REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

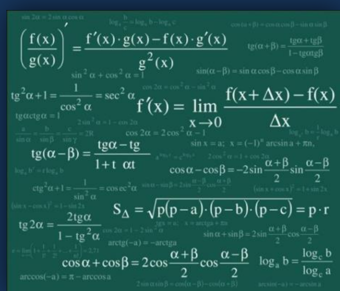
ISSN 2065-6432 - APRILIE 2016

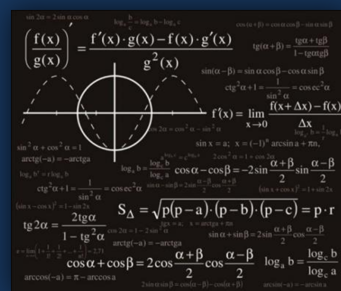
www.mateinfo.ro

REVISTĂ LUNARĂ

DIN FEBRUARIE 2009

revista@mateinfo.ro





COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ŞI SUSŢINĂTOR PERMANENŢI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ŞI NELA CICEU

1. ASUPRA PROBLEMEI 26971 din G.M.-B nr. 10/2014

NECULAI STANCIU, BUZĂU şi TITU ZVONARU, COMĂNEŞTI

Problema 26971 din G.M.-B, nr. 10/2014. *Se consideră numerele naturale nenule* a, b *şi* c *cu* $a^2+b^2+a+b=abc$. *Să se arate că* $c\in\{3,4\}$.

Günther Gotha, elev, Baia Mare

Soluţie. Fie (a,b,c) o soluţie pentru ecuaţia din enunţ. Deoarece

$$0=a^2+b^2+a+b-abc=(bc-a-1)^2+b^2+(bc-a-1)+b-bc(bc-1-1),$$

deducem că, dacă $bc-a-1>0$, atunci şi $(bc-a-1,b,c)$ este soluţie.
Cum $a(bc-a-1)=b^2+b$, avem într-adevăr $bc-a-1>0$.
Presupunem că $a>b$; avem:

$$a\geq b+1\Rightarrow a^2\geq b^2+2b+1>b^2+b=abc-a^2-a\Rightarrow a>bc-a-1.$$

Am obţinut o soluţie ''mai mică'' – în sensul că $a+b>(bc-a-1)+b$, adică am obţinut un şir descrescător de numere naturale. Cum acest lucru este imposibil, trebuie să avem şi o soluţie cu $a=b$, caz în care ecuaţia din problemă devine

$$2a^2+2a=a^2c\Leftrightarrow a(c-2)=2,$$

deci $c-2=1$ sau $c-2=2$. Rezultă $c=3$ sau $c=4$.
Putem demonstra şi altfel că $c>2$:

$$abc=a^2+b^2+a+b\geq 2ab+a+b>2ab,$$

deci $c>2$.
Sa găsim efectiv soluţiile în cele două cazuri
Problema 1. *Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale nenule ecuaţia*

$$a^2+b^2+a+b=3ab.$$

Soluţie. Fie (a,b) o soluţie a ecuaţiei date. Avem

$$0=a^2+b^2+a+b-3ab=(3b-a-1)^2+b^2+(3b-a-1)+b-3b(3b-a-1).$$

Deoarece $a(3b-a-1)=b^2+b>0$, deducem că $3b-a-1>0$, deci şi $(3b-a-1,b)$ este soluţie. Presupunem că $a>b$. Rezultă

$a\geq b+1\Rightarrow a^2\geq(b+1)^2>b^2+b=3ab-a^2-a$, deci $a>3b-a-1$.

Deducem că $a+b>(3b-a-1)+b$, deci obţinem un şir infinit descrescător de numere naturale, imposibil. Rezultă că printre soluţii trebuie să existe una cu $a=b$.
Obţinem $a=b=2$. Se observă uşor că nu există soluţii cu $a+b<4$.
Pornind cu orice soluţie ajungem la $(a,b)=(2,2)$, deci soluţiile sunt date de

$$a_{n+1}=b_n,\ b_{n+1}=3b_n-a_n-1,\text{ unde } a_1=2, b_1=2.$$

Observăm că atât (a_n) cât şi (b_n) satisfac aceeaşi relaţie de recurenţă

$$a_{n+1}=3a_n-a_{n-1}-1.$$

Notăm $x_n=a_n+1$ şi obţinem

$$x_{n+1} = 3x_n - x_{n-1},\ x_1 = 1, x_2 = 2$$

care este exact relaţia de recurenţă valabilă pentru şirul termenilor de rang impar din şirul lui Fibonacci, adică:

$$F_{2n+3} = 3F_{2n+1} - F_{2n-1}, \text{ unde } F_1 = F_2 = 1.$$

Rezultă că soluţiile ecuaţiei sunt

$$(2,2),\ (F_{2n+1}+1, F_{2n-1}+1),\ (F_{2n-1}+1, F_{2n+1}+1).$$

Problema 2. *Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale nenule ecuaţia*

$$a^2 + b^2 + a + b = 4ab.$$

Soluţie. Fie (a,b) o soluţie a ecuaţiei date. Avem

$$0 = a^2 + b^2 + a + b - 4ab = (4b-a-1)^2 + b^2 + (4b-a-1) + b - 4b(4b-a-1).$$

Deoarece $a(4b-a-1) = b^2 + b > 0$, deducem că $4b-a-1 > 0$, deci şi $(4b-a-1, b)$ este soluţie. Presupunem că $a > b$. Rezultă

$a \geq b+1 \Rightarrow a^2 \geq (b+1)^2 > b^2 + b = 4ab - a^2 - a$, deci $a > 4b - a - 1$.

Deducem că $a + b > (4b-a-1) + b$, deci obţinem un şir infinit descrescător de numere naturale, imposibil. Rezultă că printre soluţii trebuie să existe una cu $a = b$.

Obţinem $a = b = 1$.

Pornind cu orice soluţie ajungem la $(a,b) = (1,1)$, deci soluţiile sunt date de

$$a_{n+1} = b_n,\ b_{n+1} = 4b_n - a_n - 1, \text{ unde } a_1 = 1, b_1 = 1.$$

Observăm că atât (a_n) cât şi (b_n) satisfac aceeaşi relaţie de recurenţă

$$a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1} - 1.$$

Notăm $x_n = a_n + \frac{1}{2}$ şi obţinem

$$x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1},\ x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{2}.$$

Procedând în mod obişnuit, din relaţia de recurenţă de mai sus obţinem

$$x_n = \frac{3-\sqrt{3}}{12}(2+\sqrt{3})^n + \frac{3+\sqrt{3}}{12}(2-\sqrt{3})^n.$$

Soluţiile ecuaţiei date sunt:

$$(1,1), \left(x_n + \frac{1}{2}, x_{n-1} + \frac{1}{2}\right), \left(x_{n-1} + \frac{1}{2}, x_n + \frac{1}{2}\right).$$

2. ASUPRA PROBLEMEI O.VII.393 DIN RMT NR. 1/2016

de NECULAI STANCIU, BUZĂU şi TITU ZVONARU, COMĂNEŞTI

Problema O.VII.393. Arătaţi că

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2009}+\sqrt{2011}}+\frac{1}{\sqrt{2013}+\sqrt{2015}}>10.$$

Neculai Stanciu, Buzău

Vom demonstra că marginea inferioară poate fi înlocuită cu 11.
Pentru început, lăsăm deoparte primul termen. Notăm

$$S=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{11}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2009}+\sqrt{2011}}+\frac{1}{\sqrt{2013}+\sqrt{2015}}.$$

Deoarece $\sqrt{a}+\sqrt{a+2}<\sqrt{a+2}+\sqrt{a+4}$, rezultă

$$2S>\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2013}+\sqrt{2015}}+\frac{1}{\sqrt{2015}+\sqrt{2017}}=$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{9}-\sqrt{7}+\ldots+\sqrt{2015}-\sqrt{2013}+\sqrt{2017}-\sqrt{2015}),\text{ deci } S>\frac{\sqrt{2017}-\sqrt{5}}{4}.$$

Rămâne de demonstrat că

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2017}-\sqrt{5}}{4}>11 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}-2+\sqrt{2017}-\sqrt{5}>44 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}+\sqrt{2017}>46+\sqrt{5},\ (1).$$

Cum $\sqrt{3}>1,7$, $\sqrt{2017}>44,9$, $\sqrt{5}<2,3$ inegalitatea (1) este demonstrată.

Comentariu: Procedând ca mai sus, putem demonstra că

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1673}+\sqrt{1675}}+\frac{1}{\sqrt{1677}+\sqrt{1679}}>10.$$

Dacă notăm cu S suma din stânga, obţinem $S>\dfrac{\sqrt{1681}-1}{4}=10$.

3. ASPECTE METODICE ÎN CALCULUL UNOR SUME

PROF. UDMA ARLEZIANA
Colegiul Tehnic „Anghel Saligny”
Roşiorii de Vede, Teleorman

1. Fie $a>0,\ a\neq 0$. Calculaţi suma $S=\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{\left(1+a^{k+1}\right)\left(1+a^{k+2}\right)}$.

SOLUŢIE:

Avem:

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{\left(1+a^{k+1}\right)\left(1+a^{k+2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{a-a^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1+a^{k+1}}{\left(1+a^{k+1}\right)\left(1+a^{k+2}\right)}-\frac{1+a^{k+2}}{\left(1+a^{k+1}\right)\left(1+a^{k+2}\right)}\right)=$$

$$=\frac{1}{a-a^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+a^{k+2}}-\frac{1}{1+a^{k+1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{a-a^2}\left(\frac{1}{1+a^{n+2}}-\frac{1}{1+a^2}\right).$$

2. Fie $X\in(0,\ 1)$. Calculaţi suma $S=\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^k}{\left(1-\lambda^k\right)\left(1-\lambda^{k+1}\right)}$.

SOLUŢIE:

Avem:

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^k}{\left(1-\lambda^k\right)\left(1-\lambda^{k+1}\right)}==\frac{1}{1-\lambda}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(1-\lambda^{k+1}\right)-\left(1-\lambda^k\right)}{\left(1-\lambda^k\right)\left(1-\lambda^{k+1}\right)}=$$

$$=\frac{1}{1-\lambda}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1-\lambda^{k+1}}{\left(1-\lambda^{k}\right)\left(1-\lambda^{k+1}\right)}-\frac{1-\lambda^{k}}{\left(1-\lambda^{k}\right)\left(1-\lambda^{k+1}\right)}\right)=$$

$$=\frac{1}{1-\lambda}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1-\lambda^{k}}-\frac{1}{1-\lambda^{k+1}}\right)==\frac{1}{1-\lambda}\cdot\left(\frac{1}{1-\lambda}-\frac{1}{1-\lambda^{n+1}}\right).$$

3. Fie $a>1$. Calculaţi suma $S=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{a^{2^k}+1}$.

SOLUŢIE:

Avem:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{a^{2^k}+1}=\sum_{k=1}^{n}2^k\cdot\frac{a^{2^k}-1}{\left(a^{2^k}+1\right)\left(a^{2^k}-1\right)}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}2^k\cdot\frac{a^{2^k}-1}{a^{2^{k+1}}-1}=\sum_{k=1}^{n}2^k\cdot\frac{a^{2^k}+1-2}{a^{2^{k+1}}-1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}2^k\left(\frac{a^{2^k}+1}{a^{2^{k+1}}-1}-\frac{2}{a^{2^{k+1}}-1}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}2^k\left(\frac{1}{a^{2^k}-1}-\frac{2}{a^{2^{k+1}}-1}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^k}{a^{2^k}-1}-\frac{2^{k+1}}{a^{2^{k+1}}-1}\right).$$

de unde rezultă că $S=\frac{2}{a^2-1}-\frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}}-1}$.

