde metode de rezolvare a tuturor ecuațiilor de gradul întâi și doi cu rădăcini pozitive, cu ajutorul sistemului zecimal dezvoltat de indieni.



În Europa, prin traducerea operelor sale este introdus sistemul de numerație indo-arab, denumirea de algebră ("**al-jabr**") provenind din lucrările lui Al Khwarizmi și semnifică una din cele cele două operații de bază folosită la rezolvarea ecuațiilor, anume separarea termenilor dintr-o ecuație. De asemenea, cuvântul "**algoritm**" provine din forma latină a numelui său, "Al-Horezmi" și se găsește în titlul unei cărți de-a sa despre arta hindusă a calculului "**Algoritmi de numero indorum**".

În sec. X, **Abu Kamil** (850 - 930) este primul matematician arab care în lucrarea sa „Carte de algebră" („**Al- kitab al muhtara fi hisale al – djabr wa-l- muqabala**") utilizează sistematic numerele iraționale și rezolvă ecuații algebrice de grad cel mult opt cu mai multe necunoscute. Pe baza acestei cărți, mai târziu, **Leonardo Fibonacci** (1170 - 1250) aduce în Europa toate aceste cunoștințe.



Spre sfârșitul secolului al XI-lea, în 1074 , matematicianul, poetul și filozoful persan **Omar Khayyam** (1048 - 1123), a scris lucrarea "**Risala fi-l harahin al masail al – jabr va-l mukabala**" ("Despre demonstrațiile problemelor de algebră și al mukabalei"), în care se încearcă o clasificare a ecuațiilor de grad II și III, dând soluții ingenioase la unele cazuri particulare.

Khayyam a construit o teorie geometrică care să conducă la rezolvarea ecuației de gradul trei, mai târziu istoricul rus , H. P. Iușkevici, afirmând despre Omar că „*a trecut pe lângă rezolvarea generală a ecuației de gradul trei"*. El a avansat pentru prima dată ideea că ecuația generală de gradul trei, nu se poate rezolva în general cu rigla și compasul. Mai târziu, în 1637, **Rene Descartes** reafirmă acest lucru, însă demonstrația a fost dată 200 de ani mai târziu, de către matematicianul francez **Pierre Vantzel** (1814 - 1848). Omar, lucra algebra în cuvinte și figuri iar

ecuațiile descrise de el respectau omogenitatea termenilor. Astfel, ecuația $x^3+ax=b$ era scrisă $x^3+p^2x=p^2q$. Pentru rezolvare, considera cercul de ecuație $x^2+y^2=qx$ și parabola $x^2=py$ care se mai scriu $\frac{x}{y}=\frac{y}{q-x}$, respectiv $\frac{p}{x}=\frac{x}{y}$ de unde prin înmulțire, $\frac{p}{y}=\frac{x}{q-x}$. Dar, $\frac{p}{y}=\frac{p}{x^2/p}=\frac{p^2}{x^2}$, deci $\frac{p^2}{x^2}=\frac{x}{q-x}$ sau $x^3=p^2(q-x)$. Adunând p^2x, avem ecuația lui Omar $x^3+p^2x=p^2q$. Deci, intersecția cercului cu parabola dă soluția ecuației de gradul trei. Pentru ecuații de gradul patru, ca de exemplu $x^4+2x^3-2x^2-2=0$, Khayyam afirma că nu există un procedeu de rezolvare a ei.

În China medievală, în timpul dinastiei Tang (sec. Al VII-lea) printre primii învățați chinezi care s-au ocupat de ecuația cubică a fost **Wang Hs` iao- t` ung** (c. 623). El găsește laturile unui triunghi dreptunghic cunoscând produsul catetelor $p=xy=706\frac{1}{50}$ și diferența dintre ipotenuză și o catetă $q=\sqrt{x^2+y^2}-x=36\frac{9}{10}$ ajungând la ecuația de gradul trei $x^3+\frac{q}{2}x^2=\frac{p^2}{2q}$, pentru care obține soluția corectă $x=14\frac{7}{10}$ apoi $y=49\frac{1}{5}$ și $z=51\frac{1}{4}$. Pentru rezolvarea ecuației de gradul trei obținută folosește metoda antică chineză de extragere a rădăcinii cubice, aplicabilă numai ecuațiilor numerice. Ideea obținerii rădăcinilor ecuațiilor algebrice prin radicali nu apare în vechile texte chinezești și nu a constituit un subiect de studiu. Încercări de rezolvare a ecuațiilor algebrice cu coeficienți pozitivi apar mult mai târziu. Astfel **Jia Xian** (c. 1100) ajunge la o metodă de extragere a rădăcinilor pătratice și cubice prin adunare și multiplicare apropiată de schema lui **Horner**. (englezul **George Willam Horner** (1786 -1837) dă această metodă în 1819, deși era cunoscută și de **Qin Jiushao** în sec. al XIII-lea și de Newton în 1669).

Liu Yi (1080 - 1120) generalizează metoda lui Tzia Xsian la ecuații algebrice cu coeficienți pozitivi dar și negativi, exemplificând cu ecuația de gradul patru $-5x^4+52x^3+128x^2=4096$, căreia îi găsește rădăcina x = 4 aplicând schema lui Horner.

În secolul al XIII-lea, alți matematicieni chinezi renumiți, **Yang Hui** (1238 - 1298), **Qin Jiushao** (1202 - 1261) și **Zhu Shiejiie** (1270 - 1330) au folosit aceeași metodă a schemei Horner, pentru a rezolva sisteme de ecuații liniare și ecuații de gradele 2, 3, 4. Yang Hui a folosit pentru prima dată triunghiul aritmetic al lui Pascal (1623 - 1662), deja descris în 1100 de Tzia Xsian.
Qin Jiushao a fost primul care a introdus un simbol pentru zero în matematica chineză și cu schema lui Horner a rezolvat ecuații de grad superior, chiar și o ecuație de gradul zece.

Zhu Shi-Jie a scris în perioada 1280- 1303 cel mai important text al secolului XIII, care a marcat dezvoltarea algebrei chinezești. Este vorba despre „**Precious Mirror of the Four Elements**”, în care sunt prezentate soluții ale unor ecuații algebrice de grad superior, folosind o metodă similară metodei lui Horner și în care este menționată o diagramă a triunghiului aritmetic al lui Pascal.

În secolul al XV-lea, matematicianul și astronomul persan **Ghiyath al –Kashi** (1380 - 1429) a calculat valoarea lui π cu 16 zecimale exacte, a introdus tabele pentru funcția sin și a folosit formula aproximativă

$\sqrt[n]{a^n+r} \simeq a+\dfrac{r}{(a+1)^n-a^n}$ pentru a calcula radicalii $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{6}$ cu primele cinci zecimale exacte. Tot el a găsit formula trigonometrică $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, întâlnită mai târziu la **Viète** (1540 - 1603) iar în algebră s-a preocupat de găsirea unor metode iterative de rezolvare a ecuațiilor cubice și a unor ecuații binome de forma $x^n - a = 0$.

În anul 1202, italianul **Leonardo Fibanocci** (1170- 1250) prin lucrarea „**Liber Abaci**" este primul european care introduce sistemul de calcul cu cifre indoarabe și numerele negative. A propus denumirea de „zero" pentru numărul 0, folosirea liniei de fracție precum și rezolvarea ecuațiilor algebrice prin aproximarea soluțiilor. Tot Fibonacci a introdus celebrul șir 1,1,2,3,5,8,... definit de recurența $F_0 = F_1 = 1$ și $F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ \forall n \geq 2$. Acest șir exprimă „*legea creșterii organice*" care se referă la creșterea organismului care rămâne mereu asemenea cu el însuși.

În Europa, începând cu sec. al XV-lea au fost asimilate descoperirile științifice ale antichității și ale lumii arabe, iar acestea s-au transmis perfecționându-se forma prin introducerea simbolurilor algebrice.

Prima jumătate a secolului al XVI-lea, perioada Renașterii italiene, aduce mari progrese în dezvoltarea algebrei mai precis în rezolvarea cu ajutorul radicalilor a ecuațiilor generale de gradul trei și patru.

În 1494, călugărul **Luca Paccioli** (1445 - 1514), rezumând cunoștințele epocii despre aritmetică, algebră și trigonometrie într-un tratat al său, afirmă că rezolvarea ecuației cubice este „*la fel de imposibilă în stadiul actual de dezvoltare al științei ca și cuadratura cercului*".

Dar, la puțin timp după afirmațiile lui Pacciolli, în anul 1515, profesorul **Scipione del Ferro** (1465 - 1526), de la Universitatea din Bologna, reușește să rezolve ecuația cubică redusă, un caz particular al ecuației generale de gradul trei, în care lipsește termenul de gradul doi. Însă, lucrările lui del Ferro au rămas nepublicate, în vremea respectivă fiind la modă ca descoperirile să rămână secrete. El a dezvăluit metoda de rezolvare a ecuației reduse de gradul trei, doar la două persoane, ginerelui său și studentului său, Antonio Fiore. În acea perioadă se desfășurau turniruri matematice, adică concursuri de rezolvări de probleme, multe dintre ele fiind încă nerezolvate de matematicienii vremii respective.

În anul 1530, la un astfel de turnir, inițiat de **Giovanni Colla**, la care s-au propus ecuații de forma $x^3 + px^2 = q,\quad x^3 + q = px^2$ și $x^3 = px^2 + q,$ a participat și profesorul de aritmetică și consilierul tehnico-științific **Niccolo Fontana,** zis **Tartaglia** (1500 - 1557) din Brescia. Acesta rezolvă în timp record toate ecuațiile propuse.

În 1535, Antonio Fiore, care aflase rezolvarea lui del Ferro, lansează și el un turnir, provocându-l pe Tartaglia, unde propune rezolvarea a 30 de ecuații de tipul $x^3 + px = q,\ x^3 + q = px,$ și $x^3 = px + q.$ Tartaglia rezolvă toate ecuațiile în numai două ore, în timp ce Fiore nu rezolvă niciuna dintre ecuațiile propuse de Tartaglia. Succesul lui se datora faptului că , independent de del Ferro, descoperise soluțiile generale ale ecuației $x^3 = px + q,\ p,q \rangle 0$, anunțând că știe să rezolve și ecuațiile cubice de forma $x^3 + px^2 = q.$ Tartaglia, redescoperise soluția lui del Ferro cu

numai o zi, înaintea concursului. Este un exemplu de problemă, pentru care, odată ce se știe că are o soluție, mai mulți o regăsesc într-un timp relativ scurt (asemenea doborârii recordurilor sportive într-un timp scurt).

Ca și del Ferro, Tartaglia și-a ținut secrete descoperirile sale. Știrea înfrângerii lui Fiore a ajuns și la **Girolamo Cardano** (24.09.1501-21.09.1576) din Pavia (lângă Milano), o mare personalitate în acel timp. În 1524, Cardano primește titlul de doctor în medicină al Universității din Padova. Era un om de o inteligență extraordinară, fiind și un foarte bun matematician, în 1562 activa ca profesor de matematică la Universitatea din Bologna, unde îl are ca student pe **Lodovico Ferrari** (02.02.1522-05.10.1565), cel care va reuși să rezolve, pentru prima dată, ecuația generală de gradul patru (în 1540).

Curiozitatea lui Cardano a fost stârnită de faptul că știa despre Tartaglia că deține secretul rezolvării ecuației cubice reduse și l-a rugat să i-l dezvăluie. Inițial, Tartaglia a refuzat, dar a cedat și în schimbul unui jurământ că va păstra secretul, i-a arătat lui Cardano, într-o formă simplificată, formulele de calcul a soluțiilor, dar nu și modul în care se pot obține acestea. În prima referință a lu Cardano despre Tartaglia, se spune: „*În zilele noastre, Scipione del Ferro din Brescia, a rezolvat cazul cubului și puteri întâi egale cu o constantă, o foarte elegantă și admirabilă realizare. Această artă depășește într-atât subtilitatea și perspicacitatea muritorilor de rând și este într-o asemenea măsură un dar celest și un text clar al capacității minții umane, încât oricine intră în contact cu ea va crede că nu mai poate înțelege. Urmându-l pe acesta , prietenul meu Niccolo Tartaglia din Brescia, vrând să nu se lase mai prejos, a rezolvat același caz când a intrat în competiție cu elevul acestuia, Antonio Fiore și lăsându-se convins de insistențele mele, mi-a dezvăluit secretul mie”.*

Cardano a avut intenția de a respecta jurământul, dar au apărut zvonuri că Tartaglia nu era primul care să fi descoperit soluția ecuației cubice reduse. În 1539, împreună cu studentul său Lodovico Ferrari, Cardano pleacă la Bologna, unde descoperă manuscrisul lui del Ferro. În această situație, Cardano se simte dezlegat de jurământ și după ce redescoperă soluția lui Tartaglia, o publică în anul 1545, în tratatul său “**Ars Magna**” (“Marea artă sau despre regulile algebrei”).
Tot în această lucrare, se prezintă și soluția de rezolvare prin radicali a ecuației generale de gradul patru descoperită de Ferrari.

Între Tartaglia și Cardano izbucnește astfel un mare scandal, dar situația nu se mai poate schimba. În realitate, Cardano nu a “furat” soluția lui Tartaglia, incluzând-o fără voia acestuia în “**Ars Magna**”, ci practic, descoperind la Bologna manuscrisul lui del Ferro, care ulterior pierzându-se, s-a crezut că Girolamo Cardano a mințit cu privire la existența acestuia, dar, aproape după patru secole, în 1923, profesorul italian **Ettore Bortolotti**, a redescoperit manuscrisul lui del Ferro și astfel, Cardano a fost acuzat pe nedrept și, după ce multă vreme era socotit delapidator al lui Tartaglia, a fost reabilitat.

În plus, **Cardano** a dat modul în care ecuația cubică completă $ax^3+bx^2+cx+d=0,\ a\neq 0$ este adusă la o ecuație cubică doar cu trei termeni $x^3+px+q=0$, forma redusă. Formulele de rezolvare prin radicali ale ecuației de gradul trei, descoperite de Tartaglia și del Ferro, fiind publicate pentru prima dată de Cardano în “**Ars Magna**” sunt cunoscute acum cu denumirea de “**formulele lui Cardano**”, (formulele cardanice).

Cardano ajunge de la forma generală $ax^3+bx^2+cx+d=0,\ a\neq 0$ (1) folosind substituția $x=y-\frac{b}{3a}$ (substituția lui Cardano), la forma redusă în care lipsește termenul de gradul doi: $y^3+py+q=0$ (2). Găsim $x^2=y^2-\frac{2b}{3a}y+\frac{b^2}{9a^2}$ și $x^3=y^3-\frac{b}{a}y^2+\frac{b^2}{3a^2}y-\frac{b^3}{27a^3}$ iar ecuația (1) devine: $y^3+\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)y+\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d=0\ |:a\Rightarrow\ y^3+\underbrace{\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2}\right)}_{p}y+\underbrace{\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}}_{q}=0$, adică forma redusă $y^3+py+q=0$. (3). Notăm prin $\Delta=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2$, realizantul ecuației (3) și atunci formulele lui Cardano (descoperite de fapt de Tartaglia și del Ferro sunt: $y_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}=u+v$. $y_2=\varepsilon u+\varepsilon^2 v$, $y_3=\varepsilon^2 u+\varepsilon v$, unde $u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}$, $v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}$ și $\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon^2=\bar{\varepsilon}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ sunt rădăcinile cubice nereale ale unității ($\varepsilon^3=1,\ \varepsilon\neq 1$). Mai exact, $y_1=u+v$, $y_2=-\frac{u+v}{2}+\frac{u-v}{2}\cdot i\sqrt{3}$, $y_2=-\frac{u+v}{2}-\frac{u-v}{2}\cdot i\sqrt{3}$ iar rădăcinile ecuației generale (1) sunt $x_k=-\frac{b}{3a}+y_k,\ k\in\{1,2,3\}$.

Toate aceste soluții conțin în formulele lor radicalii pătratici și radicalii cubici de tipul $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}$.

Numărul $D=\prod_{1\le i\langle j\le 3}(y_j-y_i)^2=-\left[\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2\right]=-\Delta$, se numește discriminantul ecuației reduse (2) și în funcție de semnul lui se stabilește natura rădăcinilor. Când toți coeficienții sunt numere reale, ecuația de gradul trei are cel puțin o rădăcină reală, iar semnul realizantului $\Delta=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2$ dă natura rădăcinilor ecuației reduse (2).

Dacă $\Delta\rangle 0$, atunci $y_1=u+v$ este reală (strict pozitivă pentru $q\langle 0$ și strict negativă dacă $q\rangle 0$) iar rădăcinile $y_1=\varepsilon u+\varepsilon^2 v$, $y_3=\varepsilon^2 u+\varepsilon v$ sunt complexe conjugate nereale.

L'ALGEBRA
OPERA
Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli studiosi di detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori

Dacă $\Delta=0$, toate rădăcinile sunt reale iar una este dublă: $y_1=\frac{3q}{p}$ și $y_2=y_3=-\frac{3q}{2p}$.

Dacă $\Delta\langle 0$, toate cele trei rădăcini sunt reale, însă exprimarea lor este într-o formă complexă. Acest caz, a fost numit de Cardano cazul ireductibil ("casus irreductibilis"), deoarece el nu înțelegea cum suma a două rădăcini cubice a două numere complexe conjugate nu va fi tot un număr complex, ci este un număr real. Cardano era încurcat de faptul că nu știa să calculeze rădăcina cubică a unui număr complex. Cel care a arătat că expresia din formulele lui Cardano, în cazul ireductibil, are o

valoare reală, a fost inginerul și arhitectul italian **Rafael Bombelli** (1526- 1572) în lucrarea sa "**Algebra**" apărută în 1572.

Chiar și marele matematician german **Gottfried Leibniz**(1646- 1716) care studiase "**Algebra**" lui Bombelli era nedumerit: " *Nu înțeleg cum o cantitate poate fi reală când numerele imaginare sau imposibile au fost folosite pentru a o exprima*"

Totuși, pentru exprimarea directă a soluțiilor reale și în cazul ireductibil, francezul **Francois Viète** (1540- 1603) (care nu era un matematician profesionist ci avocat), a dat formulele cu toate cele trei soluții reale exprimate trigonometric (publicate postum în 1615).

Dacă $\Delta=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2\langle 0$ (cu necesitate $p\langle 0)$ iar $r=\sqrt{-\frac{p^3}{27}}$ și $\cos\varphi=-\frac{q}{2r}$, atunci cele trei rădăcini reale ale ecuației reduse $y^3+py+q=0$ sunt: $y_1=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3}$, $y_2=2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120^0\right)$, $y_3=2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+240^0\right)$.

Exemplul 1. Să se rezolve cu formulele lui Cardan, ecuația $x^3+6x-2=0$ **(Ionel Tudor).**

Ecuația este în formă redusă cu $p=6,\ q=-2\langle 0$ și $\Delta=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=9\rangle 0$, deci ecuația are o rădăcină reală pozitivă și două rădăcini complexe nereale conjugate:

$$x_1=u+v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\rangle 0,$$

$$x_2=\varepsilon u+\varepsilon^2 v=-\frac{u+v}{2}+\frac{u-v}{2}i\sqrt{3}=-\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}+\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}{2}i\sqrt{3}\in\mathbb{C},\ x_3=\varepsilon^2 u+\varepsilon v=\overline{x_2}.$$

Exemplul 2. Să se rezolve ecuația $3x^3-3x^2-9x+1=0$ **(Ionel Tudor).**

În ecuația $x^3-x^2-3x+\frac{1}{3}=0$ efectuăm substituția lui Cardano $x=y-\frac{-1}{3}$, găsim forma redusă $y^3-\frac{10}{3}y-\frac{20}{27}=0$ cu $p=-\frac{10}{3}$ și $q=-\frac{20}{27}$. Realizantul ecuației este $\Delta=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=-\left(\frac{10}{9}\right)^2\langle 0$. Suntem în cazul ireductibil și ecuația are toate cele trei rădăcini reale scrise cu formulele lui Cardano: $y_1=u+v=\sqrt[3]{\frac{10}{27}+\frac{10}{9}i}+\sqrt[3]{\frac{10}{27}-\frac{10}{9}i}$,

$y_2=\varepsilon u+\varepsilon^2 v$, $y_3=\varepsilon^2 u+\varepsilon v$ cu $\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ și $\varepsilon^2=\bar{\varepsilon}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Cu formulele de exprimare trigonometrică ale lui Viete avem $r=\sqrt{-\frac{p^3}{27}}=\sqrt{\left(\frac{10}{9}\right)^3}=\frac{10\sqrt{10}}{27}$ și $\cos\varphi=-\frac{q}{2r}=\frac{1}{\sqrt{10}}\Rightarrow$ $\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}\simeq 71,57^0$. Obținem:

$$y_1=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3}=\frac{2\sqrt{10}}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\simeq 1,92809\rangle 0,$$

$$y_2 = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120^0\right) = \frac{2\sqrt{10}}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}+120^0\right) \simeq -1,70242\langle 0,.$$

$$y_3 = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+240^0\right) = \frac{2\sqrt{10}}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}+240^0\right) \simeq -0,22567\langle 0.$$

Pentru ecuația dată găsim: $x_1 = \frac{1}{3}+y_1 \simeq 2,26142\rangle 0$; $x_2 = \frac{1}{3}+y_2 \simeq -1,36908\langle 0$; $x_3 = \frac{1}{3}+y_3 \simeq 0,10766\rangle 0$;

În continuare, prezentăm metoda lui Ferrari de rezolvare prin radicali a ecuației generale de gradul patru, $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, (1) unde $a,b,c,d \in \mathbb{C}$. Dacă considerăm a = c= 0, ecuația este bipătrată iar dacă d = 0, ecuația se reduce la $x(x^3+ax^2+bx+c)=0$ cu $x_1=0$ iar celelalte se obțin cu formulele lui Cardano. Dacă ecuația de gradul patru are coeficientul dominant diferit de 1 atunci se împarte ecuația cu el și se obținea forma (1).

Metoda lui Ferrari constă în scrierea membrului stâng al ecuației ca diferență între pătratul unui trinom de gradul doi și pătratul unui binom de grad cel mult unu prin introducerea unui parametru $\alpha \in \mathbb{C}$, astfel: $(x^2+\frac{a}{2}x+\alpha)^2-(mx^2+nx+p)=0$ (2), unde impunem condiția $\Delta = n^2-4mp=0$, pentru ca trinomul $mx^2+nx+p=m\left(x+\frac{n}{2m}\right)^2$ să fie pătrat perfect.

În (2) efectuăm calculele și găsim ecuația $x^4+ax^2+(2\alpha+\frac{a^2}{4}-m)x^2+(a\alpha-n)x+\alpha^2-p=0$, pe care o identificăm cu ecuația (1) și obținem: $m=2\alpha+\frac{a^2}{4}-b$, $n=a\alpha-c$, $p=\alpha^2-d$. Condiția $4mp=n^2$ devine $4(2\alpha+\frac{a^2}{4}-b)(\alpha^2-d)=\left(a\alpha-c\right)^2$ și găsim rezolventa de gradul trei în α:

$8\alpha^3-4b\alpha^2+(2ac-8d)\alpha-a^2d+4bd-c^2=0$ (3). Este suficient să găsim o singură rădăcină $\alpha_0 \in \mathbb{C}$ (de preferat rădăcina reală când există). Atunci, $m=2\alpha_0+\frac{a^2}{4}-b$, $n=a\alpha_0-c$, $p={\alpha_0}^2-d$ (4). Înlocuind în (2) avem diferența de pătrate $(x^2+\frac{a}{2}x+\alpha_0)^2-(x\sqrt{m}+\frac{n}{2\sqrt{m}})^2=0$ și descompunem $\left(x^2+(\frac{a}{2}+\sqrt{m})x+\alpha_0+\frac{n}{2\sqrt{m}}\right)\cdot\left(x^2+(\frac{a}{2}-\sqrt{m})x+\alpha_0-\frac{n}{2\sqrt{m}}\right)=0$. De aici se obțin rădăcinile $x_{1,2}, x_{3,4} \in \mathbb{C}$.

Se constată că structura formulelor de rezolvare ale ecuației de gradul patru, este destul de complicată, ea conținând suprapuneri de radicali de tip $\sqrt{a+\sqrt[3]{b+\sqrt{c+\sqrt{d}}}}$.

Alte metode de rezolvare au mai dat **Rene Descartes** (1596 - 1650) care are și o teoremă ce dă numărul rădăcinilor pozitive ale unei ecuații algebrice, **Leonard Euler** (1707 - 1783), care a introdus ecuațiile reciproce și a arătat că ecuațiile de gradul 2, 3,4 se reduc la rezolvarea unor ecuații de grad mai mic, numite de el, “ecuații rezolvente”, **Yu – Cheng** (în 1966 în The American

Mathematical Monthly), **Joseph Louis Lagrange** (1736 - 1813), **Heilermann, Federigo Enriques** (1871 - 1946).

Exemplul 3. Să se rezolve ecuația în formă completă $x^4-4x^3-88x^2+384x-384=0$ **(Ionel Tudor)**

Cu substituția $x=2y$ obținem ecuația $16y^4-32y^3-352y^2+768y-384=0 \,|:16 \Rightarrow$

$y^4-2y^3-22y^2+48y-24=0$ (*) pe care o rezolvăm cu metoda lui Ferrari $(y^2-y+\alpha)^2-(my^2+ny+p)=0$ unde $4mp=n^2$ (**)

Obținem ecuația $y^4-2y^3+(2\alpha+1-m)y^2-(2\alpha+n)y+\alpha^2-p=0$ pe care o identificăm cu (*) și obținem $m=2\alpha+23$, $n=-2\alpha-48$, $p=\alpha\ +24$.

Condiția (**) devine $4(2\alpha+23)(\alpha^2+24)=4(\alpha+24)^2$ cu ecuația rezolventă $\alpha^3+11\alpha^2-12=0$ cu soluțiile $\alpha_0=1,\ \alpha=\dfrac{-1\pm i\sqrt{47}}{2}$. Cu $\alpha_0=1\Rightarrow m=25,\ n=-50,\ p=25$.

În (**) obținem: $\left(y^2-y+1\right)^2-\left(25y^2-50y+25\right)=0\Rightarrow\left(y^2+4y-4\right)\left(y^2-6y+6\right)=0$ cu soluțiile $y_{1,2}=-2\pm2\sqrt{2},\ y_{3,4}=3\pm\sqrt{3}$, mai departe $x_{1,2}=-4\pm4\sqrt{2},\ x_{1,2}=6\pm2\sqrt{3}.$

Exemplul 4. Să se rezolve ecuația în forma redusă $x^4+10x^2+100x+100=0$ **(G.M, seria B, nr. 12/2002- Gh. Szöllözy)**

Scriem $(x^2+\alpha)^2-(mx^2+nx+p)=0$ cu $4mp=n^2$ și ecuația devine $x^4+(2\alpha-m)x^2-nx+\alpha^2-p=0$. După identificarea coeficienților și determinarea lui m, n, p obținem ecuația rezolventă $\alpha^3-5\alpha^2-100\alpha-750=0$ **cu soluția reală** $\alpha_0=15$**. Atunci, m= 20, n= -100, p= 125; Așadar, ecuația** $\left(x^2+15\right)^2-\left(20x^2-100x+125\right)=0\Leftrightarrow$

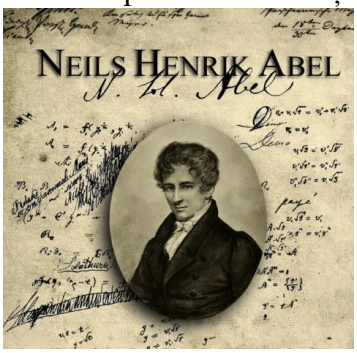
$(x^2+15)^2-\left(\sqrt{20}x-5\sqrt{5}\right)^2=0\ \Rightarrow(x^2+15+\sqrt{20}x-5\sqrt{5})\cdot\left(x^2+15-\sqrt{20}x+5\sqrt{5}\right)=0$ cu soluțiile $x_{1,2}=-\sqrt{5}\pm\sqrt{5\sqrt{5}-10}$, $x_{3,4}=\sqrt{5}\pm i\sqrt{5\sqrt{5}+10}$.

