SCLIPIREA MINTII

REVISTĂ NATIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICA ; PUBLICATIE SEMESTRIALĂ, AN X, NR XIX, 2017

SM

ISTORIA MATEMATICII
PROBLEME PROPUSE
PROBLEME REZOLVATE
TESTE



CALEIDOSCOP MATEMATIC

SM

Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

LICEUL TEHNOLOGIC " COSTIN NENIŢESCU ", BUZĂU

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601

SCLIPIREA MINȚII 19

Revistă națională de cultură matematică, publicație semestrială, An X, Nr. XIX, MAI 2017, BUZĂU

COLECTIVUL DE REDACȚIE

- **Membrii onorifici:**

Constantin Rusu - Președinte de onoare a Filialei Râmnicu Sărat a Societății de Științe Matematice

Costică Ambrinoc - Președinte Filiala Râmnicu Sărat a Societății de Științe Matematice

Lenuța Pîrlog – Președinte Filiala Buzău a Societății de Științe Matematice

D. M . Bătineţu – Giurgiu, Titu Zvonaru, Nicolae Ivăşchescu, Mihály Bencze, Lucian Tuțescu, Ionel Tudor, Gheorghe Ghiță

- **Director:** Neculai Stanciu

- **Redactor şef:** Adrian Stan

- **Redactori principali:** Andrei Octavian Dobre, Iuliana Traşcă, Marin Chirciu, Gabriel Tica, Ion Stănescu, Constantin Dinu

CUPRINS

ISTORIA MATEMATICII..... 1

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE..... 3

PROBLEME REZOLVATE..... 14

PROBLEME PROPUSE 39

QUICKIES 48

CALEIDOSCOP MATEMATIC 51

POŞTA REDACȚIEI..... 52

GÂNDEŞTE CORECT

- **Membri:**

Dana **Badea**, Daniela **Beldea**, Anicuța **Bețiu**, Gabriela **Buzea** Elena **Ciobîcă**, Constantin **Ciobîcă**, Ana **Cismaru**, Aurel **Chiriță**, Marin **Chirciu**, Nela **Ciceu**, Marian **Ciuperceanu**, Tatiana **Cristea**, Marian **Cucoaneș** , Luiza **Cremeneanu**, Ileana **Didu**, Camelia **Dana**, Denisa **Draghia**, Viorica **Dogaru**, Marius **Drăgan**, Otilia **Drăgan**, Ani **Drăghici**, Gabriela **Drânceanu**, Răzvan **Drânceanu**, Luiza **Dumitrescu**, Gheorghe **Ghiță**, Lucian Dan **Grigore**, Cernea **Illan**, Cristina Dida **Isaia**, Ionuț **Ivănescu**, Vasile **Jiglău**, Adalbert **Kovacs**, Simion **Marin**, Mariana **Mitea**, Luminița **Mihalache**, Cristian **Moanță**, Gabriela **Negutescu**, Gabriel **Nemțaru**, Ana **Panaitescu**, Nicolae **Papacu**, Petre **Păunescu**, Stelian **Piscan**, Victoria **Popa**, Adriana **Puescu**, Doina **Popescu**, Constantina **Prunaru**, Ramona **Puchiu**, Iulia **Sandu**, Dumitru **Săvulescu**, Daniel **Sitaru**, Roxana **Stanciu**, Liviu **Smarandache**, Florin **Stănescu**, Andreea **Stoica**, Doina **Stoica**, Mircea Mario **Stoica**, Mircea **Tereujan**, Carmen **Terheci**, Gabriel **Tica**, Ionel **Tudor**, Hanganu **Aurel** Toma, Nicolae **Tomescu**, Ovidiu **Țâțan**, Roxana Cristina **Vasile**, Dumitru **Vieriu**, Ionuț **Voinea**, Marian **Voinea**, Daniel **Văcaru**, Sorina **Văcărean**, Florentin **Vișescu**, Elena **Zainea**

REDACȚIA
Liceul Tehnologic „ Costin Nenitescu”,
Buzău, Strada Transilvaniei, Nr. 134,
Cod. 120012, Tel. 0238725206
E_mail: ady_stan2005@yahoo.com
Coordonator proiect: Adrian Stan

Tipar: editgraph Buzău, www.editgraph.ro



„ Dacă toată bogăția unui om se află în mintea sa, nimeni nu va putea să i-o fure ”.
Benjamin Franklin
(1706- 1790)



1. Istoria matematicii

Gaspard Monge
(10.05. 1746 – 28.07.1818)

de prof. Adrian Stan, Buzău



Unul dintre “copiii de aur”(apud.1, p.231) ai matematicii franceze şi ai lumii, aşa cum era numit de către profesorii săi, **Gaspard Monge** s-a născut în Beaune, un mic orăşel din apropierea oraşului Dijon în estul Franței. Fiu de negustor, şi-a dezvoltat talentul către calculul matematic dar şi către partea tehnică, realizând de mic o serie de instrumente practice printre care o pompă de incendiu. Întrebat fiind ce l-a făcut să reuşească construirea acelei pompe, **Monge** afirmă:
„ *Am folosit două mijloace care nu pot da greş: o tenacitate neclintită şi degetele care au transpus gândul meu cu o fidelitate geometrică*”. (apud 4, p.231)

După ce urmează şcoala primară în Beaune îşi continuă studiile la Lyon apoi la Şcoala Militară Regală de Geniu din Mezieres. În această perioadă, în 1762, realizează un plan al oraşului natal cu ajutorul unor instrumente de măsurat făcute chiar de el. Această lucrare i-a impresionat pe foştii săi profesori din Lyon care i-au oferit un post de profesor de fizică, dar **Monge** i-a refuzat, pentru a continua munca la Mezieres.

Aici, în 1765, i s-a propus să rezolve o problemă de amplasare a tunurilor într-o fortăreață, şi realizarea unui plan arhitectural optim de apărare a acesteia, fapt ce l-a realizat cu ajutorul unei metode geometrice în locul unor calcule aritmetice destul de laborioase. Comandantul şcolii nu a înțeles metoda lui **Monge** şi nu i-a dat importanță, dar mai târziu a fost fascinat de geniala idee şi a acceptat-o considerând-o secret militar. Metoda lui **Monge** era de fapt ceea se va numi ulterior **geometria descriptivă** pe care el a dezvoltat-o.

Geometria descriptivă a lui Monge a însemnat ulterior soluția la problema reprezentării în planul bidimensional a corpurilor tridimensionale din spațiu şi apoi posibilitatea de a fi citită şi înțeleasă de către arhitecți, ingineri, constructori. Utilizată în artă, arhitectură sau construcții, „vederea în spațiu” i-a preocupat pe vechii greci sau pe romani pentru a proiecta clădiri şi opere de artă cît mai aproape de realitate. Astăzi, relația biunivocă spațiu- plan pentru corpurile din spațiu este rezolvată cu ajutorul calculatorului prin ceea ce se cheamă „proiectare asistată de calculator”.

Ca urmare a genialei sale realizări, între 1768 şi 1783 a fost încadrat ca profesor de fizică şi matematică la Şcoala din Mezieres, timp în care a fost preocupat de geometria infinitezimală şi teoria ecuațiilor cu derivate parțiale. În 1771 ca urmare a procupării față de geometria analitică introduce ecuația planului normal şi determină formula distanței dintre două puncte din plan.

După această perioadă, devine directorul Institutului Hidraulic din Paris apoi în 1780 devine şi membru al Academiei de Ştiințe din Paris unde abordează problema calculului ariilor unor suprafețe unde introduce **liniile de curbură a suprafețelor**. Pe lângă aceste concepte noi, introduce şi **suprafețele desfăşurabile** dând

ecuațiile lor.

În 1785 consideră ecuația planului tangent în geometria diferențială, scrie ecuația diferențială a liniilor de curbură ale suprafețelor şi introduce în 1795 curbele caracteristice.

El este cel care a propus notațiile pentru derivatele parțiale cu variabile: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. (1, p. 61)

În 1791 a făcut parte din comitetul care a stabilit un sistem de mărimi şi măsurători, introducând astfel sistemul metric în Franța.

Căderea Bastiliei la 14 iulie 1789 a marcat începerea Revoluției Franceze, la care **Monge** a aderat încă de la început, aducându-şi contribuția sa pe plan ştiințific la multe proiecte militare. În timp ce pe 21 septembrie 1792 monarhia era abolită, Monge devenea ministrul Marinei.

În perioada 1798- 1801 l-a însoțit pe Napoleon Bonaparte în Egipt unde a înființat alături de alți oameni de ştiință şi arte , Institutul Egiptean şi Institutul de Ştiințe şi Arte din Egipt.

Întors din Egipt este numit directorul Şcolii Politehnice a cărei înființare i se datorează în mare parte, unde a predat şi a scris cursuri despre metoda sa privind geometria descriptivă. Cartea sa „Geometrie descriptive" din 1789 prezintă corpurile din spațiul tridimensional reprezentate în plan prin proiecțiile sale.

Datorită întregii sale activități şi a contribuției ştiințifice din Egipt, Napoleon i-a oferit titlul de ofițer al Legiunii de onoare în 1804 iar în 1808 l-a înobilat cu titlu de conte de Peluse.

În 1814, pe 6 aprilie, Napoleon abdică şi este trimis pe insula Elba de unde evadează un an mai târziu, pe 20 martie 1815 şi se întoarce în Paris avându-l alături de el pe **Monge**. Din păcate, la 18 iunie 1815 la Waterloo, armata franceză nu face față coaliției austriaco-prusace şi astfel Republica Franceză ia sfârşit, mulți dintre susținătorii lui Napoleon sunt nevoiți să plece din Franța, inclusiv **Monge.** Când se va întoarec în Paris în1816, **Monge** este înlăturat din toate funcțiile şi decăzut din toate drepturile sale, fapt ce îi produce o gravă afectare a sănătății.

Alte opere principale ale sale sunt „Application de l'algèbre à la géométrie "(1805), iar prin „ Application de l'analyse à la géométrie" (1807), devine părintele geometriei diferențiale. Printre matematicienii inspirați de opera lui se numără Jean Victor Poncelot şi Micheal Chasles.

Mormântul său se află astăzi depus alături de alte mari personalități ale Franței, în **Pantheonul din Paris** iar numele său alături de alte 72 de nume celebre se află înscris la baza Turnului Eiffel. (3).

Se spune că în timp ce Napoleon s-a încoronat ca împărat, studenții de la Şcoala Politehnică unde preda şi Monge s-au arătat foarte revoltați manifestând împotriva împăratului. Când s-a întâlnit cu Monge, Napoleon l-a întrebat pe acesta:

- Am auzit că studenții dumitale sunt tare revoltați împotriva mea. Este clar că sunt inamicii mei declarați.
- Împărate, am avut destule greutăți până ce i-am făcut republicani; dați-le timp ca să devină imperialişti, a replicat savantul care îşi permitea astfel să glumească cu vechiul său prieten de pe vremea când el era ministrul Marinei iar Napoleon, doar un tânăr locotenent de artilerie.



Gaspard Monge şi Napoleon Bonaparte în Egipt, 1798

Bibliografie:

1. Adrian Stan, şi colab. O scurtă istorie a matematicii. Editura Editgraph. Buzău. 2015;
2. www.britanica.com;
3. www.wikipedia.org;
4. Caleidoscop matematic. Vasile Bobancu. Editura Nicilescu. Bucureşti. 2001.

**„Dacă viața fără gândire e puțin lucru,
gândirea fără viață nu e nimic”.
O. Iahot**

2. Articole şi note matematice

Rafinări ale inegalității Ionescu-Weitzenböck

de prof. Constantin Rusu, Râmnicu Sărat, Buzău[1]

Pentru obținerea unor rafinări ale inegalității I-W (vezi [3]) vom porni de la problema 26915 din GM nr. 5/2014, autor Constantin Rusu, care are următorul enunț:

Să se arate că în orice triunghi ABC avem: $36S^2 \le (2a^2+2b^2-c^2)(2a^2+2c^2-b^2)$, (1).

Prezentăm soluția acestei probleme. Cu notațiile obişnuite, avem:

$$S = 3A_{\triangle BGC} = 3\frac{GB\cdot GC\cdot \sin\sphericalangle BGC}{2} = \frac{2}{3}m_b m_c \sin\sphericalangle BGC$$

Cum $m_b{}^2 = \frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4}$, $m_c{}^2 = \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$ şi $\sin\sphericalangle BGC \le 1$ rezultă

$6S \le \sqrt{(2a^2+2c^2-b^2)(2a^2+2b^2-c^2)}$,adică inegalitatea din enunț.

Egalitatea se obține dacă $\sin\sphericalangle BGC = 1 \Leftrightarrow GB^2+GC^2 = BC^2 \Leftrightarrow b^2+c^2 = 5a^2$

Într-un mod analog găsim în Δ GCA şi în Δ AGB inegalitățile:

$36S^2 \le (2b^2 + 2c^2 - a^2)(2b^2 + 2a^2 - c^2)$, (2) şi $36S^2 \le (2c^2 + 2a^2 - b^2)(2c^2 + 2b^2 - a^2)$, (3).

Înmulțind inegalitățile (1), (2) şi (3) şi extrăgând radical de ordin 6 din ambii membrii ai inegalității obținute, găsim: $6S \le \sqrt[3]{(2a^2+2b^2-c^2)(2b^2+2c^2-a^2)(2c^2+2a^2-b^2)}$,(4).

Propoziția 1. *În orice triunghi ABC avem*:

$$4\sqrt[3]{p^2S^2} \le \sqrt[3]{(2a^2+2b^2-c^2)(2b^2+2c^2-a^2)(2c^2+2a^2-b^2)}\ ,\ (5).$$

Demonstrație. Observăm că:

$(a + b)^2 - c^2 \le 2(a^2 + b^2) - c^2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(a+b+c)(a+b-c)} \le \sqrt[3]{2(a^2+b^2)-c^2}$, (i)

$(a + c)^2 - b^2 \le 2(a^2 + c^2) - b^2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(a+b+c)(a-b+c)} \le \sqrt[3]{2(a^2+c^2)-b^2}$, (ii)

$(c + b)^2 - a^2 \le 2(c^2 + b^2) - a^2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(a+b+c)(b+c-a)} \le \sqrt[3]{2(b^2+c^2)-a^2}$, (iii).

Înmulțind inegalitățile (i), (ii) şi (iii) se obține inegalitatea (5).

Propozitia2. *Inegalitatea* (5) *este o rafinare a inegalității* (4).

Observăm că în orice triunghi are loc inegalitatea $\sqrt{3}S \le \sqrt[3]{p^2S^2}$, (6).

Într-adevăr, urmărind succesiunea de inegalități echivalente,constatăm că ultima inegalitate este binecunoscuta inegalitate a lui Mitrovnic.

$$\sqrt{3}S \le \sqrt[3]{p^2S^2} \Leftrightarrow 3\sqrt{3}S^3 \le p^2S^2 \Leftrightarrow 3\sqrt{3}S \le p^2 \Leftrightarrow 3\sqrt{3}pr \le p^2 \Leftrightarrow 3\sqrt{3}r \le p$$

Pe de alta parte din (6) deducem că $6S \le 4\sqrt{3}S \le 4\sqrt[3]{p^2S^2}$, de unde rezultă că inegalitaca (5) este este mai fină ca (4).

În continuare deducem un majorant pentru membrul drept al inegalității (5). Avem:

Propoziția 3. *În orice triunghi ABC avem inegalitatea:*

$$\sqrt[3]{(2a^2+2b^2-c^2)(2b^2+2c^2-a^2)(2c^2+2a^2-b^2)} \le a^2+b^2+c^2\ ,\ (7).$$

Demonstrația rezultă imediat din inegalitatea mediilor.

---

[1] Lucrarea a fost prezentată la a XIX-a Conferinţă Anuală a S.S.M.R, Călăraşi, 2015.

Din propozițiile (1), (2) şi (3) rezultă următoarea:

Teorema 1. *În orice triunghi ABC avem inegalitățile:*

$$4\sqrt{3}S \le 4\sqrt[3]{p^2S^2} \le \sqrt[3]{(2a^2+2b^2-c^2)(2b^2+2c^2-a^2)(2c^2+2a^2-b^2)} \le a^2+b^2+c^2$$

Propoziția 4. *În orice triunghi ABC sunt adevărate inegalitățile :*

$4\sqrt{3}S \le ab+bc+ca \le a^2+b^2+c^2$, (8).

Demonstrație. Din formula $S=\frac{bc\sin A}{2}$ rezultă $\frac{1}{\sin A}=\frac{bc}{2S}$. În mod analog avem $\frac{1}{\sin B}=\frac{ca}{2S}$ şi $\frac{1}{\sin C}=\frac{ab}{2S}$. Adunând aceste relații obținem: $\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}=\frac{ab+bc+ca}{2S}$.

Pe de altă parte aplicând inegalitatea Jensen funcției strict convexe $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{\sin x}$ obținem:

$\frac{1}{3}(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}) \ge \frac{1}{\sin\frac{A+B+C}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$ de unde deducem că $ab+bc+ca \ge 4\sqrt{3}S$.

În sfârşit , ultima inegalitate din Propoziția 4 rezultă imediat din inegalitatea C-B-S.

Propoziția 5. *În orice triunghi ABC avem inegalitatea*: $4\sqrt[3]{p^2S^2} \le 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ **,** (9).

Demonstrație. Avem urmatoarea succesiune de inegalități echivalente:

$$4\sqrt[3]{p^2S^2} \le 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \quad \Leftrightarrow 64p^2S^2 \le 27a^2b^2c^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 64\frac{(a+b+c)^2}{4}S^2 \le 27a^2b^2c^2 \Leftrightarrow 4(a+b+c)S \le 3\sqrt{3}abc \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)S \le 3\sqrt{3} \Leftrightarrow 4\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{2S}\right) \le 3\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sin A+\sin B+\sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Cum ultima inegalitate este bine cunoscută demonstrația este terminată.

Propoziția 6. *În orice triunghi ABC avem:* $3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \le ab+bc+ca$, (10).

Afirmația rezultă imediat din inegalitatea mediilor dacă rescriem membrul stâng sub forma : $3\sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)}$. Din propozițiile 2, 4, 5 şi 6 rezultă:

Teorema 2. *În orice triunghi ABC avem inegalitățile:*

$$4\sqrt{3}S \le 4\sqrt[3]{p^2S^2} \le 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \le ab+bc+ca \le a^2+b^2+c^2 .$$

O rafinare a inegalității (I-W) este dată de inegalitatea Hadwinger-Finsler (Hugo Hadwinger 1908-1981; Paul Finsler 1894-1970): $4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2 \le a^2+b^2+c^2$, (11).

Analizăm în continuare ordinea minoranților numărului $a^2+b^2+c^2$ care sunt majoranți pentru numărul $4\sqrt{3}S$, semnalați în teoremele 1, 2 şi în inegalitatea H-F.

Ne propunem să analizăm în ce triunghiuri are loc inegalitatea:

$ab+bc+ca \le 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$, (12).

Pentru început observăm că inegalitatea nu este adevărată în orice triunghi .

Într-adevăr pentru a = $\sqrt{2}$, b = c = 1 obținem după calcule 49 < 48, ceea ce este fals, dar pentru

a = 13, b = 12, c = 5, obținem: 221 < 261,6 ($\sqrt{3}$ = 1,73) ceea ce este adevărat.

Evident, inegalitatea (12) se mai scrie: $3(ab+bc+ca) \le 4\sqrt{3}S+2(a^2+b^2+c^2)$.

În continuare,folosind formulele: $ab=\frac{2S}{\sin C}$, $a^2=\frac{2S\sin A}{\sin B\sin C}=\frac{2S\sin(B+C)}{\sin B\sin C}=2S(ctgC+ctgB)$ şi analoagele,

inegalitatea (12) devine: $3\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right) \le 2\sqrt{3}+4(ctgA+ctgB+ctgC) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{1-\cos A}{\sin A}+\frac{1-\cos B}{\sin B}+\frac{1-\cos C}{\sin C}\right) \le 2\sqrt{3}+(ctgA+ctgB=ctgC) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2})\le 2\sqrt{3}+ctgA+ctgB+ctgC \Leftrightarrow \sum(3tg\frac{A}{2}-ctgA)\le 2\sqrt{3}$$

Acum analizăm când este adevărată ultima inegalitate. Pentru aceasta considerăm funcția:

$f:(0,\pi)\to\mathbb{R}, f(x)=3tg\frac{x}{2}-ctgx$. Avem succesiv:

$$f'(x)=\frac{4-3\cos x}{\sin^2 x},\quad f''(x)=\frac{3\cos^2 x-8\cos x+3}{\sin^3 x}\quad f''(x)=0\leftrightarrow x=\arccos\frac{4-\sqrt{7}}{3}$$

Dacă $x\in(0,\arccos\frac{4-\sqrt{7}}{3})\Rightarrow f''(x)<0$ şi deci f este concavă.

Din inegalitatea lui Jensen rezultă:

$f(\frac{A+B+C}{3})\ge\frac{1}{3}(f(A)+f(B)+f(C)) \quad \Rightarrow 3tg\frac{\pi}{6}-ctg\frac{\pi}{3}\ge\frac{1}{3}\sum(3tg\frac{A}{2}-ctgA)$, de unde rezultă

$$\sum(3tg\frac{A}{2}-ctgA)\le 2\sqrt{3}.$$

Inegalitatea esta adevărată dacă $A,B,C\in(0,\arccos\frac{4-\sqrt{7}}{3})$ şi $A+B+C=\pi$, (13).

Observatia 1. Pot exista triunghiuri ale căror unghiuri satisfac condițiile (13).

Intr-adevăr, $\frac{\pi}{3}<\arccos\frac{4-\sqrt{7}}{3}<\frac{\pi}{2}$ deoarece $\frac{1}{2}>\frac{4-\sqrt{7}}{3}>0$.

Aşadar, am demonstrat următoarea propoziție:

Propozitia 7. *În orice triunghi în care unghiurile satisfac condițiile (13) are loc inegalitatea*

$ab+bc+ca\le 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$, (12).

Propoziția 8. *În orice triunghi există inegalitatea*

$4\sqrt[3]{p^2S^2}\le 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-a)^2+(c-a)^2$, (14).

Demonstrație. Cu substitutiile lui Ravi ($a=y+z,b=z+x,c=x+y$) inegalitatea (14) devine:

$$4\sqrt[3]{(x+y+z)^3xyz}\le 4\sqrt{3}\sqrt{xyz(x+y+z)}+(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2, (14').$$

Pentru $y=x+1$ şi $z=x+2$, inegalitatea (14) devine:

$$\sqrt[3]{(x+1)^4(x^2+2x)}\le\sqrt{(x+1)^2(x^2+2x)}+\frac{1}{2}, (14''),$$

Dacă notăm cu $t=x^2+2x$ atunci $t+1=(x+1)^2$ şi obținem inegalitatea $\sqrt[3]{t(t+1)^2}\le\sqrt{t(t+1)}+\frac{1}{2}$, (14‴)

Pentru a demonstra această inegalitate considerăm funcția:

$$f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(t)=\sqrt[3]{t(t+1)^2}-\sqrt{t(t+1)}-\frac{1}{2}$$

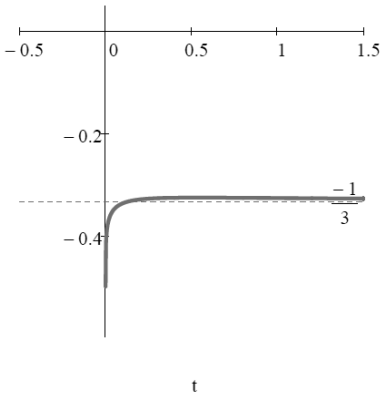
Observăm că $\lim_{t\to 0}f(t)=-\frac{1}{2}$ şi $\lim_{t\to\infty}f(t)=-\frac{1}{3}$, de unde rezultă ca $y=-\frac{1}{3}$ este asimptota orizontală la $+\infty$. În continuare avem $f'(t)=\frac{(6t+2)\sqrt[6]{t+1}-(6t+3)\sqrt[6]{t}}{6\sqrt[6]{t^4(t+1)^3}}$.

Ecuația $f'(t)=0$ are o singură rădăcină reală în intervalul $(0,\infty)$ şi anume $t_0\approx 0,54$.

Cum $f'(t)>0$ dacă $t\in(0,t_0)$ şi $f'(t)<0$, dacă $t\in(t_0,\infty)$, rezultă că funcția f are valoarea maximă în $t_0\approx 0,54$ şi această valoare este $f_{max}\approx -0,326$.

Aşadar $f(t)<0,\forall t>0$ şi cu aceasta demonstrația este terminată.

Graficul funcției f este cel de mai sus.