4. Calculaţi suma $S=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{a+2^{k-1}}{2^k}\right]$, unde $0<a<2^n$.

SOLUŢIE:

Vom folosi identitatea

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x].$$

Avem:

$$S=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{a+2^{k-1}}{2^k}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{a}{2^k}+\frac{1}{2}\right]=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\left[2\cdot\frac{a}{2^k}\right]-\left[\frac{a}{2^k}\right]\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{a}{2^{k-1}}\right]-\left[\frac{a}{2^k}\right]\right)=$$
$$=[a]-\left[\frac{a}{2^n}\right]=[a].$$

5. Aflaţi suma $S=1+11+111+\ldots+11\ldots1$ (n termeni). (Olimpiada Cono Sur)

SOLUŢIE:

Suma cerută este egală cu $\frac{10^{n+1}-10-9n}{81}$. Avem:

$$S=\frac{10-1}{9}+\frac{10^2-1}{9}+\ldots+\frac{10^n-1}{9}=$$
$$=\frac{\left(10+10^2+\ldots+10^n\right)-n}{9}=$$
$$=\frac{10\cdot\frac{10^n-1}{9}-n}{9}=$$
$$=\frac{10^{n+1}-10-9n}{81}.$$

6. Să se calculeze suma $S=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\log_2 k}+\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\log_3 k}+\ldots\ldots+\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\log_n k}$, $n\ge 2$.

SOLUŢIE:

$$S=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\log_2 k}+\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\log_3 k}+\ldots\ldots+\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\log_n k}=$$

$$=\frac{1}{\log_2 \prod_{k=1}^{n} k}+\frac{1}{\log_3 \prod_{k=1}^{n} k}......+\frac{1}{\log_n \prod_{k=1}^{n} k}=$$

$$=\frac{1}{\log_2 n!}+\frac{1}{\log_3 n!}+......+\frac{1}{\log_n n!}=$$

$$=\log_{n!}2+\log_{n!}3+......+\log_{n!}n=$$

$$=\log_{n!}n!,\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2.$$

7. Fie $a_1,\ a_2,......,a_n,a_{n+1},\ n+1$ numere în progresie aritmetică cu rația r. Să se calculeze suma $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k a_{k+1}$.

SOLUȚIE:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k a_{k+1}=C_n^0 a_1-C_n^1 a_2+C_n^2 a_3-C_n^3 a_4+......+(-1)^n C_n^n a_{n+1}=$$

$$=C_n^0 a_1-C_n^1(a_1+r)+C_n^2(a_1+2r)-C_n^3(a_1+3r)+......+(-1)^n C_n^n(a_1+nr)=$$

$$=a_1\left[C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+......+(-1)^n C_n^n\right]-$$

$$-r\left[C_n^1-2C_n^2+3C_n^3-4C_n^4+......+(-1)^n nC_n^n\right]=$$

$$=a_1\left(2^{n-1}-2^{n-1}\right)-r\cdot 0=0.$$

8. Să se calculeze suma $S=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}(k-1)}{(k-1)!}$.

SOLUȚIE:

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}(k-1)}{(k-1)!}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}(k+1-2)}{(k-1)!}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2^{k-1}}{k!}-\frac{2^k}{(k+1)!}\right]=f(1)-f(n+1)=$$

$$=1-\frac{2^n}{(n+1)!}.$$

9. Să se calculeze suma $S=\sum_{k=1}^{n}A^k$ unde $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Z})$.

<u>SOLUŢIE:</u>

Prin inducţie matematică: $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix}2^2 & 2\cdot 2\\ 0 & 2^2\end{pmatrix}$,

$A^3=\begin{pmatrix}2^3 & 3\cdot 2^2\\ 0 & 2^3\end{pmatrix}$, presupunem adevărat că $A^n=\begin{pmatrix}2^n & n\cdot 2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$ şi demonstrăm că $A^{n+1}=\begin{pmatrix}2^{n+1} & (n+1)\cdot 2^n\\ 0 & 2^{n+1}\end{pmatrix}$.

Într-adevăr,

$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix}2^n & n\cdot 2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n+1} & (n+1)\cdot 2^n\\ 0 & 2^{n+1}\end{pmatrix}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ şi atunci

$$\sum_{k=1}^{n}A^k=\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix}2^k & k\cdot 2^{k-1}\\ 0 & 2^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n}2^k & \sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^{k-1}\\ 0 & \sum_{k=1}^{n}2^k\end{pmatrix}=$$

$=\begin{pmatrix}2^{n+1}-2 & (n-1)2^n+1\\ 0 & 2^{n+1}-2\end{pmatrix}$, $n\geq 1$ deoarece

$\sum_{k=1}^{n}2^k=2+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-2$ (progresie geometrică), iar

$\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^{k-1}=1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\ldots+n\cdot 2^{n-1}$ se calculează pornind de la

$1+x+x^2+\ldots\ldots+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$, în care derivând obţinem:

$1+2x+3x^2+\ldots\ldots+nx^n=\dfrac{(n+1)x^n(x-1)-\left(x^{n+1}-1\right)}{(x-1)^2}$ şi apoi facem $x=2$ şi rezultă:

$1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\ldots\ldots+n\cdot 2^n=(n-1)\cdot 2^n+1.$

4. Rezolvarea subiectului dat la Examenul de Titularizare Matematica 2015

Profesor : George-Florin Șerban ,
Liceul Pedagogic "D.P.Perpessicius" , Brăila

Subiectul I

1)Se considera functia $f:(0,\infty)\to R$ **,** $f(x)=\log_a x+\log_b x$ **, unde** $a\in(0,1)$ **,** $b\in(1,\infty)$ **.**

a)Calculati $f(1)$ **.**

b)Aratati ca $f(x)=\log_b(ab)\cdot\log_a x$ **, pentru orice** $x\in(0,\infty)$**.**

c)Demonstrati ca $(x-1)f(x)\ge 0$ **, pentru orice** $x\in(0,\infty)$ **daca si numai daca** $ab\le 1$ **.**

Solutie: a) $f(1)=\log_a 1+\log_b 1=0+0=0$.

b) $f(x)=\log_b(ab)\cdot\log_a x=(\log_b a+\log_b b)\cdot\log_a x=\log_b a\cdot\log_a x+\log_b b\cdot\log_a x=\log_b x+\log_a x$

c)Daca $x\in(0,1)$, $x-1<0$, $f(x)=\log_b(ab)\cdot\log_a x<0$ deoarece $\log_b(ab)\le 0$ si $\log_a x>0$ deci $(x-1)f(x)\ge 0$, $x\in(0,1)$. Daca $x\in[1,\infty)$, $x-1\ge 0$, $f(x)=\log_b(ab)\cdot\log_a x\ge 0$ deoarece $\log_b(ab)\le 0$ si $\log_a x\le 0$ deci $(x-1)f(x)\ge 0$, $x\in[1,\infty)$ deci pentru orice $x\in(0,\infty)$.

2)Se considera trapezul ABCD cu $AB\parallel CD$ **, AB= 12 cm , CD=4 cm ,** $AC\cap BD=\{O\}$ **, punctul** $E\in AD$ **astfel incat** $OE\parallel AB$ **si se noteaza cu F intersectia dreptelor BE si DC .**

a) Aratati ca OE= 3 cm .

b)Demonstrati ca DF=DC .

c)Daca (EO este bisectoarea unghiului BEC , aratati ca trapezul ABCD este dreptunghic.

Solutie: Din T.F.A rezulta ca $\Delta DOE\sim\Delta DAB$, $\frac{OE}{AB}=\frac{DO}{BD}$ dar $\frac{DO}{OB}=\frac{DC}{AB}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$, deci $\frac{DO}{DO+OB}=\frac{1}{3+1}=\frac{DO}{BD}=\frac{1}{4}$, dar $\frac{OE}{AB}=\frac{DO}{BD}$, $\frac{OE}{12}=\frac{1}{4}$, OE= 3 cm .

b) Din T.F.A rezulta ca $\Delta BOE\sim\Delta DFB$, $\frac{OE}{DF}=\frac{BO}{BD}$, $\frac{BO}{BD}=\frac{BD-DO}{BD}=1-\frac{DO}{BD}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, dar $\frac{OE}{DF}=\frac{BO}{BD}$, $\frac{3}{DF}=\frac{3}{4}$ deci DF= 4 cm =DC .

c) (EO bisectoarea unghiului BEC deci $m(\sphericalangle BEO)=m(\sphericalangle CEO)$, $m(\sphericalangle BEO)=m(\sphericalangle CFE)$ (corespondente) , $m(\sphericalangle CEO)=m(\sphericalangle FCE)$ (alterne interne) rezulta $m(\sphericalangle FCE)=m(\sphericalangle CFE)$, deci triunghiul ΔECF isoscel , EC=EF si [ED] mediana deoarece DF=DC rezulta [ED] este inaltime , deci $ED\perp FC$ adica $AD\perp DC$ rezulta ca trapezul ABCD este dreptunghic.

Subiectul al II-lea

1)Se considera polinomul $f=(x-2013)(x-2014)(x-2015)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ **unde** a_0,a_1,a_2,a_3 **sunt numere reale .**
a)Determinati radacinile polinomului f.
b)Aratati ca $a_3+a_2+a_1+a_0<0$ **.**
c)Determinati numarul real a_2 **.**

Solutie: a) $f=(x-2013)(x-2014)(x-2015)=0$ deci $x-2013=0$, $x=2013$, $x-2014=0$, $x=2014$, $x-2015=0$, $x=2015$. Radacinile polinomului f sunt $x_1=2013$, $x_2=2014$ si $x_3=2015$.
b)
$f(1)=(1-2013)(1-2014)(1-2015)=a_31^3+a_21^2+a_11+a_0=a_3+a_2+a_1+a_0=(-2012)\cdot(-2013)\cdot(-2014)$
$a_3+a_2+a_1+a_0=-2012\cdot2013\cdot2014<0$ (A) .
c) Aplic relatiile lui Viete $x_1+x_2+x_3=\dfrac{-a_2}{a_3}=-a_2=2013+2014+2015=6042$, $a_2=-6042$.
Sau prin calcul direct se inmultesc cele 3 paranteze si apoi se identifica coeficientii .

2)Se considera functia $f:R\to R$, $f(x)=xe^x+1$ **.**
a)Calculati $\int_0^1 f(x)dx$ **.**
b)Determinati intervalele de monotonie a functiei f .
c)Determinati valorile reale ale lui m , stiind ca ecuatia f(x)=m admite exact doua solutii reale si distincte .

