SCLIPIREA MINTII

REVISTĂ NAȚIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICĂ; PUBLICAȚIE SEMESTRIALĂ, AN X, NR XX, 2017

SM

PROBLEME PROPUSE PROBLEME REZOLVATE

SM



20

ISTORIA MATEMATICII

TESTE

CALEIDOSCOP MATEMATIC

Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

LICEUL TEHNOLOGIC " COSTIN NENIŢESCU ", BUZĂU

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601

Sclipirea Mintii 20

Revistă naţională de cultură matematică, publicaţie semestrială, An X, Nr. XX, DECEMBRIE 2017, BUZĂU

Colectivul de Redacţie

- **Membrii onorifici:**

Constantin Rusu - Preşedinte de onoare a Filialei Râmnicu Sărat a Societăţii de Ştiinţe Matematice

Costică Ambrinoc - Preşedinte Filiala Râmnicu Sărat a Societăţii de Ştiinţe Matematice

Lenuţa Pîrlog - Preşedinte Filiala Buzău a Societăţii de Ştiinţe Matematice

Iorgu Mînzală - Inspector matematică

D. M . Bătineţu – Giurgiu **Titu Zvonaru**

Nicolae Ivăşchescu **Mihály Bencze**

Lucian Tuţescu **Ionel Tudor** **Gheorghe Ghiţă**

- **Director:**

Neculai Stanciu

- **Redactor şef:**

Adrian Stan

- **Redactori principali:**

Andrei Octavian Dobre **Iuliana Traşcă**

Marin Chirciu **Gabriel Tica**

Ion Stănescu **Constantin Dinu**

CUPRINS

ISTORIA MATEMATICII..... 1

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE..... 3

EXAMENE ŞI CONCURSURI 12

PROBLEME REZOLVATE 17

PROBLEME PROPUSE 39

QUICKIES 46

CALEIDOSCOP MATEMATIC 49

POŞTA REDACŢIEI..... 51

GÂNDEŞTE CORECT

- **Membri:**

Daniela **Badea**, Gabriela **Buzea**, Elena **Ciobîcă,** Constantin **Ciobîcă,** Ana **Cismaru,** Aurel **Chiriţă,** Marin **Chirciu,** Nela **Ciceu,** Marian **Ciuperceanu,** Tatiana **Cristea,** Marian **Cucoaneş**, Luiza **Cremeneanu**, Ileana **Didu,** Camelia **Dana,** Gheorghe **Dîrstaru,** Denisa **Draghia,** Viorica **Dogaru**, Marius **Drăgan,** Otilia **Drăgan**, Ani **Drăghici**, Gabriela **Drânceanu,** Răzvan **Drânceanu**, Luiza **Dumitrescu,** Gheorghe **Ghiţă**, Lucian Dan **Grigore**, Cernea **Illan**, Cristina Dida **Isaia**, Ionuţ **Ivănescu,** Vasile **Jiglău,** Adalbert **Kovacs,** Simion **Marin**, Mariana **Mitea,** Cristian **Moanţă,** Gabriela **Neguţescu**, Gabriel **Nemţaru**, Ana **Panaitescu,** Nicolae **Papacu**, Petre **Păunescu**, Stelian **Piscan,** Victoria **Popa,** Adriana **Puescu,** Doina **Popescu,** Constantin **Prunaru**, Ramona **Puchiu**, Petre **Rău**, Iulia **Sandu**, Dumitru **Săvulescu,** Daniel **Sitaru,** Roxana **Stanciu**, Liviu **Smarandache,** Florin **Stănescu**, Andreea **Stoica,** Doina **Stoica,** Mircea Mario **Stoica,** Laura **Tănase,** Mihai **Tereujan,** Carmen **Terheci,** Gabriel **Tica,** Ionel **Tudor,** Hanganu **Aurel** Toma, Nicolae **Tomescu,** Diana **Trailescu,** Ovidiu **Ţâţan,** Roxana **Vasile,** Dumitru **Vieriu,** Ionuţ-Florin **Voinea,** Marian **Voinea,** Daniel **Văcaru,** Sorina **Văcărean,** Florentin **Vişescu,** Elena **Zainea**

REDACŢIA
Liceul Tehnologic „ Costin Nenitescu”,
Buzău, Strada Transilvaniei, Nr. 134,
Cod. 120012, Tel. 0238725206
E_mail: ady_stan2005@yahoo.com
Coordonator proiect: Adrian Stan

Tipar: editgraph Buzău, www.editgraph.ro



„ Dacă îți place ceea ce faci, nu vei munci nicio singură zi din viața ta”.
Confucius
(551- 479)



1. Istoria matematicii

Marile descoperiri ale lui Galilei şi Inchiziția

Prof. Adrian Stan, Buzău



Pe **22 iunie 1633**, filozoful, matematicianul şi astronomul italian **Galileo Galilei** (15.02.1564 – 08.01.1642) este adus în fața Inchiziției de la Roma din cauza lucrării sale „ **Dialogo** - Dialog despre cele două sisteme ale lumii ” (1632), în care argumenta, cu dovezi bazate pe observațiile sale astronomice cu ajutorul telescoapelor construite de el, sistemul heliocentric al lui **Copernic** – Soarele în centrul Universului, ceea ce venea în contradicție cu sistemul geocentric al Bisericii. Acuzat de erezie, este condamnat pe viață la domiciliu forțat, unde moare nouă ani mai tîrziu.

Considerat unul dintre cei mai mari savanți ai lumii nu doar pentru revoluționarea astronomiei datorată inventării telescopului dar şi pentru explicarea mişcării planetelor, **Galilei** s-a născut la Pisa la 1564 într-o familie de nobili toscani, a învățat mai întâi într-o mănăstire după care a studiat medicina la Universitatea din Pisa, urmând îndeaproape şi studiul matematicii care l-a ajutat în studiului căderii corpurilor.

Deşi a predat matematica la Florența şi Pisa a hotărât să se mute în 1591 la Padova pentru a ocupa catedra de matematică la cea mai renumită universitate europeană a vremii, Universitatea din Padova.

Corespondența lui **Galilei** cu Kepler începând cu anul l597 şi susținerea teoriei lui Copernic, l-au pus într-un conflict deschis cu aristotelicienii vremii între care şi un prieten de-al său, filozoful Cesare Cremonini care refuzase chiar să privească prin telescopul inventat de el.

Anul 1609 era anul de cotitură din viața lui **Galilei**. Utilizând o combinație de lentile convexe şi concave, el a obținut o lunetă performantă care mărea puterea de observație cu până la opt ori făcând posibilă observarea unei corăbii cu 2 ore mai devreme decât cu ochiul liber.

Pe 23 august şi-a donat luneta dogelui Veneției iar în scurt timp a construit un alt instrument numit telescop care mărea de 20 de ori şi pe care l-a folosit în astronomie cu ajutorul căruia a făcut o serie de descoperiri celebre:

- A observat pe Lună pete de lumină şi le-a interpretat ca fiind munți, calculând chiar şi înălțimi de 6-8 km pentru aceştia iar iluminarea Lunii s-ar datora reflexiei luminii Soarelui pe Pământ;

A observat stelele din Constelația Orion dar şi pe cele de lângă Pleiade care nu erau vizibile cu ochiul liber;

A observat că stelele păreau mai strălucitoare privite prin telescop şi a conchis că ele sunt mai departe de Pământ decât celelalte planete;

- A observat şi determinat cei patru sateliți ai lui Jupiter, care se roteau în jurul planetei , numiți lunile galileene în cinstea lui, iar cu timpul, din 1610 şi până în 1611 a măsurat perioadele de revoluție ale sateliților cu o precizie uimitoare, publicând în 1612 aceste rezultate ([3]. pag 189).

Sateliții lui Jupiter	Peerioada de revoluție calculată de Galilei	Perioada de revoluție calculată în prezent
Io	1z18h30m	1z18h29m
Europa	3z13h20m	3z13h18m
Ganymede	7z4h0m	7z4h0m
Calisto	16z18h0m	16z18h5m

- A descoperit în septembrie 1610 fazele planetei Venus indicând direcția din care se vede Soarele pe Venus, partea luminată fiind cea îndreptată către Soare, dând astfel o lovitură celor care considerau că discul planetei Venus nu e niciodată luminat mai mult decât pe jumătate.;

- A descoperit petele de pe suprafața Soarelui iar prin studiul acestora a descoperit rotația Soarelui în jurul axei sale.

Plecarea la Florența în 1610 şi susținerea ideilor sale copernicane a atras dușmănia şi a filozofilor aristotelici şi a călugărilor iezuiți. În 1615 deşi Papa Paul al II-lea a interzis teoria copericană ca fiind eretică

deoarece contrazicea poziția din Sfânta Sciptură**, Galilei** s- a dus la Roma pentru a protesta.

Drept urmare, în februarie 1616 chemat în fața Inchiziției, i s-a cerut prin ordin să nu mai susțină sau să predea teoria copernicană aceasta fiind interzisă împreună cu cărțile lui Copernic.

În 1632, **Galilei** a vrut să explice influența Lunii asupra Pământului prin prezentarea teoriei mareelor dar era nevoie de recunoaşterea mişcării Pământului. Realizând-o sub forma unui dialog între trei personaje, cartea **Dialogo** prezenta ideile sale într-o dispută dintre Salviati, Simplicio şi Sagredo, primii doi reprezentând oponenții în lupta celor două sisteme, iar cel de-al treilea pe post de arbitru între cei doi.

Salviati, un alter ego al lui Galilei, după ce îi desființează ideile lui Simplicio, trece la prezentarea ideilor sale în ceea ce priveşte mareele pe baza teoriei copernicane fapt ce i-a determinat pe dușmanii săi să-i prezinte cartea papei Urban al VIII-lea, de fel un simpatizant al lui Galilei, dar care a acceptat ca Galilei să fie trimis în judecată în 1633. Papei i s- a părut că vorbele lui Simplicio ar semăna cu ale sale, considerând astfel că savantul l-ar fi portretizat într-un mod defavorabil. În italiană, numele de Simplicius semnifica acela de om naiv sau prost.

Galilei a fost avertizat încă din 1616 să abandoneze susținerea ideilor sale, însă, o dată cu publicarea cărții sale în 1632, Inchiziția l-a judecat forțându-l să-şi renege toate descoperirile. Se spune, că atunci când a ieşit din sala de judecată, a strigat răspicat **" E pur si muove ! ", (Şi totuşi se mişcă)**, cu referire la faptul că Pământul se mişcă în jurul Soarelui şi nu invers.

O dată cu aceasta, i s-au interzis toate cărțile şi a fost condamnat la închisoare pe viață dar I s-a permis sî rîmână sub arrest la domiciliu la vila lui din Arcetri de lângă Florența unde a şi murit în 1642.

La început de secol al XVII-lea , **Galileo** este responsabil de dezvolarea ştiinței moderne, atât pentru fizică cât şi pentru astronomie, el fiind creditat ca un "părinte", ca un „întemeietor" al acestora.

Telescoapele performante construite de el sau lunetele au reprezentat o afacere bună căci prezentau mult interes pentru navigatori sau alți comercianți dar au reprezentat cel mai bun mod ca prin observațiile făcute cu ele să fie confirmată teoria lui Copernic sau să fie primul care să observe suprafața "accidentată" a Lunii.

Din păcate, **Galilei** nu a fost de acord cu ideile lui Kepler cum că mareele se datorează mişcării Lunii în jurul Pământului şi nici faptul că orbitele planetelor sunt elipse.



Preocupat de aplicațiile practice, a îmbunătățit tehnica de construcție a busolelor.

În fizică, este considerat fondatorul mecanicii întrucât a contribuit la determinarea legilor căderii corpurilor la suprafața Pământului (1602), a dat principiul inerției, independent de da Vinci şi Kepler, a introdus definiția accelerației şi a enunțat legea acțiunii forței şi pe cea a conservării energiei.

Mai trebuie amintit că lui i se datorează denumirea de cicloidă introdusă de el în 1640 precum şi stabilirea legilor mişcării uniform variate. Un monument de ştiință al vremii, **Galileo Galilei** nu a pregetat să transmită din cunoştințele şi descoperirile sale tuturor oamenilor de ştiință ai vremii căci s-a descoperit un volum imens de corespondențe pe care acesta le-a purtat cu peste 500 de persoane.

Mult timp după moartea sa, la 8 ianuarie 1642, Biserica a păstrat interdicția de a i se publica lucrările. De abia în 1718 şi 1741 parțial şi în 1758 aproape total au fost permise tipărirea lucrărilor sale.



În 1992, **Galileo** a fost reabilitat de papa Ioan Paul al II-lea iar în martie 2008, Vaticanul a propus ridicarea unei statui în interiorul Vaticanului, ca măsură de recunoaştere a contribuțiile aduse astronomiei.

Galilei în 1633 în procesul intentat de Inchiziție

Bibliografie:

1. N. Mihăileanu. Istoria matematicii. Vol I, II. Editura Didactică şi Pedagogică. Bucureşti. 1981.

2. Vasile Bobancu. Caleidoscop Matematic. Editura Niculescu. Bucureşti. 2001.

3. Steven Weinberg. Lumea explicată. Editura Humanitas. Bucureşti. 2017

4. www.wikipedia.com

Prof. Liceul Tehnologic "Costin Nenițescu", Buzău

„Învățarea nu epuizează niciodată mintea ”.
Leonardo da Vinci
(1452- 1519)



2. Articole și note matematice

Ecuații iraționale cu o infinitate de soluții în mulțimea numerelor naturale

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Pentru început ne propunem să determinăm toate perechile (m ; n), $m \geq 1$, de numere naturale care verifică ecuația:

$$\frac{\sqrt{m+1}+\sqrt{m-1}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{\sqrt{m+1}-\sqrt{m-1}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=n. \quad \textbf{(1).}$$

Notăm cu E(m) membrul stâng. Observăm că E(1) = 2, deci (1; 2) este soluție a ecuației (1).

$E(2)=\frac{2}{3}\sqrt{6}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Verificăm dacă mai există $m\in\mathbb{N},\ m\geq 3$ astfel încât $E(m)\in\mathbb{N}$.

Notăm cu $S=\sqrt{m+1}+\sqrt{m-1},\ D=\sqrt{m+1}-\sqrt{m-1}$ şi cum $\sqrt{2\pm\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\pm 1}{\sqrt{2}}$

rezultă $E(m)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{-\sqrt{3}}\cdot S+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}\cdot D=\frac{(\sqrt{3}+1)\cdot S+(\sqrt{3}+1)\cdot D}{\sqrt{6}}=\frac{(D+S)\sqrt{3}+D-S}{\sqrt{6}}$,

$E(m)=\sqrt{2(m+1)}-\sqrt{\frac{2(m-1)}{3}},\ \forall m\in\mathbb{N}^*.$ (*).

Se ştie că o condiție suficientă (dar nu şi necesară) pentru a avea $\sqrt{a}-\sqrt{b}\in\mathbb{N}$ este ca $\sqrt{a}\in\mathbb{N},\ \sqrt{b}\in\mathbb{N}$ cu $a\geq b.$ În egalitatea (*) căutăm $m\in\mathbb{N}^*$ pentru care $m+1=2k^2\in\mathbb{N}^*$ şi $m-1=6l^2\in\mathbb{N}$, unde $k\in\mathbb{N}^*,\ l\in\mathbb{N},\ k\rangle\ l\sqrt{3}\rangle\ l$. Atunci, E(m)=2(k-l) este număr natural, par, nenul.

Din $m+1=2k^2,\ m-1=6l^2$ se obține ecuația Pell- Fermat $k^2-3l^2=1,\ k\rangle l.$

Ecuația Pell- Fermat $x^2-dy^2=1$, numită după numele celor doi matematicieni care s-au preocupat de rezolvarea ecuațiilor în Z, ultimul fiind şi cel care a afirmat că ecuația dată are o infinitate de soluții întregi, cu d- număr natural care nu e pătrat perfect , dar demonstrate acest fapt abia în 1766 de către matematicianul francez Lagrange.

Lagrange a demonstrat că, dacă ecuația $x^2-dy^2=1$ are o soluție minimală (x_0,y_0) în $\mathbb{N}$, atunci toate soluțiile sunt date de forma: $x_n=\frac{(x_0+y_0\sqrt{d})^n+(x_0-y_0\sqrt{d})^n}{2}$,

$y_n=\frac{(x_0+y_0\sqrt{d})^n-(x_0-y_0\sqrt{d})^n}{2\sqrt{d}},\ n\in\mathbb{N}.$

În cazul nostru, cum d = 3 nu e pătrat perfect iar soluția minimală este $(k_0,l_0)=(2;1)$, atunci toate soluțiile naturale sunt $k_p=\frac{(2+\sqrt{3})^p+(2-\sqrt{3})^p}{2},\ l_p=\frac{(2+\sqrt{3})^p-(2-\sqrt{3})^p}{2\sqrt{3}},\ p\in\mathbb{N}.$ Pentru ecuația (1) găsim $m_p=2k_p{}^2-1=6l_p{}^2+1$, deci $m_p=\frac{(7+4\sqrt{3})^p+(7-4\sqrt{3})^p}{2}\in\mathbb{N},\ \forall p\in\mathbb{N}.$

şi corespunzător $n_p = E(m_p) = 2(k_p - l_p) = \dfrac{(3-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^p + (3+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^p}{3} \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}.$

Cazuri particulare: $(p=0 \Rightarrow m_0 = 1,\ n_0 = 2)$, $(p=1 \Rightarrow m_1 = 7,\ n_1 = 2)$, $(p=2 \Rightarrow m_2 = 97,\ n_2 = 6)$, $(p=3 \Rightarrow m_3 = 1351,\ n_3 = 22)$.

În continuare, vom determina tripletele (m;n;k) de numere naturale, soluții ale ecuații irațională $\sqrt{n+k} + \sqrt{n+\sqrt{n+k}} = m$. **(2).**

Pentru aceasta, se analizează cazurile când m este par şi impar.

Fie **m = 2p**, $p \in \mathbb{N}$, atunci $\sqrt{n+\sqrt{n+k}} = 2p - \sqrt{n+k} \,|()^2 \Rightarrow n + \sqrt{n+k} = 4p^2 - 4p\sqrt{n+k} + n + k$.

Din $(4p+1)\sqrt{n+k} = 4p^2 + k \Rightarrow\ n + k = q^2$ sau $n = q^2 - k,\ q \in \mathbb{N},\ q^2 \geq k.$

Ecuația (2) devine $q + \sqrt{n+q} = 2p \Rightarrow n + q = l^2 \Rightarrow n = l^2 - q,\ l \in \mathbb{N}, l^2 \geq q.$ Aşadar, $q + l = 2p$, (*) şi din relațiile $n = q^2 - k = l^2 - q \Rightarrow\ q^2 + q = l^2 + q,\ \Rightarrow 4q^2 + 4q + 1 = 4l^2 + 4k + 1.$

$(2q+1)^2 - (2l)^2 = 4k+1 \Rightarrow\ (2q - 2l + 1)(2q + 2l + 1) = 4k + 1.$ (**).

Pentru $q = l \Rightarrow n = q^2 - q.$ Din (*) avem $m = 2p = q + l = 2q \Rightarrow q = p.$ Aşadar, avem soluțiile:

$(m,n,k) = \left(2p; p^2 - p; p\right),\ p \in \mathbb{N}.$

Pentru $q \neq l$, din (*), (**) rezultă $q + l = 2p,\ q \rangle\ l \Rightarrow 2q - 2l + 1 \rangle 1$. În (**) se impune ca 4l+1 să fie număr impar compus, deci există $r, s \in \mathbb{N}^*$ cu $s \geq r \geq 1$ astfel încât $4k + 1 = (2s+1)(2r+1)$ iar de aici $k = s \cdot r + \dfrac{s+r}{2}$, s şi r de aceeaşi paritate. Atunci, în (**) avem:

$(2q - 2l + 1)(2q + 2l + 1) = (2s+1)(2r+1) \Rightarrow\ 4q + 2 = 2r + 2s + 2 \Rightarrow q = \dfrac{s+r}{2},\ l = \dfrac{s-r}{2}.$

Înlocuind în (*) găsim $q + l = 2p = s$. Dacă s este par atunci şi r trebuie să fie par, deci r = 2t cu $t \in \mathbb{N}^*$.

Astfel, $k = sr + \dfrac{s+r}{2} = 4pt + p + t$, şi obținem $n = q^2 - k = (p+t)^2 - 4pt - p - t = (p-t)^2 - p - t$. Se obțin soluțiile: $m = 2p,\ n = (p-t)^2 - p - t,\ k = p + t + 4pt,\ p \rangle t \geq 1,\ n \geq 0.$

Fie m = 2p+1, $p \in \mathbb{N}$**.** Ecuația (2) devine: $(2m+1)\sqrt{n+k} = m^2 + k \in \mathbb{N}$ şi cu notația $n + k = q^2,\ q \in \mathbb{N}$ avem $(2m+1) \cdot q = m^2 + q^2 - n \Rightarrow$

$(4p+3)q^2 = 4p^2 + 4p + 1 + q^2 - n \Rightarrow n = 4p^2 + 4p + q^2 - 4pq - 3q + 1$ şi

$k = q^2 - n = -4p^2 + 4pq - 4p + 3q - 1$ unde $p, q \in \mathbb{N},\ 2p + 1 \geq q \geq 3.$

Pentru p=0 şi q=3 rezultă m=n=1 şi k=8 dar ecuația nu o verifică;

Pentru p=1 şi q=3 rerzultă n = -3, deci se impune ca p să fie mai mare decât doi.

Astfel, în cazul în care m este impar avem o infinitate de soluții (m,n,k).

Cazuri particulare:

La Olimpiada Națională de Matematică 2016, faza finală, într-un subiect la clasa a VII-a se cere n natural pentru care numărul $\sqrt{n+3} + \sqrt{n+\sqrt{n+3}}$ este natural.

Pentru p=3 soluția este $n = p^2 - p = 6, m = 2p = 6, k = 3$, deci valoarea cerută este n = 6. Pentru p = 3 şi t = 1 rezultă m=6, n=0, k=16. $\sqrt{16} + \sqrt{\sqrt{16}} = 6$. Pentru p=4 şi t = 1 rezultă m=8, n=4, k=21. $\sqrt{25} + \sqrt{4 + \sqrt{25}} = 8$. Pentru p=2, q=3 rezultă m=5, n=1, k=8; Pentru p=3, q=4 rezultă m=7, n=5, k=11; Pentru p=4, q=6 rezultă m=9, n=3, k=33; Pentru p=5, q=6 rezultă m=11, n=19, k=17; Pentru p=1008, q=1009 rezultă m=2017, n=1015055, k=3026.

Bibliografie:

1. Titu Andreescu, Dorin Andrica- O introducere în studiul ecuațiilo rdiofantice. Editura Gil. 2002.
2. Arthur Engel- Probleme de matematică- strategii de rezolvare. Editura Gil. 2006.
3. Ion Cucurezeanu. Ecuații în numere întregi. Editura Aramis. 2006.

Prof. Liceul Tehnologic, Mihai Viteazul, Călugăreni, Giurgiu.

Asupra unei inegalităţi date la Hong Kong 2016 Team Selection Test

Marin Chirciu, Piteşti

La Testul pentru Selecţia echipei pentru OIM a fost propusă la Hong Kong 2016 Round 2 următoarea problemă:

„Dacă $a,\ b,\ c>0$ şi $abc=1$ determinaţi cea mai mică valoare a sumei

$$\frac{a^3+8}{a^3(b+c)}+\frac{b^3+8}{b^3(c+a)}+\frac{c^3+8}{c^3(a+b)}.\text{"}$$

Articolul îşi propune o dezvoltare a acestei probleme şi folosirea acesteia în obţinerea unor inegalităţi în triunghi.