Observatia 2.. *Inegalitatea :* $3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \le 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-a)^2+(c-a)^2$, (15).
nu este adevărată în orice triunghi.
Decondiționăm inegalitatea (15) şi obținem:
$3\sqrt[3]{(y+z)^2(z+x)^2(x+y)^2} \le 4\sqrt{3}\sqrt{xyz(x+y+z)}+\sum(x-y)^2$, (15`).
Pentru $x=t-1, y=t, z=t+1$ (15') devine: $\sqrt[3]{4t^2(4t^2-1)^2} \le \sqrt{4t^2(4t^2-4)}+2$, $t>1$, (15").
Dacă $4t^2=5$ obținem $\sqrt[3]{80} \le \sqrt{5}+2 \Leftrightarrow 80 \le (\sqrt{5}+2)^3 \Leftrightarrow 42 \le 17\sqrt{5}$ (fals).
Dar pentru b=c=1 şi $a=\sqrt{2}$, inegalitatea este adevărată.

Observatia 3. *Inegalitatea:* $\sqrt[3]{(2a^2+2b^2-c^2)(2b^2+2c^2-a^2)(2c^2+2a^2-b^2)} \le ab+bc+ca$, (16).
nu este adevărată în orice triunghi.
Într-adevăr, pentru $a=13, b=5, c=12$ obținem $\sqrt[3]{244\cdot 576\cdot 169} \le 281$ (fals)
În încheierea acestei lucrări propun inegalitatea:
$\sqrt[3]{(2a^2+2b^2-c^2)(2b^2+2c^2-a^2)(2c^2+2b^2-a^2)} \le 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-a)^2+(c-a)^2$, (17).

Bibliografie:
[1]. **Ion Ionescu**, *Problema 273*, Gazeta Matematică vol. 3 (1897), nr. 2.
[2]. **A. Engel**, *Probleme de matematică – strategii de rezolvare* . Editura Gil, 2006. (pag. 206-210).
[3]. **D.M. Bătineţu – Giurgiu, N. Stanciu**, *Inegalităţi de tip Ionescu-Weintzenböck*, Gazeta Matematică nr. 1/2013
[4]. **M.O. Drimbe**, *Inegalităţi, idei şi metode*, Editura GIL, pag. 137-141.

Dezvoltări ale inegalității lui A. Padoa

de prof. Marin Chirciu, Piteşti[1]

În" Geometric Inequalities" de O.Bottema,R.Z.Djordjevic,R.R.Janic,D.S.Mitrinovic, P.M.Vasic, Groningen 1969, The Netherlands, itemul 1.5, pagina 12, are următorul enunț:

„În orice triunghi are loc inegalitatea: $3(a+b)(b+c)(c+a) \le 8\left(a^3+b^3+c^3\right)$**".**

A.Padoa, Period. Mat.(4)5(1925)

Soluție: Folosim identitățile: $(a+b)(b+c)(c+a)=2p\left(p^2+r^2+2Rr\right)$ şi
$a^3+b^3+c^3=2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)$.
Inegalitatea se scrie: $3\cdot 2p\left(p^2+r^2+2Rr\right) \le 8\cdot 2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \mid :2p \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3\left(p^2+r^2+2Rr\right) \le 8\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \Leftrightarrow 5p^2 \ge 54Rr+27r^2$, adevărată din **inegalitatea lui Gerretsen**: $p^2 \ge 16Rr-5r^2$. Rămâne de demonstrat că $5\left(16Rr-5r^2\right) \ge 54Rr+27r^2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow R \ge 2r$, inegalitatea lui Euler. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.
Articolul propune dezvoltări ale inegalității de mai sus**.**
În orice triunghi are loc inegalitatea:
$n\left(a^3+b^3+c^3\right) \ge (a+b)(b+c)(c+a)+(3n-8)abc$ **, unde** $n \ge 1$**.**

Dezvoltare, Marin Chirciu, Piteşti

Soluție: Inegalitatea se scrie: $n\cdot 2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \ge 2p\left(p^2+r^2+2Rr\right)+(3n-8)\cdot 4Rrp \mid :2p \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \ge p^2+r^2+2Rr+(6n-16)Rr \Leftrightarrow (n-1)p^2 \ge (12n-14)Rr+(3n+1)r^2$

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu", Pitești*

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$. Rămâne să demonstrăm că:

$(n-1)\left(16Rr-5r^2\right) \geq (12n-14)Rr + (3n+1)r^2 \Big| : r \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (n-1)(16R-5r) \geq (12n-14)R + (3n+1)r \Leftrightarrow (4n-2)R \geq (8n-4)r \Big| : (4n\text{-}2) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R \geq 2r$, inegalitatea lui Euler.

Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

Notă: Pentru $n = \frac{8}{3}$ se obține inegalitatea lui A. Padoa.

În orice triunghi are loc inegalitatea:

$8\left(a^3+b^3+c^3\right) \geq n(a+b+c)\sum(b-c)^2 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$, unde $n \leq \frac{5}{2}$.

Dezvoltare, Marin Chirciu, Piteşti

Soluție: Folosim identitățile: $\sum a = 2p,\ \sum a^2 = 2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right),\ \sum bc = p^2 + r^2 + 4Rr$,

$\sum a^3 = 2p\left(p^2 - 3r^2 - 6Rr\right)$ şi $\prod(b+c) = 2p\left(p^2 + r^2 + 2Rr\right)$.

Inegalitatea se scrie: $8 \cdot 2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq n \cdot 2p\left[2\sum a^2 - 2\sum bc\right] + 3 \cdot 2p\left(p^2+r^2+2Rr\right) \Big| : 2p \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq 2n\left[2\left(p^2-r^2-4Rr\right) - 2\left(p^2+r^2+4Rr\right)\right] + 3\left(p^2+r^2+2Rr\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8p^2 - 24r^2 - 48Rr \geq 2n\left(p^2-3r^2-12Rr\right) + 3p^2 + 3r^2 + 6Rr \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5p^2 - 27r^2 - 54Rr \geq 2n\left(p^2-3r^2-12Rr\right) \Leftrightarrow (5-2n)p^2 \geq (27-6n)r^2 + (54-24n)Rr$,

adevărată din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ şi condiția $5 - 2n \geq 0$.

Rămâne să demonstrăm că: $(5-2n)\left(16Rr-5r^2\right) \geq (27-6n)r^2 + (54-24n)Rr \Big| : r \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (5-2n)(16R-5r) \geq (27-6n)r + (54-24n)R \Big| : r \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (80-32n)R + (10n-25)r \geq (27-6n)r + (54-24n)R \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (80-32n-54+24n)R \geq (27-6n+25-10n)r \Leftrightarrow (13-4n)R \geq (26-8n)r \Leftrightarrow R \geq 2r$, inegalitatea lui Euler.

Obs: $13 - 4n > 0$ pentru $n \leq \frac{5}{2}$. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

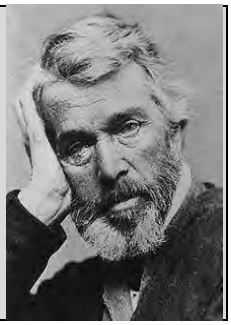
Notă: Pentru $n = 0$ se obține inegalitatea lui A. Padoa.

Bibliografie:

O.Bottema,R.Z.Djordjevic,R.R.Janic,D.S.Mitrinovic,P.M.Vasic,Geometric Inequalities, Groningen 1969, The Netherlands.
Marin Chirciu, Inegalităţi geometrice, de la iniţiere la performanţă, Editura Paralela 45, Piteşti, 2015.
Marin Chirciu, Inegalităţi trigonometrice, de la iniţiere la performanţă, Editura Paralela 45, Piteşti, 2016.

„ Inteligența nu este o unealtă precum suntem aplecați să ne-o închipuim: este o mână care poate mînui orice unealtă ”.

Thomas Carlyle
(1795 - 1881)



Modele aplicative pentru calculul primitivelor unor funcţii cu ajutorul " formulei de integrare prin părţi"

de prof. Elena şi Constantin Ciobîcă, Fălticeni

- VI -

În cadrul modelului VI avem câteva tipuri de integrale:

1. $\int u(x)\cdot u'(x)\cdot \sin^2 u(x)dx, x\in D_u\cap D'_u$,

2. $\int \frac{q'(x)}{\sqrt[3]{q(x)}}\cdot \sin^2\left(\sqrt[3]{q(x)}\right)dx; x\in D_u\cap D'_u\ q(x)\neq 0\ ,\forall x\in D, q: D\to R$.

3. $\int \frac{u(x)}{v(x)}\cdot\left[\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}\right]\cdot \sin^2\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)dx, x\in D_u\cap D'_u,\ v(x)\neq 0\ ,\forall x\in D$.

4. $\int u(x)\cdot v(x)\cdot\left[u'\left(x\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)\right)\right]\cdot \sin^2\left[u(x)\cdot v(x)\right]dx, x\in D_u\cap D'_u$. 5. $\int u'(x)\cdot \sin^2 u(x)dx$.

5. $\int\left[n\cdot f^{n-1}(x)\cdot g^n(x)\cdot f'(x)+n\cdot f^n(x)\cdot g^{n-1}(x)\cdot g'(x)\right]\cdot \sin^2\left\{\left[f(x)\cdot g(x)\right]^n\right\}dx, x\in D_u\cap D'_u$ unde.

$n\in N^*$, şi $u,v,f,g: D\to\mathbb{R}$ sunt funcţii derivabile cu derivatele funcţii continue,.

Demonstraţie.

1. $\int u(x)\cdot u'(x)\cdot \sin^2 u(x)dx, x\in D_u\cap D'_u$

Rezolvare: $f'(x)=u'(x)\cdot \sin u(x)\Rightarrow f(x)=\int u'(x)\cdot \sin u(x)dx=-\cos u(x)$

$g(x)=u(x)\cdot \sin u(x)\Rightarrow g'(x)=u'(x)\cdot \sin u(x)+u(x)\cdot u'(x)\cos u(x)$

Aplicăm (formula de integrare prin părţi): „ $f(x)\cdot g(x)-\int f(x)\cdot g'(x)dx$ ":

$I=-u(x)\cdot\left[\sin u(x)\right]\cdot\cos u(x)+\int u'(x)\cdot\left[\sin u(x)\right]\cos u(x)dx+\int u(x)\cdot u'(x)\cdot\cos^2 u(x)dx$

$I=-u(x)\cdot\left[\sin u(x)\right]\cdot\cos u(x)+\frac{1}{2}\cdot\int u'(x)\cdot\left[\sin 2u(x)\right]dx+\int u(x)\cdot u'(x)dx-\int u(x)\cdot u'(x)\sin^2 u(x)dx$

$2I=-u(x)\cdot\left[\sin u(x)\right]\cdot\cos u(x)-\frac{1}{4}\cdot\left[\cos 2u(x)\right]+\frac{u^2(x)}{2}+c$, de unde rezultă I.

3. $\int \frac{q'(x)}{\sqrt[3]{q(x)}}\cdot \sin^2\left(\sqrt[3]{q(x)}\right)dx, x\in D_u\cap D'_u; q(x)\neq 0\ ,\forall x\in D, q: D\to R$

Rezolvare: Notăm cu $u(x)=\sqrt[3]{q(x)}\Rightarrow u'(x)=\frac{q'(x)}{3\sqrt[3]{q(x)}}$. Aplicăm exerciţiul 4) de la exerciţii propuse:

$I=-\frac{1}{4}\cdot\sin 2u(x)+\frac{u(x)}{2}+c\Rightarrow I=-\frac{1}{4}\cdot\sin 2\sqrt[3]{q(x)}+\frac{\sqrt[3]{q(x)}}{2}+c$

3. $\int \frac{u(x)}{v(x)}\cdot\left[\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}\right]\cdot \sin^2\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)dx, x\in D_u\cap D'_u$. Unde $u,v: D\to R$ funcţii derivabile cu derivatele funcţii continue ; $v(x)\neq 0\ ,\forall x\in D$.

Rezolvare:

Notăm cu $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}\Rightarrow f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$ atunci integrala devine:

$I=\int f(x)\cdot f'(x)\cdot \sin^2 f(x)dx$. Aplicăm tipul 1): $\int u(x)\cdot u'(x)\cdot \sin^2 u(x)dx$

$$I=-\frac{1}{2}\cdot f(x)\cdot[\sin f(x)]\cdot\cos f(x)-\frac{1}{8}\cdot[\cos 2f(x)]+\frac{f^2(x)}{4}+c$$

$$I=-\frac{1}{2}\cdot\frac{u(x)}{v(x)}\cdot\left[\sin\frac{u(x)}{v(x)}\right]\cdot\cos\frac{u(x)}{v(x)}-\frac{1}{8}\cdot\left[\cos 2\frac{u(x)}{v(x)}\right]+\frac{\frac{u(x)}{v(x)^2}}{4}+c$$

4. $\int u(x)\cdot v(x)\cdot\left[u'\left(x\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)\right)\right]\cdot\sin^2[u(x)\cdot v(x)]dx,\quad x\in D_u\cap D'_u$. Unde $u,v:D\to R$ funcții derivabile cu derivatele funcții continue.

Rezolvare: Notăm cu $f(x)=u(x)\cdot v(x)$ atunci $f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$ Integrala devine:

$I=\int f(x)\cdot f'(x)\cdot\sin^2 f(x)dx$. Aplicăm tipul 1): $\int u(x)\cdot u'(x)\cdot\sin^2 u(x)dx$

$$I=-\frac{1}{2}\cdot f(x)\cdot[\sin f(x)]\cdot\cos f(x)-\frac{1}{8}\cdot[\cos 2f(x)]+\frac{f^2(x)}{4}+c$$

$$I=-\frac{1}{2}\cdot u(x)\cdot v(x)\cdot[\sin u(x)\cdot v(x)]\cdot\cos u(x)\cdot v(x)-\frac{1}{8}\cdot[\cos 2u(x)\cdot v(x)]+\frac{u^2(x)\cdot v^2(x)}{4}+c$$

Exerciții propuse:

1. $\int\sin^2 xdx, x\in\mathbb{R}$; **2.** $\int x\cdot\left(x^2+1\right)\cdot\sin^2\left(x^2+1\right)dx\quad, x\in\mathbb{R}$;

3. $\int\left(ax^2+bx+c\right)\cdot(2ax+b)\cdot\sin^2\left(ax^2+bx+c\right)dx, x\in\mathbb{R}; a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$;

4. $\int u'(x)\cdot\sin^2 u(x)dx, x\in D_u\cap D'_u$.

Rezolvare:

1. $\int\sin^2 xdx, x\in R$.

Rezolvare: $I=\int(\sin x)\cdot(\sin x)dx$;

$f'(x)=\sin x\Rightarrow f(x)=\int\sin xdx=-\cos x$; $g(x)=\sin x\Rightarrow g'(x)=(\sin x)'=\cos x$. Aplicăm (f.i.p.):

$I=-\cos x\cdot\sin x+\int\cos^2 xdx=-\frac{1}{2}\cdot\sin(2x)+x-\int\sin^2 xdx$; $I=-\frac{1}{4}\cdot\sin(2x)+\frac{x}{2}+c$

2. $\int x\cdot\left(x^2+1\right)\cdot\sin^2\left(x^2+1\right)dx\quad, x\in R$

Rezolvare: Aplicăm tipul 1. de integrală unde $u(x)=x^2+1$.

$$\Rightarrow I=-\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+1\right)\cdot\left[\sin\left(x^2+1\right)\right]\cdot\cos\left(x^2+1\right)-\frac{1}{8}\cdot\cos 2\left(x^2+1\right)+\frac{\left(x^2+1\right)^2}{4}+c$$

3. $\int\left(ax^2+bx+c\right)\cdot(2ax+b)\cdot\sin^2\left(ax^2+bx+c\right)dx, x\in R; a,b,c\in R, a\neq 0$.

Rezolvare: Aplicăm tipul 1. de integrală unde $u(x)=ax^2+bx+1$ și obținem:

$$\Rightarrow I=-\frac{1}{2}\cdot\left(ax^2+bx+1\right)\cdot\left[\sin\left(ax^2+bx+1\right)\right]\cdot\cos\left(ax^2+bx+1\right)-\frac{1}{8}\cdot\cos 2\left(ax^2+bx+1\right)+\frac{\left(ax^2+bx+1\right)^2}{4}+c$$

4. $\int u'(x)\cdot\sin^2 u(x)dx, x\in D_u\cap D'_u$. Unde $u:D\to R$ o funcție derivabilă cu derivata funcție continuă.

Rezolvare: $f'(x)=u'(x)\sin u(x)\Rightarrow f(x)=\int u'(x)\cdot\sin u(x)dx=-\cos u(x)$

$g(x)=\sin u(x)\Rightarrow g'(x)=u'(x)\cdot\cos u(x)$. Aplicăm (formula de integrare prin părți):

$$I=-\left[\sin u(x)\right]\cdot\cos u(x)+\int u'(x)\cdot\cos^2 u(x)dx=\frac{-1}{2}\sin 2u(x)+\int u'(x)dx-\int u'(x)\sin^2 u(x)dx$$

$$2I=-\frac{1}{2}\cdot\sin 2u(x)+u(x)+c\Rightarrow I=-\frac{1}{4}\cdot\sin 2u(x)+\frac{u(x)}{2}+c.$$

Profesori, Colegiul „Vasile Lovinescu”, Fălticeni

Aventuri (Peripiții) în jurul anului calendaristic 2017

Prof. Kovács Béla, Satu Mare**, Prof dr. Mihály Bencze,** Bucureşti

Numerele prime sunt acele numere naturale, care au exact doi divizori: 1 şi numărul însuşi. Aşadar 2017 este un număr prim.

Numerele prime sunt pietrele de bază ale aritmeticii. Mulțimea numerelor prime este una sistematică, complexă, misterioasă, cu multe probleme nerezolvate, cu afirmații nedemonstrate. Totuşi este de o importanță deosebită. Vom intra puțin în această lume interesantă.

Apare destul de rar ca anul calendaristic să fie număr prim.

Prezentăm cîțiva dintre aceşti ani dinainte şi după anul 2017.

1987, 1993, 1997, 1999, 2003, 2011, **2017**, 2027, 2029, 2039, 2053, 2063, 2069

Câțiva ani, care nu sunt numere prime, cu descompunerea lor în factori:

$2007 = 9 \cdot 223$; $2009 = 41 \cdot 49$; $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$; $2019 = 3 \cdot 673$;
$2021 = 43 \cdot 47$; $2023 = 7 \cdot 17^2$;

Prezentăm scrierea numărului 2017 folosind numai numere prime.

1. Nu este posibil scrierea numărului 2017 ca suma a două numere prime.
2. Se poate scrie ca suma a trei numere prime:

$2017 = 5 + 19 + 1993$; $2017 = 3 + 17 + 1997$; $2017 = 5 + 13 + 1999$;
$2017 = 3 + 11 + 2003$; $2017 = 661 + 673 + 683$; $2017 = 337 + 733 + 947$;
$2017 = 101 + 907 + 1009$; $2017 = 307 + 701 + 1009$;

3. $2017 = 667 + 671 + 679 = 23 \cdot 29 + 11 \cdot 61 + 7 \cdot 97$ cu şase numere prime
4. Ca suma a patru numere prime:
   $2017 = 2 + 659 + 673 + 683$ $2017 = 2 + 5 + 7 + 2003$
5. Cu patru numere prime folosind operațiile de adunare şi inmulțire:
   $2017 = 2 + 5 \cdot 13 \cdot 31$ $2017 = 3 + 2 \cdot 19 \cdot 53$
6. Cu 5 numere prime: $2017 = 3^7 - 2 \cdot 5 \cdot 17$ $2017 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 + 7$
7. Cu primele 6 numere prime: (2, 3, 5, 7, 11, 13)
   $2017 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 3 \cdot 5$ $2017 = 2^{11} - 3(13 - 5) - 7$
8. Cu factoriale:
   $2017 = 2 \cdot 6! + 5 \cdot 5! - 4! + 1!$ $2017 = 2 \cdot 6! + 4 \cdot 5! + 4 \cdot 4! + 1 \cdot 1!$

Scrierea numerelor naturale cu cifrele numărului 2017 în această ordine:

$1 = 2^0 \cdot 1^7$	$2 = 2^0 + 1^7$	$3 = 20 - 17$	$4 = 2(0! + 1^7)$
$5 = (2 + 0!)! - 1^7$	$6 = (2 + 0 + 1^7)!$	$7 = 2 \cdot 0 \cdot 1 + 7$	$8 = 2^0 + 1 \cdot 7$
$9 = 2 + 0 + 1 \cdot 7$	$10 = 2 + 0 + 1 + 7$	$11 = 2 + 0! + 1 + 7$	$12 = 20 - 1 - 7$
$13 = 20 - 1 \cdot 7$	$14 = 20 + 1 - 7$	$15 = -2 + 0 + 17$	$16 = -2^0 + 17$
$17 = 2 \cdot 0 + 17$	$18 = 2^0 + 17$	$19 = 2 + 0 + 17$	$20 = 2 + 0! + 17$
$21 = 20 + 1^7$.			

Scrierea numărului 2017 folosind puteri:

$2017 = 9^2 + 44^2$	$2017 = 45^2 - 2^3$
$2017 = 31^2 + 32^2 + 2^5$	$2017 = 3^6 + 6^4 - 2^3$
$2017 = 5^2 + 7^3 + 5^4 + 4^5$	$2017 = 31^2 + 32^2 + 6^2 - 2^2$
$2017 = 12^3 + 17^2$	$2017 = 11^3 + 2 \cdot 7^3$
$2017 = 2^{11} - 2^5 + 2^0$	$2017 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^0$
$2017 = 3^6 + 4^4 + 5^4 + 7^3 + 8^2$	$2017 = 1^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3$
$2017 = 3^7 - 3^5 + 3^4 - 3^2 + 3^0$	$2017 = 7^4 - 7^3 - 7^2 + 7 + 7^0$

Alte egalități, interesante:

$2017 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 + 1) + 1) + 1) + 1) + 1) + 1$.

$2017 = 321 \cdot 2\pi + 0.09751639535\ldots$ Aproape este un multiplu de 2π .

$\sin(2017) = 0{,}09736191431\ldots$ $\cos(2017) = 0{,}99524904302\ldots$

$\tg(2017) = 0{,}09782668468$ $\sin^2(2017) + \cos^2(2017) = 1$

$\left[\sqrt{2! + 0! + 1! + 7!}\right] = 71$ $\left[\sqrt[3]{2! + 0! + 1! + 7!}\right] = 17$

Geometrie şi origami

de prof. Isaia Dida- Cristina, Galați

Origami reprezintă arta japoneză a plierii hârtiei, cu scopul de a crea diverse modele, de la creaturi vii până la forme abstracte. De-a lungul timpului, origami a fost folosit în studii matematice, conducând astfel la o serie de inovații științifice, cercetătorii descoperindu-i aplicații în aeronautică, medicină, tehnologia comunicațiilor, etc.

În imaginea alăturată este un prototip de stent confecționat din oțel inoxidabil, care se introduce în artera bolnavă pliat prin tehnica origami şi se desface în arteră, asigurând un flux normal de sânge către inimă.



Trisecțiunea unghiului este una dintre problemele celebre ale antichității, care poate fi rezolvată prin plierea unui pătrat de hârtie, utilizând tehnica **origami**. **Trisecțiunea unghiului se referă la împărțirea unui unghi în trei părți egale, folosind doar rigla negradată şi compasul**.

Un pătrat de hârtie se îndoaie după linia l_1, formându-se un unghi ascuțit θ în colțul din stânga jos.

Se pliază după o linie arbitrară l_2, paralelă cu latura de jos a pătratului, apoi se pliază partea de jos a pătratului pentru a se forma l_3.

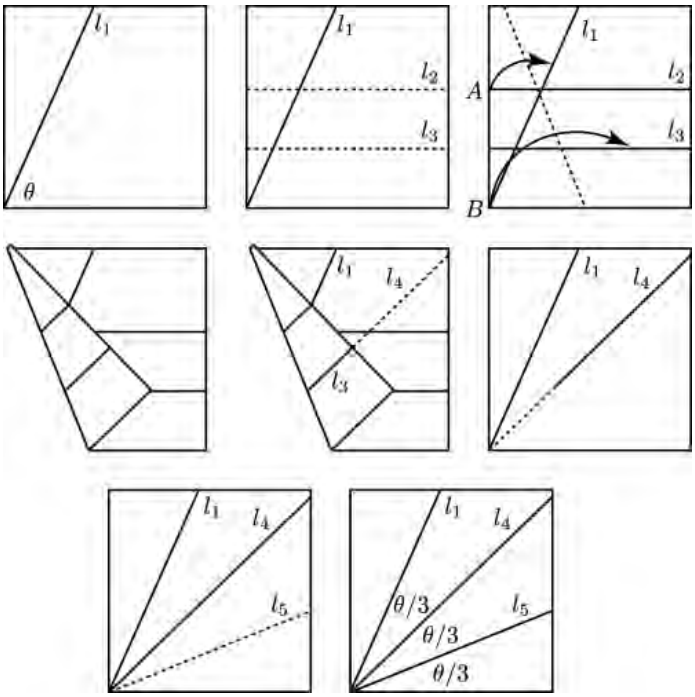
Se pliază pătratul astfel încât punctele A şi B să ajungă pe l_1, respectiv l_3.