Solutie: a) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(xe^x+1)dx=\int_0^1 xe^xdx+\int_0^1 1dx=\int_0^1 x(e^x)^{|}dx+(1-0)=e-0-\int_0^1 x^{|}e^xdx+1$
$\int_0^1 f(x)dx=e+1-\int_0^1 x^{|}e^xdx=e+1-\int_0^1 e^xdx=e+1-(e-1)=e+1-e+1=2$
b) $f^{|}(x)=(xe^x+1)^{|}=(xe^x)^{|}+1^{|}=x^{|}e^x+x(e^x)^{|}+0=e^x+xe^x=e^x(x+1)$, $f^{|}(x)=0$, $e^x(x+1)=0$, rezulta $x+1=0$, $x=-1$, $e^x>0$, pentru orice x real .

x	$-\infty$ ∞	-1
$f^{|}(x)$	- - - - - - - - 0 + + + + + + + + + + + + +	
$f(x)$	1 strict descrescatoare ∞	$\dfrac{e-1}{e}$ strict crescatoare

$f(-1) = -e^{-1} + 1 = \frac{-1}{e} + 1 = \frac{e-1}{e}$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(xe^x + 1) = \infty$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(xe^x + 1) = \lim_{y\to\infty}(-y e^{-y} + 1) = \lim_{y\to\infty}(\frac{-y}{e^y} + 1) = \lim_{y\to\infty}(\frac{-y}{e^y}) + 1 = \lim_{y\to\infty}\frac{(-y)^{|}}{(e^y)^{|}} + 1 = \lim_{y\to\infty}\frac{-1}{e^y} + 1 = 1$

Am aplicat regula lui L"hospital .

Daca $x \in (-\infty, -1]$ atunci f este descrescatoare pe $(-\infty, -1]$ deoarece $f^{|}(x) \le 0$.

Daca $x \in [-1, \infty)$ atunci f este crescatoare pe $[-1, \infty)$ deoarece $f^{|}(x) \ge 0$.

c) $g(x) = f(x) - m$, $g : R \to R$, $g^{|}(x) = f^{|}(x) = (x+1)e^x$, $g^{|}(x) = 0$, $x = -1$. Aplic sirul lui Rolle , $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - m) = 1 - m$, $g(-1) = f(-1) - m = \frac{e-1}{e} - m$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}(f(x) - m) = \infty$. Atunci g admite doua solutii reale si distincte daca $\frac{e-1}{e} - m < 0$ si $1 - m > 0$ adica $m \in (\frac{e-1}{e}, 1)$, atunci ecuatia f(x)=m admite exact doua solutii reale si distincte .

Subiectul al III-lea

Elaborati doi itemi : un item de tip alegere multipla si un item de tip intrebare structurata (cu trei subintrebari) , ca parte component a unui test de evaluare la finalul unitatii de invatare Rapoarte si proportii , prin care se evalueaza formarea / dezvoltarea a doua competente specific e precizate in secventa data din programa scolara . In elaborarea itemului de tip intrebare structurata se vor avea in vedere urmatoarele aspect :
-succesiunea intrebarilor sa asigure cresterea treptata a gradului de dificultate ;
-fiecare subintrebare sa solicite un raspuns care nu depinde de raspunsul la subintrebarea precedenta ;
-subintrebarile sa fie in concordant cu stimulul utilizat ;
Nota. Se puncteaza corectitudinea proiectarii itemilor , elaborarea raspunsului asteptat (barem de evaluare) si corectitudinea stiintifica a informatiei de specialitate .

Item cu alegere multipla :

1)Daca $\frac{x-1}{3} = \frac{4}{5}$. Atunci x este egal a) $\frac{17}{3}$ b) $\frac{17}{5}$ c) $\frac{5}{17}$ d) $\frac{3}{17}$

Metoda 1 : Folosim proprietatea fundamentala a proportiilor $5(x-1) = 3\cdot 4$ 3 puncte

$5x - 5 = 12$ 1 punct , $5x = 12 + 5$ 1 punct , $5x = 17$ 1 punct , $x = \frac{17}{5}$ 4 puncte .

Metoda 2 : Aflam extremul din proportie $x - 1 = \frac{12}{5}$ 3 puncte , $x = \frac{12}{5} + 1$ 1 punct , $x = \frac{17}{5}$ 6 puncte .

Item de tip intrebare structurata :

2) Daca $\{x, y\} d.p \{2, 3\}$.

3p a) Daca media arimetica a numerelor x si y este 15 , aflati x si y .

3p b) Aflati cat la suta din x reprezinta y .

4p c)Daca $\{y, z\} d.p \{6, 9\}$ si $x^2 + y^2 + z^2 = 68$, aflati numerele naturale x , y si z .

a) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = k$, $x = 2k, y = 3k$ 1 punct , $M_a = \frac{x+y}{2} = \frac{5k}{2} = 15$, $k = 6$, 1 punct ,

$x = 12, y = 18$ 1 punct .

b) $t\% x = y$, $\frac{t}{100} = \frac{y}{x} = \frac{3k}{2k} = \frac{3}{2}$ 2 puncte , $t = \frac{100 \cdot 3}{2} = 150$ 1 punct .

c) $6y = 9z = 6 \cdot 3k = 18k$, $z = 2k$ 1 punct , $x^2 + y^2 + z^2 = 4k^2 + 9k^2 + 4k^2 = 17k^2 = 68$

1 punct , $k^2 = 4$, $k = 2$, $x = 4, y = 6, z = 4$, 2 puncte .

5. CONSIDERAŢII ASUPRA TEOREMEI LUI CEBÂŞEV

Prof. Joița Maria-Magdalena
Colegiul Național"Vladimir Streinu", Găești

O teoremă foarte interesantă dar mai puţin folosită de către elevi , este Teorema lui Cebâşev.
Ne propunem în acest articol să arătam cum se poate extinde şi să demonstrăm o aplicaţie a ei.

Lema 1.

Pentru $n \in N, n \geq 2$ avem $C_{2n}^{n} \geq \dfrac{4^n}{2\sqrt{n}}$

Lema 2.

Dacă P_n este produsul numerelor prime mai mici sau egale cu n, atunci $P_n < 4^n$

Lema 3.

Dacă p este un număr prim şi p^r / C_{2n}^{n}, atunci $p^r \leq 2n; r \in N.$

Corolar 1.

Dacă p este un număr prim şi $p \ / C_{2n}^{n}$ şi $p \geq \sqrt{2n},$ atunci p apare la puterea 1 în descompunerea în factori primi a lui C_{2n}^{n}.

Lema 4 .

Fie p prim, $p \leq n, p^n / C_{2n}^{n}$ atunci $p \leq \dfrac{2}{3}n.$

Lema 5.

Dacă p este un număr prim şi $n < p \leq 2n$ atunci $p \ / C_{2n}^{n}$.

Lema 6.

Dacă $n \in N, n \geq 2$ şi notăm $\Gamma(n)$ numărul numerelor prime mai mici sau egale cu n, atunci $\Gamma(n) \leq \dfrac{1}{2}n - 1; (\forall) n \geq 14.$

Toate aceste rezultate sunt demonstrate în W.Sierpinski "Theory of number " pag.132-135.

Lema 7.

Fie R_n produsul numerelor prime p cu $n < p \leq 2n$ ($R_n = 1$ dacă nu există astfel de numere). Atunci

$$R_n > \frac{4^{\frac{n}{3}}}{2\sqrt{n} \cdot n^{\sqrt{\frac{n}{2}}}} \text{ pentru } (\forall) n \geq 98.$$

Demonstraţie.

Aplicând lema 5 se obţine că R_n / C_{2n}^{n} de unde rezultă $C_{2n}^{n} = R_n \cdot Q_n$.

Dacă p este prim şi $p / Q_n \Rightarrow p / C_{2n}^{n}$ şi aplicând lema 3 rezultă $p \leq 2n.$

Dacă $p > n \Rightarrow p > \sqrt{2n}$ deci p apare la puterea 1 în dezvoltarea lui C_{2n}^{n}. Iar p / R_n din definiţia lui R_n rezultă că p nu divide Q_n. Deci în descompunerea în factori primi a lui Q_n apar doar numere prime mai mici sau egale cu n.

Dacă p este prim $p \le n; p / Q_n$ rezultă p / C_{2n}^{n} şi cu lema 4 vom avea că $p \le \frac{2}{3} n.$

Fie $Q_n = p_1^{\alpha_1} ... p_s^{\alpha_s}$ descompunerea în factori primi . Dintre numerele $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ unele sunt egale cu 1 altele sunt mai mari ca 1.

Să presupunem că $\alpha_i > 1$ pentru $i = \overline{1, t}$ şi $\alpha_i = 1$ pentru $i = \overline{t+1, s}$, rezultă că

$Q_n = \left(p_1^{\alpha_1 - 1} ... p_s^{\alpha_s - 1} \right) \cdot (p_1 ... p_s)$ unde $p_1, p_2, ... p_s$ sunt numere distincte $\le \frac{2}{3} n$

Deci $p_1 \cdot p_2 ... p_s \le p_{\frac{2n}{3}} < 4^{\frac{2n}{3}}$. Fie $\alpha_i \ge 2$, $i = \overline{1, t}$ rezultă $p_i^2 \le 2n$ pentru $i = \overline{1, t}$ $\Rightarrow p_i \le \sqrt{2n}$,

$\Rightarrow p_i \le [\sqrt{2n}]$ pentru $i = \overline{1, t}$ rezultă $t \le \Gamma([\sqrt{2n}]) \le \sqrt{\frac{n}{2}}$

Am aplicat lema 6 şi tinând cont că $n \ge 98 \Rightarrow \lfloor \sqrt{2n} \rfloor \ge 14.$ Din $p_i^{\alpha_i} \le 2n \Rightarrow p_i^{\alpha_{i-1}} \le \frac{2n}{p_i} \le n, (\forall) i = \overline{1, t}$

şi rezultă $\left(p_1^{\alpha_1 - 1} ... p_s^{\alpha_s - 1} \right) \le n^{\sqrt{\frac{n}{2}}}$

Deci $Q_n < n^{\sqrt{\frac{n}{2}}} \cdot 4^{\frac{2n}{3}} \Rightarrow R_n > \frac{C_{2n}^{n}}{n^{\sqrt{\frac{n}{2}}} \cdot 4^{\frac{2n}{3}}} \ge \frac{4^n}{2\sqrt{n} \cdot n^{\sqrt{\frac{n}{2}}} \cdot 4^{\frac{2n}{3}}} = \frac{4^{\frac{n}{3}}}{2\sqrt{n} \cdot n^{\sqrt{\frac{n}{2}}}}.$

Corolar 1.

Pentru $n \ge 324, R_n > 4n^2.$

Demonstraţie.