După perioada Renașterii, matematicienii secolelor XVII și XVIII s-au preocupat de găsirea unor soluții generale pentru ecuații de gradul cinci și mai mare. Foarte încet s-a ajuns la o recunoaștere că rezolvarea ecuației generale de grad mai mare decât patru prin radicali este imposibilă) deși în foarte multe cazuri particulare soluțiile se pot exprima cu radicali). Contribuții în acest sens au avut **Lagrange** și **Carl Friedrich Gauss** (1777 - 1855) care a dat și patru demonstrații teoremei fundamentale ale algebrei (D Alembert - Gauss). Lagrange, studiind rezolvarea ecuațiilor de grad mai mare decât trei, cu ajutorul unor ecuații de grad mai mic, observă că ecuațiile de grad mai mare decât patru, nu se pot rezolva prin radicali, întrucât în cazul unei ecuații de gradul cinci apare rezolventa de grad șase, deci o ecuație de grad mai mare decât al ecuației date.

În 1798, **Lagrange** publică rezultatele sale în "**Traite de resolution numerique des equations de tous les degres**", tratat în care se găsește metoda de aproximare a rădăcinilor reale ale ecuațiilor algebrice cu ajutorul fracțiilor continue. Tot Lagrange a imaginat teoria grupurilor anticipând

descoperirile de mai târziu ale lui **Galois**.

În 1799, **Paolo Ruffini** (1765- 1822) matematician și medic de mare faimă, dăduse o demonstrație incompletă a faptului că ecuația de gradul cinci nu era rezolvabilă prin radicali. Acceptarea acestui fapt a fost atât de dificilă cu cât majoritatea cazurilor speciale de ecuații algebrice de grad superior, pot fi rezolvate prin radicali (ecuații binome, trinome, reciproce, pseudoreciproce).



Rezolvarea a venit în anul 1824, când tânărul matematician norvegian **Niels Henrik Abel** (05.08.1802- 06.04.1829) devine primul care demonstrează imposibilitatea rezolvării prin radicali a ecuațiilor algebrice generale de grad mai mare decât patru, în lucrarea "Memoire sur les equations algebrique on an dimonde l 'imposibilite de la resolution de l'equations du cinquiene degre". Acum, acest rezultat îl numim teorema Abel- Ruffini.

Tot un tânăr matematician, francezul **Evariste Galois** (1811- 1832), fondator al teoriei moderne a grupurilor, în cadrul teoriei pe care a construit-o (teoria lui Galois), a găsit independent de Abel, condiția necesară și suficientă ca o ecuație algebrică să fie rezolvabilă prin radicali și anume grupul Galois al ecuației respective să fie grup rezolubil. Galois a rezolvat ecuațiile algebrice prin operații raționale și printr-un număr finit de extrageri de rădăcini.

Mai menționăm că matematicianul suedez **Samuel Bring** (1736- 1798) a arătat că ecuația generală de gradul cinci, poate fi adusă la forma redusă $x^5 + px + q = 0$ însă nu găsește soluțiile prin radicali. Abia în anul 1859, matematicianul francez **Charles Hermite** (1822- 1901) de la a cărui naștere aniversăm 200 de ani, a reușit să dea soluțiile ecuației lui Bring, dar nu cu radicali, ci cu ajutorul funcțiilor eliptice.

La noi în țară, cercetări privind ecuațiile algebrice au avut generalul de artilerie **Gheorghe Buicliu** (1883- 1966) pe când era profesor de geometrie analitică la Școala Poitehnică din București, și care în 1930 a publicat în Revista de matematică din Timișoara, condiția necesară ca o ecuație de gradul patru să poată fi scrisă ca sumă a două pătrate perfecte. Alți matematicieni au fost **Petre Sergescu** (1893- 1954) și **Theodor Angheluță** (1886- 1964) cu cercetări asupra limitelor modulelor rădăcinilor ecuațiilor algebrice. De asemenea profesorul, academician **Grigore Moisil** (1906- 1973) a avut contribuții în teoria lui Galois, iar profesorul academician **Marius Iosifescu** (1936- 2020) a dat o metodă pentru binomizarea ecuației de gradul trei.

Bibliografie:

1. Adrain C. Albu- O istorie a matematicii, Antichitatea. Editura Nomina. 2009
2. Adrain Stan și colab. O scurtă istorie a matematicii. Editura Editgraph. Buzău. 2015.
3. Paul J. Nahin- O poveste imaginară- Istoria numărului $\sqrt{-1}$. Editura Theta. 2000.
4. Viorel Gh. Vodă- Miraculoasele ecuații. Editura Albatros. 1987.
5. K.W. Roggenkamp- Trei perle ale matematicii. Gazeta Matematică, Seria pentru informare științifică și perfecționare metodică, Nr. 4/1997.
6. Colecția Gazeta Matematică, seria B.
7. www.wikipedia.org

Succesul înseamnă a fi în stare să mergi din eșec în eșec fără să-ți pierzi entuziasmul.
Winston Churchill
(1874- 1965)

2. Articole și note matematice

Asupra unor inegalități din Gazeta Matematică

de D. M. Bătinețu-Giurgiu, Daniel Sitaru și Neculai Stanciu

I. Asupra unei inegalități a lui Ion Ionescu. În Gazeta Matematică, volumul XXXII (15 septembrie 1926 – 15 august 1927), la pag. 120, ***Ion Ionescu*** – unul dintre fondatorii și stâlpii Gazetei Matematice, a publicat problema:

3478. Dacă x, y, z sunt pozitive, să se arate că: $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}$, (I).

În același volum, la pag. 194-196, se prezintă două soluții ale acestei probleme, precum și o generalizare. Din [7] reiese că inegalitatea (I) a mai fost publicată și de ***Nesbitt,*** în anul 1903.

Amintim aici că problema: *În orice triunghi ABC, cu notațiile obișnuite, are loc inegalitatea* $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$, (I-W), a fost publicată de *Ion Ionescu* în anul 1897 (a se vedea [1]), iar de către ***Weitzenböck*** în anul 1919. Cu toate acestea, această inegalitate a fost numită multă vreme ''inegalitatea *Weitzenböck*'', iar după apariția lucrării [1] se numește inegalitatea ***Ionescu-Weitzenböck*, (I-W).**

Vom numi (I) - ***inegalitatea Nesbitt-Ionescu***, (N-I).

Iată soluțiile problemei 3478 din Gazeta Matematică, vol. XXXII (1926-1927), pag. 194-196.

*Soluție dată de D-nii: B.V. Gataianțu (Lic. Caracal), Gh. Mareș (Bacău); G.I. Balaban, G. Tailer, D. Haim (Lic. Bârlad); A.V. Roșculeț (Lic. Constanța); I. Nicolau-Dobridor și G.I. Munteanu (Lic. Militar, Craiova); C.V. Costăchescu (Lic. Militar, Iași); Gh.Th. Gheorghiu (Lic. Galați).*Se cunoaște inegalitatea (*''Culegere de problem de Algebră''* de *A.G. Ioachimescu*, IX, 19): $2(x^3+y^3+z^3)\geq x^2y+x^2z+xy^2+y^2z+xz^2+yz^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2(x^3+y^3+z^3)\geq xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\Leftrightarrow 2\sum x^3\geq\sum xy(x+y)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6xyz+2\sum x^3+2\sum xy(x+y)\geq 6xyz+3\sum xy(x+y)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sum x(x+y)(x+z)\geq 3(x+y)(y+z)(z+x)\Leftrightarrow \frac{\sum x(x+y)(x+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}\geq\frac{3}{2}$$

$\Leftrightarrow \frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}$. Egalitatea are loc atunci când $x=y=z$.

Soluție dată de D-nii: Gh.M. Călin și C.I. Istinie-Brezuica (Lic. Caracal).

Punem $y+z=a, x+z=b, x+y=c \Leftrightarrow x=\frac{b+c-a}{2}, y=\frac{a+c-b}{2}, z=\frac{a+b-c}{2}$, înlocuim în inegalitatea dată și obținem inegalitatea echivalentă:

$$\frac{b+c-a}{2a}+\frac{a+c-b}{2b}+\frac{a+b-c}{2c}\geq\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geq 6.$$

Avem: $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geq\frac{2\sqrt{bc}}{a}+\frac{2\sqrt{ca}}{b}+\frac{2\sqrt{ab}}{c}=2\left(\frac{\sqrt{bc}}{a}+\frac{\sqrt{ca}}{b}+\frac{\sqrt{ab}}{c}\right)\geq$

$$\geq 2\cdot 3\cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt{bc}}{a}\cdot\frac{\sqrt{ca}}{b}\cdot\frac{\sqrt{ab}}{c}} = 6\text{, q.e.d.}$$

Generalizare dată de D-l. C.I. Istinie-Brezuica (cl. VII-a, Lic. Caracal):
Dacă $x_1, x_2, ..., x_n$ *sunt numere reale pozitive, atunci:*

$$\frac{x_1}{x_2+x_3+...+x_n}+\frac{x_2}{x_1+x_3+...+x_n}+...+\frac{x_n}{x_1+x_2+...+x_{n-1}}\geq\frac{n}{n-1}.$$

II. Asupra unei inegalități a lui Constantin Ionescu-Țiu. În Revista Matematică și Fizică (R.M.F), Anul VI, nr. 5/1953, pag. 128 , a fost propusă problema:

847. *Să se arate că într-un triunghi oarecare avem*: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{\sqrt{3}}{R}$, (C.I.Ț).

În R.M.F, Anul VII, nr. 1/1954 la pag. 21-22 se prezintă următoarea soluție:
Considerăm inegalitatea cunoscută $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$, care se mai poate scrie

$$(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)\text{, sau încă } x+y+z\geq\sqrt{3}\cdot\sqrt{xy+yz+zx}.$$

Dacă în ultima inegalitate facem: $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}$ avem

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{2p}{abc}}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{2Rr}}\text{, însă } R\geq 2r.$$

Rezultă atunci că $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{\sqrt{3}}{R}$.

În cele ce urmează ne propunem să prezentăm o soluție mai scurtă și trei generalizări.
Soluția scurtă pe care o prezentăm se bazează pe folosirea inegalității lui *Harald Bergström* (a se vedea [5]). Menționăm că inegalitatea lui *Harald Bergström* a fost publicată în anul 1949 iar situația politică a lumii din perioada 1949-1953 credem că a făcut în așa fel încât în anul 1953 să nu fie cunoscută de colaboratorii R.M.F. Putem afirma că și acum mai mulți colaboratori ai Gazetei Matematice (G.M.) spun că această inegalitate este inegalitatea C-B-S de tip fracție sau alții îi zic inegalitatea (C-S). Inegalitatea lui *Harald Bergström* este o inegalitate distinctă de inegalitatea C-B-S dar cele două inegalități sunt echivalente (a se vedea [3] și [4]).

O soluție: conform inegalității lui *Bergström* avem: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{(1+1+1)^2}{a+b+c}=\frac{9}{2p}$, apoi cu o inegalitate a lui *D.S. Mitrinović*, avem $2p\leq 3\sqrt{3}R$, (M) ; deci $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{2p}\geq\frac{9}{3\sqrt{3}R}=\frac{\sqrt{3}}{R}$, q.e.d.
Egalitate avem dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă. Matematicieni din întreaga lume numesc inegalitatea problemei 847 - inegalitatea *Leuenberger*. Deoarece *Leuenberger* a publicat inegalitatea $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{\sqrt{3}}{R}$ în anul 1960 (vezi [9], pag. 54) propunem ca această inegalitate să se numească inegalitatea *Țiu – Leuenberger*.

Generalizarea 1. Dacă $m\in R_+, x,y\in R_+, x+y\in R_+^*$, *atunci*

$$\frac{1}{(xa+yb)^m}+\frac{1}{(xb+yc)^m}+\frac{1}{(xc+ya)^m}\geq\frac{(\sqrt{3})^{2-m}}{(x+y)^m R^m}.$$

Observație. Dacă $m=x=1, y=0$, atunci se obține inegalitatea (C.I.Ț).

Generalizarea 2. Dacă $m,x,y\in R_+, x+y\in R_+^*$ *iar* $A_1A_2...A_n, n\geq 3$ *este un poligon convex înscris în cercul* $C(O,R)$ *având laturile de lungimi* $a_k, k=\overline{1,n}$, *atunci*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(xa_k+ya_{k+1})^m}\geq\frac{n}{2^m(x+y)^mR^m\sin^m\frac{\pi}{n}},\ unde\ a_{n+1}=a_1.$$

Observație. Dacă $n=3$, atunci $\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{(xa_k+ya_{k+1})^m}\geq\frac{3}{2^m(x+y)^mR^m\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m}=\frac{(\sqrt{3})^{2-m}}{(x+y)^mR^m}$.

Generalizarea 3. Dacă $m\in R_+$, *atunci* $\frac{1}{a^{m+1}}+\frac{1}{b^{m+1}}+\frac{1}{c^{m+1}}\geq\frac{(\sqrt{3})^{1-m}}{R^{m+1}}$.

Observație. Dacă $m=0$, atunci obținem inegalitatea (C.I.Ț).

Bibliografie

1. D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu, *Inegalități de tip Ionescu-Weitzenböck*, Gazeta Matematică, CXVIII, Nr. 1/2013, 1-10.
2. D.M. Bătinețu-Giurgiu, *Aplicații la inegalitatea lui J. Radon*, Gazeta Matematică, Anul CXV, nr. 7-8-9/2010, pag. 359-362.
3. D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu, *Las desigualdades de Cauchy-Buniakovski-Schwarz y de Bergström son equivalentes e independientes*, Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática, Número 49 (julio – agosto 2013).
4. D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu, *La suficiencia de la equivalencia e independencia de las desigualdades de Cauchy-Buniakowski-Schwarz y de Bergström*, Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática, Número 50 (Septiembrie 2013- Mayo 2014).
5. H. Bergström, *A triangle inequality for matrices*, in: Den Elfte Skandinaviske Matematikerkongress, CityTrondheim, 1949, Johan Grundt Tanamus Forlag, pp. 115-118, CityplaceOslo, 1952.
6. N. Bișboacă, *Teme complementare de geometrie*, Editura Bălgrad, Alba Iulia, 1998.
7. A. Engel, *Probleme de matematică – strategii de reolvare* (traducere de Mihail Bălună), Editura Gil, 2006.
8. I. Ionescu, *Problema 3478*, Gazeta Matematică, vol. XXXII (1926-1927), 120.
9. O. Bottema et. all, *Geometric Inequalities*, Groningen, 1969.

Cea mai bună constantă pentru o inegalitate din RMM și SM

de Marius Drăgan și Neculai Stanciu

În [1] este propusă următoarea problemă:

UP.479. În orice triunghi ABC are loc inegalitatea: $72\cdot\frac{r^4}{R^3}\leq\sum\frac{m_a^2}{r_a}\leq\frac{9}{16}\cdot\frac{R^4}{r^3}$, (*).

George Apostolopoulos, Grecia.

În [2] este dată următoarea rafinare: $9r\leq\sum\frac{m_a^2}{r_a}\leq\frac{9}{8}\cdot\frac{R^3}{r^2}$, (**).

În cele ce urmează ne propunem să găsim cea mai bună constantă pentru unele inegalități în legătură cu cele de mai sus.

I. Vom determina cea mai bună constantă astfel încât inegalitatea $\sum\frac{m_a^2}{r_a}\leq\frac{9}{2^{t+1}}\cdot\frac{R^{t+1}}{r^t}$, (1), să fie adevărată în orice triunghi ABC.

Este cunoscută identitatea $\sum \frac{m_a^2}{r_a} = \frac{p^2 - 4r^2 - 7Rr}{r}$. Atunci, (1) este echivalentă cu

$$\frac{p^2 - 4r^2 - 7Rr}{r} \le \frac{9}{2^{t+1}} \cdot \frac{R^{t+1}}{r^t}, \text{ (2).}$$

Din teorema lui *Blundon* $p^2 \le 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2\sqrt{R(R-2r)^3}$, obținem

$\frac{p^2 - 4r^2 - 7Rr}{r} \le \frac{2R^2 + 3Rr - 5r^2 + 2\sqrt{R(R-2r)^3}}{r}$. Deci vom căuta cea mai bună constantă astfel încât $2x^2 + 3x - 5 + 2\sqrt{x(x-2)^3} \le \frac{9}{2^{t+1}} \cdot x^{t+1}$, $\forall x \ge 2$, ($x = \frac{R}{r}$) sau

$$t \ge \frac{\ln\left(\frac{2x^2 + 3x - 5 + 2\sqrt{x(x-2)^3}}{9}\right)}{\ln\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 = f(x), \ \forall x \ge 2.$$

Cu WolframAlpha am găsit că cea mai bună constantă este $t_0 = \sup_{x \ge 2} f(x) \cong 1{,}61927$, pentru $x_0 \cong 2{,}31613$. În cazul inegalităților (*) și (**) pentru membrul drept avem $t_1 = 3$ și $t_2 = 2$. Prin urmare, are loc inegalitatea (1) pentru orice $t > 1{,}61927$.

II. Vom determina cea mai bună constantă astfel încât inegalitatea $\sum \frac{m_a^2}{r_a} \ge 9 \cdot \frac{2^t r^{t+1}}{R^t}$, (3), să fie adevărată în orice triunghi ABC.

Inegalitatea (3) se scrie echivalent: $\frac{p^2 - 4r^2 - 7Rr}{r} \ge 9 \cdot \frac{2^t r^{t+1}}{R^t}$, (4).

Folosind din nou inegalitatea lui *Blundon*, $p^2 \ge 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2\sqrt{R(R-2r)^3}$ pentru a demonstra (4) este suficient să demonstrăm:

$$\frac{2R^2 + 3Rr - 5r^2 - 2\sqrt{R(R-2r)^3}}{r} \ge 9 \cdot \frac{2^t r^{t+1}}{R^t} \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 5 - 2\sqrt{x(x-2)^3} \le 9 \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^t,$$

$$\forall x \ge 2, \text{ sau } t \ge \frac{\ln\left(\frac{9}{2x^2 + 3x - 5 - 2\sqrt{x(x-2)^3}}\right)}{\ln\left(\frac{x}{2}\right)} = g(x), \ \forall x \ge 2.$$

Cea mai bună constantă este $t_0' = \sup_{x \ge 2} g(x) \cong -1{,}75$. Așadar, pentru orice $t \ge -1{,}75$ inegalitatea (3) este adevărată. În cazul inegalităților (*) și (**) pentru membrul stâng avem $t_1' = 3$ și $t_2' = 0$.

De exemplu, pentru $t_3' = -1$, obținem inegalitatea: $\frac{9}{2}R \le \sum \frac{m_a^2}{r_a} \Leftrightarrow \frac{9}{2}R \le \frac{p^2 - 4r^2 - 7Rr}{r}$, care rezultă din inegalitatea lui *Gerretsen* $p^2 \ge 16Rr - 5r^2$:

$$\frac{p^2 - 4r^2 - 7Rr}{r} \ge 9R - 9r \ge \frac{9}{2}R \Leftrightarrow R \ge 2r, \text{ adevărată (inegalitatea lui } Euler).$$

Bibliografie

1. **Romanian Mathematical Magazine** (RMM), Number 32, Spring Edition 2024.
2. **M. Chirciu**, *Inegalități cu mediane în triunghi*, Sclipirea Minții (SM), Nr. 29, 2022, 13-15.

Sharp inequalities in triangle

by Dr. Mihály Bencze

In this paper we present some new and sharp inequalities in triangle ABC.

Theorem. If $f:R\to R$ is convex function, then holds the following inequality

$$\sum_{k=1}^{n} f^{\mu}(x_k)\ge nf^{\mu}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)+\sum_{k=1}^{n} f^{\mu}(x_k)-\frac{1}{n^{\mu-1}}\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right)^{\mu},$$

when $\mu\ge 0$, for all $x_k\in R$ $(k=1,2,...,n)$.

Proof. By Jensen's inequality yields

$$\sum_{k=1}^{n} f^{\mu}(x_k)-nf^{\mu}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\ge\sum_{k=1}^{n} f^{\mu}(x_k)-\frac{1}{n^{\mu-1}}\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right)^{\mu}.$$

Remark. If $n=2$, then we get

$$f^2(x)+f^2(y)+f^2(z)\ge 3f^2\left(\frac{x+y+z}{3}\right)+\frac{1}{3}\sum\left(f(x)-f(y)\right)^2,$$

for all $x,y,z\in R$ and $f:R\to R$ is convex.

1. In all triangle ABC holds:

$$\sum h_a^{2\lambda}\ge 3^{2\lambda+1}r^{2\lambda}+\frac{1}{3(2R)^{2\lambda}}\sum(a^{\lambda}-b^{\lambda})^2c^{2\lambda}\text{, when } \lambda\in(-\infty,-1]\cup[0,\infty)$$

Proof. We have the following $\sum h_a^{2\lambda}=(2sr)^{2\lambda}\sum\frac{1}{a^{2\lambda}}$; $f(x)=\frac{1}{x^{\lambda}}$ is convex fumction for $\lambda\in(-\infty,-1]\cup[0,\infty)$, then by theorem holds:

$$\sum h_a^{2\lambda}=(2sr)^{2\lambda}\sum\frac{1}{a^{2\lambda}}\ge(2sr)^{2\lambda}\left(3\cdot\left(\frac{1}{\frac{a+b+c}{3}}\right)^{2\lambda}+\frac{1}{3}\sum\left(\frac{1}{a^{\lambda}}-\frac{1}{b^{\lambda}}\right)^2\right)=$$

$$=(2sr)^{2\lambda}\left(\frac{3^{2\lambda+1}}{(2s)^{2\lambda}}+\frac{1}{3}\sum\frac{(a^{\lambda}-b^{\lambda})^2c^{2\lambda}}{(abc)^{2\lambda}}\right)=3^{2\lambda+1}r^{2\lambda}+\frac{1}{3(2R)^{2\lambda}}\sum(a^{\lambda}-b^{\lambda})^2c^{2\lambda}.$$

2. In all triangle ABC holds:

$$\sum r_a^{2\lambda}\ge 3^{2\lambda+1}r^{2\lambda}+\frac{1}{3r^{2\lambda}}\sum(b-a)^{2\pi}(s-c)^{2\lambda}\text{, for all } \lambda\in(-\infty,-1]\cup[0,\infty)$$

Proof. $\sum r_a^{2\lambda}=(sr)^{2\lambda}\sum\frac{1}{(s-a)^{2\lambda}}$; $f(x)=\frac{1}{(s-x)^{\lambda}}$ is convex for $\lambda\in(-\infty,-1]\cup[0,\infty)$, therefore by theorem holds

$$\sum r_a^{2\lambda}\ge(sr)^{2\lambda}\left(3\cdot\left(\frac{1}{s-\frac{a+b+c}{3}}\right)^{2\lambda}+\frac{1}{3}\sum\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right)^{2\lambda}\right)=$$

$$=(sr)^{2\lambda}\left(\frac{3^{2\lambda+1}}{s^{2\lambda}}+\frac{1}{3}\sum\frac{(b-a)^{2\lambda}(s-c)^{2\lambda}}{(sr^2)^{2\lambda}}\right)=3^{2\lambda+1}r^{2\lambda}+\frac{1}{3r^{2\lambda}}\sum(b-a)^{2\lambda}(s-c)^{2\lambda}.$$

Analogously, by theorem 1 we get:

3. In all triangle ABC holds: $\sum\left(\cos\frac{A}{2}\right)^{2\lambda}\ge\frac{3^{\lambda+1}}{4^{\lambda}}+\frac{1}{3}\sum\left(\left(\cos\frac{A}{2}\right)^{\lambda}-\left(\cos\frac{B}{2}\right)^{\lambda}\right)^2$, for all $\lambda\le 0$.

4. In all triangle ABC holds:

$$\sum\left(\cos\frac{A}{2}\right)^{-2\lambda} \geq \frac{4^{\lambda}}{3^{\lambda+1}} + \frac{1}{3}\sum\left(\left(\cos\frac{A}{2}\right)^{-\lambda} - \left(\cos\frac{B}{2}\right)^{-\lambda}\right)^2, \text{ for all } \lambda \geq 0.$$

References

1. Octogon Mathematical Magazine (1993-2022).
2. Sclipirea Minţii (2007-2021).

Two new proofs for AM-GM inequality

by Dr. Dorin Mărghidanu

In this short note, two inductive proofs of AM-GM inequality are presented. Relative to a set of positive real numbers - is used the property of the arithmetic mean (respectively the geometric mean) of these numbers to be between the extreme values of this set. Numerous proofs are known for the classical inequality between the arithmetic $A_n[a] = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ and geometric mean $G_n[a] = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$ of numbers $a_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$ (see for example [1] – [14]). In [2] and [3] there are two very ingenious and very short proofs o of the classical inequality of means, which are then repeated in [1]. The demonstration mode is inductive and derives from the fact that if we have the ordering of numbers $0 \leq a_1 \leq a_2 ... \leq a_n$, then $a_1 \leq A_n[a] \leq a_n$, respectively $a_1 \leq G_n[a] \leq a_n$. It is therefore exploited that the fact $A_n[a]$, respectively $G_n[a]$ are means of the numbers $a_1, a_2, ..., a_n$ in the broadest sense, that is are sizes between the extreme values of the set $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Alternatively, we will give two other proofs of AM-GM inequality, centered on the same idea namely that $A_n[a]$ and $G_n[a]$ are means of numbers $a_1, a_2, ..., a_n$.

Will play a decisive role in both proofs - the following:

Lemma. If $0 \leq a_1 \leq a_2 ... \leq a_n$ are real numbers - not all zeros - and if $M_n[a]$ is a mean of these numbers, then occurs the inequality $\frac{a_1 a_n}{M_n[a]} \leq a_1 + a_n - M_n[a]$, (1), with equality if and only if $a_1 = M_n[a]$ or $a_n = M_n[a]$.

Proof. Given that $M_n[a]$ is the mean of the numbers $0 \leq a_1 \leq a_2 ... \leq a_n$, it is clear that $a_1 \leq M_n[a] \leq a_n$, (2). Starting from the obvious inequality, $(M_n[a] - a_1)(a_n - M_n[a]) \geq 0$, (3), we obtain $(a_1 + a_n - M_n[a])M_n[a] - a_1 a_n \geq 0$, hence the inequality from the statement.
The condition of equality also results from relation (3).

Proposition (the AM-GM inequality). $A_n[a] \geq G_n[a]$, (4), with equality if and only if $a_1 = a_2 = ... = a_n$

First proof. Without restricting the generality, we can assume that $a_1 \leq a_2 ... \leq a_n$. We will prove by induction that $G_n[a] \leq A_n[a]$. For $n = 2$, the inequality is obvious. We assume that the inequality is true in the case of $n-1$ numbers. Applying inequality from the statement for the following $n-1$ numbers: $a_2, a_3, ..., a_{n-1}, \frac{a_1 a_n}{A_n[a]}$, we will have

$$\sqrt[n-1]{\frac{G_n^n[a]}{A_n[a]}} = \sqrt[n-1]{a_2 a_3 ... a_{n-1} \cdot \frac{a_1 a_n}{A_n[a]}} \leq \frac{a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + \frac{a_1 a_n}{A_n[a]}}{n-1}, \text{ (5)},$$

with equality if and only if $a_2 = a_3 = ... = a_{n-1} = \frac{a_1 a_n}{A_n[a]}$, (6). But with the previous Lemma, for

$M_n[a] = A_n[a]$, we have $\frac{a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + \frac{a_1 a_n}{A_n[a]}}{n-1} \le \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n - A_n[a]}{n-1}$, (7), with equality if and only if $a_1 = A_n[a]$ or $a_n = A_n[a]$, (8). From (5) and (7) we get

$$\sqrt[n-1]{\frac{G_n^n[a]}{A_n[a]}} \le \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n - A_n[a]}{n-1} \Leftrightarrow \sqrt[n-1]{\frac{G_n^n[a]}{A_n[a]}} \le A_n[a] \Leftrightarrow \frac{G_n^n[a]}{A_n[a]} \le A_n^{n-1}[a] \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow G_n^n[a] \le A_n^n[a] \Leftrightarrow G_n[a] \le A_n[a]$. Returning to the conditions of equality, from (6) and (8), we have successively : if $a_1 = A_n[a]$, that is $a_2 = a_3 = ... = a_{n-1} = a_n = a$, as we have

$a_1 = A_n[a] = \frac{(n-1)a + a_1}{n}$, so $a_1 = a$; if $a_n = A_n[a]$, with (6), we have $a_2 = a_3 = ... = a_{n-1} = a_1 = a$;

so $a_n = A_n[a] = \frac{(n-1)a + a_n}{n}$ and we get $a_n = a$. With this the proof is complete.