Cu hârtia încă împăturită se repliază după l_3, pentru a se crea o nouă linie l_4.

Se despăturește hârtia şi se împăturește de-a lungul lui l_4, până în colțul B.

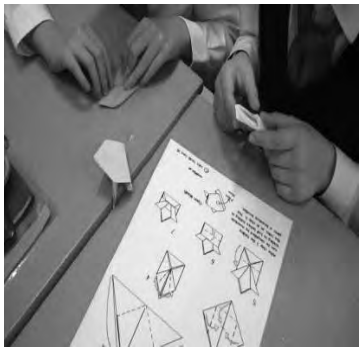
La final, se pliază marginea de jos a pătratului peste l_4, pentru a crea linia l_5. Astfel, liniile l_4 şi l_5 împart unghiul θ în trei unghiuri cu măsurile egale.

Tehnica datează din anii 1970 şi i se datorează lui Hisashi Abe.



La gimnaziu, se pot introduce noțiunile de geometrie ajutându-ne de origami. Se dezvoltă, la elevi, abilități ca: gândirea logică, viziunea în spațiu, memoria, concentrarea şi coordonarea mână-ochi. În acest mod, elevii mei de la clasa a V-a au descoperit noțiunile de segment, unghi, triunghi şi patrulater, creând modele simple de flori şi animale.





Bibliografie:

http://www.langorigami.com/files/articles/origami_constructions.pdf ;

http://www.nonformalii.ro/metode/origami-teatru/origami-si-formele-sale

Prof. Scoala Gimnazială Nr. 20 Galați.

Motto: „Să-ţi placă mai mult geometria decât aritmetica. Aritmetica este ştiinţa poporului care nu vrea altceva decât să se înmulţească, ori a negustorului dornic de câştig. Geometria este ştiinţa filosofului prieten al egalităţii, care chibzuieşte la noi rânduieli politice."

Pitagora

Instrumente matematice şi înțelegerile lor masonice

de prof. Dana Badea, Ploieşti

Răspunzând unei nevoi asemănătoare nevoii de a cunoaşte o limbă în vederea exprimării în mod liber a gândurilor şi sentimentelor, matematica a constituit pentru om o interfață de potrivire a gândului cu percepția universului real accesibilă oricui .

Instrumentele prin care primii matematicieni au desenat primele figuri şi corpuri geometrice ne sunt cunoscute tuturor: rigla,compasul şi echerul. În ciuda întrebuințării lor primordiale, oamenii au asociat prin diferite procedeuri sensuri şi simboluri diverse acestora.

Unul dintre cele mai notabile exemple este acela al grupării numite francmasonerie care a atribuit acestor obiecte, banale în viziunea generațiilor actuale, sensuri de căpătâi în această asociație .

Francmasoneria, ca instituție, este un ordin inițiatic ai cărei membri sunt înfrățiți prin idealuri comune morale, spirituale şi sociale , prin inițierea conformă unui ritual comun, prin jurământul depus pe una din cărțile sfinte ale marilor religii (Biblia, Coranul, Dao de Jing, Vedele hinduse, Tripitaka budiste, sau alte scrieri considerate sacre) şi, în majoritatea ramificațiilor, de credință într-o „Ființă Supremă", un „Mare Arhitect al Universului". Organizațiile masonice, prezente în majoritatea țărilor, se regăsesc sub forma obediențelor autonome, mari loje sau Mare Orient (grupări de loji) .

Însă, potrivit definiției date de masonii înşişi, masoneria este :„o asociație de oameni liberi şi de bune moravuri care conlucrează pentru binele şi progresul societății prin perfecționarea morală şi intelectuală a membrilor săi".

Să urmărim simbolistica instrumentelor geometrice date de masoni.

Rigla - emblema perfecțiunii şi a ordinii care rezultă din acțiunea justă şi echilibrată, este din timpuri străvechi instrumentul de comparație a mărimii şi de măsurare a armoniei proporțiilor. Citată în Biblie, era chiar şi instrumentul cu care divinitatea egipteană Ptah măsura creşterea apelor Nilului şi semnifică norma. Oricare era scala utilizată, exista necesitatea confruntării lucrării cu nişte parametri stabili. Este şi simbolul celor 24 de ore ale zilei, dintre care o parte ar trebui dedicată gândului, una lucrului, una odihnei şi una celor care au nevoie de ajutor.

Delta - numită şi Triunghiul lui Solomon, triunghiul echilateral şi-a luat numele după forma majusculă a celei de-a patra litere a alfabetului grec. Reprezentarea geometrică a lui trei (principiul triplicității) este extrem de important în simbolistica constructorilor, în tradiția pitagoreică semnifică asceza multiplului către Unul, în cea creştină - trinitatea şi în multe alte filosofii - divinitatea ca Perfectiune. În Templu, Delta luminoasă este aşezată în partea de est şi are în centru fie litera G, căreia i se dau multiple interpretrări (Dumnezeu - God, Cunoaştere – Gnosi, Geneza sau Geometria care este definită drept „cea mai nobilă dintre ştiințe"şi „fundația pe care se ridică suprastructura masoneriei"), fie tetragrama ebraică, fie schema pitagoreică, fie ochiul divin simbol al principiului creator, fie soarele - principiu luminos al vieții.

Echerul şi compasul sunt simbolurile de bază ale masoneriei, necesare pentru ridicarea unor edificii stabile şi drepte. **Echerul şi compasul** sunt simbolurile universale ale maestrului mason şi ale Francmasoneriei. Fără **compas** nu se poate alcătui un **echer**, iar fără **echer** nu se poate construi un Templu. Ele sunt, fiecare în parte, o Mare Lumină masonică. Prin analogie, devin simboluri ale virtuții şi conştiinței care conduc la perfecționarea spiritului.

În această cheie se poate identifica în **echer**, moralitatea şi în **compas**, spiritualitatea. În alți termeni, **echerul** simbolizează sinceritatea şi justitia intenției, a hotărârii şi a operei, adică reprezintă o obligație, o normă imuabilă, un trebuie, în vreme ce **compasul** semnifică hotărârea, capacitatea, geniul.

Compasul este emblematic pentru înfrânarea patimilor (lăcomie, manie, judecată nedreaptă, intoleranță, egoism), al principalelor doctrine ale Ordinului, al cunoaşterii şi priceperii. Utilizat pentru a trasa cercuri, compasul reprezintă tărâmul spiritualității şi eternității, şi simbolizează principiul limitării şi definitului, dar şi pe cel al infinitelor granițe. Heraldica lui masonică ține de triunghiul cu vârful în sus, care e un simbol celebru al spiritualului şi al Divinității.

Echerul masoară pătratul, simbolul pământului şi al lumii materiale, este simbol al rectitudinii morale în conduită, al cinstei şi onestității. **Echerul** este o unealtă alcătuită din două elemente care se întâlnesc în unghi drept. Acesta era unghiul potrivit pentru a ridica în piatră ziduri perpendiculare şi solide. De aici i s-a spus omului vertical şi bine intemeiat, adică omului moral: om drept. Heraldica lui masonică îl arată ca pe un triunghi cu vârful în jos, indicând astfel lucrarea asupra materiei.

Împreună, **echerul şi compasul** reflectă convergența spiritului cu materia, a responsabilităților lumeşti cu cele spirituale. Capetele celor două instrumente formează o hexagramă, implicând unirea pământului cu cerul, a materiei cu sufletul.

Forma pătrată şi cea circulară sunt asociate cu problema lui Euclid despre cercul înscris într-un pătrat, despre care se spune că ar fi principalul obiectiv al masoneriei. Înscrierea cercului în pătrat nu se referă în acest caz la matematică, ci la năzuința fundamentală a omului de a-şi armoniza natura fizică cu cea spirituală.

Încă din antichitate, pătratul a fost un însemn al trupului fizic. În acelaşi timp, pătratul semnifică echilibrul, fermitatea şi stabilitatea. Cercul pe de alta parte, a fost dintotdeuna asociat cu sufletul. **Echerul şi compasul** simbolizează aşadar starea umană constând dintr-un suflet etern aflat într-un trup pieritor. Cercul este latura noastră spirituală, care nu poate fi văzută, auzită, atinsă, gustată ori mirosită. Este interiorul, autenticul, perfectul sine, acea parte a noastră pe care o percepem atunci când închidem ochii şi ne gândim la „eu”.

Compasul este, cu toate acestea, legat de **echer sau pătrat**. Spiritul întruchipat de cerc este legat de trup. Cele patru laturi ale pătratului duc cu gândul la repere de bază ale existenței: cele patru puncte cardinale, cele 4 anotimpuri, cele patru elemente (pământ, aer, apă, foc), cele patru stări ale materiei (solidă, lichidă, gazoasă, plasmatică).

Viața umană este vulnerabilă şi temporară, în contrast cu invulnerabilitatea şi permanența sufletului, iar cele două instrumente, echerul şi compasul simbolizează această dublă natură a omului. Şi să remarcăm faptul că în toate construcțiile masonice poate fi regăsită o profundă relaționare între cercuri şi pătrate. Este o constanță a temei geometrice masonice, a luminii spirituale (sufletul) manifestându-se în lumea fizică (trupul). Nu este vorba numai de simple cercuri şi pătrate, ci despre o armonizare a acestora într-o împăcare a extremelor.

Prof. , Şcoala Gimnazială “Petru Rareş” Ploieşti

Sitografie:
http://www.interferente.ro
ro.wikipedia.org/wiki/
http://www.scribd.com/

„Nu spune tot ce ştii, tot ce datorezi, tot ce ai şi tot ce poți”.
Benjamin Franklin
(1706-1790)



„ Înțelegerea corectă a unui lucru luminează memoria ca fulgerul ”.
Jan Amos Comenius
(1592- 1670)



3. Probleme rezolvate

▪ Clasa a V-a

G: 636. Determinați mulțimile A, B şi C ştiind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

1) $A\cup B\cup C=\{2008;2009;2010;2011\}$; **2)** $A\setminus B=\{2008;2009\}$;

3) $A\setminus C=\{2009;2010\}$; **4)** $B\setminus C=\{2010;2011\}$.

Doina şi Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

Din 2) rezultă $2008\in A,\ 2008\notin B$, $2009\in A,\ 2009\notin B$. Din 3) $2010\in A,\ 2010\notin C,\ 2009\notin C$.

Din 4) $2010\in B,\ 2011\in B,\ 2011\notin C$. Aşadar, rezultă $2008\in C,\ 2011\notin A$.

Se obțin $A=\{2008;2009;2010\}$, $B=\{2010;2011\}$, $C=\{2008\}$.

G: 637. Găsiți numerele naturale $\overline{ab}$ astfel încât $\overline{ab}=a^2+b^3$. **Nicolae Ivăşchescu**, Canada

Rezolvare:

Cum $\overline{ab}=10a+b\Rightarrow 10a-a^2=b^3-b\Leftrightarrow a(10-a)=(b-1)b(b+1)$. Cum membrul drept este un produs de trei cifre, deci divizibil cu 6, rezultă că a = 6 sau a = 4. Aşadar, $\overline{ab}\in\{63;43\}$.

G: 638. Un număr zecimal este mai mic decât 0,03 şi are 4 zecimale. Zecimalele a doua şi a patra, diferite între ele, au suma de trei ori cât diferența lor (în ordinea dată). Aflați numărul.

Ion Stănescu, Buzău

Rezolvare: Fie $n=\overline{0,0abc}$. Cum a+c = 3(a-c) rezultă a = 2c.

În condițiile problemei, a = 2, c = 1. Atunci, $n=\overline{0,02b1}$ cu $b\in\{0;1;2;.....;9\}$.

G: 639. Găsiți numerele naturale $\overline{abc}$ pentru care $a+b^c+c^b=\overline{cc}$, cu a,b,c prime, distincte.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

***Rezolvare*:** Evident, b şi c sunt mai mici decât 5.

Pentru $b=2,\ c=5\Rightarrow a=9$, dar a trebuie să fie prim.

Analog, nu convin situațiile a=2, b=3, c=5; a=3, b=2, c=5;

Singurele soluții sunt a=5, b=3, c=2 şi a=5, b=2, c=3 aşadar, $\overline{abc}\in\{523;532\}$.

G: 640. Să se determine perechile $(x;y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ştiind că $\overline{0,xx(y)}-\overline{0,yy(x)}=0,01(5)\cdot 7$.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare:

$$\overline{0,xx(y)}-\overline{0,yy(x)}=\frac{110x+y-10x-x-110y-x+10y+y}{900}=\frac{100(x-y)-2(x-y)}{900}=\frac{98(x-y)}{900}.$$

Cum $0,01(5)\cdot 7=\frac{14}{900}\cdot 7=\frac{98}{900}$, atunci din $\frac{98(x-y)}{900}=\frac{98}{900}\Rightarrow x-y=1\Rightarrow y=x-1$.

Aşadar, $(x;y)\in\{(x;x-1)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\,|\,x=2,3,4,.....,8,9\}$.

G: 641. a) Arătați că există o infinitate de triplete de numere naturale $(x;y;z)$ pentru care numărul $3^x+3^y+3^z$ este pătrat perfect.
b) Arătați că nu există niciun triplet de numere naturale $(x;y;z)$ pentru care numărul $6^x+6^y+6^z$ să fie pătrat perfect.

Marin Chirciu, Piteşti

Rezolvare:

a) Pentru $x=y=z=2n+1,\ n\in\mathbb{N}$ obținem: $3^{2n+1}+3^{2n+1}+3^{2n+1}=\left(3^{n+1}\right)^2$. Evident, mulțimea $\{(2n+1;2n+1;2n+1)|n\in\mathbb{N}\}$ este infinită.

b) $u\left(6^x+6^y+6^z\right)\in\{3;8\}$. Cum nu există pătrate perfecte cu ultima cifră 3 sau 8, rezultă $6^x+6^y+6^z$ nu e pătrat perfect.

G: 642. Să se arate că dacă numărul $x_n=3^{2016}+3^{2017}+3^{2018}+3^{2019}+3^n,\ n\in\mathbb{N}$ este pătrat perfect, atunci $n\in\{4k,4k+2\},\ k\in\mathbb{N}$. Să se dea exemplu de două pătrate perfecte de forma x_n.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu, **Viorica Dogaru**, Giurgiu

Rezolvare:

Observăm că numărul $x_n=3^{2016}+3^{2017}+3^{2018}+3^{2019}+3^n=3^{2016}(1+3+3^2+3^3)+3^n=3^{2016}\cdot 40+3^n$ are ultima cifră dată de ultima cifră a lui 3^n, $u(3^n)\in\{1;3,7,9\}$. Pe de altă parte, dacă x_n este pătrat perfect, atunci $u(x_n)\in\{0,1,4,5,6,9\}$. Aşadar, se obține că doar pentru $n\in\{4k,4k+2\}$, $u(3^n)\in\{0;1;4;5;6;9\}$, deci, x_n poate fi pătrat perfect. (deoarece nu pentru orice n de forma 4k sau 4k +2, x(n) este pătrat perfect)
Pentru n = 2020 se obține $x_{2020}=3^{2016}\cdot(40+3^4)=3^{2016}\cdot 11^2$ care este pătrat perfect. Analog, pentru n = 2018, $x_{2018}=3^{2016}\cdot(40+3^2)=3^{2016}\cdot 7^2$.

G: 643. a) Aflați restul împărțirii numărului 2022 la 49;
b) Scrieți numărul 2122 ca sumă a şase pătrate perfecte distincte.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu, **Viorica Dogaru**, Giurgiu

***Rezolvare*:**

a) $2022=49\cdot 41+13$, şi restul este r = 13;

b) $2022=7^2\cdot 41+4+9=2^2+3^2+7^2\cdot(1+4+36)=2^2+3^2+7^2+14^2+42^2$. Atunci,

$2122=100+2022=10^2+2^2+3^2+7^2+14^2+42^2$.

G: 644. Determinați $x\in\mathbb{N}$ astfel încât $x^3+25=333....33$. (n cifre de 3).

Luiza Dumitrescu, Craiova

Rezolvare:

Pentru x = 2 se obține singura soluție (8+25=33), căci, pentru $x\geq 3$, obținem $x^3=333....3308\Rightarrow$ x este par, $x^3\vdots 8$, dar $333....3308$ nu se divide cu 8.

G: 645. Verificați dacă suma pătratelor primelor 2017 numere naturale prime este număr prim.

Marian Ciuperceanu, Craiova

Rezolvare:

Cu excepția primului număr prim , 2 care este par, celelalte 2016 numere prime sunt impare, iar pătratele lor sunt, de asemenea, impare şi avem:

$p_1^{\,2}+p_2^{\,2}+p_3^{\,2}+....+p_{2017}^{\,2}=2^2+p_1^{\,2}+p_2^{\,2}+....+p_{2017}^{\,2}=par+par=par\neq impar$

Deci suma pătratelor primelor 2017 numere naturale prime nu este număr prim.

G: 646. Aflați toate numerele naturale x, y, z care verifică ecuația $2^x + 4^y + 6^z = 13$.

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Datorită parității observăm că egalitatea este posibilă dacă $x = 0$ sau $y = 0$ sau $z = 0$. Din analiza celor trei cazuri obținem ușor soluția unică $(x, y, z) = (3,1,0)$.

G: 647. Aflați $x \in \mathbb{N}$ știind că $x^x + (x+1)^x + (x+2)^x + (x+3)^x = 54$. **Nicolae Ivăşchescu**, Canada

Rezolvare: E suficient să-i dăm lui x valorile 1 sau 2.

Se dau valori lui x. Astfel, pentru x = 2 se obține $2^2 + (2+1)^2 + (2+2)^2 + (2+3)^2 = 54$.

G: 648. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația $xy + p^2 = qy^2$ unde p şi q sunt numere prime.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare : Ecuația se mai scrie şi sub forma $p^2 = y(qy - x)$. de unde se deduce că $y / p^2 \Rightarrow y \in \{1, p, p^2\}$.

1) Dacă $y = 1 \Rightarrow p^2 = q - x \Rightarrow x = q - p^2$; x este soluție numai dacă q ≥ p^2.

2) Dacă $y = p \Rightarrow p = qp - x \Rightarrow x = qp - p$.

3) Dacă $y = p^2 \Rightarrow 1 = qp^2 - x \Rightarrow x = qp^2 - 1$.

În concluzie: a) dacă $q \geq p^2 \Rightarrow S = \{(q - p^2, 1), (qp - p, p), (qp^2 - 1, p^2)\}$;

b) dacă $q < p^2 \Rightarrow S = \{(qp - p, p), (qp^2 - 1, p^2)\}$.

G: 649. Fie $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $2^{2x} + 2^{3y} = 2^{5z}$. Arătați că $x + y + z \geq 25$.

Marian Voinea, Bucureşti

Rezolvare:

Fie $2x \leq 3y$. Atunci, $2^{2x}\left(1 + 2^{3y-2x}\right) = 2^{5z} \Rightarrow 1 + 2^{3y-2x} \,\vdots\, 2^{5z} \Rightarrow 3y - 2x = 0 \Rightarrow 3y = 2x = 6k,\ k \in \mathbb{N}^*$.

Aşadar, $2^{2x} + 2^{3y} = 2^{5z} \Leftrightarrow 2^{6k} + 2^{6k} = 2^{5z} \Rightarrow 2^{6k+1} = 2^{5z} \Rightarrow 5z = 6k + 1 \in M_5 \Rightarrow k \in \{4; 9; 14; ....\}$.

Luând k = 4, rezultă x = 12, y = 8, z = 5, deci $x + y + z \geq 12 + 8 + 5 = 25$.

▪ Clasa a VI-a

G: 650. Fie numărul $N = \underbrace{3333.....3}_{n \text{ de } 3}$. Aflați numărul natural x astfel încât $x^2 + 8 = N$.

elevă Denisa Draghia, Nicolae Tomescu, Craiova

Rezolvare:

Pentru n=2 obținem singura soluție x=5, $5^2 + 8 = 33$, deoarece pentru $n \geq 3$ se obține

$x^2 = \underbrace{3333...325}_{n-1} = \underbrace{333.....320}_{\vdots 8} + 5 \Rightarrow x^2 = M_8 + 5$, contradicție cu faptul că $x^2 \in \{M_8, M_8 + 1, M_8 + 4\}$.

G: 651. Verificați dacă numărul $2009 \cdot 2012 \cdot 2015 \cdot 2018 + 81$ este pătrat perfect.

Marian Ciuperceanu , Craiova

Rezolvare: Notăm cu x pe 2009. Atunci, $2009 \cdot 2012 \cdot 2015 \cdot 2018 + 81 = x(x+3)(x+6)(x+9) + 81 =$

$= (x^2 + 9x)(x^2 + 9x + 18) + 81 = (x^2 + 9x)^2 + 18(x^2 + 9x) + 9^2 = (x^2 + 9x + 9)^2$.

$= (2009^2 + 9 \cdot 2009 + 9)^2 = 4054171^2$.

G: 652. Câte numere naturale de forma $\overline{abcd}$ îndeplinesc egalitatea $\overline{ab}+\overline{cd}=\overline{bc}+\overline{ad}$?

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Egalitatea din enunț devine $10a+b+10c+d=10b+c+10a+d \Leftrightarrow b=c$.

Deci, numerele din enunț au forma $\overline{abbd}$, care sunt în număr de $9\cdot 9\cdot 10=810$.

G: 653. Arătați că numărul $\overline{\underbrace{1111....1}_{2017\ de1}2\underbrace{111...1}_{2017\ de1}}$ se divide cu 121.

Lucian Tuțescu, Dan Lucian Grigore, Craiova

Rezolvare:

$\overline{\underbrace{1111....1}_{2017\ de1}2\underbrace{111...1}_{2017\ de1}}=\overline{1\underbrace{000....0}_{2016\ de\ 0}1\underbrace{111...1}_{2018\ de\ 1}}+\overline{\underbrace{1111...11}_{2017\ de\ 1}000...0}:11^2$ deoarece $1\underbrace{000....0}_{2016\ de0}1 \vdots 11$, $\underbrace{1111....1}_{2018\ de1} \vdots 11$.

G: 654. Se consideră fracția $F=\dfrac{(n+3)^3-10n}{303}$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Arătați că fracția se simplifică pentru orice n număr natural;

b) Să se determine n pentru care fracția F este echiunitară.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

a) Se va arăta că pentru orice număr natural de forma 3k, 3k+1, 3k+2 , fracția se simplifică cu 3.

Astfel, pentru n = 3k rezultă $F=\dfrac{(3k+3)^3-10\cdot 3k}{303}=\dfrac{3\left[9(k+1)^3-10k\right]}{3\cdot 101}$, pentru n = 3k+1 rezultă

$F=\dfrac{(3k+4)^3-30k-10}{303}=\dfrac{M_3+4^3-30k-10}{303}=\dfrac{M_3+3\cdot 18}{3\cdot 101}$ iar pentru n= 3k+2 obținem

$F=\dfrac{(3k+5)^3-30k-20}{303}=\dfrac{M_3+5^5-30k-20}{303}=\dfrac{M_3+3\cdot 35}{3\cdot 101}$.

b) Fracția F este echiunitară dacă şi numai dacă $(n+3)^3-10n=303 \Leftrightarrow (n+3)^3=10n+303$.

Cum ultima cifră a numărului $10n+303$ este 3 vom studia ultima cifră a lui $(n+3)^3$. Astfel, ultima cifră a lui n trebuie să fie 4. Pentru ca fracția să fie echiunitară convine doar n = 4.

G: 655. Rezolvați, în $\mathbb{Z}$, ecuația 2xy – x + 6y = 1. **Ion Stănescu**, Buzău

Rezolvare:

Cum x(2y-1) = -6y+1 rezultă $x=\dfrac{-6y+1}{2y-1}=\dfrac{-3(2y-1)-2}{2y-1}=-3-\dfrac{2}{2y-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow (2y-1)\,|\,2 \Rightarrow$

$y=1\Rightarrow x=-5$ şi $y=0\Rightarrow x=-1$. Aşadar, $S=\{(-5;1);(-1;0)\}$.

G: 656. Să se rezolve în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ecuația $x^2+3y+10=xy+7x$. **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare:

Ecuația dată este echivalentă cu $xy-3y=x^2-7x+10 \Leftrightarrow y(x-3)=x^2-6x+9-x+1 \Rightarrow$

$y=\dfrac{(x-3)^2-(x-3)-2}{x-3}=x-3-1-\dfrac{2}{x-3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\ x-3\,|\,2\Rightarrow x\in\{1,2;4;5\}\Rightarrow y\in\{-2;0\}$.

Aşadar, $(x;y)\in\{(1;-2),(2;0),(4;-2),(5;0)\}$.