Pentru $k \in N, k \ge 3$ demonstrăm prin inducţie că $4^k \ge 6(k+1).$ Dacă

$x \in R; x \ge 3; 4^x \ge 4^{[x]} \ge 6([x]+1) > 6x \Rightarrow 4^x > 6x.$ Deci $4^{\frac{\sqrt{n}}{6}} > \sqrt{n}$ pentru

$\frac{\sqrt{n}}{6} \ge 3 \Leftrightarrow n \ge 324 \Rightarrow 4^{\frac{\sqrt{n}}{3}} > n \Rightarrow 4^{\frac{n}{3\sqrt{2}}} > n^{\sqrt{\frac{n}{2}}}$ şi cum $\frac{n}{4} > \frac{n}{3\sqrt{2}} \Rightarrow 4^{\frac{n}{4}} > n^{\sqrt{\frac{n}{2}}}$ pentru

$n \ge 324 \Rightarrow 4^{\frac{n}{12}} > n^{\frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{2}}}.$ Pentru $\frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{2}} \ge \frac{18}{3\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} > \frac{7}{2}.$

Atunci $4^{\frac{n}{12}} > n^{\frac{7}{2}} = n^2\sqrt{n}, n > 8n^2\sqrt{n}$. Deci $\left. \begin{array}{l} 4^{\frac{n}{4}} > n^{\sqrt{\frac{n}{2}}} \\ 4^{\frac{n}{12}} > 8n^2\sqrt{n} \end{array} \right\} \Rightarrow 4^{\frac{n}{3}} > 4n^2 \left(2\sqrt{n} \cdot n^{\sqrt{\frac{n}{2}}} \right).$

De unde $R_n > 4n^2.$

Corolar 2.

Pentru orice $k \in N(\exists)\alpha_k \in N$ astfel încât $R_n > (2n)^k, (\forall)n \geq \alpha_k$.

Demonstratie .

Pentru $n \geq 324 \Rightarrow 4^{\frac{n}{4}} > n^{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}} \Rightarrow R_n > \frac{4^{\frac{n}{12}}}{2\sqrt{n}}$ iar $\frac{4^{\frac{n}{12}}}{2\sqrt{n}(2n)^k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ deci $(\exists)\alpha_k \in N$ astfel încât

$\frac{4^{\frac{n}{12}}}{2\sqrt{n}(2n)^k} > 1, (\forall)n \geq \alpha_k$.

Teorema 1.

Pentru orice $n \geq 9$ între n şi 2n sunt cel putin 3 numere prime.

Demonstraţie. Pentru $n \geq 324$ rezultă din corolarul 1, iar pentru $n \leq 323$ se verifică direct.

Teorema 2.

Pentru orice număr natural $n \geq 6$ între n şi 2n sunt cel putin 2 numere prime.

Teorema 3.(Cebâşev)

Pentru orice număr natural $n \geq 4$ între n şi 2n-2 există cel putin un număr prim.

Teoremele 2 şi 3 sunt consecinţe ale teoremei 1.

Teorema 4.

Pentru orice $k \in N(\exists)\alpha_k \in N$ astfel încât $(\forall)n \geq \alpha_k$ între n şi 2n sunt cel putin k numere prime.

Această teoremă este o consecinţă a corolarului 2.

Aplicaţii.

1. Să se determine mulţimea $A_1 = \{n \in N / (\forall)a \text{ impar cu } a^2 < n \Rightarrow a / n\}$.

" Testul 2 " Tabăra naţională de matematică de la Sinaia 1984

2. Pentru $n \geq 2$ notăm cu G grupul multiplicativ al elementelor inversabile din inelul Z_n

a) Să se demonstreze că dacă pentru orice $x \in G$ avem $x^{-1} = x$ atunci numărul elementelor lui G este o putere a lui 2.

b) Să se determine $A_2 = \{n \in N / Z_n \text{ are proprietatea de la punctul a}\}$

Olimpiada naţională de matematică Târgovişte 1987

Punctul de la aplicaPunctul de la aplicaţia 2 este cunoscut

Fie $A_3 = \{n \in N / (\forall)p \text{ impar } p^2 < n \Rightarrow p / n\}$. Se observă că $A_3 \supset A_1, A_3 \supset A_2$

$A_3 \supset A_1$ în mod evident , iar pentru $A_3 \supset A_2$ fie $n \in A_2$ şi p prim $p^2 < n$ şi pp prin absurd că p nu divide pe n$\Rightarrow p \in G \Rightarrow p^2 - 1 \equiv 0(\text{mod } p)$. Deci $n / (p^2 - 1)$ fals pentru că $p^2 < n$ de unde $p / n \Rightarrow n \in A_3$.

Să-l determinăm pe A_3. Dacă $n \geq 72$ rezultă $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right] \geq 6$ există cel puţin două numere prime p_1 şi p_2 care verifică

$$\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right] < p_1 < p_2 \leq 2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right] \leq \sqrt{n} \Rightarrow p_1^2 \leq n, p_2^2 \leq n \Rightarrow p_1 / n, p_2 / n \Rightarrow n = p_1 \cdot p_2 \cdot q \cdot p_1 > \left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$$

$\Rightarrow p_1 \geq \left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right] + 1 > \frac{\sqrt{n}}{2}$ adică $p_1 \cdot p_2 > \frac{n}{4} \Rightarrow q < 4 \Rightarrow q \in \{1,2,3\}$. Dar

$n \geq 72 \Rightarrow 5^2 < n \Rightarrow 5/n; 5 < 6 \leq \left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right] < p_1 < p_2 \Rightarrow 5/q$ contradicţie , rezultă $n \geq 72$. Dacă

$n \in [49,71] \Rightarrow 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \leq n \Rightarrow 3 \cdot 5 \cdot 7/n \Rightarrow n \geq 105$ contradicţie, deci $n \leq 48$

Dacă $n \in [25,48] \Rightarrow 3^2 \cdot 5^2 \leq n \Rightarrow 3 \cdot 5/n \Rightarrow n$ poate fi 30 sau 45.

Dacă $n \in [9,24] \Rightarrow 3/n \Rightarrow n \in \{9,12,15,18,22\}$

Orice $n \leq 8$ verifică cerinţa din A_3. Deci $A_3 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,15,18,22,30,45\}$ Şi din această mulţime se verifică ce elemente aparţin lui A_1 şi ce elemente aparţin lui A_3.

Pentru A_2 se va ţine cont de faptul că dacă $n \in A_2, n \leq 4 \Rightarrow 2^2 \leq n \Rightarrow 2/n$, deci $\{5,7,9,15,45\} \cap A_2 = \varnothing$.

3. Folosind calculatorul , să se determine cel mai mic $\alpha_k \in N$ astfel ca $(\forall) n \geq \alpha_k$ între *n* şi *2n* sunt cel puţin *k* numere prime.

Rezolvare: Se găseşeste primul număr natural n_0 astfel ca $\frac{4^{\frac{n_0}{12}}}{2\sqrt{n_0}} \geq (2n_0)^k$ şi

$4 \geq \left(1 + \frac{1}{n_0}\right)^{12k+6}$. Un astfel de număr există pentru că $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{12k+6} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 < 4$ şi

$\frac{4^{\frac{n_0}{12}}}{2\sqrt{n_0}(2n_0)^k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1$. Acest lucru ne asigură că pentru $n \geq n_0$ între *n* şi *2n* sunt cel puţin *k* numere prime. Pentru $s = 1,..., n_o$ se testează dacă între t şi 2t sunt cel puţin k numere prime $(\forall) t \in \{s,...., n_0\}$. Primul găsit astfel este α_k căutat. Să demonstrăm aceasta:

Propoziţie

Dacă $n_0 \in N$, astfel ca $\frac{4^{\frac{n_0}{12}}}{2\sqrt{n_0}} \geq (2n_0)^k$ şi $4 \geq \left(1 + \frac{1}{n_0}\right)^{12k+6}$. Atunci $(\forall) n \geq n_0$, avem

$\frac{4^{\frac{n}{12}}}{2\sqrt{n}} \geq (2n)^k$.

Demonstraţie

Indicaţie : Pentru $n = n_0$ din ipoteză , să demonstrăm că $n \Rightarrow n+1$

$$\frac{4^{\frac{n+1}{12}}}{2\sqrt{n+1}}=\frac{4^{\frac{1}{12}}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}}\cdot\frac{4^{\frac{n}{12}}}{2\sqrt{n}}\geq(2n)^k\cdot\frac{4^{\frac{1}{12}}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}}$$. Deci este suficient să arătăm că :

$$(2n)^k\cdot\frac{4^{\frac{1}{12}}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}}\geq(2n+2)^k \Leftrightarrow 4^{\frac{1}{12}}\geq\left(\frac{2n+2}{2n}\right)^k\cdot\sqrt{\frac{n+1}{n}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 4\geq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{12k+6}$$

Dar funcţia $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{12k+6}$. $f:N^*\to R$ este crescătoare , iar $n\geq n_{0,}$ deci

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{12k+6}\leq\left(1+\frac{1}{n_0}\right)^{12k+6}\leq 4$ ceea ce trebuie demonstrat.

Corolar 3.

Dacă $n_0\in N$ astfel ca inegalităţile din propoziţia anterioară există , atunci $(\forall)n\geq n_0$ intre *n* şi *2n* sunt cel puţin *k* numere prime.

Demonstraţie

Din rezolvarea corolarului 2 şi din propoziţia precedentă rezultă că pentru $n\geq n_0$ avem $R_n>(2n)^k$.

De aici rezultă cerinţa corolarului 3.

BIBLIOGRAFIE

W.Sierpinski "A selection of probleme in the theory of number " Pergamon Press, Oxford 1964
Gazeta matematica seria B nr 12 1985, nr 1 1998

6. Calculul unor sume, folosind derivatele

Prof. Mihaela Molodeț, Școala Gimnazială Berghin, Județul Alba

"Matematica este REGINA STIINȚELOR!" Gauss

Am întâlnit, în studiul matematicii, o serie de sume, începând cu "Sume Gauss". Sunt, de obicei, mai multe modalități de a calcula aceste sume, pornind de la metode predefinite sau folosind artificii de calcul, până la demonstrarea prin inducție matematică a unor rezultate intuite anterior. În cele ce urmează, imi propun să abordez folosirea derivatelor unor funcții în calculul unor sume.

1. $S_1=\cos x+2\cos 2x+\ldots+n\cos nx=\sum_{k=1}^{n}k\cos kx,\ x\neq 2k'\pi, k'\in Z$

Soluție:

$$S_1=\sum_{k=1}^{n}k\cos kx=\sum_{k=1}^{n}(\sin kx)'=\left(\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right)'=\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{n+1}{2}x\right)'=$$

$$=\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)'\cdot\sin\frac{n+1}{2}x+\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\left(\sin\frac{n+1}{2}x\right)'=$$

$$=\frac{\frac{n}{2}\cdot\cos\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{n+1}{2}x+\frac{n+1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{n+1}{2}x=$$

$$=\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\left[\left(n\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{nx}{2}-\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\sin\frac{n+1}{2}x+(n+1)\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{n+1}{2}x\right]=$$

$$=\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\left\{\left[(n+1)\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{nx}{2}-\left(\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{nx}{2}+\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\right)\right]\sin\frac{n+1}{2}x+(n+1)\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{n+1}{2}x\right\}$$

$$=\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\left[(n+1)\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\cos\frac{nx}{2}+\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{n+1}{2}x\right)-\sin^2\frac{n+1}{2}x\right]=$$

$$=\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\left[(n+1)\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin^2\frac{n+1}{2}x\right]\ \text{(A)}$$

Am folosit identitatea cunoscută $\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \dfrac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \sin \dfrac{n+1}{2} x$

OBS. Pentru $x = 2k'\pi, k' \in Z$, $S_1 = 1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, suma Gauss.