Second proof. Under the same condition of ordering $a_1 \le a_2 ... \le a_n$ we will prove the inequality (4), also by induction. So, we assume that the inequality of means for case $n-1$ occurs. More precisely - we apply the inequality of the means for the following $n-1$ numbers: $a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_1 + a_n - G_n[a]$, for which we have

$nA_n[a] - G_n[a] = a_2 + ... + a_{n-1} + (a_1 + a_n - G_n[a]) \ge (n-1) \cdot \sqrt[n-1]{a_2 ... a_{n-1} \cdot (a_1 + a_n - G_n[a])}$, (9), with equality if and only if, $a_2 = a_3 = ... = a_{n-1} = a_1 + a_n - G_n[a]$, (10). Using the inequality in Lemma,

$M_n[a] = G_n[a]$, we have: $nA_n[a] - G_n[a] \ge (n-1) \cdot \sqrt[n-1]{a_2 ... a_{n-1} \cdot \frac{a_1 a_n}{G_n[a]}}$, (11), with equality if and only if,

$a_1 = G_n[a]$ or $a_n = G_n[a]$, (12). Then the inequality (11) is rewritten,

$nA_n[a] - G_n[a] \ge (n-1) \cdot \sqrt[n-1]{\frac{G_n^n[a]}{G_n[a]}} \Leftrightarrow nA_n[a] - G_n[a] \ge (n-1) \cdot G_n[a] \Leftrightarrow A_n[a] \ge G_n[a]$. The cases of equality results similar to first proof.

References

1. Bullen P. S. & Mitrinović D. S. & Vasić P. M., *Means and Their Inequalities*, D. Reidel Publidshing Company, Dordrecht/Boston , 1988.

2. Chong K.-M., An Inductive *Proof of the A.M.-G.M. Inequality*, The American Mathematical Monthly, Vol. 83, No. 5 (May, 1976), p. 369.

3. Chong K.-M.,*The Arithmetic Mean-Geometric Mean Inequality:A New Proof*, Mathematics Magazine, Vol. 49, No. 2 (Mar., 1976), pp. 87-88.

4. Mărghidanu D. & Bencze M., *New Proofs for AM – GM and Pondered AM – GM Inequalities*, Octogon Mathematical Magazine, pp. 233-235 , Vol.12 , nr. 1 , April , 2004.

5. Mărghidanu D., *Trei demonstraţii pentru inegalitatea mediilor (Cauchy)*, Sfera, III , nr. 5 (1/2004-2005), pp.1- 4.

6. Mărghidanu D., *Inegalitatea lui Lagrange este echivalentă cu inegalitatea mediilor*, Arhimede , nr. 3-4 , pp. 17-19 , 2005.

7. Mărghidanu D. & Bencze M., *A new Proof for AM-GM Inequalitiy*, Octogon Mathematical Magazine, Vol 13, No. 2, pp.1021-1026 , October , 2005 .

8. Mărghidanu D., *O demonstraţie a inegalităţii mediilor*, RMT, anul XI (Seria a IV-a), pp. 6-7, nr. 1/2006 .

9. Mărghidanu D., *Două demonstraţii scurte pentru inegalitatea mediilor*, G.M., seria B Anul II , pp. 20-21 , nr. 2 , 2007.

10. Mărghidanu D.,O metodă a lui Liouville de demonstrare a inegalităţilor, G.M., seria A , Anul XXV (CIV) , pp. 17-23 , nr. 1 / 2007 .

11. Mărghidanu D. , *O inegalitate din analiză pentru două demonstraţii ale inegalităţii mediilor*, Minus, pp. 29-30 , nr. 1 / 2008.

12. Mărghidanu D., Marinescu D.S., Viorel Cornea V., *O inegalitate echivalentă cu inegalitatea mediilor*, RMT, anul III (Seria a IV-a), pp. 3-6 , nr. 3/2008.

Cinci soluții pentru problema E:15246 din GM 4/2022

de Titu Zvonaru, Comănești

E:16246. Fie triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$ și $m(\sphericalangle A) = 36^0$. Pe latura AB considerăm punctul D astfel încât $AD = BC$. Construim triunghiul EAD congruent cu triunghiul ABC astfel încât punctele D și E sunt de o parte și de alta a dreptei AC. Determinați măsura unghiului CDE

Neculai Stanciu, Buzău

I. Rezultă imediat că $DE \| BC$, adică este suficient să găsim unghiul BCD. Pe dreapta AB luăm punctul P astfel încât B este între A și P, și $BP = BC$. Deducem că $PD = AB = AC$. Deoarece $m(\sphericalangle ABC) = 72^0$ și $BP = BC$, obținem $m(\sphericalangle BPC) = 36^0$. Cum $m(\sphericalangle BAC) = 36^0$, rezultă că triunghiul APC este isoscel cu $PC = AC$, și atunci $PD = PC$. Astfel avem $m(\sphericalangle PCD) = 72^0$, deci $m(\sphericalangle BCD) = 36^0$.

II. O soluție prin redefinirea punctului D. Fie D' situat pe AB astfel încât CD' este bisectoarea unghiului BCA. Obținem două triunghiuri isoscele: BCD' cu $BC = CD'$ și ACD' cu $AD' = CD'$ Rezultă că $AD' = CD' = BC$, ceea ce înseamnă că punctul D' este exact punctul D din problemă. Atunci $\sphericalangle BCD = 36^0$.

III. $4\sin 18^0 \cos 36^0 = \dfrac{4\sin 18^0 \cos 18^0 \cos 36^0}{\cos 18^0} = \dfrac{2\sin 36^0 \cos 36^0}{\cos 18^0} = \dfrac{\sin 72^0}{\cos 18^0} = \dfrac{\cos 18^0}{\cos 18^0} = 1$, atunci

$\cos 36^0 - \sin 18^0 = \cos 36^0 - \cos 72^0 = 2\sin 54^0 \sin 18^0 = 2\sin 18^0 \cos 36^0 = \dfrac{1}{2}$.

Deoarece $\sin 18^0 = \dfrac{BC}{2AB}$, obținem

$$\frac{DB}{DA} = \frac{AB - BC}{BC} = \frac{1}{2\sin 18^0} - 1 = 2\cos 36^0 - 1 = 2\sin 18^0 = \frac{BC}{AB}.$$

Conform reciprocei teoremei bisectoarei, rezultă că DC este bisectoare unghiului BCA, deci $\sphericalangle BCD = 36^0$.

IV. Ca mai sus, $4\sin 18^0 \cos 36^0 = 1$. Notăm, $m(\sphericalangle ACD) = x$. Aplicând teorema sinusurilor în triunghiul ACD obținem $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{\sin x}{\sin(x + 36^0)}$. Cum $\sin 18^0 = \dfrac{BC}{2AB}$, putem scrie succesiv

$2\sin 18^0 = \dfrac{\sin x}{\sin(x + 36^0)} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\cos 36^0} = \dfrac{\sin x}{\sin(x + 36^0)} \Leftrightarrow 2\sin x \cos 36^0 = \sin(x + 36^0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(x + 36^0) + \sin(x - 36^0) = \sin(x + 36^0) \Leftrightarrow \sin(x - 36^0) = 0$, deci $m(\sphericalangle ACD) = 36^0$.

V. Ca mai sus, $4\sin 18^0 \cos 36^0 = 1$, și $\sin 18^0 = \dfrac{BC}{2AB}$. Notăm cu N proiecția lui D pe latura AC. Din triunghiul dreptunghic ADN obținem

$AN = AD\cos 36^0 = BC\cos 36^0 = 2AB\sin 18^0 \cos 36^0 = \dfrac{AC}{2}$. Rezultă că N este mijlocul laturii AC, ceea ce înseamnă că triunghiul ADC este isoscel. Atunci $\sphericalangle ACD = \sphericalangle CAD = 36^0$.

Dezvoltarea unor inegalități în triunghi din Mathematical Reflections 4/2022

de Marin Chirciu, Pitești

Articolul își propune să dezvolte inegalități în triunghi din **Mathematical Reflections Journal**, coordonat de Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA.

1. Problema J600.

J600. In ΔABC, $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\ge 4-\frac{2r}{R}$.

Mihaly Bencze, Brașov and **Neculai Stanciu**, Buzău

Soluție :

We have $LHS=\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)}{4Rrp}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}\overset{Gerretsen}{\ge}$

$\overset{Gerretsen}{\ge}\frac{16Rr-5r^2-3r^2-6Rr}{2Rr}=\frac{10Rr-8r^2}{2Rr}=5-\frac{4r}{R}\overset{Euler}{\ge}4-\frac{2r}{R}=RHS$.

Remark.

The problem can develop. In ΔABC, $5-\frac{4r}{R}\le\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\le\frac{2R}{r}-1$. Marin Chirciu

Soluție: Inequality from the left.

We have $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)}{4Rrp}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}\overset{Gerretsen}{\ge}$

$\overset{Gerretsen}{\ge}\frac{16Rr-5r^2-3r^2-6Rr}{2Rr}=\frac{10Rr-8r^2}{2Rr}=5-\frac{4r}{R}\overset{Euler}{\ge}4-\frac{2r}{R}$.

Inequality on the right.

We have $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)}{4Rrp}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}\overset{Gerretsen}{\le}$

$\overset{Gerretsen}{\le}\frac{4R^2+4Rr+3r^2-3r^2-6Rr}{2Rr}=\frac{4R^2-2Rr}{2Rr}=\frac{2R}{r}-1.$

Inequalities can be written:

$$\text{In } \Delta ABC,\quad 4-\frac{2r}{R}\le 5-\frac{4r}{R}\le\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\le\frac{2R}{r}-1.$$

2. Problema S596.

S596. In ΔABC, $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\ge\frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}$. **Nguyen Viet Hung**, Vietnam

Solution : Use $\sum\frac{a}{b+c-a}=\frac{2R-r}{r}$, $\sum a^2=2\left(p^2-r^2-4Rr\right)$, $\sum bc=p^2+r^2+4Rr$.

Inequality is written: $\frac{2R-r}{r}\ge\frac{3\cdot 2\left(p^2-r^2-4Rr\right)}{p^2+r^2+4Rr}\Leftrightarrow p^2\left(2R-7r\right)+r\left(8R^2+22Rr+5r^2\right)\ge 0$.

We distinguish cases:

Case1). If $\left(2R-7r\right)\ge 0$, inequality is obvious.

Case2). If $\left(2R-7r\right)<0$, inequality is rewritten:

$r\left(8R^2+22Rr+5r^2\right)\ge p^2\left(7r-2R\right)$,resulting from Gerretsen Inequality: $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$.

It remains to show that:

$r\left(8R^2+22Rr+5r^2\right)\ge\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)(7r-2R)\Leftrightarrow 2R^3-3R^2r-4r^3\ge 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (R-2r)\left(2R^2+Rr+2r^2\right)\ge 0$, see Euler Inequality $R\ge 2r$.

The problem can develop.

In ΔABC, $\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{b}{c+a-b}+\dfrac{c}{a+b-c}\ge\dfrac{9\left(a^3+b^3+c^3\right)}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$. **Marin Chirciu**

Solution:

Use $\sum\dfrac{a}{b+c-a}=\dfrac{2R-r}{r}$, $\sum a^3=2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)$, $\sum bc=p^2+r^2+4Rr$.

Inequality is written: $\dfrac{2R-r}{r}\ge\dfrac{9\cdot 2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)}{2p\left(p^2+r^2+4Rr\right)}\Leftrightarrow p^2(R-5r)+r\left(4R^2+26Rr+13r^2\right)\ge 0$.

We distinguish cases:

Case1). If $(R-5r)\ge 0$, inequality is obvious.

Case2). If $(R-5r)<0$, inequality is rewritten:

$r\left(4R^2+26Rr+13r^2\right)\ge p^2(r-5R)$, resulting from Gerretsen Inequality:

$p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$. It remains to show that:

$r\left(4R^2+26Rr+13r^2\right)\ge\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)(r-5R)\Leftrightarrow 4R^3-12R^2r+9Rr^2-2r^3\ge 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (R-2r)(2R-r)^2\ge 0$, see Euler Inequality $R\ge 2r$.

Inequalities can be written:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\ge\frac{9\left(a^3+b^3+c^3\right)}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}\ge\frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}.$$

3. Problema O597.

O597. If $x,y,z>0$ **then in** ΔABC**,** $4+\dfrac{r}{R}+\sum\dfrac{x}{y+z}(1+\cos A)\ge(\sin A+\sin B+\sin C)^2$**.**

Nguyen Viet Hung, Vietnam

Solution:

Lemma: If $x,y,z>0$ then in ΔABC, $\sum\dfrac{x}{y+z}(1+\cos A)\ge\dfrac{p^2}{R^2}-2\left(2+\dfrac{r}{2R}\right)$.

We have $\sum\dfrac{x}{y+z}(1+\cos A)=2\sum\dfrac{x}{y+z}\cos^2\dfrac{A}{2}=2\sum\left(\dfrac{x}{y+z}+1-1\right)\cos^2\dfrac{A}{2}=$

$$=2\sum\frac{x+y+z}{y+z}\cos^2\frac{A}{2}-2\sum\cos^2\frac{A}{2}=2(x+y+z)\sum\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{y+z}-2\sum\cos^2\frac{A}{2}\overset{CS}{\ge}$$

$$\overset{CS}{\ge}2(x+y+z)\frac{\left(\sum\cos\frac{A}{2}\right)^2}{\sum(y+z)}-2\sum\cos^2\frac{A}{2}=2(x+y+z)\frac{\left(\sum\cos\frac{A}{2}\right)^2}{\sum(y+z)}-2\sum\cos^2\frac{A}{2}=$$

$$=2(x+y+z)\frac{\left(\sum\cos\frac{A}{2}\right)^2}{2(x+y+z)}-2\sum\cos^2\frac{A}{2}=\left(\sum\cos\frac{A}{2}\right)^2-2\sum\cos^2\frac{A}{2}=$$

$$=\sum\cos^2\frac{A}{2}+2\sum\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sum\cos^2\frac{A}{2}=2\sum\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sum\cos^2\frac{A}{2}\overset{(1)}{\ge}$$

$$\overset{(1)}{\ge}\left(\frac{p^2}{R^2}-\sum\cos^2\frac{A}{2}\right)-\sum\cos^2\frac{A}{2}\ge\frac{p^2}{R^2}-2\sum\cos^2\frac{A}{2}=\frac{p^2}{R^2}-2\left(2+\frac{r}{2R}\right).$$

(1):

$$\sum\cos\frac{A}{2}\ge\sum\sin A=\frac{p}{R}\Rightarrow\left(\sum\cos\frac{A}{2}\right)^2\ge\frac{p^2}{R^2}\Rightarrow\sum\cos^2\frac{A}{2}+2\sum\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\ge\frac{p^2}{R^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sum\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\ge\frac{p^2}{R^2}-\sum\cos^2\frac{A}{2}.$$

We have $(\sin A+\sin B+\sin C)^2=\left(\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}\right)^2=\left(\frac{2p}{2R}\right)^2=\frac{p^2}{R^2}$.

It remains to show that:

$4+\frac{r}{R}+\left[\frac{p^2}{R^2}-2\left(2+\frac{r}{2R}\right)\right]\ge\frac{p^2}{R^2}\Leftrightarrow 4+\frac{r}{R}+\frac{p^2}{R^2}-2\left(2+\frac{r}{2R}\right)\ge\frac{p^2}{R^2}\Leftrightarrow 4+\frac{r}{R}-2\left(2+\frac{r}{2R}\right)\ge 0$, which is equally true.

Remark. The problem can be reformulated.

If $x,y,z>0$ then in ΔABC, $\sum\frac{x}{y+z}(1+\cos A)+2\sum\cos^2\frac{A}{2}\ge\frac{p^2}{R^2}$.

Solution : We use the Lemma above.

Lemma: If $x,y,z>0$ then in ΔABC, $\sum\frac{x}{y+z}(1+\cos A)\ge\frac{p^2}{R^2}-2\left(2+\frac{r}{2R}\right)$.

We have $\sum\cos^2\frac{A}{2}=2+\frac{r}{2R}$. It remains to show that:

$\left[\frac{p^2}{R^2}-2\left(2+\frac{r}{2R}\right)\right]+2\left(2+\frac{r}{2R}\right)\ge\frac{p^2}{R^2}\Leftrightarrow\frac{p^2}{R^2}-2\left(2+\frac{r}{2R}\right)+2\left(2+\frac{r}{2R}\right)\ge\frac{p^2}{R^2}$, true.

Problema O600.

O600. In ΔABC, $\sum\frac{\sin A}{1+\cos^2 B+\cos^2 C}\le\sqrt{3}$. **An Zhenping**, China

Solution:

Lemma: In ΔABC, $\cos^2 B+\cos^2 C\ge\frac{a^2}{b^2+c^2}$.

We use the cosine theorem:

$$\cos^2 B+\cos^2 C=\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2=\frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2c^2}+\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2}\overset{CS}{\ge}$$

$\overset{CS}{\ge}\frac{\left[(a^2+c^2-b^2)+(a^2+b^2-c^2)\right]^2}{4a^2c^2+4a^2b^2}=\frac{(2a)^2}{4a^2(b^2+c^2)}=\frac{a^2}{b^2+c^2}$. Using the **Lemma** we get:

$$LHS=\sum\frac{\sin A}{1+\cos^2 B+\cos^2 C}\le\sum\frac{\sin A}{1+\frac{a^2}{b^2+c^2}}=\sum\frac{(b^2+c^2)\sin A}{a^2+b^2+c^2}=\frac{\sum(b^2+c^2)\frac{a}{2R}}{a^2+b^2+c^2}=$$

$$=\frac{1}{2R}\cdot\frac{\sum(b^2+c^2)a}{a^2+b^2+c^2}=\frac{1}{2R}\cdot\frac{2p(p^2+r^2-2Rr)}{2(p^2-r^2-4Rr)}=\frac{p(p^2+r^2-2Rr)}{2R(p^2-r^2-4Rr)}\overset{Mitrinovic}{\le}\frac{\frac{3\sqrt{3}R}{2}(p^2+r^2-2Rr)}{2R(p^2-r^2-4Rr)}=$$

$=\frac{3\sqrt{3}(p^2+r^2-2Rr)}{4(p^2-r^2-4Rr)}\overset{(1)}{\le}\sqrt{3}=RHS$, where (1) $\Leftrightarrow\frac{3\sqrt{3}(p^2+r^2-2Rr)}{4(p^2-r^2-4Rr)}\le\sqrt{3}\Leftrightarrow$

$3(p^2+r^2-2Rr)\le 4(p^2-r^2-4Rr)\Leftrightarrow p^2\ge 10Rr+7r^2$, which results from Gerretsen Inequality $p^2\ge 16Rr-5r^2$. It remains to show that: $16Rr-5r^2\ge 10Rr+7r^2\Leftrightarrow R\ge 2r$, (Euler Inequality).

Remark. In the same class of problems.

In ΔABC, $\frac{6r^2}{R^2} \le \sum \frac{\sin^2 A}{1+\cos^2 B+\cos^2 C} \le \frac{3}{2}\left(\frac{R}{2r}\right)^2$. **Marin Chirciu**

Solution : Inequality on the right.

Lemma: In ΔABC, $\cos^2 B+\cos^2 C \ge \frac{a^2}{b^2+c^2}$.

We use the cosine theorem:

$$\cos^2 B+\cos^2 C=\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2=\frac{\left(a^2+c^2-b^2\right)^2}{4a^2c^2}+\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}{4a^2b^2}\overset{CS}{\ge}$$

$$\overset{CS}{\ge}\frac{\left[\left(a^2+c^2-b^2\right)+\left(a^2+b^2-c^2\right)\right]^2}{4a^2c^2+4a^2b^2}=\frac{(2a)^2}{4a^2\left(b^2+c^2\right)}=\frac{a^2}{b^2+c^2}.$$ Using the **Lemma** we get:

$$LHS=\sum\frac{\sin^2 A}{1+\cos^2 B+\cos^2 C}\le\sum\frac{\sin^2 A}{1+\frac{a^2}{b^2+c^2}}=\sum\frac{\left(b^2+c^2\right)\sin^2 A}{a^2+b^2+c^2}=\frac{\sum\left(b^2+c^2\right)\frac{a^2}{4R^2}}{a^2+b^2+c^2}=$$

$$=\frac{1}{4R^2}\cdot\frac{\sum\left(b^2+c^2\right)a^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{1}{4R^2}\cdot\frac{2\sum b^2c^2}{\sum a^2}=\frac{1}{2R^2}\cdot\frac{\sum b^2c^2}{\sum a^2}\underset{Neuberg}{\overset{Goldstone}{\le}}\frac{1}{2R^2}\cdot\frac{4R^2p^2}{36r^2}=\frac{p^2}{18r^2}\overset{Mitrinovic}{\le}\frac{\frac{27R^2}{4}}{18r^2}=$$

$$=\frac{3R^2}{8r^2}=\frac{3}{2}\left(\frac{R}{2r}\right)^2=RHS.$$ Inequality from the left.

$$\sum\frac{\sin^2 A}{1+\cos^2 B+\cos^2 C}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum\sin A\right)^2}{\sum\left(1+\cos^2 B+\cos^2 C\right)}=\frac{\left(\sum\frac{a}{2R}\right)^2}{3+2\sum\cos^2 A}=\frac{1}{4R^2}\frac{\left(\sum a\right)^2}{3+2\cdot\frac{6R^2+4Rr+r^2-p^2}{2R^2}}=$$

$$=\frac{1}{4R^2}\frac{4p^2}{3+\frac{6R^2+4Rr+r^2-p^2}{R^2}}=\frac{p^2}{9R^2+4Rr+r^2-p^2}\overset{(1)}{\ge}\frac{6r^2}{R^2},$$

where (1) $\Leftrightarrow \frac{p^2}{9R^2+4Rr+r^2-p^2}\ge\frac{6r^2}{R^2}\Leftrightarrow p^2\left(R^2+6r^2\right)\ge 6r^2\left(9R^2+4Rr+r^2\right)$,

which results from Gerretsen Inequality $p^2\ge 16Rr-5r^2$. It remains to show that:

$\left(16Rr-5r^2\right)\left(R^2+6r^2\right)\ge 6r^2\left(9R^2+4Rr+r^2\right)\Leftrightarrow 16R^3-59R^2r+72Rr^2-36r^3\ge 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(R-2r\right)\left(16R^2-27Rr+18r^2\right)\ge 0$, see Euler Inequality $R\ge 2r$.

From all the above inequalities, equality if and only if the triangle is equilateral.

Bibliografie:

1. **O.Bottema, R.Z.Djordjevic, R.R.Janic, D.S.Mitrinovic, P.M.Vasic, Geometric Inequalities, Groningen 1969, The Netherlands.**
2. **TituAndreescu, University of Texas at Dallas, USA , Mathematical Reflections4/2022.**
3. **Mihaly Bencze, Brașov , J600, Mathematical Reflections 4/2022.**
4. **Neculai Stanciu, Buzău, J600, Mathematical Reflections 4/2022.**
5. **Nguyen Viet Hung, Vietnam, S596, O597, Mathematical Reflections 4/2022.**
6. **An Zhenping, China, O600, Mathematical Reflections 4/2022.**
7. **Daniel Sitaru, RMM Number 4, New Edition 2022.**
8. **Marin Chirciu, Inegalități geometrice 2, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2021.**

Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești

Generalizarea problemei 25545 din Gazeta Matematică nr. 5/2006

de Lucian Tuțescu, Craiova

În numărul 5/2006 al Gazetei Matematice, domnul Gheorghe Ghiță din Buzău a publicat următoarea problemă:

25545. Fie $a,b,c \in (0;1)$**. Să se arate că**

$$\log_a \frac{4bc}{(a+b)(a+c)} + \log_b \frac{4ac}{(b+c)(b+a)} + \log_c \frac{4ab}{(c+a)(c+b)} = 0 \Leftrightarrow a=b=c$$

În continuare voi prezenta o generalizare a problemei.

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0,1)$. Demonstrați că

$$\frac{2^{n-1}a_2a_3\ldots a_n}{(a_1+a_2)(a_1+a_3)\ldots(a_1+a_n)} + log_{a_2}\frac{2^{n-1}a_1a_3\ldots a_n}{(a_2+a_1)\ldots(a_2+a_n)} + \cdots + log_{a_n}\frac{2^{n-1}a_1a_2\ldots a_n}{(a_n+a_1)\ldots(a_n+a_{n-1})}$$
$$= 0 <=> a_1 = a_2 = \cdots = a_n$$

Dană Camelia, Cremeneanu Luiza – Craiova

Demonstrație: Implicația „<=” este evidentă.

Pentru reciprocă, folosim inegalitatea mediilor.

Avem $(a_1+a_2)(a_1+a_3)\ldots(a_1+a_n) \geq 2^{n-1}\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_1a_3}\ldots\sqrt{a_1a_n} = 2^{n-1}\sqrt{{a_1}^{n-1}a_2\ldots a_n}$

Funcția logaritmică este descrescătoare pentru bazele subunitare, deci vom avea

$$log_{a_1}\frac{2^{n-1}a_2a_3\ldots a_n}{2^{n-1}\sqrt{{a_1}^{n-1}a_2\ldots a_n}} \leq log_{a_1}\frac{2^{n-1}a_2a_3\ldots a_n}{(a_1+a_2)(a_1+a_3)\ldots(a_1+a_n)}$$

$$=> log_{a_1}\frac{2^{n-1}a_2\ldots a_n}{(a_1+a_2)(a_1+a_3)\ldots(a_1+a_n)} \geq log_{a_1}\frac{\sqrt{a_2a_3\ldots a_n}}{\sqrt{{a_1}^{n-1}}} = log_{a_1}(a_2-a_n)^{\frac{1}{2}} - log_{a_1}{a_1}^{\frac{n-1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(log_{a_1}a_2 + log_{a_1}a_3 + \cdots + log_{a_1}a_n\right) - \frac{n-1}{2}.$$

Scriind inegalitățile analoage pentru $a_2, a_3, \ldots, a_n$ avem

$$log_{a_1}\frac{2^{n-1}a_2a_3\ldots a_n}{(a_1+a_2)(a_1+a_3)\ldots(a_1+a_n)} + \cdots + log_{a_n}\frac{2^{n-1}a_1a_2..a_{n-1}}{(a_n+a_1)\ldots(a_n+a_{n-1})}$$
$$\geq \frac{1}{2}\sum(log_{a_1}a_2 + log_{a_2}a_1) - \frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2 - \frac{n(n-1)}{2} =$$

Folosit medii și relația $log_x y = \frac{1}{log_y x}$, (unde x, y > 0 ≠ 1).

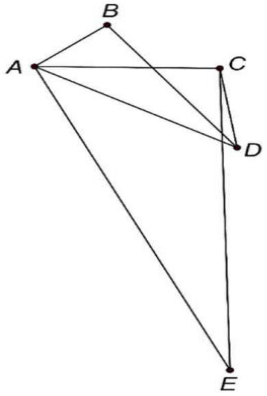
Așadar, trebuie să avem egalitate în inegalitatea mediilor, deși $a_1 =$ ceea ce încheie demonstrația.

Pentru n=3, se obține problema din Gazeta Matematică.

Asupra unei probleme de la Evaluarea Națională 2022

de Ion Pătrașcu și Ion Cotoi

În această notă matematică, plecând de la problema nr. 4 din Subiectul al III-lea, dată la Evaluarea Națională pentru absolvenții clasei a VIII-a în acest an , rezolvăm și propunem câteva probleme conexe.



I. Enunțul problemei 4 este următorul:

În figura alăturată sunt reprezentate punctele A,B,C , D și E astfel încât AB = 4cm, AC = 8 cm, AD = 10 cm și AE = 20 cm. Măsura unghiului BAC este egală cu măsura unghiului DAE si

$\measuredangle CAD = 30°$.

a) Arată că aria triunghiului CAD este egală cu 20 cm^2.

b) Demonstrează că CE = 2 BD.

Soluție. a) Folosim formula $A_{\Delta CAD} = \frac{AC\cdot AD\cdot \sin CAD}{2}$.

Găsim că $A_{\Delta CAD} = \frac{8\cdot 10\cdot \sin 30^\circ}{2} = 40\cdot\frac{1}{2} = 20$ (cm^2)

Putem rezolva și cu formula $Aria_{\Delta} = \frac{Baza\ x\ înălțimea}{2}$.

