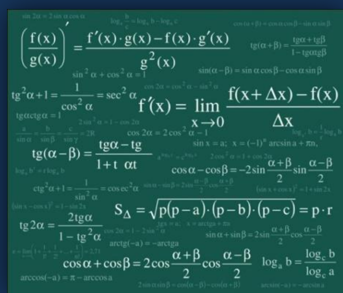
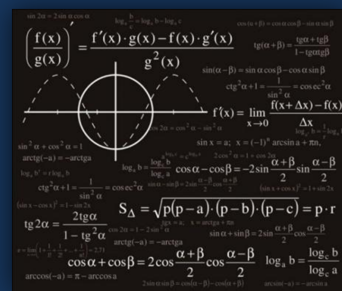
REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

ISSN 2065-6432 - SEPTEMBRIE 2016

www.mateinfo.ro

REVISTĂ LUNARĂ
DIN FEBRUARIE 2009
revista@mateinfo.ro





ARTICOLE REVISTĂ:

1.SOLUTIONS TO SOME PROBLEMS FROM OCTOGON MATHEMATICAL MAGAZINE

by Neculai Stanciu, ''George Emil Palade'' School, Buzău, Romania

Remark. From the statements of the problems from Octogon Mathematical Magazine see the link http://www.uni-miskolc.hu/~matsefi/Octogon/index.php?menu=archive.

PP.22836. By well-known inequality $\sum a^2 \geq \sum ab$ and Bergström's inequality, we obtain

$$\sum \frac{a^3}{a\sin^2 x + b\cos^2 x} = \sum \frac{a^4}{a^2\sin^2 x + ab\cos^2 x} \geq$$

$$\geq \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sin^2 x\sum a^2 + \cos^2 x\sum a^2} = \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a^2} = \sum a^2 = a^2 + b^2 + c^2 \text{, q.e.d.}$$

PP.22852. Since

$$\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2} = 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\text{, and}$$

$$\cos\frac{B-C}{2} + \sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B-C}{2} + \cos\frac{B+C}{2} = 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

So,

$$LHS = 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} + 8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2} =$$

$$= \frac{8(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2}{(abc)^2} + \frac{6s^3(s-a)(s-b)(s-c)}{(abc)^2} =$$

$$= \frac{8(s^2r^4 + s^4r^2)}{16R^2r^2s^2} = \frac{s^2+r^2}{2R^2}\text{, q.e.d.}$$

PP.22873. For any three points we find an ellipse that pass through these points - this is the easiest result if we remember that the ellipse is a conic section.

PP.22885. We have the identities

$$\sum r_a = 4R + r\text{, respectively } \sum r_a r_b = s^2.$$

By Bergström's inequlity, we obtain

$$\sum \frac{1}{r_a^2 + \lambda r_b r_c} \geq \frac{9}{\left(\sum r_a\right)^2 + (\lambda - 2)\sum r_a r_b} = \frac{9}{(4R+r)^2 + (\lambda-2)s^2}\text{, q.e.d.}$$

PP.22890. The given inequality is written as

$$a^n(a-b) + b^n(b-c) + c^n(c-a) + a^{n-1}(a-b) + b^{n-1}(b-c) + c^{n-1}(c-a) + \ldots +$$
$$+ a(a-b) + b(b-c) + c(c-a) \geq 0.$$

It suffices to prove that for all natural numbers k we have
$a^k(a-b)+b^k(b-c)+c^k(c-a)\geq 0$, (1).
We can assume WLOG , that $a\geq b\geq c$.
Indeed,

$$a^k(a-b)+b^k(b-c)+c^k(c-a)=(a-b)(a^k-c^k)+(b-c)(b^k-c^k)\geq 0,$$

so (1) is true.
Also, (1) can be proved by rearrangements inequality.
We can assume WLOG , that $a\geq b\geq c$, and we obtain
$a^{k+1}+b^{k+1}+c^{k+1}\geq a^k b+b^k c+c^k a$, i.e. exactly (1).

PP.22904. By well-known formulas yields that

$$\sum(s-a)^3=s(s^2-12Rr) \text{ and } \sum c(s-b)=s^2-r^2-4Rr.$$

By Bergström's inequlity we obtain the desired inequality.

PP.22951. We use the inequality

$$\frac{x}{x^3+x^2+1}\leq\frac{n^3(n^3-n-2)x}{(n^3+n+1)^2}+\frac{n^2(2n+3)}{(n^3+n+1)^2}, (1).$$

The inequality (1) is equivalent with
$(nx-1)^2[(n^3-n-2)nx^2+(n^4+2n^3-n^2-2n-1)x+2n^3+3n^2]\geq 0$, true for $n\geq 2$.
Writing the inequality (1) for the numbers $a_1,a_2,...,a_n$ and adding up these inequalities and taking account that $\sum_{k=1}^{n}a_k\leq 2$ yields that

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_k^3+a_k^2+1}\leq\frac{2n^3(n^3-n-2)}{(n^3+n+1)^2}+\frac{n^3(2n+3)}{(n^3+n+1)^2}=\frac{n^3(2n^3-1)}{(n^3+n+1)^2}, \text{ q.e.d.}$$

PP.22994. Since $2m_b m_c\leq m_b^2+m_c^2$, by Bergström's inequlity and usual formulas, we obtain

$$\sum\frac{1}{3bc+4m_b m_c}\geq\frac{18}{6\sum a^2+6\sum ab}=\frac{3}{4(s^2-r^2-4Rr)}, \text{ q.e.d.}$$

PP.22995. Applying two times AM-GM inequality, we obtain

$$\sum_{cyclic}\frac{1+a_1^2}{a_2}\geq\sum_{cyclic}\frac{2a_1}{a_2}\geq 2n\cdot\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_1}}=2n, \text{ q.e.d}$$

PP.23001. We have successively that

$$\left(\sum a\right)\left(\sum a^2\right)\leq 3abc+2\sum a^3$$

$$\Leftrightarrow\sum a^2b+\sum ab^2+\sum a^3\leq 3abc+2\sum a^3$$

$$\Leftrightarrow ab^2+ac^2-a^3+ba^2+bc^2-b^3+ca^2+cb^2-c^3\leq 3abc$$

$$\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}, \text{ q.ed.}$$

PP.23011. By AM-GM inequality for the numbers a_1^n and a_2^n with weights k and n-k, we obtain

$$\frac{ka_1^n+(n-k)a_2^n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1^{kn}a_2^{n(n-k)}}=a_1^k a_2^{n-k},\ (1).$$

Writing yhe inequqlity (1) for the pairs $(a_1,a_2),(a_2,a_3),...,(a_{n-1},a_n),(a_n,a_1)$ and adding up we obtain $\sum_{cyclic}a_1^k a_2^{n-k}\leq\sum_{i=1}^n a_i^n$, q.e.d

PP.23034. We have

$$\frac{x^2+4xy+y^2}{x+y}\leq\frac{3(x+y)}{2}\Leftrightarrow(x-y)^2\geq 0,\ (1).$$

Writing the inequality (1) for the pairs $(a_1,a_2),(a_2,a_3),\ldots,(a_{n-1},a_n),(a_n,a_1)$ and adding up we obtain the desired inequality.

PP.23043. For $n=1$ we obtain $a_1=2$, for $n=2$ we obtain $a_2=2$, for $n=3$ we have $a_3=6=3!$. We assume that for $k=1,2,...,n-1$ we have $a_k=k!$.

By the relation of the statement, i.e. $1=2+...+(n-1)+\frac{a_n}{(n-1)!}=\frac{n(n+1)}{2}$, we obtain $a_n=n!$, and by mathematical induction yields that $a_n=n!$,q.e.d

PP.23047. The inequality to prove is equivalent with

$$\sum a^2b^2\left(\sum a^2+\sum ab\right)\geq 18a^2b^2c^2,\ (1).$$

By AM-GM inequality, we obtain

$$\sum a^2b^2\geq 3\cdot\sqrt[3]{a^4b^4c^4},\ \text{and}$$

$$\sum a^2+\sum ab\geq 6\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2},$$

which by multiplying yields (1), q.e.d.