G: 657. Dacă numărul a are 2n cifre toate egale cu 1, iar numărul b are n cifre toate egale cu 2, atunci numărul $\dfrac{a-b}{9}$ este un pătrat perfect, $\forall n\geq 1$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Avem

$$\frac{a-b}{9}=\frac{1}{9}\cdot\underbrace{11...1}_{2n}-\frac{1}{9}\cdot\underbrace{22...2}_{n}=\frac{1}{81}\cdot\underbrace{99...9}_{2n}-\frac{2}{81}\cdot\underbrace{99...9}_{n}=\frac{1}{81}\cdot\left(10^{2n}-1\right)-\frac{2}{81}\cdot\left(10^{n}-1\right)=\frac{10^{2n}-1-2\cdot10^{n}+2}{81}=\frac{10^{2n}-10^{n}-10^{n}+1}{81}=$$

$$\frac{10^{n}\left(10^{n}-1\right)-\left(10^{n}-1\right)}{81}=\frac{\left(10^{n}-1\right)^{2}}{9^{2}}=\left(\frac{10^{n}-1}{9}\right)^{2}=\left(\frac{\underbrace{99...9}_{n}}{9}\right)^{2}=\underbrace{11...1}_{n}{}^{2}$$, adică numărul $\frac{a-b}{9}$ este pătrat perfect.

G: 658. **Fie** $A=\left(1-\frac{2016}{2016+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2016}{2016+2}\right)\cdot\left(1-\frac{2016}{2016+3}\right)\cdot.....\cdot\left(1-\frac{2016}{2016+2015}\right)$ **şi**

$B=\left(1+2016\right)\cdot\left(1+\frac{2016}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{2016}{3}\right)\cdot.....\cdot\left(1+\frac{2016}{2015}\right)$**. Calculaţi** $A\cdot B$**.**

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Rezolvare: $A=\frac{1}{2017}\cdot\frac{2}{2018}\cdot.....\cdot\frac{2015}{2016+2015}$, $B=(1+2016)\cdot\frac{2016+2}{2}\cdot\frac{2016+3}{3}\cdot.....\cdot\frac{2016+2015}{2015}$

$$A\cdot B=\frac{1}{2017}\cdot\frac{2}{2018}\cdot.....\cdot\frac{2015}{2016+2015}\cdot\left(1+2016\right)\cdot\frac{2016+2}{2}\cdot\frac{2016+3}{3}\cdot.....\cdot\frac{2015+2016}{2015}=1.$$

G: 659. **Rezolvaţi în** $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ **ecuaţia:** $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2017}$**.** **Nicolae Ivăşchescu**, Canada

Rezolvare:

$\frac{1}{x}=\frac{1}{2017}-\frac{1}{y}\Leftrightarrow x=\frac{2017y}{y-2017}\in\mathbb{N}\Rightarrow\ y-2017\left|2017y\right.$ şi $y-2017\left|y-2017\right.\Rightarrow$

$y-2017\left|\left[2017y-2017(y-2017)\right]\right.\Rightarrow y-2017\left|2017\right.\Rightarrow\ y-2017\in\left\{1;2017;2017^{2}\right\}$.

Dând valori lui y, obţinem $S=\left\{(2017\cdot2018;2018),(2\cdot2018;2\cdot2017),(2018;2017\cdot2018)\right\}$.

G: 660. **Demonstraţi că numărul** $A=\frac{(2!)!}{(2!)^{1!}}+\frac{(3!)!}{(3!)^{2!}}+\frac{(4!)!}{(4!)^{3!}}+\frac{(5!)!}{(5!)^{4!}}$ **este un număr natural, unde**

$n!=1\cdot2\cdot3\cdot.....\cdot n$**.** **Dumitru Vieriu**, Dorohoi

Rezolvare:

Cum $(2!)^{1!}\left|(2!)!\right.$, $(3!)^{2!}\left|(3!)!\right.$, $(4!)^{3!}\left|(4!)!\right.$, $(5!)^{4!}\left|(5!)!\right.$ atunci, $A\in\mathbb{N}$.

▪ Clasa a VII-a

G: 661. **Determinaţi mulţimile** X,Y,Z **ştiind că satisfac simultan condiţiile:**

1) $X\cup Y\cup Z=\left\{1;3;5;7;9\right\}$; 2) $(X\setminus Y)\times(Y\setminus Z)=\left\{(1;5),(3;5),(1;9),(3;9)\right\}$;

3) $(Y\setminus X)\times(X\setminus Z)=\left\{(7;5),(9;5)\right\}$**.** **Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: Din 2) rezultă $1\in X,\ 1\notin Y,\ 3\in X,\ 3\notin Y,\ 5\in Y,5\notin Z,\ 9\in Y,\ 9\notin Z$;

Din 3) rezultă $7\in Y,\ 7\notin X,\ 9\in Y,\ 9\notin X,\ 5\in X,5\notin Z$. În final rezultă $X=\left\{1;3;5\right\}$, $Y=\left\{5;7;9\right\}$, $Z=\left\{1;3;7\right\}$.

G: 662. **Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia** $y^2+2y=x^4$**.** **Anicuţa Beţiu**, Craiova

Rezolvare: Ecuația dată este echivalentă cu $(y+1)^2-x^4=1\Leftrightarrow(y+1-x^2)(y+1+x^2)=1\Rightarrow$

$\begin{cases}y+1-x^2=1\\y+1+x^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ sau $\begin{cases}y+1-x^2=-1\\y+1+x^2=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=-2\end{cases}$.

G: 663. a) Aduceți la forma cea mai simplă expresia

$E=\left(x^4-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2,\ x\in\mathbb{R}.$

b) Arătați că există $n\in\mathbb{N}^*$, pentru care $n^n=4095,5^2+63,5^2+63,5$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: a) $E=x^8+x+1.$

b) Considerăm x = 8 în expresia de la a) şi obținem $\left(\frac{8191}{2}\right)^2+\left(\frac{127}{2}\right)^2+\frac{289}{4}+\frac{1}{4}=8^8+8+1\Rightarrow$

$8^8=4095,5^2+63,5^2+63,5.$

G: 664. Dacă $a^8+\frac{1}{a^8}=2,\ a\in\mathbb{R}^*$, determinați-l pe a.

Marian Ciuperceanu, Craiova

Rezolvare: $\left(a^4-\frac{1}{a^4}\right)^2=0\Leftrightarrow a^8=1\Rightarrow a\in\{-1;1\}$.

G: 665. Să se arate că $x^{2016}+x^{2014}-x^{1008}-x^{1007}+1\rangle\ 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: Notăm pe x^{1008} cu a şi x^{1007} = b, atunci obținem

$a^2+b^2-a-b+1=a^2-2\cdot a\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+b^2-2\cdot b\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\ =(a-\frac{1}{2})^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\rangle 0,\forall a,b\in\mathbb{R}.$

G: 666. Rezolvați în $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ ecuația: $\frac{\left(\sqrt{(x+y)^2-(x-y)^2}+\sqrt{9xy}-\sqrt{xy}\right)^2}{16}=2017,\ x,y\in\mathbb{R}_+$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Rezolvare:

Ecuația dată este echivalentă cu $\frac{\left(4\sqrt{xy}\right)^2}{16}=2017\Rightarrow xy=2017\Rightarrow(x;y)\in\{(1;2017),(2017;1)\}$.

G: 667. Aflați numerele naturale $\overline{ab}$ pentru care avem:

a) $\sqrt{\left(\overline{aa}+\overline{bb}\right)(a+b)+\overline{aa}\cdot b}=\overline{aa}$**;** **b)** $\sqrt{\left(\overline{aa}+\overline{bb}\right)(a+b)+\overline{aa}\cdot b}=\overline{bb}$**.**

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Rezolvare:

Evident numărul de sub radical trebuie să fie pătrat perfect.

$\left(\overline{aa}+\overline{bb}\right)(a+b)+\overline{aa}\cdot b=(11a+11b)(a+b)+11ab=11(a+b)^2+11ab=11\cdot\left[(a+b)^2+ab\right].$

Trebuie ca $(a+b)^2+ab=11k^2,\ k\in\mathbb{N}.\ (a+b)^2+ab\in\{11\cdot1^2;11\cdot2^2;11\cdot3^2;11\cdot5^2\}$.

Dând valori lui a şi b se obține: $\overline{ab}\in\{12;21;42;24\}$.

G: 668. Un teren trebuie acoperit cu gazon, al cărui preț este de 1,5 lei/ m^2. Terenul este format din trei triunghiuri dreptunghice, în care se ştie că o catetă, respectiv ipotenuza sunt, două numere

naturale consecutive, suma acestor numere consecutive fiind un pătrat perfect de două cifre. Determinați cât costă gazonul.

Victoria Popa, Timişoara

Rezolvare: Fie a, a+1 cele două numere naturale consecutive. Atunci, a+a+1 este un pătrat perfect de două cifre , adica 2a+1={16, 25, 36, 49, 64, 81}, de unde a={12, 24, 40}.
Cu teorema lui Pitagora, se calculeaza a doua catetă, soluțiile fiind {(5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41)}. Calculând suma ariilor, se obtine $S=\frac{5\cdot 12}{2}+\frac{7\cdot 24}{2}+\frac{9\cdot 40}{2}=294m^2$. $294\cdot 1{,}5=441$ *lei* .

G: 669. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul $\begin{cases} x^2+4y=-7 \\ y^2+2x=2 \end{cases}$.

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

***Rezolvare*:** Adunând cele două ecuații ale sistemului dat obținem
$x^2+4y+y^2+2x+5=0\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+2)^2=0\Leftrightarrow (x,y)=(-1,-2)$, soluție care verifică ecuațiile sistemului.

G: 670. Să se determine cardinalul mulțimii $A=\left\{\overline{xyz}\,\middle|\,\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\right\}$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Din $\frac{1}{x},\frac{1}{y}<1$, rezultă că $x,y\geq 2$, iar din $\frac{3}{z}<1$ rezultă z ≥4. Avem situațiile:

Dacă x = y relația devine: $\frac{2}{x}+\frac{3}{z}=1\Leftrightarrow 2z+3x=xz\Leftrightarrow z=\frac{3x}{x-2}$, evident $x\neq 2$,

de unde (x-2)/3x-3(x-2) ⇔ (x-2)/6 şi atunci $x\in\{3,4,5,8\}$, de unde rezultă că $\overline{xyz}\in\{339,446,555,884\}$.
Dacă x < y avem:

x < y ≤ z sau x ≤ z < y $\Rightarrow \frac{1}{z}\leq\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$ sau $\frac{1}{y}<\frac{1}{z}\leq\frac{1}{x}\Rightarrow 1<\frac{5}{x}\Rightarrow x\leq 4\Rightarrow x\in\{2,3,4\}$.

Pentru x = 2 obținem relația

$\frac{1}{y}+\frac{3}{z}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2z+6y=yz\Leftrightarrow y=\frac{2z}{z-6}\Rightarrow (z-6)/2z-2(z-6)\Leftrightarrow (z-6)/12\Rightarrow z\in\{7,8,9\}$,

y∈ {14, 8, 6}, din care nu convine prima valoare,(y nu este cifră) şi atunci $\overline{xyz}\in\{288,269\}$.

Pentru x = 3 $\Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{3}{z}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow 3z+9y=2yz\Leftrightarrow y=\frac{3z}{2z-9}\Rightarrow (2z-9)/2\cdot 3z-3(2z-9)$
$\Leftrightarrow (2z-9)/27\Rightarrow z\in\{5,6,9\}, y\in\{15,6,3\}$. Eliminând prima şi a treia valoare pentru y rezultă
$\overline{xyz}\in\{366\}$.

Pentru x = 4 ecuația $\frac{1}{y}+\frac{3}{z}=\frac{3}{4}$ nu are nici o soluție.

z < x < y $\Rightarrow \frac{1}{y}<\frac{1}{x}<\frac{1}{z}\Rightarrow 1<\frac{5}{z}\Rightarrow z\leq 4$, şi cum z ≥ 4, rezultă z = 4. Obținem ecuația

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4x+4y=xy\Rightarrow y=\frac{4x}{x-4}$, ecuație care are soluția x = y = 8, reultă $\overline{xyz}\in\{884\}$.

3)Dacă x > y şi cum ecuația este simetrică în x şi y se obțin soluțiile din cazul doi permutând x şi y între ele, adică avem şi soluțiile 828, 629, 636. În concluzie, cardinalul mulțimii A este 10.

G: 671. **Fie triunghiul ABC astfel încât** $\sin A \geq \frac{b^2+c^2}{2bc}$**, unde** $b=AC, c=AB$**, AN este mediana din A a triunghiului ABC, D este simetricul lui A față de N, iar CK mediana din C a triunghiului BCD. Ştiind că BC=16 cm, calculați NP, unde** $\{P\}=CK\cap AD$**.**

elevă Denisa Draghia, Craiova

Rezolvare: Se ştie că $(b-c)^2\geq 0 \Leftrightarrow b^2+c^2\geq 2bc \Leftrightarrow \frac{b^2+c^2}{2bc}\geq 1 \Rightarrow \sin A\geq 1$. Cum $\sin x\in[-1;1]$, $A\in(0^0;180^0)$ rezultă $A=90^0\Rightarrow \sin A=1\Rightarrow b^2+c^2=2bc\Rightarrow b=c$, adică triunghiul ABC este dreptunghic isoscel iar ABDC devine pătrat şi P devine centrul de greutate al triunghiului BDC. Rezultă, $NP=\frac{1}{3}\cdot DN=\frac{1}{3}\cdot\frac{BC}{2}=\frac{BC}{6}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$.

▪ Clasa a VIII-a

G: 672. **Rezolvați în** $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$**, ecuația:** $\sqrt{2016}-\sqrt{x+2016-\sqrt{2016}}=y$**.**

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Ecuația dată este echivalentă cu $\sqrt{x+2016-\sqrt{2016}}=\sqrt{2016}-y$. Impunând condițiile de existență $x+2016\geq\sqrt{2016}\geq y$ şi ridicând ecuația la pătrat se obține $x+2016-\sqrt{2016}=2016+y^2-2y\sqrt{2016}\Leftrightarrow (y^2-x)-(2y-1)\sqrt{2016}=0\Leftrightarrow y^2-x=0$ şi $2y-1=0$, întrucât $x,y\in\mathbb{Q}$. De aici, se obține că $y=\frac{1}{2}$, $x=y^2=\frac{1}{4}\in\mathbb{Q}$.

G: 673. **Determinați valoarea minimă a expresiei** $E(x)=\frac{x^2-6x+5}{x^2-6x+10}$, $x\in\mathbb{R}$.

Marian Ciuperceanu, Craiova

Rezolvare: $E(x)=\frac{x^2-6x+5}{x^2-6x+10}=1-\frac{5}{(x-3)^2+1}$ este minimă când $\frac{5}{(x-3)^2+1}$ este maximă adică $(x-3)^2+1$ trebuie să fie minimă , acest lucru se realizează pentru x=3. $E(x)_{\min}=E(3)=-4$.

G: 674. **Explicați de ce ecuația** $\sqrt{x+28}+\sqrt{x+53}=4$ **nu are soluție.**

Doina şi Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Din $x+28\geq 0$, $x+53\geq 0\Rightarrow x\in[-28;\infty)$. Cea mai mică valoare a expresiei din membrul stâng se obține pentru x = -28. Aceasta este $\sqrt{-28+28}+\sqrt{-28+53}=\sqrt{0}+\sqrt{25}=0+5=5\rangle 4$, absurd. $S=\varnothing$.

G: 675. **Dacă** $a,b,c\rangle 0$**, arătați că** $\frac{a^{16}+b^{16}+c^{16}}{a^5b^5c^5}\geq a+b+c$**.** **Marin Chirciu**, Piteşti

Rezolvare:

Se foloseşte de mai multe ori inegalitatea $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

Avem $a^{16}+b^{16}+c^{16}\geq a^8b^8+b^8c^8+c^8a^8\geq a^4b^4\cdot b^4c^4+b^4c^4\cdot c^4a^4+c^4a^4\cdot a^4b^4=a^4b^4c^4\left(a^4+b^4+c^4\right)$ $\geq a^4b^4c^4\left(ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab\right)=a^5b^5c^5(a+b+c)$. C.c.t.d Avem egalitate dacă a=b=c.

G: 676. Să se determine mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{N}\left|\frac{x^4-3x^2-1}{x-2}\in\mathbb{N}\right.\right\}$. **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare:

$\frac{x^4-3x^2-1}{x-2}=\frac{x^4-2x^3+2x^3-4x^2+x^2-2x+2x-4+3}{x-2}=\frac{x^2(x-2)+2x^2(x-2)+x(x-2)+2(x-2)+3}{x-2}=$

$\frac{(x-2)\left(x^3+2x^2+x+2\right)+3}{x-2}=x^3+2x^2+x+2+\frac{3}{x-2}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow x-2\left|3\right.$. Aşadar, $A=\{5\}$.

G: 677. Rezolvați în $\mathbb{R}$ **ecuația** $\left[\frac{2x^2}{x^2+1}\right]=x$**, unde** $[a]$ **reprezintă partea întreagă a numărului real a.**

Roxana Cristina Vasile, Craiova

Rezolvare:

Evident $x\geq 0$ şi x=0 este o soluție. Fie $x\rangle 0$. Cum $\left[\frac{2x^2}{x^2+1}\right]\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\mathbb{N}^*$ iar

din $x\leq\frac{2x^2}{x^2+1}\langle x+1\Rightarrow x(x^2+1)\leq 2x^2\langle(x+1)(x^2+1)\Rightarrow\ (x-1)^2\leq 0\Rightarrow x=1$ şi $x^3-x^2+x+1\rangle 0$ de unde rezultă $x\geq 1$. Aşadar, $x\in\{0;1\}$.

G: 678. Reprezentați grafic funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\max(2x-1;-x+5)$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Rezolvare: Se ştie că $\max(2x-1;-x+5)=\begin{cases}2x-1,\ 2x-1\geq -x+5\ \Leftrightarrow x\geq 2\\ -x+5,\ 2x-1\langle -x+5\ \Leftrightarrow x\langle 2\end{cases}$;

Aşadar, $f(x)=\begin{cases}2x-1,\ x\in[2;\infty)\\ -x+5,\ x\in(-\infty;2)\end{cases}$; Mai departe, graficul se realizează uşor.

G: 679. Se consideră ecuația $x^2-2\cdot 19^n x-2017=0$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Să se arate că ecuația nu are rădăcini rationale;

b) Dacă x_1,x_2 **sunt rădăcinile ecuației date, atunci arătați că** $x_1^2+x_2^2$ **este divizibil cu 6 oricare ar fi** $n\in\mathbb{N}$.

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

***Rezolvare*:** a) Discriminantul ecuației este $\Delta=4(19^{2n}+2017)\neq p.p$, deoarece ultima cifră a numărului $19^{2n}+2017$ este 8. Deci, ecuația nu are rădăcini rationale.

b) Dacă x_1,x_2 sunt rădăcinile ecuației date, atunci $x_1^2-2\cdot 19^n x_1-2017=0$, $x_2^2-2\cdot 19^n x_2-2017=0$ care adunate conduc la $x_1^2+x_2^2=2(2\cdot 19^{2n}+2017)$.

Deoarece, $2\cdot 19^{2n}+2017=2(M_3+1)^{2n}+M_3+1=M_3+2+M_3+1=M_3$, rezultă concluzia.

G: 680. Demonstrați că pentru orice numere reale a,b,c **pozitive, nenule, pentru care** $a+b+c=1$, **este adevărată inegalitatea:**

$$\frac{2(1+3a)}{b+c}+\frac{2(1+3b)}{c+a}+\frac{2(1+3c)}{a+b}+\frac{a^3+b^3+c^3+6abc}{abc}\leq\frac{1}{abc}.$$

(O întărire a problemei E:14278 din G.M.-B 12/2011, propusă de A. Dragomir).

Titu Zvonaru, Comăneşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Vom demonstra inegalitatea: $\frac{2(1+3a)}{b+c}+\frac{a^3+2abc}{abc}\le\frac{1}{bc}$, (*). Folosind faptul că $a+b+c=1$, inegalitatea (*) se scrie succesiv: $\frac{2(4a+b+c)}{b+c}+\frac{a^2+2bc}{bc}\le\frac{(a+b+c)^2}{bc}$

$$\Leftrightarrow 8abc+2bc(b+c)+a^2(b+c)+2bc(b+c)\le$$
$$\le a^2(b+c)+(b^2+c^2)(b+c)+2ab(b+c)+2ac(b+c)+2bc(b+c)$$
$$\Leftrightarrow (b+c)(b^2+c^2-2bc)+2ab^2+2ac^2+2abc+2abc-8abc\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (b+c)(b-c)^2+2a(b-c)^2\ge 0,$$ care este adevărată.

Scriind încă două inegalități similare cu (*), prin adunare obținem:

$$\frac{2(1+3a)}{b+c}+\frac{2(1+3b)}{c+a}+\frac{2(1+3c)}{a+b}+\frac{a^3+b^3+c^3+6abc}{abc}\le\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{1}{abc}.$$

Avem egalitate dacă şi numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

G: 681. Dacă x, y ≥ 0, $\alpha,\beta>0$, atunci $\frac{x^n}{\alpha^{n-1}}+\frac{y^n}{\beta^{n-1}}\ge\frac{x+y}{\alpha+\beta}\left(\frac{x^{n-1}}{\alpha^{n-2}}+\frac{y^{n-1}}{\beta^{n-2}}\right)$, **unde** $n\in N^*$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Inegalitatea se scrie succesiv:

$$\frac{\beta^{n-1}x^n+\alpha^{n-1}y^n}{(\alpha\beta)^{n-1}}\ge\frac{x+y}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\beta^{n-2}x^{n-1}+\alpha^{n-2}y^{n-1}}{(\alpha\beta)^{n-2}}\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\left(\beta^{n-1}x^n+\alpha^{n-1}y^n\right)\ge\alpha\beta(x+y)\left(\beta^{n-2}x^{n-1}+\alpha^{n-2}y^{n-1}\right)\Leftrightarrow$$
$$\alpha\beta^{n-1}x^n+\alpha^n y^n+\beta^n x^n+\alpha^{n-1}\beta y^n\ge\alpha\beta^{n-1}x^n+\alpha^{n-1}\beta xy^{n-1}+\alpha\beta^{n-1}x^{n-1}y+\alpha^{n-1}\beta y^n\Leftrightarrow$$
$$\alpha^n y^n+\beta^n x^n-\alpha^{n-1}\beta xy^{n-1}-\alpha\beta^{n-1}x^{n-1}y\ge 0\Leftrightarrow$$
$$\alpha^{n-1}y^{n-1}(\alpha y-\beta x)-\beta^{n-1}x^{n-1}(\alpha y-\beta x)\ge 0\Leftrightarrow$$
$$(\alpha y-\beta x)\left[(\alpha y)^{n-1}-(\beta x)^{n-1}\right]\ge 0\Leftrightarrow$$
$$(\alpha y-\beta x)^2\left[(\alpha y)^{n-2}+(\alpha y)^{n-3}(\beta x)+\ldots+(\alpha y)(\beta x)^{n-3}+(\beta x)^{n-2}\right]\ge 0,$$

ceea ce este adevărat, deoarece x, y, $\alpha,\beta>0$.

G: 682. Determinați lungimile a,b,c ale triunghiului ABC care verifică egalitățile $\frac{abc}{b+c-a}=10k^2$, $\frac{abc}{c+a-b}=15k^2$, $\frac{abc}{a+b-c}=30k^2$, **unde** $k\rangle 0$.

Marin Chirciu, Pitești

Rezolvare: $\frac{abc}{b+c-a}=10k^2\Leftrightarrow\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{bc}=\frac{1}{10k^2}$. Analog pentru celelalte. Făcând notațiile $\frac{1}{bc}=x$, $\frac{1}{ac}=y$, $\frac{1}{ab}=z$ obținem sistemul $\begin{cases}y+z-x=\frac{1}{10k^2} & (1)\\ z+x-y=\frac{1}{15k^2} & (2)\\ x+y-z=\frac{1}{30k^2} & (3)\end{cases}$. Adunând ecuațiile se obține

$x+y+z=\frac{1}{5k^2}$ (4). Din (4)-(1) rezultă $x=\frac{1}{20k^2}$. Din (4)-(2) rezultă $y=\frac{1}{15k^2}$ iar din (4)-(3) rezultă $z=\frac{1}{12k^2}$. Obținem $bc=20k^2, ac=15k^2, ab=12k^2$ (5).

Din $abc=60k^3$ şi (5) rezultă $(a;b;c)=(3k;4k;5k)$, $k\rangle 0$.

▪ Clasa a IX-a

L: 474. **Fie** $a,b,c\rangle 0$, **astfel încât** $a^2+b^2+c^2=1$. **Arătați că** $a^9+b^9+c^9+6a^3b^3c^3\le a^7+b^7+c^7$.