Atunci construim CH⊥AD , H∈ AD. Deoarece înălțimea CH este cateta care se opune unghiului de $30°$ în triunghiul dreptunghic CHA, avem CH = $\frac{1}{2}$ AC = 4 cm. Atunci $A_{\Delta CAD} = \frac{10.4}{2}$ = 20 (cm^2).

b) Observăm că notând m(BAC) = m(EAD) = x avem m(BAD) = m(CAE) = x+30 .

De asemenea $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{1}{2}$ prin urmare $\Delta BAD \sim \Delta CAE$. De aici obținem că și $\frac{BD}{CE} = \frac{1}{2}$,

deci CE= 2BD.

O altă soluție se poate da construind punctele B' si D' mijloace al segmentelor AC respectiv AE și observând ca $\Delta BAD \equiv \Delta B'AD'$(L.U.L.). De aici obținem $B'D'$ = BD și

cum $B'D'$ este linie mijlocie în triunghiul ACE rezultă că $B'D' = \frac{1}{2}$ CE cu consecința 2BD = CE.

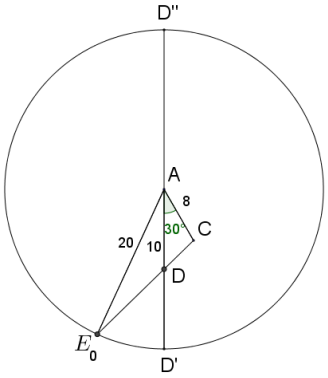
II. Ne propunem în continuare să studiem poziția punctului D față de triunghiul ACE în ipoteză ca unghiul CAB are măsura x variabilă cu $x \in [0°, 150°]$ păstrând datele numerice ale problemei 4.

Vom folosi pentru început următoarea construcție geometrică:

1) Cunoscând AC= 8 cm, AD = 10 cm si $\measuredangle CAD = 30°$, construim triunghiul CAD;

2) Construim cercul cu centrul în A și cu raza de 20 cm.

3)Construim intersecția semidreptei (CD cu cercul C(A,20) și notăm acest punct cu E_0.



Am arătat astfel că există x= m($\measuredangle E_0$ AD) astfel încât punctul D aparține laturii (CE) a triunghiului AEC (E = E_0). Dacă notăm cu D' si D''intersecțiile dreptei AD cu C(A,20), observăm că atunci când punctul E aparține arcului (E_0D'' punctul D este în exteriorul triunghiului ACE, iar atunci când E aparține arcului D'E_0) punctul D este în interiorul triunghiului ACE.

Acum aflăm efectiv valoarea lui x pentru care punctul D este pe (EC).

Teorema cosinusului în triunghiul ACD implică: $CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2AD.CD.\cos 30°$.

Obținem CD = $2.\sqrt{41 - 20\sqrt{3}}$. Din același triunghi avem cos C = $\frac{CD^2 + AC^2 - AD^2}{2AC.CD} \cong -0{,}130$ care conduce la m(C) $\cong 97°27'$ și sin C ≅0,991.Aplicând teorema sinusurilor în triunghiul ACE, rezultă: $\frac{8}{\sin E} = \frac{20}{\sin C}$

$\Longrightarrow \sin E \cong 0{,}396$ și găsim m(E) $\cong 23°19'$.

Din triunghiul ACE găsim că x = 180^c – m(E) – m(C) – $30^c \cong 29°14'$.

<u>Discuție</u>

Poziția punctului D față de triunghiul ACE variază în funcție de x astfel :

Pentru x = $0°$, $D \in (AE)$, D este chiar mijlocul laturii AE;

Pentru x ∈($0°, 29°14'$) D aparține interiorului triunghiului AEC.

Pentru x ≅ $29°14'$ D aparține laturii (CE) a triunghiului ACE.

Pentru x∈($29°14'$, $150°$) D aparține exteriorului triunghiului ACE.

Pentru x = 150^c triunghiul ACE este degenerat (punctele E,A si C sunt coliniare) , punctul D nu aparține dreptei EC.

III. .Păstrând datele problemei 4 de la Evaluarea Națională și notația x= m(BAC) propunem în continuare următoarele probleme:

P_1 .Aflați pentru ce valoare a lui x semidreapta (AE este bisectoarea exterioară a unghiului DAC.

P_2. Aflați pentru ce valoare a lui x semidreapta (EA conține bisectoarea unghiului DAC.

P_3. În ipoteza D∈ (CE), notand $\{B'\} = AB \cap EC$ si cu C' intersecția semidreptei (AC cu cercul circumscris triunghiului AEB'demonstrați că C'B' ∥ CB.

P_4. În ipoteza că m(ABC) = 90^c arătați că dreapta AC este tangentă cercului circumscris triunghiului AED.

P_5. a) Calculați raportul ariilor triunghiurilor ABD si ACE.

b) Aflați valoarea lui x pentru care aria triunghiurilor ACE si ABD este maximă, respectiv minimă.

Prof. **Ion Pătrașcu**, Colegiul Național „Frații Buzești", Craiova,
Prof. **Ion Cotoi**, pensionar, Colegiul „Național Carol I", Craiova

Din nou despre Cebâșev și Nesbitt

de Titu Zvonaru, Comănești **și Bogdan-Marius Ioniță,** București

Scopul acestei note este acela de a prezenta rezolvarea unor inegalități cu ajutorul inegalităților lui Cebâșev și Nesbitt. Deoarece inegalitatea lui Nesbitt se poate demonstra cu ajutorul inegalității lui Cebâșev, inegalitățile care urmează pot fi demonstrate doar cu inegalitatea lui Cebâșev; folosirea inegalității Nesbitt scurtează însă soluțiile.

Inegalitatea lui Cebâșev: Fie $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ și $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$ numere reale pozitive.

Avem inegalitatea: $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{n} \ge \dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \cdot \dfrac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{n}$.

Inegalitatea lui Nesbitt: Dacă a,b,c sunt numere reale pozitive, avem inegalitatea:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}.$$

Corolar 1: Pentru a,b,c numere reale pozitive avem inegalitatea: $3(a^2+b^2+c^2) \ge (a+b+c)^2$.

Corolar 2: Dacă a,b,c sunt numere reale pozitive, atunci este adevărată inegalitatea:

$$a^4+b^4+c^4 \ge abc(a+b+c).$$

Corolar 3: Dacă a,b,c sunt numere reale pozitive, atunci este adevărată inegalitatea:

$$(a^3+b^3+c^3)(a+b+c) \ge (a^2+b^2+c^2)^2.$$

Aplicația 1: Fie a,b,c numere reale pozitive. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2} \ge \frac{9}{4(a+b+c)}$$, **Darij Grinberg, [1]**

Soluție. Folosim **inegalitatea lui Cebâșev, Corolarul 1 și inegalitatea HM – AM.**

Considerăm $a \le b \le c$; atunci $\dfrac{1}{(b+c)^2} \le \dfrac{1}{(c+a)^2} \le \dfrac{1}{(a+b)^2}$. Obținem

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2} \ge \frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{1}{(a+b)^2}\right) \ge$$

$$\ge \frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)^2 \ge \frac{a+b+c}{9}\left(\frac{9}{2(a+b+c)}\right)^2 = \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Observație: În [2] este demonstrată o inegalitate ″mai tare″ decât cea din enunț:

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2} \ge \frac{3(a+b+c)}{4(ab+bc+ca)}.$$

Aplicația 2: Fie a,b,c numere reale pozitive, astfel încât avem $a+b+c=1$. Să se demonstreze inegalitatea: $\dfrac{a^2}{(b+c)^3}+\dfrac{b^2}{(c+a)^3}+\dfrac{c^2}{(a+b)^3} \ge \dfrac{9}{8}$. (**Olimpiadă Belarus, 2014)**

Soluție. Aplicăm **Inegalitatea lui Cebâșev și Inegalitatea lui Nesbitt.**

Considerăm $a \le b \le c$; atunci avem $\dfrac{1}{b+c} \le \dfrac{1}{c+a} \le \dfrac{1}{a+b}$ și $\dfrac{a}{b+c} \le \dfrac{b}{c+a} \le \dfrac{c}{a+b}$. Obținem

$$\frac{a^2}{(b+c)^3}+\frac{b^2}{(c+a)^3}+\frac{c^2}{(a+b)^3} = \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\frac{1}{b+c}+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2\frac{1}{c+a}+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\frac{1}{a+b} \ge$$

$$\geq \frac{1}{3}\left[\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right), (1).$$

Dar avem $\left[\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]\geq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)^2 \geq \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}=\frac{3}{2}$, (2).

Conform inegalității mediilor avem: $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geq \frac{9}{2(a+b+c)}$, (3).

Aplicând inegalitățile (2) și (3), inegalitatea (1) devine

$$\frac{a^2}{(b+c)^3}+\frac{b^2}{(c+a)^3}+\frac{c^2}{(a+b)^3}\geq \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{2(a+b+c)}=\frac{9}{8(a+b+c)}=\frac{9}{8}.$$

Observație: Inegalitatea se poate scrie sub forma

Fie a, b, c, numere reale pozitive. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{a^2}{(b+c)^3}+\frac{b^2}{(c+a)^3}+\frac{c^2}{(a+b)^3}\geq \frac{9}{8(a+b+c)}.$$

și admite următoarea generalizare:

$$\frac{a^n}{(b+c)^{n+1}}+\frac{b^n}{(c+a)^{n+1}}+\frac{c^n}{(a+b)^{n+1}}\geq \frac{9}{2^{n+1}(a+b+c)}.$$

Aplicația 3: Fie a,b,c numere reale pozitive, atunci să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Soluție. Aplicând **Inegalitatea lui Cebâșev și Inegalitatea HM-AM.**

Considerăm $a\leq b\leq c$; atunci $a^2\leq b^2\leq c^2$, $\frac{1}{b+c}\leq\frac{1}{c+a}\leq\frac{1}{a+b}$. Obținem

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geq \frac{(a+b+c)^2}{9}\cdot\frac{9}{2(a+b+c)}=$$

$$=\frac{a+b+c}{2}.$$

Observația 1: În revista Recreații Matematice Nr. 1/2017, N. Stanciu și T. Zvonaru (problema L 324, punctul a) au propus o inegalitate ″mai tare″ decât cea din enunț, astfel: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq \frac{3}{2}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$, (4).

În [4], este prezentată următoarea inegalitate a lui Michael Rozenberg:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq \frac{3}{2}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}, (5).$$

Utilizând **Corolarul 3**, observăm că inegalitatea (5) este ″mai tare″ decât inegalitatea (4).

Observația 2: În [5], pag. 41, este demonstrată o inegalitate ″mai slabă″ decât inegalitatea din enunțul acestei aplicații, astfel:

Fie a,b,c numere reale pozitive, astfel încât $ab+bc+ca=1$ atunci avem inegalitatea:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aplicația 4: Fie a,b,c numere reale pozitive și $n\in N^*$. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}, (6).$$

Soluție: A se vedea [6], exemplul 1.15.

Observație: În cadrul Olimpiadei Internaționale de Matematică din anul 1987, Grecia a propus pe lista scurtă următoarea problemă:

Fie a,b,c *laturile unui triunghi și* $2s=a+b+c$, *atunci avem inegalitatea:*

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}s^{n-1},\ \forall n\in N, (7).$$

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}s^{n-1}\Leftrightarrow\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\left(\frac{2s}{3}\right)^{n-1}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1}$. Conform **Inegalității lui Jensen**, avem:

$\frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{3}\geq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1}$. Deci, inegalitatea (7) este ″mai slabă″ decât inegalitatea (6) și restrictivă prin condiția ca a,b,c să fie laturile unui triunghi.

Aplicația 5: Fie α,x,y,z numere reale pozitive astfel încât $xyz=1$ și $\alpha\geq1$. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{x^\alpha}{y+z}+\frac{y^\alpha}{z+x}+\frac{z^\alpha}{x+y}\geq\frac{3}{2},$$ **Titu Andreescu, Mircea Lascu [1]**

Soluție: A se vedea [1], pag. 64 sau [5], pag. 336.

Aplicația 6: Fie x,y,z numere reale pozitive, atunci să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{x^3}{y^2+z^2}+\frac{y^3}{z^2+x^2}+\frac{z^3}{x^2+y^2}\geq\frac{x+y+z}{2},$$ **Baltic Way 2013, Mircea Becheanu, Mathematical Reflections, Nr. 5/2009**

Soluție. Aplicând **Inegalitatea lui Cebâșev și Inegalitatea lui Nesbitt.**

Considerăm $x\leq y\leq z$; atunci avem $\frac{x^2}{y^2+z^2}\leq\frac{y^2}{z^2+x^2}\leq\frac{z^2}{x^2+y^2}$;

$$\frac{x^3}{y^2+z^2}+\frac{y^3}{z^2+x^2}+\frac{z^3}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{y^2+z^2}\cdot x+\frac{y^2}{z^2+x^2}\cdot y+\frac{z^2}{x^2+y^2}\cdot z$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{y^2+z^2}\cdot x+\frac{y^2}{z^2+x^2}\cdot y+\frac{z^2}{x^2+y^2}\cdot z\geq\left(\frac{x^2}{y^2+z^2}+\frac{y^2}{z^2+x^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2}\right)\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{y^2+z^2}\cdot x+\frac{y^2}{z^2+x^2}\cdot y+\frac{z^2}{x^2+y^2}\cdot z\geq\frac{3}{2}\left(\frac{x+y+z}{3}\right)=\frac{x+y+z}{2}.$$

Observație: În revista Recreații Matematice Nr. 1/2017, N. Stanciu și T. Zvonaru (problema L 324, punctul b) au propus o inegalitate ″mai tare″ decât cea din enunț, astfel:

$$\frac{a^3}{b^2+c^2}+\frac{b^3}{c^2+a^2}+\frac{c^3}{a^2+b^2}\geq\frac{3}{2}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}.$$

Aplicația 7: Fie a,b,c numere reale pozitive, atunci să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{a^5}{b+c}+\frac{b^5}{c+a}+\frac{c^5}{a+b}\geq\frac{1}{2}abc(a+b+c),$$ **Konstantinos Geronikolas**.

Soluție. Folosim **Inegalitatea lui Cebâșev.**

Considerăm $a \le b \le c$; atunci avem $\frac{a}{b+c} \le \frac{b}{c+a} \le \frac{c}{a+b}$. Putem scrie

$$\frac{a^5}{b+c}+\frac{b^5}{c+a}+\frac{c^5}{a+b}=\frac{a}{b+c}\cdot a^4+\frac{b}{c+a}\cdot b^4+\frac{c}{a+b}\cdot c^4 \ge \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)(a^4+b^4+c^4),$$

(8).

Aplicând **Inegalitatea lui Nesbitt** și **Corolarul 2**, inegalitatea (8) devine:

$$\frac{a^5}{b+c}+\frac{b^5}{c+a}+\frac{c^5}{a+b} \ge \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}abc(a+b+c)=\frac{abc(a+b+c)}{2}.$$

Aplicația 8: Fie a,b,c numere reale pozitive. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{a^6}{b^2+c^2}+\frac{b^6}{c^2+a^2}+\frac{c^6}{a^2+b^2} \ge \frac{abc(a+b+c)}{2}.$$

Soluție. Aplicăm **Inegalitatea lui Cebâșev.**

Considerăm $a \le b \le c$; atunci avem $\frac{a^2}{b^2+c^2} \le \frac{b^2}{c^2+a^2} \le \frac{c^2}{a^2+b^2}$;

$$\frac{a^6}{b^2+c^2}+\frac{b^6}{c^2+a^2}+\frac{c^6}{a^2+b^2}=\frac{a^2}{b^2+c^2}\cdot a^4+\frac{b^2}{c^2+a^2}\cdot b^4+\frac{c^2}{a^2+b^2}\cdot c^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{b^2+c^2}\cdot a^4+\frac{b^2}{c^2+a^2}\cdot b^4+\frac{c^2}{a^2+b^2}\cdot c^4\right) \ge \left(\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\right)\left(\frac{a^4+b^4+c^4}{3}\right), \text{ (9).}$$

Aplicând **Inegalitatea lui Nesbitt** și **Corolarul 2**, inegalitatea (9) devine:

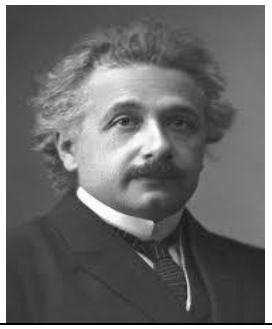
$$\frac{a^6}{b^2+c^2}+\frac{b^6}{c^2+a^2}+\frac{c^6}{a^2+b^2} \ge \frac{3}{2}\cdot\frac{abc(a+b+c)}{3}=\frac{abc(a+b+c)}{2}.$$

Bibliografie

1. **T. Andreescu, G. Dospinescu, V. Cîrtoaje, M. Lascu** – *Inequalities: An Approach Through Problems*, Gil Publishing House, 2004
2. **T. Zvonaru** – *Metoda deligamentării și rafinarea unor inegalități*, Recreații Matematice, Nr. 2/2008
3. **T. Zvonaru** – *Compararea a două inegalități*, Recreații Matematice, Nr. 1/2020
4. **E. Chan** – *Supersums of Square-Weights: A Dumbass's Perspective*, Internet, 2013
5. **Z. Cvetkovski** – *Inequalities – Theorems, Techniques and Seleted Problems*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2012
6. **B.J. Venkatachala** – *Inequalities: An Approach Through Problems*, Springer, 2009
7. **S. Riasat** – *Basics of Olympiad Inequalities*, Internet, 2008

„Nu îmi învăț niciodată studenții; tot ce fac este să le creez condițiile pentru ca ei să învețe".

Albert Einstein
(1879 – 1955)



„ Nu trebuie să îți fie frică de nimic în viață.
Trebuie doar să înțelegi.”
Marie Curie
(1867- 1934)

3. Probleme rezolvate

▪ Clasa a V-a

G:1085. Să se calculeze $S = 52\cdot 50 - 53\cdot 49 + 54\cdot 48 - 55\cdot 47 + ... + 100\cdot 2 - 101\cdot 1$

elev **Ionescu Mihai**, Craiova

Rezolvare:

$$S = (52\cdot 50 - 50\cdot 49) + (50\cdot 49 - 53\cdot 49) + (54\cdot 48 - 48\cdot 47) + (48\cdot 47 - 55\cdot 47). + ... +$$
$$+ (100\cdot 2 - 2\cdot 1) + (2\cdot 1 - 101\cdot 1) = (50\cdot 3 - 49\cdot 3) + (48\cdot 7 - 47\cdot 7) + ... + (2\cdot 99 - 1\cdot 99) =$$
$$= 3 + 7 + 11 + ... + 99 = \frac{(3+99)\cdot 25}{2} = 1275.$$

G:1086. Găsiți o scriere a numerelor 10^{2022} **și** 10^{2023} **ca sumă de două pătrate perfecte.**

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Rezolvare:

Avem $10^{2022} = 10^2\cdot 10^{2020} = (8^2 + 6^2)\cdot 10^{2020} = (8\cdot 10^{1010})^2 + (6\cdot 10^{1010})^2$;

$10^{2023} = 10\ \cdot 10^{2022} = (3^2 + 1^2)\cdot (10^{1011})^2 = (3\cdot 10^{1011})^2 + (1\cdot 10^{1011})^2$.

G:1087. Aflați restul împărțirii numărului $A = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{2022}$ **la 15.**

Camelia Dană, Craiova

Rezolvare:

$$A = 2^{2023} - 1 = 2^3\cdot 2^{2020} - 1 = 8\cdot (2^4)^{505} - 1 = 8\cdot 16^{505} - 1 = 8\cdot (15+1)^{505} - 1 = 8\cdot (M_{15} + 1) - 1 =$$

$= M_{15} + 7.$ Așadar restul împărțirii este 7.

G:1088. În Germania, la 18 ani două treimi din numărul elevilor sunt în școli profesionale, jumătate din cei care dau bacalaureatul îl pică, iar trei sferturi nu termină facultatea. Dacă într-un colegiu sunt 1200 de elevi, atunci aflați:
a) Câți elevi din acel colegiu merg la profesională ?
b) Câți elevi din acel colegiu termină liceul ?
c) Câți elevi din acel colegiu termină facultatea ?

Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare: a) $\frac{2}{3}\cdot 1200 = 800$ elevi din colegiu merg la școli profesionale.

b) 400 elevi merg la liceu și doar 200 elevi termină liceul.

c) $\frac{1}{4}\cdot 200 = 50$ de elevi dintr-un colegiu cu 1200 de elevi termină facultatea.

G:1089. Se consideră numerele naturale impare $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ care împărțite la 100 dau resturi diferite două câte două.
a) Aflați cel mai mic număr $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care mulțimea acestor resturi să coincidă cu mulțimea tuturor resturilor posibile ale împărțirii tuturor numerelor naturale impare la 100;
b) Demonstrați că pentru acel n, suma $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ se divide cu 100.

Adrian Gobej, Curtea de Argeș

Rezolvare:

a) Conform teoremei împărțirii cu rest, rezultă $a_i = 100c_i + r_i$, $r_i \langle 100$, $i \in \overline{1,n}$. Cum a_i este impar rezultă că r_i este impar deci $r_i \in \{1;3;5;...;99\}$ care are 50 de elemente, rezultă n=50.

b) Cum $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{50} = 100(c_1 + c_2 + ... + c_{50}) + 1 + 3 + 5 + ... + 99 = M_{100} + 2500$ care este evident divizibil cu 100.

G:1090. Fie numărul $x = 2^{n+5} \cdot 5^n + 2022$, unde n este număr natural, $n \rangle\ 4$. Calculați suma cifrelor numărului x.

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

$$x = 2^n \cdot 2^5 \cdot 5^n + 2022 = 32 \cdot (2 \cdot 5)^n + 2022 = 32 \cdot 10^n + 2022 = 32\underbrace{000...00}_{n\ de\ 0} + 2022 = 32\underbrace{000...0}_{n-4\ de\ 0}2022.$$

Suma cifrelor numărului x este $3 + 2 + 0 + 0 + ... + 2 + 0 + 2 + 2 = 11$.

G:1091. Fără a se efectua ridicările la putere, arătați că numărul
$a = \frac{1}{4} \cdot \left(2023^3 - 2021^3 - 2023^2 - 2021^2\right)$ **este un număr natural pătrat perfect.**

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

$$2023^3 - 2023^2 - \left(2021^3 + 2021^2\right) = = 2023^2\left(2023 - 1\right) - 2021^2\left(2021 + 1\right) = 2022 \cdot \left(2023^2 - 2021^2\right).$$

Cum $2023^2 - 2021^2 = \left(2023 - 2021\right) \cdot \left(2023 + 2021\right) = 2 \cdot 4044 = 4 \cdot 2022$ rezultă

$$a = \frac{1}{4} \cdot 2022 \cdot 4 \cdot 2022 = 2022^2.$$

G:1092. Aflați cel mai mic număr natural n, în baza 10, care are suma cifrelor egală cu 2022. Cât este restul împărțirii lui n la 9? Determinați numărul p, minim, astfel încât n + p să fie divizibil cu 9.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

Rezolvare:

Numărul cerut trebuie să aibă cât mai puține cifre, respectiv cât mai multe cifre 9. La împărțirea 2022 : 9 se obțin câtul 224 și restul 6. Numărul *n* este 69...9, unde cifra 9 apare de 224 de ori. Restul împărțirii lui *n* la 9 este, evident, 6. Pentru ca *n* + *p* să fie divizibil cu 9, numărul *p* este 3.

▪ Clasa a VI-a

G:1092. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația $2^x = \frac{16 - 16x}{x - 7}$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Evident, $x \neq 7$. Dacă $x \in \mathbb{Z}$ și $x \langle 0$, atunci $16-16x \rangle 0$ și $x-7 \langle 0$. Rezultă că $16-16x \rangle 16 \rangle 0$ deci $\frac{16-16x}{x-7} \langle 0$, dar $2^x \rangle 0$, adică ecuația nu are soluții.

Fie $x \in \mathbb{Z}$ și $x \rangle 7$. Atunci, $x-7 \rangle 0$ și $16-16x = 16(1-x) \langle 16 \cdot (1-7) = -96 \langle 0$, deci $\frac{16-16x}{x-7} \langle 0$. Nici în acest caz nu există soluții.

Dacă ecuația are soluții întregi, acestea pot fi eventual din mulțimea $\{0,1,2,3,4,5,6\}$.

Se dau lui x aceste valori și se obțin soluții doar pentru trei valori:

$x=3 \Rightarrow 2^3 = 8$; $\frac{16-16\cdot 3}{3-7} = \frac{-32}{-4} = 8$. Analog, pentru x= 4 și x= 5. Așadar, $S = \{3;4;5\}$.

G:1093. Să se arate că numărul 2^{2022} are cel puțin 607 cifre.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

Rezolvare:

$2^{2022} = (2^{10})^{202} \cdot 2^2 = 1024^{202} \cdot 4 > 1000^{202} \cdot 4$. Numărul 1000^{202} conține $3 \cdot 202 = 606$ zerouri, deci 607 cifre și cu 1, iar numărul $1000^{202} \cdot 4$ are atunci cel puțin 607 cifre.

G:1094. Determinați numerele prime a, b, și c astfel încât $a+13b+7c=184$.

Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Dacă a, b, c sunt impare, atunci membrul stâng este impar, deci unul dintre numerele a, b, c trebuie să fie par și prim, în cazul nostru trebuie să fie egal cu 2.

Fie a = 2 atunci $13b+7c=182 \Rightarrow b=7,\ c=13$.

Dacă b = 2 atunci $a+26+7c=184 \Rightarrow a+7c=158 \Rightarrow a=67,\ c=13$ sau $a=109,\ c=7$, $a=137,\ c=3$.

Dacă c = 2 atunci $a+13b=170 \Rightarrow\ a=79,\ b=7$ sau $a=131,\ b=3$.

G:1095. Demonstrați că numărul A este natural, unde

$$A = \left\{\left[\frac{0,(3)-0,2}{0,(3)+0,2}\right]^{-1} - 1\right\} \cdot \left\{\left[\frac{0,(142857)-0,(1)}{0,(142857)+0,(1)}\right]^{-1} - 6\right\} \cdot \left[\left(\frac{\frac{1}{439}-\frac{1}{441}}{\frac{1}{439}+\frac{1}{441}}\right)^{-1} - 3\right].$$

Nicolae Ivășchescu, Canada

Rezolvare: Se transformă fracțiile zecimale în fracții ordinare:

$0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, $0,(142857) = \frac{142857}{999999} = \frac{15873}{111111} = \frac{1}{7}$, $0,(1) = \frac{1}{9}$.

După înlocuire în A se obține $A = \left[\left(\frac{\frac{5-3}{15}}{\frac{5+3}{15}}\right)^{-1} - 1\right] \cdot \left[\left(\frac{\frac{9-7}{63}}{\frac{9+7}{63}}\right)^{-1} - 6\right] \cdot \left[\left(\frac{\frac{441-439}{439\cdot 441}}{\frac{441+439}{439\cdot 441}}\right)^{-1} - 3\right] =$

$\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} - 1\right] \cdot \left[\left(\frac{1}{8}\right)^{-1} - 6\right] \cdot \left[\left(\frac{1}{440}\right)^{-1} - 3\right] = (4-1)\cdot(8-6)\cdot(440-3) = 3\cdot 2\cdot 337 = 2022$.

G:1096. Găsiți cele trei numere prime magice p_1, p_2, p_3 astfel încât $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \overline{ab} = \overline{abababab}$, oricare ar fi numărul $\overline{ab}$.

Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare: $1010101 \cdot \overline{ab} = \overline{abababab}$, $1010101 = 73 \cdot 101 \cdot 137$, deci $\{p_1, p_2, p_3\} = \{73, 101, 137\}$.

G:1097. Se consideră numărul $N = 2021^n + (n+2022)(n+2019),\ \forall n \in \mathbb{N}$. Să se arate că N e impar.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare:

n+2022- (n+2019) = 3 rezultă că numerele sunt de parități diferite deci unul e par. Cum 2021^n este impar rezultă că N este impar;

G:1098. Numerele naturale nenule *a, b* și *c* verifică egalitățile $\frac{a}{5} = \frac{b}{13} = \frac{c}{31}$.

Să se arate că $a^2+b^2+c^2$ este divizibil cu patru numere prime consecutive.

Să se afle cea mai mică valoare a rapoartelor, pentru care *a + b + c* este pătrat perfect.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

Rezolvare: Din $\frac{a}{5} = \frac{b}{13} = \frac{c}{31}$ = k $\Rightarrow$a=5k, b=13k și c=31k. Atunci $a^2+b^2+c^2$ = =$25k^2+169k^2+961k^2$= $k^2 \cdot 1155$. Descompunerea lui 1155 este $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, de unde rezultă cerința.