PP.23085. By AM-GM inequality, we have

$$a^2b+bc^2\geq 2abc=2.$$

So,

$$\sum\frac{1}{a^2b+bc^2+2}\leq\sum\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

PP. 23101. We have

$$\frac{1}{\cos 70^0}-\frac{1}{\cos 10^0}+\frac{1}{\cos 50^0}=\frac{\cos 10^0-\cos 70^0}{\sin 20^0\cos 10^0}+\frac{1}{\sin 40^0}=$$

$$=\frac{2\sin 40^0\sin 30^0}{\sin 20^0\cos 10^0}+\frac{1}{\sin 40^0}=\frac{\sin 40^0}{\sin 20^0\cos 10^0}+\frac{1}{\sin 40^0}=$$

$$=\frac{\sin^2 40^0+\sin 20^0\cos 10^0}{\sin 20^0\cos 10^0\sin 40^0}=\frac{1-\cos 80^0+\sin 30^0+\sin 10^0}{(\sin 30^0+\sin 10^0)\sin 40^0}$$

$$=\frac{3}{\sin 40^0+2\sin 10^0\sin 40^0}=\frac{3}{\sin 40^0+\cos 30^0-\cos 50^0}=\frac{3}{\cos 30^0}=2\sqrt{3}\text{, q.e.d.}$$

PP.23104. We shall prove that

$$\frac{k^2+1}{k^3+1}\le 2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}\text{ , (1).}$$

The inequality (1) is equivalent successively with

$$\left(\frac{k^2+1}{k^3+1}\right)^2\le 8k+4-8\sqrt{k(k+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8k^7+4k^6+15k^4+8k^3-2k^2+8k+3}{k^6+2k^3+1}\ge 8\sqrt{k(k+1)}$$

$$\Leftrightarrow (8k^7+4k^6+15k^4+8k^3-2k^2+8k+3)^2\ge(64k^2+64k)(k^{12}+4k^9+6k^6+4k^3+1)$$

$\Leftrightarrow 16k^{12}-16k^{11}-8k^{10}+32k^9\ldots\ge 0$, which true.

Writing the inequality (1) for $k=1,2,3,\ldots,n$ and adding up we obtain the desired inequality, q.ed.

PP.23114. We use the formulas

$\sum ab=s^2+r^2+4Rr$, $\sum a^2=2s^2-2r^2-8Rr$, $abc=4Rrs$, $F=sr$.

We have

$$\frac{a}{r_a}=\frac{a(s-a)}{F},$$

$$\left(\sum a(s-a)\right)^2=\left(s\sum a-\sum a^2\right)^2=$$

$$=(2s^2-2s^2+2r^2+8Rr)^2=4r^2(4R+r)^2$$

$$\sum ab(s-a)(s-b)=\sum ab(ab+sc-s^2)=\sum a^2b^2+3sabc-s^2\sum ab=$$

$$=\left(\sum ab\right)^2-s^2\sum ab-2abc\sum a+3sabc=(r^2+4Rr)\sum ab-sabc=$$

$$=r(4R+r)(s^2+r^2+4Rr)-4Rrs^2=r^2(4R+r)^2+s^2r^2.$$

Hence

$$\sum\left(\frac{a}{r_a}\right)^2=\frac{4r^2(4R+r)^2-2r^2(4R+r)^2-2s^2r^2}{s^2r^2}=2\left(\frac{4R+r}{s}\right)^2-2\text{, q.e.d.}$$

PP.23119. Since $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ is the root of the equation $x^2-x-1=0$, yields that for $x\ge\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

we have $x^2-x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1+\frac{1}{x}$, (1).

Writing the inequality (1) for the numbers $a_1,a_2,\ldots,a_n$ by summary we obtain the desired inequality.

PP.23134.

Solution I. We shall prove that

$$\frac{k^2+1}{k^3+1}\le 2\sqrt{k}-2\sqrt{k-1}\text{, (*)}$$

The inequality (*) becomes successively

$$\left(\frac{k^2+1}{k^3+1}\right)^2 \le 8k-4-8\sqrt{k(k-1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8k^7-4k^6+15k^4-8k^3-2k^2+8k-5}{k^6+2k^3+1} \ge 8\sqrt{k(k-1)}$$

$$\Leftrightarrow (8k^7-4k^6+15k^4-8k^3-2k^2+8k-1)^2 \ge (64k^2-64k)(k^{12}+4k^9+6k^6+4k^3+1)$$

$\Leftrightarrow 16k^2-16k^{11}+8k^{10}+32k^9-15k^8 \ldots +1 \ge 0$, true.

Writing the inequality (*) for $k=1,2,3,\ldots,n$ by adding up we obtain the desired inequality.

Remark. Other way to prove the inequality (*) : we have

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k} \le \sqrt{k}-\sqrt{k-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{k+1}+\sqrt{k-1} \le 2\sqrt{k}$$

$$\Leftrightarrow k+1+k-1+2\sqrt{k^2-1} \le 4k$$

$\Leftrightarrow \sqrt{k^2-1} \le k \Leftrightarrow k^2-1 \le k^2$, true.

Now the inequality (*) yields by (1) from the solution of the problem PP.23104.

Solution II. Taking account by the inequality from the problem PP.23104, it suffices to show that

$$2\sqrt{n+1}-1 < 2\sqrt{n} \Leftrightarrow 2\sqrt{n+1} < 2\sqrt{n}+1 \Leftrightarrow 4n+4 \le 4n+1+4\sqrt{n}$$

$\Leftrightarrow 3 \le 4\sqrt{n} \Leftrightarrow 9 \le 16n$, true.

The proof is complete.

PP.23153. Since $a^2+ab+b^2 \ge \frac{3(a+b)^2}{4}$ and $\frac{a^2+b^2}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, we obtain

$$x^4+x^2y^2+y^4 \ge 3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Therefore,

$$\sum_{cyclic}\sqrt[4]{x_1^4+x_1^2x_2^2+x_2^4} \ge \sqrt[4]{3}\sum_{cyclic}\frac{x_1+x_2}{2} = \sqrt[4]{3}\sum_{k=1}^{n}x_k \text{, q.e.d}$$

PP.23194. Let $D \in (BC)$ and $E \in (AC)$ such that AD and BE are the bisectors of angles BAC, respectively ABC.

Since $b^2 = c(a+c) \Leftrightarrow \frac{b}{a+c} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AC}$ and $\angle BAC$ is common, yields the triangles AEB and ABC are similar. We deduce that $\angle ABE = \angle BCA$, i.e. $B = 2C$, (1).

Analogous $a^2 = b(b+c) \Leftrightarrow \frac{DC}{AC} = \frac{AC}{AB}$ and $\angle BCA$ is common, yields that the triangles ADC and BAC are similar, so $A = 2B$, (2).

From (1) and (2) we obtain that the angles C, B, A are in geometrical progression with the ratio equal with 2.

PP.23197. By the solution of PP.23194, we deduce that $B = 2C$. Using the Sine Law and usual formulas we obtain

$$b-c = 2R(\sin B-\sin C) = 2R(\sin 2C-\sin C) = 4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{3C}{2},$$

so in the statement there is a typo, q.e.d.

2. INEGALITATI ALGEBRICE CONDITIONATE CARE SE REZOLVA CU AJUTORUL UNOR SUBSTITUTII , METODA OMOGENIZARII

George-Florin Serban , profesor Liceul Pedagogic "D.P.Perpessicius",Braila

Vom prezenta in continuare o metoda de rezolvare a inegalitilor algebrice conditionate care se bazeaza pe efectuarea unor substitutii convenabile astfel incat inegalitatile sa devina omogene. Cateva substitutii mai importante sunt:

1)Daca $abc=1$ **atunci se fac substitutiile :** $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$, **sau**

$a=\frac{x^2}{yz}, b=\frac{y^2}{xz}, c=\frac{z^2}{xy}$.

2)Daca $a+b+c=1$ **atunci se fac substitutiile :**

$a=\frac{x}{x+y+z}, b=\frac{y}{x+y+z}, c=\frac{z}{x+y+z}$.

3)Daca $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2.$ **atunci se fac substitutiile :**

$a=\frac{x}{y+z}, \mathrm{b}=\frac{y}{x+z}, \mathrm{c}=\frac{z}{x+y}$.