1. Dacă $a,\ b,\ c>0$ astfel încât $abc=1$ şi $n\geq 0$, $k\geq 2$ demonstraţi că:

$$\frac{a^3+k}{a^3(b+nc)}+\frac{b^3+k}{b^3(c+na)}+\frac{c^3+k}{c^3(a+nb)}\geq\frac{3(k+1)}{n+1}.$$

Soluţie: Cu inegalitatea mediilor avem $a^3+1+1\geq 3a$. Obţinem:

$$\sum\frac{a^3+k}{a^3(b+nk)}\geq\sum\frac{3a+k-2}{a^3(b+nc)}=3\sum\frac{1}{a^2(b+nc)}+(k-2)\cdot\sum\frac{1}{a^3(b+nc)}=3\sum\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{b+nc}+$$

$$+(k-2)\cdot\sum\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{a(b+nc)}\overset{Bergstrom}{\geq}3\cdot\frac{\left(\sum\frac{1}{a}\right)^2}{\sum(b+nc)}+(k-2)\cdot\frac{\left(\sum\frac{1}{a}\right)^2}{\sum a(b+nc)}=$$

$$=3\cdot\frac{\left(\sum bc\right)^2}{(n+1)\sum a}+(k-2)\cdot\frac{\left(\sum bc\right)^2}{(n+1)\sum bc}=\frac{3}{n+1}\cdot\frac{\left(\sum bc\right)^2}{\sum a}+\frac{k-2}{n+1}\cdot\sum bc\overset{A_m-G_m}{\geq}\frac{3}{n+1}\cdot\frac{\left(\sum bc\right)^2}{\sum a}+$$

$$+\frac{k-2}{n+1}\cdot 3\overset{(1)}{\geq}\frac{3(k+1)}{n+1},\ \text{unde (1)}\Leftrightarrow\frac{3}{n+1}\cdot\frac{\left(\sum bc\right)^2}{\sum a}\geq\frac{9}{n+1}\Leftrightarrow\left(\sum bc\right)^2\geq 3\sum a\Leftrightarrow\left(\sum bc\right)^2\geq$$

$\geq 3abc\sum a$, adevărată din $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx),\ x=bc,\ y=ca,\ z=ab$.

Egalitatea are loc dacă $a=b=c=1$.

Pentru $k=8$ şi $n=1$ se obţine că minimul sumei propuse la 2016 Hong Kong TST2 este $\frac{27}{2}$.

2. Fie triunghiul ABC. Dacă $n\geq 0$ şi $k\geq 2$ arătaţi că sunt adevărate inegalităţile:

a) $$\sum\frac{\sin^3\frac{A}{2}+k\cdot\frac{r}{4R}}{\sin^3\frac{A}{2}\left(\sin\frac{B}{2}+n\sin\frac{C}{2}\right)}\geq\frac{6(k+1)}{n+1}\cdot\sqrt[3]{\frac{R}{2r}}.$$

Soluţie: Scriind inegalitatea în variabilele $x,\ y,\ z$ obţinem:

Dacă $x,\ y,\ z>0$ astfel încât $xyz=1$ şi $n\geq 0$, $k\geq 2$ demonstraţi că:

$$\frac{x^3+k}{x^3(y+nz)}+\frac{y^3+k}{y^3(z+nx)}+\frac{z^3+k}{z^3(x+ny)}\geq\frac{3(k+1)}{n+1}.$$

Din $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R}\Rightarrow\frac{4R}{r}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1$. Luăm $x=\sqrt[3]{\frac{4R}{r}}\sin\frac{A}{2}$, $y=\sqrt[3]{\frac{4R}{r}}\sin\frac{B}{2}$,

$z=\sqrt[3]{\frac{4R}{r}}\sin\frac{C}{2}$ şi folosim 1.

b) $\sum\frac{\cos^3\frac{A}{2}+k\cdot\frac{p}{4R}}{\cos^3\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B}{2}+n\cos\frac{C}{2}\right)}\geq\frac{6(k+1)}{n+1}\cdot\sqrt[3]{\frac{R}{2p}}$.

Soluție: $\prod\cos\frac{A}{2}=\frac{p}{4R}\Rightarrow\frac{4R}{p}\prod\cos\frac{A}{2}=1$. Luăm $x=\sqrt[3]{\frac{4R}{p}}\cos\frac{A}{2}$ şi analoagele şi folosim 1.

c) $\sum\frac{\operatorname{tg}^3\frac{A}{2}+\frac{kr}{p}}{\operatorname{tg}^3\frac{A}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}+n\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)}\geq\frac{3(k+1)}{n+1}\cdot\sqrt[3]{\frac{p}{r}}$.

Soluție: $\prod\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p}\Rightarrow\frac{p}{r}\prod\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1$. Luăm $x=\sqrt[3]{\frac{p}{r}}\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ şi analoagele şi folosim 1.

d) $\sum\frac{\operatorname{ctg}^3\frac{A}{2}+\frac{kr}{p}}{\operatorname{ctg}^3\frac{A}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+n\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)}\geq\frac{3(k+1)}{n+1}\cdot\sqrt[3]{\frac{r}{p}}$.

Soluție: $\prod\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{p}{r}\Rightarrow\frac{r}{p}\prod\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=1$. Luăm $x=\sqrt[3]{\frac{r}{p}}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$ şi analoagele şi folosim 1.

e) $\sum\frac{\sec^3\frac{A}{2}+\frac{4kR}{p}}{\sec^3\frac{A}{2}\left(\sec\frac{B}{2}+n\sec\frac{C}{2}\right)}\geq\frac{3(k+1)}{2(n+1)}\cdot\sqrt[3]{\frac{2p}{R}}$.

Soluție: $\prod\sec\frac{A}{2}=\frac{1}{\prod\cos\frac{A}{2}}=\frac{1}{\frac{p}{4R}}=\frac{4R}{p}\Rightarrow\frac{p}{4R}\prod\sec\frac{A}{2}=1$. Luăm $x=\sqrt[3]{\frac{p}{4R}}\sec\frac{A}{2}$ şi analoagele şi folosim 1.

f) $\sum\frac{\operatorname{cosec}^3\frac{A}{2}+\frac{4kR}{r}}{\operatorname{cosec}^3\frac{A}{2}\left(\operatorname{cosec}\frac{B}{2}+n\operatorname{cosec}\frac{C}{2}\right)}\geq\frac{3(k+1)}{2(n+1)}\cdot\sqrt[3]{\frac{2r}{R}}$.

Soluție: $\prod\operatorname{cosec}\frac{A}{2}=\frac{1}{\prod\sin\frac{A}{2}}=\frac{1}{\frac{r}{4R}}=\frac{4R}{r}\Rightarrow\frac{r}{4R}\prod\operatorname{cosec}\frac{A}{2}=1$. Luăm $x=\sqrt[3]{\frac{r}{4R}}\operatorname{cosec}\frac{A}{2}$ şi analoagele şi folosim 1.

În fiecare din inegalitățile de mai sus obținem egalitate pentru triunghiul echilateral.

Bibliografie.
1. Hong Kong 2016 , Team Selection Test, Round 2.
2. Marin Chirciu, Inegalități algebrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2014.
3. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.

Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Piteşti

Asupra unor inegalităţi omogene în trei variabile

de Leonard Giugiuc şi Diana Trailescu, Drobeta Turnu-Severin

Două dintre teoremele fundamentale în domeniul inegalităţilor omogene în trei variabile reale nenegative sunt următoarele:

Teorema 1 (*Cîrtoaje – Zhou – Pham*). *Dacă* $f:[0,\infty)^3\to\mathbb{R}$,

$f(u,v,w)=m(u^3+v^3+w^3)+nuvw+p(u^2v+v^2w+w^2u)+q(v^2u+w^2v+u^2w)$, *atunci*

$f(u,v,w)\geq 0$, $\forall(u,v,w)\in[0,\infty)^3 \Leftrightarrow (i)\, f(1,1,1)\geq 0$, $(ii)\, f(u,1,0)\geq 0, \forall u\geq 0$.

Teorema 2 (*Vo Quec Ba Can*). *Dacă* t *este fixat, cu* $0\leq t\leq s$ *şi* a,b,c *nenegative a.î.* $a+b+c=3s$ $ab+bc+ca=3(s^2-t^2)$, *atunci valoarea minimă a produsului* abc *este:*

$(s+t)^2(s-2t)$, *pentru* $0\leq t\leq \frac{s}{2}$ *şi* 0 *pentru* $\frac{s}{2}\leq t\leq s$. *Mai mult dacă* $0\leq t\leq \frac{s}{2}$, *atunci valoarea* $(s+t)^2(s-2t)$ *este atinsă în permutările tripletului* $(s+t,s+t,s-2t)$.

Aplicaţie. *Determinaţi valoarea maximă a numărului real* M *pentru care*

$(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)+12abc\geq M(ab+bc+ca)(a+b+c)$, *(*),* $\forall a,b,c\geq 0$.

Soluţia 1 (folosim teorema 1). Observăm că pentru $M\leq 0$ relaţia (*) este adevărată $\forall a,b,c\geq 0$.

Considerăm funcţia $f:[0,\infty)^3\to\mathbb{R}$,

$$f(a,b,c)=(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)+12abc-M(ab+bc+ca)(a+b+c).$$

Deoarece $f(a,b,c)\geq 0, \forall a,b,c\geq 0$, avem: $(i)\, f(1,1,1)\geq 0$ şi $(ii)\, f(a,1,0)\geq 0, \forall a\geq 0$. Deci,

$f(1,1,1)\geq 0$ implică $M\leq \frac{7}{3}$ şi $f(a,1,0)\geq 0, \forall a\geq 0$ implică $(a+1)(a^2-Ma+1)\geq 0, \forall a\geq 0$.

Dacă $M>2$, atunci ecuaţia $a^2-Ma+1=0$ admite două rădăcini reale a_1 şi a_2 cu $0<a_1<a_2$; iar dacă alegem $a_1<\alpha<a_2$ obţinem

$f(\alpha,1,0)<0$ şi urmează că (*) nu poate avea loc $\forall a,b,c\geq 0$.

Dacă $0<M\leq 2$, atunci $a^2-Ma+1\geq 0$, $\forall a\geq 0$, deci $f(a,1,0)\geq 0$, $\forall a\geq 0$; dar cum $2<\frac{7}{3}$

obţinem că valoarea maximă cerută este $M=2$.

Soluția 2 (folosim teorema 2). Deoarece ambii membri ai lui (*) sunt polinoame omogene de gradul al treilea, WLOG putem presupune că $a+b+c=3$, rezultă $ab+bc+ca=3(1-t^2)$, cu $0\le t\le 1$. Fie $abc=p$.

Dacă $0\le t\le \frac{1}{2}$, atunci (*) devine succesiv

$$3(1+2t^2)+4p\ge 3M(1-t^2)\Leftrightarrow 3(1+2t^2)+4(1+t)^2(1-2t)\ge 3M(1-t^2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-8t^3-6t^2+7}{3(1-t^2)}\ge M,\ \forall 0\le t\le \frac{1}{2}.$$

Considerând funcția $f:\left[0,\frac{1}{2}\right]\to R$, $f(t)=\frac{-8t^3-6t^2+7}{3(1-t^2)}\ge M$, rezultă $f(0)=\frac{7}{3}, f\left(\frac{1}{2}\right)=2$.

Dacă ținem cont că $8t^3\le 1, \forall 0\le t\le \frac{1}{2}$ deducem că $\frac{-8t^3-6t^2+7}{3(1-t^2)}\ge 2, \forall 0\le t\le \frac{1}{2}$, deci $\min f=2$,

de unde valoarea maximă a lui M este egală cu 2 pentru $0\le t\le \frac{1}{2}$.

Vom studia dacă pentru $\frac{1}{2}\le t\le 1$ şi $M=2$, relația (*) rămâne adevărată.

Din teorema 2, rezultă că este suficient ca

$$3(1+2t^2)\ge 6(1-t^2)\Leftrightarrow 4t^2\ge 1,\ \ \forall \frac{1}{2}\le t\le 1,$$ ceea ce este adevărat.

Deci, valoarea maximă a lui M este egală cu 2.

Petrache Poenaru inventatorul

Cunoscut ca iluminist şi discipol al lui Gheorghe Lazăr care împreună cu el au pus bazele organizării învățământului românesc, şi participant la revoluțiile de la 1821 şi 1848, Petrache Poenaru (1799 - 1875) este inventatorul stiloului.

Totul s-a datorat faptului că fiind nevoit să copieze cursuri întregi folosindu-se de pana pe care trebuia să şi-o înmoaie foarte des în călimară, Poenaru pe când era student la Paris a născocit un instrument brevetat de guvernul francez în 25 mai 1827.

Neştiind cum să să-l numească căci nu mai exista ceva asemănător până atunci, el i-a dat următoarea denumire sugestivă, ” Condeiul purtăreț fără de sfârşit care se alimentează singur cu cerneală”, devenind astfel stiloul de astăzi.



O generalizare şi o rafinare a inegalităţii Ionescu-Weitzenböck

de D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti,
Daniel Sitaru, Drobeta Turnu-Severin
şi Neculai Stanciu, Buzău

Fie ABC un triunghi în care notăm cu a,b,c lungimile laturilor, $p=\frac{a+b+c}{2}$, S aria, r raza cercului înscris, R raza cercului circumscris, A,B,C măsurile în radiani ale unghiurilor triunghiului.

Inegalitatea lui *Ionescu-Weitzenböck* este

$$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}\cdot S, \text{ (I-W).}$$

Lemă. *În orice triunghi ABC are loc inegalitatea*

$$a^2\geq 4S\cdot tg\frac{A}{2}, \text{ (1) şi analoagele.}$$

Demonstraţia 1. Avem:

$$(b+c)\sin\frac{A}{2}=2R(\sin B+\sin C)\sin\frac{A}{2}=4R\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2}=$$

$$=4R\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=2R\sin A\cos\frac{B-C}{2}=a\cos\frac{B-C}{2}\leq a.$$

Prin urmare:

$$a^2\geq(b+c)^2\sin^2\frac{A}{2}\geq(2\sqrt{bc})^2\sin^2\frac{A}{2}=4bc\sin^2\frac{A}{2}=\frac{8S\sin^2\frac{A}{2}}{\sin A}=\frac{8S\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=4S\cdot tg\frac{A}{2},$$

q.e.d.

Demonstraţia 2. Conform teoremei cosinusului avem:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\geq 2\sqrt{b^2c^2}-2bc\cos A=2bc(1-\cos A)=2bc\cdot 2\sin^2\frac{A}{2}=$$

$$=4bc\sin^2\frac{A}{2}=\frac{8S\sin^2\frac{A}{2}}{\sin A}=\frac{8S\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=4S\cdot tg\frac{A}{2}, \text{ q.e.d.}$$

Demonstraţia 3. Avem:

$$a^2=4S\cdot\frac{a^2}{4S}=4S\cdot\frac{a^2}{\frac{abc}{R}}=4S\cdot\frac{aR}{bc}=4S\cdot\frac{2R^2\sin A}{4R^2\sin B\sin C}=4S\cdot\frac{\sin A}{\sin B\sin C}=$$

$$=4S\cdot\frac{\sin A}{\cos(B-c)-\cos(B+C)}=4S\cdot\frac{\sin A}{\cos(B-C)+\cos A}\geq 4S\cdot\frac{\sin A}{1+\cos A}=$$

$$=4S\cdot\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}=4S\cdot tg\frac{A}{2}, \text{ q.e.d.}$$

Teoremă. *Dacă* $m \geq 0$, *atunci în orice triunghi* ABC *are loc inegalitatea:*

$$a^{2m+2}+b^{2m+2}+c^{2m+2} \geq 4^{m+1}S^{m+1}\left(tg^{m+1}\frac{A}{2}+tg^{m+1}\frac{B}{2}+tg^{m+1}\frac{C}{2}\right) \geq$$

$$\geq \frac{4^{m+1}S^{m+1}}{3^m}\left(tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\right)^{m+1} \geq 4^{m+1}S^{m+1}(\sqrt{3})^{1-m}, (2).$$

Demonstrație. Conform inegalităților (1) avem:

$$a^{2m+2}+b^{2m+2}+c^{2m+2} = (a^2)^{m+1}+(b^2)^{m+1}+(c^2)^{m+1} \geq$$

$$\geq \left(4S\cdot tg\frac{A}{2}\right)^{m+1}+\left(4S\cdot tg\frac{B}{2}\right)^{m+1}+\left(4S\cdot tg\frac{C}{2}\right)^{m+1} =$$

$$= 4^{m+1}S^{m+1}\left(tg^{m+1}\frac{A}{2}+tg^{m+1}\frac{B}{2}+tg^{m+1}\frac{C}{2}\right) \overset{Radon}{\geq} 4^{m+1}S^{m+1}\cdot\frac{1}{3^m}\left(tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\right)^{m+1}, (3).$$

Funcția $tg:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to R_+^*$ este convexă şi atunci conform inegalității lui *Jensen* avem:

$$tgx+tgy+tgz \geq 3\cdot tg\frac{x+y+z}{3},\ \forall x,y,z\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right), (4).$$

Dacă în (4) luăm $x=\frac{A}{2}, y=\frac{B}{2}, z=\frac{C}{2}$ obținem:

$$tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2} \geq 3\cdot tg\frac{A+B+C}{6} = 3\cdot tg\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}, (5).$$

Din relațiile (3) şi (5) deducem (2), q.e.d.

Observații:

1) Dacă $m=0$, atunci relațiile (2) devin

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4S\left(tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\right) \geq 4S\sqrt{3}.$$

2) În relațiile (2) avem egalitate dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

An elementary proof of Blundon's inequality

By Marius Drăgan, Bucharest, Romania and Neculai Stanciu, Buzău, Romania

Let ABC be a triangle with the lengths of sides a,b,c; semiperimeter p and R,r circumradius and inradius, respectively.

In this note we give an elementary proof of *Blundon*'s inequality (see [1]) i.e.

$$2R^2+10Rr-r^2-2\sqrt{R(R-2r)^3} \leq p^2 \leq 2R^2+10Rr-r^2+2\sqrt{R(R-2r)^3}, (1)$$

using *Cardano-Tartaglia* relations (see [2]).

Proof. We denote

$$x+y=c, y+z=a, z+x=b, x+y+z=\sigma_1,\ xy+yz+zx=\sigma_2,\ xyz=\sigma_3, (2).$$

Then, x, y, z are positive roots of equation $X^3-\sigma_1 X^2+\sigma_2 X-\sigma_3=0$, (3).

It is well-known that x, y, z are real roots of (3) if and only if

$$18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-4\sigma_1^3\sigma_3+\sigma_1^2\sigma_2^2-4\sigma_2^3-27\sigma_3^2\geq 0, (4), \text{(see [2])}.$$

If we take $x=p-a, y=p-b, z=p-c$, then by (2) we deduce that

$$\sigma_1=p, \sigma_2=r^2+4Rr, \sigma_3=pr^2, (5).$$

From (4) and (5) yields that:

$$18(r^4+4Rr^3)p^2-4r^2p^4+(r^2+4Rr)^2p^2-4(r^2+4Rr)^3-27r^4p^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow r^2(p^2)^2+2r^2(r^2-2R^2-10Rr)p^2+(r^2+4Rr)^3\leq 0, (6),$$

with the discriminant $\Delta=16Rr^4(R-2r)^3$.

Hence by (6) we obtain (1), q.e.d.

References

[1]W.J. Blundon - *Inequalities associated with the triangle*, Can. Math. Bull **8** (1965), pp. 615-626.
[2] G. Stoica, *Asupra unui tip de inegalități*, G.M.-B, nr. 1, 2016, pp. 7-9.

A new proof and a new refinement of Ionescu-Weitzenböck inequality

by Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

In any triangle ABC with the lengths of the sides a, b, c and the area S holds the inequality

$$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S, \text{(I-W)}.$$

Proof. $(4S-a^2\sqrt{3})^2=16S^2-8Sa^2\sqrt{3}+3a^4$, so $16S^2+3a^4\geq 8Sa^2\sqrt{3}$, (1) and other two analogous $16S^2+3b^4\geq 8Sb^2\sqrt{3}$, (2); $16S^2+3c^4\geq 8Sc^2\sqrt{3}$, (3). By adding (1), (2) and (3) we deduce that $48S^2+3(a^4+b^4+c^4)\geq 8S(a^2+b^2+c^2)\sqrt{3}$ and taking into account by

$$16S^2=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4) \text{ we infer}$$

$$3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geq 4S(a^2+b^2+c^2)\sqrt{3}, \text{ hence}$$

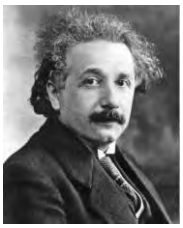
$$\frac{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{a^2+b^2+c^2}\geq 4S\sqrt{3}, (4).$$

Using well-known inequality $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$ for any real numbers x, y, z, yields that $(a^2+b^2+c^2)^2\geq 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$, therefore

$$a^2+b^2+c^2\geq\frac{3(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{a^2+b^2+c^2}, (5).$$

By the inequalities (4) and (5) we obtain $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$, i.e. Ionescu-Weitzenböck inequality. From this proof we deduce that the inequality (4) is a refinement of Ionescu-Weitzenböck inequality.

**„Un om deştept rezolvă problema.
Un om şi mai deştept o evită”.
Albert Einstein
(1879-1955)**



3. Examene şi concursuri

CONCURSUL JUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

SCLIPIREA MINŢII

25 NOIEMBRIE 2017- EDIŢIA a X-a

REZULTATE

Clasa a V-a: Premiul I: Pleşca Maria, Scoala nr. 11; **Premiul II**: Cucu Raisa, Dumitraşcu Nikolia, Scoala nr. 11; **Premiul III**: Ceauşescu Adrian, Scoala nr. 11; **Menţiuni**: Beceanu Cezar, Brătescu Mihnea, Mutu Rareş, Vlad Octavian, Scoala nr. 11, Ciorici Sebastian, Radu Maria, Scoala nr. 15, Spânu Teodora, Liceul Pedagogic;

Clasa a VI-a: **Premiul I**: Mirea Miruna, Scoala nr. 11, Vasile Ana Maria, Scoala nr. 15; **Premiul II**: Gogan Alexandru, Vlad David Andrei, , Scoala nr. 11; **Premiul III**: Bacanu Iustin, Şcoala nr. 11, Iorgulescu Marie-Jane, Liceul Pedagogic, Tătulescu Oana, Şcoala Bâsca Rozilei; **Menţiuni**: Gâţulescu Narcisa, Şcoala nr. 15; Irimia Alexandra, Şcoala Păltineni;

Clasa a VII-a: **Premiul I**: Puşcă Emilia, Scoala nr. 15; Suditu Alecsandra, Liceul LPS; **Premiul II**: Cărbunaru Alexandra, Scoala nr.15, Cristea Ana, Liceul Pedagogic; **Premiul III**: Onea Sergiu, Scoala Bâsca Rozilei; **Menţiuni**: Prundea George, Şcoala Bâsca Rozilei, Dragomir Nicoleta, Liceul Sportiv, Cercel Ionuţ, Şcoala nr.15.

Clasa a VIII-a: Premiul I: Constantin Ioana, Liceul Pedagogic, **Premiul II**: Frâncu Silviu, Şcoala nr.15; **Premiul III:** Ivan Robert, Scoala nr.15. **Menţiune**: State Valentin, Şcoala Păltineni.

LICEU- Tehnologic:

Clasa a IX-a, Tehnologic : Premiul I: Pană Mădălina, Colegiul Economic; **Premiul II**: Catinca Teodora, Liceul C. Nenițescu; **Premiul III**: Şindrilaru Veronica, Colegiul Economic, Zaplaic Florentina, Liceul C. Nenițescu; **Menţiune**: Coman Ştefănuţ, Liceul C. Nenițescu;

Clasa a IX-a Ştiinţe: Premiul I: Tomica Elena; Zamfir Izabela, **Premiul II**: Zaharia Cosmin; **Premiul III**: Bundă Cristian, Neagu Simona, Colegiul Naţional Mihai Eminescu.

Clasa a X-a Tehnologic: Premiul I: Vizitiu Anamaria, Lic. C.Nenițescu; **Premiul II**: Molnar Renata, Colegiul Economic;

Clasa a X-a Ştiinţe: Premiul I: Matei Mihai, Premiul II: Coman Isabela; Premiul III: Bălan Mădălina, Nedeluş Alexandra, Stana Alexandra; **Menţiune**: Ştefan Alexandru, Colegiul Naţional Mihai Eminescu

Clasa a XI-a Tehnologic: Premiul I: Pascu Elena, Liceul C. Nenițescu; **Premiul II:** Dobrişan Raluca, Colegiul Economic; **Premiul III:** Dumitrache Mihaela, Liceul C. Nenițescu; **Menţiune:** Moise Ionela, Liceul C. Nenițescu; Toma Denisa, Colegiul Economic;

Clasa a XI- a Ştiinţe: Premiul I: Trifan Georgiana; **Premiul II**:Gheorgeh Oana; **Premiul III**: Iuga Valentin;

Clasa a XII-a Tehnologic: **Premiul I**: Horhocia Andreea, Colegiul Economic; **Premiul II**: Aldea Aurel, Colegiul Economic; **Premiul III:** Vasile Andreea, Colegiul Economic; **Menţiune**: Anton Florin; Liceul C. Nenițescu;

SUBIECTE CONCURS:

Clasa a V-a

1.a) Comparaţi numerele: 2^{6042} şi 3^{4028} b)Fie A = $3^1 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{2020}$. Arătaţi că A se divide cu 10

Iarca Daniel şi Gheorghe Dîrstaru, Buzău

2. a) Să se calculeze : $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 =$

b) Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care are loc egalitatea:

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 511$.