Marin Chirciu, Piteşti

Rezolvare:

Inegalitatea se scrie $a^7(a^2-1)+b^7(b^2-1)+c^7(c^2-1)+6a^3b^3c^3\le 0$. Cum $a^2+b^2+c^2=1$, obținem $a^7(-b^2-c^2)+b^7(-c^2-a^2)+c^7(-a^2-b^2)+6a^3b^3c^3\le 0\Leftrightarrow$
$a^7(b^2+c^2)+b^7(c^2+a^2)+c^7(a^2+b^2)\ge 6a^3b^3c^3$. Din inegalitatea mediilor obținem
$a^7(b^2+c^2)+b^7(c^2+a^2)+c^7(a^2+b^2)\ge a^7\cdot 2bc+b^7\cdot 2ca+c^7\cdot 2ab\ge 2\cdot 3\cdot\sqrt[3]{a^9\cdot b^9\cdot c^9}=6a^3b^3c^3$, cu egalitate dacă şi numai dacă $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

L: 475. **Fie** $a,b,c,d\rangle 0$ **astfel încât** $abc+abd+acd+bcd=4$. **Arătați că** $a^2(bc+cd+db)+b^2(ac+ad+cd)+c^2(ab+ad+bd)+d^2(ab+bc+ca)\ge 12abcd$.

Gabriel Nemțaru, Melineşti, Dolj

Rezolvare: Din $a\left(bc+bd+cd\right)=4-bcd\,\big|\cdot a\Rightarrow\ a^2\left(bc+bd+cd\right)=4a-abcd\Rightarrow$

$\sum a^2\left(bc+bd+cd\right)=4\sum a-4abcd$. Cum $\sum a\cdot\sum\frac{1}{a}\ge 16\overset{Cauchy}{\Rightarrow}\ \sum a\cdot\frac{\sum abc}{abcd}\ge 16\Rightarrow\ \sum a\ge 4abcd$.

Aşadar, $\sum a^2\left(bc+bd+cd\right)\ge 16abcd-4abcd=12abcd$, cu egalitate pentru a= b=c=d=1.

L: 476. **Arătați că: a) există perechile** $\left(x_k,y_k\right)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, $k=\overline{1,20}$ **astfel că** $\sum_{k=1}^{20}\frac{1+x_ky_k}{x_k+y_k}=210$;

b) există perechile $\left(x_k,y_k\right)\in\mathbb{Q}^*\times\mathbb{Q}^*$, $k=\overline{1,20}$ **astfel încât** $\sum_{k=1}^{20}\frac{1+x_ky_k}{x_k+y_k}=210$;

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

a) Observăm că $210=10\cdot 21=\frac{20\cdot 21}{2}=1+2+3+....+20=\sum_{k=1}^{20}k$. Aşadar, relația dată este

$\frac{1+x_ky_k}{x_k+y_k}=k,\ k=\overline{1,20}$. Pentru $x_k=2k-1\in\mathbb{N}^*,\ y_k=2k+1\in\mathbb{N}^*$ obținem cerința dată

$\frac{1+x_ky_k}{x_k+y_k}=\frac{1+(2k-1)(2k+1)}{2k-1+2k+1}=\frac{1+4k^2-1}{4k}=\frac{4k^2}{4k}=k,\ \forall k=\overline{1,20}.$ Aşadar, relația dată are o infinitate de soluții .

b) Analog, pentru $x_k=\frac{1}{2k-1}\in\mathbb{Q}^*,\ y_k=\frac{1}{2k+1}\in\mathbb{Q}^*,\ k=\overline{1;20}$ se obține cerința dată.

L: 477. **Se consideră ecuația** $(x+y)^2+3x+y=2016$. **Să se arate că ecuația are o infinitate de soluții întregi** $(x;y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ **care verifică relația** $x-y\le 2017$. **Să se arate că ecuația dată are o singură soluție** $(x;y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

$(x+y)^2+3x+y=2016\Leftrightarrow(x+y)^2+(x+y)+2x-2016=0\Leftrightarrow s^2+s+2x-2016=0$ unde x+y=s.
Impunând condiția $\Delta_s=8065-8x\ge 0\Rightarrow x\le 1008$, căci $x\in\mathbb{Z}$.

Din $s_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{\Delta_s}}{2}=\dfrac{-1\pm(2k+1)}{2}\in\mathbb{Z}$ şi $8065-8k=(2k+1)^2,\ k\in\mathbb{Z}$ rezultă

$k^2+k=2016-2x\Rightarrow x=1008-\dfrac{k(k+1)}{2}\le 1008,\ \forall x\in\mathbb{Z}.$

$s_1=-k-1\Rightarrow x_1+y_1=-k-1\Rightarrow y_1=-x-k-1=-1008+\dfrac{k(k+1)}{2}-k-1=-1009+\dfrac{k(k-1)}{2},k\in\mathbb{Z}.$

$s_2=k\Rightarrow x_2+y_2=k\Rightarrow y_2=k-x_2=k-1008+\dfrac{k(k+1)}{2}=-1008+\dfrac{k(k+3)}{2},k\in\mathbb{Z}.$

$S=\left\{(x;y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\middle|x=1008-\dfrac{k(k+1)}{2},y=-1009+\dfrac{k(k-1)}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, unde

$x-y=1008-\dfrac{k(k+1)}{2}+1009-\dfrac{k(k-1)}{2}=2017-k^2\le 2017$.

b) Fie $(x;y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\Leftrightarrow\ 0\le x\le 1008\ ,y\ge 0\Rightarrow\ 0\le 1008-\dfrac{k^2+k}{2}\le 1008,\ k\in\mathbb{Z}$ şi

$\dfrac{k^2+k}{2}-1009\ge 0,\ k\in\mathbb{Z}.$

Din cele două se obține $k\in\left((-\infty;-45]\cup[46;\infty)\right)\cap\mathbb{Z}\Rightarrow k=-45$. Rezultă $(x;y)\in\{(18;26)\}$.

L: 478. Demonstrați inegalitatea $\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\le\dfrac{\sum ab^2+\sum a^2b+2\sum ab+2\sum a}{18}$**, unde** $a,b,c\ge 0$**.**

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

***Rezolvare*:** Avem $3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3\sqrt[3]{(ab^2)(ac)c}\overset{MG-MA}{\le}ab^2+ac+c$, cu egalitate dacă

$ab^2=ac=c\Rightarrow a=1$ şi $b^2=c$.

Analog avem $3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\le a^2b+bc+c$, $3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\le b^2c+ca+a$, $3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\le c^2b+ba+a$, $3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\le c^2a+ab+b$, $3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\le a^2c+bc+b$. Adunând cele 6 inegalități obținem inegalitatea cerută. Avem egalitatea dacă $a=b=c=1$.

L: 479. Fie $x,y,z\rangle 0,\ xyz=1$**. Arătați că** $(1+x^3)(1+y^3)(1+z^3)\ge(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$**.**

Lucian Tuțescu, Craiova, **Marian Voinea**, Bucureşti

Rezolvare:

$1+\sum x^3y^3+\sum x^3+\cancel{x^3y^3z^3}\ge 1+\sum x^2y^2+\sum x^2+\cancel{x^3y^3z^3}\Rightarrow\ \sum x^3+\sum\dfrac{1}{x^3}\ge\sum x^2+\sum\dfrac{1}{x^2}\Leftrightarrow$

$x^3+\dfrac{1}{x^3}\ge x^2+\dfrac{1}{x^2}\Leftrightarrow\ x^6+1\ge x^5+x\Leftrightarrow\ (x-1)(x^5-1)\ge 0\Leftrightarrow\ (x-1)^2\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)\ge 0$.

Există egalitate când x = y = z = 1.

L: 480. Fie $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2\ge 3$**.**

Arătați că $a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}+b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+b_3^{\,2}+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\ge 3.$

Ana Cismaru, Malu Mare, Dolj

Rezolvare: Se foloseşte identitatea lui Lagrange:

$\left(a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}\right)\left(b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+b_3^{\,2}\right)=\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2$

$\ge\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2+3$.

Fie $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=x\in\mathbb{R}$. Atunci, $a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\geq 2\sqrt{\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\cdot\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)}+x\geq 2\sqrt{x^2+3}+x$. Se arată uşor că $2\sqrt{x^2+3}\geq 3-x$.

L: 481. Se consideră şirul $a_1=a\neq 2$, $a_2=\frac{2a}{a-2}$, $a_{n+1}=\frac{(n^2-1)a_n^2}{n(n-1)a_n^2-(n^2-1)a_n+n(n+1)}$ pentru n ≥ 2. Să se demonstreze, că: $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n=$ n·$(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)$ pentru orice n ≥1 .

Adalbert Kovács, Satu Mare

Rezolvare: Pentru $a=0$ fiecare termen al şirului este 0 şi egalitatea are loc.

Fie $a\neq 2$ şi $a\neq 0$. Pentru n = 1 egalitatea este evidentă. Pentru n = 2 avem: $a_1\cdot a_2=a\cdot\frac{2a}{a-2}=\frac{2a^2}{a-2}$ $=2(a+\frac{2a}{a-2})=2\cdot(a_1+a_2)$, şi egalitatea este adevărată.

Rezultă că: $a_2=\frac{2a_1}{a_1-2}$, respectiv $a_1=\frac{2a_2}{a_2-2}$. Pentru n ≥ 2 scriem relația de recurentă sub forma $\frac{na_{n+1}}{n+1}=\frac{n(n-1)a_n^2}{n(n-1)a_n^2-(n^2-1)a_n+n(n+1)}$.

Aplicăm proprietățile proporților şi obținem $\frac{na_{n+1}}{n+1-na_{n+1}}=\frac{n(n-1)a_n^2}{-(n^2-1)a_n+n(n+1)}$

şi respectiv $\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_{n+1}-(n+1)}=\frac{(n-1)a_n^2}{(n-1)a_n-n}$, de unde rezultă, pe de o parte, $a_n=\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_{n+1}-(n+1)}\cdot\frac{(n-1)a_n-n}{(n-1)a_n}$, pe de altă parte: $a_n=\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_{n+1}-(n+1)}-\frac{na_n}{(n-1)a_n-n}$.

Scriem relațiile obținute pentru diferite valori ale lui n ≥ 2 , le înmulțim, respectiv le adunăm şi obținem:

Pe de o parte: $a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n=\frac{n(n+1)a_{n+1}}{na_{n+1}-(n+1)}\cdot\frac{a_2-2}{2a_2}$. Pe de altă parte: $a_2+a_3+\ldots+a_n=$ $\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_{n+1}-(n+1)}-\frac{2a_2}{a_2-2}$. Rezultă: $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n=\frac{n(n+1)a_{n+1}}{na_{n+1}-(n+1)}$; respectiv $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=$ $\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_{n+1}-(n+1)}$. Deci egalitatea: $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n=$ n·$(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)$ este adevărată pentru orice n ≥ 1 .

L: 482. Calculați : $\frac{(n+1)!}{2^n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot k!}{2^k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{k!}{2^k}$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Suma de calculat se scrie astfel: $-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)\cdot k!}{2^k}-\frac{(n+1)!}{2^n}\right)$.

Vom arăta prin inducție că suma $\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)\cdot k!}{2^k}-\frac{(n+1)!}{2^n}$ este egală cu -1.

Afirmația este adevărată pentru $n=1$. Presupunem că $n\geq 2$ şi că pentru $n-1$ afirmația este adevărată. Deoarece,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)\cdot k!}{2^k}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k-1)\cdot k!}{2^k}+\frac{(n-1)\cdot n!}{2^n}\overset{inductie}{=}\frac{n!}{2^{n-1}}-1+\frac{(n-1)\cdot n!}{2^n}=$$

$=\frac{2n!+(n-1)\cdot n!}{2^n}-1=\frac{(2+n-1)\cdot n!}{2^n}-1=\frac{(n+1)\cdot n!}{2^n}-1=\frac{(n+1)!}{2^n}-1$, rezultă că

$\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)\cdot k!}{2^k}-\frac{(n+1)!}{2^n}=-1$, pentru orice număr natural nenul n.

L: 483. Fie triunghiul AOB cu $m(\sphericalangle AOB)=90^0$ şi punctul $C\in(AB)$ astfel încât $m(\sphericalangle AOC)=15^0$. Demonstraţi că $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{OA}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{OB}=\frac{4}{OC}$. **Marin Chirciu**, Piteşti

Rezolvare: $A_{AOC}+A_{BOC}=A_{AOB}\Leftrightarrow\frac{OA\cdot OC\cdot\sin 15^0}{2}+\frac{OB\cdot OC\cdot\sin 75^0}{2}=\frac{OA\cdot OB}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{OA\cdot OC\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}+\frac{OB\cdot OC\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}=OA\cdot OB\Big|:\frac{OA\cdot OB\cdot OC}{4}$, rezultă c.c.t.d.

L: 484. Să se demonstreze inegalitatea $\frac{p}{r+4R}\geq\sqrt{\frac{r}{R+r}}$, unde r, R, p sunt notaţiile obişnuite într-un triunghi. **Gheorghe Ghiţă**, Buzău

Rezolvare: $p^2(R+r)\geq r(r+4R)^2$. Cum $p^2\geq 16Rr-5r^2$ (Gerretsen), este sufficient să arătăm că

$(16Rr-5r^2)(R+r)\geq r(R+r)\Leftrightarrow 3Rr\geq 6r^2$.

L: 485. Dacă $a,b,c\in(0,\infty)$ şi $a+b+c\geq 3$, să se arate că:

$$\sum\frac{a^2}{b+c+1}\geq\frac{a+b+c}{3}\left(1+16\sum\frac{(a-b)^2}{(a+4b+4c)(4a+b+4c)}\right).$$

Titu Zvonaru, Comăneşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Avem: $\frac{a^2}{b+c+1}\geq\frac{a^2}{b+c+\frac{a+b+c}{3}}=\frac{3a^2}{a+4b+4c}$, şi atunci este suficient să demonstrăm

inegalitatea înlocuind partea stângă cu: $\sum\frac{3a^2}{a+4b+4c}$.

De asemenea, avem: $\frac{3a^2}{a+4b+4c}-\frac{a}{3}=\frac{4a(a-b)}{a+4b+4c}+\frac{4a(a-c)}{a+4b+4c}$, şi atunci putem scrie

succesiv: $\sum\frac{3a^2}{a+4b+4c}-\frac{1}{3}\sum a=\frac{4}{3}\sum\left(\frac{a(a-b)}{a+4b+4c}+\frac{a(a-c)}{a+4b+4c}\right)=$

$=\frac{4}{3}\sum\frac{a(a-b)}{a+4b+4c}+\frac{4}{3}\sum\frac{a(a-c)}{a+4b+4c}=\frac{4}{3}\sum\frac{a(a-b)}{a+4b+4c}+\frac{4}{3}\sum\frac{b(b-a)}{4a+b+4c}=$

$=\frac{4}{3}\sum(a-b)\left(\frac{a}{a+4b+4c}-\frac{b}{4a+b+4c}\right)=\frac{4}{3}\sum(a-b)\cdot\frac{4a^2-4b^2+4ac-4bc}{(a+4b+4c)(4a+b+4c)}=$

$=\frac{16(a+b+c)}{3}\sum\frac{(a-b)^2}{(a+4b+4c)(4a+b+4c)}$, ceea ce demonstrează inegalitatea din enunţ.

Observaţie. Inegalitatea din enunţ constituie o întărire a unei probleme propuse de D.M. Bătineţu-Giurgiu în G.M.-B nr. 10/2007; spre deosebire de varianta originară, inegalitatea de mai sus nu poate fi demonstrată nici cu Cebâşev (ca în G.M.-B nr. 9/2012, pag. 386), nici cu Bergström.

L: 486. Fie ABCD un patrulater înscris într-un cerc de rază R şi circumscris altuia de rază r şi a , b , c, d laturile acestuia (a şi c sunt laturi opuse). Demonstraţi că : $\frac{R^2}{r^2}\leq\frac{1}{2}(\frac{a^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{b^2}{d^2}+\frac{d^2}{b^2})$.

Vasile Jiglău, Arad

Rezolvare: Utilizăm formulele :

$a+c=b+d=p$ (cu p notăm semiperimetrul patrulaterului) (1) $abcd = r^2 p^2$ (2)

$e+f = \frac{p}{2R}(\sqrt{4R^2+r^2}+r)$ (3) $ef = 2r(\sqrt{4R^2+r^2}+r)$ (4)

(a se vedea [1] , pag. 163 , teorema 6.3.1 ; e,f sunt diagonalele patrulaterului))

$\sqrt{4R^2+r^2}+r \geq p$ (5) Avem :

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} = \frac{a^4+c^4}{a^2c^2} = \frac{(a^2+c^2)^2-2a^2c^2}{a^2c^2} = \frac{[(a+c)^2-2ac]^2-2a^2c^2}{a^2c^2} = \frac{(p^2-2ac)^2-2a^2c^2}{a^2c^2} = \frac{p^4-4p^2ac+2a^2c^2}{a^2c^2}$$

şi analog : $\frac{b^2}{d^2}+\frac{d^2}{b^2} = \frac{p^4-4p^2bd+2b^2d^2}{b^2d^2}$. De aici , prin însumare :

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{b^2}{d^2}+\frac{d^2}{b^2} = p^4(\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{b^2d^2})-4p^2(\frac{1}{ac}+\frac{1}{bd})+4 = \frac{p^4[(ac+bd)^2-2zbcd]}{a^2b^2c^2d^2}-\frac{4p^2(ac+bd)}{abcd}+4 =$$

$$= p^4\frac{e^2f^2-2r^2p^2}{r^4p^4}-4p^2\frac{ef}{r^2p^2}+4 = \frac{(ef-2r^2)-2r^2p^2}{r^4}$$

Inegalitatea din enunț devine echivalentă cu : $(ef-2r^2)^2 \geq 2R^2r^2+2p^2r^2$ (6)

Din (4) rezultă că $ef-2r^2 = 2r\sqrt{4R^2+r^2}$, deci :

$(6) \Leftrightarrow 4r^2(4R^2+r^2) \geq 2R^2r^2+2p^2r^2 \Leftrightarrow 8R^2+2r^2 \geq R^2+p^2 \Leftrightarrow 7R^2+2r^2 \geq p^2$

Deoarece are loc (5) , e suficient să demonstrăm că :

$7R^2+2r^2 \geq (\sqrt{4R^2+r^2}+r)^2 \Leftrightarrow 7R^2+2r^2 \geq 4R^2+2r^2+2r\sqrt{4R^2+r^2} \Leftrightarrow 3R^2 \geq 2r\sqrt{4R^2+r^2}$

$\Leftrightarrow 9R^4 \geq 16R^2r^2+4r^4$

care rezultă imediat prin însumarea inegalităților $8R^4 \geq 16R^2r^2$ şi $R^4 \geq 4r^4$, consecințe imediate ale inegalității cunoscute $R \geq r\sqrt{2}$

Egalitatea se realizează când avem egalitate în $R \geq r\sqrt{2}$, adică atunci când patrulaterul inițial e pătrat

[1] Pop O , s.a. – An introduction to quadrilateral geometry , EDP , 2013

▪ Clasa a X-a

L: 487. Să se scrie într-o formă restrânsă numărul $n = 2^{30}-6\cdot 2^{36}+15\cdot 2^{42}-20\cdot 2^{48}+15\cdot 2^{54}-6\cdot 2^{60}+2^{66}$**.**

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Se aplică binomul lui Newton:

$$n = 2^{30}\left(1-6\cdot 2^6+15\cdot 2^{12}-20\cdot 2^{18}+15\cdot 2^{24}-6\cdot 2^{30}+2^{36}\ \right) =$$

$$= 2^{30}\left(1-C_6^1\cdot 2^6+C_6^2\cdot\left(2^6\right)^2-C_6^3\cdot\left(2^6\right)^3+C_6^4\cdot\left(2^6\right)^4-C_6^5\cdot\left(2^6\right)^5+\left(2^6\right)^6\ \right) = 2^{30}(1-2^6)^6 =$$

$$= 2^{30}(1-64)^6 = 2^{30}\cdot(-63)^6 = \left(2^5\cdot 63\right)^6 = 2016^6 .$$

L: 488. Fie $a,b > 1$ **astfel încât** $a^3 = b+1$**. Rezolvați ecuația** $\log_a(1+\sqrt[3]{x}) = \log_b x$**.**

Marin Chirciu, Piteşti

Rezolvare: Domeniul de definiție: $D = (0;\infty)$. Avem $\log_a(1+\sqrt[3]{x}) = \log_b x = t \Rightarrow x = b^t$ şi $1+\sqrt[3]{x} = a^t$.

Rezultă $1+\sqrt[3]{b^t} = a^t \Leftrightarrow 1+b^{\frac{t}{3}} = a^t$. Notăm $\frac{t}{3} = y \Rightarrow 1+b^y = a^{3y} \Rightarrow \left(\frac{1}{a^3}\right)^y+\left(\frac{b}{a^3}\right)^y = 1$ cu soluția unică

y=1 deoarece funcția $f:\mathbb{R}\to(0;\infty),\ f(y)=\left(\frac{1}{a^3}\right)^y+\left(\frac{b}{a^3}\right)^y$ este strict descrescătoare.

Din y = 1 se obține unica soluție $x=b^3\in\mathbb{Q}$.

L: 489. **Rezolvați ecuația** $(2^x+4^x)\cdot(3^x+6^x)=4\cdot12^x$. **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: $2^x+4^x\geq2\cdot\sqrt{2^x\cdot4^x}$, $3^x+6^x\geq2\cdot\sqrt{3^x\cdot6^x}$. Prin înmulțire obținem

$(2^x+4^x)\cdot(3^x+6^x)\geq4\cdot\sqrt{(2\cdot6)^x\cdot(3\cdot4)^x}=4\cdot\sqrt{\left(12^x\right)^2}=4\cdot12^x$, cu egalitate când $2^x=3^x=4^x=6^x\Leftrightarrow x=0$.

L: 490. **Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația** $[\log_4 x]+[\log_4 2x]=\log_2 2\sqrt{x}$.

(S-a notat cu $[a]$ **partea întreagă a numărului real** a **.)**

Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

Rezolvare:

$[\log_4 x]+[\log_4 2x]=[\log_4 x]+[\log_4 2+\log_4 x]=[\log_4 x]+\left[\frac{1}{2}+\log_4 x\right]=[2\cdot\log_4 x]$ conform identității lui Hermite $[t]+\left[t+\frac{1}{2}\right]=[2t],\forall t\in\mathbb{R}$.

Ecuația din enunț devine: $[2\log_4 x]=\log_2 2\sqrt{x}\Rightarrow[2\log_4 x]=1+\frac{1}{2}\log_2 x\Rightarrow[2\log_4 x]=1+\log_4 x$. Notând $y=\log_4 x$ şi rezolvând ecuația $[2y]=y+1$ se obține $y=1\Rightarrow\log_4 x=1\Rightarrow x=4$.

L: 491. **Fie** $x_1,x_2,....,x_n\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $x_1+x_2+....+x_n=0$ **şi** $a\rangle0$**. Arătați că** $\log_2(1+a^{x_1})+\log_2(1+a^{x_2})+.....+\log_2(1+a^{x_n})\geq n$**.**

Marin Chirciu, Piteşti

Rezolvare: Dacă a =1 se obține egalitate în relația de aratat. Fie $a\neq1$. Cum $1+a^x\geq2\sqrt{a^x}\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n}\log_2(1+a^{x_i})\geq\sum_{i=1}^{n}\log_2(2\sqrt{a^{x_i}})=\log_2\prod_{i=1}^{n}\left(2\sqrt{a^{x_i}}\right)=\log_2\left(2^n\cdot\sqrt{a^{x_1}\cdot a^{x_2}\cdot....\cdot a^{x_n}}\right)=$$

$\log_2\left(2^n\cdot\sqrt{a^{x_1+x_2+...+x_n}}\right)=\log_2(2^n)=n$, cu egalitate dacă şi numai dacă $x_1=x_2=....=x_n=0$.

L: 492. **Fie** m,n **numere naturale nenule şi** $x,y,z>0$ **cu proprietatea că** $x^n+y^n+z^n=3$**.**

Să se arate că: $\frac{x^{m+n}}{y^n+z^n}+\frac{y^{m+n}}{z^n+x^n}+\frac{z^{m+n}}{x^n+y^n}\geq\frac{3}{2}$**.** **Titu Zvonaru**, Comăneşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Putem presupune, datorită simetriei, că $x\geq y\geq z$. Rezultă că:

$\frac{1}{y^n+z^n}\geq\frac{1}{z^n+x^n}\geq\frac{1}{x^n+y^n}$; aplicând inegalitatea lui Cebâşev şi apoi inegalitatea dintre media aritmetică şi media armonică, obținem $\sum_{cyc}\frac{x^{m+n}}{y^n+z^n}\geq\frac{1}{3}\cdot\sum_{cyc}x^{m+n}\cdot\sum_{cyc}\frac{1}{y^n+z^n}\geq\frac{1}{3}\cdot\sum_{cyc}x^{m+n}\cdot\frac{9}{2(x^n+y^n+z^n)}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{cyc}x^{m+n}$,

şi atunci rămâne de arătat că: $\sum_{cyc}x^{m+n}\geq3$, (*). Folosind inegalitatea lui Hölder, rezultă că:

$$(1+1+1)^m(x^{m+n}+y^{m+n}+z^{m+n})^n\geq\left(\sum_{cyc}\sqrt[m+n]{(x^{m+n})^n}\right)^{m+n}$$

$$\Leftrightarrow3^m\cdot\left(\sum_{cyc}x^{m+n}\right)^n\geq\left(\sum_{cyc}x^n\right)^{m+n}\Leftrightarrow3^m\cdot\left(\sum_{cyc}x^{m+n}\right)^n\geq3^{m+n}\Leftrightarrow\sum_{cyc}x^{m+n}\geq3,$$ adică inegalitatea (*).

