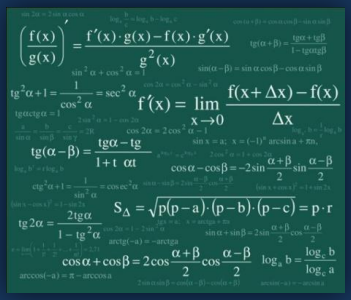
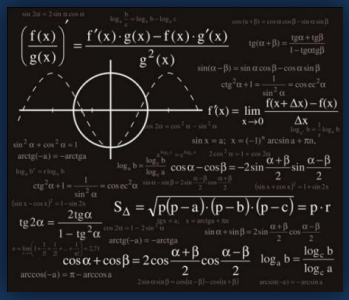
REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

ISSN 2065-6432 - OCTOMBRIE 2016

www.mateinfo.ro

REVISTĂ LUNARĂ
DIN FEBRUARIE 2009
revista@mateinfo.ro





COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ŞI SUSŢINĂTOR PERMANENŢI AI REVISTEI
NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ŞI NELA CICEU

ARTICOLE REVISTĂ:

1. IATĂ CE POT FACE MINŢILE DIBACE... PAG. 2
Mihaela Berindeanu
2. SOLUTION TO THE PROBLEM Q25 OF SCLIPIREA MINŢII, NR. 17... PAG. 6
Ioan Viorel Codreanu
3. ÎN LEGĂTURĂ CU UNELE INEGALITĂŢI DIN CRUX MATHEMATICORUM 8/1982... PAG. 7
Marin Chirciu
4. ON SOME PROBLEMS JOURNAL MATHPROBLEMS VOLUM5 ,ISSUE 4 ... PAG. 16
George Florin Şerban
5. REZOLVARE SUBIECT GRADUL DIDACTIC II , IASI 2016 ... PAG. 20
George Florin Şerban
6. MODEL CARE DESCRIE ACTIVITATEA FICATULUI UMAN... PAG.27
Oprea Elena Georgiana
7. SISTEME DINAMICE... PAG. 39
Florea Maria Luminița
8. SOLUŢII - PROBLEMA LUNII SEPTEMBRIE 2016 ... PAG. 34
Gheorghe Alexe şi George-Florin Şerban
9. PROBLEMA LUNII OCTOMBRIE 2016... PAG. 39
Manea Cosmin şi Petrica Dragoş
10. SIMULARE EVALUARE NAŢIONALĂ MATEMATICĂ OCTOMBRIE ... PAG. 40
11. SIMULARE BAC MATEMATICĂ OCTOMBRIE 2016... PAG. 42

1. IATĂ CE POT FACE MINȚILE DIBACE ... O ORĂ CU EXCELENȚII ÎN MATEMATICĂ DE CLASA A VII-A DIN BUCUREȘTI

Profesor Mihaela Berindeanu, București

Am propus elevilor de la grupa de excelență în matematică să rezolve următoarea problemă:

Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$, $m\left(BAC\right) = 20^\circ$ și se construiește triunghiul isoscel cu $BC = CD$ și $m\left(CBD\right) = 20^\circ$. Demonstrați că $AB = BC + BD$.

Olimpiada locală 2016, Județul Prahova
Autori: Silvia și Ionel Brabecianu

Elevilor mei le plac problemele „cu sclipici”, adică problemele care se rezolvă cu o idee ingenioasă, care cer intuiție și perspicacitate. Această problemă a ajuns printre favorite, conducând câteva soluții simple și originale.

Vă prezint patru dintre soluțiile care au primit cele mai bune aprecieri.

a. Soluția elevei Bach Minh-Chau (vezi Figura 1)

Se notează $BD \cap AC = \{T\}$ și se iau punctele $E \in AB$ și $F \in AC$ astfel încât $m\left(FET\right) = 100^\circ$ și $m\left(BTE\right) = 60^\circ$. Din calculul unghiurilor $\Rightarrow \triangle EBT = \text{echilateral} \Rightarrow EB \equiv ET \equiv BT$

În $\triangle BCT$, $m\left(BTC\right) = m\left(BCT\right) = 80^\circ \Rightarrow \triangle BCT =$ isoscel deci latura BC este egală cu laturile triunghiului echilateral EBT.

În $\triangle FET$, $m\left(FET\right) = 100^\circ$. Tot din calculul unghiurilor rezultă că $\triangle EFT$ este isoscel, cu $EFT \equiv ETF = 40^\circ$ și $EF \equiv ET$:

$m\left(ETF\right) = 180^\circ - m\left(AEF\right) - m\left(BET\right) - m\left(BTE\right)$

$m\left(ETF\right) = 180^\circ - 20^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 40^\circ$

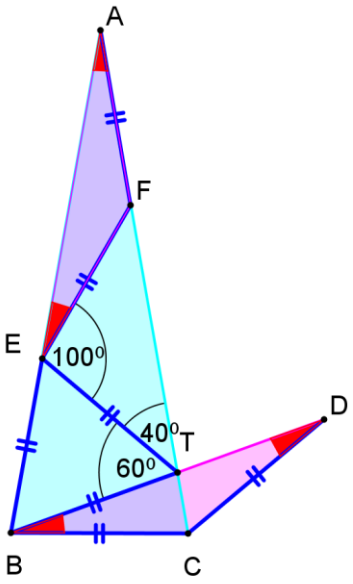


Figura 1

Un zig-zag ingenios ne-a condus la egalitatea:

$BC \equiv BT \equiv ET \equiv BE$

$\triangle AEF$, cu două unghiuri de 20° este isoscel, cu $EF \equiv AF$ din $\triangle AEF \equiv \triangle BCD$ se obține:

$AE \equiv BD \Rightarrow AB = AE + EB = BD + BC$

b. Soluția elevului Burlacu Ștefan (vezi Figura 2)

Se prelungește latura BD. Se ia în compas dimensiunea AB și se stabilește pe BD punctul $Q \in BD$ și $AB = BQ$.

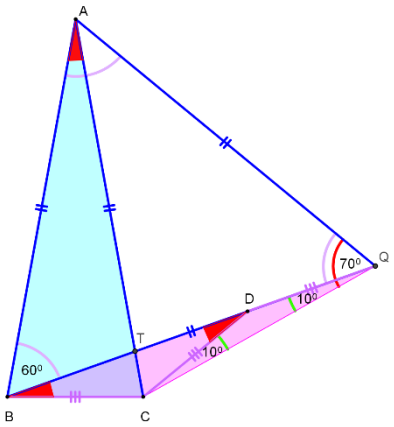


Figura 2

$m(ABC) = m(ACB) = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$

$m(ABQ) = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABQ =$ echilateral

Calculul unghiurilor de la baza triunghiului isoscel ACQ:

$m(CAQ) = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$

$m(ACQ) = m(AQC) = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$

Calculul unghiurilor DCQ și CQD:

În $\triangle ABT$, $m(BTA) = 180^\circ - 20^\circ - 60^\circ = 100^\circ \Rightarrow m(BTA) = m(CTQ) = 100^\circ$

În $\triangle CDT, m(TCD) = 180^\circ - 100^\circ - 20^\circ = 60^\circ \Rightarrow m(DCQ) = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ$

$m(CQT) = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ$ și din

$m(DCQ) = m(CQD) \Rightarrow \triangle CDQ =$ isoscel $\Rightarrow CD = DQ = BC$

Deci $BQ = BD + DQ$ sau $AB = BD + BC$

c. Soluția elevei Ichim Alexia (vezi Figura 3)

Pe semidreapta BD se alege punctul E astfel încât $BC \equiv CD \equiv DE$. Se unesc punctele A cu D și urmează să se demonstreze că $BE = AB$.

Observație: patrulaterul ABCD este inscriptibil deoarece $m(BAC) = m(BDC) = 20^\circ$ rezultă că

$m(BDA) = m(BCA) = 80^\circ \Rightarrow m(ADE) = 100^\circ$.

$\triangle ADE \equiv \triangle ADC$ pentru că $DE \equiv DC$, AD este latură comună și $m(ADE) = m(ADC) = 100^\circ$

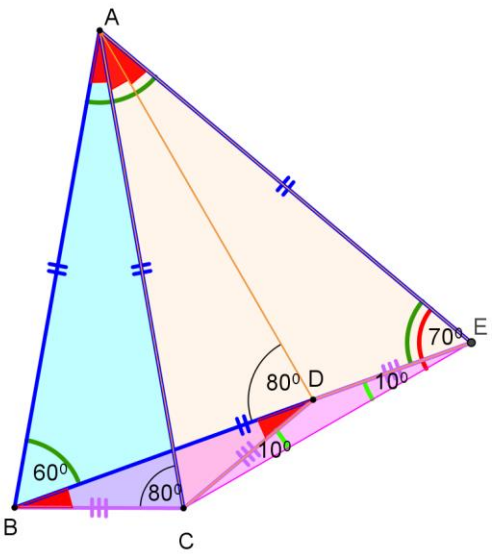


Figura 3

deci și $AE = AC = AB$.