Maritanţa Prefac, Nehoiu

3. a) Să se verifice că: $2017 = 9^2 + 44^2$ şi $2017^2 = 792^2 + 1855^2$.

b) Să se demonstreze că 2017^{2017} şi 2017^{2018} se pot scrie ca sumă de două pătrate perfecte.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Clasa a VI-a

1. a) Exprimaţi în grade, minute şi secunde suplementul complementului unghiului cu măsura de: $43{,}29^0$.

Gheorghe Dârstaru şi Iarca Daniel, Buzău

b) Verificaţi egalităţile $1\times2\times3\times4 = 5^2 - 1$, $2\times3\times4\times5 = 11^2 - 1$ şi $3\times4\times5\times6 = 19^2 - 1$ apoi, demonstraţi că $2017\times2018\times2019\times2020 + 1$ este pătrat perfect.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

2. a) Calculaţi: $1 + 6\times7\times8\times9\times10 : (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$.

b) Cei 25 de elevi ai unei clase stau la rând pentru corn şi lapte. Nicu observă că în faţa lui sunt o optime dintre colegii săi. Al câtelea la rând este Nicu?

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

3. Fie unghiurile <ABC si <ABD complementare neadiacente şi semidreapta [BE cu proprietatea ca unghiurile <ABE si <EBD sunt adiacente avand masurile de x^0y' , respectiv y^0x', unde x si y sunt numere naturale astfel incat x+y=60. Determinaţi măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor <ABC si <ABD.

Gheorghe Dârstaru şi Iarca Daniel, Buzău

Clasa a VII-a

1. Să se rezolve ecuaţiile în mulţimea $\mathbb{Q}$:

a) $\frac{x+2}{3} + \frac{x+4}{5} + \frac{x+6}{7} + \frac{x+10}{11} = 4$

b) $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \frac{x+3}{4} + \frac{x+4}{5} + ... + \frac{x+n}{n+1} = n,$ unde $n \in \mathbb{N}^*$

Maritanţa Prefac, Nehoiu

2. Fie paralelogramul ABCD (AB > BC) cu perimetrul de 36cm. M şi N sunt mijloacele laturilor (AB), respectiv (CD), astfel încât prin construcţia lui [MN] se obţin două romburi.

Se cere :

a) Calculaţi perimetrul unui astfel de romb; b) Arătaţi că ΔANB este dreptunghic;

c) Dacă $m(\sphericalangle DAB) = 60^0$ şi $AN = 6\sqrt{3}$ cm, calculaţi aria ΔANB şi aria rombului AMND.

Maritanţa Prefac, Nehoiu

3. a)Să se determine numerele naturale n astfel încât suma $1 + 2 + ... + n$ să fie un număr format din două cifre identice.

b)Dacă a şi b sunt cifre, atunci rezolvaţi ecuaţia $(\overline{ab} + \overline{ba})(\overline{ab} - \overline{ba}) = x^2$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Titu Zvonaru, Comăneşti

Clasa a VIII-a

1. Determinaţi $x \in \mathbb{R}$ astfel încât: $\left(x^2 - 3x + 2\right)^2 + \left(x^2 - 6x + 8\right)^2 = \left(2x^2 - 9x + 10\right)^2$.

Iarca Daniel, Buzău

2. În sistemul ortogonal de coordonate xOy, se consideră punctele $A(a,0)$, $B(0,b), C(a,-a)$ şi $D(-b,b)$; $a,b > 0$, $a > b$. Dacă $BC \cap Ox = \{E\}$ şi $AD \cap Oy = \{F\}$, atunci:

a) arătaţi că ΔFOE este isoscel;

b) determinaţi aria patrulaterului $ABFE$.

Neculai Stanciu, Buzău

3. Să se determine numerele reale a, b şi c care verifică relațiile:

$$a+b=4 \text{ şi } a^2+b^2+c^2=8.$$

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti

Clasa a IX-a Ştiințe

1. a) Arătați ca pentru $x\in[2,4]$, $|2x-4|+|2x-8|\in\mathbb{N}$.

b) Rezolvați ecuatia: $\{2x\}+\left\{2x+\frac{1}{2}\right\}=x$.

2. Fie (a_n) o progresie aritmetică, având suma primilor n termeni $S_n=4n^2-n$.

a) Determinați progresia aritmetica.

b) Calculați : $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+.....+\frac{1}{a_{2016}a_{2017}}$.

3. Fie ABCD paralelogram, $AC\cap BD=\{O\}$ şi punctul M este mijlocul laturii $[AB]$. Dacă $AC\cap DM=\{N\}$ arătați că : a) $\overrightarrow{DN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DM}$. b) $\overrightarrow{AN}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{3}$.

Clasa a IX-a Tehnologic

I. 1. Dacă $x^2+y^2+4x+6y+13=0$, $x,y\in\mathbb{R}$, să se calculeze suma $(x+1)^{2018}+(y-x)^{2018}$.

I. 2. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ din relația $\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}+(1-\sqrt{2})^{-2}=a+b\sqrt{2}$.

II. Fie $x\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $x+\frac{1}{x}=7$. Să se calculeze: $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$; $x^3+\frac{1}{x^3}$; $x^4+\frac{1}{x^4}$;

III. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt{x^2+4x+4}+|x-3|=7$.

Clasa a X-a Ştiințe

1.a) Arătați că numărul $a=\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}$ este soluție a ecuației $x^3-3x-8=0$.

b) Determinați $m\in\mathbb{R}$ asfel încât să fie bine definită expresia $\sqrt{\log_2\left[(m+2)x^2-2mx+m+1\right]}$, pentru orice x număr real.

2. a) Calculați: $\sqrt[3]{2}^{\frac{1}{\log_{27}2}}+\log_4 8\cdot\sqrt[3]{4}-3^{\frac{\log_2 5}{\log_2 3}}$.

b) Arătați că pentru $\forall\ a,b,c\in(0;1)$ are loc inegalitatea

$$\log_a\frac{3abc}{ab+ac+bc}+\log_b\frac{3abc}{ab+ac+bc}+\log_c\frac{3abc}{ab+ac+bc}\geq 3.$$

3. a) Calculați: $1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+...+\frac{1}{i^{100}}$.

b) Fie $z\in\mathbb{C}-\{\mathbb{R}\}$ şi $\frac{z^2-z+1}{z^2+z+1}\in\mathbb{R}$. Să se arate că $|z|=1$.

Clasa a X-a Tehnologic

I. 1. Să se determine $a\in\mathbb{R}^*$ din relația $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{7}{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^{\frac{5}{2}}\cdot 81^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{\frac{4}{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}}$.

II. 1. Să se arate că $\frac{1}{\log_5\sqrt[3]{35}}+\frac{1}{\log_7\sqrt[3]{35}}\rangle\frac{1}{\sqrt[3]{\log_3\sqrt[3]{3}}}$.

II. 2. Dacă $a,b,c\geq 0$ şi $a^3+b^3+c^3=192$, să se arate că $\sqrt{9+a^2}+\sqrt{9+b^2}+\sqrt{9+c^2}\leq 15$.

Prof. Adrian Stan

III. Dacă $x=\log_{30} a,\ y=\log_{35} a,\ z=\log_{42} a,\ a\rangle 0,\ a\neq 1,$ să se arate că

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{\log_5 a}+\frac{1}{\log_6 a}+\frac{1}{\log_7 a}.$$

Clasa a XI-a Ştiinţe

I:.1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$. Calculaţi suma $S_n=A+A^2+A^3+....+A^n.$

I. 2. Fie A o matrice pătratică de ordinul 2 cu proprietăţile $\det(A+3I_2)=4$ şi $\det(A-2I_2)=9$. Să se calculeze $(A+I_2)^{2018}$.

II. Determinaţi $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx+1}-\sqrt{x^2+b}\right)=-\frac{1}{2}.$.

III. Pentru orice $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$, să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\sqrt{1+x}\cdot\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[4]{1+x}\cdot.....\cdot\sqrt[n]{1+x}}{x}$;

Clasa a XI-a Tehnologic

I. Fie $M=\left\{X(a)=\begin{pmatrix}1-a&0&2a\\0&1&0\\-a&0&1+2a\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})\right\}$ şi $A=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&0&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $X(a)=I_3+a\cdot A;$

b) Arătaţi că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+a\cdot b),\ \forall a,b\in\mathbb{R};$

c) Să se calculeze produsul $P=X(-10)\cdot X(-9)\cdot....\cdot X(0)\cdot.....\cdot X(9)\cdot X(10).$

II. Să se determine numerele reale a, b ştiind că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax+x^2)}{\sqrt{x+b}-2}=3$.

III. Pentru orice $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$, să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(3x+\sqrt{x^2-2}\right)^n+\left(3x-\sqrt{x^2-2}\right)^2}{x^n}$;

Clasa a XII-a Tehnologic

1. Fie $G=\left\{X(a)\middle|a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\},X(a)=I_2+a\cdot A\right\},\ A=\begin{pmatrix}4&-6\\2&-3\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ matricea unitate.

a) Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup comutativ.

b) Să se calculeze $X(1)\cdot X(2)\cdot X(3)\cdot.....\cdot X(2018).$

c) Să se calculeze $X(\frac{-5}{4})\cdot X(\frac{-4}{3})\cdot X(\frac{-3}{2})\cdot X(\frac{-2}{1})\cdot X(0)\cdot X(-2)\cdot X(-3)\cdot X(-4)\cdot X(-5).$

II. 1. Determinaţi $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia F să fie o primitivă a funcţiei f unde

$f:(-1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$, $F:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=a\cdot\ln(x+1)+b\cdot\ln(x^2+1)+c\cdot arctgx$.

2. Să se determine numărul real a care verifică egalitatea $\int_{-1}^{2}\left(\frac{x^2-4x+3}{x-1}-ax\right)dx=0$.

III. Fie $f,g,h:\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos^4 x$, $g(x)=\sin^4 x$, $h(x)=2\sin^2 x\cdot\cos^2 x$. Să se calculeze $\int[f(x)+g(x)-3h(x)]dx$.

Clasa a XII-a Ştiinţe

I. Fie $G=\left\{X(a)\middle|a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\},X(a)=I_2+a\cdot A\right\}$, $A=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ şi

$I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ matricea unitate.

a) Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup comutativ.

b) Să se calculeze $X(1)\cdot X(2)\cdot X(3)\cdot.....\cdot X(2018)$.

c) Să se calculeze $X(\frac{-5}{4})\cdot X(\frac{-4}{3})\cdot X(\frac{-3}{2})\cdot X(\frac{-2}{1})\cdot X(0)\cdot X(-2)\cdot X(-3)\cdot X(-4)\cdot X(-5)$.

II.1 Determinați $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția F să fie o primitivă a funcției f unde

$f:(-1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$, $F:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=a\cdot\ln(x+1)+b\cdot\ln(x^2+1)+c\cdot arctgx$.

II.2. Să se determine numărul real a care verifică egalitatea $\int_{-1}^{2}\left(\frac{x^2-4x+3}{x-1}-ax\right)dx=0$.

III. Fie $f,g,h:\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos^4 x$, $g(x)=\sin^4 x$, $h(x)=2\sin^2 x\cdot\cos^2 x$. Să se calculeze $\int[f(x)+g(x)-3h(x)]dx$.

Thales negustorul

Marele geometru grec al Antichităţii, **Thales din Milet** (cca. 624 – 576 î.e.n) fondatorul Şcolii de filozofie materialistă din Milet a fost înainte de toate un negustor care transporta cu caravana sa o serie de mărfuri printre care şi sare.

La un moment dat, el transporta sare cu ajutorul măgarilor. Aceştia trebuiau să treacă un râu iar unul din ei după ce s-a lăsat în apă să se răcorească a simţit cum povara din spate se uşurează deoarece sacii cu sare au luat apă iar aceasta s-a dizolvat, aşă că de fiecare dată când trecea pe acolo se lăsa în apă iar sacii cu sare luau apă.

Observând Thales că la destinaţie ajungea mai puţină sare pentru a-i dezvăţa prostul năravcare-l păgubea s-a hotărât să-i înlocuiască sacii cu sare cu saci cu lână.

Următoarea dată, când măgarul a ajuns la râu, s-a lăsat din nou în apă, dar când să iasă, stupoare, mai că nu putea să iasă, povara din spate devenise cu mult mai grea decât la început şi de abia putea păşi. Lâna după ce s-a îmbibat cu apă devenise cu mult mai grea, de aceea măgarul a trebuit să-şi înveţe lecţia de la Thales, ca pe viitor să nu se mai lase în apă.

Aşadar, orice năravare şi dezvăţ, vorba proverbului, şi e bine de ştiut că atunci când nu respecţi un lucru sau pe cineva, nu te comporţi corect, sau faci ceva greşit, oricând poate să se întâmple ceva rău.

„ Aud şi apoi uit.
Privesc şi apoi îmi amintesc.
Fac şi apoi înțeleg ”.
Confucius
(551- 479)



4. Probleme rezolvate

▪ Clasa a V-a

G:683. **Maria şi Bogdan au comandat la cofetărie prăjituri, Maria a cerut bezele iar Bogdan madelaine. O bezea este mai scumpă decât o madelainã. Maria a primit cu 20% mai multe prăjituri decât Bogdan, dar a şi plătit cu 80% mai mult. Cu ce procent este mai scumpă o bezea decât o madelainã?**

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

***Rezolvare*:** Să zicem că Bogdan primeşte m madelaine la x lei fiecare. Atunci, Maria primeşte $1,2m$ bezele, la y lei fiecare. Deci, Bogdan plăteşte mx lei, iar Maria $1,2my$ lei. Deoarece Maria plăteşte cu 80% mai mult decât Bogdan, avem că $1,2my = 1,8mx$. Deducem că $y = \frac{1,8}{1,2}x = 1,5x$. Rezultă că o bezea este cu 50% mai scumpă decât o madelainã.

G:684. **Se consideră pătratele cu laturile $2, 2^2, 2^3, ..., 2^{2017}$. Să se determine pe ce loc se află pătratul cu latura $2^{1+2+3+...+63}$ şi să se afle aria şi perimetrul acestuia.**

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare:

Pe locul 2016 deoarece $1+2+3+....+63 = \frac{63\cdot 64}{2} = 2016$. Aria este $A = \left(2^{2016}\right)^2 = 2^{4032}$, $P = 4\cdot 2^{2016} = 2^{2018}$.

G:685. **Determinați cifrele a, b, c astfel încât relația $(10+20+30+.....+90)\cdot c : a^2 = b^2$, $a,b,c\rangle 0$ să fie adevărată.**

Petre Păunescu, Roşiorii de Vede, Teleorman

Rezolvare: $450\cdot c = a^2\cdot b^2$ ceea ce este un pătrat perfect. Rezultă, c poate fi 2 sau 8.
Doar pentru c = 2 se obține b = 6 şi a = 5 sau invers.

G:686. **Să se arate că numărul 37^{2017} nu este cub perfect dar se poate scrie ca diferența a două cuburi perfecte.**

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Cum $37^{2017} = 37\cdot(37^{672})^3$, iar 37 este număr prim, rezultă că numărul dat nu este cub perfect. Pe de altă parte, $37^{2017} = 37\cdot 37^{2016} = (4^3-3^3)\cdot 37^{672\cdot 3} = \left(4\cdot 37^{672}\right)^3 - \left(3\cdot 37^{672}\right)^3$. c.t.t.d.

G:687. **Să se scrie 2016^{2017} ca suma dintre două pătrate perfecte si un cub perfect diferite de zero.**

Gabriela Buzea, Bucureşti

Rezolvare:

Se observă că $2016 = 12^2+12^2+12^3$, atunci, $2016^{2017} = 2016\cdot 2016^{2016} = \left(12^2+12^2+12^3\right)\cdot 2016^{2016}$

$2016^{2017} = \left(12\cdot 2016^{1008}\right)^2 + \left(12\cdot 2016^{1008}\right)^2 + \left(12\cdot 2016^{672}\right)^3$.

G:688. **Determinați numerele naturale *a* şi *b* ştiind că $[a,b]=55+(a,b)$ şi $a+b=35$.**

Daniela Badea, Ploieşti

Rezolvare:

Fie $(a,b)=d\Rightarrow\begin{cases}a=dx\\b=dy\\(x,y)=1\end{cases}$ Se ştie că $(a,b)\cdot[a,b]=a\cdot b$, $\forall\, a,b\in\mathrm{N}^*\Rightarrow[a,b]=\dfrac{a\cdot b}{(a,b)}=dxy$.

Din ipoteza $\left.\begin{array}{l}[a,b]=55+(a,b)\Leftrightarrow dxy=55+d\Leftrightarrow d(xy-1)=55\Rightarrow d/55\\ a+b=35\Leftrightarrow d(x+y)=35\Rightarrow d/35\end{array}\right\}\Rightarrow d/(35,55)\Leftrightarrow d/5\Leftrightarrow d\in\{1,5\}$

Pentru $d=1$ nu există solutie, iar pentru $d=5\Rightarrow xy=12$ şi $x+y=7\Rightarrow x=3,\ y=4\Rightarrow a=15,\ b=20$.

G:689. **Determinați numerele $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\overline{aa}^2+\overline{bb}^2+\overline{cc}^2=5929$.**

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare:

$(11a)^2+(11b)^2+(11c)^2=5929\Rightarrow 11^2\left(a^2+b^2+c^2\right)=11^2\cdot 7^2\Rightarrow a^2+b^2+c^2=7^2\Rightarrow a,b,c\in\{2;3,6\}$.

$(a;b;c)\in\{236;263;326;362;623;632\}$.

G:690. **Găsiți numerele prime de forma $\overline{abb}$ astfel ca $\overline{abb}\cdot\left(a^c+b\right)+\overline{bba}=\overline{adbb}$.**

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Rezolvare:

Trebuie ca $\overline{abb}\left(a^c+b\right)\ \langle\ \overline{adbb}$. Printre cele mai mici numere $\overline{abb}$, prime sunt 199, 211, 233, 277, 311, etc.

Se verifică pentru fiecare, astfel că pentru $\overline{abb}=211$ obținem: a= 2, b=1 iar $211(2^c+1)+112=\overline{2d11}$, rezultă că pentru c = 3 obținem o egalitate adevărată. $211(2^3+1)+112=2011$, aşadar, $\overline{abb}=211$.

G:691. Să se arate că $\underbrace{\overline{abab...ab}}_{2016\ litere}+\underbrace{\overline{baba...ba}}_{2016\ litere}=\underbrace{\overline{aa...a}}_{de\ 2016\ ori}+\underbrace{\overline{bb...b}}_{de\ 2016\ ori}\ \vdots 37$.

Constantin Ciobîcă, Fălticeni

Rezolvare:

$$\underbrace{\overline{abab...ab}}_{2016litere}+\underbrace{\overline{baba...ba}}_{2016litere}=a\cdot 1\underbrace{00...0}_{de\,2015ori}+b\cdot 1\underbrace{00...0}_{de\,2014ori}+a\cdot 1\underbrace{00...0}_{de\,2013ori}+b\cdot 1\underbrace{00...0}_{de\,2012ori}+...+a\cdot 10+b+$$

$$+b\cdot 1\underbrace{00...0}_{de\,2015ori}+a\cdot 1\underbrace{00...0}_{de\,2014ori}+b\cdot 1\underbrace{00...0}_{de\,2013ori}+a\cdot 1\underbrace{00...0}_{de\,2012ori}+...+b\cdot 10+a=$$

$$=a\cdot 1\underbrace{00...0}_{de\,2015ori}+a\cdot 1\underbrace{00...0}_{de\,2014ori}+...+a\cdot 10+a+b\cdot 1\underbrace{00...0}_{de\,2015ori}+b\cdot 1\underbrace{00...0}_{de\,2014ori}+...+b\cdot 10+b=\underbrace{\overline{aa...a}}_{de\,2016\,ori}+\underbrace{\overline{bb...b}}_{de\,2016\,ori}$$

$$\underbrace{\overline{aa...a}}_{de\,2016ori}+\underbrace{\overline{bb...b}}_{de\,2016ori}=a\cdot\underbrace{\overline{11...1}}_{de\,2016ori}+b\cdot\underbrace{\overline{11...1}}_{de\,2016ori}=\underbrace{\overline{11...1}}_{de\,2016ori}\cdot(a+b)=111\cdot\underbrace{1001001...1001}_{2014cifre}\cdot(a+b)=$$

$$=37\cdot 3\cdot\underbrace{1001001...1001}_{2014cifre}\cdot(a+b)$$

G:692. **Aflați numerele naturale de forma $\overline{xy}$ astfel încât numărul $\dfrac{76}{x^2+y^2}$ să fie natural.**

Marian Ciuperceanu, Craiova

Rezolvare: Evident $x\neq 0,\Rightarrow\dfrac{76}{x^2+y^2}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow x^2+y^2\in D_{76}=\{1;2;4;19;38;76\}$.

Verificând pentru 1, 2, 4 căci x^2+y^2 nu poate să fie 19, 38 sau 76 deducem că $\overline{xy}\in\{10;11;20\}$

▪ Clasa a VI-a

G:693. **Determinați numerele naturale nenule a, b şi c pentru care** $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{5}=4$.

Elev **Ionuț - Florin Voinea**, Bucureşti

Rezolvare: Relația dată este echivalentă cu $15a+10b+6c=120$. Evident, **15a** trebuie să fie divizibil cu 2, prin urmare, a este divizibil cu 2, adică, $a=2a_1,\ a_1\in\mathbb{N}^*$.

Din $3|b\Rightarrow b=3b_1,\ b_1\in\mathbb{N}^*$ şi $5|c\Rightarrow c=5c_1,\ c_1\in\mathbb{N}^*$, prin înlocuire în relația inițială, rezultă: $a_1+b_1+c_1=4$ cu soluțiile: $(a_1,b_1,c_1)\in\{(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)\}$, de unde $(a,b,c)\in\{(2,3,10),(2,6,5),(4,3,5)\}$.

G:694. **Arătați că nu există numere prime** p **care să verifice relația** $(p+2)^a=(p-2)^b$**, unde** $\mathbb{N}$ **.**

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare:

Observăm că $p=2$ şi $p=3$ nu sunt soluții;

Dacă $p=M_3+1$, atunci membrul stâng al relației este multiplu de 3, şi membrul drept nu este multiplu de 3;

Dacă $p=M_3+2$, atunci membrul drept este multiplu de 3, şi membrul stâng nu este multiplu de 3. Deci nu există numere prime p care să verifice relația dată.

G:695. **Aflați numerele prime x si y astfel încât** $23_{(x)}+45_{(y)}=76_{(8)}$.

Adriana Puescu, Buzău

Rezolvare:

. Înlocuind în relația din ipoteză rezultă

. Cum y este prim rezultă $y\in\{7;11;13\}$. Dând valori lui y se obține

G:696. **Să se arate că numărul** $A=2^5+2^{11}+2^{17}+.....+2^{371}+2^{377}$ **este divizibil cu 2016.**

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Evident, $A=2^2\left(2^3+2^9+2^{15}+.....+2^{375}\right)=4\cdot a$ este divizibil cu 4; De asemenea, $a=2^3+2^9+2^{15}+.....+2^{375}=8+8^3+8^5....+8^{125}=8(1+8^2+.....+8^{124})$ este divizibil cu 8.

Pe de altă parte, $a=8+8^3+8^5....+8^{125}=(7+1)+(7+1)^3+(7+1)^5+....+(7+1)^{125}=$

$=(7+1)+(M7+1)+(M7+1)+.....+(M7+1)$ în total 63 de termeni ceea ce înseamnă că a este egal cu un multiplu de 7 plus 1 de 63 de ori. $a=M7+7\cdot 9=M7$.

Analog, $a=8+8^3+8^5....+8^{125}=(9-1)+(9-1)^3+(9-1)^5+....+(9-1)^{125}=M9-63=M9$.

Rezultă că $A=4a$ este divizibil cu $4\cdot 8\cdot 7\cdot 9$, adică A este divizibil cu 2016.