4)Daca $abc=k$ **atunci se fac substitutiile :** $a=\sqrt[3]{k}\frac{x}{y}, b=\sqrt[3]{k}\frac{y}{z}, c=\sqrt[3]{k}\frac{z}{x}$.

5)Daca $a+b+c=k$ **atunci se fac substitutiile :**

$a=\frac{kx}{x+y+z}, b=\frac{ky}{x+y+z}, c=\frac{kz}{x+y+z}$.

In continuare va propun cateva aplicatii la aceste substutii .

1)Fie $a,b,c>0$ **cu** $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2.$ **Sa se arate ca :** $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\le\frac{3}{2}.$ **(G.M nr 5\2016)**

Solutie: Folosesc substitutiile $a=\frac{x}{y+z}, \mathrm{b}=\frac{y}{x+z}, \mathrm{c}=\frac{z}{x+y}, \mathrm{x,y,z}>0,$

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=\frac{y+z}{x+y+z}+\frac{x+z}{x+y+z}+\frac{x+y}{x+y+z}=\frac{2x+2y+2z}{x+y+z}=2.$$

$$2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac}=2\sqrt{\frac{xy}{(y+z)(x+z)}}+2\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}}+2\sqrt{\frac{xz}{(y+z)(x+y)}}\ ,$$

$$2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac}=2\sqrt{\frac{x}{x+z}\cdot\frac{y}{y+z}}+2\sqrt{\frac{z}{x+z}\cdot\frac{y}{x+y}}+2\sqrt{\frac{x}{x+y}\cdot\frac{z}{y+z}},$$ aplic inegalitatea mediilor , $2\sqrt{uv}\le u+v$,

$$2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac}\le(\frac{x}{x+z}+\frac{y}{y+z})+(\frac{z}{x+z}+\frac{y}{x+y})+(\frac{x}{x+y}+\frac{z}{y+z})=\frac{x+y}{x+y}+\frac{z+y}{z+y}+\frac{x+z}{x+z}=3$$

rezulta $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\le\frac{3}{2}$.

2)Fie numerele reale pozitive a , b, c astfel incat $\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{a+c+1}+\frac{c}{b+a+1}\le1$ **, atunci sa se arate ca** $\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{a+c+1}+\frac{1}{b+a+1}\ge1$**. (Olimpiada Judeteana 2016)**

Solutie: Folosim substitutiile $b+c+1=x$, $a+c+1=y$, $b+a+1=z$, $b+c=x-1\ge0$, $a+c=y-1\ge0$, $b+a=z-1\ge0$, le adun si obtin $2a+2b+2c+3=x+y+z, a+b+c=\frac{x+y+z-3}{2}$, scadem din aceasta ecuatie fiecare din cele trei ecuatii si obtin ca $a=\frac{-x+y+z-1}{2}$, $b=\frac{x-y+z-1}{2}$,$c=\frac{x+y-z-1}{2}$, inlocuim pe a,b,c in inegalitatea din ipoteza $\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{a+c+1}+\frac{c}{b+a+1}\le1$,

$\frac{-x+y+z-1}{2x}+\frac{x-y+z-1}{2y}+\frac{x+y-z-1}{2z}\le1$, $(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})+(\frac{z}{x}+\frac{x}{z})+(\frac{z}{y}+\frac{y}{z})-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})\le5$,

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})+(\frac{z}{x}+\frac{x}{z})+(\frac{z}{y}+\frac{y}{z})-5\ge2+2+2-5=1$,

$\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{a+c+1}+\frac{1}{b+a+1}\ge1$, egalitatea are loc pentru $a=b=c=1$.

3) Sa se arate ca $\frac{1}{a+ab}+\frac{1}{b+bc}+\frac{1}{c+ac}\ge\frac{3}{2}$, $(\forall)\,a,b,c>0, abc=1$ **.**

Solutie: Se fac substitutiile $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$, inegalitatea devine

$\frac{yz}{x(y+z)}+\frac{xz}{y(x+z)}+\frac{xy}{z(x+y)}\ge\frac{3}{2}$, $\frac{yz}{xy+xz}+\frac{xz}{xy+yz}+\frac{xy}{xz+yz}\ge\frac{3}{2}$, este adevarata deoarece este inegalitatea lui Nesbit. $\frac{u}{v+w}+\frac{v}{u+w}+\frac{w}{u+v}\ge\frac{3}{2}, (\forall)u,v,w>0$, cu substitutiile $u=xy, v=yz, w=xz$.

4)Fie $(\forall)\,a,b,c>0, a+b+c=1$**. Sa se arate ca** $\frac{a+1}{\sqrt{a+bc}}+\frac{b+1}{\sqrt{b+ac}}+\frac{c+1}{\sqrt{c+ab}}\ge\frac{2}{a^2+b^2+c^2}$ **.**

(GM. Nr 6-7-8\2016)

Solutie: Aplic inegalitatea C.B.S $(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$,
$\frac{2}{a^2+b^2+c^2} \le \frac{6}{(a+b+c)^2} = 6$, Trebuie sa arat ca $\frac{a+1}{\sqrt{a+bc}} + \frac{b+1}{\sqrt{b+ac}} + \frac{c+1}{\sqrt{c+ab}} \ge 6$, pentru omogenizare , fac substitutiile $a = \frac{x}{x+y+z}, \mathrm{b} = \frac{y}{x+y+z}, \mathrm{c} = \frac{z}{x+y+z}, \mathrm{a+b+c} = 1$,

$\sum \frac{2x+y+z}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} \ge 6$, fac substitutiile $x+y=u, x+z=v, \mathrm{y}+z=w$,

$\sum \frac{u+v}{\sqrt{uv}} \ge 6, \frac{u+v}{\sqrt{uv}} + \frac{u+w}{\sqrt{uw}} + \frac{v+w}{\sqrt{wv}} - 2 - 2 - 2 \ge 0$,

$\frac{(\sqrt{u}-\sqrt{v})^2}{\sqrt{uv}} + \frac{(\sqrt{w}-\sqrt{v})^2}{\sqrt{wv}} + \frac{(\sqrt{u}-\sqrt{w})^2}{\sqrt{uw}} \ge 0, (A)$.

5)Sa se arate ca $\frac{a-2}{a+1} + \frac{b-2}{b+1} + \frac{c-2}{c+1} \le 0$, $(\forall)\mathrm{a,b,c} > 0, abc = 8$. **(Test OBMJ 2008)**

Solutie: $\frac{a-2}{a+1} + \frac{b-2}{b+1} + \frac{c-2}{c+1} = 1 - \frac{3}{a+1} + 1 - \frac{3}{b+1} + 1 - \frac{3}{c+1} \le 0$, $3 \le \frac{3}{a+1} + \frac{3}{b+1} + \frac{3}{c+1}$,
$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \ge 1$, **Pentru omogenizare facem substitiile** $a = 2\frac{x}{y}, b = 2\frac{y}{z}, c = 2\frac{z}{x}$, inlocuim a,b,c in inegalitea de mai sus si obtinem

$\sum \frac{1}{a+1} = \sum \frac{y^2}{2xy+y^2} \ge \frac{(\sum y)^2}{\sum(2xy+y^2)} = \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz} = 1$ (A) . Am aplicat inegalitatea lui Bergstrom $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \ge \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$.

6) Fie $\mathrm{a,b,c} > 0, abc = 1$. **Sa se arate ca** $(a+b)(b+c)(a+c) \ge (a+1)(b+1)(c+1)$.