$m\left(BAE\right) = 3 \cdot 20^\circ = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABE$ = echilateral

Deci $AB = BE = BD + DE$

d. Soluția elevului Șimon Sebastian (vezi Figura 4)

Se pleacă de la observația că $m\left(ACD\right) = 60^\circ$:

$m\left(ACD\right) = 180^\circ - m\left(BCA\right) - 2 \cdot 20^\circ = 60^\circ$

Se construiește un triunghi echilateral cu latura $AP = AB = AC$ (P = un punct pe prelungirea semidreptei CD) și se calculează apoi unghiurile triunghiului isoscel APB: $m\left(ABP\right) = \dfrac{180^\circ - m\left(BAC\right) - m\left(CAP\right)}{2}$

$m\left(ABP\right) = m\left(BPA\right) = \dfrac{180^\circ - 20^\circ - 60^\circ}{2}$

$m\left(ABP\right) = m\left(BPA\right) = \dfrac{100^\circ}{2} = 50^\circ$

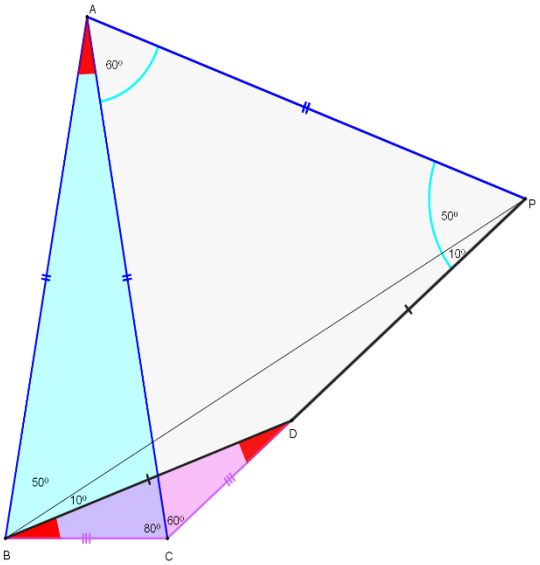


Figura 4

Se calculează mărimea unghiurilor *PBD*, *DPB*:

$m\left(PBD\right) = m\left(ABC\right) - m\left(PBA\right) - m\left(ABP\right) = 80^\circ - 20^\circ - 50^\circ = 10^\circ$

$m\left(DPB\right) = m\left(CPA\right) - m\left(BPA\right) = 60^\circ - 50^\circ = 10^\circ$

Deci $m\left(PBD\right) = m\left(DPB\right) = 10^\circ \Rightarrow \triangle ABP$ = isoscel $\Rightarrow BD = DP$, de unde :

$AB = AC = AP = CP = CD + DP$

Soluția pe care am gândit-o eu este asemănătoare (dar nu identică) cu ultimul caz prezentat (vezi Figura 5):

- Se construiește $\triangle ABM$, cu $AB = AM = BM$;
- Se duce bisectoarea unghiului *CAM*, formându-se astfel $\measuredangle CAD' = \measuredangle D'AM = 20^\circ$.

Pentru a rezolva problema, trebuie demonstrat că intersecția bisectoarei unghiului *CAM* cu *BM*, notată provizoriu cu D' ,coincide cu punctul *D* al triunghiului isoscel *BCD*.

- Demonstrez că $\triangle ACD' \equiv \triangle AMD'$
  $AM \equiv AC, AD' \equiv AD', \measuredangle CAD' \equiv \measuredangle D'AM$
  $\Rightarrow D'M \equiv D'C$

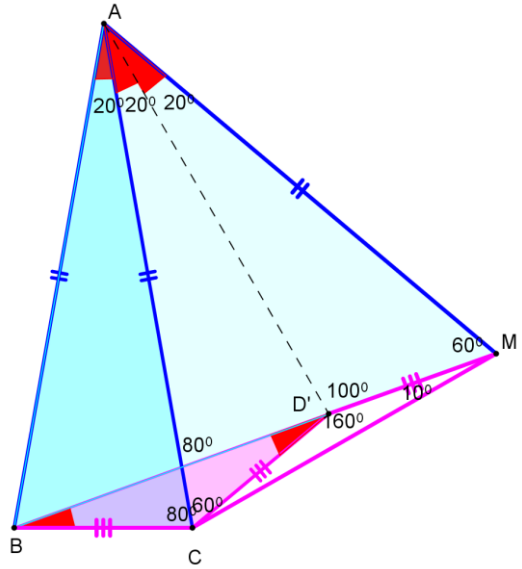


Figura 5

- Calculez unghiurile $\triangle CMD'$

  $m\left(AD'M\right)=m\left(AD'C\right)=180^\circ-20^\circ-60^\circ$

  $\Rightarrow m\left(AD'M\right)=m\left(AD'C\right)=100^\circ$

- Calculez unghiurile de la baza triunghiului isoscel CMD'

  $m\left(D'CM\right)=m\left(D'MC\right)=\frac{180^\circ-m\left(CD'M\right)}{2}=\frac{180^\circ-160^\circ}{2}=\frac{20^\circ}{2}=10^\circ$

- Calculez unghiurile ACM și CMA:

  $m\left(ACM\right)=m\left(CMA\right)=60^\circ+10^\circ=70^\circ$

- Demonstrez că D' coincide cu D:

  $m\left(BCD'\right)=80^\circ+60^\circ=140^\circ$

  $m\left(BD'C\right)=180^\circ-m\left(D'BC\right)-m\left(BCD'\right)=180^\circ-20^\circ-140^\circ=20^\circ$

  Deci $\triangle BCD'$ este isoscel, având două unghiuri egale $\Rightarrow BC=CD'$, ceea ce înseamnă că D' coincide cu D și $BM=AB=AC=BC+BD$.

Nu m-ar supăra deloc dacă vreuna dintre soluțiile gândite de elevi vi s-ar părea mai bună decât soluția mea pentru că îmi place mult acest citat din Leonardo da Vinci: „E mediocru ucenicul care nu-și depășește maestrul.”

Am convingerea că elevii din această grupă își vor depăși repede dascălii și că vor contribui la bunul renume al matematicii românești.

2. SOLUTION TO THE PROBLEM Q25 OF SCLIPIREA MINȚII, NR. 17

Profesor Ioan Viorel Codreanu, Școala Gimnazială Satulung, Maramureș

Q 25. Proposed by Titu Zvonaru, Comănești, Romania.

Prove that: if a,b,c,d **are positive real numbers such that** $a+b+c+d=1$**, then**

$$\frac{1}{a^3+3bcd}+\frac{1}{b^3+3cda}+\frac{1}{c^3+3dab}+\frac{1}{d^3+3abc}\le\frac{1}{4abcd}.$$

Solution.

Using the **AM-GM Inequality** we get

$$\sum\frac{1}{a^3+3bcd}=\sum\frac{1}{a^3+bcd+bcd+bcd}\le\sum\frac{1}{4\sqrt[4]{\left(\prod a\right)^3}}=$$

$$=\frac{1}{\prod a}\cdot\sqrt[4]{\prod a}\le\frac{1}{\prod a}\cdot\frac{\sum a}{4}=\frac{1}{4\prod a}.$$

A Generalization

Prove that: if $a_1,a_2,...,a_n$ **are positive real numbers, then**

$$\sum\frac{1}{a_1^{n-1}+(n-1)a_2a_3...a_n}\le\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n\prod_{i=1}^{n}a_i}.$$

Solution. Using the **AM-GM Inequality** we get

$$\sum\frac{1}{a_1^{n-1}+(n-1)a_2a_3...a_n}\le\sum\frac{1}{n\sqrt[n]{\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{n-1}}}=\frac{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}}{\prod_{i=1}^{n}a_i}\le\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n\prod_{i=1}^{n}a_i}.$$

3. ÎN LEGĂTURĂ CU UNELE INEGALITĂȚI DIN CRUX MATHEMATICORUM 8/1982

Marin Chirciu[1]

Articolul propune dezvoltări ale unor inegalități apărute în revista de matematica *Crux Mathematical Vol.8/1982,nr.5-6-7* **.**

1. a) "În orice triunghi are loc inegalitatea: $9+2\sum\cos B\cos C\geq 7\sum\cos A$" .

Crux Mathematicorum ,vol.8/1982 ,nr.5 **,***M. S. Klamkin,Canada*

Soluție: Folosim identitățile: $\sum\cos B\cos C=\frac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2}$ și $\sum\cos A=1+\frac{r}{R}$. Inegalitatea se scrie: $9+2\cdot\frac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2}\geq\frac{7(R+r)}{R}\Leftrightarrow 36R^2+2p^2+2r^2-8R^2\geq 28R^2+28Rr\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^2\geq 14Rr-r^2$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler: $R\geq 2r$.

b)"În orice triunghi are loc inegalitatea: $2\sum\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}\geq 3\prod\sin\frac{A}{2}$" .

Crux Mathematicorum ,vol.8/1982 ,nr.5 **,***M. S. Klamkin,Canada*

Soluție: Folosim identitățile: $\sum\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{16R^2}$ și $\prod\sin\frac{A}{2}=\frac{r}{4R}$.

Inegalitatea se scrie: $2\cdot\frac{p^2+r^2-8Rr}{16R^2}\geq 3\cdot\frac{r}{4R}\Leftrightarrow 2p^2+2r^2-16Rr\geq 12Rr\Leftrightarrow p^2\geq 14Rr-r^2$,

adevărată din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler: $R\geq 2r$.

Inegalitățile a) și b) sunt echivalente cu inegalitatea lui Gerresten: $p^2\geq 16Rr-5r^2$.

c) $n\sum\cos B\cos C\geq\frac{3n}{4}-\frac{3}{2}+\sum\cos A$, unde $0\leq n\leq\frac{2}{7}$.

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu", Pitești*

Dezvoltare, Marin Chirciu, Pitești

Soluție: Inegalitatea se scrie: $n\cdot\frac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2}\geq\frac{3n-6}{4}+1+\frac{r}{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n\cdot\frac{p^2-r^2}{4R^2}\geq n+\frac{3n-6}{4}+1+\frac{r}{R}\Leftrightarrow n\left(p^2+r^2\right)\geq(7n-2)R^2+4Rr$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și condiția $n\geq 0$. Rămâne de demonstrat că:

$n\left(16R^2-5r^2+r^2\right)\geq(7n-2)R^2+4Rr\Leftrightarrow(2-7n)R^2+(16n-4)Rr-4nr^2\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(R-2r)\left[(2-7n)R+2nr\right]\geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler: $R\geq 2r$ și condiția $2-7n\geq 0$. Pentru $n=\frac{2}{7}$ se obține a).

1. a) $\sum\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}\geq\frac{6R}{r}\geq 12$.

Crux Mathematicorum, vol.8/1982,nr.5, M. S. Klamkin,Canada

Soluție: Folosim identitatea $\sum\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{r^2}$. Prima inegalitate se scrie:

$\frac{p^2+r^2-8Rr}{r^2}\geq\frac{6R}{r}\Leftrightarrow p^2\geq 14Rr-r^2$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și din inegalitatea lui Euler: $R\geq 2r$. A doua inegalitate $\Leftrightarrow R\geq 2r$, inegalitatea lui Euler.

b) $\sum\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}\geq 12-2n+n\cdot\frac{R}{r}\geq 12$, unde $0\leq n\leq 8$.