G:697. **Găsiți numerele** $\overline{xy}$ **astfel încât să avem:** $\frac{\overline{xy}+\overline{yx}-2(x-3y)}{9}=\overline{x,(y)}+\overline{y,(x)}$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Rezolvare:

Scriind explicit numerele în baza 10 obținem

$\frac{10x+y+10y+x-2x+6y}{9}=x\frac{y}{9}+y\frac{x}{9}\Leftrightarrow\frac{9x+17y}{9}=\frac{9x+y+9y+x}{9}\Leftrightarrow$

$9x+17y=10x+10y\Leftrightarrow 7y=x\Rightarrow y=1,x=7.$ Aşadar, $\overline{xy}=71.$

G:698. **Să se determine restul împărțirii numărului** $n=2007^{2007}+2008^{2008}+2009^{2009}+2010^{2010}$ **la 17.**

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Din relațiile: $2007=17\cdot 118+1=M17+1;$ $2008=17\cdot 118+2=M17+2;$ avem:

$2009=17\cdot 118+3=M17+3,$

$2007^{2007}=(M17+1)^{2007}=M17+1;$

$2008^{2008}=(M17+2)^{2008}=M17+2^{2008}=M17+16^{502}=M17+(17-1)^{502}=M17+1;$

$2009^{2009}=(M17+3)^{2009}=M17+3^{2009}=M17+3^{8\cdot 251+1}=M17+6561^{251}\cdot 3=$

$M17+(17\cdot 386-1)^{251}\cdot 3=M17+(M17-1)^{251}\cdot 3=M17-3=M17+14.$

$2010^{2010}=(M17+4)^{2010}=M17+4^{2010}=M17+16^{1005}=M17+(17-1)^{1005}=M17-1$

Rezultă că $n=M17+1+M17+1+M17+14+M17-1=M17+15,$ şi atunci restul împărțirii lui n la 17 este 15.

G:699. **Fie numerele** $a,b,c,d\rangle 0$ **cu proprietatea că** $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+a}=x,$ **unde** $0\langle x\langle 4$**.**

Calculați $\frac{a}{a+d}+\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+b}+\frac{d}{d+c}.$

Marin Chirciu, Piteşti

Rezolvare:

Din $4-x=\left(1-\frac{a}{a+b}\right)+\left(1-\frac{b}{b+c}\right)+\left(1-\frac{c}{c+d}\right)+\left(1-\frac{d}{d+a}\right)=\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{d}{c+d}+\frac{a}{d+a}\Rightarrow$

$\frac{a}{a+d}+\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+b}+\frac{d}{d+c}=4-x.$

G:700. **Numerele** a_1,a_2,b_1 şi b_2 **sunt naturale, iar** a_1 şi a_2 **sunt prime. Se ştie că media aritmetică a numerelor** a_1 şi b_2 **este 4, media aritmetică ponderată a numerelor** a_1 şi a_2 **cu ponderile** b_1 şi b_2 **este 4, iar media aritmetică ponderată a numerelor** b_1 şi b_2 **cu ponderile** a_1 şi a_2 **este** $\frac{20}{3}$**. Aflați cele patru numere.**

Daniela Badea, Ploieşti

Rezolvare:

$S=a_1b_1+a_2b_2\in\mathbb{N},\ \frac{S}{b_1+b_2}=4;\ \frac{S}{a_1+a_1}=\frac{20}{3}\Rightarrow S=20k;a_1+a_2=3k;b_1+b_2=5k$

$\frac{a_1+b_2}{2}=4\Leftrightarrow a_1+b_2=8$

Dar a_1 e număr prim $\Rightarrow a_1\in\{2,3,5,7\}$. Convine doar 2.

Dacă $a_1=2\Rightarrow b_2=6\Rightarrow\begin{cases}a_2=3k-2\\ b_1=5k-6\\ 2b_1+6a_2=20k\end{cases}\Rightarrow a_2=7$ şi $b_1=9$.

Dacă $a_1=3\Rightarrow a_2=3k-3\vdots 3$ fals ; Dacă $a_1=5\Rightarrow b_2=3\Rightarrow k\notin N$; Dacă $a_1=7\Rightarrow b_2=1\Rightarrow k\notin N$

G:701. **Determinați numerele prime p și q care verifică relația** $p^3\cdot q^3=p^3+3q^3+127$**.**

Elev **Ionuț- Florin Voinea**, Bucureşti

Rezolvare:

Din $p^3\cdot q^3-p^3-3q^3=127|+3\Rightarrow\ p^3(q^3-1)-3(q^3-1)=130\Rightarrow\ (p^3-3)(q^3-1)=130\Rightarrow$ $p^3-3|130\Rightarrow p^3-3\in\{5;10;13;26;65;130\}$. Convine doar $p^3-3=5\Rightarrow p=2.$ Mai departe, se obține q=3.

G:702. **Determinați numerele prime p și q astfel încât** $(p+4)^4$ **să fie pătrat perfect.**

Daniela Beldea, Băileşti, Dolj

Rezolvare:

Dacă q=2, p este număr prim oarecare.

Dacă $q\geq 3\Rightarrow q$ este impar şi atunci, p+4 trebuie să fie pătrat perfect. Rezultă, $p+4=k^2\Rightarrow p=(k-2)(k+2)\Rightarrow\begin{cases}k-2=p\\k+2=1\end{cases}sau\begin{cases}k-2=1\\k+2=p\end{cases}\Rightarrow k=3\Rightarrow p=5$, iar q poate fi orice număr prim, impar.

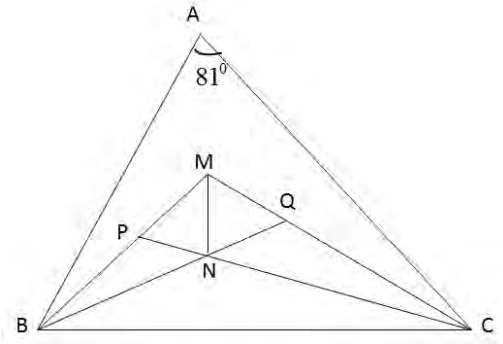
G:703. **Triunghiul** ΔABC **are** $m(\sphericalangle C)=50^0$ **iar** $m(\sphericalangle B)$ **este media aritmetică a măsurilor unghiurilor** $\sphericalangle A$ **şi** $\sphericalangle C$**. Aflați măsurile unghiurilor** $\sphericalangle A$ **şi** $\sphericalangle B$**.**

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare:

Din $m(\sphericalangle A)+\dfrac{m(\sphericalangle A)+50^0}{2}+50^0=180^0\Rightarrow m(\sphericalangle A)=70^0, m(\sphericalangle B)=60^0.$

G:704. **În interiorul triunghiului ascuțit unghic ABC având** $m(A)=81^0$ **se consideră punctele M şi N astfel încât** $[BM]$ **şi** $[BN]$ **împart unghiul** $\sphericalangle B$ **în trei părți congruente. De asemenea,** $[CM]$ **şi** $[CN]$ **împart unghiul** $\sphericalangle C$ **în trei părți congruente. Fie** $BM\cap CN=\{P\}$ **şi** $BN\cap CM=\{Q\}$.



Se cere:

a) Să se calculeze $m(\sphericalangle CMN)$**;**

b) Să se arate că $\Delta\ PMN\equiv\Delta\ QMN$ **dacă şi numai dacă** $\Delta\ ABC$ **este isocel cu** $[AB]\equiv[AC]$**.**

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare:

a) În triunghiul $\Delta\ BMC$, (BN şi (CN sunt bisectoare, rezultă

$m(\sphericalangle CMB)=180^0-\dfrac{2}{3}\Big(m(B)+m(C)\Big)=\ =180^0-\dfrac{2}{3}\cdot(180^0-81^0)=180^0-66^0=114^0.$

De asemenea, $[MN]$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle CMB$, aşadar,

$m(\sphericalangle CMN)=\dfrac{1}{2}m(\sphericalangle CMB)=57^0.$

b) Fie $m(\sphericalangle ABM)=m(\sphericalangle MBN)=m(\sphericalangle NBC)=x$ şi $m(\sphericalangle ACM)=m(\sphericalangle MCN)=m(\sphericalangle NCB)=y$.

Notăm $m(\sphericalangle PMN)=m(\sphericalangle NMC)=z$.

Evident, din triunghiul ΔBMC, 2x+2y+2z=180, rezultă x+y+z=90.

Atunci, $m(\sphericalangle BNC)=z+90^0$, iar $m(\sphericalangle PNB)=m(\sphericalangle QNC)=90^0-z$.

Din triunghiul $\Delta\ BNM$ rezultă $m(\sphericalangle MNP)=180^0-(x+z+90^0-z)=90^0-x$, iar din triunghiul $\Delta\ CNM$ rezultă $m(\sphericalangle MNQ)=180^0-(z+y+90^0-z)=90^0-y$.

Atunci, din x = y (triunghiul ABC isoscel) $\Leftrightarrow\ \Delta\ MNP\equiv\Delta\ MNQ$ (cazul U.L.U)

Altfel:

Triunghiul $\Delta\ ABC$ isoscel, rezultă $\Delta\ MBC$ şi $\Delta\ NBC$ isoscele $\Rightarrow\Delta\ BMN\equiv\Delta\ CNM\ \ (LLL)$.

Rezultă că şi unghiurile corespunzătoare sunt congruente.

$m(\sphericalangle MNP)=m(\sphericalangle MNB)-m(\sphericalangle PNB)=m(\sphericalangle MNC)-m(\sphericalangle QNC)=m(\sphericalangle QNM)$.

($\sphericalangle QNC\equiv\sphericalangle PNB$ - opuse la vârf)

Aşadar, $\Delta\ PMN\equiv\Delta\ QMN$, (cazul ULU) .

▪ Clasa a VII-a

G:705. **Arătați că numărul $\sqrt{7\cdot2017\cdot(1+2+3+....+2016)}$ este rațional.**

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare:

$\sqrt{7\cdot2017\cdot1008\cdot2017}=\sqrt{7\cdot2017^2\cdot7\cdot9\cdot16}=7\cdot3\cdot4\cdot2017\in\mathbb{Q}$.

G:706. **Să se demonstreze că $\sqrt{2011^n+2015^n+2016^n}\notin\mathbb{Q},\ \forall n\in\mathbb{N}$.**

Dida Isaia, Galați

Rezolvare:

u(2011^n)=u(1^n)=1; u(2015^n)=u(5^n)=5; u(2016^n)=u(6^n)=6, de aici rezultă că ultima cifră a sumei de puteri de sub radical va fi u(1+5+6)=u(12)=2, deci suma nu poate fi pătrat perfect. C.c.t.d.

G:707. **Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n\geq4$ este adevărată inegalitatea $n^3>(n+2)^2$.**

Neculai Stanciu, Buzău şi Iuliana Traşcă, Olt

Rezolvare: Într-adevăr:

$n^3=n\cdot n^2\geq4n^2=n^2+n\cdot3n\geq n^2+12n>n^2+4n+4=(n+2)^2$, q.e.d.

G:708. **Dacă $x,y\in\mathbb{N}$ astfel încât $\frac{5^{2x}}{9}+5^{2y}\leq\frac{2}{3}\cdot5^{x+y}$, atunci 5^x+5^y se divide cu 4.**

Iuliana Traşcă, Scorniceşti, Olt

Rezolvare: Inegalitatea este echivalentă cu: $\left(5^x-3\cdot5^y\right)^2\leq0$, cum $\left(5^x-3\cdot5^y\right)^2\geq0\Rightarrow$

$5^x=3\cdot5^y\Rightarrow5^x+5^y=4\cdot5^y\vdots4$

G:709. **Să se arate că există $n\in\mathbb{N}$, pentru care numărul $a=2015n^2+2015n+2016,$ este cub perfect.**

Ionel Tudor, Călugăreni, **Viorica Dogaru**, Giurgiu

Rezolvare:

Pentru n = 1 se obține că $a=6046\ \vdots\ 2$ dar $6046\ \not\vdots\ 8$.

Pentru $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ se obține că $a=2015n^2+2015n+2016=2015\cdot\frac{n^3-1}{n-1}+1=\frac{2015n^3+n-2016}{n-1}$ iar

dacă în loc de n punem 2016, obținem că $a=2016^3$, deci, este cub perfect.

G:710. **Să se afle** $x,y,z\in\mathbb{R}$ **dacă are loc relația** $6x^2+3y^2+4z^2-2yz-4xz-18z+27=0$**.**

Gabriela Buzea, Bucureşti

Rezolvare: Relația de mai sus se mai poate scrie $(2x+y-z)^2+2(x-y)^2+3(z-3)^2=0$, de unde rezultă $x=y,\ z=3,\ x=y=1$.

G:711. **Determinați numerele naturale** $\overline{ab}$ **ştiind că** $ab^2+4ab-2b^2+4a-8b=44$**.**

Doina şi Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

Din $ab^2-2b^2+4ab-8b+4a=36+8\Rightarrow$ $b^2(a-2)+4b(a-2)+4(a-2)=36\Rightarrow$ $(a-2)(b^2+4b+4)=36\Rightarrow\ (a-2)(b+2)^2=36$. Dând valori, se obțin soluțiile: $\overline{ab}\in\{34;61\}$.

G:712. **Dacă** $xyz=1,\ x,y,z\in\mathbb{N}^*$ **, calculați** $\dfrac{2016}{1+x+xy}+\dfrac{2016}{1+y+yz}+\dfrac{2016}{1+z+xz}$.

Andrei Octavian Dobre, Ploieşti

Rezolvare:

$$\frac{2016}{1+x+xy}+\frac{2016}{1+y+yz}+\frac{2016}{1+z+xz}=\frac{2016}{1+x+\frac{1}{z}}+\frac{2016}{1+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xz}z}+\frac{2016}{1+z+xz}$$

$$=2016\left(\frac{z}{z+xz+1}+\frac{xz}{xz+1+z}+\frac{1}{1+z+xz}\right)=2016$$

G:713. **Dacă** $a,b,c\rangle 0$ **şi** $a\cdot b\cdot c=1$**, arătați că**

$$\frac{4}{(a+b)^2+4(a+1)}+\frac{4}{(b+c)^2+4(b+1)}+\frac{4}{(c+a)^2+4(c+1)}\le 1.$$

Marin Chirciu, Piteşti

Rezolvare:

Din $(a+b)^2\ge 4ab\Rightarrow \dfrac{4}{(a+b)^2+4(a+1)}\le\dfrac{4}{4ab+4(a+1)}=\dfrac{1}{ab+a+1}$. Analog pentru celelalte:

$$\frac{4}{(a+b)^2+4(a+1)}+\frac{4}{(b+c)^2+4(b+1)}+\frac{4}{(c+a)^2+4(c+1)}\le\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}=$$

$$=\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{\frac{1}{a}+b+1}+\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}+1}=\frac{1}{ab+a+1}+\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{ab+a+1}=\frac{ab+a+1}{ab+a+1}=1,$$ cu egalitate $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

G:714. **Aflați mulțimea** $A=\left\{\overline{abc}\,\middle|\,\sqrt{\overline{abc}}=a\cdot b+c+b^b, a\ne b\ne c\right\}$**.**

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Rezolvare:

Observăm că $\overline{abc}$ trebuie să fie pătrat perfect.

Deoarece 961 este cel mai mare pătrat de trei cifre înseamnă că $b^b\langle 31\Rightarrow b\in\{1,2,3\}$.

Pentru b = 2 se obține $\overline{a2c}\in\{225,529,625,729\}$. Verifică doar numerele 529 şi 729.

$\sqrt{529}=2\cdot 5+9+2^2=..=23$ (Adevărat) şi $\sqrt{729}=7\cdot 2+9+2^2=..=27$ (Adevărat).

Pentru b= 3 şi b = 1 nu se găseşte niciun număr. $A=\{529;729\}$.

Pentru b = 2 se obține $\overline{a2c} \in \{225, 529, 625, 729\}$. Verifică doar numerele 529 şi 729.

$\sqrt{529} = 2\cdot 5 + 9 + 2^2 = .. = 23$ (Adevărat) şi $\sqrt{729} = 7\cdot 2 + 9 + 2^2 = .. = 27$ (Adevărat).

Pentru b= 3 şi b = 1 nu se găseşte niciun număr. $A = \{529; 729\}$.

G:715. **Să se determine** $p \in \mathbb{N}$ **astfel încât** $S_n = 3^n + 5^n + 7^n + ... + (2p+1)^n$**, să nu fie pătrat perfect pentru orice** n **număr natural par.**

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Un pătrat perfect este de forma M_4 sau $M_4 + 1$. Vom pune condiția ca S_n să fie de forma $M_4 + 2$ sau $M_4 + 3$. Avem: $S_n = 3^{2k} + 5^{2k} + 7^n + ... + (2p+1)^{2k} = (M_4 + 1) + (M_4 + 1) + ... + (M_4 + 1) = M_4 + p$. Deci, $p \in M_4 + 2$ sau $p \in M_4 + 3$.

G:716. **Dacă numerele** $x_1, x_2, ..., x_n$ **sunt direct proporționale cu numerele** $2,3,...,n+1$ **şi** $x_1, x_2, ..., x_n$ **sunt măsurile a n unghiuri în jurul unui punct atunci aflați** n, $x_1, x_2, ..., x_n$**.**

Constantin Ciobîcă, Fălticeni

Rezolvare:

$$\{x_1, x_2, ..., x_n\}\ d.p\ \{2,3,...,n+1\} \Rightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{3} = ... = \frac{x_n}{n+1} = k \Rightarrow\ x_1 = 2k,\quad x_2 = 3k - - - - -$$

$$x_n = (n+1)\cdot k \Rightarrow\ x_1 + x_2 + ... + x_n = 360^0 \Rightarrow 2k + 3k + ... + (n+1)k = 360^0 \Rightarrow k\cdot(2 + 3 + ... + n + 1)$$

$$-k = 360^0 \Rightarrow\ k\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2} - k = 360^0 \Rightarrow k\cdot(n^2 + 3n + 2) - 2k = 720^0 \Rightarrow k\cdot n\cdot(n+3) = 720^0$$

$$\left.\begin{matrix} n/720 \\ (n+3)/720 \end{matrix}\right\} \Rightarrow n = 2 \Rightarrow 10k = 720^0 \Rightarrow k = 72^0 \quad \begin{matrix} x_1 = 2\cdot 72^0 = 144^0 \\ x_2 = 3\cdot 72^0 = 216^0 \end{matrix}$$

G:717. **Fie AD, BE, CF bisectoarele interioare ale triunghiului ABC. Dacă aria triunghiului ABD este media aritmetică a ariilor triunghiurilor BCE şi CAF atunci triunghiul ABC este isoscel.**

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Din teorema bisectoarei pentru $[AD]$ rezultă că BD $= \frac{ac}{b+c}$. Avem:

S $_{ABD} = \frac{BDh_a}{2} = \frac{ach_a}{2(b+c)} = \frac{c}{b+c}S$, unde h_a şi S sunt lungimea înălțimii din A respectiv aria triunghiului ABC. Analog avem: $S_{BCE} = \frac{a}{a+c}S, S_{CAF} = \frac{b}{a+b}S$. Din $S_{ABD} = \frac{S_{BCE} + S_{CAF}}{2}$

$$\Rightarrow \frac{2c}{b+c} = \frac{a}{a+c} + \frac{b}{a+b} \Leftrightarrow \frac{2c}{b+c} = \frac{a^2 + 2ab + bc}{a^2 + ab + ac + bc} \Leftrightarrow a^2c + 2ac^2 - 2ab^2 + bc^2 - a^2b - b^2c = 0 \Leftrightarrow$$

$$2a(c-b)(c+b) + a^2(c-b) + bc(c-b) = 0 \Leftrightarrow (c-b)(a^2 + bc + 2ac + 2bc) = 0 \Leftrightarrow b = c\ .$$

G:718. **Se dau cercurile** $C_1(O_1, R)$ **şi** $C_2(O_2, r)$ **tangente exterior şi punctele** $A, B \in C_1(O_1, R)$ **diametral opuse. Din B se construieşte tangenta BC la** $C_2(O_2, r)$**,** $C \in C_2(O_2, r)$**. Arătați că triunghiul ΔABC este isoscel.**

Adriana Puescu, Buzău

Rezolvare:

$AB = 2R,\ O_1O_2 = R + r.$ Fie AD tangenta comună a celor două cercuri şi $D \in C_2(O_2, r)$. Fie $O_2E \perp AB$. Se formează dreptunghiul $EADO_2 \Rightarrow O_1E = R - r,\ BE = 2R - r$.

Se aplică teorema lui Pitagora în triunghiurile ΔEO_1O_2, ΔBEO_2 şi ΔBCO_2: $EO_2^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr.$

$BO_2^2 = (2R-r)^2 + 4Rr = 4R^2 + r^2.\ BC^2 = 4R^2 + r^2 - r^2 = 4R^2.$

Se obține că $AB = BC = 2R$, adică triunghiul ABC este isoscel.

▪ Clasa a VIII-a

G:719. **Aflați** $a\in\mathbb{Q}$ **astfel încât** $n=\dfrac{a-1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{a+1}{\sqrt{2}-1}\in\mathbb{N}$ **.**

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare: Cum $n=\dfrac{(a-1)(\sqrt{2}-1)+(a+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=2a\sqrt{2}+2\Rightarrow a=0.$

G:720. **Fie** $x,y,z\in\mathbb{N}^*$ **astfel încât** $x^2+y^2+z^2=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$ **. Arătați că numerele xy, yz, zx și xy+yz+zx sunt pătrate perfecte.**

Iulia Sanda, Tatiana Cristea, Craiova

Rezolvare: Din relația inițială rezultă $x^2+y^2+z^2=2(xy+yz+zx)+2(xy+yz+zx)\Rightarrow$

$(x+y+z)^2=4(xy+yz+zx)\Rightarrow\quad xy+yz+zx=\left(\dfrac{x+y+z}{2}\right)^2\Rightarrow\quad xy=\left(\dfrac{x+y-z}{2}\right)^2$. Analog, pentru celelalte.

G:721. **Rezolvați ecuația** $33^{2x}+56^{2x}+2017^{2x}=33^x\cdot56^x+33^x\cdot2017^x+56^x\cdot2017^x,\ x\in\mathbb{R}$ **.**

Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

Se folosește inegalitatea $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}$ pentru $a=33^{2x},\ b=56^{2x},\ c=2017^{2x}$.

Cum în enunț avem egalitate, atunci, aceasta se întâmplă când $33^{2x}=56^{2x}=2017^{2x}$. Rezultă x = 0.

G:722. **Fie** $x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{R}_+$. **Arătați că**

$\left(x_1^{\,2}+2012x_1+1\right)\cdot\left(x_2^{\,2}+2012x_2+1\right)\cdot...\cdot\left(x_n^{\,2}+2012x_n+1\right)\geq2014^n\,x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_n.$

Iuliana Traşcă, Scorniceşti, Olt

***Rezolvare*:** Folosim inegalitatea $x+\dfrac{1}{x}\geq2,\ (\forall)x\in\mathbb{R}.$

$\dfrac{x_k^{\,2}+2012x_k+1}{x_k}=x_k+\dfrac{1}{x_k}+2012\geq2014,\ k=\overline{1,n}.$ Înmulțind membru cu membru aceste inegalități rezultă inegalitatea cerută.