<u>2.</u> $S_2 = \sin 2x + 2\sin 4x + 3\sin 6x + ... + n\sin 2nx = \sum_{k=1}^{n} k\sin 2kx$, $x \neq k'\pi, k' \in Z$

<u>Soluție:</u>

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} k\sin 2kx = \sum_{k=1}^{n} 2k\sin kx\cos kx = \sum_{k=1}^{n} \left(\sin^2 kx\right)' = \left(\sum_{k=1}^{n} \sin^2 kx\right)' =$$

$$\frac{1}{2}\left(n - \frac{\cos(n+1)x \cdot \sin nx}{\sin \frac{x}{2}}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{2\sin^2 \frac{x}{2}}\left[\left(\cos(n+1)x \cdot \sin nx\right)' \cdot \sin\frac{x}{2} - \cos(n+1)x \cdot \sin nx\left(\sin\frac{x}{2}\right)'\right] =$$

$$= -\frac{1}{2\sin^2 \frac{x}{2}}\left[-(n+1)\sin\frac{x}{2} \cdot \sin nx \cdot \sin(n+1)x + n\sin\frac{x}{2} \cdot \cos nx \cdot \cos(n+1)x - \frac{1}{2}\sin nx \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos(n+1)x\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sin^2 \frac{x}{2}}\left[(n+1)\sin\frac{x}{2} \cdot \sin nx \cdot \sin(n+1)x - n\sin\frac{x}{2} \cdot \cos nx \cdot \cos(n+1)x + \frac{1}{2}\sin nx \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos(n+1)x\right]$$

(B)

Am folosit identitatea $\sum_{k=1}^{n} \sin^2 kx = \dfrac{1}{2}\left(n - \dfrac{\cos(n+1)x \cdot \sin nx}{\sin \frac{x}{2}}\right)$

Să notăm $S = \sum_{k=1}^{n} \sin^2 kx$ si $S' = \sum_{k=1}^{n} \cos^2 kx$

Avem: $S + S' = \sum_{k=1}^{n} \left(\sin^2 kx + \cos^2 kx\right) = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$, (1)

$$S - S' = -\sum_{k=1}^{n} \left(\cos^2 kx - \sin^2 kx\right) = -\sum_{k=1}^{n} \cos 2kx =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \cos k(2x) = -\cos\frac{n+1}{2}(2x) \cdot \sin\frac{n}{2}(2x) / \sin\frac{x}{2} =$$

$$= -\cos(n+1)x \cdot \sin nx / \sin\frac{x}{2} \ (2)$$

Din (1) + (2) $\Rightarrow S = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(n+1)x \cdot \sin nx}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(n - \frac{\cos(n+1)x \cdot \sin nx}{\sin\frac{x}{2}}\right)$

OBS. Pentru $x = k'\pi, k' \in Z,\ S_2 = 0$.

<u>**3**</u>. $S_3 = shx + 2sh2x + ... + nshnx = \sum_{k=1}^{n} kshkx$

<u>Soluție:</u>

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n} kshkx = \sum_{k=1}^{n} (chkx)' = \left(\sum_{k=1}^{n} chkx\right)' = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2}\right)' = \left[\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{kx} + \sum_{k=1}^{n} e^{-kx}\right)\right]' =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x \cdot \frac{e^{nx}-1}{e^x-1} + \frac{1}{e^x} \cdot \frac{\frac{1}{e^{nx}}-1}{\frac{1}{e^x}-1}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x \cdot \frac{e^{nx}-1}{e^x-1} + \frac{1}{e^x} \cdot \frac{1-e^{nx}}{e^{nx}} \cdot \frac{e^x}{1-e^x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x \cdot \frac{e^{nx}-1}{e^x-1} + \frac{e^{nx}-1}{e^x-1} \cdot \frac{1}{e^{nx}}\right)' = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{nx}-1}{e^x-1}\left(e^x + e^{-nx}\right)\right]' =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{ne^{nx}(e^x-1) - e^x(e^{nx}-1)}{(e^x-1)^2} \cdot (e^x + e^{-nx}) + \frac{e^{nx}-1}{e^x-1} \cdot (e^x - ne^{-nx})\right] =$$

$$= \frac{1}{2(e^x-1)^2} \cdot \left[(ne^{nx+x} - ne^{nx} - e^{nx+x} + e^x)(e^x + e^{-nx}) + (e^{nx+x} - e^x - e^{nx} + 1)(e^x - ne^{-nx})\right] =$$

$$= \frac{1}{2(e^x-1)^2}\left(ne^{nx+2x} + ne^x - ne^{nx+x} - n - e^{nx+2x} - e^x + e^{2x} + e^{-nx+x} + e^{nx+2x} - ne^x - e^{2x} + ne^{-nx+x} - e^{nx+x} + n + e\right.$$

$$= \frac{1}{2(e^x-1)^2}\left[ne^{(n+2)x} - (n+1)e^{(n+1)x} + (n+1)e^{(-n+1)x} - ne^{-nx}\right].$$

Similar se pot calcula și sumele $S_4 = \sum_{k=1}^{n} k\sin kx$, $S_5 = \sum_{k=1}^{n} k\cos 2kx$, $S_6 = \sum_{k=1}^{n} kchkx$

OBS.

$S_2 = \sin 2x + 2\sin 4x + 3\sin 6x + ... + n\sin 2nx = \sum_{k=1}^{n} k\sin 2kx = \sum_{k=1}^{n} k\sin k(2x) = \sum_{k=1}^{n} k\sin ky = S_4$,

unde y=2x. (C)

Las spre rezolvare, celor interesati, exprimarea sub o forma mai simpla a relatiei (B) (care se prelucreaza similar cu relatia (A)), si echivalenta acesteia cu relatia obtinuta din (C).

7. MENIREA DE A FI DASCĂL (I)

Profesor Mihaela Molodeț, Școala Gimnazială Berghin, Județul Alba

"Matematica este o limbă, o știință !" Lucian Blaga

"Cuvânt înainte"

Un Univers cât un suflet de copil…așa aș începe povestea cu care să deschid porțile educației și "meseria" de ***profesor****.*

"MENIREA DE A FI ***DASCĂL"***

Nu este o cugetare personală și nici vreo trăire desprinsă din file de carte; este, mai degrabă, descoperirea lăsată moștenire de cei care mi-au dat viață, m-au educat și învățat: părinții mei – unul de Limba și Literatura Română, altul de Biologie. "O limbă, o știință"…iar eu- ***profesor*** *de Matematică.*

Niciodată nu am considerat ca mi-am trădat părinții prin alegerea disciplinei școlare pe care o predau; mai ales când totul începe prin a te cunoaște pe tine însăți, apoi prin a-i înțelege pe cei din jurul tău. Iar deosebirile nu au încetat să apară datorită acestui fapt, mai ales când mrejele matematicii s-au extins încet și sigur, încă din anii gimnaziului, atât la școală, cât și în mediul ***dascălilor*** *din sătucul meu drag al arealului vâlcean, odata cu primul* ***profesor*** *de matematică, dl. Aurelian Dumitrescu, al școlii unde părinții mei erau* ***dascăli.***

Apoi istoria continuă cu "invazia Olteniei" și cucerirea celei mai înalte redute a crezului meu de licean: "Frații Buzești"…liceul care mi-a atras decizia de a fi ***profesor*** *de matematică, sub "bagheta magică" a unui mare OM și* ***profesor:*** *dl. Ion Nanu. Și pentru ca "invazia" să fie încununată și cu o Diplomă de Licență, am cucerit și una din redutele Universitații din "Cetatea Băniei"- Craiova: Facultatea de Matematică.*

Și când mă gândesc că totul a început de la ochii senini, chipul blajin si glasul cald ale învățătoarei mele, d-na Ioana Georgescu, de la care am deprins taina semnelor și simbolurilor, începand de la bastonașe, litere, cifre, apoi cuvinte si nu în ultimul rând, taina de a scrie fraze...înțeleg ce înseamnă să fii fundamentul viitorului unui „boț"de om și că "Visul unui copil începe cu un profesor care crede in el"!

Dintotdeauna m-au impresionat ochii albaștri ai tatălui meu (așa mi-l imaginam eu pe "Domnul Trandafir"), iar lucrarea de licența a fost dedicată lor, ochilor ***"domnilor și doamnelor Trandafir"****…calculul probabilității de a-i dobândi, dintr-o perspectivă maternă, pe un eșichier al uneia dintre cele mai moderne științe ale zilelor noastre, Genetica- fascinația "Dumnezeului" copilariei mele:* ***MAMA****, sub îndrumarea unui* ***profesor*** *deosebit: dl. Ion Vladimirescu.*

Și "când te gândești" că în gimnaziu visam să fiu "doctorița"…

PROFESORII *crează celelalte profesii…Iată menirea de a fi* ***DASCĂL****!*

Fără echivoc! "A educa", "A învăța", "A evalua" sunt cele trei verbe care, indiferent cum le-ai conjuga, dau oportunitatea de a descifra "limba cu care Dumnezeu a scris Universul", într-un univers cât un suflet de copil! Ce altă provocare poate fi mai înțeleaptă decât a învăța un copil? Dar, pe cât de fascinantă, pe atât de anevoioasă, o provocare fără secrete, doar cu enigme și mistere în fel de fel…Două ar fi "ingredientele" ce pot face deslușirea feluritelor enigme și mistere posibile: creativitatea copilului și inventivitatea dascălului.

Creativitatea copilului, cănd te găndești la schimbarile demonstrate de explozia tehnologică și transformările intelectuale ale mileniului III, este o energie capabilă de viteza luminii, ce niciodată nu știi pe unde "bântuie", iar inventivitatea profesorului este o altă energie care încearcă să o "cumințească" pe prima, dar care nu întotdeauna atinge viteza luminii. Aici se ascunde marea taină a menirii de a fi dascăl, într-un algoritm de semne și semnificații, unele ce nasc mereu simboluri între o infinitate de înțelesuri, a unui etern interpretabil, ca misiune a unui profesor de a-l implementa într-un univers al sufletului de copil!

Așa am înțeles de ce, acest algoritm de semne și înțelesuri unde se nasc simboluri, este șansa inepuizabilă a creativității unui copil, de unde am dedus necesitatea educării și de unde se desprinde nevoia de a învăța și de ce, adevărata evaluare nu este a școlii, ci a vieții, împărțită, în atotputernicia sa, între copii, bunici, părinți și semeni, educația înglobând între semeni și semenul cu nume de dascăl și meserie de profesor.