Dezvoltare, Marin Chirciu, Pitești

Soluție: Prima inegalitate se scrie:

$\frac{p^2+r^2-8Rr}{r^2}\geq(12-2n)+\frac{nR}{r}\Leftrightarrow p^2+r^2-8Rr\geq(12-2n)r^2+nRr$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2\geq 16Rr-5r^2$. Rămâne de demonstrat că:

$16Rr-5r^2+r^2-8Rr\geq(12-2n)r^2+nRr\Leftrightarrow R(8-n)\geq r(16-2n)\Leftrightarrow(8-n)(R-2r)\geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler: $R\geq 2r$ și din condiția $8-n\geq 0$.

A doua inegalitate este echivalentă cu $-2n+n\cdot\frac{R}{r}\geq 0\Leftrightarrow n(R-2r)\geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler: $R\geq 2r$ și din condiția $n\geq 0$. Pentru $n=6$ se obține a).

2. a) $\sum\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}\geq 5-\frac{2r}{R}\geq 4$.

Soluție: Folosim identitatea $\sum\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}=1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2$. Prima inegalitate se scrie:

$1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\geq 5-\frac{2r}{R}\Leftrightarrow\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\geq 4-\frac{2r}{R}\Leftrightarrow p^2\leq\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$, inegalitatea Blundon–Gerretsen, adevărată din $H\Gamma^2=4R^2\left[1-\frac{2p^2(2R-r)}{R(4R+r)^2}\right]\geq 0$, unde Γ este punctul lui Gergonne, Γ este intersecția dreptelor AA_1,BB_1,CC_1, unde A_1,B_1,C_1 sunt punctele de tangență ale cercului înscris în ΔABC cu laturile BC,CA,AB. A doua inegalitate $\Leftrightarrow R\geq 2r$, inegalitatea lui Euler.

b) $\sum\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}\geq 4+\frac{n}{2}-\frac{nr}{R}\geq 4$, unde $0\leq n\leq 2$.

Dezvoltare, Marin Chirciu, Pitești

Soluție: Sol. 1: Prima inegalitate se scrie:

$1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\geq 4+\frac{n}{2}-\frac{nr}{R}\Leftrightarrow\frac{(4R+r)^2}{p^2}\geq 3+\frac{n}{2}-\frac{nr}{R}\Leftrightarrow p^2\leq\frac{2R(4R+r)^2}{(6+n)R-2nr}$, adevărată din inegalitatea Blundon–Gerretsen: $p^2\leq\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$. Rămâne să demonstrăm că:

$\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}\leq\frac{2R(4R+r)^2}{(n+6)R-2nr}\Leftrightarrow(n+6)R-2nr\leq 8R-4r\Leftrightarrow(2-n)(R-2r)\geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler: $R\geq 2r$ și condiția $2-n\geq 0$. Pentru $n=2$ se obține a).

A doua inegalitate $\Leftrightarrow \frac{n}{2}-\frac{nr}{R}\geq 0 \Leftrightarrow n(R-2r)\geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler: $R\geq 2r$ și condiția $n\geq 0$. Pentru $n=2$ se obține a).

Sol. 2: $p^2\leq \frac{2R(4R+r)^2}{(6+n)R-2nr}$, adevărată din inegalitatea lui Gerresen: $p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2 \overset{(1)}{\leq}$

$\overset{(1)}{\leq}\frac{2R(4R+r)^2}{(6+n)R-2nr}$, unde $(1)\Leftrightarrow 2R\left(16R^2+8Rr+r^2\right)\geq\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left[(n+6)R-2nr\right]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (8-4n)R^3+(4n-8)R^3r+(5n-16)Rr^2+6nr^3\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (R-2r)\left[(8-4n)R^2+(8-4n)Rr-3nr^2\right]\geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler: $R\geq 2r$ și condiția $8-4n\geq 0$.

3. a) $9+2\sum\sin B\sin C\geq 9\sum\cos A$.

b) $\sum\sin B\sin C\geq\frac{9r}{2R}$.

Soluție: Reformulare a).

c) $n\sum\sin B\sin C\geq\frac{9n}{4}-\frac{3}{2}+\sum\cos A$, unde $0\leq n\leq\frac{2}{9}$.

Dezvoltare, Marin Chirciu, Pitești

Soluție: Folosim identitățile: $\sum\sin B\sin C=\frac{p^2+r^2+4Rr}{4R^2}$ și $\sum\cos A=1+\frac{r}{R}$. Inegalitatea se scrie: $n\cdot\frac{p^2+r^2+4Rr}{4R^2}\geq\frac{9n-6}{4}+1+\frac{r}{R}\Leftrightarrow n\left(p^2+r^2+4Rr\right)\geq(9n-2)R^2+4Rr$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și condiția $n\geq 0$. Rămâne să demonstrăm că:

$n\left(16Rr-5r^2+r^2+4Rr\right)\geq(9n-2)R^2+4Rr\Leftrightarrow(2-9n)R^2+(20n-4)Rr-4nr^2\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (R-2r)\left[(2-9n)R+2nr\right]\geq 0$, evident, din inegalitatea lui Euler: $R\geq 2r$ și condiția $2-9n\geq 0$. Pentru $n=\frac{2}{9}$ se obține a).

4. a) $3+\sum\cos(B-C)\geq 48\prod\sin\frac{A}{2}$.

Crux Mathematicorum, vol.8/1982,nr.6, M. S. Klamkin,Canada

b) $3+\sum\cos(B-C)\geq\frac{12r}{R}$.

Soluție: Reformulare a).

c) $n+\sum\cos(B-C)\geq 8(n+3)\prod\sin\frac{A}{2}$, unde $n\geq 1$.

Dezvoltare, Marin Chirciu, Pitești

Soluție: Folosim identitățile: $\sum\cos(B-C)=\frac{p^2+r^2+2Rr}{2R^2}-1$ și $\prod\sin\frac{A}{2}=\frac{r}{4R}$. Inegalitatea se scrie: $n+\frac{p^2+r^2+2Rr}{2R^2}-1\geq 8(n+3)\cdot\frac{r}{4R}\Leftrightarrow\frac{p^2+r^2+2Rr}{2R^2}+(n-1)\geq\frac{2(n+3)r}{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^2+r^2+(n-1)\cdot 2R^2\geq(4n+10)Rr$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2\geq 16Rr-5r^2$.

Rămâne de demonstrat că: $16Rr-5r^2+r^2+(2n-2)R^2\geq(4n+10)Rr\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(n-1)R^2+(3-2n)Rr-2r^2\geq 0\Leftrightarrow(R-2r)\left[(n-1)R+r\right]\geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler: $R\geq 2r$ și condiția $n-1\geq 0$.

Obs. Pentru $n=3$ se obține punctul a).

d) $n+\sum\cos(B-C)\geq\frac{2(n+3)r}{R}$, unde $n\geq 1$.

Dezvoltare, Marin Chirciu, Pitești

Soluție: Reformulare c).

5. a) $\sum\cos^2\frac{B-C}{2}\geq 24\prod\sin\frac{A}{2}$.

Crux Mathematicorum, vol.7/1981,nr.6, George Tsintsifas,Grecia

b) $\sum\cos^2\frac{B-C}{2}\geq 1+16\prod\sin\frac{A}{2}$.

Crux Mathematicorum, vol.8/1982,nr.6, M. S. Klamkin,Canada

c) $\sum \cos^2 \frac{B-C}{2} \geq 1+16\prod \sin \frac{A}{2} \geq 24\prod \sin \frac{A}{2}$.

d) $\sum \cos^2 \frac{B-C}{2} \geq 1+16\prod \sin \frac{A}{2} \geq 24\prod \sin \frac{A}{2}$.

e) $\sum \cos^2 \frac{B-C}{2} \geq 1+\frac{4r}{R} \geq \frac{6r}{R}$.

Soluție: Reformulare c).

f) $\sum \cos^2 \frac{B-C}{2} \geq 3-\frac{n}{8}+n\prod \sin \frac{A}{2} \geq 24\prod \sin \frac{A}{2}$, unde $16 \leq n \leq 24$.

Dezvoltare, Marin Chirciu, Pitești

Soluție: Folosim identitățile: $\sum \cos^2 \frac{B-C}{2} = 1+\frac{p^2+r^2+2Rr}{R^2}$ și $\prod \sin \frac{A}{2} = \frac{r}{4R}$.

Prima inegalitate se scrie:

$1+\frac{p^2+r^2+2Rr}{R^2} \geq 3-\frac{n}{8}+n\cdot\frac{r}{4R} \Leftrightarrow 2\left(p^2+r^2+2Rr\right) \geq (16-n)R^2+2nRr$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2 \geq 16Rr-5r^2$. Rămâne să demonstrăm că:

$2\left(16Rr-5r^2+r^2+2Rr\right) \geq (16-n)R^2+2nRr \Leftrightarrow (n-16)R^2+2(18-n)Rr-8r^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (R-2r)\left[(n-16)R+4r\right] \geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler: $R \geq 2r$ și condiția $n-16 \geq 0$.

A doua inegalitate se scrie:

$3-\frac{n}{8}+n\cdot\frac{r}{4R} \geq 24\cdot\frac{r}{4R} \Leftrightarrow (24-n)R \geq (48-2n)r \Leftrightarrow (24-n)(R-2r) \geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler: $R \geq 2r$ și condiția $24-n \geq 0$. Pentru $n=16$ se obține punctul a_3).

g) $\sum \cos^2 \frac{B-C}{2} \geq \sum \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{A-C}{2} \geq 3\prod \cos \frac{B-C}{2} \geq 24\prod \sin \frac{A}{2}$.

Crux Mathematicorum, vol.8/1982,nr.6, Jack Garfunkel,NY,USA

Soluție:

Prima inegalitate rezultă din $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$, unde $x=\cos\frac{B-C}{2}$ etc.