Din *a* + *b* + c = 5k + 13k + 31k = 49k, rezultă că valoarea minimă a lui k este 1.

G:1099. Să se arate că oricare ar fi numerele naturale k, l, n, restul împărțirii numărului $N = 2018^{2k+1} + 2019^{2l+1} + 2022^{2n+1} + 2023^{2l+1} + 2024^{2k+1}$ la 2021 este același.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: $N = (2021-3)^{2k+1} + (2021-2)^{2l+1} + (2021+1)^{2n+1} + (2021+2)^{2l+1} + (2021+3)^{2k+1} =$

$= M_{2021} + (-3)^{2k+1} + M_{2021} + (-2)^{2l+1} + M_{2021} + 1 + M_{2021} + 1 + M_{2021} + 2^{2l+1} + M_{2021} + 3^{2k+1} =$

$= M_{2021} - 3^{2k+1} - 2^{2l+1} + 1 + 2^{2l+1} + 3^{2k+1} = M_{2021} + 1$

În concluzie, restul împărțirii lui N la 2021 este 1 pentru orice numere naturale k, l, n.

G:1100. Fie H ortocentrul triunghiului ABC . Dacă $CH = AB$ și $BH = AC$ aflați unghiurile triunghiului ABC.

elev **Tudorașcu Rareș**, Craiova

Rezolvare:

Fie $AH \cap BC = \{D\}$, $BH \cap AC = \{E\}$ și $CH \cap AB = \{F\}$. Atunci, $\sphericalangle(BAD) \equiv \sphericalangle(FCD) \Rightarrow$ $\Delta CHD \equiv \Delta ABD \Rightarrow$ $CD = AD \Rightarrow$ $m(\sphericalangle(ACD)) = 45^0$, triunghiul ΔADC dreptunghic iisoscel. Rezultă $m(\sphericalangle(BAC)) = 90^0$, deci triunghiul ΔABC este dreptunghic în A și isoscel. A coincide cu H.

▪ Clasa a VII-a

G:1101. Determinați numărul $\overline{ab}$ pentru care $\sqrt{\overline{aab}} - \sqrt{\overline{ab}} = a \cdot b$.

Nicolae Ivășchescu, Canada

Rezolvare:

Numerele $\overline{aab}$ și $\overline{ab}$ trebuie să fie pătrate perfecte, deci $\overline{aab}$ este un pătrat perfect cu prima cifră a și ultima cifră b, cifre ale unui pătrat perfect $\overline{ab}$. Doar trei numere naturale de trei cifre 196, 225, 841 au această proprietate. Din acestea doar 225 verifică relația, deci, $\overline{ab} = 25$.

G:1102. Fie $a,b,c \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $a^2 + 4b^2 + 9c^2 = 6a + 16b + 12c + 20$. Să se determine care este cea mai mare valoare posibilă pentru a, b sau c ?

Adrian Stan, Buzău

***Rezolvare*:** $a^2+4b^2+9c^2=6a+16b+12c+20 \Leftrightarrow (a-3)^2+(2b-4)^2+(3c+d)^2=49 \Rightarrow$ $a-3\le 7,\ 2b-4\le 7,\ 3c+d\le 7 \Rightarrow\ (a-3)^2=49 \Rightarrow a=10 \Rightarrow \max(a,b,c)=10$.

G:1103. Raționalizați numitorul fracției $F=\dfrac{1+\sqrt{2}x+8x^6+8\sqrt{2}x^7}{1-\sqrt{2}x+8x^6-8\sqrt{2}x^7}$, **unde** $x\in\mathbb{Q}^*$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Fracția o scriem succesiv:

$$F=\frac{1+\sqrt{2}x+8x^6\left(1+\sqrt{2}x\right)}{1-\sqrt{2}x+8x^6\left(1-\sqrt{2}x\right)}=\frac{\left(1+\sqrt{2}x\right)\cdot\left(1+8x^6\right)}{\left(1-\sqrt{2}x\right)\cdot\left(1+8x^6\right)}=\frac{1+\sqrt{2}x}{1-\sqrt{2}x}=\frac{\left(1+\sqrt{2}x\right)^2}{(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)}=\frac{1+2\sqrt{2}x+2x^2}{1-2x^2}.$$

G:1104. Există valori ale numărului real a astfel încât numerele $x=\dfrac{2a+3}{4}$ **și** $y=\dfrac{3a-1}{2}$ **să fie simultan numere întregi?**

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

Din ipoteză avem că $a=\dfrac{4x-3}{2}$ și respectiv $a=\dfrac{2y+1}{3}$. Așadar, $\dfrac{4x-3}{2}=\dfrac{2y+1}{3}\Rightarrow$ $3(4x-3)=2(2y+1)\Rightarrow\ 4(3x-y)=11$ ceea ce este imposibil deoarece 11 nu este divizibil cu 4, deci nu există valori reale ale lui a astfel încât x și y să fie simultan întregi.

G:1105. Să se compare fracțiile: $\dfrac{10^{2020}+1}{10^{2021}+1}$ **și** $\dfrac{10^{2021}+1}{10^{2022}+1}$.

Camelia Dană, Craiova

Rezolvare: Fie $n\ge 2$. Atunci,

$$\frac{10^n+1}{10^{n+1}+1}-\frac{10^{n+1}+1}{10^{n+2}+1}=\frac{\left(10^n+1\right)\cdot\left(10^{n+2}+1\right)-\left(10^{n+1}+1\right)^2}{\left(10^{n+1}+1\right)\cdot\left(10^{n+2}+1\right)}=\frac{10^{2n+2}+10^n+10^{n+2}+1-10^{2n+2}-2\cdot 10^{n+1}-1}{\left(10^{n+1}+1\right)\cdot\left(10^{n+2}+1\right)}$$

$$=\frac{10^n(10^2+1-2\cdot 10)}{\left(10^{n+1}+1\right)\cdot\left(10^{n+2}+1\right)}=\frac{10^n\cdot 81}{\left(10^{n+1}+1\right)\cdot\left(10^{n+2}+1\right)}\rangle 0,$$ așadar prima fracție este mai mare.

G:1106. Să se rezolve în mulțimea numerelor raționale ecuația

$$\sqrt{2022}-\sqrt{x+2022-\sqrt{2022}}=k\cdot y,\ k\in\mathbb{Q}^*.$$

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: C. E: $x+2022-\sqrt{2022}\ge 0,\ \sqrt{2022}-k\cdot y\ge 0$.

$$\sqrt{2022}-\sqrt{x+2022-\sqrt{2022}}=k\cdot y\Rightarrow\sqrt{x+2022-\sqrt{2022}}=\sqrt{x+2022}-k\cdot y\,\big|()^2\Rightarrow$$

$x+2022-\sqrt{2022}=2022-2ky\sqrt{2022}+k^2y^2\Leftrightarrow\ x-k^2y^2+(2ky-1)\sqrt{2022}=0.$ (*)

Cum $x,y,k\in\mathbb{Q}\Rightarrow x-k^2y^2\in\mathbb{Q}$ și cum $(2ky-1)\sqrt{2022}\notin\mathbb{Q}$ rezultă din (*) că $x-k^2y^2=0$ și $2k\cdot y-1=0$ de unde rezultă că $y=\dfrac{1}{2k},\ x=\dfrac{1}{4}$, valori care verifică cele două condiții.

G:1107. Să se arate că dacă numerele întregi a, b și c satisfac egalitatea $337a+2b=3c$**, atunci produsul** $(167a+b)(5c-3a)(335b-334c)$ **este divizibil cu numărul 2022.**

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga,** București

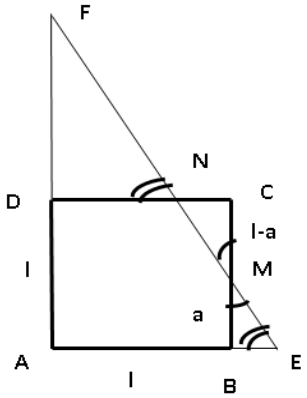
Rezolvare: $337a+2b=3c$

$\Rightarrow 3\big|(337a+2b)\Rightarrow 3\big|(337a-3a+2b)\Rightarrow 3\big|(334a+2b)\Rightarrow 3\big|2(167a+b)\Rightarrow 3\big|(167a+b)$ **(1)**

$2b=3c-337a\Rightarrow 2\big|(2c+3c-337a+334a)\Rightarrow 2\big|(5c-3a)$ **(2)**

$337a = 3c - 2b \Rightarrow 337 \mid (3c - 337c - 2b + 337b) \Rightarrow 337 \mid (335b - 334c)$ **(3)**

Din (1), (2) și (3) rezultă că $(167a+b)(5c-3a)(335b-334c)$ este divizibil cu 2·3·337=2022.



G:1108. Fie pătratul $ABCD$ cu lungimea laturii l. Fie punctele M și N pe laturile BC și CD astfel încât $BM = a < \frac{l}{2}$. Dacă MN intersectează AB în E și AD în F astfel încât $A_{ABCD} = A_{AEF}$, atunci calculați în funcție de l și a lungimea segmentului DF.

Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare:

Observăm că $A_{ABCD} = A_{AEF}$ implică $A_{BEM} + A_{DNF} = A_{CNM}$, (1).

Avem $\Delta BEM \sim \Delta CNM \sim \Delta DNF \Rightarrow A_{BEM} = k \cdot BM^2, A_{CNM} = k \cdot CM^2, A_{DNF} = k \cdot DF^2$, (2).

Din (1) și (2) rezultă că $BM^2 + DF^2 = CM^2 \Rightarrow DF = \sqrt{CM^2 - BM^2} = \sqrt{(l-a)^2 - a^2} = \sqrt{l(l-2a)}$.

▪ Clasa a VIII-a

G:1109. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x - y = 1$. Aflați cea mai mică valoare a expresiei $E(x;y) = x^3 - y^3 - xy$ și valorile lui x și y pentru care este atins acest minim.

elevă **Viespescu Călina Maria**, Craiova

Rezolvare:

$E(x;y) = x^3 - y^3 - xy = (x-y)(x^2+xy+y^2) - xy = x^2 + xy + y^2 - xy = x^2 + y^2 = (y+1)^2 + y^2 =$

$= 2y^2 + 2y + 1 = 2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$. $\min E(x;y) = \frac{1}{2}$ și este atins pentru $y = -\frac{1}{2}$ și $x = \frac{1}{2}$.

G:1110. Fie $A = \sqrt{3^{2020} + 3^{2021} + 3^{2022} + 3^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Să se determine o valoare a lui n astfel încât A să fie rațional.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare. Trebuie ca numărul de sub radical să fie pătrat perfect adică $3^{2020} + 3^{2021} + 3^{2022} + 3^n = 3^{2020} \cdot \left(1 + 3 + 3^2\right) + 3^n = 3^{2020} \cdot 13 + 3^{2020} \cdot 3 = 3^{2020} \cdot 16 = k^2$, deci n= 2021.

G:1111. Arătați că dacă numărul natural n verifică egalitatea $(n+2021)\sqrt{n+2021} - \sqrt{n^2 + 2021n} - n\sqrt{n} = 2n + 2021$, atunci n este pătrat perfect.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Egalitatea dată se scrie de forma $\left(\sqrt{n+2021}\right)^3 - \left(\sqrt{n}\right)^3 = 2n + 2021 + \sqrt{n} \cdot \sqrt{n+2021}$. Utilizând formula $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ obținem $\left(\sqrt{n+2021} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2021}^2 + \sqrt{n} \cdot \sqrt{n+2021} + \sqrt{n}^2\right) = \sqrt{n+2021}^2 + \sqrt{n} \cdot \sqrt{n+2021} + \sqrt{n}^2$ și

simplificăm prin membrul drept. Rămâne de rezolvat ecuația
$\sqrt{n+2021}-\sqrt{n}=1 \Rightarrow \sqrt{n+2021}=\sqrt{n}+1 \Rightarrow n+2021=n+2\sqrt{n}+1 \Leftrightarrow\ 2\sqrt{n}=2020 \Rightarrow n=1010^2$
care este pătrat perfect.

G:1112. Să se rezolve în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ecuația: $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{xy}=p^2-1$, unde p este un număr prim.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=p^2-1-\sqrt{xy}\,|()^2 \Rightarrow x+y+2\sqrt{xy}=(p^2-1)^2-2(p^2-1)\sqrt{xy}+xy \Rightarrow$$

$2p^2\sqrt{xy}=(p^2-1)^2-2(p^2-1)\sqrt{xy}+xy \Rightarrow \sqrt{xy}\in\mathbb{N}$ adică xy este pătrat perfect.

Notăm $\sqrt{x}+\sqrt{y}=k\in\mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{x}=k-\sqrt{y} \Rightarrow\ x=k^2+y-2k\sqrt{y} \Rightarrow \sqrt{y}\in\mathbb{N}$, deci y este pătrat perfect.
Analog rezultă că x este pătrat perfect.
Notăm $x=a^2,\ y=b^2,\ a,b\in\mathbb{N}$ și ecuația se scrie $a+b+ab+1=p^2 \Leftrightarrow\ (a+1)\cdot(b+1)=p^2$.
Se obțin soluțiile: $(a;b)\in\left\{\left(0;p^2-1\right),\left(p-1;p-1\right),\left(p^2-1;0\right)\right\} \Rightarrow$

$(x;y)\in\left\{\left(0;\left(p^2-1\right)^2\right),\left(\left(p-1\right)^2;\left(p-1\right)^2\right),\left(\left(p^2-1\right)^2;0\right)\right\}$.

G:1113. Numerele reale a și b verifică relația $a^2+b^2-3a-5b+7,5=0$. Să se arate că $a+b\in[2;6]$

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

Rezolvare:

Relația dată se mai scrie: $\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\left(b-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{34}{4}+\frac{30}{4}=0$, sau $\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\left(b-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{4}{4}=0$,

apoi $\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\left(b-\frac{5}{2}\right)^2=1$, de unde se deduce că $\left|a-\frac{3}{2}\right|\le 1$ și $\left|b-\frac{5}{2}\right|\le 1$ și încă $-1\le a-\frac{3}{2}\le 1$,

respectiv $-1\le b-\frac{5}{2}\le 1$. Adunând inegalitățile, se obține: $-2\le a+b-4\le 2 \Rightarrow a+b\in[2;6]$

G:1114. Rezolvați în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ecuația $\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}=1$. **Adrian Gobej**, Curtea de Argeș

Rezolvare:

$\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}=1 \Leftrightarrow x(x+1)+y(y+1)=(x+1)(y+1) \Rightarrow x^2-xy+y^2=1|\cdot 2 \Rightarrow\ x^2+y^2+(x-y)^2=2$.

De aici se observă că $x^2\le 2 \Rightarrow x\in\{0;1\}$ cu soluțiile $(x;y)\in\{(0;0),(0;1),(1;0)\}$.

G:1115. Fie $x,y,z\rangle 0$ astfel încât $x+y+z=3$. Arătați că $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}\le\frac{6}{xy+yz+zx}$. În ce caz avem egalitate ?

Dorina Goiceanu, Simona Dascălu, Craiova

Rezolvare: Inegalitatea dată devine: $\frac{xy+yz+zx}{x+y}+\frac{xy+yz+zx}{x+z}+\frac{xy+yz+zx}{y+z}\le 6 \Leftrightarrow$

$\frac{xy}{x+y}+z+\frac{xz}{x+z}+y+\frac{yz}{y+z}+x\le 6 \Leftrightarrow \frac{xy}{x+y}+\frac{xz}{x+z}+\frac{yz}{y+z}\le 3$. (1)

Cum $\frac{xy}{x+y}\le\frac{x+y}{2}$ cu egalitate pentru x = y și analoagele iar prin adunarea lor se obține relația (1).
Avem egalitate pentru x = y = z = 1.

G:1116. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, să se arate că: $(\frac{a}{bc}+4)(\frac{b}{ac}+4)(\frac{c}{ab}+4)\geq\frac{64}{\sqrt{abc}}$.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu

Rezolvare:

Membrul stâng al inegalității se mai scrie:

$$(\frac{a}{bc}+4)(\frac{b}{ac}+4)(\frac{c}{ab}+4)=\frac{(a+4bc)(b+4ac)(c+4ab)}{a^2b^2c^2}.$$

Conform inegalității dintre media aritmetică și media geometrică, se obține:

$$\frac{(a+4bc)(b+4ac)(c+4ab)}{a^2b^2c^2}\geq\frac{2\sqrt{4abc}\cdot 2\sqrt{4abc}\cdot 2\sqrt{4abc}}{a^2b^2c^2}=\frac{64}{\sqrt{abc}}.$$

G:1117. Fie un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a, b, c. Arătați că

$A_t=\frac{1}{4}\left[3S^2-(S-2a)^2-(S-2b)^2-(S-2c)^2\right]$**, unde** $A_t=2(ab+bc+ac)$ **este aria totală iar** $S=a+b+c$**.**

Nicolae Ivășchescu, Canada

Rezolvare: Înlocuind S cu a+b+c se obține în membrul drept :

$$\frac{1}{4}\left[3(a+b+c)^2-(a+b+c-2a)^2-(a+b+c-2b)^2-(a+b+c-2c)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{4}(3a^2+3b^2+3c^2+6ab+6ac+6bc-a^2-b^2-c^2+2ab+2ac-2bc-a^2-b^2-c^2+2ab+$$

$+2bc-2ac-a^2-b^2-c^2-2ab+2ac+2bc)=2ab+2ac+2bc$, tocmai aria totală.

▪ Clasa a IX-a

L:911. Fie $a_n=2^n\cdot 3^{1-n},\ n\in\mathbb{N}^*$ **. a) Să se arate că șirul** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **este o progresie geometrică.**

b) Determinați $n\in\mathbb{N}^*$ **astfel încât** $a_1+a_2+.....+a_n=\frac{38}{9}$.

Constantin Dinu, Buzău

Rezolvare: a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este o progresie geometrică deoarece $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{n+1}\cdot 3^{-n}}{2^n\cdot 3^{1-n}}=\frac{2}{3}=ct.\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*.$

b) $a_1=2$, iar rația este $\frac{2}{3}$, atunci $a_1+a_2+.....+a_n=2\cdot\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}{\frac{2}{3}-1}=-6\cdot\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right]=\frac{38}{9}$. De aici

rezultă $\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{8}{27}\Rightarrow n=3$.

L:912. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **o funcție care verifică condiția (*)** $x\cdot f(x)+(2-x)\cdot f(-x)=x+2$**;**

a) Să se calculeze f(2) și f (- 2) ;

b) Să se determine funcția de gradul doi care verifică condiția (*).

Constantin Dinu, Buzău

Rezolvare:

a) Înlocuind în relația (*) cu 2 și cu -2 se obține f(2) = 2 și f(-2) = 4.

b) Fie $f(x)=ax^2+bx+c$. Înlocuind în (*) obținem

$x\cdot(ax^2+bx+c)+(2-x)\cdot(ax^2-bx+c)=x+2\Rightarrow\ x^2(2b+2a)-2bx+2c=x+2\Rightarrow$

$c=1,\ b=-\frac{1}{2}$ și $a=\frac{1}{2}$ adică $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1$.

L:913. a) Să se arate că $x^4-8x^3+64x+64\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ **;**

b) Comparați numerele $a=1^4+2^4+3^4+.....+(n-1)^4$ **și** $B=n^4+4n^3-30n^2-96n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

a) $x^4-8x^3+64x+64=x^4-8x^3+16x^2-16x^2+64x+64=(x^4-8x^3+16x^2)-16(x^2-4x)+64=$

$=(x^2-4x)^2-16(x^2-4x)+8^2=(x^2-4x-8)^2\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.cu egalitate pentru $x\in\left\{2-2\sqrt{3},\ 2+2\sqrt{3}\right\}$.

b) Conform inegalității de la a) rezultă $k^4-8k^3+64k+64\geq 0,\ \forall k=\overline{1,n}$. Însumând, obținem:

$\sum_{k=1}^{n}k^4\rangle\ 8\cdot\sum_{k=1}^{n}k^3-64\sum_{k=1}^{n}k-64n$ de unde rezultă

$1^4+2^4+3^4+.....+(n-1)^4+n^4\rangle\ 8\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}-64\cdot\frac{n(n+1)}{2}-64n$. Efectuând calculele se obține

$a\rangle\ b,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Observație. Pentru $n\in\{1,2,3,4,5\}$ avem $a\rangle\ 0\rangle\ b$ iar pentru $n\geq 6$ avem $a\rangle\ b\rangle\ 0$. O eventuală folosire a metodei inducției matematice necesită calcule laborioase.

L:914. Rezolvați în $\mathbb{R}$ **ecuația** $4(x-\sqrt{x-1})+\left[2x-\frac{7}{4}\right]^2=3$**, unde** $[x]$ **reprezintă partea întreagă a numărului real x.**

Sebastian Ilinca, Pîrșcoveni, Olt

Rezolvare:

Din condiția de existență a radicalului se obține $x\in[1;\infty)$. Ecuația dată este echivalentă cu

$4x-4\sqrt{x-1}-3+\left[2x-\frac{7}{4}\right]^2=0\,|:4\Rightarrow\ (\sqrt{x-1}-\frac{1}{2})^2+\frac{\left[2x-\frac{7}{4}\right]^2}{4}=0\Rightarrow\ \sqrt{x-1}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{5}{4}$. Pentru

$x=\frac{5}{4}$ se obține că $\frac{\left[2x-\frac{7}{4}\right]^2}{4}=\frac{\left[2\cdot\frac{5}{4}-\frac{7}{4}\right]^2}{4}=\frac{\left[\frac{3}{4}\right]^2}{4}=0$, deci soluția ecuației este $\frac{5}{4}$.

L:915. Dacă $2\sqrt{x-2}+4\sqrt{y-3}=x+y,\ \forall x,y\in\mathbb{R},\ x\geq 2, y\geq 3$ **atunci să se determine suma x+y .**

Adrian Stan , Buzău

Rezolvare: $x-2-2\sqrt{x-2}+1^2+y-3-4\sqrt{y-3}+2^2=0\Rightarrow$

$\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-3}-2\right)^2=0\Rightarrow x=3,\ y=7\Rightarrow x+y=10.$

L:916. Fie a,b,c numere reale astfel încât $a+b+c\neq 0$**. Arătați că**

$$\frac{6(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}+\frac{(a^2+b^2+c^2)}{6(a^2+b^2+c^2)}\geq\frac{5}{2}.$$ **În ce caz avem egalitate ?**

Ileana Duma, Lucian Tuțescu, Craiova

Rezolvare: Fie $\frac{6(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}=x$. Cum $3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\left(a+b+c\right)^2$ se observă că $x\ge 2$. Avem de arătat că $x+\frac{1}{x}\ge\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2x^2+5x+2\ge 0\Leftrightarrow (x-2)(x-\frac{1}{2})\ge 0$. Egalitatea are loc pentru x=2, deci $3\left(a^2+b^2+c^2\right)=(a+b+c)^2\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0\Rightarrow a=b=c\in\mathbb{R}^*$.

L:917. Dacă $a,b,c,m,n\rangle 0$ **atunci** $\sum_{cyc}\frac{8a}{ma^2+nbc}\le(m+n)\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)\cdot\left(\sum_{cyc}\frac{a}{bc}\right)$.

Florică Anastase, Lehliu-Gară, Călărași

Rezolvare:

Din $(ma^2+nbc)^2\ge 4mna^2bc\Rightarrow\frac{a}{ma^2+nbc}\le\frac{ma^2+nbc}{4mnabc}$, atunci

$$\sum_{cyc}\frac{a}{ma^2+nbc}\le\frac{]}{4mn}\cdot\sum_{cyc}\frac{ma^2+nbc}{abc}\le\frac{]}{4mn}\cdot\sum_{cyc}\frac{(m+n)a^2}{abc}=\frac{m+n}{4mn}\cdot\sum_{cyc}\frac{a}{bc}.\quad(1)$$

Este ușor de arătat că (2) $\frac{m+n}{4mn}\le\frac{(m+n)(m^2+n^2)}{8m^2n^2}\Leftrightarrow m^2+n^2\ge 2mn$.

Din (1) și (2) rezultă inegalitatea din enunț.

L:918. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $x+\frac{x}{2x-1}+\frac{x^2}{x^2-2x+1}=\frac{25}{4}$.

Béla Kovács, Satu Mare

Rezolvare: C.E: $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2};1\right\}$. Notăm $t=x+\frac{x}{2x-1}\Rightarrow t=\frac{2x^2}{2x-1}$ iar $\frac{x^2}{x^2-2x+1}=\frac{t}{t-2}$.

Ecuația dată devine: $t+\frac{t}{t-2}=\frac{25}{4}\Leftrightarrow 4t^2-29t+50=0$ cu soluțiile $t\in\left\{\frac{29-\sqrt{41}}{2},\frac{29+\sqrt{41}}{2}\right\}$.

Revenind la substituție: $\frac{2x^2}{2x-1}=\frac{29\pm\sqrt{41}}{8}\Leftrightarrow 16x^2-2(29\pm\sqrt{41})x+(29\pm\sqrt{41})=0$, cu formula pe jumătate:

$\Delta=(29\pm\sqrt{41})^2-16(29\pm\sqrt{41})=(29\pm\sqrt{41})(13\pm\sqrt{41})=418\pm 42\sqrt{41}=(7\pm 3\sqrt{41})^2$

obținem rădăcinile: $x=\frac{29\pm\sqrt{41}\pm(7\pm 3\sqrt{41})}{16}$. Deci ecuația dată are următoarele rădăcini reale:

$\frac{9\pm\sqrt{41}}{4}$ și $\frac{11\pm\sqrt{41}}{8}$

Observație: Prin aducere la același numitor și cu efectuarea calculelor ecuația dată va avea forma:
$8x^4-58x^3+129x^2-100x+25=0$ care se poate descompune în factori de gradul doi:
$(2x^2-9x+5)(4x^2-11x+5)=0$, de unde rezultă soluțiile cu ușurință.

L:919. Se consideră următoarele șiruri de numere $a_n=\frac{2022^n+2021n-2023}{x}$ **și** $b_n=\frac{2022^n-2021n+2023}{x}$, $n\ge 1$, $x\in\mathbb{R}^*$.

a) Arătați că șirul $c_n=a_n-b_n$ este o progresie aritmetică.

b) Demonstrați că $\frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{a_n+b_n}$ **nu depinde de n.**

Gheorghe Dârstaru, Buzău

Rezolvare:

a) Mai întâi $c_n = \dfrac{2022^n + 2021n - 2023 - 2022^n + 2021n + 2023}{x} = \dfrac{4042n - 4046}{x}$ iar din

$c_{n+1} - c_n = \dfrac{4042n + 4042 - 4046 - 4042n + 4046}{x} = \dfrac{4042}{x}$ care este constantă, adică $(c_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică.

b) După înlocuire se obține $\dfrac{a_{n+1} + b_{n+1}}{a_n + b_n} = \dfrac{2 \cdot 2022^{n+1}}{2 \cdot 2022^n} = 2022$, așadar nu depinde de n.

L:920. Să se determine n numere întregi consecutive pentru care suma cuburilor lor este egală cu pătratul sumei lor.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare : Fie a natural, și atunci conform enunțului problemei, avem: $a^3 + (a+1)^3 + ... + (a+n-1)^3 = (a + a + 1 + ... + a + n - 1)^2 \Leftrightarrow$

$$na^3 + 3a^2(1 + 2 + ... + n - 1) + 3a[1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2] + 1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3 = \left[na + \frac{n(n-1)}{2}\right]^2 \Leftrightarrow$$

$$na^3 + 3a^2\frac{n(n-1)}{2} + 3a\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n^2(n-1)^2}{4} = n^2a^2 + an^2(n-1) + \frac{n^2(n-1)^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$a^3 + \left(\frac{3n-3}{2} - n\right)a^2 + (n-1)\left(\frac{2n-1}{2} - n\right)a = 0 \Leftrightarrow a^3 + \frac{n-3}{2}a^2 - \frac{n-1}{2}a = 0 \Leftrightarrow a\left[2a^2 + (n-3)a - n + 1\right] = 0 \Rightarrow$$

1) $a = 0 \Rightarrow 0,1,2,...,n-1$; 2) $2a^2 + (n-3)a - n + 1 = 0 \Rightarrow a_1 = 1; a_2 = \dfrac{-n+1}{2} \in N \Rightarrow n$ impar. In concluzie, numerele sunt 1,2,…,n, sau $-\dfrac{n-1}{2}, -\dfrac{n-3}{2}, ..., -1, 0, 1, ..., \dfrac{n-3}{2}, \dfrac{n-1}{2}$, cu n impar.