Solutie: Se fac substitutiile $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}, \mathrm{abc} = 1$, inegalitatea devine

$(\frac{x}{y} + \frac{y}{z})(\frac{y}{z} + \frac{z}{x})(\frac{x}{y} + \frac{z}{x}) \ge (\frac{x}{y}+1)(\frac{y}{z}+1)(\frac{z}{x}+1), (\mathrm{x}^2 + yz)(y^2+xz)(z^2+xy) \ge xyz(x+y)(x+z)(\mathrm{y+z})$,

Arat ca $(\mathrm{x}^2+yz)(y^2+xz) \ge xy(\mathrm{z}+y)(\mathrm{z}+x)$, $(\mathrm{x}^2+yz)(y^2+xz) - xy(\mathrm{z}+x)(\mathrm{z}+y) \ge 0$,

$x^2y^2 + x^3z + y^3z + xyz^2 - xyz^2 - xy^2z - x^2yz - x^2y^2 \ge 0, x^3z + y^3z - xy^2z - x^2yz \ge 0$,

$\mathrm{z}(\mathrm{x}^3 + y^3) - \mathrm{xyz}(\mathrm{x+y}) \ge 0, \mathrm{z}(\mathrm{x+y})(\mathrm{x}^2 - xy + y^2) - \mathrm{xyz}(\mathrm{x+y}) \ge 0, \mathrm{z}(\mathrm{x+y})(\mathrm{x}^2 - 2xy + y^2) \ge 0$,

$z(x+y)(x-y)^2 \ge 0, (\mathrm{A})$, **deci** $(\mathrm{x}^2+yz)(y^2+xz) \ge xy(\mathrm{z}+y)(\mathrm{z}+x)$, **si analoagele**

$(\mathrm{y}^2+xz)(\mathrm{z}^2+xy) \ge yz(\mathrm{x}+y)(\mathrm{x}+z), (\mathrm{z}^2+xy)(\mathrm{x}^2+yz) \ge xz(\mathrm{y}+x)(\mathrm{y}+z)$, **inmultesc cele trei inegalitati si obtin** $[(\mathrm{x}^2+yz)(y^2+xz)(z^2+xy)]^2 \ge [xyz(x+y)(x+z)(\mathrm{y+z})]^2$, **deci obtinem inegaltatea ceruta** $(\mathrm{x}^2+yz)(y^2+xz)(z^2+xy) \ge xyz(x+y)(x+z)(\mathrm{y+z}), (\forall)x,y,z > 0$.

Tema :

1) **Sa se arate ca** $\frac{a}{1+ab}+\frac{b}{1+bc}+\frac{c}{1+ac}\geq\frac{3}{2},\ (\forall)\,\mathrm{a,b,c}>0, abc=1$ **.**

2) **Sa se arate ca** $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2},\quad \forall a,b,c>0, abc=1.$

3) **Sa se arate ca** $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{3}{2},\quad \forall x,y,z\geq 0, xyz=1$

4) **Fie** $a,b,c>0$**, cu** $2abc+ab+ac+bc=1.$ **Sa se arate ca :** $a^2+b+c\geq\frac{5}{4}.$

5) **Fie** $a,b,c>0$ **si** $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2$ **. Aratati ca** $abc\leq\frac{1}{8}$ **. (Baraj OBMJ 2006)**

6) **Daca** $\mathrm{a,b,c}>0, abc=1,$ **atunci are loc inegalitatea**
$$\frac{a}{b+2}+\frac{b}{c+2}+\frac{c}{a+2}\geq\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{a+2}.$$

Bibliografie: Gazeta Matematica Seria B

www.artofproblemsolving.com

https://prajeamanuela.files.wordpress.com

3. ÎN LEGĂTURĂ CU O INEGALITATE DIN OCTOGONMATHEMATICAL MAGAZINE 1/2007

Marin Chirciu[1]

În revista de matematica Octogon 1/2007 M. Bencze a propus următoarea problemă:

"În orice triunghi are loc dubla inegalitate: $\frac{3}{2} \leq \frac{2\left(p^2 - r^2 - Rr\right)}{p^2 + r^2 + 2Rr} < 2$".

Soluție: Inegalitatea din stânga $\Leftrightarrow 3p^2 + 3r^2 + 6Rr \leq 4p^2 - 4r^2 - 4Rr \Leftrightarrow p^2 \geq 10Rr + 7r^2$,

adevărată din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2 \geq 16Rr - 5r^2 \overset{(1)}{\geq} 10Rr + 7r^2$,

unde $(1) \Leftrightarrow 6Rr \geq 12r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$, evident din inegalitatea lui Euler.

Inegalitatea din dreapta $\Leftrightarrow 2p^2 - 2r^2 - 2Rr < 2p^2 + 2r^2 + 4Rr \Leftrightarrow 4r^2 + 6Rr > 0$, evident.

În acest articol se propun dezvoltări ale acestei inegalități în triunghi.

1. $\frac{13-n}{14+2n} \leq \frac{p^2 - r^2 - nRr}{p^2 + r^2 + 2nRr}$, unde $n \geq 0$.

Soluție: Inegalitatea se transformă echivalent:
$(14+2n)p^2 - (14+2n)r^2 - (14n+2n^2)Rr \geq (13-n)p^2 + (13-n)r^2 + (26n-2n^2)Rr \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1+3n)p^2 \geq (n+27)r^2 + 40nRr$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen:
$p^2 \geq 16Rr - 5r^2$. Rămâne de demonstrat că:
$(1+3n)(16Rr - 5r^2) \geq (n+27)r^2 + 40nRr \mid :r \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (1+3n)(16R-5r) \geq (n+27)r + 40nR \Leftrightarrow (16+8n)R \geq (32+16n)r \Leftrightarrow R \geq 2r$, evident din inegalitatea lui Euler.

2. $\frac{p^2 - r^2 - nRr}{p^2 + r^2 + nRr} \geq \frac{13-n}{14+n}$, unde $n \geq 0$.

Soluție: Inegalitatea se transformă echivalent:

$(14+n)p^2 - (14+n)r^2 - (14n+n^2)Rr \geq (13-n)p^2 + (13-n)r^2 + (13n-n^2)Rr \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2n+1)p^2 \geq 27r^2 + 27nRr$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$.
Rămâne de demonstrat că: $(2n+1)(16Rr - 5r^2) \geq 27r^2 + 27nRr \mid :r \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (2n+1)(16R-5r) \geq 27r + 27nR \Leftrightarrow (5n+16)R \geq (10n+32)r \Leftrightarrow R \geq 2r$, evident din inegalitatea lui Euler.

3. $\frac{p^2 - r^2 - nRr}{p^2 + r^2 + kRr} \geq \frac{13-n}{14+k}$, unde $n \geq 0$ și $k \geq 0$.

Soluție: Inegalitatea se transformă echivalent:

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu", Pitești*

$(14+k)p^2-(14+k)r^2-(14n+nk)Rr \geq (13-n)p^2+(13-n)r^2+(13k-nk)Rr \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1+n+k)p^2 \geq (27+k-n)r^2+(14n+13k)Rr$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2 \geq 16Rr-5r^2$. Rămâne de demonstrat că:

$\Leftrightarrow (1+n+k)(16Rr-5r^2) \geq (27+k-n)r^2+(14n+13k)Rr \mid :r \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (1+n+k)(16R-5r) \geq (27+k-n)r+(14n+13k)R \mid :r \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (16+2n+3k)R \geq (32+4n+6k)r$, evident din inegalitatea lui Euler: $R \geq 2r$.

La fiecare din inegalitățile de mai sus egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

Inegalitatea lui Gerresten: $p^2 \geq 16Rr-5r^2$ este adevărată din $IG^2 = \frac{1}{9}\left(p^2+5r^2-16Rr\right) \geq 0$
.

Inegalitatea lui Euler: $R \geq 2r$ este adevărată din $IO^2 = R\left(R-2r\right) \geq 0$.

Bibliografie:

1. Mihaly Bencze, Octogon Mathematical Magazine 1/2007.
2. O.Bottema,R.Z.Djordjevic,R.R.Janic,D.S.Mitrinovic,P.M.Vasic,Geometric Inequalities, Groningen 1969, The Netherlands.
3. Marin Chirciu, Inegalități geometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2015.
4. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.