A doua inegalitate este echivalentă cu $\sum \frac{1}{\cos\frac{B-C}{2}} \geq 3$, evidentă din $\cos\frac{B-C}{2} \leq 1$.

A treia inegalitate este echivalentă cu $\prod \cos\frac{B-C}{2} \geq 8\prod \sin\frac{A}{2}$.

Folosim identitățile: $\prod \cos\frac{B-C}{2} = \frac{p^2+r^2+2Rr}{8R^2}$ și $\prod \sin\frac{A}{2} = \frac{r}{4R}$. Inegalitatea se scrie $\frac{p^2+r^2+2Rr}{8R^2} \geq 8\cdot\frac{r}{4R} \Leftrightarrow p^2+r^2+2Rr \geq 16Rr \Leftrightarrow p^2 \geq 14Rr-r^2$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2 \geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

h) $\sum \cos^2\frac{B-C}{2} \geq 3-\frac{n}{8}+\frac{nr}{4R} \geq \frac{6r}{R}$, unde $16 \leq n \leq 24$.

Dezvoltare, Marin Chirciu, Pitești

Soluție: Reformulare c).

6. a) $\frac{4}{9}\sum \sin B\sin C \leq \prod \cos\frac{B-C}{2} \leq \frac{2}{3}\sum \cos A$.

Crux Mathematicorum, vol.8/1982,nr.7, Jack Garfunkel,NY,USA and George Tsintsifas,Greece

b) $-\frac{9n}{4}+1+n\cdot\sum \sin B\sin C \leq \prod \cos\frac{B-C}{2} \leq \frac{4-9n}{4}+\frac{3n}{2}\cdot\sum \cos A$, unde $\frac{4}{9} \leq n \leq \frac{1}{2}$.

Dezvoltare, Marin Chirciu, Pitești

Soluție: Folosim identitățile: $\sum \sin B \sin C = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2}$; $\prod \cos \frac{B-C}{2} = \frac{p^2 + r^2 + 2Rr}{8R^2}$ și $\sum \cos A = 1 + \frac{r}{R}$.

Prima inegalitate se scrie $\frac{4-9n}{4} + n \cdot \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2} \le \frac{p^2 + r^2 + 2Rr}{8R^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^2(1-2n) + r^2 + 2Rr \ge (8-18n)R^2 + 2n(r^2 + 4Rr)$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2 \ge 16Rr - 5r^2$ și condiția $1-2n \ge 0$. Rămâne să demonstrăn că:

$\left(16Rr - 5r^2\right)(1-2n) + r^2 + 2Rr \ge (8-18n)R^2 + 2n(r^2 + 4Rr) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (9n-4)R^2 + (9-20n)Rr + (4n-2)r^2 \ge 0 \Leftrightarrow (R-2r)\left[(9n-4)R + (1-2n)r\right] \ge 0$, evident din inegalitatea lui Euler: $R \ge 2r$ și condițiile: $9n-4 \ge 0$ și $(9n-4)R + (1-2n)r \ge$

$\ge 2(9n-4)r + (1-2n)r = r\left(18n - 8 + 1 - 2n\right) = r\left(16n - 7\right) > 0$, adevărată din $n \ge \frac{4}{9} > \frac{7}{16}$.

A doua inegalitate se scrie: $\frac{p^2 + r^2 + 2Rr}{8R^2} \le 1 - \frac{9n}{4} + \frac{3n}{2}\left(1 + \frac{r}{R}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^2 + r^2 + 2Rr \le (8-6n)R^2 + 12nRr$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ și condiția $1-2n \ge 0$. Rămâne să demonstrăn că:

$4R^2 + 4Rr + 3r^2 + r^2 + 2Rr \ge (8-6n)R^2 + 12nRr \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2-3n)R^2 + (6n-3)Rr - 2r^2 \ge 0 \Leftrightarrow (R-2r)\left[(2-3n)R + r\right] \ge 0$, evident din inegalitatea lui Euler: $R \ge 2r$ și condiția $2-3n \ge 0$. Pentru $n = \frac{4}{9}$ se obține punctul a).

La fiecare din inegalitățile de mai sus egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Dubla inegalitate a lui Gerresten: $16Rr - 5r^2 \le p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ este adevărată din $IG^2 = \frac{1}{9}\left(p^2 + 5r^2 - 16Rr\right) \ge 0$ și $IH^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2 \ge 0$.

Inegalitatea lui Euler: $R \ge 2r$ este adevărată din $IO^2 = R\left(R - 2r\right) \ge 0$.

Bibliografie:

1. M.S.Klamkin,JackGarfunkel,GeorgeTsinsifas,Crux Mathematicorum Vol.8/1982, nr.6,7,8 published by the Canadian Mathematical Society.

2. O.Bottema,R.Z.Djordjevic,R.R.Janic,D.S.Mitrinovic,P.M.Vasic,Geometric Inequalities, Groningen 1969, The Netherlands.
3. Marin Chirciu, Inegalități geometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2015.
4. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.

4. On some problems Journal Mathproblems Volume 5 , Issue 4

By George-Florin Serban , Pedagogical High School ''D.P.Perpessicius'' , Braila , Romania

Magazine Mathproblems, Volume 5, **Issue 4 (2015)** was appeared the following problems:

142. Proposed by D.M. Bˇatinetu-Giurgiu,"Matei Basarab" National College, Bucharest, Romania, and Neculai Stanciu,"George Emil Palade" School, Buzˇau, Romania.

Let $(a_n)_{n\geq 1}$ such that $a_1=1$ and $a_{n+1}=(n+1)!a_n,\ \forall n\in N^*$. Let $(b_n)_{n\geq 1}$ such that $b_n>0,$ $\forall n\in N^*$ and $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{n!}=b>0$. Compute $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[2n]{b_n}}{\sqrt[n^2]{a_n}}$.

Solved by Profesor : George-Florin Serban , Pedagogical High School , Braila , Romania.

Solution: $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[2n]{b_n}}{\sqrt[n^2]{a_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[2n]{\frac{b_n}{n!}}\cdot\sqrt[2n]{n!}}{\sqrt[n^2]{a_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[2n]{n!}}{\sqrt[n^2]{a_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n^2]{\frac{n!^n}{a_n{}^2}}.$ because $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{b_n}{n!}}=b^0=1,$

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n^2]{\frac{n!^n}{a_n{}^2}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\frac{n!^n}{a_n{}^2}}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{c_n}=e^{\ln\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{c_n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln c_n}{n^2}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln c_{n+1}-\ln c_n}{(n+1)^2-n^2}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln c_{n+1}-\ln c_n}{2n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln c_{n+2}-\ln c_{n+1})-(\ln c_{n+1}-\ln c_n)}{(2n+3)-(2n+1)}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln c_{n+2}-2\ln c_{n+1}+\ln c_n}{2}},$$

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln c_{n+2}-2\ln c_{n+1}+\ln c_n}{2}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln c_{n+2}c_n-\ln c^2_{n+1}}{2}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\ln\frac{c_{n+2}c_n}{c^2_{n+1}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt{\frac{c_{n+2}c_n}{c^2_{n+1}}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{c_{n+2}c_n}{c^2_{n+1}}},\quad\textbf{(Cesaro-Stolz)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\frac{n!^n}{a_n{}^2}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{((n+2)!)^{n+2}n!^n\,a^4_{n+1}}{a_{n+2}{}^2a_n{}^2((n+1)!)^{2n+2}}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^{n+2}(n+2)^{n+2}n!^n((n+1)!)^4a^4_n}{((n+2)!)^2a_{n+1}{}^2a_n{}^2((n+1)!)^{2n+2}}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\frac{n!^n}{a_n{}^2}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^{n+2}n!^n\,a^2_n}{((n+2)!)^2((n+1)!)^2a^2_n((n+1)!)^{n-4}}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^{n+2}n!^n}{((n+1)!)^2(n+2)^2((n+1)!)^{n-2}}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\frac{n!^n}{a_n^{\,2}}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^{n+2}n!^n}{(n!)^2(n+1)^2(n+2)^2((n)!)^{n-2}(n+1)^{n-2}}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^n}{(n+1)^n}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}(\frac{n+2}{n+1})^n},$$

$$\sqrt{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n}=\sqrt{\{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\}^{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}}}=\sqrt{e},$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n^2]{\frac{n!^n}{a_n^{\,2}}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\frac{n!^n}{a_n^{\,2}}}}=\sqrt{\sqrt{e}}=\sqrt[4]{e}.$$

143. Proposed by Florin Stanescu , Serban Cioculescu school city Gaesti , jud Dambovita , Romania .

We consider $A,B\in M_2(R)$ two matrices, at least one of which is not invertible.

If $A^2+AB+B^2=2BA,$ prove that $AB=BA=O_2.$

Solved by Profesor : George-Florin Serban , Pedagogical High School , Braila , Romania.