8. SOLUȚII PROBLEMA LUNII MARTIE 2016

Dacă AA', BB', CC' sunt bisectoarele triunghiului ABC, să se arate că
$$\frac{\sqrt{BA'\cdot A'C}}{AA'}+\frac{\sqrt{CB'\cdot B'A}}{BB'}+\frac{\sqrt{AC'\cdot C'B}}{CC'}\ge\frac{3}{2}.$$

Prof. George Florin Șerban

Soluție autor: Aplic teorema bisectoarei in ΔABC **,** $AA'^2=AB\cdot AC-A'B\cdot A'C$ **,** $\frac{A'B}{AB}=\frac{A'C}{AC}$ **.**

Deci $\frac{A'B}{A'C}=\frac{AB}{AC}$ **,** $\frac{A'B}{a}=\frac{c}{b+c}$ **,** $A'B=\frac{ac}{b+c}$ **,** $\frac{A'B}{AB}=\frac{a}{b+c}$**. Folosesc in continuare inegalitatea mediilor** $\sqrt{xy}\ge\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ **si inegalitatea C.B.S** $x^2+y^2+z^2\ge\frac{(x+y+z)^2}{3}$

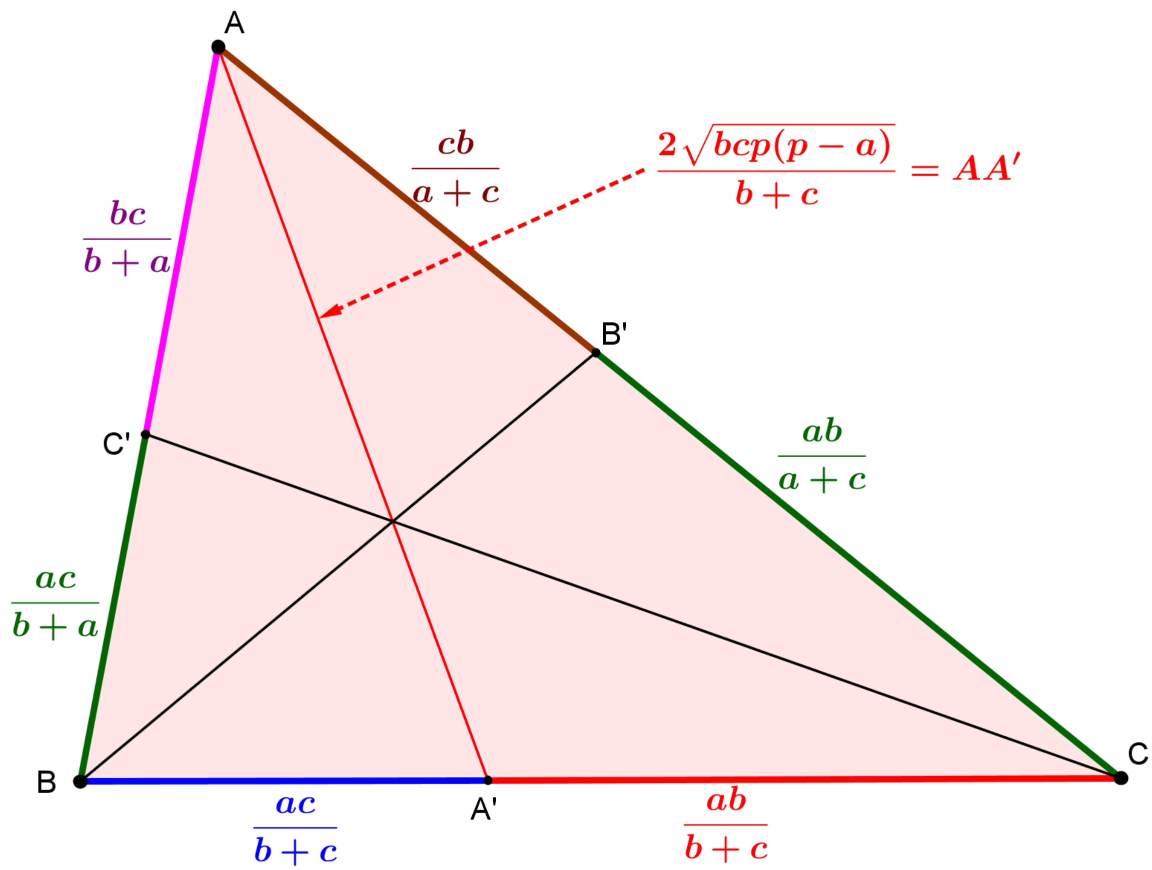
$$.\frac{\sqrt{A'B\cdot A'C}}{AA'}=\sqrt{1\cdot\frac{A'B\cdot A'C}{AB\cdot AC-A'B\cdot A'C}}\ge\frac{2}{\frac{1}{1}+\frac{AB\cdot AC-A'B\cdot A'C}{A'B\cdot A'C}}=2\cdot\frac{A'B}{AB}\cdot\frac{A'C}{AC}=2\cdot\left(\frac{A'B}{AB}\right)^2$$

$\frac{\sqrt{A'B\cdot A'C}}{AA'}\ge 2\cdot\left(\frac{a}{b+c}\right)^2$ **si analoagele . Folosesc si inegalitatea** $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}\ge\frac{3}{2}$ **.**

$$\sum\frac{\sqrt{A'B\cdot A'C}}{AA'}\ge 2\sum\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\ge 2\cdot\frac{\left(\sum\frac{a}{b+c}\right)^2}{3}\ge\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{2}.$$

Alte soluții:

1) ***Prof. Constantin Telteu, C. N. A. „Regina Maria”, Constanța***



Folosim problema cunoscută care determină lungimile segmentelor determinate de bisectoarea unui unghi pe latura opusă unghiului. Am evidențiat aceste lungimi pe figură.

Mai folosim și lungimea bisectoarei unui unghi în funcție de lungimile laturilor unghiului. Pe figură este dată lungimea bisectoarei AA’.

Cu acestea, inegalitatea dată devine:

$$\frac{a}{2\sqrt{p(p-a)}}+\frac{b}{2\sqrt{p(p-b)}}+\frac{c}{2\sqrt{p(p-c)}}\geq\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{\frac{a}{\sqrt{p(p-a)}}+\frac{b}{\sqrt{p(p-b)}}+\frac{c}{\sqrt{p(p-c)}}}{3}\geq 1$$

Folosim inegalitatea dintre media aritmetică și cea geometrică și obținem:

$$\frac{\frac{a}{\sqrt{p(p-a)}}+\frac{b}{\sqrt{p(p-b)}}+\frac{c}{\sqrt{p(p-c)}}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{abc}{p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}}=\sqrt[3]{\frac{4R}{p}}\geq\sqrt[3]{\frac{8}{3\sqrt{3}}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Am folosit și formulele: $R=\frac{abc}{4S}$, $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, iar la ultima inegalitate am folosit inegalitatea lui Mitrinovic : $p\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot R$. Egalitatea în cazul ambelor inegalități folosite se obține pentru triunghiul echilateral.

Deci am arătat că: $$\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{BA'\cdot A'C}}{AA'}+\frac{\sqrt{CB'\cdot B'A}}{BB'}+\frac{\sqrt{AC'\cdot C'B}}{CC'}\right)\geq\frac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{BA'\cdot A'C}}{AA'}+\frac{\sqrt{CB'\cdot B'A}}{BB'}+\frac{\sqrt{AC'\cdot C'B}}{CC'}\geq\sqrt{3}.$$

Obs. *Am obținut o inegalitate mai tare ca cea din enunț.*

2) *Prof. Nela Ciceu şi prof. Roxana Mihaela Stanciu*

Avem $$\frac{\sqrt{A'B\cdot A'C}}{AA'}=\frac{a\sqrt{bc}}{b+c}\cdot\frac{b+c}{2bc\cos\frac{A}{2}}=\frac{a}{2\sqrt{p(p-a)}}.$$

Trebuie să demonstrăm inegalitatea

$$\frac{a}{\sqrt{p-a}}+\frac{b}{\sqrt{p-b}}+\frac{c}{\sqrt{p-c}}\geq 2\sqrt{3p}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{p-a}+\frac{b^2}{p-b}+\frac{c^2}{p-c}+\frac{2ab}{\sqrt{(p-a)(p-b)}}+\frac{2bc}{\sqrt{(p-b)(p-c)}}+\frac{2ca}{\sqrt{(p-c)(p-a)}}\geq 12p.$$

Deoarece cu inegalitatea mediilor obţinem

$$\sqrt{(p-a)(p-b)}\leq\frac{p-a+p-b}{2}=\frac{c}{2},$$

este suficient să arătăm că

$$\frac{a^2}{p-a}+\frac{b^2}{p-b}+\frac{c^2}{p-c}+\frac{4ab}{c}+\frac{4bc}{a}+\frac{4ca}{b}\geq 12p.$$

Aplicând inegalitatea lui *Bergström* şi inegalitatea

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq abc(a+b+c),$$

rezultă

$$\frac{a^2}{p-a}+\frac{b^2}{p-b}+\frac{c^2}{p-c}+\frac{4ab}{c}+\frac{4bc}{a}+\frac{4ca}{b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{3p-a-b-c}+\frac{4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{abc}\geq$$
$$\geq 4p+4(a+b+c)=12p.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

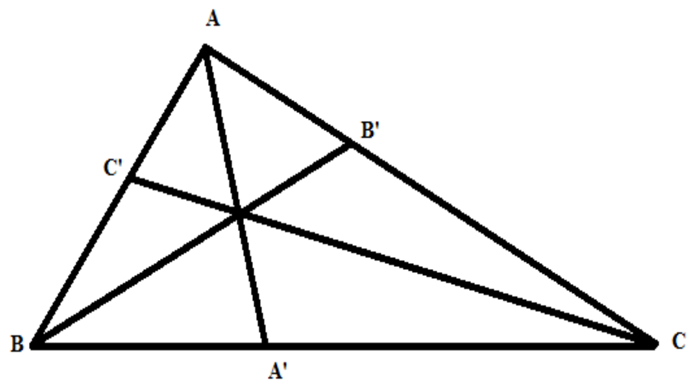
3) ***Prof. Rusu Maria, Şcoala Gimnazială Buznea, Iaşi***

Laturile se notează astfel: $AB=c$, $AC=b$ şi $BC=a$. Fie AA', BB', CC' bisectoarele unghiurilor triunghiului ABC.

Din teorema bisectoarei rezultă:

$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{c}{b}\Leftrightarrow\frac{BA'}{c}=\frac{A'C}{b}=\frac{a}{b+c}\Rightarrow$$

$$BA'\cdot A'C=\frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$



Teorema sinusurilor aplicată în triunghiul ABA':

$$\frac{AA'}{\sin B}=\frac{BA'}{\sin\frac{A}{2}}\Rightarrow AA'=\frac{BA'\sin B}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{\frac{ac}{b+c}\sin B}{\sin\frac{A}{2}}$$

Dar $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\sin B=\frac{b\sin A}{a}$

$$AA'=\frac{\frac{ac}{b+c}\sin B}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{\frac{ac}{b+c}\frac{b\sin A}{a}}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}\quad(1)$$

Deoarece $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}=\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}=\frac{(b^2+c^2+2bc)-a^2}{4bc}=$

$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}\Rightarrow\cos^2\frac{A}{2}=\frac{2p2(p-a)}{4bc}\Leftrightarrow\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

Prin înlocuire în relaţia (1) se obţine: $AA'=\frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$.