Avem egalitatea dacă şi numai dacă $x=y=z=1$.

Observaţie: Problema de mai sus este o extindere a problemei 26666 din G.M. – B nr. 10/2012. Pentru $m=1, n=2$ obţinem inegalitatea din problema 26666, propusă de Ion Nedelcu.

L: 493. **Să se rezolve sistemul** $\begin{cases}\sqrt[n]{x^2+2x+1}-6\sqrt[n]{y+2}=-14\\ \sqrt[n]{y^2+4y+4}-4\sqrt[n]{x+1}=1\end{cases}$. **Constantin Rusu**, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Adunând ecuaţiile sistemului el se scrie echivalent

$\begin{cases}\sqrt[n]{x^2+2x+1}-6\sqrt[n]{y+2}=-14\\ \left(\sqrt[n]{x+1}-2\right)^2+\left(\sqrt[n]{y+2}-3\right)^2=0\end{cases}$. Din a doua ecuaţie rezultă $x=2^n-1$ şi $y=3^n-2$. Aceste numere verifică prima ecuaţie şi deci reprezintă soluţia sistemului.

L: 494. **Să se arate că ecuaţia** $x^5-10x^4+10x^3-20x^2+5x-2=0$ **are o singură rădăcină reală, care este:** $\alpha=2+\sqrt[5]{3}+\sqrt[5]{9}+\sqrt[5]{27}+\sqrt[5]{81}$. **Adalbert Kovacs**, Satu Mare

Rezolvare: $\alpha=2+\sqrt[5]{3}+\sqrt[5]{9}+\sqrt[5]{27}+\sqrt[5]{81}=1+1+\sqrt[5]{3}+\sqrt[5]{9}+\sqrt[5]{27}+\sqrt[5]{81}=1+\frac{2}{\sqrt[5]{3}-1}=\frac{\sqrt[5]{3}+1}{\sqrt[5]{3}-1}$.

Fie $t=\sqrt[5]{3}$. Cu substituţia $x=\frac{t+1}{t-1}$ ecuaţia dată va avea forma: $t^5-3=0$, care are o singură rădăcină reală: $\sqrt[5]{3}$. Funcţia $f: R-\{1\}\to R-\{1\}$, $f(t)=\frac{t+1}{t-1}$ fiind bijectivă, rezultă că şi ecuaţia dată are singura rădăcină reală: $\frac{\sqrt[5]{3}+1}{\sqrt[5]{3}-1}$, care este tocmai numărul real (iraţional): α

Observaţie: Ecuaţia dată este echivalentă cu $(x+1)^5=3(x-1)^5$.

Generalizare: Ecuaţia $(x+1)^5=a(x-1)^5$ unde $a\in R-\{1\}$, are o singură rădăcină reală, şi anume:

$x=\frac{\sqrt[5]{a}+1}{\sqrt[5]{a}-1}=1+\frac{2}{a-1}\left(1+\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{a^2}+\sqrt[5]{a^3}+\sqrt[5]{a^4}\right)$.

L: 495. **Să se rezolve în intervalul (-2, ∞), ecuaţia** $(x+2)^{2016}+2=\sqrt[2016]{x+2^{2016}}+2^{2016}$.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Rezolvare: Notăm $2^{2016}=a\Leftrightarrow 2016=\log_2 a$, şi atunci ecuaţia se rescrie:

$$(x+2)^{\log_2 a}+2=(x+a)^{\log_a 2}+a\Leftrightarrow a^{\log_2(x+2)}+2=2^{\log_a(x+a)}+a.$$

Cu notaţiile: $\begin{cases}\log_2(x+2)=t\\ \log_a(x+a)=u\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=2^t\\ x+a=a^u\end{cases}$ (*) şi prin scăderea lor, obţinem: $2^t-a^u=2-a$. (1)

Pe de altă parte, ecuaţia este echivalentă cu:

$$a^t+2=2^u+a\Leftrightarrow 2^u-2=2-a.\quad (2)$$

Din (1) şi (2) obţinem: $2^t+a^t=2^u+a^u$. Fie funcţia $f: R\to R$, $f(x)=2^x+a^x$, care este strict crescătoare, şi deci, injectivă. Ultima relaţie se scrie f(t) = f(u), şi atunci t = u.

Relaţia (1) devine:

$$2^{2016^a}-2^t=2^{2016}-2\Leftrightarrow 2^t\left(2^{2015^a}-1\right)=2\left(2^{2015}-1\right),$$ cu soluţia unică t = 1.

Revenind la (*), se obţine soluţia x = 0. In concluzie, mulţimea soluţiilor este S = {0}.

L: 496. **Arătaţi că produsul** $P=\prod_{k=2}^{1000}(k^2-1)$ **se divide cu** 5^{495} **şi nu se divide cu** 5^{496}.

Luiza Cremeneanu, **Constantina Prunaru**, Craiova

Rezolvare:

$$\prod_{k=2}^{1000}(k^2-1)=\prod_{k=2}^{1000}(k-1)\cdot\prod_{k=2}^{1000}(k+1)=999!\cdot\frac{1001!}{2}.$$

$\exp_5(999!)=\left[\frac{999}{5}\right]+\left[\frac{999}{5^2}\right]+\left[\frac{999}{5^3}\right]+\left[\frac{999}{5^4}\right]=199+39+7+1=246$,

$\exp_5(1001!)=\left[\frac{1001}{5}\right]+\left[\frac{1001}{5^2}\right]+\left[\frac{1001}{5^3}\right]+\left[\frac{1001}{5^4}\right]=200+40+8+1=249$.

Cum 246 + 249 = 495, atunci, rezultă cerința.

L: 497. Fie $A\subseteq\mathbb{C}$ şi $f:A\to A$ cu proprietatea $f(f(x))=x^2,\ \forall x\in A.$ Să se arate că dacă $A=\mathbb{C}$, atunci nu există f cu proprietatea de mai sus. **Aurel Chiriță**, Slatina

Rezolvare:

Fie $x\in\mathbb{C}$ fixat şi cu transformarea $x\to f(x)$ obținem $f(f(f(x)))=f^2(x),\ \forall x\in\mathbb{C}\Rightarrow$ $f^2(x)=f(x^2),\ \forall x\in\mathbb{C}.$ De aici, pentru x=0, x=1, x= -1 deducem:

$f(0)=f^2(0),\ f(1)=f^2(1),\ f^2(-1)=f(1)$ adică $f(0)\in\{0;1\}$, $f(1)\in\{0;1\}$, $f(-1)\in\{-1;0;1\}$.

Presupunem că $f(-1)=-1\Rightarrow f(f(-1))=f(-1)=-1=(-1)^2$, contradicție. Rezultă $f(-1)\in\{0;1\}$.

Analog, $f^2(i)=f(i^2)=f(-1)\in\{0;1\}\Rightarrow f(i)\in\{-1;0;1\}$. Dar, $-1=f(f(i))\in\{0;1\}$, contradicție.

Nu există funcții cu această proprietate.

L: 498. Fie $a_1,a_2,a_3,.....,a_n$ n numere strict pozitive ($n\in\mathbb{N}^*$). Arătați că

$$\frac{1}{\frac{1}{a_1+n}+\frac{1}{a_2+n}+.....+\frac{1}{a_n+n}}-\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+.....+\frac{1}{a_n}}\geq 1$$

. În ce caz avem egalitate?

Ileana Didu, Camelia Dană, Craiova

Rezolvare:

Fie $\frac{1}{a_1}\geq\frac{1}{a_2}\geq.....\geq\frac{1}{a_n}\rangle 0\Rightarrow\frac{1}{a_1+n}\geq\frac{1}{a_2+n}\geq.....\geq\frac{1}{a_n+n}\rangle 0$. Conform inegalității lui Cebîşev

$n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i(a_i+n)}\geq\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+n}\right)\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_i+n}\right)\geq\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+n}\right)$. Împărțind cu temenul

drept se obține: $\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(a_i+n)}}-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}\geq 1$, cu egalitate dacă şi numai dacă $a_1=a_2=....=a_n$.

L: 499. Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=2\\x^2+y^2+z^2=4\\\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}=-5\end{cases}$ **.**

Hanganu Aurel Toma, Calafat, Dolj

Rezolvare:

Evident, $S_1=x+y+z=2$, $S_2=xy+yz+zx=0$, $S_3=xyz=-1$, unde x,y,z sunt soluțiile ecuației

$t^3-2t^2+1=0$ şi anume cele şase permutări ale numerelor $1;\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

L: 500. Fie ABCD un trapez cu bazele AB=2b,CD = 2a ($b\rangle 2a$) şi M şi N respectiv mijloacele segmentelor AB respectiv CD. Dacă MN = b-a şi triunghiul ADB este isoscel (AD=BD) determinați unghiurile trapezului.

Lucian Tuțescu, Carmen Terheci, Craiova

Rezolvare:

Se cunoaşte că M,N,P sunt coliniare $\{P\} = AD \cap BC$. Cum $\Delta PDN \sim \Delta PAM \Rightarrow$

$\frac{DN}{AM} = \frac{PN}{PM} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{PN}{PN+b-a} \Rightarrow PN = a$. În triunghiul PDC, $PN = \frac{1}{2}DC$. Cum ADB este isoscel, rezultă $DM \perp AB \Rightarrow m(\sphericalangle MDC) = 90^0$. În triunghiul MDN dreptunghic în D avem $DM^2 + a^2 = (b-a)^2 \Rightarrow DM = \sqrt{b(b-2a)}$. În triunghiul AMD (dreptunghic în M) obţinem

$tg\left(\sphericalangle DAM\right) = \frac{DM}{AM} = \frac{b(b-2a)}{b} \Rightarrow m(\sphericalangle DAM) = arctg\frac{\sqrt{b(b-2a)}}{b} \Rightarrow m(\sphericalangle ADC) = \pi - arctg\frac{\sqrt{b(b-2a)}}{b}$.

$m(\sphericalangle ABC) = \frac{\pi}{2} - arctg\frac{\sqrt{b(b-2a)}}{b}$, $m(\sphericalangle BCD) = \frac{\pi}{2} - arctg\frac{\sqrt{b(b-2a)}}{b}$.

▪ Clasa a XI-a

L: 501. Să se determine poziția punctului P(a;b) în reperul cartezian xOy, ştiind că $b_k = \lg^{-1}(2\cdot 10^k)$, $k \in \mathbb{N}$ $a\rangle 0$, **şi** $b = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\lg 5\cdot \lg^{-1} 2 + \sum\limits_{k=0}^{n} b_k \cdot b_{k+1}\right)^{\lg(n+1)}$.

Stelian Piscan, Giurgiu

Rezolvare: Cum $\sum\limits_{k=0}^{n} b_k \cdot b_{k+1} = \frac{1}{\lg 2\cdot\lg 20} + \frac{1}{\lg 20\cdot\lg 200} + ... + \frac{1}{\lg 2\cdot 10^n \cdot \lg 2\cdot 10^{n+1}} =$

$= \frac{1}{\lg 2} - \frac{1}{\lg 20} + \frac{1}{\lg 20} - \frac{1}{\lg 200} + ... + \frac{1}{\lg\left(2\cdot 10^n\right)} - \frac{1}{\lg\left(2\cdot 10^{n+1}\right)} = \frac{1}{\lg 2} - \frac{1}{\lg\left(2\cdot 10^{n+1}\right)}$, atunci,

$b = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{\lg 5}{\lg 2} + \frac{-1}{\lg(2\cdot 10^{n+1})}\right)^{\lg(n+1)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-\lg(n+1)}{\lg(2\cdot 10^{n+1})}} = e^0 = 1$. Aşadar, P(a;1) aparţine cadranului I.

L: 502. Să se calculeze $A^n, n \in N^*$, **unde** $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & a & d \\ 0 & e & a \end{pmatrix}, e \in R^*, bc + de = 1, a, b, c, d \in R.$

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Matricea A se scrie sub forma $A = aI_3 + B$, unde

$B = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ c & 0 & d \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix}$. Atunci, $B^2 = \begin{pmatrix} bc & 0 & bd \\ 0 & 1 & 0 \\ ce & 0 & de \end{pmatrix}, B^{2k} = B^2, B^{2k+1} = B, \forall k \geq 1,$

şi atunci $A^n = (aI_3 + B)^n = a^n I_3 + (C_n^1 a^{n-1} + C_n^3 a^{n-3} + ...)B + (C_n^2 a^{n-2} + C_n^4 a^{n-4} + ...)B^2$.

Deoarece

$C_n^1 a^{n-1} + C_n^3 a^{n-3} + ... = \frac{(a+1)^n - (a-1)^n}{2}$, şi $C_n^2 a^{n-2} + C_n^4 a^{n-4} + ... = \frac{(a+1)^n + (a-1)^n - 2a^n}{2}$,

atunci $A^n = a^n I_3 + \frac{(a+1)^n - (a-1)^n}{2} B + \frac{(a+1)^n + (a-1)^n - 2a^n}{2} B^2$.

L: 503. Se consideră sistemul: $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 13y - 5z = 0, \\ x - 11y + 3z = 0 \end{cases}$ unde x, y, z $\in \mathbb{R}$

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A, A fiind matricea sistemului.

b) Să se rezolve sistemul.

c) Să se găsească o soluție $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ a sistemului pentru care

$$(x_0+3)^2+(y_0+4)^2-(z_0+1)^2+y_0=x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}-z_0^{\ 2}-y_0+39.$$

Iuliana Traşcă, Scorniceşti, Olt

Rezolvare:

a) det A= 0, deci rang A<3. Deoarece $(\exists\Delta)\ \Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 13\end{vmatrix}=12\neq 0\Rightarrow$ rangA=2.

b) Alegem x, y necunoscute principale, iar $z=\lambda\in\mathbb{R}$, necunoscută secundară.

Avem: $\begin{cases}x+y=\lambda\\ x+13y=5\lambda\end{cases}$, $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 13\end{vmatrix}=12\neq 0$

Găsim $x=\frac{2\lambda}{3}$, $y=\frac{\lambda}{3}$ şi $z=\lambda$, deci soluția sistemului este $\left(\frac{2\lambda}{3},\ \frac{\lambda}{3},\ \lambda\right)$

c) $(x_0+3)^2+(y_0+4)^2-(z_0+1)^2+y_0=x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}-z_0^{\ 2}-y_0+39\Leftrightarrow 6x_0+9y_0-2z_0=15$

În relația de mai sus înlocuim $x_0=\frac{2\lambda}{3}$, $y_0=\frac{\lambda}{3}$ şi $z_0=\lambda$, deci $4\lambda+3\lambda-2\lambda=15$,

adică λ =3 şi soluția cerută este: (2, 1, 3)

L: 504. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{3}{7}\cdot x^2\cdot\sqrt[3]{x}\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$. Să se arate că

$$f^{II}(x)=f(x)\cdot\left(\frac{28}{9}x^2+\frac{17}{3}+\frac{1}{x^2}\right).$$

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare:

$$f^{I}(x)=x^{\frac{4}{3}}\cdot e^{\frac{x^2}{2}}+\frac{3}{7}\cdot x^{\frac{10}{3}}\cdot e^{\frac{x^2}{2}},\quad f^{II}(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}\cdot e^{\frac{x^2}{2}}+x^{\frac{4}{3}}\cdot e^{\frac{x^2}{2}}\cdot x+\frac{10}{7}\cdot x^{\frac{7}{3}}\cdot e^{\frac{x^2}{2}}+\frac{3}{7}\cdot x^{\frac{10}{3}}\cdot e^{\frac{x^2}{2}}\cdot x=$$

$$=\frac{7}{3}x^2\cdot\frac{4}{3}f(x)+\frac{7}{3}f(x)+\frac{10}{3}f(x)+\frac{f(x)}{x^2}.$$

L: 505. Câte numere de forma $\left((2116)^{\sin x}\right)^{\sin x}+\left((2116)^{\cos x}\right)^{\cos x}$, ($x\in R$) sunt întregi ?

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Considerăm funcția $f(t)=2116^t+2116^{1-t}$, unde $t=\sin^2 x$. Avem $0\le t\le 1$.

Deoarece $f'(t)=(\ln 2116)\left(2116^t-2116^{1-t}\right)$, avem: $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$; $f'(t)>0\Leftrightarrow\frac{1}{2}<t<1$.

Aşadar, f este descrescătoare pe $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ şi crescătoare pe $\left(\frac{1}{2},1\right)$şi prin urmare avem un minimum absolut

$f\left(\frac{1}{2}\right)=46+46=92$ (îndeplinită de exemplu pentru $x=\frac{\pi}{4}$), şi un maximum absolut

$f(0)=f(1)=2117$ (îndeplinită de exemplu pentru $x=0$).

Deoarece f este o funcție continuă, teorema valorilor intermediare ne garantează că orice număr întreg între 92 şi 2117 îndeplineşte condiția. Deci, sunt 2026 de numere întregi de forma dată.□

L: 506. Arătați că dacă $n\ge 2,\ n\in\mathbb{N}$ are loc inegalitatea $\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt[4]{4.....\sqrt[n]{n}}}}<2$.

Ramona Puchiu, Luminița Mihalache, Craiova

Rezolvare:

$$\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt[4]{4.....\sqrt[n]{n}}}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2\cdot 3}}\cdot 4^{\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}}\cdot.....n^{\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot....\cdot n}}=2^{\frac{1}{2!}}\cdot 3^{\frac{1}{3!}}\cdot 4^{\frac{1}{4!}}\cdot.....\cdot n^{\frac{1}{n!}}<$$

$\langle\ 2^{\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{k!}}=2^{\sum_{k=1}^{n}[\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}]}=2^{1-\frac{1}{n!}}\langle 2^1=2$.

L: 507. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx}{\sin x}$ **şi apoi să se deducă faptul că** $\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

***Rezolvare*:** Folosim faptul că $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ şi obţinem

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sin kx}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\frac{nx}{2}}\cdot\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\frac{(n+1)x}{2}}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{nx}{2}\cdot\frac{(n+1)x}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}=1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2},\ (1).$$

Pe de altă parte $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx}{\sin x}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{kx}\cdot\dfrac{x}{\sin x}\cdot\dfrac{k}{x}\cdot x\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}k$, (2). Din (1) şi (2) rezultă cerinţa.

L: 508. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{3k^2+1}{4k^6+3k^2(k^2+1)-1}$.

Lucian Tuţescu, Liviu Smarandache, Craiova

Rezolvare:

Cum $4k^6+3k^2(k^2+1)-1=4k^6+3k^4+3k^2-1=(2k^3+3k)^2-(3k^2+1)^2=....=\left[k^3+(k-1)^3\right]\left[k^3+(k+1)^3\right]$

rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{3k^2+1}{4k^6+3k^2(k^2+1)-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(k-1)^3+k^3}-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^3+(k+1)^3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{n^3+(n+1)^3}\right)=\dfrac{1}{2}$.

L: 509. Se consideră funcţia $f:E\to\mathbb{R},\ f(x)=\left|x^2-4x\right|\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. **Să se arate că f este continuă pe domeniul maxim de definiţie E.**

Constantin Dinu, Buzău

Rezolvare: Din $x\rangle 0$ şi $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\le 1$ rezultă $x\in[1;\infty)=E$. Cum

$$f(x)=\left|x^2-4x\right|\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}=\begin{cases}(4x-x^2)\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x\in[1;4)\\ 0, & x=4\\ (x^2-4x)\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x\in(4;\infty)\end{cases}.$$ Cum f este continuă pe $[1;4)\cup(4;\infty)$ iar

$\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x\langle 4}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x\rangle 4}}f(x)=f(4)$, rezultă că f este continuă pe E.

▪ Clasa a XII-a

L: 510. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}[X],\ f(X)=X^4-10X^3+100X+100,$ $g(X)=2X^3-15X^2+50$. **Arătaţi că rădăcinile reale ale polinoamelor se separă şi să se determine**

rădăcinile reale ale lui f;

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Se observă că $g=\frac{1}{2}f^{I}$. Fie x_1,x_2,x_3,x_4 rădăcinile lui f şi x_1^{I},x_2^{I},x_3^{I} rădăcinile lui f^{I} (care sunt şi rădăcini ale lui g). Avem $g(0)=50\rangle 0,\ g(3)=-31\langle 0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$.

Funcţia polinomială ataşată lui g este continuă şi rezultă $x_1^{I}\in(-\infty;0),x_2^{I}\in(0;3),x_3^{I}\in(3;\infty)$.

Ecuaţia $g(x)=0\Leftrightarrow f^{I}(x)=0$ are trei rădăcini reale şi atunci polinomul f de gradul 4 are patru rădăcini reale: $x_1\langle x_1^{I}\langle x_2\langle x_2^{I}\langle x_3\langle x_3^{I}\langle x_4$, întrucât între două rădăcini consecutive ale lui f există cel puţin o rădăcină a derivatei. Pentru a afla rădăcinile lui f, împărţim cu x^2 polinomul f rezultând:

$x^2-10x+\frac{100}{x}+\frac{100}{x^2}=0\Leftrightarrow\left[x^2+\left(\frac{10}{x}\right)^2\right]-10\left(x-\frac{10}{x}\right)=0$. Făcând notaţia $y=x-\frac{10}{x}$ se obţine ecuaţia $y^2=10y+20=0$ cu $y_{1,2}=5\pm\sqrt{5}$. Mai departe, $x_{1,2}=\frac{5+\sqrt{5}\pm\sqrt{70+10\sqrt{5}}}{2}$,

$x_{3,4}=\frac{5-\sqrt{5}\pm\sqrt{70-10\sqrt{5}}}{2}$.

L: 511. Să se rezolve în inelul $(\mathbb{Z}_{125},+,\cdot)$ ecuaţia $x^3+\hat{6}\cdot x+27=\hat{0}$, ştiind că are o soluţie unică.

Ovidiu Ţâţan, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Cum $125=5^3$ rezultă succesiv:

$x^3+\hat{6}\cdot x+27=\hat{0}\Rightarrow x^3+6x+27\equiv 0(\mathrm{mod}125)\Rightarrow x^3+x+2\equiv 0(\mathrm{mod}5)\Rightarrow x\equiv 4(\mathrm{mod}5)$

Căutăm pe x de forma $x=5\alpha+4$ astfel încât $x^3+6x+27\equiv 0(\mathrm{mod}25)\Rightarrow$

$\Rightarrow(5\alpha+4)^3+6(5\alpha+4)+27\equiv 0(\mathrm{mod}25)\Rightarrow 3\cdot 5\alpha\cdot 4^2+4^3+6\cdot 5\alpha+24+27\equiv 0(\mathrm{mod}25)\Rightarrow$

$\Rightarrow 270\alpha+115\equiv 0(\mathrm{mod}25)\Rightarrow 20\alpha+15\equiv 0(\mathrm{mod}25)\Rightarrow 4\alpha+3=0(\mathrm{mod}5)\Rightarrow\alpha=3(\mathrm{mod}5)\Rightarrow x=5\cdot 3+4\Rightarrow$

$x=19$.

Cum $x=19$ verifică şi ecuaţia din enunţul problemei, aceasta e unica soluţie a ecuaţiei!

L: 512. Determinaţi polinomul $P\in\mathbb{R}[X]$ astfel încât $P^2(x^2)=x\cdot(x+1)\cdot P(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Roxana Vasile, Drăghici Ani, Craiova

Rezolvare:

Pentru x=0 rezultă P(0)=0 şi pentru x= -1 rezultă P(1)=0. Polinomul identic nul îndeplineşte condiţia din enunţ.

Fie $P\neq 0,\ gradP=n$. Atunci, din $2n=n+2\Rightarrow n=2$. Aşadar, $P(X)=aX(X-1)$ care verifică relaţia din enunţ.

L: 513. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^4-10x^3+35x^2-50x+24$.

a) Să se arate că suma cuburilor rădăcinilor ecuaţiei $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$ este un pătrat perfect.

b) Să se arate că $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2,3,4\}$

c) Să se demonstreze că $f(x)f''(x)<\left(f'(x)\right)^2$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

Iuliana Traşcă, Scorniceşti, Olt

Rezolvare:

a) $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0\Leftrightarrow(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=0$. Deci soluţiile sunt 1, 2, 3 şi 4 şi $1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$.

b) Conform a) $f'(x)=\left[(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\right]'=(x-2)(x-3)(x-4)+$
$+(x-1)(x-3)(x-4)+(x-1)(x-2)(x-4)+(x-1)(x-2)(x-3)$
Cu această scriere a lui $f'(x)$ rezultă uşor c.c.t.d

c) Derivând relația de la punctul b) rezultă că pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2,3,4\}$ avem:

$$\frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}=-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{(x-3)^2}-\frac{1}{(x-4)^2}<0$$
, adică

$f(x)f''(x)<(f'(x))^2$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2,3,4\}$ (1)

$f'(1)=-6, f'(2)=2, f'(3)=-2, f'(4)=6$, $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$

Deci $f(x)f''(x)<(f'(x))^2$, $x\in\{1,2,3,4\}$ (2)

Din (1) şi (2) avem $f(x)f''(x)<(f'(x))^2$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$

L: 514. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă astfel încât $x^2\geq\int_0^x f(t)dt$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Arătați că f(0)=0.