Look like $\det(A+B)=\det A+\det B,\Leftrightarrow Tr(AB)=TrA\cdot TrB.$

$$A^2-(TrA)A+(\det A)I_2=O_2,\ \ Tr(A^2)-Tr((TrA)A)+Tr((\det A)I_2)=Tr(O_2),$$

$$Tr(A^2)-(TrA)^2+2\det A=0,\ \det A=\frac{(TrA)^2-Tr(A^2)}{2},$$

$$\det(A+B)-\det A-\det B=\frac{(Tr(A+B))^2-Tr((A+B)^2)}{2}-\frac{(TrA)^2-Tr(A^2)}{2}-\frac{(TrB)^2-Tr(B^2)}{2},$$

$$\det(A+B)-\det A-\det B=\frac{(TrA)^2+2TrATrB+(TrB)^2-TrA^2-TrAB-TrBA-TrB^2-(TrA)^2+TrA^2-(TrB)^2+TrB^2}{2}$$

$$\det(A+B)-\det A-\det B=(TrA)\cdot(TrB)-Tr(AB),\quad \det(A+B)=\det A+\det B,\Leftrightarrow Tr(AB)=TrA\cdot TrB.$$

i) If $\det A=\det B=0,\quad A^2+AB+B^2=2BA,\quad A^2+AB+B^2+BA=2BA+BA,$

$(A+B)^2=3BA,\quad \det(A+B)^2=\det 3BA,\quad (\det(A+B))^2=9\det B\det A=0,\quad \det(A+B)=0,$

$\det(A+B)=\det A+\det B, 0=0+0,$ **then** $Tr(AB)=TrA\cdot TrB$ **,** $A^2+AB+B^2=2BA,$

$TrA^2+TrAB+TrB^2=2TrBA,\quad TrA^2+TrB^2=2TrBA-TrAB=2TrAB-TrAB=trAB,$

$TrA^2+TrB^2=TrAB,\quad \det A=\frac{(TrA)^2-Tr(A^2)}{2}=0,\quad (TrA)^2=Tr(A^2),\quad \det B=\frac{(TrB)^2-Tr(B^2)}{2}=0,$

$(TrB)^2=Tr(B^2),$ **then** $(TrA)^2+(TrB)^2=(TrA)\cdot(TrB).$ **If** $TrA\neq 0, TrB\neq 0,$ **divided by** $(TrA)\cdot(TrB)$

$\frac{TrA}{TrB}+\frac{TrB}{TrA}=1,\quad \frac{TrA}{TrB}=t,\quad t+\frac{1}{t}=1,\quad t^2-t+1=0,\quad \Delta=-3<0$ equation has no real solutions , false ,

Then $TrA=TrB=0,\ A^2-(TrA)A+(\det A)I_2=O_2,\quad A^2=O_2,\quad B^2-(TrB)B+(\det B)I_2=O_2,$

$B^2=O_2,\quad trA=\det A=0$ **then** $A=\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}, b\neq 0,\quad trB=\det B=0$ **then** $A=\begin{pmatrix} x & y \\ \frac{-x^2}{y} & -x \end{pmatrix}, y\neq 0,$

$AB=\begin{pmatrix} ax-\frac{bx^2}{y} & ay-bx \\ \frac{-a^2x}{b}+\frac{ax^2}{y} & \frac{-a^2y}{b}+ax \end{pmatrix},\quad TrAB=(TrA)\cdot(TrB)=0,\quad TrAB=ax-\frac{bx^2}{y}+\frac{-a^2y}{b}+ax.$

$TrAB=ax-\frac{bx^2}{y}+\frac{-a^2y}{b}+ax=\frac{axy-bx^2}{y}+\frac{-a^2y+abx}{b}=\frac{bx(ay-bx)-ay(ay-bx)}{by}=0.$

$TrAB=\frac{(ay-bx)(bx-ay)}{by}=\frac{-(ay-bx)^2}{by}=0,$ **then** $ay=bx.$

$AB=\begin{pmatrix} ax-\frac{bx^2}{y} & ay-bx \\ \frac{-a^2x}{b}+\frac{ax^2}{y} & \frac{-a^2y}{b}+ax \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{x(ay-bx)}{y} & 0 \\ \frac{ax(-ay+bx)}{by} & \frac{a(-ay+bx)}{b} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O_2,$

$A^2+AB+B^2=2BA,\qquad O_2+O_2+O_2=2BA,\quad O_2=BA,$ **then** $AB=BA=O_2.$

If $b=y=0,$ **then** $a=x=0,$ **then** $A=B=O_2,$ **then** $AB=BA=O_2.$

If $b=0$ **and** $y\neq 0$ **, then** $A=O_2$, **then** $AB=BA=O_2$.

If $y=0$ **and** $b\neq 0$ **then** $B=O_2$, **then** $AB=BA=O_2$.

ii) If $\det A=0$ **and** $\det B\neq 0,\quad A^2+AB+B^2=2BA,\quad A^2+AB=2BA-B^2,\quad A(A+B)=B(2A-B),$

$\det A(A+B)=\det B(2A-B),\quad (\det A)\cdot(\det(A+B))=(\det B)(\det(2A-B))=0,$ then $\det(2\,\mathrm{A}-\mathrm{B})=0,$

$\det(2\,\mathrm{A}-\mathrm{B})=0=\det 2(A-\frac{1}{2}\mathrm{B})=4\det(A-\frac{1}{2}\mathrm{B}),$ then $\det(A-\frac{1}{2}\mathrm{B})=0,$

$\det(A+xB)=x^2\det B+ax+\det A,\quad \det(A+B)=\det B+a+\det A,\quad 0=\det B+a+0,\quad a=-\det B,$

$\det(A+xB)=x^2\det B-(\det B)x,\quad \det(A-\frac{1}{2}\mathrm{B})=0,=\frac{1}{4}\det B+\frac{1}{2}\det B=\frac{3}{4}\det B=0,$ then $\det B=0,$

false .

iii) If $\det\mathrm{B}=0$ **and** $\det\mathrm{A}\neq 0,\quad A^2+AB+B^2=2BA,\quad AB+B^2=2BA-A^2,\quad (A+B)\cdot B=(2B-A)\cdot\mathrm{A},$

$\det((A+B)\cdot B)=\det((2B-A)\cdot\mathrm{A}),\quad \det(A+B)\cdot\det B=\det(2B-A)\cdot\det A=0,$ then $\det(2B-A)=0,$

Then $\det(\mathrm{A}-2B)=0,\quad \det(A+xB)=x^2\det B+ax+\det A,\quad \det(A+B)=\det B+a+\det A,$ then

$0=0+a+\det A,\quad a=-\det\mathrm{A},\quad \det(A+xB)=-(\det\mathrm{A})x,\quad \det(\mathrm{A}-2B)=0,$

$\det(\mathrm{A}-2B)=0=2\det A,$ then $\det A=0,$ false . So $\det A=\det B=0.$

5. REZOLVARE SUBIECT GRADUL DIDACTIC II , IASI 2016

Profesor George-Florin Serban ,Liceul Pedagogic "D.P.Perpessicius",Braila

1)Elaborati un proiect didactic pentru lectia de predare "Ecuatii ale dreptei in plan"(clasa a X-a , Geometrie),prezentand :
-Ecuatia determinate de un punct si o panta , ecuatia determinata de doua puncte , ecuatiile parametrice , ecuatia generala (cu justificarea lor).
-Rezolvati si comentati din punct de vedere metodic exercitiul :
Sa se determine multimea punctelor M din plan cu proprietatea ca exista $t \in R$, astfel incat
$\overrightarrow{OM} = (4-t)\vec{i} + (3t-2)\vec{j}$, unde $R = \{o, \vec{i}, \vec{j}\}$ este un reper cartezian .
2)Exemplificati fundamentarea cunostintelor de divizibilitate , prin rezolvarea urmatorului exercitiu: Daca $n \in N$, atunci aratati ca $3n^2 - 1$ nu se divide cu 3 nici cu 5 si nici cu 7 .
3)Se considera functia $f : (0, \infty) \to R$, $f(x) = \ln x - \dfrac{2(x-1)}{x+1}$.
a)Sa se traseze graficul si sa se determine punctele de pe grafic in care tangenta este paralela cu dreapta de ecuatie $9y = 2x$.
b)Elaborati un barem de notare pentru punctul a) .

1)Proiect didactic

Data: ….., Clasa –a X-a ,Obiectul-Matematica,Titlul lectiei : Ecuatii carteziene ale dreptei in plan determinate de un punct si de o directie data si ale dreptei determinata de doua puncte distincte .Scopuri – Informativ: dobandirea cunostiintelor despre ecuatia unei drepte in plan determinata de anumite elemente. - Formativ: formarea deprinderilor de a determina ecuatia unei drepte, de a utiliza in mod eficient in probleme ecuatia unei drepte.
Continutul lectiei:

1. Prezentarea ecuatiei generale a unei drepte.

2. Prezentarea notiunii de panta a unei drepte.

3. Prezentarea ecuatiei unei dreptei in plan determinate de un punct si de o directie data si a dreptei determinata de doua puncte distincte .

4. Aplicatii.

Obiective operationale:

a. Identificarea situatiilor in care se aplica ecuatia unei drepte determinate de diferite elemente.

b. Identificarea elementelor unei drepte si utilizarea lor in probleme.

c. Aplicarea adecvata a formulei unei drepte.

d. Imbinarea metodelor de rezolvare a diverselor probleme.

Tipul lectiei : de dobandire de noi cunostiinte.

Strategii didactice: deductiva, algoritmica, dirijata sau semidirijata.

Metode de invatamant:

1. Metode de comunicare: -expunerea

-explicatia

-comunicarea

2. Metode de descoperire: -observatia

-demonstratia

3. Metode de actiune: -exercitiul.

Mijloace de evaluare: chestionare orala, fise de lucru.

Organizarea elevilor : frontala.

Desfasurarea metodica a lectiei

1. Moment organizatoric

-consemnarea prezentei elevilor

-verificarea aspectului general al clasei, existenta buretelui, a cretei

2. Verificarea temei

-profesorul verifica tema pentru acasa

-elevii vor preciza daca sunt exercitii neefectuate, iar acestea vor fi lucrate la tabla

3. Desfasurarea lectiei

Profesorul anunta tema lectiei „Ecuatii carteziene ale dreptei in plan" si obiectivele lectiei.Dupa ce elevii au invatat despre coordonatele unui punct intr-un reper cartezian si formula distantei dintre doua puncte vor invata despre ecuatia unei drepte intr-un reper cartezian. Profesorul anunta obiectivele lectiei si principalele momente ale lectiei.

Dreapta definita prin punct ,si vector director

Fie reperul cartezian ortonormat $R=\{o,\vec{i},\vec{j}\}$ in plan.Fie d o dreapta in plan care are un vector director $\vec{d}=p\vec{i}+q\vec{j},\vec{d}\neq\vec{o}$. Fie un punct fixat $M_0(x_0,y_0)\in d$ si un punct variabil $M(x,y)\in d$.

Fie $\overrightarrow{r_M},\overrightarrow{r_{M_0}}$ vectorii de pozitie ai punctelor M,M_0.

-Ecuatia vectoriala a dreptei d este $d:\overrightarrow{r_M}=\overrightarrow{r_{M_0}}+\lambda\vec{d},\lambda\in R$.