In concluzie, singurele n-uplete, sunt: 0,1,2,…,n-1; 1,2,…,n, respectiv $-\dfrac{n-1}{2}, -\dfrac{n-3}{2}, ..., -1, 0, 1, ..., \dfrac{n-3}{2}, \dfrac{n-1}{2}$, cu n impar.

L:921. Dacă $a, b, c \rangle 0$, $a + b + c = 3$, atunci $3\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \geq 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + ab + bc + ca$.

Marin Chirciu, Pitești

Rezolvare: Notăm $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$. Avem

$p = 3 = a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3\sqrt[3]{r} \Rightarrow r \leq 1$, $q^2 = \left(ab + bc + ca\right)^2 \geq 3abc\left(a + b + c\right) = 3rp = 9r \Rightarrow$

$q \geq 3\sqrt{r}$, (1).

Inegalitatea $3\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \geq 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + ab + bc + ca$ se scrie:

$$\frac{3}{2}\frac{q}{r} \geq \left(p^2 - 2q\right) + \frac{1}{2}q \Leftrightarrow \frac{3q}{r} \geq 2p^2 - 3q \Leftrightarrow \frac{3q}{r} \geq 2p^2 - 3q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3q}{r} + 3q \geq 2p^2 \Leftrightarrow 3q\left(\frac{1}{r} + 1\right) \geq 2p^2 \Leftrightarrow 3q\left(\frac{1}{r} + 1\right) \geq 2 \cdot 9 \Leftrightarrow q\left(\frac{1}{r} + 1\right) \geq 6, \quad (2).$$

Din (1) și (2) este suficient să arătăm că:

$$3\sqrt{r}\left(\frac{1}{r} + 1\right) \geq 6 \Leftrightarrow \sqrt{r}\left(\frac{1}{r} + 1\right) \geq 2 \Leftrightarrow r\left(\frac{1}{r} + 1\right)^2 \geq 4$$ adevărat pentru orice $r \leq 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $r = 1$ adică $a = b = c = 1$.

L:922. Șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **este definit astfel:** $a_1=5,\ a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2}, & n\ par\\ \dfrac{a_n+51}{2}, & n\ impar\end{cases}$. **Calculați** a_{2022}.

Dorina Goiceanu, Craiova

Rezolvare: Cum $a_1=5,\ a_2=28,\ a_3=14,\ a_4=7,\ a_5=29,\ a_6=40,$ $a_7=20,\ a_8=10,\ a_9=5.$ Prin inducție obținem că șirul este periodic de perioadă principală 8, $a_{8m+p}=a_p$, așadar, $a_{2022}=a_{252\cdot 8+6}=a_6=40$.

▪ Clasa a X-a

L:923. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3^x+3^{-x}$.

a) Demonstrați că $f(x)+f(-x)\ge 4,\ \forall x\in\mathbb{R}$; **b) Rezolvați ecuația** $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x^{2022}+1}},\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

Rezolvare:

a) $f(x)+f(-x)=2\left(3^x+\dfrac{1}{3^x}\right)\ge 2\cdot 2=4$; ($a+\dfrac{1}{a}\ge 2,\ \forall a\in\mathbb{R}^*_+$).

b) $f(x)\ge 2$ conform punctului a iar $\dfrac{2}{\sqrt{x^{2022}+1}}\le 2,\ \forall x\in\mathbb{R}$ rezultă că $f(x)=2$ cu soluția unică x = 0.

L:924. Rezolvați în $\mathbb{R}$ **ecuațiile: a)** $x^2+2\sqrt{x^2-6x+5}=6x-5$; **b)** $\log_4(-5x+6)\cdot\log_x 2=1$;

Constantin Dinu, Buzău

Rezolvare:

a) Ecuația dată devine $x^2-6x+5+2\sqrt{x^2-6x+5}=0$ cu $x^2-6x+5=0$ de unde rezultă $x\in\{1;5\}$.

b) Evident $x\in\left(0;\dfrac{6}{5}\right)-\{1\}$. Cum $\log_4(-5x+6)=\dfrac{\log_2(-5x+6)}{2}$ iar $\log_x 2=\dfrac{1}{\log_2 x}$ rezultă $\dfrac{\log_2(-5x+6)}{2}=\log_2 x$ adică $-5x+6=x^2$ cu soluțiile $x_1=-6$ și $x_2=1$ care nu convin. Așadar, $S=\{\varnothing\}$.

L:925. Rezolvați în numere reale strict pozitive sistemul de ecuații: $\begin{cases}x^y=y^x\\ x^{2021}=y^{2022}\end{cases}$.

Alecu Orlando, Roșiori De Vede

Rezolvare: Evident, x =1, y =1.

$y^{2021x}=\left(y^x\right)^{2021}=\left(x^y\right)^{2021}=x^{2021y}=\left(x^{2021}\right)^y=\left(y^{2022}\right)^y=y^{2022y}$. Așadar, $2021x=2022y$ adică $y=\dfrac{2021}{2022}x$. Înlocuind în ecuația a doua a sistemului, obținem $x=\left(\dfrac{2022}{2021}\right)^{2022}$, $y=\left(\dfrac{2022}{2021}\right)^{2021}$.

L:926. Rezolvați în $\mathbb{R}$ **ecuația**

$$4^x+4^y+4^z+2^{x+y}+2^{y+z}+2^{z+x}-2^{\frac{2x+y+z+2}{2}}-2^{\frac{2y+x+z+2}{2}}-2^{\frac{2z+x+y+2}{2}}=0.$$

Pál Orbán, Târgu Secuiesc

Rezolvare. Ecuația se scrie

$$\left(2^x-2^{\frac{y+z}{2}}\right)^2+\left(2^y-2^{\frac{x+z}{2}}\right)^2+\left(2^z-2^{\frac{x+y}{2}}\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}2^x=2^{\frac{y+z}{2}}\\2^y=2^{\frac{x+z}{2}}\\2^z=2^{\frac{x+y}{2}}\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z.$$

L:927. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $x^3+\left(\frac{4x}{5x-4}\right)^3=\frac{289}{25}$.

Kovács Béla, Satu Mare

***Rezolvare*:** Condiția de existență: $x\neq\frac{4}{5}$. Fie $a+b=x+\frac{4x}{5x-4}=t \Leftrightarrow t=\frac{5x^2}{5x-4}$ avem:

$ab=\frac{4}{5}(a+b)$. Folosind identitatea $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ și schimbarea de variabilă

$a+b=t$ avem: $t^3-3\cdot\frac{4}{5}t^2=\frac{289}{25} \Leftrightarrow 25t^3-3\cdot 20t^2-289=0$

Înmulțind cu 5 și punând $5t=y$ rezultă: $y^3-12y^2-1445=0$

Se obține $(y-17)(y^2+5y+85)=0$ cu unica soluție reală: $y=17$.

Rezultă: $t=\frac{17}{5}$, și astfel avem: $\frac{5x^2}{5x-4}=\frac{17}{5} \Leftrightarrow 25x^2-85x+68=0$

cu soluțiile: $x=\frac{17-\sqrt{17}}{10}$ și $x=\frac{17+\sqrt{17}}{10}$. care sunt rădăcinile reale ale ecuației date.

L:928. Determinați coordonatele punctelor de intersecție cu axele de coordonate ale graficului funcției $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(1+x)+56e^x+71e^{2x}+16e^{3x}+e^{4x}-144$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Observăm că $f(0)=0$, deci $O(0;0)\in G_f$. O să arătăm că acesta este singurul punct de intersecție cu axa Ox. Fie $g:(-1;\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=\ln(1+x)$, și

$h(x)=56e^x+71e^{2x}+16e^{3x}+e^{4x}-144$ atunci $f(x)=g(x)+h(x)$.

Dacă $x\in(-1;0)\Rightarrow 1+x\in(0;1)\Rightarrow g(x)=\ln(x+1)\langle\ \ln 1=0$. Fie $t=e^x\in\left(\frac{1}{e};1\right)$ și atunci

$h(x)=56t+71t^2+16t^3+t^4-144\ \langle\ 56+71+16+1-144=0$. Așadar, $f(x)=g(x)+h(x)\langle 0$ dacă $x\in(-1;0)$ adică ecuația nu are soluții.

Pentru $x\in(0;\infty)\Rightarrow 1+x\in(1;\infty)\Rightarrow g(x)=\ln(x+1)\rangle\ \ln 1=0$ iar pentru $t=e^x\rangle e^0=1\Rightarrow h(x)\ \rangle\ 0$.

Așadar, $f(x)=g(x)+h(x)\rangle\ 0$ iar singurul punct de intersecție cu axele este $O(0;0)\in G_f$.

L:929. Fie a,b,c,d **numere reale din intervalul** $\left[\frac{1}{\sqrt{2}};\infty\right)$. **Arătați că** $a^2b^2c^2d^2+a^2+b^2+c^2+d^2\geq 4abcd+1$. **În ce caz avem egalitate ?**

Lucian Tuțescu, Ileana Duma, Craiova

Rezolvare:

Deoarece $a^2+b^2+c^2+d^2 \ge 4\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2} \ge 4\sqrt{abcd}$ vom arăta că $a^2b^2c^2d^2+4\sqrt{abcd} \ge 4abcd+1$.

Fie $x=\sqrt{abcd} \Rightarrow x \ge \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4} = \frac{1}{2}$ și avem de arătat că $x^4+4x-4x^2-1 \ge 0$ (1) sau $(x-1)(x^3+x^2+x+1-4x) \ge 0$ de unde $(x-1)(x^3-x+(x-1)^2) \ge 0$ adică $(x-1)^2(x^2+2x-1) \ge 0$ adevărată deoarece $x^2+2x-1 \ge \frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}-1=\frac{1}{4} \rangle 0$. Egalitate în (1) există pentru x=1 adică $abcd=1$ iar egalitate în inegalitatea din enunț vom avea pentru $a^2=b^2=c^2=d^2$ și $abcd=1$ adică $a=b=c=d=1$.

L:930. Să se demonstreze că triunghiul de afixe a, b, c este echilateral dacă și numai dacă triunghiul de afixe a^2+ab+b^2, b^2+bc+c^2, c^2+ca+a^2 este echilateral.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare:

Fie triunghiul Δ ABC cu $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ și triunghiul Δ MNP cu $M(a^2+ab+b^2)$, $N(b^2+bc+c^2)$, $C(c^2+ca+a^2)$. Din faptul că

$MN=\left|a^2+ab+b^2-(b^2+bc+c^2)\right|=\left|a^2+ab-bc-c^2\right|=|a-c|\cdot|a+b+c|=AC|a+b+c|$

Și din celelalte relații analoage, $MP=BC|a+b+c|$, $NP=AB|a+b+c|$, rezultă concluzia problemei.

L:931. Rezolvați în mulțimea $(0^0,90^0)$ ecuația $\frac{1-\sqrt{3}\cdot tgx}{1-2\cdot\sin x}=2$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Din $1-2\cdot\sin x \ne 0 \Rightarrow \sin x \ne \frac{1}{2} \Rightarrow x \ne 30^0$.

Ecuația dată este echivalentă cu $4\sin x-\sqrt{3}\cdot tgx=1|\cdot\cos x \Rightarrow$ $4\sin x\cdot\cos x-\sqrt{3}\sin x=\cos x \Rightarrow$

$2\sin 2x=\frac{\cos x\cos 60^0+\sin x\sin 60^0}{\cos 60^0} \Rightarrow$ $2\sin 2x=2\cos(x-60^0) \Rightarrow$ $\cos(90^0-2x)=\cos(x-60^0) \Rightarrow$

$90^0-2x=\pm(x-60^0)+360^0\cdot k,\ k\in\mathbb{Z}$. De aici. singura soluție este $x=50^0$.

L:932. Să se arate că în triunghiul ascuțitunghic ABC avem inegalitatea:

$\frac{a^2}{A}\left(\frac{\sin^5 A}{B}+\frac{\cos^5 A}{C}\right)+\frac{b^2}{B}\left(\frac{\sin^5 B}{C}+\frac{\cos^5 B}{A}\right)+\frac{c^2}{C}\left(\frac{\sin^5 C}{A}+\frac{\cos^5 C}{B}\right) \rangle \frac{3p^2}{\pi^2}$**, notațiile fiind cele obișnuite într-un triunghi (unghiurile sunt măsurate în radiani).**

Emil C. Popa, Radu Diaconu, Sibiu

Rezolvare:

$$\frac{a^2}{A}\left(\frac{\sin^5 A}{B}+\frac{\cos^5 A}{C}\right)=\frac{a^2}{A}\left(\frac{\sin^6 A}{B\cdot\sin A}+\frac{\cos^6 A}{C\cdot\cos A}\right)\ge\frac{a^2}{A}\cdot\frac{\left(\sin^3 A+\cos^3 A\right)^2}{B\sin A+C\cos A}\ge$$

$\frac{a^2}{A}\cdot\frac{(\sin^3 A+\cos^3 A)^2}{\sqrt{B^2+C^2}\cdot\sqrt{\sin^2 A+\cos^2 A}} \rangle \frac{a^2}{A}\cdot\frac{(\sin^3 A+\cos^3 A)^2}{B+C}$. Observăm că

$\sin^3 A+\cos^3 A=\frac{\sin^4 A}{\sin A}+\frac{\cos^4 A}{\cos A}\ge\frac{\left(\sin^2 A+\cos^2 A\right)^2}{\sin A+\cos A}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$, deoarece $\sin A+\cos A\le\sqrt{2}$.

Deci, $\frac{a^2}{A}\left(\frac{\sin^5 A}{B}+\frac{\cos^5 A}{C}\right) \rangle \frac{a^2}{2(A\cdot B+A\cdot C)}$. Analog pentru ceilalți termeni. Rezultă:

$$\frac{a^2}{A}\left(\frac{\sin^5 A}{B}+\frac{\cos^5 A}{C}\right)+\frac{b^2}{B}\left(\frac{\sin^5 B}{C}+\frac{\cos^5 B}{A}\right)+\frac{c^2}{C}\left(\frac{\sin^5 C}{A}+\frac{\cos^5 C}{B}\right)\rangle\ \frac{a^2}{2(A\cdot B+A\cdot C)}+$$

$$\frac{b^2}{2(B\cdot C+B\cdot A)}+\frac{c^2}{2(C\cdot A+B\cdot A)}\geq\frac{(a+b+c)^2}{4(A\cdot B+B\cdot C+C\cdot A)}=\frac{p^2}{A\cdot B+B\cdot C+C\cdot A}\geq\frac{3p^2}{(A+B+C)^2}=\frac{3p^2}{\pi^2}.$$

▪ Clasa a XI-a

L:933. Separați rădăcinile reale ale ecuației $\ln 3x+2\ln(1-x)+1=0$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Din condițiile de existență ale logaritmilor obținem $x\in(0;1)$. Ecuația dată se rescrie de forma $\ln 3x+\ln(1-x)^2+\ln e=0\Rightarrow\ \ln\left[3x\cdot e\cdot(1-x)^2\right]=\ln 1$. Folosind injectivitatea funcției logaritmice obținem: $3x\cdot e\cdot(1-x)^2=1$. Pentru separarea rădăcinilor ecuației date considerăm funcția continuă $f(x)=3ex^3-6ex^2+3ex-1$ și observăm că $f(0)=-1\langle 0,\ \ f(1)=-1\langle 0,\ \ f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4e-9}{9}\rangle 0$. Așadar, din $f(0)\cdot f\left(\frac{1}{3}\right)\langle 0$ și $f(1)\cdot f\left(\frac{1}{3}\right)\langle 0$ există cel puțin o soluție în fiecare interval $\left(0;\frac{1}{3}\right)$ și $\left(\frac{1}{3};1\right)$. Aceste soluții sunt unice datorită injectivității funcției f(x) pe cele două intervale.

Funcția f(x) este funcție derivabilă cu $f^I(x)=9e(1-x)(\frac{1}{3}-x)$ iar pentru

$x\in\left(0;\frac{1}{3}\right)\Rightarrow f^I(x)\ \rangle\ 0\Rightarrow f(x)$ este strict crescătoare pe $\left(0;\frac{1}{3}\right)$ iar pentru

$x\in\left(\frac{1}{3};1\right)\Rightarrow f^I(x)\ \langle\ 0\Rightarrow f(x)$ este strict descrescătoare pe $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

L:934. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & b & 0\\ c & a & c\\ 0 & -b & a\end{pmatrix}$, $a,b,c\in\mathbb{R}^*$. **Să se arate că** $Tr^3\left(A^n\right)=3^3\cdot\det\left(A^n\right),\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare:

Evident $\det\left(A^n\right)=\det^n(A)=a^{3n}$. Scriem matricea A de forma: $A=a\cdot I_3+B$ unde $B=\begin{pmatrix} 0 & b & 0\\ c & 0 & c\\ 0 & -b & 0\end{pmatrix}$ iar

$B^2=\begin{pmatrix} bc & 0 & bc\\ 0 & 0 & 0\\ -bc & 0 & -bc\end{pmatrix}$ și $B^3=O_3,\ \ B^4=O_3, etc.$ Atunci,

$A^n=(aI_3+B)^n=a^nI_3+na^{n-1}B+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-1}B^2$ Rezultă

$$A^n=a^{n-2}\begin{pmatrix} a^2+\frac{n(n-1)}{2}bc & nab & \frac{n(n-1)}{2}bc \\ nac & a^2 & nac \\ -\frac{n(n-1)}{2}bc & -nab & a^2-\frac{n(n-1)}{2}bc \end{pmatrix}$$ iar de aici se obține

$Tr(A^n)=a^n+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}bc+a^n+a^n-\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}bc=3a^n$ astfel că și relația propusă se verifică.

L:935. Pentru $x\ge 0$ rezolvați ecuația $\sqrt{x}=\log_2 x$. **Adrian Gobej**, Curtea de Argeș

Rezolvare:

Se observă că soluțiile sunt numerele 4 și 16.

Considerăm funcția continuă și derivabilă $f(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}-\log_2 x$. Din $f^I(x)=0\Leftrightarrow$

$\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x\ln 2}=0\Rightarrow\sqrt{x}\cdot\ln 2-2=0\Rightarrow\ x=\left(\frac{2}{\ln 2}\right)^2=a$, cu $4\langle\ a\ \langle\ 16$.

Se demonstrează cu tabelul de semne că f(x) este descrescătoare pe $(0;a)$ și crescătoare pe $(a;\infty)$ iar $f(a)\langle 0$ este punct de minim global deci ecuația dată are o unică soluție pe primul interval, 4 și una singură pe celălalt, 16.

L:936. Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{\ln(2-\cos^2 x)}$. **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{\ln(2-\cos^2 x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{\sin^2 x}\cdot\frac{1-cos^2x)}{\ln(1+1-\cos^2 x)}\cdot\frac{\sin^2 x}{1-\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}=1$.

L:937. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă astfel încât $f(0)=0$ și $f(x)\cdot f^I(x)+f^2(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Să se arate că $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare:

Din $\left(f(x)\cdot f^I(x)+f^2(x)\right)\cdot 2\cdot e^{2x}=0\Leftrightarrow\ \left(f^2(x)\cdot e^{2x}\right)^I=0\Rightarrow f^2(x)\cdot e^{2x}=k,\ \forall x\in\mathbb{R},\ k=ct$.

Pentru $x=0\Rightarrow k=0\Rightarrow f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

L:938. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\sqrt[n]{n!})}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}$. **D.M. Bătinețu-Giurgiu,** București și **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Avem $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln(1+x)\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=0$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\sqrt[n]{n!})}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}\ln(1+\sqrt[n]{n!})^{\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}}=0\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{(2n-1)!}}=$$

$$=0\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}=0\cdot\frac{1}{e}\cdot\frac{e}{2}=0.$$

L:939. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ șir de numere reale definit prin $x_1=0$ și $x_n=\dfrac{(1-n)x_{n-1}+1-2n}{nx_{n-1}+2n}$. Să se calculeze

$L=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}(2+x_k)$. **Florică Anastase**, Lehliu-Gară, Călărași

Rezolvare: $P_n=\prod\limits_{k=1}^{n}(2+x_k)$. $x_n=-1+\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{x_{n-1}+1}{x_{n-1}+2}\Rightarrow\ x_n+1=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{x_{n-1}+1}{x_{n-1}+2}\Rightarrow\ x_{n-1}+2=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{x_{n-1}+1}{x_n+1}$.

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}(2+x_k)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\cdot\frac{x_k+1}{x_{k+1}+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x_1+1}{x_2+1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{x_2+1}{x_3+1}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{x_n+1}{x_{n+1}+1}=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{x_n+1}{x_{n+1}+1}=$$

$$=\frac{1}{2(n+1)!}\cdot\frac{1}{x_{n+1}+1}\Rightarrow P_n=\frac{1}{2n!}\cdot\frac{1}{x_n+1}.$$

Avem: $x_n+2=\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{x_n+1}{x_{n+1}+1}\Rightarrow\dfrac{1}{x_{n+1}+1}=(n+1)\left(1+\dfrac{1}{1+x_n}\right)$ atunci

$P_n=\dfrac{1}{2n!}\left(1+\dfrac{1}{1+x_k}\right)=\dfrac{1}{2n!}\left(1+2n!\cdot P_{n-1}\right)\Rightarrow\ P_n-P_{n-1}=\dfrac{1}{2n!}$. Dând valori lui n obținem:

$$P_2-P_1+P_3-P_2+\ldots+P_n-P_{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)\Leftrightarrow$$

$$P_n-P_1=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\Rightarrow L=\lim_{n\to\infty}P_n=P_1+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

$P_1=\dfrac{3}{2}\Rightarrow L=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}(2+x_k)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}(e-2)=\dfrac{e+1}{2}$, unde $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k!}=e$ este constanta lui Napier.

L:940. Pentru $a\rangle 0,\ b\rangle 1$, să se calculeze $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(a+b^k)\tan^{-1}\left(\dfrac{n^2}{n^2-kn+k^2}\right)}{b^k+2a+b^{n-k}}$.

Mihály Bencze-Săcele, Brașov, **Florică Anastase,** Lehliu-Gară, Călărași

Rezolvare: $\tan^{-1}\left(\dfrac{k}{n}\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{n-k}{n}\right)=\tan^{-1}\left(\dfrac{n^2}{n^2-kn+k^2}\right)$.

Notăm $a_k=\dfrac{(a+b^k)\tan^{-1}\left(\dfrac{n^2}{n^2-kn+k^2}\right)}{b^k+2a+b^{n-k}}=\dfrac{(a+b^k)\tan^{-1}\left(\dfrac{k}{n}\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{n-k}{n}\right)}{b^k+2a+b^{n-k}}$

Atunci, $a_k+a_{n-k}=\tan^{-1}\left(\dfrac{k}{n}\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{n-k}{n}\right)$. Sumând, se obține:

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n-1}a_k+a_n=\sum_{k=1}^{n-1}\tan^{-1}(\frac{k}{n})+\frac{(a+b^n)\tan^{-1}(1)}{b^n+2a+1}=\sum_{k=1}^{n-1}\tan^{-1}(\frac{k}{n})+\frac{\pi}{4}\cdot\frac{a+b^n}{b^n+2a+1}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(a+b^k)\tan^{-1}\left(\dfrac{n^2}{n^2-kn+k^2}\right)}{b^k+2a+b^{n-k}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\tan^{-1}\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{a+b^n}{1+2a+b^n}=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tan^{-1}\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{\pi}{4n}+\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{a+b^n}{1+2a+b^n}=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tan^{-1}\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{\pi}{4n}\left(\frac{a+b^n}{1+2a+b^n}-1\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tan^{-1}\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{a+1}{1+2a+b^n}$$

Deci, avem: $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\tan^{-1}(\frac{k}{n})-\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{a+1}{b^n+2a+1}\right)=\int_0^1\tan^{-1}(x)dx=\frac{\pi}{4}-\log\sqrt{2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tan^{-1}\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{a+1}{1+2a+b^n}\right)=\int_0^1\tan^{-1}x\,dx=\frac{\pi}{4}-\log\sqrt{2}.$$

L:941. Considerând șirul $(a_n)_{n\geq1}$, $a_n=\frac{n!e^n}{n^{n+1}}$. **Se cere:** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^{\frac{1}{n}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{1}{a_n}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}n^{a_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n^2)^{\frac{n}{2}}$.

Emil C. Popa, Sibiu.

Rezolvare:

$$a_n=\frac{n!e^n}{n^{n+1}}=\frac{n!}{n^n\cdot e^{-n}\cdot\sqrt{2n\pi}}\cdot\frac{\sqrt{2n\pi}}{n}\underset{n\to\infty}{\to}0 \text{ deoarece } \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n\cdot e^{-n}\cdot\sqrt{2n\pi}}=1 \text{ (Stirling).}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e}{(1+\frac{1}{n})_{n+1}}=1$ așa că $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1.$

$\ln\left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{1}{a_n}}=\frac{n^{n+1}}{n!e^n}\cdot\frac{\ln n}{n}=\frac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n}\cdot\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\underset{n\to\infty}{\to}0$ deoarece $\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\underset{n\to\infty}{\to}0$ și

$\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}=\frac{n!}{n^ne^{-n}\sqrt{2n\pi}}\cdot\frac{\sqrt{2n\pi}}{\sqrt{n}}\underset{n\to\infty}{\to}\sqrt{2\pi}$,

Deci, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{1}{a_n}}=e^0=1.$ Cum $\ln n^{a_n}=\frac{n!e^n}{n^{n+1}}\cdot\ln n=\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}\cdot\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\to\sqrt{2\pi}\cdot0=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}n^{a_n}=e^0=1.$

$(1+a_n^2)^{\frac{n}{2}}=\left[(1+a_n^2)^{\frac{1}{a_n^2}}\right]^{\frac{na_n^2}{2}}$ și din $\sqrt{n}\cdot a_n=\sqrt{n}\cdot\frac{n!e^n}{n^{n+1}}=\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}\to\sqrt{2\pi}$ rezultă $na_n^2\underset{n\to\infty}{\to}2\pi$, prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n^2)^{\frac{n}{2}}=e^{\pi}$.

▪ Clasa a XII-a

L:942. Să se calculeze integrala $I=\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{dx}{x^{2022}+x^{2020}+x^2+1}$. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: $I=\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{dx}{x^{2022}+x^{2020}+x^2+1}=\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{dx}{(x^2+1)(x^{2020}+1)}\overset{x=\frac{1}{t}}{=}\int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}-1}\frac{-dt}{t^2}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{t^2}+1)(\frac{1}{t^{2020}}+1)}=$

$=\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{dt}{(1+t^2)}\cdot\frac{t^{2020}}{t^{2020}+1}=\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{x^{2020}}{(x^2+1)(x^{2020}+1)}dx$. Prin adunare se obține:

$$2I=\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{1}{(x^2+1)(x^{2020}+1)}dx+\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{x^{2020}}{(x^2+1)(x^{2020}+1)}dx=\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{x^{2020}+1}{(x^2+1)(x^{2020}+1)}dx=\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{1}{(x^2+1)}dx=$$

$$=arctg\left(\sqrt{2}+1\right)-arctg\left(\sqrt{2}-1\right)=arctg\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)}{1+\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}=arctg1=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\quad I=\frac{\pi}{8}.$$

L:943. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $6x^4+\sqrt{21}x^3-40x^2-2\sqrt{21}x+15=0$ știind că $\frac{x_1+x_2}{x_3+x_4}=-\frac{3}{2}$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Notăm $\begin{cases}x_1+x_2=u\\x_3+x_4=v\end{cases}$. Din relația lui Viete $x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{\sqrt{21}}{6}$ obținem $u+v=-\frac{\sqrt{21}}{6}$ iar din enunțul problemei avem $\frac{u}{v}=-\frac{3}{2}$. Rezolvând sistemul în u și v se obține: $u=-\frac{\sqrt{21}}{2}$ și $v=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

Din relațiile lui Viete $\begin{cases}x_1\cdot x_2+x_3\cdot x_4+(x_1+x_2)(x_3+x_4)=-\frac{40}{6}\\(x_1\cdot x_2)\cdot(x_3\cdot x_4)=\frac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=-\frac{19}{6}\\a\cdot b=\frac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{3}{2},\ b=-\frac{5}{3},$

unde $a=x_1x_2,\ b=x_3x_4$.