Marian Voinea, Florentin Vişescu, Bucureşti

Rezolvare: Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-\int_0^x f(t)dt\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Cum $g(x)\geq g(0)$, $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow x_0=0$ este punct de minim, atunci, $g'(0)=0$. Cum
$g'(x)=2x-f(x)\geq 0\Rightarrow f(0)=0.$

L: 515. Folosind dezvoltarea binomială $(\sqrt{x}-1)^n$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 0$ deduceți identitatea
$$\frac{C_n^0}{n+2}-\frac{C_n^1}{n+1}+\frac{C_n^2}{n}-\frac{C_n^3}{n-1}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{C_n^n}{2}=\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}.$$

Ionel Tudor, Călugăreni, **Stelian Piscan**, Giurgiu

Rezolvare:

Fie $f:[0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(\sqrt{x}-1)^n=C_n^0\cdot x^{\frac{n}{2}}-C_n^1\cdot x^{\frac{n-1}{2}}+C_n^2\cdot x^{\frac{n-2}{2}}-C_n^3\cdot x^{\frac{n-3}{2}}+\ldots+(-1)^nC_n^n$.

Funcția f este integrabilă pe $[0;1]$ şi

$$\int_0^1\left(\sqrt{x}-1\right)^n dx=C_n^0\cdot\frac{x^{\frac{n}{2}+1}}{\frac{n}{2}+1}\Big|_0^1-C_n^1\cdot\frac{x^{\frac{n-1}{2}+1}}{\frac{n-1}{2}+1}\Big|_0^1+C_n^2\cdot\frac{x^{\frac{n-2}{2}+1}}{\frac{n-2}{2}+1}\Big|_0^1-C_n^3\cdot\frac{x^{\frac{n-3}{2}+1}}{\frac{n-3}{2}+1}\Big|_0^1+..+(-1)^nC_n^n\Big|_0^1=$$

$$\frac{2C_n^0}{n+2}-\frac{2C_n^1}{n+1}+\frac{2C_n^2}{n}-\frac{2C_n^3}{n-1}+\ldots+(-1)^nC_n^n. \quad (1)$$

Pe de altă parte, făcând substituția $u=\sqrt{x}-1$, deci $x=u^2+2u+1$ şi dx= (2u+2)du. Obținem,

$\int_{-1}^0 u^n(2u+2)du=\frac{2(-1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$. (2). Din (1) şi (2) rezultă identitatea din enunț.

L: 516. Să se demonstreze că $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x+3\cos x}{2\cos x+3\sin x}dx>\frac{\pi}{2}$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Fie $f:[0,\frac{\pi}{2}]\to R,\ f(x)=\frac{2\sin x+3\cos x}{2\cos x+3\sin x}$, $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$, făcând schimbarea de variabilă $x=\frac{\pi}{2}-t=u(t), u'(t)=-1, u(0)=\frac{\pi}{2}, u\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ obținem $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{f(x)}dx$ şi deci:

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right)dx\overset{AM-GM}{\geq}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sqrt{f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\pi,\text{ adică } I>\frac{\pi}{2}.$$

L: 517. Să se arate că $\sqrt{\int_0^1 e^{x^2}dx\cdot\int_0^1\ln^2(x+1)}>2\ln 2-1$.

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Folosim faptul că $e^{x^2}\geq x^2+1$ şi inegalitatea C-B-S.

Rezultă $\sqrt{\int_0^1\left(\sqrt{e^{x^2}}\right)^2dx\cdot\int_0^1\ln^2(x+1)}\geq\int_0^1\sqrt{e^{x^2}}\cdot\ln(x+1)dx\geq\int_0^1\sqrt{x^2+1}\cdot\ln(x+1)dx\overset{1\leq\sqrt{x^2+1}\leq\sqrt{2}}{\geq}$

$$\overset{1\leq\sqrt{x^2+1}\leq\sqrt{2}}{\geq}\int_0^1\ln(x+1)=2\ln 2-1,\text{ q.e.d.}$$

Semnul egal nu poate fi deoarece $\frac{\sqrt{e^{x^2}}}{\ln(x+1)}\neq k$.

L: 518. Să se arate că $\int_4^5\frac{\ln^2 x}{x^2+a^2}dx\ \langle\ \ln\sqrt{2},\ \forall x\rangle 4,\ |a|\rangle 1$. **Aurel Chiriță**, Slatina

Rezolvare:

Evident, $\ln x\langle\sqrt{x},\ \forall x\rangle 4\Rightarrow\ln^2 x\langle\sqrt{x}^2\Rightarrow\ln^2 x\langle x\Rightarrow 0\langle\frac{\ln^2 x}{x^2+a^2}\langle\frac{x}{x^2+a^2}$. Mai departe,

$$0\ \langle\ \int_4^5\frac{\ln^2 x}{x^2+a^2}dx\ \langle\ \int_4^5\frac{x}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{25+a^2}{a^2+16}\right|\ \langle\ \frac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2}.$$

S-a folosit faptul că $1\langle\frac{25+a^2}{16+a^2}=\frac{16+a^2}{16+a^2}+\frac{9}{16+a^2}=1+\frac{9}{16+a^2}\langle 1+1=2$.

L: 519. Calculați $\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\ln\left[(1+t)(1+t^4)\right]dt$.

Gabriela Drînceanu, Răzvan Drînceanu, Craiova

Rezolvare:

Observăm că integrala dată este egală cu $I=I_1+I_2$, unde

$$I_1=\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\ln(1+t)dt=\int_0^1\left[\ln(1+t^2)\right]'\ln(1+t)dt=\frac{1}{2}\ln^2 2-\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+t^2)\cdot\frac{1}{1+t}dt.$$

$I_2=\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\ln(1+t^4)dt=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{1+x}dx$, cu schimbarea de variabilă $t^2=x$. Atunci, $I=\frac{1}{2}\ln^2 2$

L: 520 **Să se calculeze integrala:**

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{x^n}{x^{3n+1}+x^{2n+2}+x^{2n}+x^{n+1}+x^{n-1}+1}dx, \quad \textbf{unde } a>0, n\in N.$$

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Pentru a = 1 integrala este egală cu zero.

Pentru $a\neq 1$ integrala dată se rescrie: $I=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^n dx}{\left(x^{2n+2}+x^{n+1}+1\right)\left(x^{n-1}+1\right)}$.

Efectuând schimbarea de variabilă $x=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt$, obținem că

$$I=-\int_{a}^{\frac{1}{a}}\frac{\frac{1}{t^n}\cdot\frac{dt}{t^2}}{\left(\frac{1}{t^{2n+2}}+\frac{1}{t^{n+1}}+1\right)\left(\frac{1}{t^{n-1}}+1\right)}=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^{2n-1}dx}{\left(x^{2n+2}+x^{n+1}+1\right)\left(x^{n-1}+1\right)}=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^n x^{n-1}dx}{\left(x^{2n+2}+x^{n+1}+1\right)\left(x^{n-1}+1\right)}=$$

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^n}{x^{2n+2}+x^{n+1}+1}\cdot\frac{x^{n-1}}{x^{n-1}+1}dx=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^n}{x^{2n+2}+x^{n+1}+1}\left(1-\frac{1}{x^{n-1}+1}\right)dx=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^n dx}{x^{2n+2}+x^{n+1}+1}-$$

$$-\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^n dx}{\left(x^{2n+2}+x^{n+1}+1\right)\left(x^{n+1}+1\right)}=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^n dx}{x^{2n+2}+x^{n+1}+1}-I\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^n dx}{x^{2n+2}+x^{n+1}+1}.$$

Efectuăm schimbarea de variabilă $x^{n+1}=t\Rightarrow (n+1)x^n dx=dt$, şi atunci:

$$I=\frac{1}{2(n+1)}\int_{\frac{1}{a^{n+1}}}^{a^{n+1}}\frac{dt}{t^2+t+1}=\frac{1}{2(n+1)}\int_{\frac{1}{a^{n+1}}}^{a^{n+1}}\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{\sqrt{3}(n+1)}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\Bigg|_{\frac{1}{a^{n+1}}}^{a^{n+1}}.$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{\sqrt{3}(n+1)}\left(arctg\frac{2a^{n+1}+1}{\sqrt{3}}-arctg\frac{\frac{2}{a^{n+1}}+1}{\sqrt{3}}\right),$$ relație valabilă şi pentru a = 1.

L: 521. **Fie $f,g:[0;1]\to(0;\infty)$, două funcții continue. Să se arate că**

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\int_0^1 g(x)\left(\sqrt[n]{f(x)}-1\right)\right)=\int_0^1 g(x)\ln f(x)dx.$$ **Nicolae Papacu**, Slobozia

Rezolvare: Evident, $\ln x\le x-1\le x\ln x,\ \forall x\rangle 0\Rightarrow \ln\sqrt[n]{f(x)}\le\sqrt[n]{f(x)}-1\le\sqrt[n]{f(x)}\ln\sqrt[n]{f(x)}$, cum

$\ln\sqrt[n]{f(x)}=\frac{1}{n}\ln f(x)$ şi $g(x)\rangle 0$ obținem:

$$\frac{1}{n}g(x)\ln f(x)dx\le g(x)\left(\sqrt[n]{f(x)}-1\right)\le\frac{1}{n}g(x)\sqrt[n]{f(x)}\ln f(x)\Rightarrow$$

$$\int_0^1 g(x)\ln f(x)dx\le\underbrace{n\cdot\int_0^1 g(x)\cdot\left(\sqrt[n]{f(x)}-1\right)dx}_{notam\ cu\ a_n}\le\int_0^1 g(x)\cdot\sqrt[n]{f(x)}\ln f(x)dx,$$ rezultă

$$\left|a_n-\int_0^1 g(x)\ln f(x)dx\right|\le\left|\int_0^1 g(x)\ln f(x)\left(\sqrt[n]{f(x)}-1\right)\right|\le\int_0^1 g(x)\left|\ln f(x)\right|\left|\sqrt[n]{f(x)}-1\right|dx.$$

Deoarece f este continuă pe $[0;1]$ rezultă că f este mărginită

$$m\le f(x)\le M\Rightarrow\left|\sqrt[n]{f(x)}-1\right|\le\max\left(\left|\sqrt[n]{m}-1\right|,\left|\sqrt[n]{M}-1\right|\right)=\alpha_n\Rightarrow$$

$$\left|a_n-\int_0^1 g(x)\ln f(x)dx\right|\le\alpha_n\cdot\int_0^1 g(x)\left|\ln f(x)\right|dx.\ \text{Cum}\ \lim_{n\to\infty}\alpha_n=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\int_0^1 g(x)\ln f(x)dx.$$

Adam Riese şi un topometru orgolios

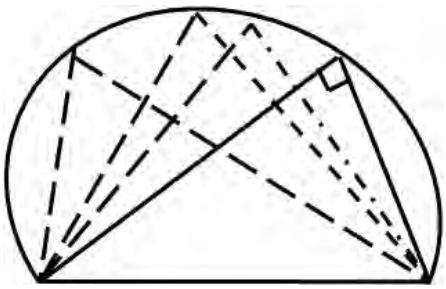


Matematicianul german **Adam Riese** (1492- 1559) deşi nu se cunosc foarte multe despre viaţa lui, prin cele câteva cărţi de algebră a contribuit la aducerea matematicii medievale la cea modernă prin folosirea scrierii zecimale arabe, a unei fel de calculator cum ar fi abacul, iar limbajul folosit în scrierile sale era nu latina ci germana. El este considerat părintele calculului modern.

Se povesteşte că odată, Riese s-a întâlnit cu un topometru mult prea orgolios şi cam lăudăros.

Atunci, matematicianul i-a propus o întrecere: să deseneze un număr cât mai mare de triunghiuri dreptunghice cu ipotenuza dată, într-un timp cât mai scurt.

Dacă topometrul a început să deseneze aşa cum se pricepea, să ducă printr-o extremitate a ipotenuzei o semidreaptă iar prin cealaltă extremitate, o perpendiculară pe fiecare semidreaptă, Riese, în schimb a construit un cerc având ca diametru ipotenuza dată şi unind puncte de pe semicerc cu diametrul cercului, a reuşit să construiască într-un timp foarte scurt şi mult mai sigur, foarte multe triunghiuri dreptunghice, întrecându-l astfel pe lăudărosul topometru. Se pare că acesta nu ştia ce orice elev de clasa a VII-a , ştie astăzi că un triunghi dreptunghic se înscrie într-un semicerc.



Din cartea „ O scurtă istorie a matematicii ” de Adrian Stan şi colab. Editura Editgraph. 2015.

„ A învăța înseamnă a merge către știința unui lucru, necunoscut prin ceva cunoscut”.
Jan Amos Comenius
(1592- 1670)



4. Probleme propuse

▪ Clasa a V-a

G:683. Maria şi Bogdan au comandat la cofetărie prăjituri, Maria a cerut bezele iar Bogdan madelaine. O bezea este mai scumpă decât o madelainã. Maria a primit cu 20% mai multe prăjituri decât Bogdan, dar a şi plătit cu 80% mai mult. Cu ce procent este mai scumpă o bezea decât o madelainã?

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

G:684. Se consideră pătratele cu laturile $2, 2^2, 2^3, ..., 2^{2017}$. Să se determine pe ce loc se află pătratul cu latura $2^{1+2+3+...+63}$ şi să se afle aria şi perimetrul acestuia.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:685. Determinați cifrele a, b, c astfel încât relația $(10+20+30+.....+90)\cdot c : a^2 = b^2,\ a,b,c \rangle 0$ să fie adevărată.

Petre Păunescu, Roşiorii de Vede, Telorman

G:686. Să se arate că numărul 37^{2017} nu este cub perfect dar se poate scrie ca diferența a două cuburi perfecte.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:687. Să se scrie 2016^{2017} ca suma dintre două pătrate perfecte si un cub perfect diferite de zero.

Gabriela Buzea, Bucureşti

G:688. Determinați numerele naturale *a* şi *b* ştiind că $[a,b]=55+(a,b)$ şi $a + b = 35$.

Daniela Badea, Ploieşti

G:689. Determinați numerele $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\overline{aa}^2 + \overline{bb}^2 + \overline{cc}^2 = 5929$.

Adrian Stan, Buzău

G:690. Găsiți numerele prime de forma $\overline{abb}$ astfel ca $\overline{abb}\cdot\left(a^c + b\right) + \overline{bba} = \overline{adbb}$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:691. Să se arate că $\underbrace{\overline{abab...ab}}_{2016\ litere} + \underbrace{\overline{baba...ba}}_{2016\ litere} = \underbrace{\overline{aa...a}}_{de\ 2016\ ori} + \underbrace{\overline{bb...b}}_{de\ 2016\ ori} \ \vdots 37$.

Constantin Ciobîcă, Fălticeni

G:692. Aflați numerele naturale de forma $\overline{xy}$ astfel încât numărul $\frac{76}{x^2 + y_2}$ să fie natural.

Marian Ciuperceanu, Craiova

▪ Clasa a VI-a

G:693. Determinați numerele naturale nenule a, b şi c pentru care $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{5}=4$.

Elev **Ionuț - Florin Voinea**, Bucureşti

G:694. Arătați că nu există numere prime p care să verifice relația $(p+2)^a=(p-2)^b$, unde .

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

G:695. Aflati numerele prime x si y astfel incat $23_{(x)}+45_{(y)}=76_{(8)}$

Adriana Puescu, Buzău

G:696. Să se arate că numărul $A=2^5+2^{11}+2^{17}+.....+2^{371}+2^{377}$ este divizibil cu 2016.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:697. Găsiți numerele $\overline{xy}$ astfel încât să avem: $\frac{\overline{xy}+\overline{yx}-2(x-3y)}{9}=\overline{x,(y)}+\overline{y,(x)}$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:698. Să se determine restul împărțirii numărului $n=2007^{2007}+2008^{2008}+2009^{2009}+2010^{2010}$ la 17.

Gheorghe Ghiță, Buzău

G:699. Fie numerele $a,b,c,d\rangle 0$ cu proprietatea că $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+a}=x,$ unde $0\langle x\langle 4$.

Calculați $\frac{a}{a+d}+\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+b}+\frac{d}{d+c}$.

Marin Chirciu, Piteşti

G:700. Numerele a_1,a_2,b_1 şi b_2 sunt naturale, iar a_1 şi a_2 sunt prime. Se ştie că media aritmetică a numerelor a_1 şi b_2 este 4, media aritmetică ponderată a numerelor a_1 şi a_2 cu ponderile b_1 şi b_2 este 4, iar media aritmetică ponderată a numerelor b_1 şi b_2 cu ponderile a_1 şi a_2 este $\frac{20}{3}$. Aflați cele patru numere.

Daniela Badea, Ploieşti

G:701. Determinați numerele prime p şi q care verifică relația $p^3\cdot q^3=p^3+3q^3+127$.

Elev **Ionuț- Florin Voinea**, Bucureşti

G:702. Determinați numerele prime p şi q astfel încât $(p+4)^4$ să fie pătrat perfect.

Daniela Beldea, Băileşti, Dolj

G:703. Triunghiul ΔABC are $m(\sphericalangle C)=50^0$ iar $m(\sphericalangle B)$ este media aritmetică a măsurilor unghiurilor $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle C$. Aflați măsurile unghiurilor $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle B$.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:704. În interiorul triunghiului ascuțit unghic ABC având $m(A)=81^0$ se consideră punctele M şi N astfel încât $[BM]$şi $[BN]$împart unghiul $\sphericalangle B$ în trei părți congruente.

De asemenea, $[CM]$şi $[CN]$ împart unghiul $\sphericalangle C$ în trei părți congruente. Fie $BM \cap CN = \{P\}$ şi $BN \cap CM = \{Q\}$. Se cere:

a) Să se calculeze $m(\sphericalangle CMN)$;

b) Să se arate că $\Delta\, PMN \equiv \Delta\, QMN$ dacă şi numai dacă $\Delta\, ABC$ este isocel cu $[AB] \equiv [AC]$.

Adrian Stan, Buzău

▪ Clasa a VII-a

G:705. Arătați că numărul $\sqrt{7 \cdot 2017 \cdot (1+2+3+....+2016)}$ este rațional.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:706. Să se demonstreze că $\sqrt{2011^n + 2015^n + 2016^n} \notin \mathbb{Q},\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Dida Isaia, Galați

G:707. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n \geq 4$ este adevărată inegalitatea $n^3 > (n+2)^2$.

Neculai Stanciu, Buzău şi Iuliana Traşcă, Olt

G:708. Dacă $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{5^{2x}}{9} + 5^{2y} \leq \frac{2}{3} \cdot 5^{x+y}$, atunci $5^x + 5^y$ se divide cu 4.

Iuliana Traşcă, Scorniceşti, Olt

G:709. Să se arate că există $n \in \mathbb{N}$, pentru care numărul $a = 2015n^2 + 2015n + 2016,$ este cub perfect.

Ionel Tudor, Călugăreni, **Viorica Dogaru**, Giurgiu

G:710. Să se afle x, y, z dacă are loc relația $6x^2+3y^2+4z^2-2yz-4xz-18z+27=0$.

Gabriela Buzea, Bucureşti

G:711. Determinați numerele naturale $\overline{ab}$ ştiind că $ab^2 + 4ab - 2b^2 + 4a - 8b = 44$.

Doina şi Mircea Mario Stoica, Arad

G:712. Dacă $xyz = 1,\ x, y, z \in \mathbb{N}^*$, calculați $\frac{2016}{1+x+xy} + \frac{2016}{1+y+yz} + \frac{2016}{1+z+xz}$.

Andrei Octavian Dobre, Ploieşti

G:713. Dacă $a, b, c \rangle 0$ şi $a \cdot b \cdot c = 1$, arătați că

$$\frac{4}{(a+b)^2 + 4(a+1)} + \frac{4}{(b+c)^2 + 4(b+1)} + \frac{4}{(c+a)^2 + 4(c+1)} \leq 1.$$

Marin Chirciu, Piteşti

G:714. Aflați mulțimea $A = \left\{ \overline{abc} \,\middle|\, \sqrt{\overline{abc}} = a \cdot b + c + b^b, a \neq b \neq c \right\}$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:715. Să se determine $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $S_n = 3^n + 5^n + 7^n + ... + (2p+1)^n$, să nu fie pătrat perfect pentru orice n număr natural par.

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

G:716. Dacă numerele $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt direct proporționale cu numerele $2, 3, ..., n+1$ şi $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt măsurile a n unghiuri în jurul unui punct atunci aflați $n,\ x_1, x_2, ..., x_n$.

Constantin Ciobîcă , Fălticeni

G:717. Fie AD, BE, CF bisectoarele interioare ale triunghiului ABC. Dacă aria triunghiului ABD este media aritmetică a ariilor triunghiurilor BCE şi CAF atunci triunghiul ABC este isoscel.

Gheorghe Ghiță, Buzău

G:718. Se dau cercurile $C_1(O_1,R)$ şi $C_2(O_2,r)$ tangente exterior şi punctele $A,B\in C_1(O_1,R)$ diametral opuse. Din B se construieşte tangenta BC la $C_2(O_2,r)$, $C\in C_2(O_2,r)$. Arătați că triunghiul ΔABC este isoscel.

Adriana Puescu, Buzău

▪ Clasa a VIII-a

G:719. Aflați $a\in\mathbb{Q}$ astfel încât $n=\frac{a-1}{\sqrt{2}+1}+\frac{a+1}{\sqrt{2}-1}\in\mathbb{N}$. **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

G:720. Fie $x,y,z\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $x^2+y^2+z^2=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$. Arătați că numerele xy, yz, zx şi xy+yz+zx sunt pătrate perfecte.

Iulia Sanda, Tatiana Cristea, Craiova

G:721. Rezolvați ecuația $33^{2x}+56^{2x}+2017^{2x}=33^x\cdot 56^x+33^x\cdot 2017^x+56^x\cdot 2017^x$, $x\in\mathbb{R}$.

Mircea Mario Stoica, Arad

G:722. Fie $x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{R}_+$. Arătați că
$\left(x_1^{\,2}+2012x_1+1\right)\cdot\left(x_2^{\,2}+2012x_2+1\right)\cdot...\cdot\left(x_n^{\,2}+2012x_n+1\right)\geq 2014^n x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_n$.

Iuliana Traşcă, Scorniceşti, Olt

G:723. Ştiind că x este un număr impar, multiplu de 7, găsiți perechile de numere naturale (x,y) ale egalității $x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-\sqrt{2016x}-\sqrt{2016y}+\sqrt{2016xy}=2016$.

Andrei Octavian Dobre, Ploieşti

G:724. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuatia:
$$\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)+\frac{1}{2x+4}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}\right)+\frac{1}{2x+8}\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+5}\right)=\frac{x^2-6}{(x-1)(x+5)}.$$

Adriana Puescu, Buzău

G:725. Fie expresia $E(x,y)=\frac{x+y}{1+xy};x,y\in(-1,1)$.

a) Să se arate că $E(x,y)\in(-1,1),\forall x,y\in(-1,1)$;

b) Să se rezolve inecuația $E\left(x,\sqrt{2}-1\right)<\frac{1}{2}$. **Daniela Badea**, Ploieşti

G:726. Să se arate că ecuația $\frac{27+x^3}{27+2017^3}=\frac{3+x}{2020}$ are în $\mathbb{Z}$, trei rădăcini a căror sumă este egală cu zero.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:727. Găsiți punctele A(a,b) ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+2016$ cu $a,b\in\mathbb{N}^*$, $a\neq 1$ astfel încât să avem: $\frac{4a^2+4ab+b^2-1}{2a^2+ab-a-b-1}\cdot(a-1)=2017$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:728. Să se rezolve ecuația $[2016x] + \{2017x\} = 2018$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

G:729. Demonstrați că dacă $x, y, z > 0$, atunci: $\frac{x^5}{(yz)^3} + \frac{x^5}{(yz)^3} + \frac{x^5}{(yz)^3} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Marin Chirciu, Piteşti

G:730. Fie $a,b,c > 0$. Să se demonstreze inegalitatea: $\left(\sum a^8\right)\left(\sum \frac{1}{a^8}\right) \geq \left(\sum a\right)\left(\sum \frac{1}{a}\right)$.

Mihály Bencze, Bucureşti

G:731. Dacă un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile a,b,c numere naturale, aria totală A_t, şi volumul V astfel încât $\frac{A_t - 2}{V - (a+b+c)} = 2$, atunci determinați aria totală minimă şi volumul minim al paralelipipedului.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

▪ Clasa a IX-a

L:522. Să se determine $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $y^6 - x(x+1)(x+2)(x+3) = 40$.