Teorema: Ecuatia carteziana a dreptei d in raport cu reperul $R=\{o,\vec{i},\vec{j}\}$ este :

Demonstratie: Ecuatia vectoriala a dreptei d este $d:\overrightarrow{r_M}=\overrightarrow{r_{M_0}}+\lambda\vec{d},\lambda\in R$.

$x\vec{i}+y\vec{j}=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+\lambda(x\vec{i}+y\vec{j})$. Deoarece versorii $\vec{i},\vec{j}$ sunt liniar independenti , avem

$\begin{cases}x=x_0+\lambda p\\ y=y_0+\lambda q.\end{cases}$ Acestea sunt ecuatiile parametrice ale dreptei d .Eliminand λ intre cele doua ecuatii , avem : $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}$. Daca unul din numerele p sau q este 0 atunci nu se poate imparti prin el .Daca $p=0$, atunci $x=x_0$. Aceasta este ecuatia unei drepte paralele cu axa oy.

Analog $y=y_0$ este ecuatia unei drepte paralele cu axa ox.

Daca $p\neq 0$, ecuatia dreptei d se poate scrie : $y-y_0=\frac{q}{p}(x-x_0)$. Daca notam $m=\frac{q}{p}$, ecuatia devine $y-y_0=m(x-x_0)$, unde m se numeste panta dreptei d , $m=tg\alpha$, $\alpha=m(d,ox)$

.Am obtinut : Teorema (Ecuatia unei drepte determinate de un punct dat si o directie data)

Fie un punct fixat $M_0(x_0, y_0) \in d$ si d o dreapta de panta m , atunci dreapta d are ecuatia

$d: y - y_0 = m(\mathrm{x} - x_0).$

Dreapta definite prin doua puncte distincte :

Fie dreapta d in planul xoy , raportata la reperul ortonormat $R = \{\mathrm{o}, \vec{i}, \vec{j}\}$. Se considera pe dreapta d punctele distinct fixate $M_1(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1), M_2(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$ si punctual variabil $M(x, y)$.

Ecuatia vectoriala a dreptei d este $d: \overrightarrow{r_M} = \overrightarrow{r_{M_1}} + \alpha(\overrightarrow{r_{M_2}} - \overrightarrow{r_{M_1}})$.

Teorema:(Ecuatia carteziana a dreptei d)(Ecuatia dreptei care trece prin doua puncte distincte)

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Demonstratie: Ecuatia vectoriala a dreptei se expliciteaza astfel :

$x\vec{i} + y\vec{j} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + \alpha(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} - x_1\vec{i} - y_1\vec{j}), \begin{cases} x = x_1 + \alpha(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \alpha(\mathrm{y}_2 - y_1) \end{cases}$, eliminam pe α din cele doua ecuatii si obtinem $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Daca $x_2 - x_1 = 0$, atunci ecuatia dreptei este $x = x_1$ si reprezinta o dreapta paralela cu axa oy , iar daca $y_2 - y_1 = 0$, atunci ecuatia dreptei este $y = y_1$ si reprezinta o dreapta paralela cu axa ox. Daca $x_2 - x_1 \neq 0$, atunci ecuatia dreptei este

$d: y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(\mathrm{x} - x_1)$ si atunci panta dreptei d este $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Ecuatia generala a dreptei

Ecuatia generala a dreptei in plan este d: ax+by+c=0, unde a≠0 sau b≠0. Daca b=0 atunci dreapta are ecuatia de forma d: x=p si este paralela cu Oy, iar daca a=0 atunci dreapta are ecuatia de forma d: y=p si este paralela cu Ox.

Ecuatia carteziana explicita a dreptei

Daca b≠0, adica d nu are aceeasi directie cu Oy, atunci ecuatia dreptei este echivalenta cu y= $-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$, de unde daca notam m= $-\frac{a}{b}$ si n= $-\frac{c}{b}$ obtinem ecuatia y=mx+n. Reciproc, m si n fiind numere reale date, ecuatia y=mx+n este ecuatia unei drepte care nu are aceeasi directie cu Oy.

Vom numi ecuatia y=mx+n ecuatia carteziana explicita a dreptei in plan.

Daca dreapta d are ecuatia y=mx+n, atunci:

-m se numeste panta dreptei d sau coeficientul unghiular al dreptei d.

-n se numeste ordonata la origine a dreptei d.

Fixarea cunostintelor: Exercitii:

1)Sa se scrie ecuatia dreptei care trece prin punctele $A(1,1), B(2,2)$.

$AB:\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}, AB:\frac{x-2}{2-1}=\frac{y-2}{2-1}, AB: \mathrm{y}=\mathrm{x},$ am aplicat ecuatia dreptei care trece prin doua puncte distinct.

2)Scrieti ecuatia dreptei d care trece prin punctul $A(1,-1)$ si face un unghi de 60^0 cu axa ox.

Aplic ecuatia dreptei care trece printr-un punct si are o directive data .

$d: y-y_0=m(\mathrm{x}-x_0), \mathrm{m}=\mathrm{tg}\,60^0=\sqrt{3},\ d: y+1=\sqrt{3}(\mathrm{x}-1), d: y=\sqrt{3}\,\mathrm{x}-\sqrt{3}-1.$

Exercitiu :Sa se determine multimea punctelor M din plan cu proprietatea ca exista $t\in R$, astfel incat $\overrightarrow{OM}=(4-t)\vec{i}+(3t-2)\vec{j}$, unde $R=\{\mathrm{o},\vec{i},\vec{j}\}$ este un reper cartezian.
$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}=(4-t)\vec{i}+(3t-2)\vec{j}, \mathrm{M(x,y)},$ Deoarece versorii $\vec{i},\vec{j}$ sunt liniar independenti , avem
$\begin{cases}x=4-t\\ y=3t-2.\end{cases}$ reprezinta ecuatiile parametrice ale dreptei . Eliminam pe t din cele doua ecuatii , inmultind prima ecuatie cu 3 si o adunam cu a doua ecuatie . Obtinem dreapta d de ecuatie
$d: 3x+y=10.$ In concluzie punctele M sunt situate pe aceasta dreapta d.
2) Daca $(3n^2-1)\vdots 3,$ dar $3n^2\vdots 3,$ rezulta $-1\vdots 3,$ fals deci $3\nmid(3n^2-1).$

Daca $(3n^2-1)\vdots 5, u(3n^2-1)\in\{0,5\}, u(n^2)\in\{2,7\}$, fals deoarece un patrat perfect nu poate avea ultima cifra 2,3,7,8 deci $5\backslash(3n^2-1)$.

$M^2{}_7=M_7,(M_7+1)^2=M_7+1,(M_7+2)^2=M_7+4,(M_7+3)^2=M_7+2,(M_7+4)^2=M_7+2,$

$(M_7+5)^2=M_7+4,(M_7+6)^2=M_7+1.$ Deci $n^2\in M_7,M_7+1,M_7+2,M_7+4,$

$3n^2\in M_7,M_7+3,M_7+6,M_7+5,\ 3n^2-1\in M_7-1,M_7+2,M_7+5,M_7+4,$ deci $7\backslash(3n^2-1)$.

3)a) $f:(0,\infty)\to R, f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}.$ Calculez derivata functiei f .

$f^{|}(x)=\frac{1}{x}-\frac{2(x+1-x+1)}{(x+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-4x}{x(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\geq 0,(\forall)x\in(0,\infty), f^{|}(x)=0\leftrightarrow x=1.$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}[\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}]=\infty,\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}[\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}]=-\infty.$ Functia f este crescatoare pe $(0,\infty)$, deoarece $f^{|}(x)\geq 0.$ Functia f are asimptota verticala la dreapta in x=0 deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)=-\infty.$ Functia f nu are asimptota orizontala la ∞ deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty.$ Studiem daca are asimptota oblica la ∞. Calculez

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}[\frac{\ln x}{x}-\frac{2(x-1)}{x(x+1)}]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(x-1)}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-0=0-0=0,$ am aplicat regula lui L.H , deci f nu are asimptota oblica . Facem tabelul de variatie a functiei f .

x	0 1 ∞
$f^{|}(x)$	+ + + + + + + + + + + + + 0 + + + + + + + + + + + + +

$\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}=\frac{2}{9},$

$2x^3+4x^2+2x=9x^2-18x+9, 2x^3-5x^2+20x-9=0, 2x^3-x^2-4x^2+2x+18x-9=0,$

$x^2(2x-1)-2x(2x-1)+9(2x-1)=0, (2x-1)(x^2-2x+9)=0,\ x^2-2x+9=0, \Delta=-32<0,$ ecuatia nu are solutii reale . Daca $2x-1=0, x=\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2})=\ln\frac{1}{2}+\frac{2}{3}, M(\frac{1}{2}, \ln\frac{1}{2}+\frac{2}{3}).$

b) Calculul derivatei si monotonia functiei 20 p

Studiul asimptotelor functiei 10 p

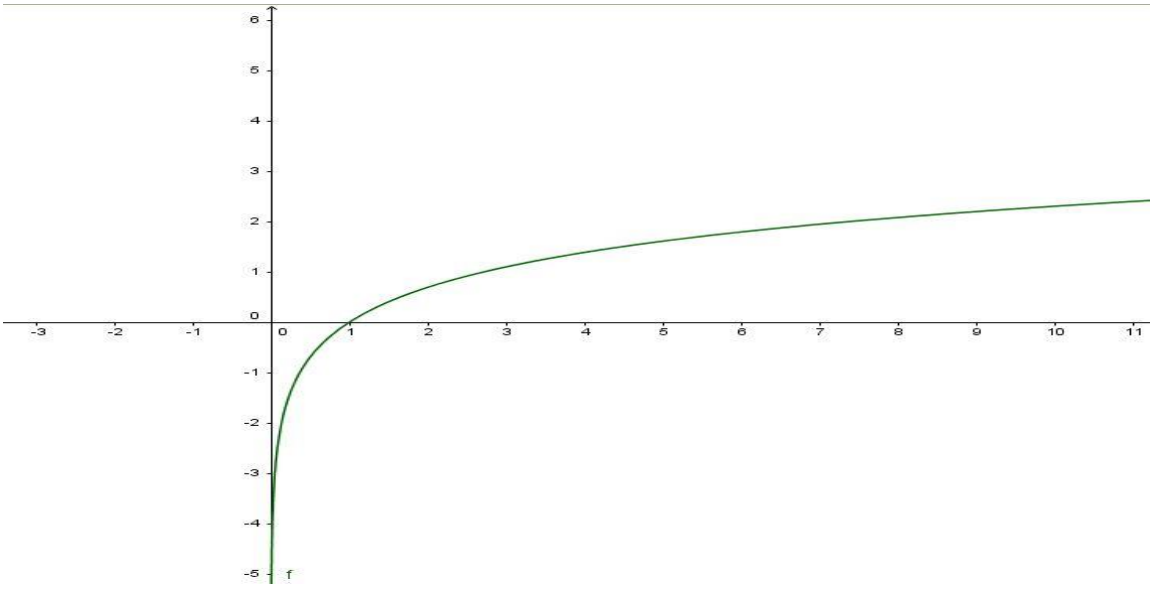
Tabelul si trasarea graficului functiei 20 p

Conditia de parallelism cu pante 10 p

Scrierea ecuatiei de gradul 3 10 p

Rezolvarea ecuatiei 20 p

Aflarea coordonatelor punctului 10 p .