G:723. ***Știind că x este un număr impar, multiplu de 7, găsiți perechile de numere naturale (x,y) ale egalității*** $x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-\sqrt{2016x}-\sqrt{2016y}+\sqrt{2016xy}=2016$ **.**

Andrei Octavian Dobre, Ploieşti

Rezolvare:

$\sqrt{xy}\sqrt{x}+\sqrt{xy}\sqrt{y}-\sqrt{2016x}-\sqrt{2016y}+\sqrt{2016xy}-\left(\sqrt{2016}\right)^2=0\Leftrightarrow$

$\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})-\sqrt{2016}(\sqrt{x}+\sqrt{y})+\sqrt{2016}\sqrt{xy}-\left(\sqrt{2016}\right)^2=0\Leftrightarrow$

$(\sqrt{xy}-\sqrt{2016})(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{2016})=0\qquad\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{2016}>0,\forall x,y\in\mathbb{N}.$

$\sqrt{xy}-\sqrt{2016}=0\Leftrightarrow\sqrt{xy}=\sqrt{2016}\Leftrightarrow xy=2016$

$x=3^2\cdot7\ sau\ x=3\cdot7\ sau\ x=7$

$xy=2^5\cdot3^2\cdot7\qquad S=\{(3^2\cdot7;2^5);(3\cdot7;2^5\cdot3);(7;2^5\cdot3^2)\}$

G:724. **Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuatia:**

$$\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)+\frac{1}{2x+4}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}\right)+\frac{1}{2x+8}\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+5}\right)=\frac{x^2-6}{(x-1)(x+5)}.$$

Adriana Puescu, Buzău

Rezolvare: Din condițiile de existență a fracțiilor rezultă $x\in R\setminus\{\pm1,-5,-4,-3,-2,0\}$ (1)

Efectuând calculele în primul membru al ecuației obținem

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+5}\right)=\frac{x^2-6}{(x-1)(x+5)} <=> \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+5}\right)=\frac{x^2-6}{(x-1)(x+5)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x+5-x+1}{(x-1)(x+5)}\right)=\frac{x^2-6}{(x-1)(x+5)} \Leftrightarrow \frac{3}{(x-1)(x+5)}=\frac{x^2-6}{(x-1)(x+5)} \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm3\ (2). \quad => x=3.$$

G:725. **Fie expresia $E(x,y)=\frac{x+y}{1+xy}; x,y\in(-1,1)$.**

a) Să se arate că $E(x,y)\in(-1,1), \forall x,y\in(-1,1)$;

b) Să se rezolve inecuația $E\left(x,\sqrt{2}-1\right)<\frac{1}{2}$. **Daniela Badea**, Ploieşti

Rezolvare:

a) Fie $\left.\begin{array}{l} x\in(-1,1)\Leftrightarrow -1<x<1\Leftrightarrow |x|<1 \\ y\in(-1,1)\Leftrightarrow -1<y<1\Leftrightarrow |y|<1 \end{array}\right\}\Rightarrow |xy|<1\Leftrightarrow -1<xy<1\Leftrightarrow 0<1+xy<2$

Arătăm că $\frac{x+y}{1+xy}\in(-1,1)\Leftrightarrow -1<\frac{x+y}{1+xy}<1\Leftrightarrow -1-xy<x+y<1+xy$.

$$-1-xy<x+y\Leftrightarrow x+y+xy+1>0\Leftrightarrow (x+1)(y+1)>0 \Leftarrow \begin{cases} x+1>0 \\ y+1>0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} -1<x \\ -1<y \end{cases}$$

$$x+y<1+xy\Leftrightarrow x+y-1-xy<0\Leftrightarrow (x-1)(1-y)<0 \Leftarrow \begin{cases} x-1<0 \\ 1-y>0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ y<1 \end{cases}$$

b) $\left.\begin{array}{l} E\left(x,\sqrt{2}-1\right)<\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\left(3-\sqrt{2}\right)<3-2\sqrt{2}\Leftrightarrow x<\frac{5-3\sqrt{2}}{7} \\ \text{Din a) avem } E\left(x,\sqrt{2}-1\right)\in(-1,1) \end{array}\right\}\Rightarrow x\in\left(-1,\frac{5-3\sqrt{2}}{7}\right).$

G:726. **Să se arate că ecuația $\frac{27+x^3}{27+2017^3}=\frac{3+x}{2020}$ are în $\mathbb{Z}$, trei rădăcini a căror sumă este egală cu zero.**

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Ecuația dată este echivalentă cu $\frac{(3+x)\cdot(3^2-3x+x^2)}{(3+2017)\cdot(3^2-3\cdot2017+2017^2)}=\frac{3+x}{2020}\Rightarrow$

$\frac{(3+x)}{2012}\cdot\left(\frac{9-3x+x^2}{9-3\cdot2017+2017^2}-1\right)=0$. Aşadar, din 3+x=0 se obține soluția -3 iar din

$x^2-2017^2-3x+3\cdot2017=0\Leftrightarrow(x-2017)(x+2014)=0$ se obține $x_2=2017,\ x_3=-2014$.

Evident, suma soluțiilor este egală cu zero.

G:727. **Găsiți punctele A(a,b) ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=-x+2016$ cu $a,b\in\mathbb{N}^*,\ a\neq1$ astfel încât să avem:**

$$\frac{4a^2+4ab+b^2-1}{2a^2+ab-a-b-1}\cdot(a-1)=2017.$$

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Rezolvare: Egalitatea dată se mai scrie $\frac{(2a+b)^2-1}{a(2a+b+1)-(2a+b+1)}\cdot(a-1)=2017$.

$\Leftrightarrow \frac{(2a+b+1)(2a+b-1)}{(2a+b+1)(a-1)}\cdot(a-1)=2017\Rightarrow 2a+b-1=2017\Rightarrow 2a+b=2018$. (1). Din $A(a;b)\in G_f\Rightarrow b=-a+2016$. (2). Din (1) şi (2) rezultă a = 2 şi b = 2014, aşadar, $A(2;\ 2014)$.

G:728. **Să se rezolve ecuația [2016x] + {2017x} = 2018.**

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Ecuația se scrie: $[2016x]-[2017x]=2018-2017x\in\mathbb{Z}$.

Notând $2018-2017x=k\in Z\Leftrightarrow x=\frac{2018-k}{2017}$, ecuația devine:

$$\left[2016\cdot\frac{2017+1-k}{2017}\right]-[2018-k]=k\Leftrightarrow\left[2016+\frac{1-k}{2017}2016\right]=2018\Leftrightarrow\left[\frac{1-k}{2017}2016\right]=2.$$

Din proprietatea părții întregi avem:

$$2\le\frac{2016-2016k}{2017}<3\Leftrightarrow 2018\le -2016k<4035\Leftrightarrow -\frac{4035}{2016}\le k<-\frac{2018}{2016},$$

de rezultă k = -2, şi atunci x = $\frac{2020}{2017}$.

G:729. **Demonstrați că dacă** $x,y,z\rangle 0$, **atunci:** $\frac{x^5}{(yz)^3}+\frac{x^5}{(yz)^3}+\frac{x^5}{(yz)^3}\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

Marin Chirciu, Piteşti

Rezolvare: Inegalitatea dată este echivalentă cu $x^8+y^8+z^8\ge x^3y^3z^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$. Mai departe, se foloseşte inegalitatea $a^2+b^2+c^2\ge ab+ac+bc$ cu egalitate când $a=b=c$.

$$x^8+y^8+z^8\ge x^4y^4+y^4z^4+z^4x^4\ge x^2y^2z^2(x^2+y^2+z^2)\ge x^2y^2z^2(xy+yz+zx)=x^3y^3z^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Egalitatea are loc când x=y=z.

G:730. **Fie** $a,b,c>0$**. Să se demonstreze inegalitatea:** $\left(\sum a^8\right)\left(\sum\frac{1}{a^8}\right)\ge\left(\sum a\right)\left(\sum\frac{1}{a}\right)$.

Mihály Bencze, Bucureşti

Rezolvare: Aplicăm inegalitatea $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$. Avem:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}+\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}+\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}$$

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}\ge\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{a}+\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}+\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}=\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}.$$

Deci $\left(\sum a^2\right)\left(\sum\frac{1}{a^2}\right)=3+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}\ge$

$$\ge 3+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}=\left(\sum a\right)\left(\sum\frac{1}{a}\right).$$

Rezultă $\left(\sum a^8\right)\left(\sum\frac{1}{a^8}\right)\ge\left(\sum a^4\right)\left(\sum\frac{1}{a^4}\right)\ge\left(\sum a^2\right)\left(\sum\frac{1}{a^2}\right)\ge\left(\sum a\right)\left(\sum\frac{1}{a}\right)$, Q.E.D.

G:731. **Dacă un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile a,b,c numere naturale, aria totală A_t, şi volumul V astfel încât $\frac{A_t-2}{V-(a+b+c)}=2$, atunci determinaţi aria totală minimă şi volumul minim al paralelipipedului.**

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Avem $\frac{A_t-2}{V-(a+b+c)}=2 \Leftrightarrow \frac{ab+bc+ca-1}{abc-(a+b+c)}=1$, de unde rezultă că:

$$b=1+\frac{2a+2c}{ac-a-c-1}.$$

Trebuie să avem $c\geq 2$. Dăm valori naturale lui c şi determinăm pe a astfel încât b să fie număr natural nenul. Obţinem $(c,a,b)\in\{(2,4,13),(2,5,8),(3,3,7),...\}$.

$A_{t,\min}=2(3\cdot 3+3\cdot 7+3\cdot 7)=102$ şi $V_{\min}=63$ şi se realizează pentru $(c,a,b)=(3,3,7)$. □

▪ Clasa a IX-a

L:522. **Să se determine $x,y\in\mathbb{Z}$ astfel încât $y^6-x(x+1)(x+2)(x+3)=40$.**

Constantina Prunaru, Roxana Vasile, Craiova

Rezolvare:

Relaţia dată este echivalentă cu $y^6-\left[x(x+1)(x+2)(x+3)+1\right]=39\Rightarrow$ $\left[y^3-(x^2+3x+1)\right]\left[y^3+(x^2+3x+1)\right]=39$. Analizând toate posibilităţile obţinem:

$$\begin{cases} y^3-(x^2+3x+1)=3 \\ y^3+(x^2+3x+1)=13 \end{cases} \Rightarrow 2y^3=16\Rightarrow y=\pm 2\Rightarrow x^2+3x+1=5\Rightarrow x\in\{-4;1\}.$$

L:523. **Arătaţi că $\sqrt[3]{108(3+2\sqrt{2})(2+\sqrt{3})(3+\sqrt{5})}<8+2(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6})$**

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Avem $\sqrt[3]{27\cdot 4(3+2\sqrt{2})(2+\sqrt{3})(3+\sqrt{5})}=3\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^2((1+\sqrt{3})^2(1+\sqrt{5})^2}=$

$=3\sqrt[3]{[(1+\sqrt{2})((1+\sqrt{3})][(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})](1+\sqrt{5})^2}\overset{MG<MA}{<}2(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{5})^2=$

$=8+2(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6})$.

L:524. **Fie $a_1,a_2,.....,a_n,\ n\geq 2,$ numere reale strict pozitive. Arătaţi că**

$$\frac{a_1+a_1a_2}{a_2+a_1a_2}+\frac{a_2+a_2a_3}{a_3+a_2a_3}+.....+\frac{a_n+a_na_1}{a_1+a_na_1}<\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+.....+\frac{a_{n-1}}{a_n}+n-1.$$

Iulia Sandu, Mircea Tereujanu, Craiova

Rezolvare: Observăm că

$$\frac{a_1+a_1a_2}{a_2+a_1a_2}-\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_1+a_1a_2-a_1-a_1}{a_2(1+a_1)}=\frac{a_1}{1+a_1}\cdot\frac{a_2-a_1}{a_2}=\frac{a_1}{1+a_1}\cdot\left(1-\frac{a_1}{a_2}\right).$$ Analog pentru celelalte.

Se observă că nu putem avea simultan $0<\frac{a_1}{a_2}<1,\ 0<\frac{a_2}{a_3}<1,.....,0<\frac{a_n}{a_1}<1,$

deoarece prin înmulţire membru cu membru obţinem

$1=\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\cdot\frac{a_3}{a_4}\cdot.....\cdot\frac{a_n}{a_1}\langle 1$. Aşadar, cel puţin una dintre funcţiile $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{a_2}{a_3}$, $\frac{a_3}{a_4}$, ..., $\frac{a_n}{a_1}$ este mai mare sau egal cu 1. Pentru oricare dintre ele avem: $\frac{a_k}{1+a_k}\left(1-\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)\le 0$.

L:525. **Fie** $a,b,c\rangle 0$ **astfel încât** $a+b+c=1$**. Demonstraţi că** $a^6+b^6+c^6+6a^2b^2c^2\le a^5+b^5+c^5$.

Marin Chirciu, Piteşti

Rezolvare: Inegalitatea este echivalentă cu $a^5(a-1)+b^5(b-1)+c^5(c-1)+6a^2b^2c^2\le 0$. Din a+b+c=1 rezultă, $a^5(-b-c)+b^5(-c-a)+c^5(-a-b)+6a^2b^2c^2\le 0\Leftrightarrow\ a^5(b+c)+b^5(c+a)+c^5(a+b)\ge 6a^2b^2c^2$.

Folosind inegalitatea mediilor, obţinem succesiv:

$a^5(b+c)+b^5(c+a)+c^5(a+b)\ge a^5\cdot 2\sqrt{bc}+b^5\cdot 2\sqrt{ca}+c^5\cdot 2\sqrt{ca}\ge 2\cdot 3\cdot\sqrt[3]{a^6b^6c^6}=6a^2b^2c^2$ cu egalitate când $a=b=c=\frac{1}{3}$.

L:526. **Dacă** $(a_n)_{n\ge 1}$ **este un şir de numere reale în progresie aritmetică atunci demonstraţi că:**

$$\frac{1}{(a_1+a_2)\cdot(a_2+a_3)}+\frac{1}{(a_2+a_3)\cdot(a_3+a_4)}+...+\frac{1}{(a_n+a_{n+1})\cdot(a_{n+1}+a_{n+2})}=$$

$$=\frac{n}{(a_1+a_2)\cdot(a_{n+1}+a_{n+2})},\forall n\ge 1$$

Constantin Ciobîcă, Fălticeni

Rezolvare:

$a_2+a_3=a_1+r+a_2+r=a_1+a_2+2\cdot r$; $\frac{1}{(a_1+a_2)\cdot(a_2+a_3)}=\frac{1}{2r}\cdot\left(\frac{1}{a_1+a_2}-\frac{1}{a_2+a_3}\right)$

$a_3+a_4=a_2+r+a_3+r=a_2+a_3+2r$; $\frac{1}{(a_2+a_3)\cdot(a_3+a_4)}=\frac{1}{2r}\cdot\left(\frac{1}{a_2+a_3}-\frac{1}{a_3+a_4}\right)$

$$\frac{1}{(a_n+a_{n+1})\cdot(a_{n+1}+a_{n+2})}=\frac{1}{2r}\cdot\left(\frac{1}{a_n+a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+1}+a_{n+2}}\right)$$

$$S=\frac{1}{2r}\cdot\left(\frac{1}{a_1+a_2}-\frac{1}{a_2+a_3}+\frac{1}{a_2+a_3}-\frac{1}{a_3+a_4}+...+\frac{1}{a_n+a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+1}+a_{n+2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2r}\cdot\left(\frac{1}{a_1+a_2}-\frac{1}{a_{n+1}+a_{n+2}}\right)=\frac{a_{n+1}+a_{n+2}-a_1-a_2}{2r\cdot(a_1+a_2)\cdot(a_{n+1}+a_{n+2})}=\frac{n}{(a_1+a_2)\cdot(a_{n+1}+a_{n+2})}$$

L:527. **Fie** $a,b,c>0$**. Să se demonstreze inegalitatea** $\sum\frac{ac(b+c)}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}\le a+b+c$**.**

Mihály Bencze, Bucureşti

Rezolvare: Aplicăm inegalitatea C-B-S şi deducem că $(a^2+b^2)(c^2+a^2)\ge(ac+ab)^2$.

Rezultă $\sum\frac{ac(b+c)}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}\le\sum\frac{ac(b+c)}{a(b+c)}=\sum a=a+b+c$, q.e.d.

L:528. **Arătaţi că dacă** $a_i>0\ \left(i=\overline{1,n}, n\ge 3\right)$ **şi** $a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_n=1$**, atunci**

$$\frac{1}{1+2a_1}+\frac{1}{1+2a_2}+...+\frac{1}{1+2a_n}\ge 1.$$

Neculai Stanciu, Buzău**, Titu Zvonaru,** Comăneşti

Rezolvare: Fără să pierdem din generalitate presupunem că $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$. Atunci, $a_1a_2a_3 \le 1$, deci există un număr pozitiv $k \le 1$ astfel încât $a_1a_2a_3 = k^3$. Luăm

$$a_1 = \frac{knp}{m^2},\ a_2 = \frac{kmp}{n^2},\ a_3 = \frac{kmn}{p^2}.$$

şi avem că $\frac{1}{1+2a_1} + \frac{1}{1+2a_2} + ... + \frac{1}{1+2a_n} > \frac{1}{1+2a_1} + \frac{1}{1+2a_2} + \frac{1}{1+2a_3} =$

$$= \frac{m^2}{m^2+2knp} + \frac{n^2}{n^2+2kmp} + \frac{p^2}{p^2+2kmn} \ge \frac{m^2}{m^2+2np} + \frac{n^2}{n^2+2mp} + \frac{p^2}{p^2+2mn} \ge$$

$$\ge \frac{(m+n+p)^2}{m^2+2np+n^2+2mp+p^2+2mn} = 1,$$

unde ultima inegalitate rezultă din inegalitatea lui *Harald Bergström*.

L:529. **Pentru** $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ **considerăm mulțimea** $A = \{xy+2y^2+yz, xy+yz+2xz, y^2+xz+2yz, y^2+2xy+xz\}$ **şi notăm cu** $E = 2\sqrt{xy(y^2+z^2)+yz(x^2+y^2)}$. **Să se arate că oricum am alege** $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ **:**

a) cel puțin două dintre elementele mulțimii A sunt mai mari sau egale decât E .

b) cel puțin un element al mulțimii A este mai mic sau egal decât E .

Vasile Jiglău, Arad

Rezolvare:

a) Notăm elementele mulțimii A astfel :

$A_1 = xy+2y^2+yz;\quad A_2 = xy+yz+2xz;\quad A_3 = y^2+xz+2yz;\quad A_4 = y^2+2xy+xz;$

Observăm ca $A_1 + A_2 = A_3 + A_4 = 2y^2+2xy+2yz+2xz$

Conform inegalității mediilor

$$y^2+xy+yz+zx = (y^2+xz)+(xy+yz) \ge 2\sqrt{(xy+yz)(y^2+xz)} = 2\sqrt{xy(y^2+z^2)+yz(x^2+y^2)}$$

Deci : $A_1 + A_2 \ge 2E$ si $A_3 + A_4 \ge 2E$, de unde rezultă că $\max\{A_1, A_2\} \ge E$ şi $\max\{A_3, A_4\} \ge E$, de unde şi concluzia din enunțul problemei .

b) Conform inegalității mediilor avem $xy^3 + xyz^2 \ge 2xy^2z$. Adunăm în ambele părți ale inegalității $x^2yz + y^3z$ şi obținem :

$$x^2yz + y^3z + xy^3 + xyz^2 \ge x^2yz + y^3z + 2xy^2z \Leftrightarrow xy(y^2+z^2)+yz(x^2+y^2) \ge (y^2+xy)(xz+yz) \Rightarrow$$

$$xy(y^2+z^2)+yz(x^2+y^2) \ge \min^2\{y^2+xy, xz+yz\}$$

Deci : $\sqrt{xy(y^2+z^2)+yz(x^2+y^2)} \ge \min\{y^2+xy, xz+yz\}$ (1)

Asemănător : $\sqrt{xy(y^2+z^2)+yz(x^2+y^2)} \ge \min\{y^2+yz, xy+xz\}$ (2)

Aplicăm următorul rezultat : $\min\{a_1,a_2\} + \min\{a_3,a_4\} = \min\{a_1+a_3, a_1+a_4, a_2+a_3, a_2+a_4\}$

Adunând (1) cu (2) , obținem :

$$2\sqrt{xy(y^2+z^2)+yz(x^2+y^2)} \ge \min\{y^2+xy, xz+yz\} + \min\{y^2+yz, xy+xz\} =$$

$$= \min\{y^2+xy+y^2+yz, y^2+xy+xy+xz, xz+yz+y^2+yz, xz+yz+xy+xz\} =$$

$$= \min\{2y^2+xy+yz, y^2+2xy+xz, y^2+xz+2yz, xy+yz+2xz\} = \min A$$

Deci, $E \ge \min A$; aşadar E e mai mare sau egal decât cel puțin un element al mulțimii A , q.e.d.

L:530. **În triunghiul ABC cu** $AB > AC$ **şi** $m(\sphericalangle A) = 108^0$, **se consideră mediana** $[AM]$ **şi simediana** $[AN]$, **unde** $M, N \in (BC)$. **Calculați** $\frac{AB}{AC}$ **în cazul în care** $[AM]$ **sau** $[AN]$ **este trisectoare a unghiului** $\sphericalangle A$ **.**

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Dacă $[AD]$, $D \in (BC)$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$, atunci, simediana $[AN]$ este simetrica medianei $[AM]$ faşă de bisectoarea $[AD]$. Rezultă că $m(\sphericalangle BAM) = m(\sphericalangle CAN)$, iar dacă una dintre $[AM]$ sau $[AN]$ este trisectoare, atunci, ambele sunt trisectoare, deci $m(\sphericalangle BAM) = m(\sphericalangle MAN) = m(\sphericalangle NAC) = \frac{1}{3} \cdot m(\sphericalangle A) = \frac{1}{3} \cdot 108^0 = 36^0$.

Cum $[AM]$ mediană, rezultă $S_{ABM} = S_{AMC} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AM \cdot \sin\frac{A}{3} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AM \cdot \sin\frac{2A}{3} \Rightarrow$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin\frac{2A}{3}}{\sin\frac{A}{3}} = \frac{2\sin\frac{A}{3} \cdot cos\frac{A}{3}}{\sin\frac{A}{3}} = 2\cos\frac{A}{3} = 2\cos 36^0 = 2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{4} = 1,68033 .$$

L:531. **Un triunghi ABC este isoscel,dacă şi numai dacă raportul dintre mediana şi bisectoarea interioară din A este egal cu raportul dintre media aritmetică şi media geometrică ale laturilor [AB] şi [AC].**

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Cu notațiile uzuale într-un triunghi ABC avem: $\frac{m_a}{l_a} = \frac{\frac{b+c}{2}}{\sqrt{bc}} \Leftrightarrow \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 l_a^2 = bc \cdot m_a^2$.

Din faptul că $l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ şi $m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$ avem:

$$4m_a^2 = 2(b^2+c^2) - a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A = b^2 + c^2 + 2bc\left(2\cos^2\frac{A}{2} - 1\right) = (b-c)^2 + 4bc\cos^2\frac{A}{2} =$$

$$= (b-c)^2 + 4bc\frac{(b+c)^2 l_a^2}{4b^2c^2} = (b-c)^2 + \frac{(b+c)^2}{bc} l_a^2 \geq \frac{(b+c)^2}{bc} l_a^2 ,$$

de unde rezultă că $2m_a \geq \frac{b+c}{\sqrt{bc}} l_a \Leftrightarrow \frac{m_a}{l_a} \geq \frac{\frac{b+c}{2}}{\sqrt{bc}}$. Cum egalitatea în inegalitate are loc pentru triunghiul ABC isoscel(b = c), rezultă cerința problemei. Implicația inversă este evidentă.

▪ Clasa a X-a

L:532. **Determinați numerele complexe z astfel încât să fie îndeplinite simultan relațiile:**

$$\begin{cases} 2 \cdot z^{2017} - |z| = 1 \\ z^{2016} + |z| = 2 \end{cases} .$$

Lucian Tuțescu, Craiova

Rezolvare:

$2 = |2| = \left|z^{2016} + |z|\right| \leq |z|^{2016} + |z| \Rightarrow |z| \geq 1$. (1). (Altfel, $|z| < 1$ şi $|z|^{2016} + |z| < 2$)

Din $2 \cdot z^{2017} = |z| + 1$ rezultă $2 \cdot |z|^{2017} \leq 1 + |z| \Rightarrow |z| \leq 1$ (2).

Din (1) şi (2) rezultă $|z| = 1 \Rightarrow$ prin înlocuire în sistem, $z^{2017} = 1$, $z^{2016} = 1 \Rightarrow z = 1$.

L:533. Rezolvați ecuația $4^{x^4} + 4^{\frac{x+1}{x}} = 20$. **Marin Chirciu**, Piteşti

Rezolvare:

Evident, $x \neq 0$. Dacă $x\langle 0 \Rightarrow 4^{x^4}\langle 1,\ 4^{1+\frac{1}{x}}\langle 4 \Rightarrow 4^{x^4}+4^{\frac{x+1}{x}}\langle 5$, deci ecuația nu are soluții.

Dacă $x\rangle 0 \Rightarrow 4^{x^4}+4^{1+\frac{1}{x}}=4^{x^4}+4\cdot 4^{\frac{1}{x}}=4^{x^4}+4^{\frac{1}{x}}+4^{\frac{1}{x}}+4^{\frac{1}{x}}+4^{\frac{1}{x}}\geq 5\sqrt[5]{4^{x^4}\cdot\left(4^{\frac{1}{x}}\right)^4}\geq 5\cdot 4^{\frac{x^4+\frac{4}{x}}{5}}\geq 5\cdot 4=20$, cu

egalitate când $x^4=\frac{4}{x}\Leftrightarrow x^5=1\Rightarrow x=1$. Deducem că x = 1 este soluția unică a ecuației.