Constantina Prunaru, Roxana Vasile, Craiova

L:523. Arătați că $\sqrt[3]{108(3+2\sqrt{2})(2+\sqrt{3})(3+\sqrt{5})} < 8 + 2(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6})$

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

L:524. Fie $a_1, a_2, ..., a_n$, $n \geq 2$, numere reale strict pozitive. Arătați că

$$\frac{a_1 + a_1a_2}{a_2 + a_1a_2} + \frac{a_2 + a_2a_3}{a_3 + a_2a_3} + ... + \frac{a_n + a_na_1}{a_1 + a_na_1} < \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + ... + \frac{a_{n-1}}{a_n} + n - 1.$$

Iulia Sandu, Mircea Tereujanu, Craiova

L:525. Fie $a,b,c > 0$ astfel încât $a+b+c=1$. Demonstrați că $a^6 + b^6 + c^6 + 6a^2b^2c^2 \leq a^5 + b^5 + c^5$.

Marin Chirciu, Piteşti

L:526. Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir de numere reale în progresie aritmetică atunci demonstrați că:

$$\frac{1}{(a_1+a_2)\cdot(a_2+a_3)} + \frac{1}{(a_2+a_3)\cdot(a_3+a_4)} + ... + \frac{1}{(a_n+a_{n+1})\cdot(a_{n+1}+a_{n+2})} = \frac{n}{(a_1+a_2)\cdot(a_{n+1}+a_{n+2})}, \forall n \geq 1$$

Constantin Ciobîcă, Fălticeni

L:527. Fie $a,b,c > 0$. Să se demonstreze inegalitatea $\sum \frac{ac(b+c)}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}} \leq a+b+c$.

Mihály Bencze, Bucureşti

L:528. Arătați că, dacă $a_i > 0 \left(i = \overline{1,n}, n \geq 3\right)$ şi $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = 1$, atunci

$$\frac{1}{1+2a_1} + \frac{1}{1+2a_2} + ... + \frac{1}{1+2a_n} \geq 1.$$

Neculai Stanciu, Buzău**, Titu Zvonaru,** Comăneşti

L:529. Pentru $x,y,z\in\mathbb{R}_+^*$ considerăm mulțimea

$A=\left\{xy+2y^2+yz, xy+yz+2xz, y^2+xz+2yz, y^2+2xy+xz\right\}$ şi notăm cu $E=2\sqrt{xy(y^2+z^2)+yz(x^2+y^2)}$. Să se arate că oricum am alege $x,y,z\in\mathbb{R}_+^*$:

a) cel puțin două dintre elementele mulțimii A sunt mai mari sau egale decât E .

b) cel puțin un element al mulțimii A este mai mic sau egal decât E .

Vasile Jiglău, Arad

L:530. În triunghiul ABC cu $AB\rangle AC$ şi $m(\sphericalangle A)=108^0$, se consideră mediana $[AM]$ şi simediana $[AN]$, unde $M,N\in(BC)$. Calculați $\frac{AB}{AC}$ în cazul în care $[AM]$ sau $[AN]$ este trisectoare a unghiului $\sphericalangle A$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:531. Un triunghi ABC este isoscel,dacă şi numai dacă raportul dintre mediana şi bisectoarea interioară din A este egal cu raportul dintre media aritmetică şi media geometrică ale laturilor [AB] şi [AC].

Gheorghe Ghiță, Buzău

▪ Clasa a X-a

L:532. Determinați numerele complexe z astfel încât să fie îndeplinite simultan relațiile:

$$\begin{cases}2\cdot z^{2017}-|z|=1\\ z^{2016}+|z|=2\end{cases}.$$

Lucian Tuțescu, Craiova

L:533. Rezolvați ecuația $4^{x^4}+4^{\frac{x+1}{x}}=20$. **Marin Chirciu**, Piteşti

L:534. Dacă $a,b,c\in(1,\infty)$ sau $a,b,c\in(0,1)$ atunci:

$$\sqrt{\log_a abc}+\sqrt{\log_{abc} a}+\sqrt{\log_b abc}+\sqrt{\log_{abc} b}+\sqrt{\log_c abc}+\sqrt{\log_{abc} c}\geq 4\sqrt{3}.$$

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:535. Dacă ABC este un triunghi (cu notațiile uzuale) atunci este adevărată inegalitatea

$$\frac{b+c}{a^5}+\frac{c+a}{b^5}+\frac{a+b}{c^5}\geq\frac{2}{3R^4}.$$

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

L:536. Să se rezolve sistemul $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{x+2}=\sqrt{y-3}+\sqrt{y-1}\\ 2(x^2+y^2)+3(x+y)=79\end{cases}$.

Adrian Stan, Buzău

L:537. Să se demonstreze că în orice triunghi ABC este adevărată inegalitatea

$$\sum\frac{m_b-m_c}{(m_a+m_b)(2\sin^2 A+2\sin^2 B-\sin^2 C)}\geq 0.$$

Mihály Bencze, Bucureşti

L:538. Să se determine mulțimea triunghiurilor în care avem relația $2a=b+c$, notațiile fiind cele uzuale.

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

L:539. Rezolvați în $\mathbb{N}^*$, ecuația: $tg^2\frac{\pi}{4n}+tg^2\frac{3\pi}{4n}+...+tg^2\frac{5\pi}{4n}=5n$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:540. Fie $n,k\in\mathbb{N}$ astfel încât $2\le k\le n-1$. Arătați că $1<\sqrt[n]{n}<1+\frac{k\cdot\sqrt[n]{n}}{n}-\frac{k}{n}$.

Ileana Didu, Camelia Dană, Craiova

L:541. Fie $n_1,n_2,.....,n_k\in\mathbb{N},n\ge 2,k\in\mathbb{N},k\ge 2$ astfel încât $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+...+\frac{1}{n_k}=1$. Arătați că

$\sqrt[n_1]{n_1}+\sqrt[n_2]{n_2}+....+\sqrt[n_k]{n_k}<2k-1$.

Doina Popescu, Rm. Vâlcea, **Roxana Vasile**, Craiova

▪ Clasa a XI-a

L:542. Fie $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Z})$.

a) Să se arate că matricea A^{2^n} este inversabilă şi $(A^{2^n})^{-1}=A^{2^{n-1}}$, $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$

b) Arătați că $\det(A-A^2+A^3-.....-A^{2016}+A^{2017})=\det A-\det A^2+\det A^3-.....-\det A^{2016}+\det A^{2017}$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:543. Să se arate că $\left(\frac{x}{z}\right)^y\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^z\cdot\left(\frac{z}{y}\right)^x\le 1$, pentru orice numere reale nenule x,y,z cu $x>y>z$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

L:544. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}a-1 & a & a-1\\ 1 & a & -a\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$. Să se arate că ecuația

$X^{2016}+X^{2018}=A^{2017}$, nu are soluții în $M_3(\mathbb{R})$.

Adrian Stan, Buzău

L:545. Se consideră şirul

$x_{nm}=\frac{1+2+...+(n-1)}{n}+\frac{1^2+2^2+...+(n-1)^2}{n^2}+...+\frac{1^m+2^m+...+(n-1)^m}{n^m}$, $\forall n\ge 2,m\ge 1$.

Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to 0}\left(\lim\limits_{m\to\infty}x_{nm}\right)$.

Constantin Ciobîcă, Fălticeni

L:546. Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{p}\frac{n-k}{A_n^k}\right)^{A_n^p}$, $p\in N^*$, fixat.

Gheorghe Ghiță, Buzău

▪ Clasa a XII-a

L:547. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x^5-500x^3+50000x-400000=0$, şi să se arate că soluțiile aparțin intervalului $(20;30)$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:548. Dacă $f(X)=\sum_{k-0}^{n}a_kX^k\in Z[X]$, $f(-1)=0$ şi $f(\sqrt{2})\in Z$ arătați că $f(1)+a_1$ este număr par.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

L:549. **Să se calculeze** $\int\frac{1-x^2}{x^4+4x^3+7x^2+4x+1}dx$**.** **Adrian Stan**, Buzău

L:550. Se dă şirul $b_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, $n\in N^*$. Să se demonstreze că $b_n\in\left(\ln(1+\sqrt{2}),\ln 2\right)$.

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

L:551. Să se calculeze integrala $\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\frac{x^2\ln x}{(x+2)^6}dx$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:552. Să se determine o primitivă a funcției $f:[4,\infty)\to R$, $f(x)=\sqrt{x+4\cdot\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\cdot\sqrt{x-4}}$ care îndeplineşte condiția $F(40)=2305$.

Constantin Ciobîcă, Fălticeni

Din legile lui Murphy

1. Oamenii văd ceea ce au fost obişnuiți să vadă; ei refuză să vadă ce nu se aşteptau să vadă.

2. Când un savant distins, dar în vârstă, afirmă că ceva este posibil, are întodeauna dreptate. Când el afirmă că ceva este imposibil, e foarte probabil că greşeşte.

3. Expertul este o persoană ce a făcut toate greşelile posibile într-un domeniu foarte restrâns de activitate.

4. Singurul mod de a descoperi limitele posibilului este să mergi dincolo de ele, către imposibil.

5. oportunitatea îți bate la uşă în cel mai puțin oportun moment. Ori de câte ori stabileşti să faci un anume lucru mai întâi, survine un alt lucru care trebuie făcut primul.

6. Oamenii vor accepta cu mai multă uşurință ideea ta dacă le spui că primul care a avut-o a fost Benjamin Franklin.

7. Când oamenii sunt liberi să facă ceea ce vor, de regulă se imită unul pe altul.

**„ Noting is impossible,
the word itself says, i·m possible ! ”.
Audrey Hepburn
(1929-1993)**



5. QUICKIES

A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader's name, full address, and an e-mail address. Submited solutions should arrive before September 30, 2017.

PROPOSALS – QUICKIES

Q33. Proposed by Nela Ciceu and Roxana Mihaela Stanciu, Romania.
Să se demonstreze că dacă $x, y, z > 0$, atunci este adevărată inegalitatea

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx + \frac{(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

Q34. Proposed by Marin Chirciu, Piteşti, România.

If $a,b,c > 0$ and $n,k \in \boldsymbol{N}^*$, then prove that $\sum \frac{1}{a^2} \geq \frac{9(n+k)}{n\sum a^2 + k\sum bc}$.

Q35. Proposed by editor.

If $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ and $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is a continuous and odd function, then compute

$$\int_{-a}^{a} (x^{1936} + x^{2018} + 82) \cdot \arccos(\sin(f(x)))dx.$$

Q36. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

Let $x \in \mathbb{R}$ and $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & ... & 1 & 1 \\ .... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & ... & 1 & x+1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$. Compute $A(0)\cdot A(x)\cdot A(y)\cdot A(z)$,

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

SOLUTIONS – QUICKIES

Q29. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

Let $(a_n)_{n\geq 1}, a_1 = 1, a_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2}{\sqrt[k]{k!}}, \forall n \geq 2$. Calculate $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2}$.

Solution by Marius Drăgan, Bucharest, Romania. It is well-known that $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$, hence

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}\overset{Cesaro-Stolz}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{(n+1)^2-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\frac{e}{2}.$$

Solution by Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain.
The solution follows by the Stolz-Cesaro lemma and the Stirling's approximation

$$n!\approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\ ,\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}}{2n-1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\frac{e}{2}.$$

Also solved by Julio Cesar Mohnsam, IF Sul – Campus Pelatos – RS, Brazil.

Q30. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania. Prove that in all triangle ABC holds

$$\sum\frac{\sin A}{\sin B}\le\frac{s^2-r^2-4Rr}{3Rr}.$$

Solution by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania. By sine law and the formulas

$$\sum a^2=2(s^2-r^2-4Rr),\ abc=4rRs,$$

the given inequality becomes successively

$$\sum\frac{a}{b}\le\frac{2s\sum a^2}{12rRs}\Leftrightarrow 2\sum a^2c\le\sum a^3+\sum a^2b\Leftrightarrow\sum(a^3+ac^2)\ge 2\sum a^2c,$$

which is true by AM-GM inequality.

Solution by Marin Chirciu, Piteşti, Romania. Because in any triangle

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sum a^2=2\left(s^2-r^2-4Rr\right)$, $abc=4Rrs$ inequality it can be write

$$\sum\frac{\frac{a}{2R}}{\frac{b}{2R}}\le\frac{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}{\frac{3abc}{2(a+b+c)}}\Leftrightarrow\sum\frac{a}{b}\le\frac{(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)}{3abc}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\le\frac{(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)}{3abc}\Leftrightarrow(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 3\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a\ge 2\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)$$

$$\Leftrightarrow a\left(a^2+c^2-2ac\right)+b\left(b^2+a^2-2ab\right)+c\left(c^2+b^2-2bc\right)\ge 0$$

$\Leftrightarrow a(a-c)^2+b(b-a)^2+c(a-b)^2\ge 0$, which follows, whith equality for $a=b=c$.

Also solved by Marius Drăgan, Bucharest, Romania.

Q31. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania. If $a,b,c>0$, then prove that

$$\sum\frac{1}{a^2}\ge\frac{18}{\sum a^2+\sum ab}.$$

Solution by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania. The inequality to prove is equivalent with

$$\sum a^2b^2\left(\sum a^2+\sum ab\right)\ge 18a^2b^2c^2,\ (1).$$

By AM-GM inequality, we obtain $\sum a^2b^2\ge 3\cdot\sqrt[3]{a^4b^4c^4}$, and $\sum a^2+\sum ab\ge 6\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, which by multiplying yields (1), q.e.d.

Also solved by Marius Drăgan, Bucharest, Romania, Marin Chirciu, Piteşti, Romania and Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain.

Q32. Proposed by Nela Ciceu and Roxana Mihaela Stanciu, Romania. If x, y, z are positive real numbers such that $xyz = 1$, then prove that

$$\frac{1}{(x+y)^2+(x+1)^2+4}+\frac{1}{(y+z)^2+(y+1)^2+4}+\frac{1}{(z+x)^2+(z+1)^2+4}\le\frac{1}{4}.$$

Solution by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania. Since $(x+y)^2+(x+1)^2+4\ge 4xy+4(x+1)$ and taking account by $xyz=1$, we have

$$\frac{1}{(x+y)^2+(x+1)^2+4}+\frac{1}{(y+z)^2+(y+1)^2+4}+\frac{1}{(z+x)^2+(z+1)^2+4}\le$$

$$\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}\right)=\frac{1}{4}.$$

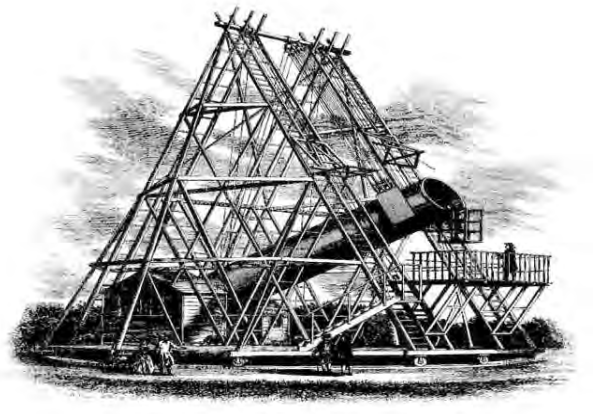
Ştiați că .....



În 1781, matematicianul şi astronomul englez **Friedrich Wilhelm Herschel** (15.11.1738 – 25.08.1822) avea să descopere cu un telescop uriaş construit chiar de el, planeta Uranus, numită aşa mai târziu. Născut în Regatul Hanovra- (o confederație de state germanice ce aveau să fie ocupate de Prusia), el a trebuit să se refugieze în Anglia atunci cînd Hanovra a fost ocupată de francezi. Mai întâi a fost preocupat de muzică, dar din studiul matematicii şi opticii a devenit pasionat de observarea cerului şi de aceea, mai mult un autodidact, a reuşit în 1774 construirea primului său mare telescop, pe care cu timpul l-a îmbunătățit. Este considerat primul om de ştiință care a realizat cele mai mari telescoape din timpul său.

Descoperirea planetei pe care el îi dă numele regelui George al Angliei, îl face celebru peste noapte, aducând astfel, telescopul său în centrul atenției tuturor .

Activitatea sa de astronom îl va ajuta să ajungă în scurt timp, astronomul regelui, să fie mai târziu ales preşedintele Societății regale şi chiar să fie înobilat.



(Din cartea „O scurtă istorie a matematicii”

de Adrian Stan şi colab.)

„Lucrurile incompatibile cu alte lucruri pot fi compatibile între ele”.

Legea lui Murphy

6. Caleidoscop matematic

1. Cum se salvează prizonierul?



A fost o dată un prizonier condamnat la moarte care adus în fața împăratului Napoleon i s-a promis că dacă poate să-i spună o propoziție adevărată atunci va fi împuşcat iar dacă îi spune o propoziție falsă atunci va fi spunzurat.
Totuşi, prizonierul a afirmat ceva care l-a pus în dificultate pe împărat şi acesta a fost nevoit să-l elibereze.
Ce a spus prizonierul?

Rezolvare. Prizonierul pentru a se salva trebuie să spună o propoziție care să nu fie nici adevărată nici falsă sau reciproc poate să fie sau adevărată sau falsă în acelaşi timp.
Un exemplu de astfel de propoziție poate fi următoarea:
’’1 + 1 = 10’’ care este un adevăr în baza 2 şi o minciună în altă bază.
1+1 este egal cu 2, iar 2 în baza 2 este egal cu 10. ($2=1\cdot 2^1+0\cdot 2^0$)

2. Curiozități

*. Toate numerele de forma $\overline{aa}$ se pot scrie ca sumă a cel puțin două numere consecutive (fără ca primul să fie neapărat 1).

11 = 5+6; 22 = 4+...+7 ; 33 =3+...+8 = 10+11+12 = 16+17;
44 = 2+...+9; 55 = 1+...+10 = 9+...+13; 66 = 1+...+11 = 15+...+18
77 = 2+...+12 = 8+...+14; 88 = 3+...+13; 99 = 4+...+14 = 7+...+15 = 14+...+19.

**. Orice număr natural a, $a \geq 3$, care nu este putere a lui 2, se poate scrie ca sumă a cel puțin două numere naturale consecutive.

Demonstrație: Dacă a este impar, avem $a = \frac{a-1}{2} + \frac{a+1}{2}$.

Dacă a este par considerăm numerele naturale t şi p, p impar, $p > 1$, astfel încât $a = 2^t p$.
Trebuie să găsim numerele naturale k şi n astfel încât

$$k + (k+1) + ... + n = a \Leftrightarrow (n+k)(n-k+1) = 2a.$$ Dacă

$2^{t+1} > p$ luăm $n+k = 2^{t+1}, n-k+1 = p \Rightarrow 2n+1 = p+2^{t+1}, 2k-1 = 2^{t+1} - p$

$$\Rightarrow n = \frac{2^{t+1}+p-1}{2}, k = \frac{2^{t+1}-p+1}{2};$$

$2^{t+1} < p$ luăm $n+k = p, n-k+1 = 2^{t+1} \Rightarrow 2n+1 = p+2^{t+1}, 2k-1 = p-2^{t+1}$

$$\Rightarrow n = \frac{2^{t+1}+p-1}{2}, k = \frac{p-2^{t+1}+1}{2}.$$

Dacă a este putere a lui 2, i.e. există numărul natural t astfel încât $a = 2^t$, avem $(n+k)(n-k+1) = 2^{t+1}$, aşadar $n+k$ este număr par $\Rightarrow n-k$ este număr par (deoarece au aceeaşi paritate) $\Rightarrow n-k+1$ este număr impar ceea ce este imposibil deoarece $n-k+1$ este un divizor al lui 2^{t+1}.
O altă formulare: deoarece $(n+k)+(n-k+1) = 2n+1 = impar$, unul dintre factori este impar – contradicție!
Numărul 1 este şi el impar; cum $n+k > 1$, ar trebui ca $n-k+1 = 1$, dar în acest caz rezulă $n = k$, ceea ce înseamnă că suma are doar un termen!



„ Ceea ce avem de învățat să facem,
învățăm făcând”.
Aristotel (384-322, î.Hr)



7. Poşta redacţiei

Dragi cititori, elevi şi profesori, a apărut **numărul 19** al revistei de matematică „ **SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noştri, şi care, sperăm noi, va aduna tot mai mulți elevi şi profesori împreună, pentru a face din obiectul matematicii o activitate atractivă şi performantă.

Profesorii şi elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciții şi probleme cu enunț şi rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătății calitatea acestei reviste, o pot face trimițând materialele membrilor colectivului de redacție sau pe adresa de e_mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate(**salvate în Word 2003**) , fie scrise de mână şi scanate. **Materialele primite trebuie să fie originale şi să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise şi către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparține redacției.

Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările şi comenzile pentru **numărul 20** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **15 Septembrie 2017**. Vă urăm succes şi vă aşteptăm.



ELEVI REZOLVITORI

Colegiul Economic Buzău
Clasa a X-a: 16p. Topană Florina; **Clasa a XI-a**: 21p. Horhocia Andreea; **Clasa a XII-a**: 54p. Stere Elena; **Prof. Constantin Dinu**
Şcoala Gimnazială “Gh. Popescu” Mărgineni- Slobozia, Olt
Clasa a V-a: 10p. Mindreanu Florentina, Vlaicu Liliana; Clasa a VI-a: 14 p. Sima Iuliana; Clasa a VIII-a: 20p. Troana Adriana; **Prof. Iuliana Traşcă.**
Şcoala Gimnazială Padina
Clasa a V-a: 10p. Hermeneanu Lavinia, 9p. Burlacu Ionuț, Balica Costin, 8p. Iasăgeanu Gabriela, Pănescu Cătălin, Spătaru Maria,
Clasa a VI-a: 10p. Dinu Cristina, 9p. Dumitroiu Elena, 8p. Radu Mihaela, Nănău Mădălin, Jega Mihaela;
Clasa a VII-a: 10p. Nedelcu Daniela, Ceauş Andreea, 9p. Fogor Antonia, Burlacu Alin;
Clasa a VIII-a: 15p. Tucă Adriana, 14p. Dobre Oana, Bălan Andreea, 12p. Simion Mădălina, Nițu Cosmin, Spătaru Diana. **Prof. Stănescu Ion.**
Liceul Tehnologic” Costin Nenițescu” Buzău
Clasa a IX-a: 12p. Vizitiu Anamaria, Iarca Raluca; Gheorghiță Ruxandra
Clasa a X-a: 18p. Dumitrache Mihaela, Pantazi Gabriela, 10p. Badiu Mădălin, fata Ana- Maria, Țîru Andrei, Crăciunică Mihai, Radu Marius. **Prof. Adrian Stan**



Cele două volume apărute până în prezent la Editura Editgraph Buzău, fac parte dintr-o colecție de cărți educaționale utile atât elevilor cât și cadrelor didactice care pot desfășura activități educaționale la orele de dirigenție întrucât tratează teme educaționale de interes general cum ar fi: problematica violenței școlare sau in general a violenței, a consumului de droguri sau a celui de alcool sau tutun, a colaborării dintre familie și școală, a promovării valorilor pentru un mediu natural curat, despre prietenie, carieră , sau despre motivație precum și despre dependența de internet și cum o putem ameliora.

Colegii profesori care doresc să participe cu materiale educaționale care să se adresese atât elevilor cât și profesorilor pentru a le folosi la orele de dirigenție sunt invitați să le tehnoredacteze și să le salveze în format A5, Word 2007-2003, Times New Roman, 12p, având un număr de pagini între 8 și 15 pagini.

Acestea vor fi trimise pe adresa de mail: ady_stan2005@yahoo.com până pe data de **1 noiembrie** 2017. De asemenea, este nevoie și de comandarea unui număr minim de 10 cărți.

Vă mulțumim!

VIZITAȚI SI REVISTA ONLINE DE MATEMATICA MATEINFO.RO

REVISTA SCLIPIREA MINŢII

NR. 19 ANUL X - MAI 2017

Cuprins

1. Istoria matematicii

Gaspard Monge de Adrian Stan 1

2. Articole şi note matematice

Rafinări ale inegalităţii Ionescu-Weitzenböck de Constantin Rusu 3

Dezvoltări ale inegalității lui A. Padoa de Marin Chirciu 6

Modele aplicative pentru calculul primitivelor unor funcții cu ajutorul ” formulei de integrare prin părți”, VI de Elena și Constantin Ciobîcă 8

Aventuri (Peripiții) în jurul anului calendaristic 2017 de Kovács Béla, Mihály Bencze 10

Geometrie și origami de Isaia Dida- Cristina 11

Instrumente matematice și înțelegerile lor masonice de Dana Badea 12

3. Probleme rezolvate 14

4. Probleme propuse 39

5. Quickies 48

6. Caleidoscop matematic 51

7. Poșta redacției 52

editgraph

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601

LEI 12 RON