6. MODEL CARE DESCRIE ACTIVITATEA FICATULUI UMAN

- STUDIU DE SPECIALITATE -

Oprea Elena Georgiana- Liceul Tehnologic "Puiești", Vaslui

O metodă simplă de a studia funcționalitatea ficatului o reprezintă injectarea de bromsulftaleina (BSP) în sânge. BSP este un colorant care se elimină în bilă și permite, prin măsurarea vitezei cu care dispare din sânge aprecierea funcției excretorii hepatice. Notând cu x, y, z cantitățile de BSP din sânge, ficat și bilă la un timp t , un model simplu care descrie extragerea de BSP din acestea este următoarea problemă Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + by, \\ \dot{y} = ax - (b+d)y, \\ \dot{z} = dy, \end{cases} \tag{1.1}$$

unde a, b, c sunt ratele de transfer, care caracterizează starea clinică a omului, iar $x(0) = I > 0, y(0) = 0, z(0) = 0$. Cum z(t) se determină din relația $z(t) = I - x(t) - y(t)$ pentru $t \geq 0$, rămâne de investigat sistemul bidimensional

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + by, \\ \dot{y} = ax - (b+d)y, \end{cases} \tag{1.2}$$

unde a, b, d sunt parametrii pozitivi.[1]

Sistemul de ecuații diferențiale ordinare bidimensional, care descrie activitatea ficatului uman este

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + by, \\ \dot{y} = ax - (b+d)y, \end{cases} \tag{1.3}$$

unde a, b, d sunt parametri pozitivi. Matricea acestui system liniar este

$$A = \begin{pmatrix} -a & b \\ a & -(b+d) \end{pmatrix}.$$

Avem $trA = -(a+b+d)$, $\det A = ad$. în continuare analizăm toate situațiile posibile ce pot apărea în cazul când cei trei parametri variază.

Toți parametrii nenuli. Avem $trA < 0$, $\det A > 0$, deci originea este un nod atractiv nedegenerat.

Un singur parametru nul. Dacă $a = 0, b, d \neq 0$, atunci $trA = -(b+d) < 0$, $\det A = 0$, deci avem o dreaptă infinită de puncte de echilibru atractive. Dacă $b = 0, a, d \neq 0$, atunci $trA = -(a+d) < 0$, $\det A = ad > 0$, deci punctul de echilibru este un nod atractiv nedegenerat. Dacă $d = 0, a, b \neq 0$, atunci $trA = -(a+b) < 0$, $\det A = 0$, deci avem o dreaptă infinită de puncte de echilibru.

Doar doi parametri nuli. În acest caz avem mereu o dreaptă infinită de puncte de echilibru atractive. Într-adevăr, dacă $a = b = 0, d \neq 0$, atunci $trA = -d < 0$, $\det A = 0$, dacă $a = d = 0, b \neq 0$, atunci $trA = -b < 0$, $\det A = 0$, iar dacă $b = d = 0, a \neq 0$, atunci $trA = -a < 0$, $\det A = 0$, deci avem o dreaptă infinită de puncte de echilibru atractive.

Toți parametrii sunt nuli. Așa cum era de așteptat, deoarece dacă $a=b=d=0$, atunci $trA=\det A=0, A\equiv O$, înseamnă că avem o infinitate de puncte de echilibru.

În funcție de valorile parametrilor a,b,d, sistemul (1.3) are:

a) un singur punct de echilibru, care este nod atractiv;

b) o infinitate de puncte de echilibru atractive aflate pe o dreaptă;

c) tot planul constă din puncte de echilibru. Corespunzător, diagrama de bifurcație static este o varietate tridimensională $x=x(a,b,d)=y(a,b,d)$ din spațiul 5-dimensional (a,b,d,x,y), pe care o putem vizualiza doar prin secțiuni în ea.

Portretul parametric (fig.1) este format din trei straturi, numerotate $0,1,2$, iar portretele de fază din plan corespunzătoare sunt prezentate în figura 2.

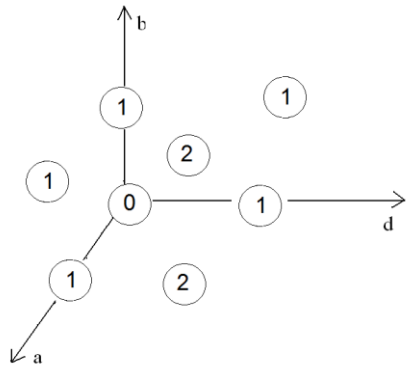
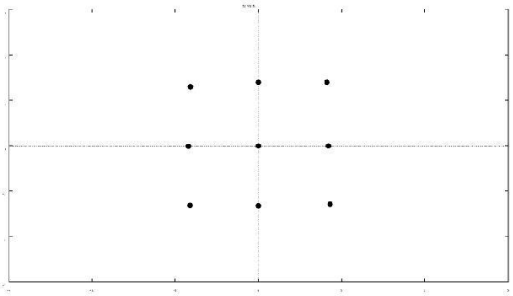
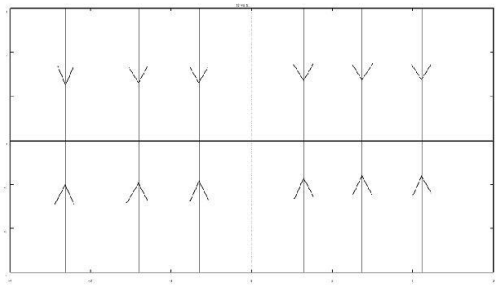


Figura 1: Portretul parametric pentru sistemul 1.3

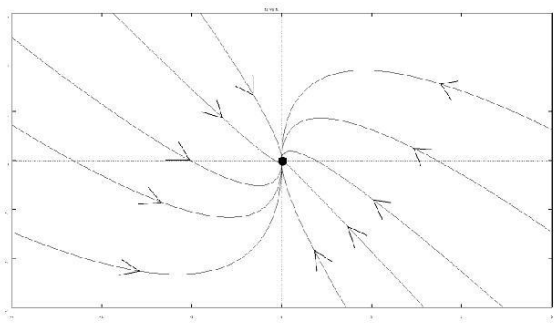
În afară de ultimele două cazuri, care sunt cazuri degenerate, de importanță biologică este primul caz, când punctul de echilibru este un nod atractiv. Se poate constata că, după un timp, cantitățile de BSP din sânge si ficat ajung la zero, deci dispar, ceea ce arată buna funcționalitate a ficatului (Fig. 2).



Caz 0. a=b=d=0



Caz 1. d>0; a=b=0



Caz 2. b=0; a,d>0

Figura 2:Portretele de fază

Bibliografie

1. Celechovská, L., A simple mathematical model of the human liver, J. Applications of Mathematics, 49 (3) (2004), 227-246.
2. Hale, J. K., Koçak, H., Dynamics and bifurcation, Springer, New York, 1991.
3. Arnold, V., Ordinary differential equations, MIT Press, Cambridge, MA, 1973.
4. Curtu, R., Introducere ăn teoria sistemelor dinamice, Infomarket, Brașov, 2000.

7. SISTEME DINAMICE

- STUDIU DE SPECIALITATE -

Profesor Florea Maria Luminița- Școala Gimnazială "Sf. Andrei" Tăcuta, Vaslui

Fie M un spațiu topologic, numit *spațiul fazelor*, și M^M mulțimea tuturor aplicaților spațiului fazelor M în el însuși.

Definiția 1. [1]. Perechea $(M,\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}(t\in\mathbb{Z})})$, unde $\phi_t : M \to M$ este o familie de operatori (de evoluție) ce satisfac proprietățile

- $\phi_0 = id_M$,
- $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s, \forall t,s \in \mathbb{R}(\mathbb{Z})$.

Parametrul t care indexează acești operatori se numește *timp*. Uneori sistemul dinamic este notat doar cu $\{\phi_t\}$. Dacă $t \in \mathbb{R}$, atunci sistemul dinamic se numește sistem dinamic *continuu*. Dacă $t \in \mathbb{Z}$ atunci sistemul dinamic se numește sistem dinamic *discret*.

Fie T mulțimea de variație a parametrului timp. Dacă parametrul t variază în domeniul T_+ (i.e. $\mathbb{R}_+$, respectiv $\mathbb{N}$) spunem că sistemul este *semidinamic*.

Fie $x \in M$ un punct arbitar al spațiului fazelor.

Definiția 2. [2].

- Aplicația $\eta_x : T \to M, \eta_x(t) := \phi_t(x)$ se numește *mișcare* a punctului x sub acțiunea sistemului dinamic $(M,\{\phi_t\})$.