4. SOLUŢII PROBLEMA LUNII AUGUST 2016

www.mateinfo.ro

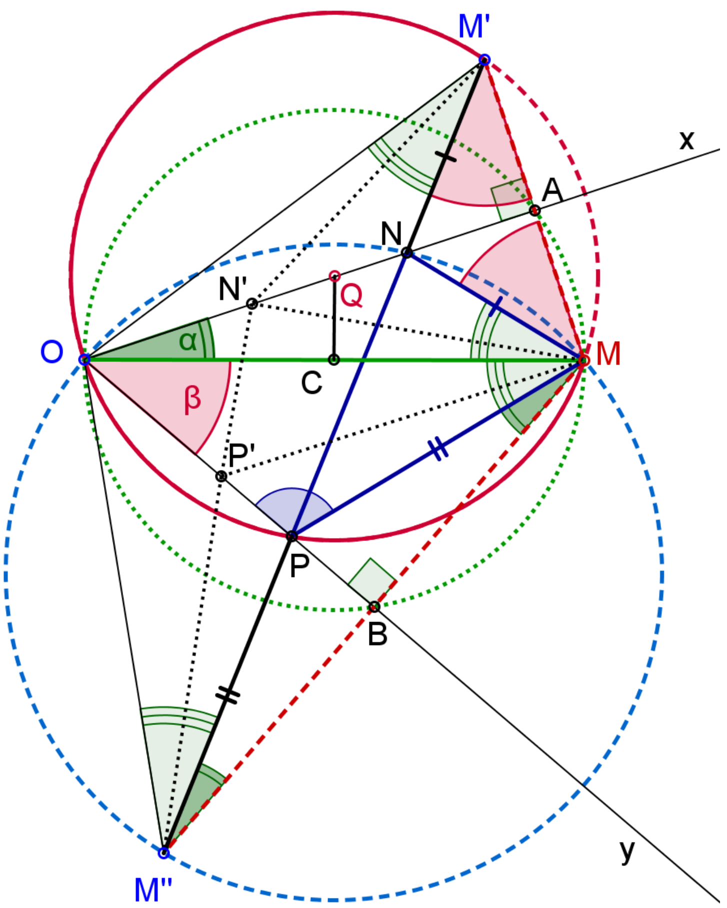
Se consideră unghiul propriu ascuţit xOy **în spaţiu şi un punct** $M \in Int\, xOy$**. Fie** $N \in (Ox$ **şi** $P \in (Oy$ **astfel încât perimetrul triunghiului** MNP **să fie minim.**

Considerând că $\left[Ox,\ \alpha = m\left(OM, Ox\right),\ m = d\left(O, M\right)\right.$ **sunt fixe, iar** $(Oy$ **variabilă, să se determine locul geometric al punctului** P**.**

Autor: Prof. Constantin Telteu,

COLEGIUL NATIONAL DE ARTE ,,REGINA MARIA'', Constanţa

Soluţie autor:



I. Considerăm pentru început problema în plan, adică în enunţ ar fi înlocuit cuvântul „spaţiu” cu cuvântul „plan”.

Fie M' şi M'' simetricele lui M faţă de $[Ox$, respectiv $[Oy$ şi N, P intersecţiile lui $M'M''$ cu $[Ox$, respectiv $[Oy$. A şi B sunt intersecţiile segmentelor $[MM']$ şi $[MM'']$ cu mediatoarele lor.

Cum $[Ox$ şi $[Oy$ sunt mediatoarele segmentelor $[MM']$, respectiv $[MM'']$, punctele fiecăreia au proprietatea că sunt egal depărtate de capetele segmentului, deci putem scrie :

$$MN + NP + PM = M'N + NP + PM'' < M'N' + N'P' + P'M'' =$$

$$= MN' + N'P' + P'M,\ (\forall)\left(N' \in [Ox,\ P' \in [Oy \text{ şi } \left(N' \neq N \text{ sau } P' \neq P\right)\right).$$

Am folosit faptul că linia dreaptă între două puncte este mai scurtă decât orice linie frântă cu aceleaşi extremităţi. Deci punctele M şi N aşa cum au fost luate pe figură, îndeplinesc condiţia din enunţ. Deoarece O aparţine ambelor mediatoare, avem:

$OM'' = OM = OM'$; $\Delta OPM'' \equiv \Delta OPM\,(LLL)$; $\Delta ONM \equiv \Delta ONM'(LLL)$, de unde

$OMN \equiv OM'M'' \equiv OM''M' \equiv OMP$, de unde rezultă că patrulaterele $MNOM''$ şi $MPOM'$ sunt inscriptibile, şi de aici:

$$\alpha = m\left(NOM\right) = m\left(NM''M\right) = m\left(M''MP\right) \Rightarrow m\left(OPM\right) = 90^\circ + \alpha = const.$$

(OPM este exterior triunghiului PBM).

Deci P **aparţine arcului capabil de un unghi de** $90^\circ + \alpha$ **corespunzător segmentului** $[OM]$, **fără capetele arcului.**

II. Rotind acum planul figurii în jurul dreptei Ox, $[OM]$ se va roti în jurul lui $[Ox$ păstrând α constant, deci va genera suprafaţa laterală a unui con de rotaţie cu vârful în O şi diametrul bazei $[MM']$.

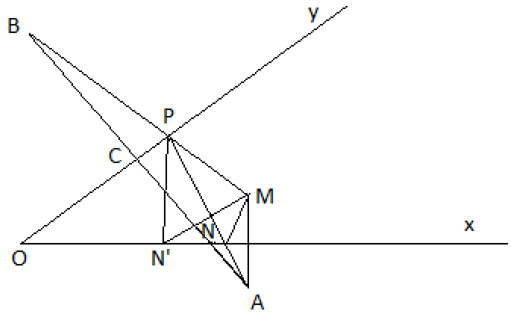
Arcul OPM va aparţine mereu sferei (fixe) cu centrul în $Q \in [Ox$ şi de rază OQ, unde Q este intersecţia mediatoarei lui $[OM]$ cu $[Ox$.

Din ΔOCQ avem: $OQ = \dfrac{m}{2\cos\alpha}$.

Deci **locul geometric al lui** P **este sfera** $S\left(Q, \dfrac{m}{2\cos\alpha}\right)$ **din care se elimină punctul** O **şi calota sferică cu cercul de bază** $C(A, AM)$; $AM = m\sin\alpha$ **.**

Alte soluții:

1) Prof. Silvia Musatoiu, Colegiul National Gheorghe Sincai, Bucuresti

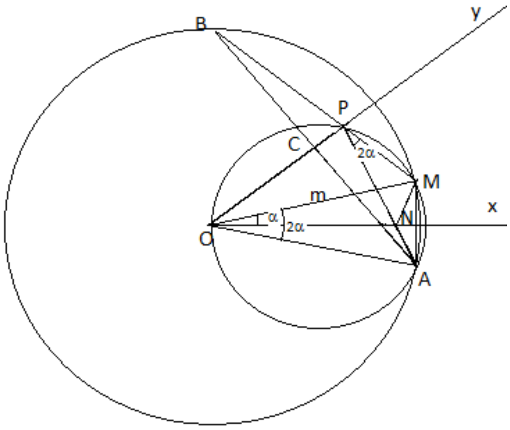


Problema are doua parti: una de constructie a punctelor N si P, a doua de determinare a locului geometric al punctului P.

Constructia (in planul xOy): Fie A simetricul lui M fata de Ox. Pentru oricare punct $Y\in Ox$, avem MY=AY, triunghiul AMY fiind isoscel. Asadar Pentru un punct $N'\in Ox$, $P_{\Delta MPN'}=MN'+N'P+PM>AP+PM=P_{\Delta MNP}$, unde $N = Ox\cap AP$ si $N'\neq N$. Asadar, pentru a obtine perimetrul minim, punctele A (fix), N si P (variabil pe Oy) trebuie sa fie coliniare, iar $P_{\Delta MNP}= AP+PM$. Problema se reduce la a determina punctul $P\in Oy$, pentru care suma distantelor la doua puncte fixe (A si M) este minima. Construiesc B simetricul lui A fata de Oy, iar $P=BM\cap Oy$. In acest mod, $AP+PM=BM< BP'+P'M=AP'+P'M$, $\forall P'\neq P$, $P'\in Oy$. $P_{\Delta MNP}$ va fi minim daca punctul N va fi intersectia dintre AP (cu P construit mai sus) si Ox.

Determinarea locului geometric al punctului P:

OC si ON sunt mediatoarele laturilor AB si AM ale triunghiului ABM, deci O este centrul cercului circumscris acestui triunghi.



Cum $m(\widehat{AOM}) = 2\alpha$ (unghi la centru), iar $m(\widehat{ABM}) = \frac{m(\widehat{AM})}{2}$, rezulta $m(\widehat{ABM}) = \alpha$. Unghiul $\widehat{MPA}$ este exterior triunghiului isoscel ABP, deci $m(\widehat{MPA}) = 2\alpha = m(\widehat{AOM})$. Asadar patrulaterul OAMP este inscriptibil, punctul P parcurgand (in planul xOy) arcul deschis $\widehat{OM}$, al cercului circumscris triunghiului fix AOM.