L:534. **Dacă** $a,b,c\in(1,\infty)$ **sau** $a,b,c\in(0,1)$ **atunci:**

$$\sqrt{\log_a abc}+\sqrt{\log_{abc} a}+\sqrt{\log_b abc}+\sqrt{\log_{abc} b}+\sqrt{\log_c abc}+\sqrt{\log_{abc} c}\geq 4\sqrt{3}.$$

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Avem: $x=\sqrt{\log_a abc}+\sqrt{\log_b abc}+\sqrt{\log_c abc}=$

$$\sqrt{1+\log_a b+\log_a c}+\sqrt{1+\log_b a+\log_b c}+\sqrt{1+\log_c a+\log_c b}\geq$$

$$3\sqrt[6]{(1+\log_a b+\log_a c)(1+\log_b a+\log_b c)(1+\log_c a+\log_c b)}\geq$$

$$\geq 3\sqrt[6]{27\sqrt[3]{\log_a b\log_a c\log_b a\log_b c\log_c a\log_c b}}=3\sqrt[6]{27}=3\sqrt{3};$$

$$y=\sqrt{\log_{abc} a}+\sqrt{\log_{abc} b}+\sqrt{\log_{abc} c}\leq 3\sqrt{\frac{\log_{abc} a+\log_{abc} b+\log_{abc} c}{3}}=3\sqrt{\frac{\log_{abc} abc}{3}}=\sqrt{3}<3\sqrt{3}$$

(conform inegalității între mediile aritmetică şi pătratică).

Din cele două inegalități obținute pentru x şi y deducem:

$$(x-3\sqrt{3})(y-3\sqrt{3})\leq 0\Leftrightarrow xy-3\sqrt{3}(x+y)+27\leq 0\Leftrightarrow x+y\geq\frac{xy}{3\sqrt{3}}+3\sqrt{3}. \qquad (*)$$

Pe de altă parte $xy=\left(\sqrt{\log_a abc}+\sqrt{\log_b abc}+\sqrt{\log_c abc}\right)\left(\sqrt{\log_{abc} a}+\sqrt{\log_{abc} b}+\sqrt{\log_{abc} c}\right)=$

$$\left(\sqrt{\log_a abc}+\sqrt{\log_b abc}+\sqrt{\log_c abc}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{\log_a abc}}+\sqrt{\frac{1}{\log_b abc}}+\sqrt{\frac{1}{\log_c abc}}\right)\geq 9,$$

şi atunci inegalitatea (*) devine: $x+y\geq\frac{9}{3\sqrt{3}}+3\sqrt{3}=4\sqrt{3},$ adică ceea ce trebuia demonstrat.

L:535. Dacă ABC **este un triunghi (cu notațiile uzuale) atunci este adevărată inegalitatea**

$$\frac{b+c}{a^5}+\frac{c+a}{b^5}+\frac{a+b}{c^5}\geq\frac{2}{3R^4}.$$

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Avem $\sum_{cyclic}\frac{b+c}{a^5}+\sum_{cyclic}\frac{1}{a^4}=\sum_{cyclic}\left(\frac{b+c}{a^5}+\frac{1}{a^4}\right)=(a+b+c)\cdot\sum_{cyclic}\frac{1}{a^5}=$

$$=(a+b+c)\cdot\sum_{cyclic}\frac{\frac{1}{a^4}}{a}\overset{Bergstrom}{\geq}(a+b+c)\cdot\frac{\left(\sum_{cyclic}\frac{1}{a^2}\right)^2}{a+b+c}=\left(\sum_{cyclic}\frac{1}{a^2}\right)^2=$$

$$=\sum_{cyclic}\frac{1}{a^4}+2\cdot\sum_{cyclic}\frac{1}{a^2b^2}\overset{Bergstrom}{\geq}\sum_{cyclic}\frac{1}{a^4}+\frac{2}{3}\left(\sum_{cyclic}\frac{1}{ab}\right)^2,\ (1).$$

Avem $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{2s}{4RF}=\frac{s}{2Rsr}=\frac{1}{2Rr}\overset{Euler}{\geq}\frac{1}{R^2}$, (2). Din (1) şi (2) deducem

$$\sum_{cyclic}\frac{b+c}{a^5}+\sum_{cyclic}\frac{1}{a^4}\geq\sum_{cyclic}\frac{1}{a^4}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{R^2}\right)^2\Leftrightarrow\sum_{cyclic}\frac{b+c}{a^5}\geq\frac{2}{3R^4},\ \text{q.e.d.}$$

L:536. **Să se rezolve sistemul** $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{x+2}=\sqrt{y-3}+\sqrt{y-1}\\ 2(x^2+y^2)+3(x+y)=79\end{cases}$.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: Fie x = y-3 atunci, din prima ecuație observăm că $f(x)=f(y-3)$. Aşadar, y = x+3 şi se înlocuieşte în ecuația a doua: $2(x^2+(x+3)^2)+3(x+x+3)=79\Rightarrow\ 2x^2+9x-26=0\Rightarrow$ $x=2\Rightarrow\ (x;y)\in\{(2;3)\}$.

L:537. **Să se demonstreze că în orice triunghi** ABC **este adevărată inegalitatea**

$$\sum\frac{m_b-m_c}{(m_a+m_b)(2\sin^2 A+2\sin^2 B-\sin^2 C)}\geq 0\,.$$

Mihály Bencze, Bucureşti

Soluție. Avem $2\sin^2 A+2\sin^2 B-\sin^2 C=\frac{1}{4R^2}(2a^2+2b^2-c^2)=\frac{m_c^2}{R^2}$.

Notăm $x=m_a, y=m_b, z=m_c, x,y,z>0$; inegalitatea de demonstrat devine succesiv:

$$\frac{y-z}{z^2(x+y)}+\frac{z-x}{x^2(y+z)}+\frac{x-y}{y^2(z+x)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2(y^2-z^2)(z+x)+y^2z^2(z^2-x^2)(x+y)+z^2x^2(x^2-y^2)(y+z)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2y^4z+x^3y^4-x^2y^2z^3-x^3y^2z^2+xy^2z^4+y^3z^4-x^3y^2z^2-x^2y^3z^2+$$
$$+x^4yz^2+x^4z^3-x^2y^3z^2-x^2y^2z^3\geq 0$$

$\Leftrightarrow x^2z(y^2-xz)^2+xy^2(z^2-xy)^2+yz^2(x^2-yz)^2\geq 0$, care este adevărată.

L:538. **Să se determine mulțimea triunghiurilor în care avem relația** $2a=b+c$**, notațiile fiind cele uzuale.**

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

Soluție. Utilizând teorema sinusurilor cât şi formulele de transformare a sumelor în produs avem:

$$2a=b+c\Leftrightarrow 2\sin A=\sin B+\sin C\Leftrightarrow 2\sin A=2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\Leftrightarrow\cos\frac{A}{2}\left(2\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{B-C}{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{B-C}{2}=0\quad\left(\cos\frac{A}{2}\neq 0\right)\Leftrightarrow 2\cos\frac{B+C}{2}-\cos\frac{B-C}{2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=3\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\Leftrightarrow tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=\frac{1}{3}.$$

Sunt triunghiuri care verifică condiția obținută?

Pentru $B=\frac{\pi}{3}\Rightarrow C=\frac{\pi}{3}$ şi deci triunghiul echilateral verifică egalitatea din enunț.

Soluția problemei este: $S=\left\{\Delta ABC\,\middle|\,B,C\in(0,\pi),B+C\in(0,\pi),tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=\frac{1}{3}\right\}$.

L:539. **Rezolvați în** $\mathbb{N}^*$**, ecuația:** $tg^2\frac{\pi}{4n}+tg^2\frac{3\pi}{4n}+\ldots+tg^2\frac{5\pi}{4n}=5n$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Dacă n = 1 , membrul stâng este egal cu 3, deci, 1 nu este soluție.

Dacă n = 2, avem $tg\frac{\pi}{8}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$.

$tg\frac{3\pi}{8}=ctg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)=ctg\frac{\pi}{8}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$, $tg\frac{5\pi}{8}=tg\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)=-tg\frac{3\pi}{8}=-\sqrt{2}-1$.

Rezultă, $\left(tg\frac{\pi}{8}\right)^2+\left(tg\frac{3\pi}{8}\right)^2+\left(tg\frac{5\pi}{8}\right)^2=9+2\sqrt{2}\neq 10$.

Pentru n = 3 se obține că $tg\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}=2-\sqrt{3}$, $tg\frac{3\pi}{12}=tg\frac{\pi}{4}=1$ și

$tg\frac{5\pi}{12}=ctg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}\right)=ctg\frac{\pi}{12}=\frac{1}{tg\frac{\pi}{12}}=2+\sqrt{3}$.

În acest caz se obține că n=3 este soluție a ecuației date.

Pentru $n\geq 4$, observăm că funcțiile $x\to tg^2\frac{k\pi}{x}$, $x\rangle 0$, $k\in\{1;3;5\}$, $\frac{k\pi}{x}\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, sunt strict descrescătoare în timp ce funcția $n\to 5n$ este strict crescătoare pe $\mathbb{N}^*$. Prin urmare, singura soluție rămâne n=3.

L:540. **Fie** $n,k\in\mathbb{N}$ **astfel încât** $2\leq k\leq n-1$**. Arătați că** $1\langle\sqrt[n]{n}\langle 1+\frac{k\cdot\sqrt[n]{n}}{n}-\frac{k}{n}$**.**

Ileana Didu, Camelia Dană, Craiova

Rezolvare: $1\langle\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{\sqrt[k]{n}\cdot\sqrt[k]{n}\cdot.....\cdot\sqrt[k]{n}\cdot\underbrace{1\cdot1\cdot....\cdot1}_{n-k\ de\ 1}}\langle\frac{k\cdot\sqrt[k]{n}+n-k}{n}=1+\frac{k\sqrt[k]{n}}{n}-\frac{k}{n}$.

L:541. **Fie** $n_1,n_2,.....,n_k\in\mathbb{N},n\geq 2,k\in\mathbb{N},k\geq 2$ **astfel încât** $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+...+\frac{1}{n_k}=1$**. Arătați că** $\sqrt[n_1]{n_1}+\sqrt[n_2]{n_2}+....+\sqrt[n_k]{n_k}\langle 2k-1$.

Doina Popescu, Rm. Vâlcea, **Roxana Vasile**, Craiova

Rezolvare:

$\sqrt[n_1]{n_1}=\sqrt[n_1]{n_1\cdot1\cdot1\cdot.....\cdot1}\langle\frac{n_1+n_1-1}{n_1}=2-\frac{1}{n_1}$, $\sqrt[n_2]{n_2}=\sqrt[n_2]{n_2\cdot1\cdot1\cdot.....\cdot1}\langle\frac{n_2+n_2-1}{n_2}=2-\frac{1}{n_2}$, ...,

$\sqrt[n_k]{n_k}=\sqrt[n_k]{n_k\cdot1\cdot1\cdot.....\cdot1}\langle\frac{n_k+n_k-1}{n_k}=2-\frac{1}{n_k}$.

Prin adunarea relațiilor, rezultă $\sum_{i=1}^{k}\sqrt[n_i]{n_i}\langle 2k-\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+....+\frac{1}{n_k}\right)=2k-1$.

▪ Clasa a XI-a

L:542. **Fie** $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Z})$.

a) Să se arate că matricea A^{2^n} **este inversabilă şi** $(A^{2^n})^{-1}=A^{2^{n-1}},\ \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$

b) Arătați că $\det(A-A^2+A^3-.....-A^{2016}+A^{2017})=\det A-\det A^2+\det A^3-.....-\det A^{2016}+\det A^{2017}$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: a) Cum $\det A=1\neq 0\Rightarrow A^{2^n}$ este inversabilă. $Tr(A)=-1+2=1,$ din relația Hamilton- Cayley $A^2-(TrA)\cdot A+(\det A)\cdot I_2=O_2\Rightarrow$

$$A^2=A-I_2\Rightarrow A^3=-I_2\Rightarrow A^{2^n}\cdot A^{2^{n-1}}=A^{2^n+2^{n-1}}=A^{3\cdot 2^{n-1}}=\left(A^3\right)^{2^{n-1}}=(-I_2)^{2^{n-1}}=I_2,$$

rezultă că $(A^{2^n})^{-1}=A^{2^{n-1}},\ \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$.

b) Cum $A-A^2+A^3=I_2+A^3=O_2\Rightarrow\ A-A^2+A^3-.....-A^{2016}+A^{2017}=$

$=(A-A^2+A^3)-A^3(A-A^2+A^3)+A^6(A-A^2+A^3)-.....-A^{2013}(A-A^2+A^3)+A^{2017}=A^{2017}$.

Aşadar, $\det(A-A^2+A^3-.....-A^{2016}+A^{2017})=\det(A^{2017})=1$, iar

$\det A-\det A^2+\det A^3-.....-\det A^{2016}+\det A^{2017}=(1-1)+(1-1)+...+(1-1)+1=1$.

L:543. **Să se arate că** $\left(\frac{x}{z}\right)^y\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^z\cdot\left(\frac{z}{y}\right)^x\leq 1$**, pentru orice numere reale nenule** x,y,z **cu** $x>y>z$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

***Rezolvare*:** Considerăm $x,y,z\in[a,b]$, unde $x>y>z$, funcția reală f şi determinantul:

$D=\begin{vmatrix}x & f(x) & 1\\ y & f(y) & 1\\ z & f(z) & 1\end{vmatrix}$. Se ştie că dacă f este convexă atunci $D>0$, şi dacă f este concavă atunci $D<0$.

Dacă luăm funcția concavă $f(x)=\ln x$, obținem deci $D=\begin{vmatrix}x & \ln x & 1\\ y & \ln y & 1\\ z & \ln z & 1\end{vmatrix}<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(y-z)\ln x+(z-x)\ln y+(x-y)\ln z\leq 0\Leftrightarrow x^{y-z}\cdot y^{z-x}\cdot z^{x-y}\leq 1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\frac{x}{z}\right)^y\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^z\cdot\left(\frac{z}{y}\right)^x\leq 1$. Egalitatea are loc pentru $x=y=z=1$.□

L:544. **Se consideră matricea** $A=\begin{pmatrix}a-1 & a & a-1\\ 1 & a & -a\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$. **Să se arate că ecuația** $X^{2016}+X^{2018}=A^{2017}$**, nu are soluții în** $M_3(\mathbb{R})$.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: Se observă că $\det(A)=-4a^2+4a-1\leq 0\Leftrightarrow\Delta\leq 0$. Cum det (A) = 0 iar $\det X^{2016}(X^2+I_2)\rangle 0$ rezultă că ecuația dată nu are soluții.

L:545. **Se consideră şirul**

$$x_{nm}=\frac{1+2+...+(n-1)}{n}+\frac{1^2+2^2+...+(n-1)^2}{n^2}+...+\frac{1^m+2^m+...+(n-1)^m}{n^m},\ \forall n\geq 2,m\geq 1.$$

Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to 0}\left(\lim\limits_{m\to\infty} x_{nm}\right)$. **Constantin Ciobîcă**, Fălticeni

Rezolvare:

$$x_{nm}=\left(\frac{1}{n}+\frac{1^2}{n^2}+\ldots+\frac{1^m}{n^m}\right)+\left(\frac{2}{n}+\frac{2^2}{n^2}+\ldots+\frac{2^m}{n^m}\right)+\ldots+\left[\frac{n-1}{n}+\frac{(n-1)^2}{n^2}+\ldots+\frac{(n-1)^m}{n^m}\right]=$$

$$=\left[\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{n}\right)^m\right]+\left[\frac{2}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{2}{n}\right)^m\right]+\ldots+\left[\frac{n-1}{n}+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^m\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^m-1}{\frac{1}{n}-1}+\frac{2}{n}\cdot\frac{\left(\frac{2}{n}\right)^m-1}{\frac{2}{n}-1}+\ldots+\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^m-1}{\frac{n-1}{n}-1}$$

$$\lim_{m\to\infty} x_{nm}=\frac{1}{n}\cdot\frac{-1}{\frac{1}{n}-1}+\frac{2}{n}\cdot\frac{-1}{\frac{2}{n}-1}+\ldots+\frac{n-1}{n}\cdot\frac{-1}{\frac{n-1}{n}-1}=\ =\frac{1}{n-1}+\frac{2}{n-2}+\ldots+\frac{n-2}{2}+n-1$$

$$\lim_{n\to 0} x_{nm}=\lim_{n\to 0}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{2}{n-2}+\ldots+\frac{n-2}{2}+\frac{n-1}{1}\right)=\underbrace{(-1)+(-1)+\ldots+(-1)}_{de\ n-1\ ori}=1-n$$

L:546. **Să se calculeze:** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{p}\frac{n-k}{A_n^k}\right)^{A_n^p}$, $p\in N^*$, **fixat**.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare : Deoarece

$$\frac{n-k}{A_n^k}=\frac{n-k}{\frac{n!}{(n-k)!}}=\frac{(n-k)!(n-k)}{n!}=\frac{(n-k)!(n-k+1-1)}{n!}=\frac{(n-k)!(n-k+1)-(n-k)!}{n!}=\ =\frac{(n-k+1)!}{n!}-\frac{(n-k)!}{n!}=\frac{1}{A_n^{k-1}}-\frac{1}{A_n^k},$$

atunci, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{p}\frac{n-k}{A_n^k}\right)^{A_n^p}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{A_n^{k-1}}-\frac{1}{A_n^k}\right)\right)^{A_n^p}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{A_n^p}\right)^{A_n^p}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}-\frac{A_n^p}{A_n^p}}=\frac{1}{e}.$

▪ Clasa a XII-a

L:547. **Să se rezolve în** $\mathbb{R}$ **ecuația** $x^5-500x^3+50000x-400000=0$**, şi să se arate că soluțiile aparțin intervalului** $(20;30)$**.**

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Se face transformarea $x=10y$, atunci, ecuația dată devine $10^5y^5-5\cdot 10^5y^3+5\cdot 10^5y-4\cdot 10^5=0\Rightarrow$ $y^5-5\cdot y^3+5\cdot y-4=0.$ Cu ajutorul derivatelor se arată că funcția $f(y)=y^5-5y^3+5y-4$ este strict crescătoare pe $[2;\infty)$. Aşadar, ecuația f(y)=0 are o singură soluție reală , $y\in(2;3)$ deoarece $f(-2)=-2<0$ iar $f(3)=119>0$.

Aceasta este $y=\sqrt[5]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[5]{2-\sqrt{3}}$ deoarece $y^5=5\cdot y^3-5\cdot y+4.$ Atunci, $x=10(\sqrt[5]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[5]{2-\sqrt{3}})\in(20;30)$.

L:548. **Dacă** $f(X)=\sum_{k-0}^{n}a_kX^k\in Z[X]$, $f(-1)=0$ **şi** $f(\sqrt{2})\in Z$ **arătaţi că** $f(1)+a_1$ **este număr par.**

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Deoarece $f(-1)=0$, rezultă că $\sum a_{2k}=\sum a_{2k+1}$. Aşadar $f(1)=$par.

Deoarece $f(\sqrt{2})\in Z$, rezultă că $\sum a_{2k+1}2^k=0$. Aşadar, a_1=par. Deci, $f(1)+a_1$ este număr par.

L:549. **Să se calculeze** $\int\frac{1-x^2}{x^4+4x^3+7x^2+4x+1}dx$.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare:Observăm că

$$\int\frac{1-x^2}{x^4+4x^3+7x^2+4x+1}dx=\int\frac{1-x^2}{(x^2+2x+1)^2+x^2}dx=\int\frac{\frac{1-x^2}{x^2+2x+1}}{1+(\frac{x}{x^2+2x+1})^2}dx=arctg\frac{x}{x^2+2x+1}+C.$$

L:550. **Se dă şirul** $b_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, $n\in N^*$. **Să se demonstreze că** $b_n\in\left(\ln(1+\sqrt{2}),\ln 2\right)$.

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Considerăm şirurile $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$, $c_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$. Avem evident inegalităţile:

$$a_n<b_n<c_n,\ \forall n\in N^*\Leftrightarrow\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k^2}{n^2}}}<b_n<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}.$$

Observăm că şirurile a_n şi c_n sunt sume Riemann referitoare la funcţiile $f,g:[0,1]\to R$ unde

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $g(x)=\frac{1}{1+x}$; diviziunea $\Delta_n=\left(0,\frac{1}{n},...,\frac{n-1}{n},1\right)$ şi punctele intermediare $\xi_n=\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n}{n}\right)$. Deoarece funcţiile f şi g sunt inegrabile (pentru că sunt continue) avem:

$$a_n\to\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\ln(x+\sqrt{x^2+1})\Big|_0^1=\ln(1+\sqrt{2}),\ c_n\to\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\ln(x+1)\Big|_0^1=\ln 2.$$

Deci, $\ln(1+\sqrt{2})<b_n<\ln 2$.

L:551. **Să se calculeze integrala** $\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\frac{x^2\ln x}{(x+2)^6}dx.$ **Gheorghe Ghiţă,** Buzău

Rezolvare: Efectuând schimbarea de variabilă $x=\frac{4}{t}\Rightarrow dx=-\frac{4}{t^2}dt,$ integrala dată I devine:

$$I=\int_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{\frac{16}{t^2}\ln\frac{4}{t}}{\left(\frac{4}{t}+2\right)^6}\cdot\frac{-4}{t^2}dt=\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\frac{t^2\ln\frac{4}{t}dt}{(t+2)^6}=\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\frac{t^2\ln 4}{(t+2)^6}dt-\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\frac{t^2\ln t}{(t+2)^6}dt\Rightarrow 2I=(\ln 4)\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\frac{x^2dx}{(x+2)^6}=$$

$$(\ln 4)\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\frac{x^2+4x+4-4x-8+4}{(x+2)^6}dx=(\ln 4)\left(\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\frac{dx}{(x+2)^4}-4\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\frac{dx}{(x+2)^5}+4\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\frac{dx}{(x+2)^6}\right)=$$
$$=(\ln 4)\left(\frac{-1}{3(x+2)^3}+\frac{1}{(x+2)^4}-\frac{4}{5(x+2)^5}\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}=$$
$$=(\ln 4)\left(\frac{27-19\sqrt{2}}{24}-\frac{51-36\sqrt{2}}{16}+\frac{273-193\sqrt{2}}{40}\right)=\frac{1843-808\sqrt{2}}{240}\ln 4.$$

L:552. **Să se determine o primitivă a funcției**

$f:[4,\infty)\to R,\ f(x)=\sqrt{x+4\cdot\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\cdot\sqrt{x-4}}$ **care îndeplinește condiția** $F(40)=2305$**.**

Constantin Ciobîcă, Fălticeni

Rezolvare: $f(x)=\sqrt{x-4+4\cdot\sqrt{x-4}+4}+\sqrt{x-4+4\cdot\sqrt{x-4}+4}=$

$$=\sqrt{\sqrt{x-4}^2+4\cdot\sqrt{x-4}+4}+\sqrt{\sqrt{x-4}^2-4\cdot\sqrt{x-4}+4}=\sqrt{\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2}=$$

$=\left|\sqrt{x-4}+2\right|+\left|\sqrt{x-4}-2\right|=\begin{cases}2\cdot\sqrt{x-4}, & x\geq 8\\ 4, & x\in[4,8)\end{cases}$. Funcția f este continuă pe intervalul $[4,\infty)$.

$x\in[4,8)\Rightarrow f(x)=4$ este funcție continuă ca funcție elementară.

$x\in(8,\infty)\Rightarrow f(x)=2\cdot\sqrt{x-4}$ este funcție continuă ca funcție elementară.

Problema continuității se pune în $x_0=8$.

$l_s(8)=\lim\limits_{\substack{x\to 8\\ x<8}}4=4;\quad l_d(8)=\lim\limits_{\substack{x\to 8\\ x>8}}2\sqrt{x-4}=2\cdot\sqrt{8-4}=4;\quad f(8)=2\cdot\sqrt{8-4}=4\Rightarrow l_s(8)=l_d(8)=f(8)\Rightarrow$

Funcția f este continuă pe intervalul $[4,\infty)$.

$$F(x)=\int f(x)dx\Rightarrow F(x)=\begin{cases}4/3\cdot\sqrt{(x-4)^3}+c_1, & x\geq 8\\ 4x+c_2, & x\in[4,8)\end{cases}$$

$F(40)=2305\Rightarrow F(40)=288+c_1\Rightarrow c_1=2017$

$F(x)=\begin{cases}\frac{4}{3}\cdot\sqrt{(x-4)^3}+2017, & x\geq 8\\ 4x+c_2, & x\in[4,8)\end{cases}$ Funcția F este derivabilă pe intervalul $[4,\infty)$, atunci funcția F este continuă pe intervalul $[4,\infty)$.

$x\in[4,8)\Rightarrow F(x)=4x+c_2$ este funcție continuă ca funcție elementară.

$x\in(8,\infty)\Rightarrow F(x)=\frac{4}{3}\cdot\sqrt{(x-4)^3}+2017$ este funcție continuă ca funcție elementară.