Analog, prin permutări circulare se obţin: $CB'\cdot B'A=\frac{b^2ac}{(a+c)^2}$, $AC'\cdot C'B=\frac{c^2ab}{(a+b)^2}$,

$BB'=\frac{2ac}{a+c}\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$ şi $CC'=\frac{2ab}{a+b}\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$.

$$\frac{\sqrt{BA'\cdot A'C}}{AA'}+\frac{\sqrt{CB'\cdot B'A}}{BB'}+\frac{\sqrt{AC'\cdot C'B}}{CC'}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{a^2bc}{(b+c)^2}}}{\frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}}+\frac{\sqrt{\frac{b^2ac}{(a+c)^2}}}{\frac{2ac}{a+c}\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}}+\frac{\sqrt{\frac{c^2ab}{(a+b)^2}}}{\frac{2ab}{a+b}\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}}=$$

$$=\frac{a}{2\sqrt{p(p-a)}}+\frac{b}{2\sqrt{p(p-b)}}+\frac{c}{2\sqrt{p(p-c)}}\geq\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{2p-a}+\frac{b}{2}\cdot\frac{2}{2p-b}+\frac{c}{2}\cdot\frac{2}{2p-c}$$

Deci $\frac{\sqrt{BA'\cdot A'C}}{AA'}+\frac{\sqrt{CB'\cdot B'A}}{BB'}+\frac{\sqrt{AC'\cdot C'B}}{CC'}\geq\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}$.

Se arată că: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}\geq\frac{3}{2}$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}=\frac{ac+a^2+b^2+bc}{(b+c)(a+c)}\geq\frac{ac+2ab+bc}{(b+c)(a+c)}=\frac{a(b+c)}{(b+c)(a+c)}+\frac{b(a+c)}{(b+c)(a+c)}=\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}\geq\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}$$

Analog se arată că: $\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}$ şi $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}\geq\frac{c}{b+c}+\frac{a}{a+b}$

Prin însumarea ultimelor trei relaţii se obţine:

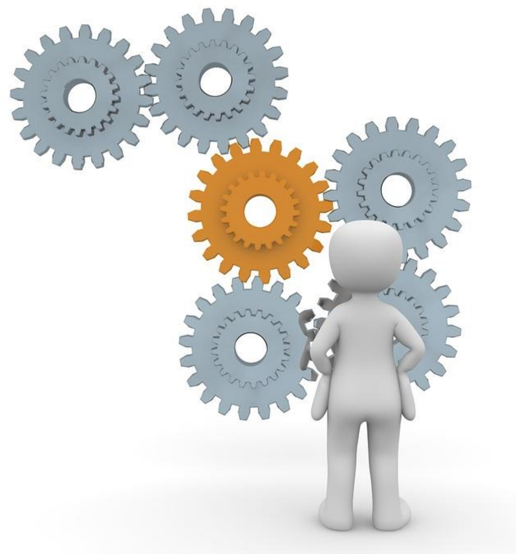
$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}\right)\geq 3\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}\geq\frac{3}{2}$$

Deci,

$$\frac{\sqrt{BA'\cdot A'C}}{AA'}+\frac{\sqrt{CB'\cdot B'A}}{BB'}+\frac{\sqrt{AC'\cdot C'B}}{CC'}\geq\frac{3}{2}.$$

4)

9. Concurs pentru elevi și profesori
PROBLEMA LUNII APRILIE 2016



Un cilindru de rotație are axa de rotație [AC’] a cubului ABCDA’B’C’D’ și cercurile de bază tangente muchiilor cubului care concură în A, respectiv în C’. Dintre toți cilindrii cu aceste proprietăți determinați pe cel cu volum maxim.

Propusă spre rezolvare de Andrei Octavian Dobre

Așteptăm soluțiile până pe date de 1.06.2016 pe adresa de e-mail revista@mateinfo.ro

10. Simulare Evaluare Națională Matematică - APRILIE 2016

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru: 2 ore.

SUBIECTUL I – Pe foaia de examen se trec doar rezultatele. (30 de puncte)

(5p) 1. Rezultatul calculului $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$ este egal cu....

(5p) 2. Un bazin poate fi umplut de 6 robinete în 40 minute.Pentru a umple bazinul în două ore ar fi nevoie de ...robinete.

(5p) 3. Scrisă sub formă de interval mulţimea A=$\{x \in \mathbb{R} / x \geq 3\}$ este egală cu....

(5p) 4. $ABCDA'B'C'D'$ din *figura* 1. este un cub.Măsura unghiului dintre dreptele AD' şi DC' este egală cu ...°.

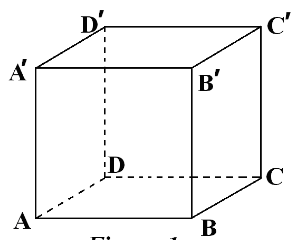


Figura 1

(5p) 5. Lungimea liniei mijlocii a unui trapez este egală cu 8 cm, iar lungimea înălţimii este de 7cm. Aria trapezului este egală cu... cm^2 .

(5p) 6. Rezultatele elevilor unei clase a VIII-a la examenul de Evaluare Naţională sunt prezentate pe tranşe de medii în tabelul de mai jos.Procentul elevilor care au obţinut cel puţin nota 5 ,este gal cu...%.

Media	<5	5-6,99	7-8,99	9-10
Număr elevi	3	10	15	2

SUBIECTUL II – Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete. (30 de puncte)

(5p) 1. Desenaţi un trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$.

(5p) 2. Determinaţi cel mai mic număr natural $\overline{ab}$ scris în baza zece, pentru care $\sqrt{\overline{ab}+\overline{ba}}$ este număr natural.

(5p) 3. Un turist a parcurs un traseu în doua zile .În prima zi a parcurs 40 % din lungimea traseului şi încă 6km,iar în a doua zi restul de 120 km.Calculaţi lungimea întregului traseu.

4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\frac{4}{3}x+a$,unde a este un număr real.

(5p) **a)**Determinaţi numărul real a ,ştiind că $f(0)=4$.

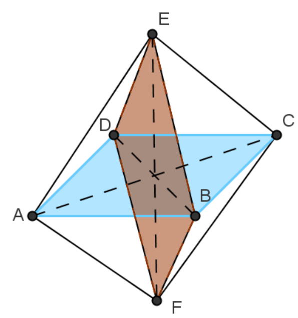
(5p) **b)**Pentru $a=4$,calculaţi lungimea segmentului AB, unde A şi B sunt punctele de intersecţie a graficului funcţiei f cu axele Ox ,respectiv Oy ale sistemului de coordonate xOy .

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x)=\frac{(x+1)^2-4}{x}:\frac{x^2-x}{x^3}$,unde x este număr real, $x\neq 0$ şi $x\neq 1$.Determinaţi numărul real m, $m\neq 0$ şi $m\neq 1$,ştiind că $E(m)=4$.

SUBIECTUL III – Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete.(30 de puncte)

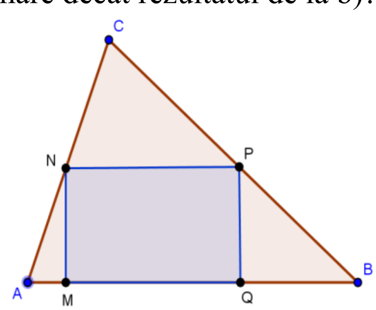
1. Un diamant artificial este realizat prin lipirea bazelor a două piramide patrulatere regulate, ca în figură. Toate muchiile acestui corp au 1 cm.

(5p) **a)** Calculaţi volumul corpului;
(5p) **b)** Care este distanţa cea mai mare între două vârfuri ale diamantului?
(5p) **c)** Secţiunea diagonală a diamantului este un patrulater congruent cu baza piramidei? Calculaţi aria bazei şi aria unei secţiuni diagonale.



2. Din materialul textil în forma unui triunghi ABC se decupează un dreptunghi MNPQ. Se ştie că AB=BC=13 şi AC=10.

(5p) **a)** Care este aria triunghiului ABC?
(5p) **b)** Care este aria dreptunghiului MNPQ dacă NP este linie mijlocie?
(5p) **c)** Punctele N şi P pot ocupa alte poziţii pe laturile [AC] respectiv [BC] astfel încât aria dreptunghiului MNPQ să fie mai mare decât rezultatul de la b)?



Sursa: Culegeri Evaluare Națională www.mateinfo.ro

BAREM
Simulare Evaluare Națională Matematică - APRILIE 2016

SUBIECTUL I		(30 de puncte)
1.	$\frac{3}{2}$	5p
2.	2	5p
3.	$[3;+\infty)$	5p
4.	60°	5p
5.	56	5p
6.	90	5p
SUBIECTUL II		(30 de puncte)
1.	Desenează trunchiul Notează trunchiul	4p 1p
2.	$\sqrt{\overline{ab}+\overline{ba}}=\sqrt{10a+b+10b+a}=\sqrt{11(a+b)}$ $a+b=11$ Cel mai mic număr este 29	2p 2p 1p
3.	În prima zi parcurge 40% $\cdot x$ +6=$\frac{2x}{5}+6$,unde x este lungimea întregului traseu $\frac{2x}{5}+6$ +120= $x \Rightarrow x=210km$	2p 3p

4.	a) $f(0)=-\frac{4}{3}\cdot 0+a$ a=4	2p 3p
	b) $f(x)=0\Rightarrow x=3\Rightarrow OA=3$ $f(0)=4\Rightarrow OB=4$ Teorema lui Pitagora în $\triangle AOB\Rightarrow AB=5$	2p 2p 1p
5	$(x+1)^2-4=(x-1)(x+3)$ şi $x^2-x=x(x-1)$ $E(x)=\frac{(x-1)(x+3)}{x}\cdot\frac{x^3}{x(x-1)}=x^2+3x$ $m^2+3m=4\Leftrightarrow m^2+3m-4=0\Rightarrow m_1=-4, m_2=1$,dar $m\neq 1\Rightarrow$ m= - 4	2p 2p 1p
SUBIECTUL III		(30 de puncte)
1.	a) $V_{piramida}=\frac{A_b\cdot h}{3}$ $h=EO=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $V_{ABCDE}=\frac{\sqrt{2}}{6}cm^3$ $V_{corp}=\frac{\sqrt{2}}{3}cm^3$	**1p** **2p** **1p** **1p**
	b) $EF=AC=BD=\sqrt{2}$ cm	**5p**
	c) $ABCD\equiv BDEF$, pătrate cu latura de $1cm$ $A_{ABCD}=A_{BDEF}=1cm^2$	**3p** **2p**
2.	a) ΔABC isoscel cu $h_B=12$ $A_{ABC}=\frac{AC\cdot h_B}{2}=60$	**3p** **2p**

	b) Dacă $CC' \perp AB$, atunci $CC' = \frac{2A_{ABC}}{AB} = \frac{120}{13}$ $MN = \frac{CC'}{2} = \frac{60}{13}$ $A_{MNPQ} = L \cdot l = \frac{13}{2} \cdot \frac{60}{13} = 30$	**2p** **1p** **2p**
	c) din asemănări de triunghiuri $\frac{CC' - MN}{CC'} = \frac{NC}{AC} = \frac{NP}{AB}$ notăm NP=x; MN=y şi atunci obţinem $1 - \frac{13y}{120} = \frac{x}{13}$ $A_{MNPQ} = xy = \frac{120}{169}\left[\frac{169}{4} - \left(x - \frac{13}{2}\right)^2\right]$ Aria este maximă pentru $x = \frac{13}{2}$, adică $A_{max} = 30$	**2p** **1p** **1p** **1p**

11. Simulare BAC Matematică pentru profilele Mate-Info și Științele Naturii APRILIE 2016

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculați produsul numerelor complexe $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{20}$.
(5p) 2. Verificați dacă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+x-2012$ este injectivă
(5p) 3. Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $16^x+5\cdot 4^{x+1}-21=0$
(5p) 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă exact două cifre egale.
(5p) 5. În sistemul de axe de coordonate xOy, se consideră punctele: $A(2,5), B(-3,4), C(7,-2)$. Scrieți ecuația medianei corespunzătoare laturii BC
(5p) 6. Fie $a\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ și $\cos a=-\frac{4}{5}$. Calculați $tg\frac{a}{2}$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$. Pentru orice $x\in\mathbb{C}$ se definește matricea $V(x)=A+xI_3$ și funcția polinomială $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(x)=\det V(x)$.
(5p) a) Determinați rangul matricei A;
(5p) b) Rezolvați, în $\mathbb{R}$, ecuația $f(x)=1$
(5p) c) Există o matrice $B=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in M_{3,1}(\mathbb{C})$, cu proprietatea $AB=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$? Justificați.