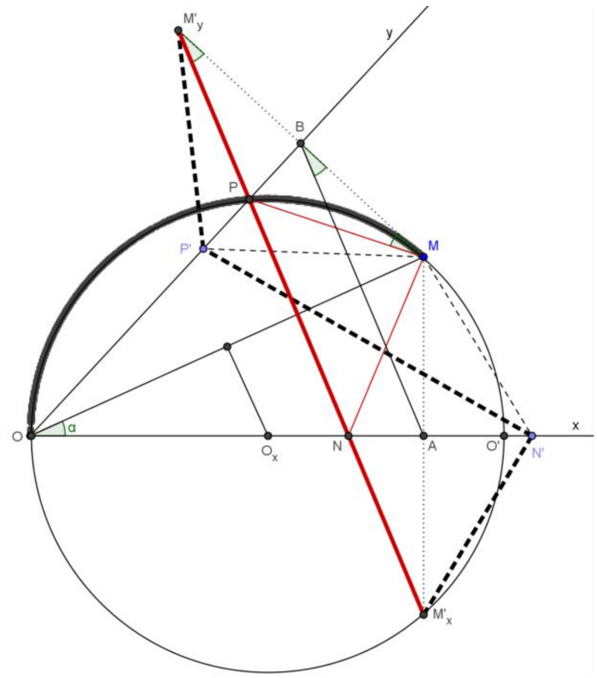
Centrul acestui cerc este un punct fix situat pe Ox, la distanta $\frac{m}{2cos\alpha}$ (raza cercului-constanta) fata de O.

Cum in fiecare plan xOy locul geometric al punctului P este un arc (capabil de un unghi dat) deschis al unui cerc cu centru fix si raza constanta, in spatiu, locul geometric al punctului P va fi o calota sferica a unei sfere cu centrul pe Ox, la distanta $\frac{m}{2cos\alpha}$ fata de O, de raza $\frac{m}{2cos\alpha}$, din care se elimina punctul O. Cercul de sectiune a sferei care determina calota-loc geometric are centrul pe Ox la distant mcos α de punctul O, de diametru MA=2msinα.

Reciproc, orice punct P al acestei calote sferice, din care se elimina O, are proprietatea din enunt (demonstratia se reduce din nou la fiecare plan xOy, folosind consideratiile din partea de constructie).

2) Biro Istvan, Şcoala cu cl.I-VIII nr.2 Sânnicolau Mare, Profesor

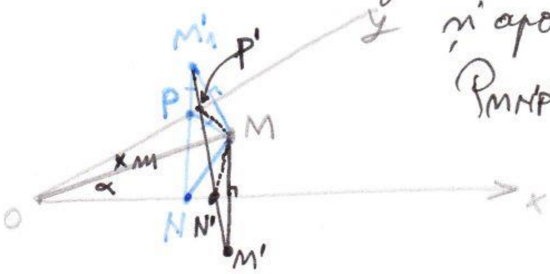
Fie M'_x şi M'_y simetricul lui M faţă de *Ox* respectiv *Oy*. Este evident că punctele $P \in (Oy\, şi\, N \in (Ox$ pentru care perimetrul triunghiului MNP este minim, se află la intersecţia dreptei $M'_xM'_y$ cu *Oy* respectiv *Ox* (lungimea liniei îngroşate de culoare roşie este mai mică sau egală cu lungimea liniei frânte, fapt rezultat din inegalitatea triunghiului) . Pe de altă parte din faptul că patrulaterul AOBM este inscriptibil şi AB este linia mijlocie al triunghiului $MM'_xM'_y$ rezultă că $m(\sphericalangle OPM) = 90^\circ + \alpha = constant$, deci locul geometric al punctului *P* în planul *xOy* (când *Oy* este variabil) este arcul de cerc definit de coarda *OM=m*, raza cercului fiind $OO_x = \frac{m}{2cos\alpha}$ şi centrul în O_x , intersecţia mediatoarei segmentului *OM* cu *Ox*; în acest cerc *OO'* devine diametru deoarece $\sphericalangle MOO' = \sphericalangle MPO' = \alpha$.



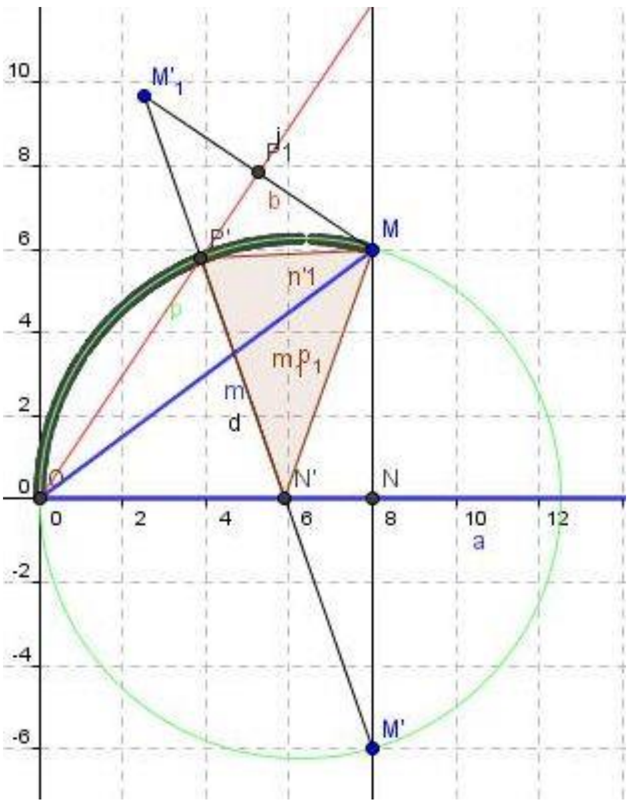
Din $M \in Int(\widehat{xOy})$ şi α fix, rezultă că $m((Ox;(Oy) \in (0,180^\circ)$, astfel dacă *Oy* se roteşte în jurul lui *Ox* atunci locul geometric al punctului P va fi calota sferică de înălţime $OA = mcos\alpha$.

3) Prof. N. Mirici , Sc. Mihai Viteazul, Calarasi, CL

Fie $N \in Ox$; aflăm $P \in Oy$ a.î. $MP+PN$ minimă ducând M'_1 simetricul lui M față de Oy și intersectând MM'_1 cu Oy.
Astfel $P_{MNP} = MN+NP+MP = MN+NM'_1$ care trebuie să fie minim ceea ce se reduce la a găsi $N' \in Ox$ a.î. $MN'+M'_1N'$ să fie minimă;
ducem (luăm) simetricul lui M față de Ox și unind M'_1 cu el găsim adevăratul N pe Ox, adică N' și apoi adevăratul P pe Oy, adică P'



$P_{MN'P'} = MP'+P'N'+N'M = M'_1P'+P'N'+N'M' = M'M'_1$

<table>
<tr>
<td>Figura devine:
</td>
<td>Considerând elementele figurii intr-un system de axe, vom afla coordonatele lui P, dupa care , eliminand t-ul, notatie pentru

tg(α + φ) , vom da peste ecuatia unui cerc (cel de culoare verde), iar locul cautat va fi arcul evidentiat;</td>
</tr>
</table>

Urmează calculele:

În sistem xOy' luăm $M(m_c; m_s)$; $M'(m_c; -m_s)$

dreapta variabilă $y = x \cdot tg(\varphi+\alpha) \overset{\text{notație}}{=} x \cdot tg$;