Revenind la notațiile făcute se obțin soluțiile reale $x_{1,2}=\frac{-\sqrt{21}\pm3\sqrt{5}}{4}$ și $x_{3,4}=\frac{\sqrt{21}\pm9}{6}$.

L:944. Demonstrați inegalitatea: $\int_{\frac{1}{2022}}^{3}\frac{\sqrt{\sin x}}{x}dx<2+\ln3$ **.** **Béla Kovács,** Satu Mare

***Rezolvare*:** Integrala dată o descompunem într-o sumă de două integrale:

$$\int_{\frac{1}{2022}}^{3}\frac{\sqrt{\sin x}}{x}dx=\int_{\frac{1}{2022}}^{1}\frac{\sqrt{\sin x}}{x}dx+\int_{1}^{3}\frac{\sqrt{\sin x}}{x}dx=I_1+I_2$$

La prima integală aplicăm inegalitatea: $\sin x\le x$

$$I_1=\int_{\frac{1}{2022}}^{1}\frac{\sqrt{\sin x}}{x}dx<\int_{\frac{1}{2022}}^{1}\frac{\sqrt{x}}{x}dx=\int_{\frac{1}{2022}}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\Big|_{\frac{1}{2022}}^{1}=2-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1011}}<2$$

La a doua integrală folosim inegalitatea: $\sin x\le1$

$$I_2=\int_{1}^{3}\frac{\sqrt{\sin x}}{x}dx<\int_{1}^{3}\frac{1}{x}dx=\ln3$$ Prin adunare obținem: $I_1+I_2<2+\ln3$.

Observație: Cu calculator se poate obține valoarea aproximativă: $\int_{\frac{1}{2022}}^{3}\frac{\sqrt{\sin x}}{x}dx\cong2.905594691$ și $2+\ln3\cong3.098612288$, o buna aproximare.

L:945. Considerăm funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f continuă, F derivabilă, $F(1)\langle\frac{3}{4}$. Dacă $F(cosx)+(\cos x)\cdot f(\cos x)\ge\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ atunci F(x) nu este o primitivă a funcției f(x).

Emil C. Popa, Sibiu

Rezolvare:

Considerăm funcția $g:\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $g(x)=(\cos x)\cdot F(cos\ x)+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x$, Presupunem că $F^{I}(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$ și avem: $g^{I}(x)=(-\sin x)F(\cos x)-(\sin x\cos x)f(\cos x)+\sin^2 x=$ $-(\sin x)\left[F(\cos x)+(cosx)f(\cos x)-\sin x\right]\le 0$, prin urmare g(x) este descrescătoare pe domeniul dat. Dar $g(0)=F(1)\langle\frac{3}{4}\langle\frac{\pi}{4}=g\left(\frac{\pi}{2}\right)$, contradicție. În concluzie $F(x)\notin\int f(x)dx$.

Observație:

Un exemplu simplu este următorul: $f(x)=\frac{2}{7}, F(x)=1-\frac{2}{7}x,\ f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Avem $F(1)=\frac{5}{7}\langle\frac{3}{4}$, $F(\cos x)+(\cos x)f(\cos x)=1-\frac{2}{7}\cos x+\frac{2}{7}\cos x=1\ge\sin x$. În final, $F^{I}(x)=-\frac{2}{7}\ne f(x)$.

L:946. Fie $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ integrabilă astfel încât $\frac{n}{(2m-1)(2m+1)}\le f\left(\frac{m}{n}\right)\le\frac{n}{m!+(m+1)!}$. Calculați $\int_0^1 f(x)dx$. **Sebastian Ilinca**, Pârșcoveni, Olt

Rezolvare: Cum f este integrabilă rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$.

Dând valori lui m de la 1 la n în relația din inegalitatea din enunț obținem

$a_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+.....+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ și $b_n=\frac{1}{1!+2!}+\frac{1}{2!+3!}+.....+\frac{1}{n!+(n+1)!}$ iar $a_n\underset{n\to\infty}{\to}\frac{1}{2}$,

$b_n\underset{n\to\infty}{\to}\frac{1}{2}$, așadar, $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}$.

L:947. Să se calculeze: $\int\frac{x^2\left(\ln^6 x-2\ln^5 x\right)}{x^6-\ln^{12}x}dx,\ x\in(e,\infty)$. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

Rezolvare: Integrala dată se scrie

$$I=\int\frac{x^2\ln^5 x(\ln x-2)}{\ln^{12}x\left(\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)^6-1\right)}dx=\int\frac{x^2(\ln x-2)}{\ln^7 x\left(\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)^6-1\right)}dx=\int\frac{\frac{x^2}{\ln^4 x}\cdot\frac{\ln x-2}{\ln^3 x}}{\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)^6-1}dx$$. Cu substituția

$$\frac{x}{\ln^2 x}=t\Rightarrow dt=\frac{\ln x-2}{\ln^3 x}dx\Rightarrow\ I=\int\frac{t^2}{t^6-1}dt=\frac{1}{3}\int\frac{3t^2}{(t^3)^2-1}dt=\frac{1}{6}\ln\frac{t^3-1}{t^3+1}=\frac{1}{6}\ln\frac{x^3-\ln^6 x}{x^3+\ln^6 x}+C$$

L:948. Pentru $n\in\mathbb{N},n\ge 2$ se consideră șirul de integrale $(I_n)_{n\ge 2}, I_n=\int_1^n\frac{1}{\{x\}+1}dx.$

a) Arătați că $I_3=\ln 4$. **b) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n^2]{I_n}$.**

Codruț-Sorin Zmicală, Sighetu Marmației

Rezolvare:

a) $I_3=\int_1^3\frac{1}{\{x\}+1}dx=\int_1^2\frac{1}{\{x\}+1}dx+\int_2^3\frac{1}{\{x\}+1}dx=\int_1^2\frac{1}{x-[x]+1}dx+\int_2^3\frac{1}{x-[x]+1}dx=\int_1^2\frac{1}{x}dx+\int_2^3\frac{1}{x-1}dx=$

$=\ln x\Big|_1^2+\ln(x-1)\Big|_2^3=(\ln 2-\ln 1)+(\ln 2-\ln 1)=2\ln 2=\ln 4.$

b) Cum $\{x\}=x-[x],\forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că $\{x\}+1=x-[x]+1,\forall x\in\mathbb{R}$, deci

$$I_n=\int_1^n \frac{1}{\{x\}+1}dx=\int_1^n \frac{1}{x-[x]+1}dx=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x-k+1}dx=\sum_{k=1}^{n-1}\ln(x-k+1)\Big|_k^{k+1}=\sum_{k=1}^{n-1}(\ln 2-\ln 1)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\ln 2=\underbrace{\ln 2+\ln 2+...+\ln 2}_{(n-1)\text{ ori}}=(n-1)\ln 2.$$ Cum $I_n=(n-1)\ln 2, \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2,$ rezultă că

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n^2]{I_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n^2]{(n-1)\ln 2}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n^2]{(n-1)}\cdot\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n^2]{\ln 2}=l_1\cdot l_2,$$

unde $l_1=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n^2]{n-1}$. Logaritmând relația precedentă obținem

$$\ln l_1=\lim_{n\to+\infty}\ln\sqrt[n^2]{n-1}\Leftrightarrow \ln l_1=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n-1)}{n^2}\Leftrightarrow \ln l_1=0\Rightarrow l_1=1$$

și, cum $l_2=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n^2]{\ln 2}=\lim_{n\to+\infty}(\ln 2)^{\frac{1}{n^2}}=(\ln 2)^0=1,$ rezultă că $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n^2]{I_n}=1.$

L:949. Se definește integrala având limita superioară infinită prin egalitatea:

$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ **. Să se calculeze integrala** $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+4x+1}dx$ **.** **Vasile Mircea Popa**, Sibiu

Rezolvare: Notăm: $I=\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+4x+1}dx$; $J=\int_0^\infty \frac{\operatorname{arcctg} x}{x^2+4x+1}dx$. Atunci,

$$I+J=\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x}{x^2+4x+1}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{1}{x^2+4x+1}dx.$$

Scriem relația pentru familia de primitive ale funcției $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+1}$, $x\in[0,\infty)$:

$$\int \frac{1}{x^2+4x+1}dx=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}}+C=F(x)+C$$ unde C este o constantă arbitrară.

Pentru calculul familiei de primitive utilizăm descompunerea în fracții simple și tabelul primitivelor imediate. Relația se poate evident verifica prin derivare. Cititorul este invitat să efectueze aceste calcule simple.

Folosind expresia primitivei $F(x)=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}}$ și formula Leibniz-Newton adaptată situației din problema noastră (limita superioară a integralei tinde la infinit), avem:

$$I+J=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{1}{x^2+4x+1}dx=\frac{\pi}{2}\left(\lim_{x\to\infty}F(x)-F(0)\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3}) \quad (1)$$ deoarece

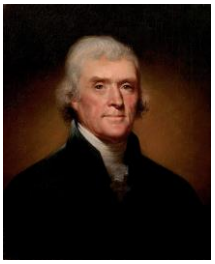
$$\lim_{x\to\infty}F(x)=0;\quad F(0)=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$$

În integrala J facem schimbarea de variabilă $x=\frac{1}{t}$ și obținem:

$$J=-\int_\infty^0 \frac{\operatorname{arcctg}\frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2}+4\frac{1}{t}+1}\frac{1}{t^2}dt=\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} t}{1+4t+t^2}dt=I. \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă $I=\frac{\pi}{4\sqrt{3}}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$.

„ Cred în noroc. Cu cât muncesc mai mult,
cu atât am mai mult noroc”
Thomas Jefferson
(1743-1826)



4. Probleme propuse

▪ Clasa a V-a

G:1118. a) Aflați fracția $\frac{a}{b}$ care este de 4 ori mai mare decât fracția $\frac{b}{a}$. b) Care este fracția $\frac{c}{d}$, având ca valoare $\frac{1}{9}$ din $\frac{d}{c}$? c) Precizați tipurile de fracții obținute. **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

G:1119. Ce devine un dreptunghi cu mărimile L = lungime, l = lățime, dacă verifică relația $0,(4)\cdot L+0,(3)\cdot l=0,(3)\cdot L+0,(4)\cdot l$? **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

G:1120. Demonstrați că dacă numerele naturale a, b, c verifică egalitatea $4a+23b=19c$, atunci numărul $(a+b)(b+c)(c+a)$ se divide cu 874. **Nicolae Ivășchescu,** Canada

G:1121. Determinați numerele $\overline{abcd}$, cu cifre distincte și b,c consecutive, pentru care $\overline{aa}^2+b^2+c^2+d^2=2022$ **Nicolae Ivășchescu,** Canada

G:1122. Există $n,k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât 29^n+1 să se dividă cu 29^k-1. **Călina Doina Cristina**, Craiova

G:1123. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația $2(xy+ky-1)=x+k$ unde k este un număr natural dat. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

G:1124. Calculați $\left(\overline{xyzt}+\overline{mnuv}\right):5$ dacă $\overline{xn}+\overline{my}=81$ și $\overline{zv}+\overline{ut}=125$. **Elena Irina Nedelcu**, Craiova

G:1125. Restul împărțirii unui număr la 8 este egal cu 7, iar al împărțirii la 9 este egal cu 3. Aflați restul împărțirii numărului la 72. **Elena Irina Nedelcu**, Craiova

G:1126. Să se arate că numărul $\overline{abc}$ este divizibil cu 2, 9 și 11 știind că $\overline{abc}=\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}$.
Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

G:1127. Se consideră suma $S=3+7+11+15+.....+4039+4043$. Arătați că numărul $\frac{S}{7077}$, este pătrat perfect. **Ionel Tudor,** Călugăreni, Giurgiu

▪ Clasa a VI-a

G:1128. Fie N un număr format din cifrele 2, 3, 7 și 9. Fiecare cifră apare de 43 de ori. Poate fi N pătrat perfect? **Cătălina Stan**, Craiova

G:1129. Rezolvați ecuația $x-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+.....+\frac{1}{2021\cdot 2022}\right)=\frac{1}{2022}$.
Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:1130. Există numerele întregi x și y astfel încât $9x^2 - y^2 + 6y = 2023$?

elevi **Carina Viespescu, Rareș Tudorașcu**, Craiova

G:1131. Demonstrați că numărul $A = [2(3)+3,(4)+4,(2)]\cdot[2,3(4)+3,4(2)+4,2(3)]$ este pătrat perfect.

Nicolae Ivășchescu, Canada

G:1132. Să se determine numărul soluțiilor întregi ale ecuației $pxy - x + pky = p + k$ unde $k \in \mathbb{Z}$ și p este un număr natural prim.

Gheorghe Ghiță, Buzău

G:1133. Să se arate că numărul $\underbrace{111....1}_{2022\ de\ 1}$ este divizor al numărului $n = \underbrace{111....1}_{2022\ de\ 1}\underbrace{22....2}_{2022}$.

G:1134. Arătați că numărul n se scrie ca produs a două numere consecutive.

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

G:1135. În triunghiul ΔABC isoscel cu AB=AC , M este mijlocul lui $[AC]$, N este mijlocul lui $[AB]$, D este simetricul lui B față de M, iar E este simetricul lui C față de N. Arătați că E, A, D sunt coliniare.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:1136. În triunghiul ABC se consideră punctul I, centrul cercului înscris în triunghi. Știind că măsurile unghiurilor AIB, BIC, respectiv AIC sunt exprimate prin numere naturale consecutive, să se determine măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

▪ Clasa a VII-a

G:1137. Să se arate că există un număr natural n , astfel încât numărul $2^{2018} + 2^{2021} + 2^n$ să fie pătrat perfect.

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

G:1138. Arătați că există $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(a^8 - a^4 + 1)\cdot(b^8 - b^4 + 1) = x^2 + y^2,\ a,b \in \mathbb{Z}$.

Corina Ionescu, Gigi Zaharia, Craiova

G:1139. Fie $a,b,c \in \mathbb{R}$. Arătați că: a) Dacă $a^2 + ab + bc + ca \langle 0$ atunci $a^2 \langle b^2 + c^2$;
b) Dacă $b^2 + c^2 + ab + bc + ca \langle 0$ atunci $a^2 \rangle b^2 + c^2$;

Ilinca Sebastian, Pârșcoveni, Olt; **Chiriță Aurel**, Slatina

G:1140. Arătați că există numerele naturale a, b, c, nenule și distincte pentru care $a^2 + b^2 = c^2 + 2023$.

Nicolae Ivășchescu, Canada

G:1141. Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor $a = \sqrt{21+12\sqrt{3}} - \sqrt{31-12\sqrt{3}}$ și $b = \sqrt{31+12\sqrt{3}} - \sqrt{21-12\sqrt{3}}$.

Codruț-Sorin Zmicală, Sighetu Marmației

G:1142. Determinați numerele prime m și n pentru care $\sqrt{n^{n+2}} + \sqrt{m^{m+3}} = 629$.

Cristian Catană, Băilești, Dolj

G:1143. Aflați primele 36 de zecimale ale numărului $\left(3\sqrt{3} - \sqrt{26}\right)^{40}$.**Sebastian Ilinca**, Pârscoveni, Olt

G:1144. Să se rezolve în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ecuația $x^2 + (p+1)x + qy + p = xy + qx + y$, unde p și q sunt numere prime diferite.

Gheorghe Ghiță, Buzău

G:1145. Determinați numerele raționale a și b astfel încât $|a|\sqrt{3}-\sqrt{5(b+2)^2}=\left|2\sqrt{5}-4\sqrt{3}\right|$.

Simona Chiriță, Craiova

G:1146. Se consideră 2 axe de numere, perpendiculare în O. Pe fiecare se deplasează uniform, în sens pozitiv, câte un corp, unul cu viteza 4 cm /s, al doilea cu 3 cm / s. Notăm cu A, C, pozițiile corpului cu viteză mare după 3, respectiv, 5 secunde. La fel, cu B, D, pozițiile corpului cu viteză mică, după aceleași intervale de timp. a) Aflați coordonatele mijloacelor pentru segmentele AB. CD. b) Dreptele AB, CD sunt paralele ?

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:1147. Rezolvați triunghiul dreptunghic ABC cu <A = 90^0, BC = 100, laturile au valori numere naturale, iar unghiurile ascuțite sunt direct proporționale cu catetele opuse.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:1148. În interiorul triunghiului echilateral ABC se consideră punctul P, apoi simetricele M, N și Q ale lui P față de laturile AB, BC, respeciv AC. Știind că PM+PN+PQ= $8\sqrt{3}$ cm, să se afle aria triunghiului ABC.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

▪ Clasa a VIII-a

G:1149. Arătați că oricare ar fi numărul natural n, numărul n^6+3n^3+3 nu este cub perfect.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:1150. Gospodarul unește prestigiul profesional cu farmecul naturii. Anual respectă tăierea coronară a pomilor. Aflați numărul pomilor din grădina sa , știind că este maximul expresiei $-4x^2-4x+19$.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:1151. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ cu $a+b+c=k$. Aflați cea mai mare valoare a expresiei $ab+bc+2ac$.

Iulia Sanda, Calina Doina Cristina, Craiova

G:1152. Dacă $a_1,a_2,.....,a_n$ sunt numere pozitive astfel încât $a_1^2+a_2^2+.....+a_n^2=n$ arătați că $\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+.....+\frac{1}{a_n+1}\geq\frac{n}{2}$.

eleva **Carina- Maria Viespescu**, Craiova

G:1153. Dacă a, b, c, d sunt direct proporționale cu patru numere naturale consecutive mai mari sau egale cu 13, să se calculeze $\left[\frac{a^3+b^3+c^3}{d^3}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a număului real x.

Gheorghe Ghiță, Buzău

G:1154. Dacă $a,b,c\rangle 0$ și $n,k\in\mathbb{N}^*$ atunci $\frac{ab}{na+kb}+\frac{bc}{nb+kc}+\frac{ca}{nc+ka}\leq\frac{1}{n+k}\cdot(a+b+c)$

Marin Chirciu, Pitești

G:1155. Fie $a,b,c\in\mathbb{N}^*$.

a) Arătați că ecuația: $x^a+y^b=2z^{ab}$ are o infinitate de soluții numere naturale nenule.

b) Arătați că ecuația: $x^a+y^b+z^c=3t^{abc}$ are o infinitate de soluții numere naturale nenule. Generalizare.

Lucian Tuțescu, Craiova

G:1156. Suma tuturor muchiilor a două cuburi este 192 cm și suma ariilor totale este de 816 cm^2. Calculați volumul fiecărui cub.

Nicolae Ivășchescu, Canada

G:1157. Se consideră tetraedrul regulat VABC, V = vârf. O furnică pleacă din A și ajunge în V, mergând pe 2 fețe care nu includ muchia AV, pe drumul cel mai scurt. Aflați măsura unghiului diedru al celor 2 fețe. **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

G:1158. Piramida patrulateră SABCD are toate muchiile congruente între ele. Dacă M și N sunt mijloacele muchiilor AB, respectiv SB și aria patrulaterului SAMN este egală cu $12\sqrt{3}\,\text{cm}^2$, să se afle suma tuturor muchiilor piramidei.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

▪ Clasa a IX-a

L:950. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ și numerele strict pozitive $x_1,x_2,.....,x_n$ care verifică inegalitatea $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\geq x_1+x_2+...+x_n$. Arătați că $\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\right)\cdot\left(\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}+...+\frac{1}{x_n^3}\right)\geq n^2$. În ce caz avem egalitate? **Radu Nicolae, Tigae Alina, Craiova**

L:951. Să se rezolve în R , ecuația $9x^2-192\sqrt[8]{9x^2}+1024=0$.

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

L:952. Fie $p\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că ecuațiile $x^2+y^{4p+2}=z^4$ și $x^4+y^{4p+2}=z^2$ au fiecare o infinitate de soluții numere naturale nenule. **Emil C. Popa,** Sibiu

L:953. Fie $a,b,c,x,y,z>0$. Să se demonstreze inegalitatea $\frac{9abc}{\sum a^2}\leq\sum\frac{a^3x+abc}{\sqrt{(a^2x+b^2)(a^2x+c^2)}}\leq\sum a$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:954. Dacă $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ și $0\leq\lambda\leq 2$, atunci $\frac{a^2}{a^3+a+\lambda}+\frac{b^2}{b^3+b+\lambda}+\frac{c^2}{c^3+c+\lambda}\leq\frac{3}{\lambda+2}$.

Marin Chirciu, Pitești

L:955. Dacă $x,y,z>0$, $x+y+z=3$, atunci $\sum\frac{1}{25x^2-20x+91}\leq\frac{1}{32}$. **Marin Chirciu,** Pitești

L:956. Determinați $(\sin\alpha-\cos\alpha)\cdot(\sin\beta-\cos\beta)$ în funcție de $a=\sin(\alpha+\beta)$ și $b=\cos(\alpha-\beta)$.

Mihaela Stancele, Craiova

L:957. Să se arate că în triunghiul ascuțitunghic ABC are loc relația: $3R(s^2-r^2-4Rr)\geq(R+r)(r^2+4Rr+s^2)$. **Florică Anastase**, Lehliu – Gară

L:958. Arătați că în orice triunghi ascuțitunghic ABC, există inegalitatea: $\left(1+\frac{a^2}{h_a^2}\cdot ctg^2A\right)\cdot\left(1+\frac{b^2}{h_b^2}\cdot ctg^2B\right)\cdot\left(1+\frac{c^2}{h_c^2}\cdot ctg^2C\right)\geq 3$. **D.M. Bătinețu- Giurgiu**, București

L:959. Fie ABC un triunghi oarecare de laturi a,b,c. Notăm cu m_a,s_a lungimile medianei , respectiv simedianei corespunzătoare laturii a, etc . Fie mulțimea $A=\{\sqrt{\frac{m_am_b}{s_as_b}},\sqrt{\frac{m_bm_c}{s_bs_c}},\sqrt{\frac{m_cm_a}{s_cs_a}}\}$.

Vasile Jiglău, Arad

L:960. Arătați că în orice triunghi ΔABC ascuțitunghic cu notațiile corespunzătoare, avem: $\frac{9r}{\pi R}\cdot\sqrt[3]{\frac{r}{4R}}\langle\frac{AB}{A+B}+\frac{BC}{B+C}+\frac{CA}{C+A}\leq\frac{\pi^n+3(n-1)}{2n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, unde A, B, C sunt măsurile unghiurilor $\sphericalangle A,\sphericalangle B,\sphericalangle C$. **Radu Diaconu**, Sibiu

▪ Clasa a X-a

L:961. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}^*_+$ astfel încât $\frac{x^2+y^2+z^2}{x+2y+4z} \le 2$. Arătați că $\frac{x}{2}+y+2z \le 21$.

elevă **Carina- Maria Viespescu**, Craiova

L:962. Fie $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{a+(a+1)i}$. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $z \in \mathbb{R}$. **Constantin Dinu**, Buzău

L:963. Fie ecuația $z^2+z+1=0$ cu rădăcinile z_1, z_2 Să se arate că

$$\frac{(1-z_1^2)(1-z_2^2)+(1+z_1^2)(1+z_2^2)}{z_1 z_2} \in \mathbb{R}.$$

Gheorghe Dărstaru, Buzău

L:964. Știind că $0,301 \langle \lg 2 \langle 0,3011$ și $0,4771 \langle \lg 3 \langle 0,4772$, să se compare numerele 2^{799} și 3^{500}.

Ionel Tudor, Călugăreni , Giurgiu

L:965. Să se rezolve ecuația $2ax^2 - 2x\sqrt{1-x^2} - a = 0$, unde $a \ne 0$. **Ovidiu Ghiță,** Buzău

L:966. Determinați $a \in \mathbb{R}$, pentru care ecuația $4^x - 6\cdot 2^x + a - 2022 = 0$, are soluția $x = \log_2(3+\sqrt{2022})$. **Ionel Tudor,** Călugăreni , Giurgiu

L:967. Pentru $x, y, z \rangle 0$ să se arate că: $\sum_{cyc} \frac{x(y^3+z^3)}{(1+x)y^3z^3} \le \frac{3}{4}\left(\frac{15}{x^2+y^2+z^2}-1\right)$.

Florică Anastase, Lehliu- Gară

L:968. Să se arate că în triunghiul ΔABC ascuțitunghic are loc inegalitatea: $\frac{\sum\sqrt{\sin 2A}}{\sum \sin^2 A} \le R\cdot\sqrt{\frac{2}{S}}$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:969. Să se arate că în triunghiul ΔABC, cu AD, BE, CF, bisectoare are loc relația $\sum \frac{EF^2}{BC^2} \le \frac{3R}{8r}$.

Marin Chirciu, Pitești

L:970. Arătați că în triunghiul ABC de arie F are loc inegalitatea $\frac{a^3b}{h_b^2}+\frac{b^3c}{h_c^2}+\frac{c^3a}{h_a^2} \ge \frac{16\sqrt{3}}{3}\cdot F$.

D.M. Bătinețu- Giurgiu, București, **Ionel Tudor**, Călugăreni

L:971. Dacă ABC este un triunghi ascuțitunghic și x, y, z numere reale pozitive cu $\sum_{cyc}\left(\frac{y+z}{x}\right)^2 = 1$, atunci: $9Rr\cdot\left(\frac{4r}{R}+\frac{r^2}{R^2}\right) \langle \frac{y+z}{x}\cdot A^2r_a^2 + \frac{z+x}{y}\cdot B^2r_b^2 + \frac{x+y}{z}\cdot C^2r_c^2 \langle \frac{\pi^2}{4}\cdot(4R+r)^2$.

Radu Diaconu, Sibiu

▪ Clasa a XI-a

L:972. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $9x^3-12x^2+x+2=\sin 3\pi x$. **Sebastian Ilinca**, Pârșcoveni, Olt

L:973. Rezolvați ecuația: $x^2\cdot\lg^2 x - 4x\cdot\lg x - 60 = 0$. **Ionel Tudor** , Călugăreni , Giurgiu

L:974. Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații $\begin{cases} 2022^x + x = 2023^y \\ 2022^y + y = 2023^x \end{cases}$.

Camelia Dană, Ileana Stanciu, Craiova

L:975. Să se calculeze limita $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}} \dfrac{\sqrt[1882]{x+\sqrt[140]{x+\sqrt[2022]{x}}}}{\sqrt[2022]{x+\sqrt[1882]{x+\sqrt[140]{x}}}}$. **Dorina Goiceanu**, Craiova

L:976 Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție pară și derivabilă și o altă funcție $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată prin relația $g(x)=\left(x^2\cdot e^x+1\right)\cdot f(x)+x$. Să se calculeze $g^I(0)$. **Adrian Stan,** Buzău

L:977. Fie $a,b,c,m,k\rangle 0,\ m\le k^2$ astfel încât $a+b+c=3$. Să se arate că:
$\dfrac{kb+mc}{a^2+ka+m}+\dfrac{kc+ma}{b^2+kb+m}+\dfrac{ka+mb}{c^2+kc+m}\ge\dfrac{3(k+m)}{k+m+1}$. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

L:978. Fie $(a_n)_{n\ge1}$ o progresie aritmetică cu $S_n=3n^2+2n+1$, suma primilor n termeni ai progresiei. Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}S_k}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_k}=\dfrac{1}{3}$. **Codruț-Sorin Zmicală**, Sighetu Marmației

L:979. Considerăm șirurile $(a_n)_{n\ge1}$, $(b_n)_{n\ge1}$ definite prin $a_n=\ln\dfrac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$, $b_n=\dfrac{n!e^n}{n^{n+1}}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{b_1+b_2+...+b_n}$. **Emil C. Popa**, Sibiu

L:980. Dacă $(\gamma_n)_{n\ge1}$, $\gamma_n=-\ln n+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$, iar $(a_n)_{n\ge1}$ este un șir convergent de numere reale cu $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\in\mathbb{R}$ și $\lim\limits_{n\to\infty}n(a_n-a)=b\in\mathbb{R}$, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\gamma_n-a\gamma)^2\sqrt[n]{n!}$. ($\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=0,577...$ este constanta lui Euler- Mascheroni). **D.M. Bătinețu – Giurgiu,** București, **Ionel Tudor,** Călugăreni

▪ Clasa a XII-a

L:981. Fie $(G,\cdot)$ un grup și $a\in G$ astfel încât pentru orice $x\in G$ avem $ax^4=xa$. Să se arate că $x^9=e$ oricare ar fi $x\in G$. **Emil C. Popa**, Sibiu

L:982. Se consideră ecuația $x^4+x^3-2023x^2-2022x+2022=0$. Rezolvați ecuația și arătați că are toate rădăcinile reale. **Ionel Tudor,** Călugăreni , Giurgiu

L:983. Fie funcția $f_m:(0;\infty)\to R$, $f_m(x)=\dfrac{2x+3}{x(x+1)(x+2)(x+3)+m^2};x\in(0;\infty);m\in R$
Determinați mulțimea primitivelor funcției f_m (discuție după m). **Nica Minodora Silvioara**, Buzău

L:984. Fie $a,b,c,d>0$ astfel încât $ad\ne bc$ să se calculeze: $\int\frac{x\sin x+\cos x}{(ax+b\cos x)(cx+d\cos x)}dx,\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
Gheorghe Ghiță, Buzău

L:985. Calculați integrala: $\int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\dfrac{\operatorname{arcctg}x}{\sqrt{4-x^2}}dx$ **Vasile Mircea Popa**, Sibiu

L:986. Demonstrați că $\int\limits_1^2\dfrac{2x^4+10x^2+17}{\left[\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)\right]^2}dx\le\dfrac{5}{32}$. **Codruț-Sorin Zmicală**, Sighetu Marmației

L:987. Pentru $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ şi $x \rangle 0$ să se calculeze: $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{2} \frac{dx}{x\left(1 + x\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x \cdot \ldots \cdot x\sqrt[n]{x}}}}\right)}$.