Problema continuității se pune în punctul $x_0=8$.

$l_s(8)=\lim\limits_{\substack{x\to 8\\ x<8}}(4x+c_2)=32+c_2$

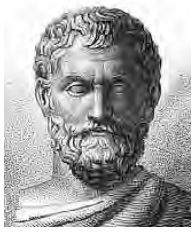
$l_d(8)=\lim\limits_{\substack{x\to 8\\ x>8}}\left(\frac{4}{3}\cdot\sqrt{(x-4)^3}+2017\right)=6083/3$

$F(8)=6083/3$

$l_s(8)=l_d(8)=F(8)\Rightarrow 32+c_2=\frac{6083}{3}\Rightarrow c_2=\frac{5987}{3}$

$$\Rightarrow F(x)=\begin{cases}\frac{4}{3}\cdot\sqrt{(x-4)^3}+2017, & x\geq 8\\ 4x+\frac{5987}{3}, & x\in[4,8)\end{cases}.$$

**„ Fericirea corpului e în sănătate,
fericirea minții e în știință”.
Thales
(624- 546 î.e.n)**



5. Probleme propuse

▪ Clasa a V-a

G:732. Aflați $n \in \mathbb{N}$, dacă $7^{1+2+3+....+n}$ este pătrat perfect. **Ion Stănescu**, Buzău

G:733. Să se determine numerele naturale m şi n ştiind că
$m^2(n+3)+\left(1+2^2+2^3+...+2^{2016}\right):\left[2^{2017}-\left(2^0\right)^{2016}\right]=31214$. **Iuliana Traşcă**, Olt

G:734. Proiectul de matematică Știință şi Caracter din Școala noastră, are capitolele 1) Planificare, 2) Parteneri, 3) Cursuri, 4) Corespondența la Gazeta Matematică, 5) Tabăra de Matematică şi Expediția Aura Pădurii, 6) Evaluare şi câte un număr de teme pentru fiecare. Capitolul 1 conține $\frac{1}{5}$ *din numărul temelor, capitolul 2,* $\frac{1}{8}$ *din rest,* capitolul 3, $\frac{2}{7}$ *din noul rest*, capitolul 4, $\frac{1}{5}$ *din noul rest*, capitolul 5, $\frac{1}{2}$ *din noul rest*, capitolul 6, $\frac{1}{2}$ *din noul rest*. Știind că s-a mai parcurs o temă, aflați numărul total de teme.

Ion Stănescu, Buzău

G:735. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, să se arate că 89^n se poate scrie ca o sumă de trei pătrate perfecte distincte nenule.

Marin Chirciu, Piteşti

G:736. Să se determine $m,n \in \mathbb{N}^*$ care verifică relația: $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{3}{2m^n}=1$.

Ionel Tudor, Viorica Dogaru, Giurgiu

G:737. Să se arate că nu există numere naturale x astfel încât $x^{2017}+x^{2015}=x^{2016}+x^{2014}+2017$.

Marian Ciuperceanu, Craiova

G:738. Determinați restul împărțirii numărului $x=7^{n+3}\cdot 2^{n+2}+7^{n+2}\cdot 2^{n+3}+253\cdot 14^n$ la 2017.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

G:739. Fie numerele $A=2+3+4-1+6+7+8-5+10+11+12-9+...+238+239+240-237$ şi $B=1-2+3+4-5+6+7-8+9+...+157-158+159$. Arătați că $\frac{A}{61}=\frac{3B}{53}$.

Sorina Văcărean, Cluj-Napoca

▪ Clasa a VI-a

G:740. Să se rezolve ecuația $(n-2017)^{n-2017}=n-1765,\ n\in\mathbb{N}$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:741. Să se arate că numărul $\frac{2^{2017}+3\cdot 5^{17}}{17}$ este natural şi să i se găsească ultima cifră .

Viorica Dogaru, Giurgiu

G:742. Arătaţi că $(a+1)^n+a-1$ se divide cu a, $\forall a\in\mathbb{N}$ şi că

$A=\frac{(a+1)^{2n}+2(a+1)^{n+1}+a^2+2a-3}{a(a+1)^n+a^2+3a}\in\mathbb{N},\ \forall a\in\mathbb{N}^*, n\in\mathbb{N}.$ **Marin Chirciu**, Piteşti

G:743. Fie a,b,c numere prime astfel încât 5a+7b, 7b+11c, şi 11c+5a sunt direct proporţionale cu 25, 56 respectiv 46. Arătaţi că $a^3+b^3+c^3$ este divizibil cu 45.

Marian Ciuperceanu, Craiova

G:744. Să se calculeze minimul şi maximul expresiei E = x+3y-2z, ştiind că x, y şi z sunt numere pozitive şi avem 7x-2y+6z = 3 şi 11x-6y+3z = 4.

Petre Rău, Galaţi

G:745. Arătaţi că nu există numere naturale formate din trei cifre de 1 şi restul cifrelor 0 care să poată fi scrise ca sumă de două pătrate perfecte.

Neculai Stanciu, Buzău **şi Titu Zvonaru,** Comăneşti

G:746. Arătaţi că fracţia $\frac{x(x+1)(x+2)}{23^y+19^z}$ este reductibilă pentru x, y, z numere naturale nenule, y număr impar.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

G:747. Să se rezolve în $\mathbb{N}^*$ ecuaţia: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a+b+c}=1.$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

G:748. Un unghi are 171 ^{0} şi este împărţit în unghiuri cu măsurile 1 ^{0}, 2 ^{0}, ---, n ^{0}, n $\in N$. În câte părţi este împărţit unghiul dat ?

Ion Stănescu, Buzău

G:749. Arătaţi că $\frac{810}{\overline{286k}-\overline{283k}+\overline{280k}-\overline{277k}+\overline{274k}-\overline{271k}+...+\overline{130k}-\overline{127k}}=1.$

Sorina Văcărean, Cluj-Napoca

▪ Clasa a VII-a

G:750. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuaţiile: a) $x^2+y^2=2017;$ b) $x^2+y^2=2017^2;$

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:751. Se consideră numărul $A=\overline{ab}(a-2b+c)+\overline{bc}(b-2c+a)+\overline{ca}(c-2a+b)$ cu a, b, c nenule şi distincte. Arătaţi că numărul A se poate scrie ca suma a trei pătrate perfecte nenule.

Marin Chirciu, Piteşti

G:752. Determinaţi numerele x, y cu $x\geq y$ şi $x\in[1;\infty)$, ştiind că $x^2+y^2-x-3y-xy+4=0$.

Marian Ciuperceanu, Craiova

G:753. Fie $A=\{1,9,17,25,33,.....\}$ o mulţime cu n+1 elemente şi $B=\{8k-1\,|\,1\leq k\leq n; n,k\in N^*\}$.

a) Aflaţi numărul elementelor mulţimii $A\cap B$;

b) Arătaţi că numărul elementelor mulţimii $A\times B$ nu este pătrat perfect ;

c) Calculați suma $S=1+7+9+15+17+23+25+31+....+(8n-7)+(8n-1)+(8n+1)$;

d) Arătați că oricare ar fi x şi y din AUB numărul $\frac{x^2-y^2}{16}$ este număr întreg.

Dana Badea, Ploieşti

G:754. a) Scrieți, ca diferență de 2 fracții, o fracție ce conține termenii 1, a, a+1. b) Cercetați egalitatea

$$\frac{2017}{2018}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2018}\right)+.....+\left(\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}\right)=\frac{5}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+.....+\frac{1}{2018}$$

Ion Stănescu, Buzău

G:755. Determinați toate perechile (x,y) de numere întregi astfel încât $x^2y^2-x^2-xy-x-y^2-y=0$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

G:756. Să se determine triunghiurile dreptunghice de laturi numere naturale şi raza cercului înscris un număr prim.

Gheorghe Ghiță, Buzău

G:757. Să se arate că $2^k+22^k+32^k+\ldots+92^k$ se divide cu 470, pentru fiecare k natural impar.

Petre Rău, Galați

G:758. Triunghiul ΔABC are m($\sphericalangle$A)=90^0, M∈AC, (BM este bisectoarea unghiului B şi N∈ (BC) astfel încât [BN]≡[BA]. Arătați că :
a) N este simetricul lui A față de BM;
b) NB·NC = AM·AC .
c) MB·AC = AN·BC.

Dana Badea, Ploieşti

G:759. În triunghiul ABC medianele AM şi BN sunt perpendiculare (AM∩BN = {G}). Ştiind că GM = 6 cm şi BG = 8 cm, calculați perimetrul şi aria triunghiului ABC.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

▪ Clasa a VIII-a

G:760. Să se determine mulțimile de valori pe care le poate lua numerele reale a,b,c dacă

$$2a^2+b^2+c^2+2ac-6a-6b-2c=2.$$

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

G:761. Să se determine toate tripletele(p, q, r) de numere prime, soluții ale ecuației:
$p+50q+450r=2017.$

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:762. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ ştiind că: $\left(x^2+3x-4\right)^3+\left(x^2-3x-10\right)^3=8\left(x^2-7\right)^3$

Iuliana Traşcă, Olt

G:763. Să se determine valoarea minimă a raportului $A=\frac{2b^2+6b+3}{2a+5}$, unde numerele naturale a, b sunt pare, consecutive, crescătoare în această ordine.

Marian Ciuperceanu, Craiova

G:764 Dacă $a,b,c>0$ si $a^2+b^2+c^2=1$, arătați că are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\le\frac{1}{2abc}.$$ **Florin Stănescu**, Găeşti, Dâmbovița

G:765. Fie a şi b două numere reale strict pozitive, cu ab ≤ 1. Să se arate că $(1+\frac{1}{a})^k+(1+\frac{1}{b})^k \geq 2^{k+1}$.

Petre Rău, Galați

G:766. Funcția $f:N^* \to Q_+^*$, satisface condiția: $f(n)=\frac{\sum_{i=1}^{n} f(i)}{n^2}$, $\forall n \in N^*$. Dacă $f(1)=\frac{1}{2}$, determinați $\sum_{i=1}^{2017} f(i)$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

G:767. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația: $\left[x^2\sqrt{3}\right]+\left[x\sqrt{12}\right]+\left[\sqrt{299}\right]=2017$.

Dana Badea, Ploieşti

G:768. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația: $18x^2 - 12x = 3xy - y$.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

G:769. Să se arate că : $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\frac{2n}{\sqrt{n}+1}, n\in N^*$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

G:770. Se consideră $\triangle ABC$ echilateral. În exteriorul triunghiului se construiesc pătratele $ABDE$, $BCGF$ şi $ACHI$.

a) Arătați că aria suprafeței nonagonului concav $AEDBFGCHI$ este mai mică decât aria suprafeței pătratului $AKLM$, unde K este mijlocul laturii $[FG]$.

b) Arătați că aria suprafeței hexagonului convex $EDFGHI$ este de patru ori mai mare decât aria suprafeței $\triangle NFG$, unde N este mijlocul laturii $[EI]$.

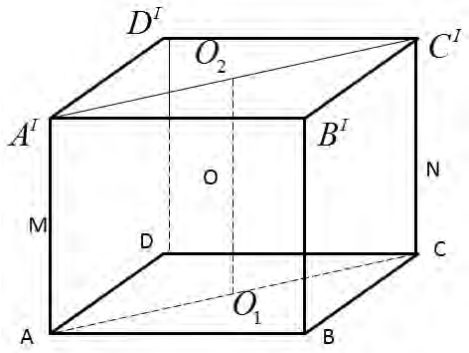
Sorina Văcărean, Cluj-Napoca

G:771. Cubul $ABCDA^IB^IC^ID^I$ are AB = 1, O = centrul cubului, O_1 =centrul feței ABCD, O_2 =centrul feței $A^IB^IC^ID^I$, M = mijlocul lui $[AA^I]$, N = mijlocul lui CC^I.

a) Găsiți un triunghi cu perimetrul $\frac{1}{2}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

b) Identificați un romb cu aria $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ion Stănescu, Buzău



▪ Clasa a IX-a

L:553. Să se demonstreze că $\sqrt{1}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+.....+\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}\leq(n+1)\sqrt{n+1}$.

Marian Ciuperceanu, Craiova

L:554. Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1=1$ şi $a_{n+1}=\frac{a_n}{1+na_n}, n\geq 1$. Să se determine a_n şi să se calculeze $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_k}$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

L:555. Să se scrie aproximările zecimale prin lipsă şi prin adaos cu eroare de 10^{-2} pentru numărul $n=\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{3}{5\cdot 8}+\frac{4}{8\cdot 12}+.....+\frac{18}{155\cdot 173}+\frac{19}{173\cdot 192}+\frac{20}{192\cdot 212}$.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

L:556. **Dacă** $a,b,c\geq 0$ şi $a^3+b^3+c^3=192$, să se arate că $\sqrt{9+a^2}+\sqrt{9+b^2}+\sqrt{9+c^2}\leq 15.$

Adrian Stan, Buzău

L:557. Dacă $a_i\in\mathbb{R}$, $i\in\{1,2,...,n\}$, atunci să se demonstreze că $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i^2+2}\leq\frac{n\sqrt{2}}{4}$.

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

L:558. Demonstrați că $(3-4\sin^2 9^0)(3-4\sin^2 27^0)=ctg9^0.$

Marin Chirciu, Piteşti

L:559. Arătați că dacă $a,b,c>0$, atunci $\frac{16}{3}(\sum a^2-\sum ab)\geq\left(\sum|a-b|\right)^2$.

Neculai Stanciu, Buzău şi **Titu Zvonaru,** Comăneşti

L:560. Să se rezolve ecuația $[x]+[2x]+[3x]=6x$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:561. Să se rezolve ecuația: $[x+7]+[x+11]+...+[x+4n+3]=2\cdot n^2+6n,\ \forall n\in N^*$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x.

Ciobîcă Constantin, Fălticeni

L:562. a) Daca $a,b,c\geq 0,$ astfel incat $a+b+c=3,$ arătați că:

$$abc\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)\leq 8.$$

b) Daca $x_1,x_2,...,x_n\geq 0$, astfel incat $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}=\sum_{k=1}^{n}a_k$, arătați că are loc inegalitatea:

$$\sqrt{1+a_1^2}+\sqrt{1+a_2^2}+...+\sqrt{1+a_n^2}\leq n\cdot\sqrt{2}.$$

Florin Stănescu, Găeşti, Dâmbovița

L:563. Fie funcția $f:[1,\infty)\to R,\quad f(x)=\sqrt{x+2\cdot\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\cdot\sqrt{x-1}}$.
Arătați că f este funcție constantă pentru $x\in[1,2)$.

Ciobîcă Constantin, Fălticeni

L:564. Determinați valoarea minimă a expresiei
$E(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$.

Laura Tănase, Buzău

L:565. Să se arate că pentru orice numere reale x, y, z şi orice k natural impar, expresia:
$F(x,y,z) = (x+y+z)^k - (-x+y+z)^k - (x-y-z)^k - (x+y-z)^k$ se divide cu 8xyz.

Petre Rău, Galați

L:566. Fie ABC un triunghi oarecare de laturi *a , b , c* .. Notăm cu l_a,h_a , bisectoarea , respectiv înălțimea corespunzătoare laturii *a=BC* , etc . Demonstrați că :

$$\max\left\{\frac{l_a^2}{h_a^2},\frac{l_b^2}{h_b^2},\frac{l_c^2}{h_c^2}\right\}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

Vasile Jiglău , Arad

▪ Clasa a X-a

L:567. Să se rezolve ecuația $11+\log_2\frac{x}{\sqrt[4]{x^4+48}}=x+\frac{4}{\sqrt[4]{x-1}}$.

Marin Chirciu, Piteşti

L:568. Rezolvați în $\mathbb{R}^+$ ecuația:
$(14^x-11^x)(61^x-50^x)(60^x-30^x)+(103^x-100^x)(14^x-3^x)(62^x-31^x)=2013^x$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

L:569. Rezolvați în **R** ecuațiile: a) $10\cdot\left(4^{\log_{2017}x}+25^{\log_{2017}x}\right)=29\cdot 10^{\log_{2017}x}$;

b) $\sqrt{\frac{x-7}{x+8}}+\sqrt{\frac{x+8}{x-7}}=\frac{17}{4}$.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

L:570. Fie x = $\log_3 5+\log_5 7+\log_7 3$. Să se calculeze [x].

Petre Rău, Galați

L:571. Să se rezolve în $\mathbb{R}_+$ ecuația $\frac{4^x}{\log_2(x+1)}+\frac{25^x}{\log_5(x+1)}=\frac{10^x}{\lg(x+1)}$. **Adrian Stan**, Buzău

L:572. Fie $a,b,c>0$ astfel astfel incat $a+b+c=3$. Aratati ca are loc inegalitatea:

$$\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2b+b^2c+c^2a}+n\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\geq 3+n,\qquad \text{unde } 0\leq n\leq 2.$$

Florin Stănescu, Găeşti, Dâmbovița

L:573. Dacă a, b, c > 1 şi $n\in N^*$, să se arate că $\log_a\frac{b^{n+1}+c^{n+1}}{b^2+c^2}+\log_b\frac{c^{n+1}+a^{n+1}}{c^2+a^2}+\log_c\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^2+b^2}\geq 3n-3$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:574. Arătați că în orice triunghi nedreptunghic ABC avem: $\frac{1}{2+tg^2A}+\frac{1}{2+tg^2B}+\frac{1}{2+tg^2C}>\frac{1}{2}$.

Neculai Stanciu, Buzău şi **Titu Zvonaru,** Comăneşti

L:575. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $8\sin x\cdot\cos^2 x=\sqrt{5}$ şi să se arate că ecuația are o infinitate de soluții $x=n^0$, cu $n\in\mathbb{N}$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:576. a) Să se determine $a_0,a_1,.....,a_n\in\mathbb{N}$ pentru care
$(1+x+nx)(1+x)^{n-1}=a_0+a_1x+a_2x^2+.....+a_nx^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ şi pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
b) Calculați suma: $S=1-2\cdot 2C_n^1+3\cdot 2^2C_n^2-4\cdot 2^3C_n^3+.....+(-1)^n(n+1)2^nC_n^n$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

▪ Clasa a XI-a

L:577. a) Dovediți inegalitățile: $\cos\frac{3\pi}{16}>\frac{3}{4}$; $\cos\frac{21\pi}{100}<\frac{7}{8}$;

b) Rezolvați în $\mathbb{N}^*$ ecuația $\sin\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}+\sqrt{2}}{4}$. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

L:578. Rezolvați ecuația $3^{\frac{3(1-x)}{2}}\cdot x=1$. **Marin Chirciu**, Piteşti

L:579. Determinați funcțiile continue $f:R\to R$ pentru care
$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)(x^2+xy+y^2),\forall x,y\in R.$

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:580. Dacă $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1,2,...,n\}$, atunci să se demonstreze că şirul $x_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2 e^{a_i}}{a_i^2 + e^{a_i}}$ este mărginit.

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

L:581. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(3x+\sqrt{x^2-2}\right)^n + \left(3x-\sqrt{x^2-2}\right)^n}{x^n}$;

Adrian Stan, Buzău

L:582. Fie A o matrice pătratică de ordinul 2 cu proprietăţile $\det(A+3I_2)=4$ şi $\det(A-2I_2)=9$. Să se calculeze $(A+I_2)^{2018}$. **Adrian Stan, Buzău**

▪ Clasa a XI-a

L:583. Să se determine primitivele funcţiei: $f:(0;\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{tgx}{1+\cos^3 x}$.

Marin Chirciu, Piteşti

L:584. Să se calculeze integrala $I=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4\cdot(2x-1)^{2016}}{(2x+1)^{2018}}dx$. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

(dată la Concursul interjudeţean "Laurenţiu Panaitopol"- Giurgiu, 2017)

L:585. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţiile: a) $64x^4-64x^3+8x+1=0$;

b) $x^4+8x^3+24x^2+32x-65092608=0$. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

L:586. Dacă x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3-x-a=0$, $a\in\mathbb{R}^*$, calculaţi suma

$S=\frac{1-x_1}{1+x_1}+\frac{1-x_2}{1+x_2}+\frac{1-x_3}{1+x_3}$. **Marin Chirciu**, Piteşti

L:587. Să se arate că ecuaţia $x^{2n+1}+C_n^1x^{2n-1}+C_n^2x^{2n-3}+.....+C_n^{n-1}x^3+2C_n{}^nx+m=0$ are cel puţin o rădăcină nulă, m fiind un parametru real.

Petre Rău, Galaţi

L:588. Dacă ecuaţia (1): $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ (unde $a,b,c,d,e\in R^*$) are rădacini reale distincte în progresie aritmetică, atunci, determinaţi rădăcinile ecuaţiei

(2): $4ax^3+3bx^2+2cx+d=0$, în funcţie de rădăcinile ecuaţiei (1) şi arătaţi că sunt tot în progresie aritmetică.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

L:589. Fie $f,g,h:\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos^4 x$, $g(x)=\sin^4 x$, $h(x)=2\sin^2 x\cdot\cos^2 x$. Să se calculeze $\int[f(x)+g(x)-3h(x)]dx$. **Adrian Stan**, Buzău

L:590. Să se determine funcţia derivabilă $f:R\to R$ cu proprietatea că:

$f(x)=\sin x+\int_0^x e^{-t}f(x-t)dt, \forall x\in R$ şi $f(0)=0$. **Gheorghe Ghiţă**, Buzău

L:591. Să se calculeze $\int e^x\cdot\frac{e^x\cos x+\sin^2 x}{(e^x+\sin x)^2}dx$, $x\in R_+$. **Constantin Rusu**, Râmnicu Sărat

L:592. Dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă, arătaţi că are loc inegalitatea:

$$\int_0^1 \sqrt{f^4(x)+\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)^4} \leq \sqrt{2}\cdot\int_0^1 f^2(x)dx.$$ **Florin Stănescu**, Găeşti, Dâmboviţa

„ We cannot teach people anything, we can only help them discover it within themselves ".
Galilea Galilei
(1564-1642)



6. QUICKIES

A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader's name, full address, and an e-mail address. Submited solutions should arrive before March 31, 2018.

PROPOSALS – QUICKIES

Q37. Proposed by Kevin Soto Palacios, Huarmey, Peru.

Let ABC be an acuted triangle. Prove that $\tan A+\tan B+\tan C+\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\geq \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Q38. Proposed by Mihàly Bencze, Bucharest, Romania.

Prove that if $a,b,c>0$, then $\left(\sum a^8\right)\left(\sum \frac{1}{a^8}\right)\geq \left(\sum a\right)\left(\sum \frac{1}{a}\right)$.

Q39. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

If $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ and $b=\arcsin a$, then calculate $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\left(\sin\left(\frac{b\cdot\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)-a\right)$.

Q40. Proposed by D.M. Bătinețu – Giurgiu, Bucharest, Romania.

Consider a triangle ABC with sides a,b,c, medians m_a,m_b,m_c, interior bisectors w_a,w_b,w_c and the area F. Prove that $(m_a^2+m_b^2+m_c^2)\left(\frac{w_a^2}{a^2}+\frac{w_b^2}{b^2}+\frac{w_c^2}{c^2}\right)\geq\frac{27\sqrt{3}}{4}F$.

SOLUTIONS – QUICKIES

Q33. Proposed by Nela Ciceu and Roxana Mihaela Stanciu, Romania.

Prove that $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx+\frac{(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

Solution 1 by Titu Zvonaru, Comănești, Romania. After some algebra the inequality becomes
$\sum x^6+2\sum x^4y^2+2\sum x^2y^4+\sum x^4yz+12x^2y^2z^2\geq\sum x^5y+\sum xy^5+4\sum x^3y^2z+4\sum x^3yz^2$, true since $\sum x^6+\sum x^4yz\geq\sum x^3y^2z+4\sum x^3yz^2$ (Schur)

$\sum x^4y^2+\sum x^2y^2z^2\geq 2\sum x^3y^2z$, $\sum x^2y^4+\sum x^2y^2z^2\geq 2\sum x^3yz^2$ (AM-GM).

Solution 2 by Titu Zvonaru, Comănești, Romania. We shall prove a stronger inequality, i.e.

$x^2+y^2+z^2-xy+yz+zx\geq\frac{(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2}{2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)}$, (1), for any real numbers x,y,z.