$MP_1: y - m_s = -\dfrac{1}{tg(\alpha+\varphi)}(x - m_c)$

$y = tg(\alpha+\varphi)x$

$$\left(tg(\alpha+\varphi)x - m_s \right) tg(\alpha+\varphi) = -x + m_c$$

$$x \cdot tg^2(\ ) - m_s tg + x = m_c$$

$m_c = m\cos\alpha$

$m_s = m\sin\alpha$

$$P_1: \begin{cases} x = \dfrac{m_c + m_s tg(+)}{1+tg^2(+)} \\ y = \dfrac{tg(+)(m_c + m_s tg(+))}{1+tg^2(+)} \end{cases}$$

$$x_{P_1} = \frac{x_{M_1'} + x_M}{2} \Rightarrow x_{M_1'} = 2\cdot x - m_c = \frac{2m_c + 2m_s tg(+)}{1+tg^2(+)} - m_c$$

$$= \frac{2m_c + 2m_s tg(+) - m_c - m_c tg^2(+)}{1+tg^2(+)}$$

$$= \frac{m_c - m_c tg^2(+) + 2m_s tg(+)}{1+tg^2(+)}$$

$y_{M_1'} = 2\cdot y - m_s$

$$= \frac{2tg(+)(\quad) - m_s - m_s tg^2(+)}{1+tg^2} = \frac{2m_c tg(+) + 2m_s tg^2(+) - m_s - m_s tg^2(+)}{1+tg^2}$$

$$= \frac{m_s tg^2(+) - m_s + 2m_c tg(+)}{1+tg^2}$$

$$M'M_1': \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \text{\_\_\_} & \text{\_\_\_} & 1 \\ m_c & -m_s & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x\cdot\underbrace{\frac{m_s tg^2-m_s+2m_c tg}{1+tg^2}}_{y_{M_1'}}+ym_c-m_s\underbrace{\frac{m_c-m_c tg^2+2m_s tg}{1+tg^2}}_{x_{M_1'}}-m_c\cdot y_{M_1'}+xm_s-y\cdot x_{M_1'}=0$$

$$y_{M_1'}(x-m_c)-x_{M_1'}(y+m_s)+ym_c+xm_s=0 \Rightarrow \cancel{x(m_s+tg+y_{M_1'})=}$$

$$xy_{M_1'}-m_c y_{M_1'}-\underbrace{y}_{x\,tg}x_{M_1'}-m_s x_{M_1'}+\overset{x\,tg}{x\,tg}+xm_s=0\rightarrow x(y_{M_1'}-x_{M_1'}tg+tg+m_s)=m_s x_{M_1'}+m_c y_{M_1'}$$

$$x\left(\frac{m_s tg^2-m_s+2m_c tg}{1+t^2}-\frac{m_c t-m_c t^3+2m_s t^2}{1+t^2}+\frac{t+t^3+m_s+t^2 m_s}{1+t^2}\right)=\frac{m_s m_c-m_s m_c t^2+2m_s^2 t+m_c m_s t^2-m_s m_s+2m_c^2 t}{1+t^2}$$

$$x\underbrace{\left(\frac{m_c t+m_c t^3+t+t^3}{1+t^2}\right.}_{\frac{m_c t(1+t^2)+t(1+t^2)}{1+t^2}}=\frac{2m_s^2 t+2m_c^2 t}{1+t^2}=\frac{2t(m_c^2+m_s^2)}{1+t^2}$$

$$x(m_c t+t)=\frac{2t(m_c^2+m_s^2)}{1+t^2}\Rightarrow x_{p'}=\frac{2(m_c^2+m_s^2)}{(1+t^2)(m_c+1)}=\frac{2m^2}{(1+t^2)(m_c+1)}$$

$$\Rightarrow y_{p'}=x\cdot t=\frac{2t(m_c^2+m_s^2)}{(1+t^2)(m_c+1)}=\frac{2t\cdot m^2}{(1+t^2)(m_c+1)}$$

si apare si cercul:

$$\text{Din } x_{p'}\Rightarrow 1+t^2=\frac{2m^2}{x(m_c+1)}\Rightarrow t^2=\frac{2m^2-x(m_c+1)}{x(m_c+1)}$$

$$y_{p'}^2=\frac{4t^2m^4}{(1+t^2)^2(m_c+1)^2}=\frac{4m^4\cdot\frac{2m^2-x(m_c+1)}{x(m_c+1)}}{\left(\frac{2m^2}{x(m_c+1)}\right)^2\cdot(m_c+1)^2}$$

$$y^2=\frac{4m^4(2m^2-x(m_c+1))}{x(m_c+1)}\cdot\frac{x^2}{4m^4}=\frac{2m^2x-x^2(m_c+1)}{m_c+1}$$

$$x^2(m_c+1)-2m^2x+y^2(m_c+1)=0$$

$$x^2-2x\frac{m^2}{m_c+1}+\frac{m^4}{(m_c+1)^2}+y^2=\left(\frac{m^2}{m_c+1}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{m^2}{m_c+1}\right)^2+y^2=R^2\Rightarrow \mathcal{C}\left(\left(\frac{m^2}{m\cos\alpha+1};0\right);\frac{m^2}{m\cos\alpha+1}\right)$$

OBS: nu pot sa nu amintesc o alta abordare a problemei, care pare naturala mai ales ca vine dupa o problema de la acelasi propunator si care intr-unul din cazuri este un caz particular al problemei de saptamâna trecuta (cazul in care A,B,C formeaza un triunghi dreptunghic)

$\mathcal{P}_{MNP} = MN + MP + NP$ este minim dacă MN minimă și $MP + NP$ minimă sau MP minimă și $MN + NP$ minimă sau fiecare cât mai mici.

1) MN minimă $\Rightarrow MN \perp Ox$ și luând M_1' simetricul lui M față de AC obținem $\{P\} = M_1'N \cap AC$ și avem $MP + PN$ minimă.

Fie p_1 perimetrul, $p_1 = MN + MP + PN = MN + NM_1'$

2) MP minimă $\Rightarrow MP_1 \perp AC$ și procedând la fel găsim $N_1 \in Ox$ a.î. $MN_1 + N_1P_1$ minimă.

Perimetrul $p_2 = MP_1 + MN_1 + N_1P_1 = MP_1 + P_1M'$

Fie x măsura unghiului variabil $\widehat{MAP}$.

Avem $MN = m\sin\alpha$; $MP_1 = m\sin x$; $NM_1'^2 = MN^2 + M_1'M^2 - 2MN \cdot M_1'N \cdot \cos\hat{M}$

$= m^2\sin^2\alpha + 4m^2\sin^2 x - 2 \cdot m\sin\alpha \cdot m\sin x \cdot \cos(\pi - (\alpha + x))$

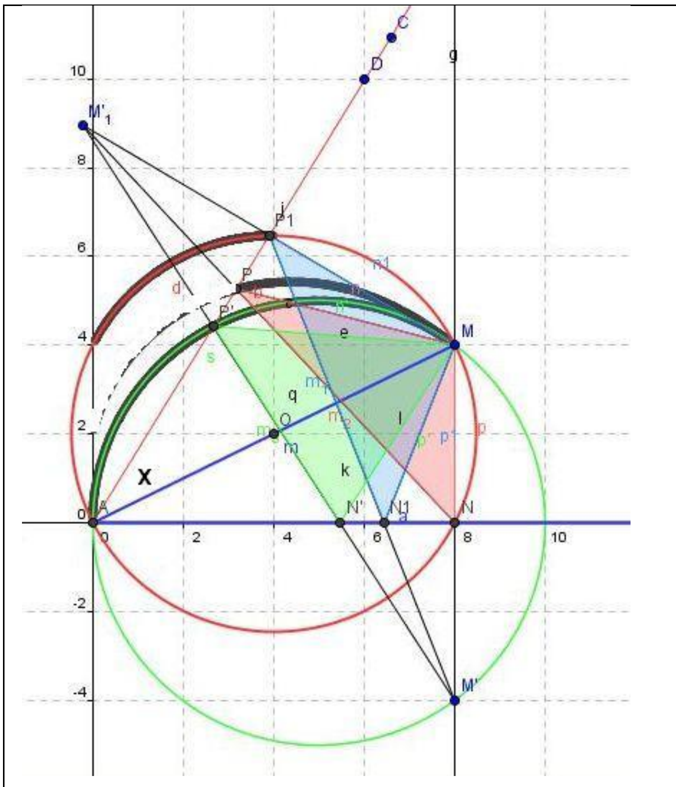
Astfel obținem $p_1 = m\sin\alpha + m\sqrt{\sin^2\alpha + 4\sin^2 x + 2\sin x \sin\alpha \cos(x+\alpha)}$

În mod asemănător obținem p_2:

$p_2 = m\sin x + m\sqrt{\sin^2 x + 4\sin^2\alpha + 2\sin x \sin\alpha \cos(x+\alpha)}$

Se observă ca $p_1 = p_2 \Rightarrow x = 0$ sau $x = \alpha$.

p1 si p2 sunt perimetrele pentru tr. rosu si resp. albastru de mai jos; tr verde este cel "bun";

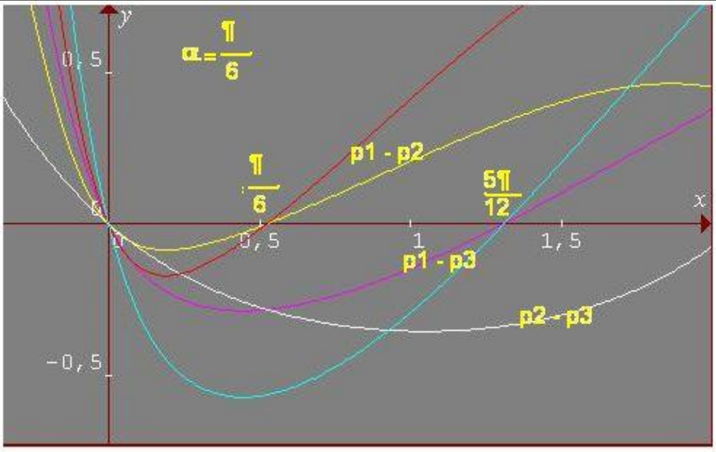


Se pune problema care are perimetru mai mic; luând o functie de x, f(x)=p1-p2 si studiind-o, vom gasi ca p1<p2 daca masura lui x este mai mica decat masura α si in acest caz locul lui P este curba neagra, o parte din cea de care aminteam mai sus, iar daca unghiul x este mai mare, atunci p2 este mai mic si locul este arcul de cerc roscat.

Mai jos sunt graficele lui

f(x)=p1-p2 , g(x)=p1-p3 si

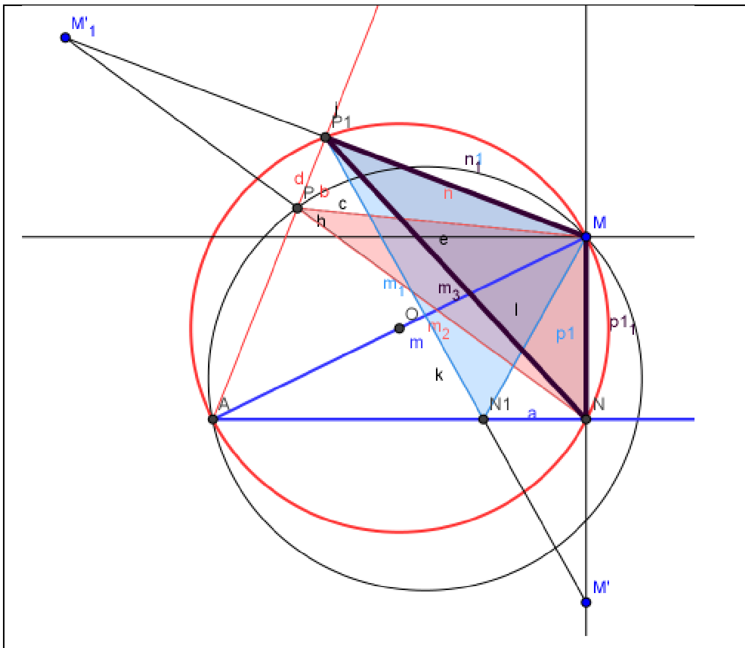
h(x)=p2-p3 pentru cateva valori ale lui m si α=30°.

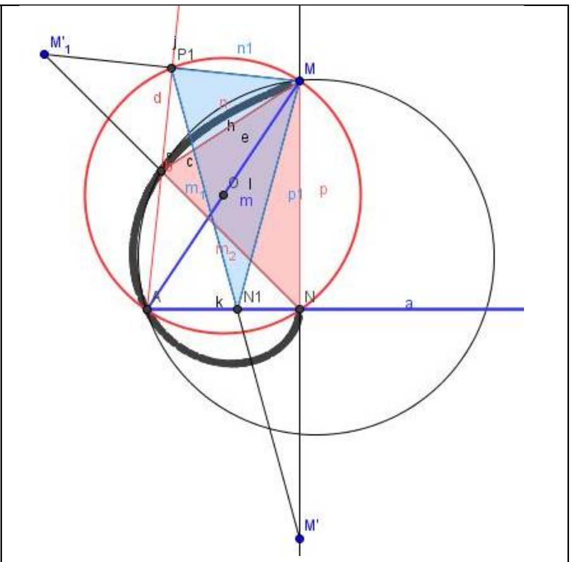


Aici p3 este perimetrul altui triunghi candidat

si anume cel format de M si proiectiile lui M pe semidreptele Ox si Oy ;

cel negru accentuat din fig de mai jos.

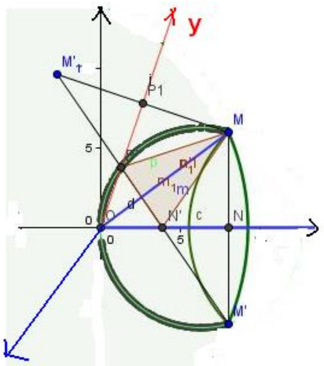




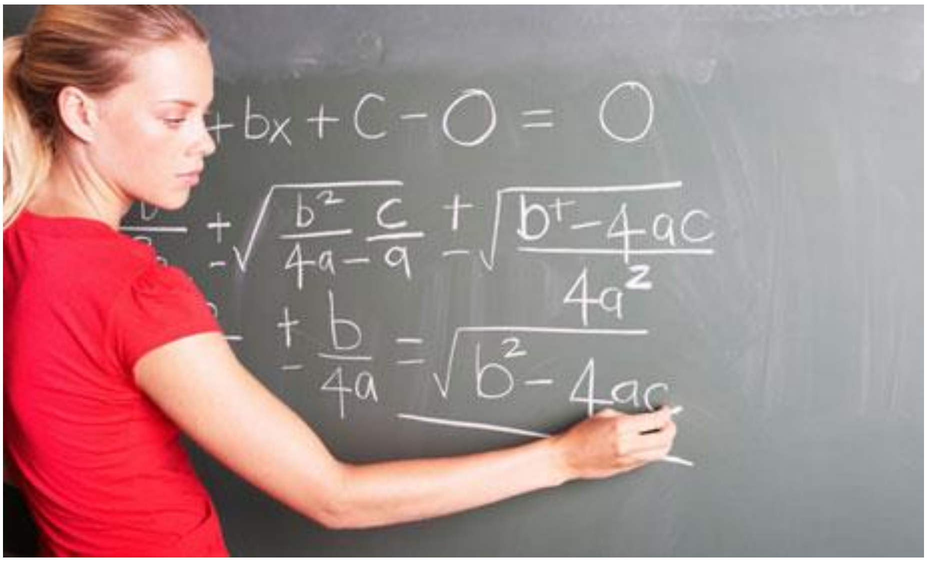
Asadar,problema in plan fiind rezolvata, cum toate elementele sunt coplanare (xOy)

variatia in spatiu a dreptei Oy va antrena cu ea rotatia planului xOy in jurul axi Ox

si deci arcul de cerc obtinut va da nastere locului cautat si anume o zonä sfericä sau o calotä sferica insa careia ii lipseste polul O



5. PROBLEMA LUNII SEPTEMBRIE 2016



Fie ΔABC **ascutitunghic.Notam cu** x_a, x_b, x_c **lungimile laturilor pătratelor înscrise în** ΔABC**. Să se arate că :** $\frac{a}{x_a}+\frac{b}{x_b}+\frac{c}{x_c}\geq\frac{2}{3}(\frac{p}{r}+\frac{5R-r}{R})\geq\frac{2p}{3r}+3\geq 2\sqrt{3}+3.$

Gheorghe Alexe și George-Florin Șerban ,clasa a IX a , profesori Brăila

Așteptăm soluțiile problemei până pe ***1 octombrie 2016*** *pe adresa de e-mail* *revista@mateinfo.ro*