2. Fie mulțimea $M=(a,\infty)$ o mulțime de numere reale și legea de compoziție, definită pe $\mathbb{R}$, $x*y=2xy-4x-4y+5a$
(5p) a) Să se arate că, pentru orice $a\geq 2$, mulțimea **G** este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația $*$.
(5p) b) Să se determine a, știind că $(G,*)$ este grup abelian

(5p) c) Să se arate că grupurile $(G,*)$ și $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ sunt izomorfe prin funcția $f:G\to\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=2x-4$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

(5p) a) Să se calculeze $f'(x)$ și $f''(x)$

(5p) b) Să se determine intervalele de monotonie și cele de convexitate ale funcției f.

(5p) c) Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Să se calculeze

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)+g(x^2)+\cdots+g(x^{2011})+x^{2013}}{x^{2012}}$$

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 0}$, $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx$

(5p) a) Să se calculeze I_0 și I_1

(5p) b) Să se arate că $\dfrac{1}{2(n+1)}\leq I_n\leq\dfrac{1}{2(n-1)},\forall n\geq 2$

(5p) c) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(nI_n-\frac{1}{3}\right)$

Prof: Gaga Loghin
Culegeri BAC M1 – www.mateinfo.ro

BAREM
Simulare BAC Matematică Mate-Info și Științele Naturii
APRILIE 2016

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\ldots\cdot i^{20}=i^{1+2+3+\ldots+20}=i^{\frac{20\cdot 21}{2}}=i^{210}$ $210=4\cdot 52+2$ $i^{210}=i^{4\cdot 52+2}=i^2=-1$	2p 1p 2p
2.	O funcție este injectivă pe un interval dacă este strict monotonă pe acel interval $f'(x)=3x^2+1>0$ Derivata întâi este pozitivă, strict, deci funcția f(x) fiind strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, adică injectivă	1p 2p 2p
3.	$16^x+5\cdot 4^{x+1}-21=0\Leftrightarrow 4^{2x}+20\cdot 4^x-21=0$ Notez $4^x=t; t>0\Rightarrow t^2+20t-21=0\Rightarrow t_1=1, t_2=-21$, care nu corespunde Din $4^x=1\Rightarrow 4^x=4^0\Rightarrow x=0$	1p 2p 2p
4.	$p=\frac{c_f}{c_p}$; $c_p=900$, numărul de numere de câte 3 cifre. Conform enunțului, avem următoarele forme de numere: numere de forma $\overline{aab}$. Numărul de numere de această formă este $9\cdot 9=81$. Numere de forma $\overline{aba}$. Numărul de numere de această formă este $9\cdot 9=81$. Numere de forma $\overline{baa}$. Numărul de numere de această formă este $9\cdot 9=81$. Deci, numărul de cazuri favorabile este $c_f=81\cdot 3=243$, iar $p=\frac{c_f}{c_p}=\frac{243}{900}=\frac{27}{100}=0,27$	1p 3p 1p
5.	Mediana din vârful A cade pe mijlocul laturii BC. Fie M mijlocul laturii BC. Avem $x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{-3+7}{2}=2, y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{4-2}{2}=1$ $\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_A & y_A & 1\\ x_M & y_M & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix} x & y & 1\\ 2 & 5 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow x-2=0$ Ecuația dreptei AM este: $\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_A & y_A & 1\\ x_M & y_M & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix} x & y & 1\\ 2 & 5 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow x-2=0$	2p 3p

6.	$\sin a=\sqrt{1-\cos^2 a}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$ $tg\frac{a}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}=\frac{2\sin\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}}=\frac{\sin a}{1+\cos a}=3$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}; A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $A^3-A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=A^2-I_3$	5 p
b)	Prin inducție. Egalitatea se verifică, conform punctului a). Presupun că $P(n): A^n-A^{n-2}=A^2-I_3$ $P(n+1)$: și demonstrez $A^{n+1}-A^{n-1}=A\left(A^n-A^{n-2}\right)=A\left(A^2-I_3\right)=A^3-A=A^2-I_3$ $P(n+1): A^{n+1}-A^{n-1}=A^2-I_3$. Într-adevăr, avem: $A^{n+1}-A^{n-1}=A\left(A^n-A^{n-2}\right)=A\left(A^2-I_3\right)=A^3-A=A^2-I_3$, conform a)	2 p 2 p
c)	Obsevăm că se verifică pentru n=1. Presupunem adevărată pentru pentru valorile mai mici și egale cu n-1 și demonstrăm pentru n. notăm cu S_n suma elementelor. Din $A^n-A^{n-2}=A^2-I_3\Rightarrow A^n=A^{n-2}+A^2-I_3\Rightarrow S_n=n-2+3+2+3-3=n+3$ $A^n-A^{n-2}=A^2-I_3\Rightarrow A^n=A^{n-2}+A^2-I_3$ $\Rightarrow S_n=n-2+3+2+3-3=n+3$	2 p 2 p
2. a)	$x*y=2xy-4x-4y+8+5a-8=2x\left(y-2\right)-4\left(y-2\right)+5a-8=$ $=2\left(x-2\right)\left(y-2\right)+4\left(a-2\right)+a>a,\ \forall a>2$	5 p
b)	Se verifică imediat că operația este corect definită, că este asociativă și comutativă. Elementul neutru este unic și avem: $x*e=x\Rightarrow 2xe-4x-4e+5a=x\Leftrightarrow 2e\left(x-2\right)=5\left(x-a\right)\Rightarrow a=2$ și $e=\frac{5}{2}$ Elementul simetrizabil se verifică imediat	2 p 3 p
c)	f este bijectivă, fiind funcție de gradul I, strict crescătoare.	2 p

	$f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$ Verificăm relația $f(x*y)=2(2xy-4x-4y+10)-4=4xy-8x-8y+16$ $f(x)\cdot f(y)=(2x-4)\cdot(2y-4)=4xy-8x-8y+16$ $f(x*y)=2(2xy-4x-4y+10)-4=4xy-8x-8y+16$ $f(x)\cdot f(y)=(2x-4)\cdot(2y-4)=4xy-8x-8y+16$ Deci grupurile $(G,*)$ și $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ sunt izomorfe.	3 p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\dfrac{2x(x^2+1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x+1)^2}=\dfrac{4x}{(x+1)^2}$ $f''(x)=\dfrac{4(x+1)^2-8x(x+1)}{(x+1)^4}=\dfrac{4(x+1)(x+1-2x)}{(x+1)^4}=\dfrac{4(1-x)}{(x+1)^3}$	2p 3p
b)	Monotonia depinde de semnul derivatei I. Pentru $x\geq 0$ f(x) este crescătoare; pentru $x<0$, f(x) este descrescătosre Determinăm semnul derivatei a doua și obținem: pentru $x\in(-\infty,-1)\cup[1,\infty)$, $f''(x)\leq 0\Rightarrow$ f(x) este concavă; pentru $x\in(-1,1)$, $f''(x)>0\Rightarrow$ f(x) este convexă	2p 2p 1p
c)	$g(x^k)=f(x^k)+f\left(\dfrac{1}{x^k}\right)=\dfrac{x^{2k}-1}{x^{2k}+1}+\dfrac{\frac{1}{x^{2k}}-1}{\frac{1}{x^{2k}}+1}=\dfrac{x^{2k}-1}{x^{2k}+1}+\dfrac{1-x^{2k}}{x^{2k}+1}=0$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)+g(x^2)+\cdots+g(x^{2011})+x^{2013}}{x^{2012}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^{2013}}{x^{2012}}=\lim\limits_{x\to 2}x=2$	3p 2p
2. a)	$I_0=\int_0^1\dfrac{1}{x^2+1}dx=arctgx\Big\vert_0^1=\dfrac{\pi}{4}$ $I_1=\int_0^1\dfrac{x}{x^2+1}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{2x}{x^2+1}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{u'}{u}dx=\dfrac{1}{2}\ln\lvert u\rvert\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big\vert_0^1=\dfrac{\ln 2}{2}$	2p 3p
b)	Fie $\forall x\in[0,1]\Rightarrow x^n\geq x^{n+1}$. Deoarece $\Rightarrow\dfrac{x^n}{x^2+1}\geq\dfrac{x^{n+1}}{x^2+1}\Rightarrow\int_0^1\dfrac{x^n}{x^2+1}dx\geq\int_0^1\dfrac{x^{n+1}}{x^2+1}dx\Rightarrow I_n\geq I_{n+1}$ $I_n+I_{n+2}=\int_0^1\dfrac{x^n}{x^2+1}dx+\int_0^1\dfrac{x^{n+2}}{x^2+1}dx=\int_0^1\dfrac{x^n(x^2+1)}{x^2+1}dx=\int_0^1 x^n dx=\dfrac{1}{n+1}$	2p 1p 2p

	$\frac{1}{n+1}=I_n+I_{n+1}\le 2I_n \Rightarrow I_n\ge \frac{1}{2(n+1)}$ $\frac{1}{n-1}=I_n+I_{n-2}\ge 2I_n \Rightarrow I_n\le \frac{1}{2(n+1)}$ $\Rightarrow \frac{1}{2(n+1)}\le I_n\le \frac{1}{2(n-1)},\ n\ge 2$	
c)	$\frac{1}{2(n+1)}\le I_n\le \frac{1}{2(n-1)} \vert \cdot n \Rightarrow \frac{n}{2(n+1)}\le nI_n\le \frac{n}{2(n-1)} \ \vert -\frac{1}{3}$ $\Rightarrow \frac{n}{2(n+1)}-\frac{1}{3}\le nI_n-\frac{1}{3}\le \frac{n}{2(n-1)}-\frac{1}{3}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{2(n+1)}-\frac{1}{3}\right]\le \lim\limits_{n\to\infty}\left(nI_n-\frac{1}{3}\right)\le \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{2(n-1)}-\frac{1}{3}\right]$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-2}{6(n+1)}\le \lim\limits_{n\to\infty}\left(nI_n-\frac{1}{3}\right)\le \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{6(n+1)} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(nI_n-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$	2p 3p