Florică Anastase, Lehliu- Gară

L:988. Calculați: a) Suma $S_n = 1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + \ldots + 2\cos nx$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x \in \mathbb{R} - \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

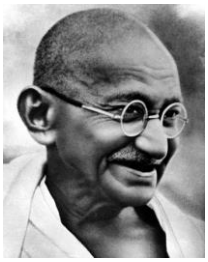
b) Integrala $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx$.

Ionel Tudor, Călugăreni , Giurgiu

ELEVI REZOLVITORI

Colegiul Economic „ Maria Teiuleanu" Piteşti, Argeş.:
Clasa a XII-a: Chiriac Maria Elisa, Ştefan Denis. **Prof. Daniel Văcaru.**
Şcoala Gimnazială „ Armand Călinescu" nr. 5, Curtea de Argeş:
Clasa a VIII-a: Gobej Adrian, **Prof. Constantin Nicolau**;
Liceul Tehnologic „Meserii şi Servicii", Buzău:
Clasa a IX-a: Găvăneanu Mariana, Voineag Adi Cornel, Sava Gabriela, Ghiran Ştefan, Anton Eduardo; **Clasa a XII-a:** Berechet Ştefan, Crăciun Elena, Penteliuc Ioana, Mihai Alexandra, Savu Irina**;**
Prof. Adrian Stan.
Scoala Gimnazială Nicolae Labis , Mălini, Suceava:
Clasa a VIII-a: Gogan Maria Veronica, **Prof. Gabriela Gogan.**
Colegiul Naţional „Fraţii Buzeşti", Craiova
Clasa a X-a: Alecsie Mihnea, Dobre Robert, Ungureanu Alexandru, Ieremia Nicolae, Truică Cristian.
Clasa a XI-a: Caşcotă Dalina, Rada Andra; Clasa a XII-a:Bicu Eduard, Florea Alina, Milcu Amelia, Cealîcu Mihai. Prof. **Tutescu Lucian**. Clasa a VII-a: Iana Bianca, Tudoraşcu Rareş, Schwarz Isabella. Prof. **Sanda Iulia**
Clasa a VIII-a: Bădoiu Cristian. Prof. **Dascălu Simona**. Clasa a VIII-a: Ionescu Mihai, Viespescu Carina, Ionaşcu Andrei, Muşuloi Matei. Prof. **Dîrnu Daniela;** Clasa a XII-a: Velicovici Darie. Prof. **Goiceanu Dorina**
Liceul Energetic Craiova
Clasa a VI-a: Cîrjan Clara, Dobre Bianca, Prică Rareş. Prof. **Grigorie Dan Lucian**
Şcoala Gimnazială „ Sf. Dumitru", Craiova
Clasa a VIII-a: Corbeanu tania, Mihăicescu Teodora. Prof. **Seinu Cristina**
Colegiul Naţional „N. Titulescu „ Craiova
Clasa a XII-a: Bobocel Maria, Popa Mihaela. Prof. **Turcu Eugenia**
Liceul Teoretic Bechet
Clasa a VIII-a. Stoica Matiaş, Brebu Alexandra. Prof. **Gilena Dobrica; Clasa a XI-a**: Percea Valentina, Prof. **Iacob Meda Elena**
ŞCOALA PREUNIVERSITARĂ DE MĂSURĂ SMEENI, BUZĂU
Clasa.a VI-a: Argatu Ioana, Popa Andrada; **Clasa a VII-a**: Mîrzu Diana, Prună Mihaela, Stănescu Daria, Neacşu Gabriela; **Clasa a VIII-a:** Mîrzu Alexandru; **Clasa a X-a:** Gheorghe Adrian; **Clasa a XI-a**: Constantin Ioana. **Prof. Ion STĂNESCU.**

„Happiness is when what you think,
what you say and what you do are in harmony .”
Mahatma Gandhi
(1869 - 1948)



5. QUICKIES

A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader's name, full address, and an e-mail address. Submited solutions should arrive before March 01,2023.

PROPOSALS – QUICKIES

Q82. Proposed by Dorin Mărghidanu , Corabia, Romania.

If a,b,c are strictly positive real numbers, prove that: $A_3\left[\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right]\ge\frac{A_3[a,b,c]}{G_3[a,b,c]}$, where

$A_3[x,y,z]=\frac{x+y+z}{3}$, $G_3[x,y,z]=\sqrt[3]{xyz}$, $x,y,z>0$.

Q83. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

If ABC is a triangle with area F, then prove that $7(m_a^2+m_b^2+m_c^2)\ge 36F+3\sum_{cyc}(a-m_a)^2$.

Q84. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

If $a>0$, then compute $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a}-1)\sqrt[n]{(2n-1)!!}$.

Q85. Proposed by Florin Rotaru, Focşani, Romania.

Determine all continue functions $f:[0,1]\to R$ such that:

$$xf(1-x)(x-f(x)+\int_0^1 xf(1-x)(x-f(x))dx\ge\int_0^1(x^2f^2(1-x)+(x-f(x)^2)dx.$$

Q86. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania.

How many real solutions has the equation $3x^3+\log_2\left(\frac{3x^3+1}{3x}\right)+\log_3\left(\frac{3x^3+1}{3x}\right)+1=3x$?

Q87. Proposed by Marian Cucoaneş, Mărăşeşti, Vrancea, Romania.

Prove that in any triangle ABC with usual notations holds:

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca+p(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c})^2}\le m_a+m_b+m_c\le$$
$$\le\sqrt{p}(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c})+\frac{1}{2}(|a-b|+|b-c|+|c-a|).$$

SOLUTIONS - QUICKIES

Q77. Proposed by Florin Rotaru, Focşani, Romania.

If ABC is an acute triangle, then prove that $3\sqrt{\frac{R}{2r}}\ge\sec\left(\frac{A-B}{2}\right)+\sec\left(\frac{B-C}{2}\right)+\sec\left(\frac{C-A}{2}\right)$.

Solution 1 by author. We use the following inequality

$\cos^2\frac{A-B}{2}\ge\frac{2r}{R}\Leftrightarrow\frac{R}{2r}\ge\frac{1}{\cos^2\frac{A-B}{2}}=\sec^2\frac{A-B}{2}$ and other two similar inequalities. Hence,

$$\frac{9R}{2r}\ge 3\left(\sec^2\frac{A-B}{2}+\sec^2\frac{B-C}{2}+\sec^2\frac{C-A}{2}\right)\overset{C-B-S}{\ge}\left(\sec\frac{A-B}{2}+\sec\frac{B-C}{2}+\sec\frac{C-A}{2}\right)^2,\text{ Q.E.D.}$$

Solution 2 by Rovsen Pirkuliyev, Sumgait, Azerbaijan. Using the inequality

$\cos\frac{B-C}{2}\ge\sqrt{\frac{2r}{R}}\Leftrightarrow\frac{1}{\cos\frac{B-C}{2}}\le\sqrt{\frac{R}{2r}}\Leftrightarrow\sec\frac{B-C}{2}\le\sqrt{\frac{R}{2r}}$, and writing other two similar inequalities, than adding up we obtain the desired inequality. **Also solved by Daniel Văcaru, Piteşti, Romania.**

Q78. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania.

If $a,b>0$, then prove that $\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{a^2+ab+b^2}\ge\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}(a+b+|a-b|)$.

Solution by author. By Bergström inequality we have

$$a^2-ab+b^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}(a-b)}{2}\right)^2\ge\frac{1}{8}(a+b+\sqrt{3}|a-b|)^2,\text{ and}$$

$$a^2+ab+b^2=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}(a+b)}{2}\right)^2\ge\frac{1}{8}(|a-b|+\sqrt{3}(a+b))^2.\text{ Therefore,}$$

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{a^2+ab+b^2}\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}(a+b+\sqrt{3}|a-b|+|a-b|+\sqrt{3}(a+b))=$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}(a+b+|a-b|),\text{ Q.E.D.}$$ **Also solved by Daniel Văcaru, Piteşti, Romania.**

Q79. Proposed by Marin Chirciu, Pitești, Romania.

Prove that in any ΔABC holds the following inequality $AI^4+BI^4+CI^4\ge 48r^4$.

Solution 1 by author. $\sum AI^4\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum AI^2\right)^2}{3}\overset{(1)}{\ge}\frac{\left(12r^2\right)^2}{3}=48r^4$, where (1) is $\sum AI^2\ge 12r^2$, which is true since $\sum AI^2=\sum\left(\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}\right)^2=r^2\sum\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}=r^2\cdot\frac{p^2+r^2-8Rr}{r^2}=p^2+r^2-8Rr\overset{Gerretsen}{\ge}$

$\overset{Gerretsen}{\ge}16Rr-5r^2+r^2-8Rr=8Rr-4r^2\overset{Euler}{\ge}12r^2$. Equality holds iff triangle ABC is equilateral.

Solution 2 by Rovsen Pirkuliyev, Sumgait, Azerbaijan. Using $AI+BI+CI\ge 6r$, and Bergström's inequality we obtain:

$$AI^4+BI^4+CI^4=\frac{(AI^2)^2}{1}+\frac{(BI^2)^2}{1}+\frac{(CI^2)^2}{1}\ge\frac{(AI^2+BI^2+CI^2)^2}{1+1+1}\ge\frac{\left(3\left(\frac{AI}{3}\right)^2\right)^2}{3}\ge$$

$\geq 3\left(4r^2\right)^2 = 48r^4$.

Also solved by Daniel Văcaru, Piteşti, Romania.

Q80. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

If M is a point in the interior of triangle ABC such that $MA = x, MB = y, MC = z$, then prove the following inequality $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \geq 1 + \frac{1}{2}\sum_{cyc}\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2$.

Solution by author and Rovsen Pirkuliyev, Sumgait, Azerbaijan.

$$\sum_{cyc}\frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{2}\sum_{cyc}\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} \overset{Hayashi}{\geq} \frac{1}{2}\sum_{cyc}\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 + 1.$$

Q81. Proposed by Costel Florea, Bucharest, Romania.

Find $n \in N^*$ such that

$$\int_0^{\ln n} \frac{(x+1)(2xe^x+1)e^x}{x^4e^{4x} + 2x^3e^{3x} + 3x^2e^{2x} + 2xe^x + 1}dx = 1 - \frac{1}{n\ln(108e)\ln n - 6\ln 2\cdot\ln 3 + 1}.$$

Solution by author. $x^4e^{4x} + 2x^3e^{3x} + 3x^2e^{2x} + 2xe^x + 1 = (x^2e^{2x} + xe^x + 1)^2$;

$(x^2e^{2x} + xe^x + 1)' = 2xe^{2x} + 2x^2e^{2x} + e^x + xe^x = (x+1)(2xe^x+1)e^x$.

So, $\int_0^{\ln n} \frac{(x+1)(2xe^x+1)e^x}{x^4e^{4x} + 2x^3e^{3x} + 3x^2e^{2x} + 2xe^x + 1}dx = 1 - \frac{1}{n\ln(108e)\ln n - 6\ln 2\cdot\ln 3 + 1}$ becomes successively

$$\int_0^{\ln n} \frac{(x^2e^{2x} + xe^x + 1)'}{(x^2e^{2x} + xe^x + 1)^2}dx = 1 - \frac{1}{n(1+\ln 108)\ln n - 6\ln 2\cdot\ln 3 + 1} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{x^2e^{2x} + xe^x + 1}\Big|_0^{\ln n} = 1 - \frac{1}{n(1+\ln 108)\ln n - 6\ln 2\cdot\ln 3 + 1} \Leftrightarrow$$

$1 + \frac{1}{(n\ln n)^2 + n\ln n + 1} = 1 + \frac{1}{n(1+\ln 108)\ln n - 6\ln 2\ln 3 + 1}$, where if we denoted $n\ln n = a$,

we obtain $a^2 + a + 1 = (1+\ln 108)a - 6\ln 2\ln 3 + 1 \Leftrightarrow a^2 - a\ln 108 + 6\ln 2\ln 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 - (\ln 4 + \ln 27)a + 2\ln 2\ln 3 = 0 \Leftrightarrow a^2 - (2\ln 2 + 3\ln 3)a + 2\ln 2\cdot 3\ln 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 2\ln 2$ or $a = 3\ln 3 \Leftrightarrow n \in \{2,3\}$.

„ Ca să devii un bun profesor ai nevoie
de o pătrime pregătire și de trei pătrimi de actorie.”
Gail Kathleen Godwin
(1937 -)

6. Caleidoscop matematic

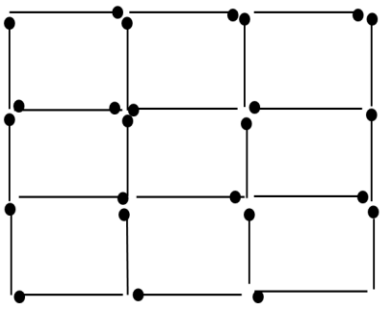
SEGMENTUL ȘI PUNCTUL
(pseudo fabulă)

Cândva, după ce-au fost prima dată rostite,
(De altfel, două noțiuni înrudite),
Un punct și-un segment
Se-ntrebau, evident
Pe un ton arogant:
Care este mai important?
-Sărmane punct fără vină,
Ești o bulină!
Ești cât o-nțepătură de ac!
Vru segmentul să-i vină de hac.
N-ai dimensiuni, eu măcar am lungime;
Obiecte ca tine am o mulțime.
Ești o urmă de creion sau de cretă!
Cât de izolat ești într-o mulțime discretă!
Rămâi tot firav și ca punct de acumulare!
(Se comprimă segmentul mai tare,
Consumându-și punctele interioare
Și devenind subit segment nul).
La care punctul, de-așa aroganță sătul,
Replică mărunt:
-Hai să punem discuției... punct!

Dumitru Preoteasa, Giurgiu

PĂTRATE

Pătratul mare de mai jos este realizat din 24 de bețișoare de chibrit. Înlăturați 8 bețișoare, astfel încât să rămână 2 pătrate care să nu se atingă reciproc.



Aniversări și comemorări în anul 2022

de prof. **Ionel Tudor**

În anul **2022** am avut aniversarea și comemorarea mai multor matematicieni renumiți.

S-au împlinit **500** de ani de la nașterea matematicianului italian **Lodovico Ferrari** (02.02.1522- 05.10.1565) A fost discipol al lui Girolamo Cardano, cu care ulterior a colaborat în studiul ecuațiilor algebrice de gradul trei, patru, cinci. La 28 de ani este profesor la Milano, apoi la Bologna iar în 1565, cu puțin timp înainte de a muri, își ia doctoratul în matematică.

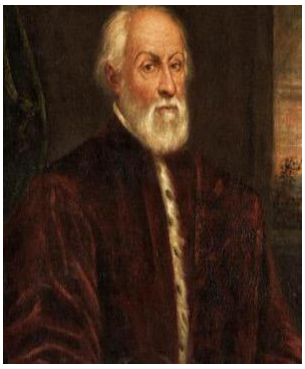
Cea mai mare realizare a sa a fost în domeniul algebrei prin descoperirea metodei de rezolvare a ecuației de gradul patru, metodă publicată de Cardano în 1545 în lucrarea „Ars Magna”. De asemenea a demonstrat și extins formula de rezolvare a ecuației cubice descoperită de Niccolo Tartaglia și Scipione del Ferro.

În anul 2022 s-au împlinit 400 de ani de la nașterea lui **Vincenzio Viviani** (05.04.1622 – 22.09.1703), matematician și om de știință italian, elev al lui Torricelli și discipol al lui Galileo Galilei. A editat prima ediție a lucrărilor colectate ale lui Galileo. În geometrie este cunoscută teorema lui Viviani conform căreia suma distanțelor de la orice punct interior la laturile unui triunghi echilateral este egală cu înălțimea triunghiului.

A contribuit la dezvoltarea studiului conicelor cu noi proprietăți și a descoperit curba care-i poartă numele (fereastra lui Viviani), care se obține din intersecția unei suprafețe sferice cu un cilindru tangent interior la sferă, când diametrul cilindrului este egal cu raza sferei.

În 1692 a calculat ariile determinate în cilindru și sferă, de curba de intersecție, arătând că aria determinată în cilindru și aria exterioară curbei sunt egale. A tradus în italiană Elementele lui Euclid.

S-au împlinit anul acesta, 200 de ani de la nașterea lui **Charles Hermite** (24.12.1822- 14.01.1901), matematician francez cu cercetări în teoria numerelor, polinoamelor ortogonale, polinoamelor Hermite, funcțiilor eliptice. Este cunoscută identitatea lui Hermite în legătură cu funcția parte întreagă: $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+....+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx],\ n\in\mathbb{N}^*,\ x\in\mathbb{R}.$ A rezolvat cu funcții eliptice (și nu cu radicali) ecuația algebrică redusă de gradul cinci, $x^5+px+q=0$. A fost primul care a demonstrat transcendența numărului **e**, metodele lui fiind ulterior folosite de Lindemann pentru a demonstra transcendența lui π.



Rafael Bombelli (1526- 1572) din Bologna a fost matematician și inginer italian cunoscut pentru lucrarea **L`Algebra** (primul volum a apărut în 1572 cu puțin timp înainte de moartea sa, celelalte două manuscrise fiind descoperite într-o librărie din Bologna în 1923 și publicate mai târziu). Lucrarea sa este o istorie a dezvoltării algebrei începând de la Diofant și în care îi elogiază pe Fibonacci și Luca Pacioli, dar îl și critică pe Niccolo Tartaglia. Ea este scrisă într-un limbaj ușor de înțeles în mod intenționat pentru a fi accesibilă tuturor și prezintă regulile de dezvoltare în fracții continue cunoscute de indieni și grecii antici.

A formulat regulile de calcul cu proprietățile numerelor complexe și a denumit unitatea imaginară **i.** A tradus un manuscris al lui Diofant și a studiat regulile operațiilor cu numere complexe care vor fi aprofundate mai târziu de Cauchy, Lagrange, Ruffini, Gauss, Abel, Wallis, Moivre, Cotes.

S-au împlinit 300 de ani de la moartea lui **Paolo Ruffini** (22.09.1765- 10.05.1822), matematician, filozof și medic italian. A fost profesor de matematică la Universitatea din Modena și în prealabil a practicat medicina fiind autorul unor lucrări științifice despre tifos.

Opera sa matematică cuprinde incomplet demonstrată, teorema Abel-Ruffini (1799) conform căreia ecuațiile algebrice generale de grad mai mare decât patru nu pot fi rezolvate cu formulele prin radicali. A dat o metodă rapidă pentru descompunerea polinoamelor de grad superior în factori polinoame de grad mai mic. De asemenea a fost un precursor al teoriei grupurilor, ulterior dezvoltat de Evariste Galois.

Jean Robert Argand (18.07. 1768 – 13.08. 1822) de la moartea căruia au trecut 200 de ani, a fost un matematician amator francez. În 1806 a publicat ideea reprezetării și interpretării geometrice a numerelor complexe, astăzi cunoscută ca diagrama lui Argand. Cronologic, matematicianul și topologul norvegian **Caspar Wessel** a publicat în 1799 primele rezultate concrete de această factură. Deoarece, lucrarea lui Wessel a trecut neobservată în timpul respectiv atât Argand cât și Gauss sunt creditați alături de Wessel ca și „co- inventatori" ai reprezentării numerelor complexe în plan.

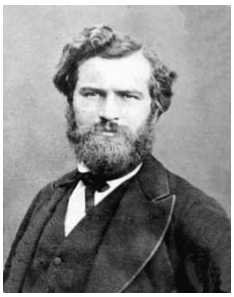
Charles Tinseau (19.04.1748 – 21.03.1822) a fost matematicianul francez care a scris despre teoria suprafețelor în 1772 publicând două lucrări despre geometria infinitezimală.

Student al lui Monge la Scoala Militară din Mézières, a fost încurajat de acesta să se apuce de studiul matematicii fapt ce l-a determinat pe inginerul militar să scrie numeroase lucrări matematice într-o perioadă tumultuoasă a Franței. Susținător înfocat al monarhiei franceze, Tinseau a fost nevoit să plece în exil și a scris multe articole împotriva lui Napolean chiar dacă acesta îi oferise o amnistie și îl invitase înapoi în Franța.

Friedrich Wilhelm Herschel (15.11.1738 – 25.08.1822) decedat în urmă cu 200 de ani a fost un astronom, inventator și muzician britanic de origine germană care a descoperit cu un telescop uriaș planeta Uranus în 13 martie 1781 și doi sateliți ai acesteia în 1783.

De asemenea, a descoperit mișcarea sistemului solar față de celelalte stele din galaxia noastră. Este considerat primul om de știință care a realizat cele mai mari telescoape din timpul său. A ajuns astronomul regelui și a fost ales președintele Societății Regale. În 1880 a descoperit radiațiile infraroșii.

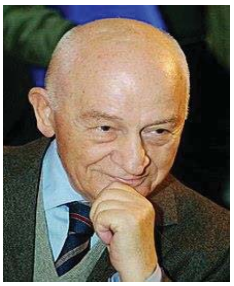
Pierre Rene Jean Baptiste Henri Brocard (12.05.1845 – 16.01.1922) decedat acum 100 de ani, a fost matematician francez cu rezultate remarcabile în geometria triunghiului. Împreună cu Emile Lemoine și Joseph Neuberg este considerat fondatorul teoriei moderne a triunghiului. Teorema lui Brocard și cercul lui Brocard îi poartă numele. A arătat că orice număr irațional se poate exprima ca fracție continuă infinită. Lucrarea lui cea mai modernă "Courbes remarcables" a fost editată împreună cu Emile Lemoine. A fost onorat cu ordinul Legiunii de Onoare.



Marie Ennemond Camille Jordan (05.01.1838 – 22.01.1922), matematician francez cunoscut pentru contribuții în teoria grupurilor (teorema Jordan- Holder), în analiza complexă (lema lui Jordan), în algebra liniară (forma normală Jordan și matricea Jordan). A activat ca profesor la College de France, Ecole Polytechnique și Școala Națională de Mine din Paris. A fost membru al mai multor organizații și academii.

În 2022 comemorăm și 125 de ani de la decesul matematicianului și astronomului român **Constantin Gogu** (30.05.1854 – 30.01.1897). După obținerea licenței în matematică la Facultatea de Științe din București, pleacă la Paris unde își susține în 1882 doctoratul la Sorbona, fiind al treilea român cu doctorat la Sorbona (după Spiru Haret în 1878 și David Emanuel în 1879). În teza de doctorat în mișcarea Lunii datorită acțiunilor perturbatoare ale planetei Marte. Bazat pe calcule laborioase, determină cu precizie coeficientul de perturbare a mișcărilor Lunii, concluzii care ulterior au fost omologate de comunitatea științifică în țară, a fost profesor de geometrie analitică la Universitatea București și la Școala de Poduri și Șosele, la Școala de Ofițeri de Artilerie și Geniu, la Școala de Arhitectură și la Seminarul Nifon. A fost membru corespondent al Academiei Române (1889) și s-a numărat printre membrii fondatori ai Societății Române de Științe al cărei prim președinte a fost în 1897.

„Am învățat că poți continua
încă mult timp după ce ai spus că nu mai poți ”.
Octavian Paler
(1926 - 2007)



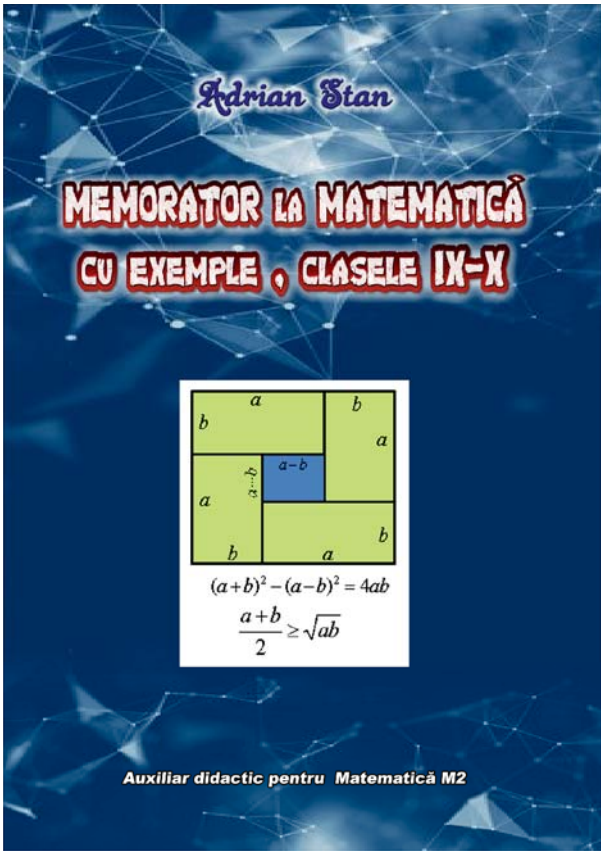
7. Poșta redacției

Dragi cititori, elevi și profesori, a apărut **numărul 30** al revistei de matematică **„SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noștri, și care, sperăm noi, va aduna tot mai mulți elevi și profesori împreună, pentru a face din obiectul matematicii o activitate atractivă și performantă.

Profesorii și elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciții și probleme cu enunț și rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătății calitatea acestei reviste, o pot face trimițând materialele membrilor colectivului de redacție sau pe adresa de e-mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate (**salvate în Word 2003-2007**) , fie scrise de mână și scanate. **Materialele primite trebuie să fie originale și să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise și către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparține redacției.

Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările și comenzile pentru **numărul 31** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **01 MARTIE 2023**. Vă urăm succes și vă așteptăm.

APARIȚII EDITORIALE



VIZITATI SI REVISTA ONLINE DE MATEMATICA MATEINFO.RO

REVISTA SCLIPIREA MINȚII

NR. 30 ANUL XV - NOIEMBRIE 2022

Cuprins

1. Istoria matematicii

500 de ani de la nașterea lui Lodovico Ferrari
de Ionel Tudor, Adrian Stan 1

2. Articole și note matematice

Asupra unor inegalități din G.M
de D. M. Bătinetu Giurgiu, D.Sitaru, N. Stanciu 12

Cea mai bună constantă pentru o inegalitate din RMM și SM
de Marius Drăgan și Neculai Stanciu 14

Sharp inequalities in triangle de Mihàly Bencze 16

Two new proofs for AM-GM inequality
de Dorin Mărghidan 17

Cinci soluții pentru problema E:15246 din G M 4/2022
de Titu Zvonaru 19

Dezvoltarea unor inegalități în triunghi din Mathematical Reflections 4 / 2022 de Marin Chirciu 20

Generalizarea problemei 25545 din GM 5/2006
de Lucian Tuțescu 24

Asupra unei probleme de la Evaluarea Națională 2022
de Ion Pătrașcu, Ion Cotoi 24

Din nou despre Cebâșev și Nesbitt
de Titu Zvonaru, Bogdan-Marius Ioniță 26

3. Probleme rezolvate 30

4. Probleme propuse 51

5. Quickies 58

6. Caleidoscop matematic 61

7. Poșta redacției 65

LEI 15 RON

editgraph
editură | tipar offset | tipar digital
www.editgraph.ro

ISSN 2247 – 6601
ISSN – L 2247 - 6601