The inequality (1) was proposed by Daniel Sitaru in Crux Mathematicorum, Vol. 43(5), May, 2017. Since,
$(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2=$

$=\sum x^4y^2+\sum x^2y^4-2\sum x^3y^3+2\sum x^3y^2z+2\sum x^3yz^2-2\sum x^4yz-2\sum x^2y^2z^2$,
then (1) it is written successively:

$$2(\sum x^4y^2+\sum x^2y^4+\sum x^2y^2z^2-\sum x^3y^3-\sum x^3y^2z-\sum x^3yz^2)\geq$$
$$\geq\sum x^4y^2+\sum x^2y^4-2\sum x^3y^3+2\sum x^3y^2z+2\sum x^3yz^2-2\sum x^4yz-2\sum x^2y^2z^2$$
$$\sum x^4y^2+\sum x^2y^4+4\sum x^2y^2z^2+2\sum x^4yz-4\sum x^3y^2z-4\sum x^3yz^2\geq 0$$
$$\sum x^2(xy+xz-2yz)^2\geq 0.$$

Solution 3 by Marin Chirciu, Piteşti, Romania, modified by editor.

We have $\sum(x+y)^2\geq 0\Rightarrow\sum x^2+\sum xy\geq 0\Rightarrow 2\sum x^2\geq\sum x^2-\sum xy$.
It is suffices to prove that

$$\left(\sum x^2-\sum xy\right)^3\geq 4(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2\Leftrightarrow\left(\sum(x-y)^2\right)^3\geq 32(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2.$$

We denote $a=x-y, b=y-z,\ c=z-x$ and it remains to show that
$(a^2+b^2+c^2)^3\geq 32a^2b^2c^2,\ a+b+c=0$. There exists two of numbers a,b,c with the same sign, let a and b with the same sign. From $c=-a-b$ we obtain

$$(a^2+b^2+c^2)^3-32a^2b^2c^2=(a^6-a^3b^3+b^6)+2a^2b^2(a^2+b^2)+3ab(a^4+b^4)\geq 0,$$

and we are done.

Solution 4 by Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş, Romania

The inequality is equivalent to $\left(\sum x^2\right)^2\left(\sum x^2-\sum xy\right)\geq(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$.
If $x=y$ or $y=z$ or $z=x$, the inequality is true because $\sum x^2\geq\sum xy$.
If $x\neq y\neq z\neq x$, using the AM-GM Inequality we get

$$2\left(\sum x^2-\sum xy\right)=\sum(x-y)^2\geq 3\sqrt[3]{\prod(x-y)^2}$$

equivalent to $8\left(\sum x^2-\sum xy\right)^3\geq 27\prod(x-y)^2$. It is enough to prove that
$27\left(\sum x^2\right)^2\geq 8\left(\sum x^2-\sum xy\right)^2$ equivalent to $3\sqrt{3}\sum x^2\geq 2\sqrt{2}\left(\sum x^2-\sum xy\right)$, clearly true.

Q34. Proposed by Marin Chirciu, Piteşti, Romania.

If $a,b,c>0$ and $n,k\in N^*$, then prove that $\sum\frac{1}{a^2}\geq\frac{9(n+k)}{n\sum a^2+k\sum bc}$.

Solution 1 by author. The inequality to prove is writen successively

$\frac{\sum b^2c^2}{a^2b^2c^2}\geq\frac{9(n+k)}{n\sum a^2+k\sum bc}\Leftrightarrow\sum b^2c^2\left(n\sum a^2+k\sum bc\right)\geq 9(n+k)a^2b^2c^2$, which follows by the

AM- GM: $\sum b^2c^2\geq 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}$, $n\sum a^2+k\sum bc\geq 3(n+k)\sqrt[3(n+k)]{(abc)^{2(n+k)}}$, and

$3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}\cdot 3(n+k)\sqrt[3(n+k)]{(abc)^{2(n+k)}}=9(n+k)a^2b^2c^2$. Equality holds for $a=b=c$.

Solution 2 by Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş, Romania

The inequality is equivalent to $n\left(\sum a^2\right)\left(\sum\frac{1}{a^2}\right)+k\left(\sum\frac{1}{a^2}\right)\left(\sum bc\right)\geq 9n+9k$.

Using the AM-HM Inequality we get $n\left(\sum a^2\right)\left(\sum\frac{1}{a^2}\right)\geq 9n$. By the AM-GM Inequality we get

$$\sum\frac{1}{a^2}\geq 3\sqrt[3]{\prod\frac{1}{a^2}}=\frac{3}{\sqrt[3]{\left(\prod a\right)^2}}\text{ and }\sum bc\geq 3\sqrt[3]{\prod(bc)}=3\sqrt[3]{\left(\prod a\right)^2}.$$

So, $k\left(\sum\frac{1}{a^2}\right)\left(\sum bc\right)\geq 9k$, and the conclusion follows.

Q35. Proposed by editor. If $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ and $f:R\to R$ is a continuous and odd function, then compute

$$\int_{-a}^{a}(x^{1936}+x^{2018}+82)\cdot\arccos(\sin(f(x))dx.$$

Solution by Marin Chirciu, Pitești, Romania.

We take $x=u(t)=-t, u'(t)=-1, u(-a)=a, u(a)=-a$ and we obtain

$$I=\int_{a}^{-a}((-t)^{1936}+(-t)^{2018}+82)\cdot\arccos(\sin f(-t))(-1)dt=$$

$$=\int_{-a}^{a}(t^{1936}+t^{2018}+82)\cdot\arccos(\sin(-f(t)))dt=\int_{-a}^{a}(t^{1936}+t^{2018}+82)\cdot\arccos(-\sin f(t))dt=$$

$$=\int_{-a}^{a}(x^{1936}+x^{2018}+82)\cdot(\pi-\arccos(\sin f(x)))dx=$$

$$=\pi\int_{-a}^{a}(x^{1936}+x^{2018}+82)dx-\int_{-a}^{a}(x^{1936}+x^{2018}+82)\cdot\arccos(\sin f(x))dx.$$

So, $2I=\pi\int_{-a}^{a}(x^{1936}+x^{2018}+82)dx=2\pi\int_{0}^{a}(x^{1936}+x^{2018}+82)dx$. Hence, $I=\pi\cdot\left(\frac{a^{1937}}{1937}+\frac{a^{2019}}{2019}+82a\right)$.

Also solved by Julio Cesar Mohnsam, If Sul Campus Pelatos-RS Brazil

Q36. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

Let $x\in\mathbb{R}$ and $A(x)=\begin{pmatrix}x+1 & 1 & ... & 1 & 1\\ 1 & x+1 & ... & 1 & 1\\ .... & ... & ... & ... & ...\\ 1 & 1 & ... & x+1 & 1\\ 1 & 1 & ... & 1 & x+1\end{pmatrix}\in M_n(R)$. Compute $A(0)\cdot A(x)\cdot A(y)\cdot A(z)$, $\forall x,y,z\in R$.

Solution 1 by Marin Chirciu, Pitești, Romania.

We have $A(0)\cdot A(x)=A(x)\cdot A(0)=(n+x)A(0),\forall x\in\boldsymbol{R}$.

We obtain that $A(0)A(x)\cdot A(0)A(y)\cdot A(0)A(z)=(n+x)A(0)\cdot(n+y)A(0)\cdot(n+z)A(0)$.

By the comutativity of matrices $A(x)$ and $A(0)$, we deduce that:

$A^3(0)\cdot A(x)\cdot A(y)\cdot A(z)=(n+x)(n+y)(n+z)A^3(0)$.

But $A^3(0)=n^2A(0)$ hence: $A(0)\cdot A(x)\cdot A(y)\cdot A(z)=(n+x)(n+y)(n+z)A(0),\forall x,y,z\in\boldsymbol{R}$.

Solution 2 by author. We have $A(0)=E\in M_n(R)$, $A(x)=E+x\cdot I_n$, $E^2=nE$, where.

$A(0)\cdot A(x)=E(E+x\cdot I_n)=E^2+xE=nE+xE=(x+n)E$, and

$A(y)\cdot A(z)=(E+yI_n)(E+zI_n)=E^2+(y+z)E+yzI_n=(y+z+n)E+yzI_n$.

Hence, $A(0)\cdot A(x)\cdot A(y)\cdot A(z)=(x+n)E\left((y+z+n)E+yzI_n\right)=(x+n)(y+z+n)E^2+(x+n)yzE=$

$=(x+n)\left((y+z+n)n+yz\right)E$.



„Umorul este agerimea spiritului”.
(1821- 1881)

7. Caleidoscop matematic

I. Pătrate perfecte, care se termină cu aceleaşi cifre, respectiv grupe de cifre identice cu cifrele bazei

de Kovács Béla, Satu Mare

1. Numere cu o singură cifră:

$0^2 = 0$ $1^2 = 1$ $5^2 = 25$ $6^2 = 36$

2. Numere naturale formate din două cifre:

$25^2 = 625$ $76^2 = 5776$

Demonstratie: Examinăm toate numerele naturale de două cifre, sau rezolvăm urmatoarea problemă: Determinaţi toate numerele naturale de două cifre, ale căror pătrate se termină cu aceleaşi cifre ca şi baza

Rezolvare: Căutăm cifrele a, b , cu $a \neq 0$, astfel încât $\frac{\overline{ab}^2 - \overline{ab}}{100} \in N$

Avem: $\frac{(10a+b)^2-(10a+b)}{100} = \frac{100a^2+20ab+b^2-10a-b}{100} = a^2 + \frac{2ab-a}{10} + \frac{b(b-1)}{100}$

Prima condiţie este ca $b \cdot (b-1)$ să fie divizibil cu 10 .

Dacă $b = 0$ sau $b = 1$, atunci nu găsim soluţii.

Dacă $b = 5$, atunci avem $a^2 + \frac{9a}{10} + \frac{2}{10}$, de unde obţinem $a = 2$.

O soluţie este: 25

$25^2 = 625$, $25^2 - 25 = 625 - 25 = 600$

Dacă $b = 6$, atunci avem $a^2 + \frac{11a}{10} + \frac{3}{10}$, de unde obţinem $a = 7$.

Altă soluţie este 76.

$76^2 = 5776$, $76^2 - 76 = 5776 - 76 = 5700$.

Deci cele două numere cu prorietatea cerută sunt: 25 şi 76 .

3. Numere naturale formate din trei cifre:

3762 = 141.376 6252 = 390.625

Demonstraţie: Examinăm toate numerele naturale de trei cifre, sau rezolvăm următoarea problemă:

Determinaţi toate numerele naturale de trei cifre, ale căror pătrate se termină cu aceleaşi cifre ca şi baza

Rezolvare: Căutăm cifrele a, b, c , cu $a \neq 0$, astfel încât

$$\frac{\overline{abc}^2 - \overline{abc}}{1000} \in N \quad \frac{(100a+10b+c)^2-(100a+10b+c)}{1000} =$$

$$= \frac{10000a^2+100b^2+c^2+2000ab+200ac+20bc-100a-10b-c}{1000} =$$

$$= 10a^2 + 2ab + \frac{b^2+2ac-a}{10} + \frac{2bc-b}{100} + \frac{c(c-1)}{1000}$$ Prima condiţie este ca $c \cdot (c-1)$ să fie divizibil cu 10 .

Dacă $c = 0$ sau $c = 1$, atunci nu obținem soluții.

Dacă $c = 5$, atunci avem $10a^2 + 2ab + \frac{b^2 + 9a}{10} + \frac{9b}{100} + \frac{2}{100}$, rezultă $b = 2$,

obținem $10a^2 + 4a + \frac{6 + 9a}{10}$, rezultă $a = 6$. Primul număr obținut este 625.

$625^2 = 390.625$, $625^2 - 625 = 390625 - 625 = 390000$

Dacă $c = 6$, atunci $10a^2 + 2ab + \frac{b^2 + 11a}{10} + \frac{11b}{100} + \frac{3}{100}$, rezultă $b = 7$,

obținem $10a^2 + 2ab + \frac{57 + 11a}{10}$, rezultă $a = 3$.

Al doilea număr obținut este 376.

$376^2 = 141.376$, $376^2 - 376 = 141376 - 376 = 141000$.

Nu sunt alte soluții.

Deci cele două numere cu prorietatea cerută sunt: 376 şi 625.

4.Număr natural cu patru cifre: 9376. $9376^2 = 87.909.376$

5.Număr natural cu cinci cifre: 90.625. $90.625^2 = 8.212.890.625$

6.Numere naturale cu sase cifre: $109.376^2 = 11.963.109.376$

$890.625^2 = 793.212.890.625$

7. Număr natural cu sapte cifre: $7.109.376^2 = 50.543.227.109.376$

şi aşa maideparte: de exemplu un număr natural cu zece cifre:

$1.787.109.376^2 = 3.193.759.921.787.109.376$

şi un număr şi mai mare:

$607.743.740.081.787.109.376^2 =$

$=369.352.453.608.598.807.478.607.743.740.081.787.109.376$

8. Generalizare:Există numere naturale oricât de mari, ale căror pătrate se termină cu aceleaşi cifre ca şi baza?

II. Fiecare asterisc din înmulțirea de mai jos trebuie înlocuit cu o cifră din mulțimea $\{6,7,8,9\}$ astfel încât înmulțirea să fie corectă.

Roxana Mihaela Stanciu, Buzău şi Nela Ciceu, Roşiori, Bacău



Rezolvare.

986 x	997 x	997 x
88	77	78
7888	6979	7976
7888	6979	6979
86768	76769	77766



„ O vorbă de duh aduce adesea o dezlegare mai bună şi mai durabilă în lucruri decât asprimea”.
Horaţiu
(65- 8 î Hr)



8. Poşta redacţiei

Dragi cititori, elevi şi profesori, a apărut **numărul 20** al revistei de matematică „ **SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noştri, şi care, sperăm noi, va aduna tot mai mulți elevi şi profesori împreună, pentru a face din obiectul matematicii o activitate atractivă şi performantă.

Profesorii şi elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciții şi probleme cu enunț şi rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătății calitatea acestei reviste, o pot face trimițând materialele membrilor colectivului de redacție sau pe adresa de e_mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate(**salvate în Word 2003**) , fie scrise de mână şi scanate. **Materialele primite trebuie să fie originale şi să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise şi către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparține redacției.

Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările şi comenzile pentru **numărul 21** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **15 Martie 2018**. Vă urăm succes şi vă aşteptăm.



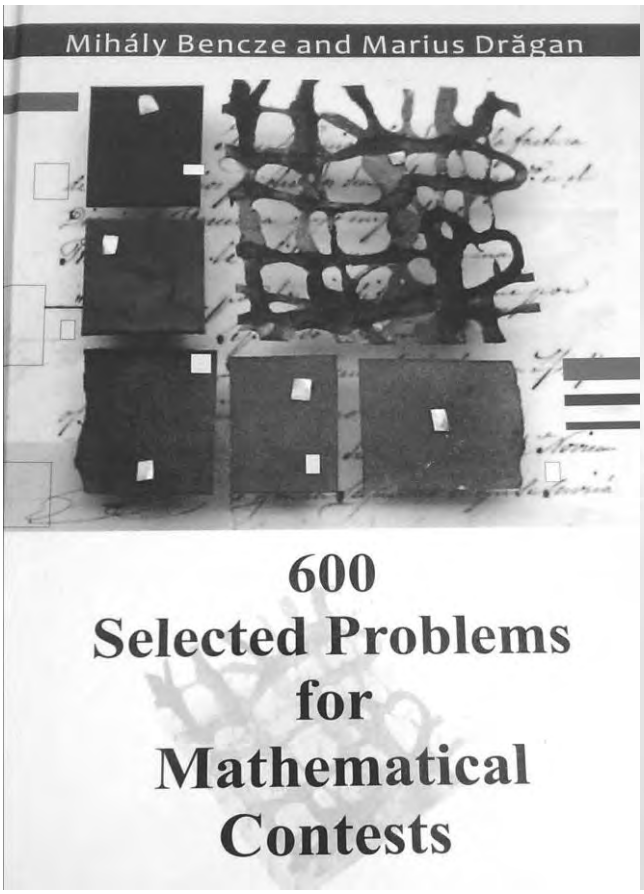
ELEVI REZOLVITORI

Şcoala Gimnazială “Gh. Popescu” Mărgineni- Slobozia, Scornicești, Olt
Clasa a VI-a: 18p. Mindreanu Florentina, Vlaicu Liliana; **Clasa a VII-a**: 25 p. Sima Iuliana, 17p. Ionescu Miruna, 15p. Screciu Constantin; **Prof. Iuliana Traşcă.**

Şcoala Gimnazială Padina, Buzău
Clasa a V-a: 10p. Andronache Oana, Spătaru Alexandra, **9p:** Iacob Mariana, Filipoiu Denisa, Spătaru Denisa.
Clasa a VI-a: 20p. Hermeneanu Lavinia, 19. Balica Costin, 16p. Spătaru Maria;Iasăgeanu Gabriela, Pănescu Cătălin.
Clasa a VII-a: 20p. Dinu Cristina, 19p. Dumitroiu Elena, 17p. Radu Mihaela, Jega Mihaela, 8p. Drăgoescu Petronela;
Clasa a VIII-a: 20p. Nedelcu Daniela, 19p. Ceauş Andreea, 18p. Fogor Antonia, 17p. Burlacu Alin, 8p. Păltinațu Laura; **Prof. Stănescu Ion.**

Şcoala Gimnazială ” Rareş Vodă” Ploieşti, Prahova
Clasa a V-a: 10p. Păduraru Cătălina, Mihai Alexandra, Găitănaru Andreea, Călinescu Alin, 9p Nițoiu Vlad, 8p Boboc Gabriel, Savu Gabriel
Clasa a VIII-a: 18p. Radu Elena, Săvulescu Ionuț, 15p. Stănescu Alina, Nicolae Andreea. **Prof. Daniela Badea**

APARIȚII EDITORIALE





The book - **600 Selected Problems for Mathematical Contests** – was published by Studis Publishing House, Iaşi, Romania, 2017.

Authors: *Mihály Bencze* (1benczemihaly@gmail.com) and
Marius Drăgan (marius.dragan2005@yahoo.com).

Supervisor for this book is Dr. *Ovidiu Bagdasar*, Senior Lecturer in Mathematics, University of Derby, United Kingdom.

Preface by Prof. Dr. *Themistocles M. Rassias*, Department of Mathematics, National Technical University of Athens Zogrofou Campus.

The book can be useful for students and their teachers, who wish to be very well prepared for national and international math competitions and Olympiads. The problems presented in this book cover a huge number of topics in Mathematics.

Această carte conține 600 de probleme cu soluții complete. Problemele din volum sunt probleme originale ale celor doi autori şi sunt reprezentative pentru ramuri ale matematicii ca: numbers theory, linear algebra, elementar geometry, mathematical analysis.

Volumul este scris de doi matematicieni, cunoscuți în lume, care s-au remarcat ca si problemişti, autori de articole şi de cărti. De asemenea, autorii fac parte din colegiile editoriale ale unor reviste de matematică.

Acest volum poate fi folosit de catre profesori şi elevi din învățământul preuniversitar pentru pregătirea concursurilor de matematică naționale şi internaționale. De asemenea, această culegere de probleme poate fi folosită şi de studenți pentru pregătirea concursurilor de matematică studențeşti. Volumul poate fi folosit de orice om indrăgostit de matematică pentru a redescoperi frumusețea... Matematicii.

Din aceste motive, recomand cu drag acest volum tuturor celor pasionați de matematică şi celor care se pregătesc pentru concursuri de matematică.

Ovidiu T. Pop

APARIȚII EDITORIALE



Apariția cărții **„Inegalități cu laturi și raze în triunghi”** a domnului profesor Marin Chirciu este de o importanță deosebită pentru toți matematicienii fascinați de universul infinit al inegalităților.

Apărută la Editura Paralela 45, cartea, de o calitate ireproșabilă, conține 300 de pagini de inegalități propuse și demonstrate.

Autorul a selectat dintre sutele de inegalități în care apar elementele triunghiului, inegalități celebre, inegalități date la concursuri sau pe care le-a propus cu timpul în diverse reviste cum ar fi Crux Math., IneMath, Gazeta Matematică, RMT, Math.Mag. Octogon, Mateinfo.ro, Recreații Matematice și altele.

Nivelul cărții este de un înalt profesionalism conținând probleme accesibile tuturor dar mai ales celor care se pregătesc pentru concursuri și olimpiade, problemele fiind însoțite de rezolvări complete.

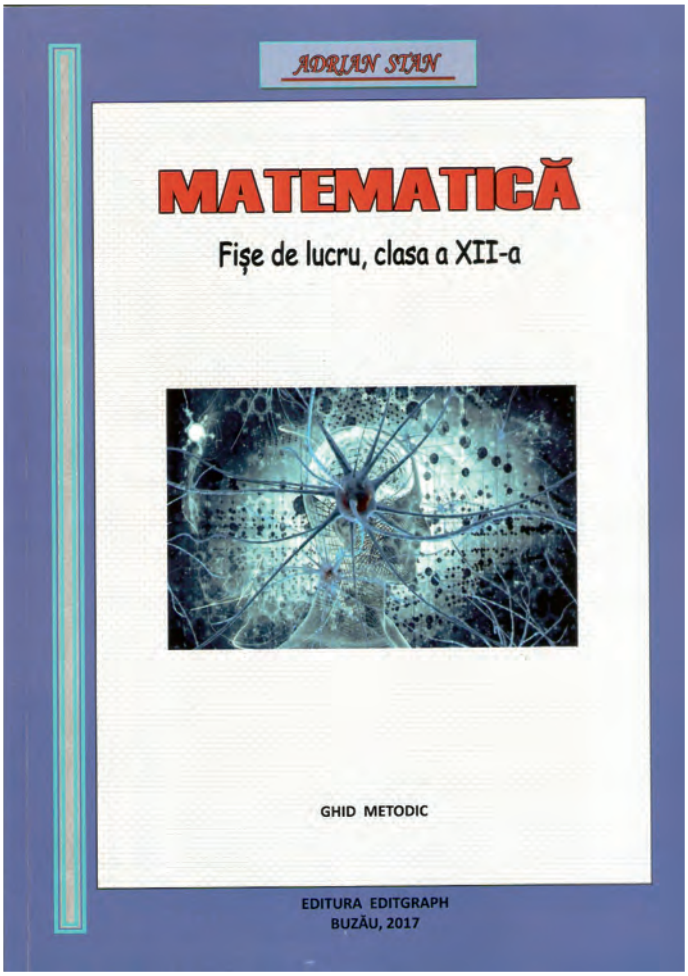
Pentru informații suplimentare sau comenzi vă puteți adresa autorului la

marin.chirciu@yahoo.com

Cartea **„Matematică. Fișe de lucru, clasa a XII-a”,** autor prof. Adrian Stan, apărută la Editura EditGraph, vine în întâmpinarea tuturor elevilor și profesorilor care studiază matematica la nivel de M2-Matematică Tehnologic sau Matematică - Științe, conținând fișe de lucru pentru fiecare lecție din programa școlară.

Ea este utilă întrucât reprezintă experiența ultimilor ani în care cunoștințele elevilor trebuiesc adaptate nivelului lor de înțelegere, cartea conținând atât noțiunile de teorie și exemplele pentru fiecare din acestea cât și alte exerciții pe care să le rezolve singuri în clasă elevii sau cu profesorii, cât și exerciții care să rămână ca temă.

Apărută în format A4, cartea conține 117 pagini formate din fișe de lucru inclusiv fișe cu teme tip proiecte de pregătire pentru bacalaureat, care se pot face la orele de pregătire suplimentară sau le pot face elevii acasă.



REVISTA SCLIPIREA MINŢII
NR. 20 ANUL X - DECEMBRIE 2017

VIZITAŢI SI REVISTA ONLINE DE MATEMATICA MATEINFO.RO

Cuprins

1. Istoria matematicii

Marile descoperiri ale lui Galileo Galilei și Inchiziția
de Adrian Stan 1

2. Articole şi note matematice

Ecuații iraționale cu o infinitate de soluții în mulțimea
numerelor naturale de Ionel Tudor 3

Asupra unei inegalități date la Hong Kong 2016
Team Selection Test de Marin Chirciu 5

Asupra unor inegalităţi omogene în trei variabile
de Leonard Giugiuc şi Diana Trailescu 7

O generalizare şi o rafinare a inegalităţii Ionescu-Weitzenböck
de D.M. Bătineţu-Giurgiu, Daniel Sitaru, Neculai Stanciu 9

An elementary proof of Blundon's inequality
de Marius Drăgan, Neculai Stanciu 10

A new proof and a new refinement of Ionescu-Weitzenbök
inequality de Marian Cucoaneş 11

3. Examene și concursuri 12

4. Probleme rezolvate 17

5. Probleme propuse 39

6. Quickies 46

7. Caleidoscop matematic 49

8. Poşta redacţiei 51

editgraph

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601

LEI 12 RON