- Imaginea aplicației $\eta_x : T \to M$ în spațiul M, i.e. mulțimea $Or(x) = \{\eta_x(t) \mid t \in T\} = \{\phi_t(x)\}_{t\in T}$, se numește *orbită* sau *traiectorie de fază* prin punctul $x \in M$ a sistemului dinamic $(M,\{\phi_t\})$.
  - Orice punct care este orbită, i.e. $\phi_t(x) = x, \forall t \in T$, se numește *punct de echilibru* (în cazul continuu) sau *punct fix* (în cazul discret). Un punct al spațiului fazelor care nu este punct de echilibru (fix) se numește punct ordinar.

- Produsul direct $T \times M$ se numește *spațiul fazelor extins*.
- Graficul unei mișcări în spațiul $T \times M$ se numește *curbă integrală*.
- Totalitatea traiectoriilor de fază ale unui sistem dinamic se numește *portret de fază*.

Între sistemele dinamice continue, sistemele de ecuații diferențiale ordinare și câmpurile de vectori există o legătură, ce poate fi enunțată astfel.

Teorema 1. *[2]. Fie sistemul de ecuații diferențiale ordinare autonom* $\dot{x} = f(x), f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *a cărui soluție* $x = x(t,x_0) \in \mathbb{R}^n$ *corespunzătoare datei inițiale* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *există și este unică pentru orice* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *și pentru orice* $t \in \mathbb{R}$. *Atunci acestei ecuații diferențiale ordinare (și implicit câmpului de vectori* f*), i se poate ataşa sistemul dinamic continuu* $\phi = (\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *având* $X = \mathbb{R}^n$ *drept spațiu al fazelor și*

$\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \phi_t(x_0) := x(t, x_0)$.

Fie aplicația $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cu componentele $f_i, i = \overline{1,n}$, $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Definiția 3. Curbele $f_t = 0, i = \overline{1,n}$, corespunzătoare unei componente nule a câmpului de vectori f din sistemul $\dot{x} = f(x)$, se numesc *nullclinurile sistemului dinamic*. Nullclinurile împart spațiul fazelor în regiuni cu orientări diferite ale câmpului de vectori.

Punctele de echilibru au un rol deosebit în portretul de fază. Tipul topologic al unora dintre ele (și anume cele hiperbolice) este complet determinat de sistemul liniarizat în jurul lor după cum urmează. Fie sistemul de ecuații diferențiale ordinare

$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,(1.1)

căruia i se asociază sistemul dinamic continuu $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}, \phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, fie x_0 un punct de echilibru al sistemului de ecuații diferențiale ordinare și fie $Df(x_0)$ matricea Jacobi a lui f în punctul x_0. Sistemul $\dot{X} = Df(x_0)X$ se numește *liniarizatul* sistemului (1.1) în jurul punctului de echilibru x_0.

Definiția 4. [1]. Fie x_0 un punct de echilibru pentru (1.1).

- x_0 se numește *punct Liapunov-stabil* dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât orice x care verifică $|x - x_0| < \delta$ implică $|\phi_t(x) - x_0| < \varepsilon, \forall t \geq 0$.
- x_0 se numește *punct atractiv* dacă există vecinătatea U_{x_0} și un $T > 0$ cu proprietatea că $\forall x \in U_{x_0}, \forall t > T$ are loc $\phi_t(x) \in U_{x_0}$ și

$$\lim_{t\to\infty} |\phi_t(x) - x_0| = 0.$$

x_0 se munește punct repulsive dacă

$$\lim_{x\to\infty} |\phi_t(x) - x_0| = 0.$$

- x_0 se numește punct asymptotic-stabil dacă este stabil și atractiv.

Atractorii (repulsorii) sunt mulțimi atractive particulare,care atrag într-o întreagă vecinătate a lor, în timp ce mulțimile atractive care nu sunt atractori, atrag doar după anumite direcții. În continuare un punct de echilibru care este atractor va fi denumit *punct de echilibru stabil (instabil).*

Fie **x**0 un punct de echilibru al sistemului (1.1) și fie n_-, n_0 și n_+ numărul valorilor proprii λ_t cu părțile reale negative, nule și respective pozitive ale matricei $Df(x_0)$.

Definiția 5. Punctul x_0 se numește *punct de echilibru hiperbolic* dacă $n_0 = 0$ $(i.e. \Re e(\lambda_i) \neq 0, i = \overline{1,n})$. Punctul x_0 se numește *punct de echilibru nehiperbolic* dacă cel puțin o valoare proprie are partea reală nulă.

Principiile de liniarizare reduc studiul proprietăților unui sistem neliniar la cel al proprietăților unuia liniar asociat. Cele mai importante principii de liniarizare sunt: principiul Liapunov-Perron (care caracterizează stabilitatea unui punct de echilibru hiperbolic), teorema Hartman-Grobman și cea a varietății stabile (care fac legătura dintre comportamentul portretului

de fază în jurul punctului de echilibru hiperbolic al unui sistem dinamic neliniar cu cel în jurul originii al sistemului liniarizat în jurul acelor echilibre).

Teorema 2. (principiul Liapunov-Perron)**.** *Fie sistemul dinamic neliniar asociat sistemului (1.1), cu* f *cel puțin de clasă* C^1*, fie* x_0 *un punct de echilibru hiperbolic al sistemului, i.e.* $f(x_0)=0$*, și fie* $A=Df(x_0)$ *matricea Jacobi a lui* f *în* x_0 *care definește sistemul liniarizat* $\dot{X}=AX$ **.**

- *Dacă toate valorile proprii* λ_i *ale matricei* A *au* $\Re e(\lambda_i)<0$*, atunci* x_0 *este punct de echilibru neliniar asimptotic stabil.*
- *Dacă cel puțin o valoare proprie* λ_j *a matricei* **A** *are* $\Re e(\lambda_j)>0$ *,atunci* x_0 *este punct de echilibru neliniar instabil.*

Teorema 3. (Hartman-Grobman)**.** *[3]. Fie* x_0 *un punct de echilibru hiperbolic al sistemului (1.1). Atunci, în spațiul fazelor, există două vecinătăți* U_{x_0} *și* V_{x_0} *ce corespund câmpului de vectori* f *neliniar și respective câmpului de vectori liniarizat în jurul lui* x_0 $(\dot{X}=Df(x_0)X)$*, și există homeomorfismul* $h:V\to U$ *între acestea care păstrează sensul orbitelor (poate fi ales astfel încât să păstreze și parametrizarea în raport cu timpul pe orbite), deci local portretele de fază ale sistemului neliniar și ale celui liniarizat sunt topologic echivalente.*

Teorema 4. (a varietății stabile)**.** *[3]. Fie* x_0 *un punct de echilibru hiperbolic al sistemului (1.1). Atunci există varietățile stabilă* W^s *și instabilă* W^u *ale lui* x_0*, și acestea au aceleași dimensiuni* n_-, n_+ *cu* E^s *și respectiv* E^u*, varietățile stabilă și instabilă ale originii pentru sistemul dinamic liniarizat* $\dot{X}=Df(x_0)X$ *. În plus, Es și Eu sunt tangente în* x_0 *la* W^s *și respectiv* W^u *.*

Definiția 6. [4] Un rol important în clasificarea sistemelor dinamice îl au echivalențele. Spunem că două sisteme dinamice sunt *echivalente* dacă portretele de fază ale lor sunt „calitativ asemenea", e.g. dacă un portret de fază poate fi obținut din altul printr-o transformare continuă.

Există trei tipuri particulare de echivalențe: echivalența difeomorfică, echivalența topologică și echivalența orbitală.

Fie două sisteme dinamice $(M_1,(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}})$ și $(M_2,(\psi_t)_{t\in\mathbb{R}})$, definite pe spațiile fazelor M_1 și respectiv M_2 de câmpurile vectoriale f_1 și respectiv f_2, de ecuațiile diferențiale $\dot{x}=f_1(x)$ și respectiv $\dot{y}=f_2(y)$.

Sistemele dinamice se numesc *topologic echivalente* dacă există un homeomorfism $h:M_1\to M_2, h(\phi_t(x))=\psi_t(h(x))$, care păstrează sensul pe traiectoriile de fază.

Două sisteme dinamice se numesc *topologic orbital echivalente* dacă există un homeomorfism $h:M_1\to M_2$ ce transform curbe orientate din spațiul fazelor ale primului sistem în curbe orientate din spațiul fazelor ale celui de al doilea sistem.

În cazul $M_1=M_2=\mathbb{R}^n$ cele două sisteme dinamice se numesc *orbital echivalente* dacă există o aplicație scalar $\mu=\mu(x)>0$ netedă astfel încât $f_2(x)=\mu(x)\cdot f_1(x)$.

Bibliografie:

1. Georgescu, A., Moroianu, M., Oprea, I., *Teoria bifurcației. Principii și aplicații, Seria de matematică Aplicată și Industrială 1*,Ed. Univ. din Pitești, Pitești, 2000.
2. Arnold, V., *Ordinary differential equation*, MIT Press, Cambridge,Ma, 1973.
3. Arrowsmith, D.K., Place, C.M., *An introduction to dynamical systems* ,Cambridge University Press, 1990.
4. Kolomogorov, A., *Sulla teoria di Volterra della lotta perbl'esistenzia*,Gi. Ist. Ital. Attuari 7(1936), 74-80.

8. SOLUȚII - PROBLEMA LUNII SEPTEMBRIE 2016

Fie ΔABC ***ascuțitunghic. Notăm cu*** x_a, x_b, x_c ***lungimile laturilor pătratelor înscrise în*** ΔABC**.**

Să se arate că : $\frac{a}{x_a}+\frac{b}{x_b}+\frac{c}{x_c}\geq\frac{2}{3}\left(\frac{p}{r}+\frac{5R-r}{R}\right)\geq\frac{2p}{3r}+3\geq 2\sqrt{3}+3$.

Gheorghe Alexe și George-Florin Șerban , profesori Brăila

Soluție autori :

Fie $a\leq b\leq c$, **se deduce usor ca** $x_a=\frac{2S}{a+h_a}, x_b=\frac{2S}{b+h_b}, x_c=\frac{2S}{c+h_c}, \frac{1}{x_a}\leq\frac{1}{x_b}\leq\frac{1}{x_c}$, **aplic ineg.**

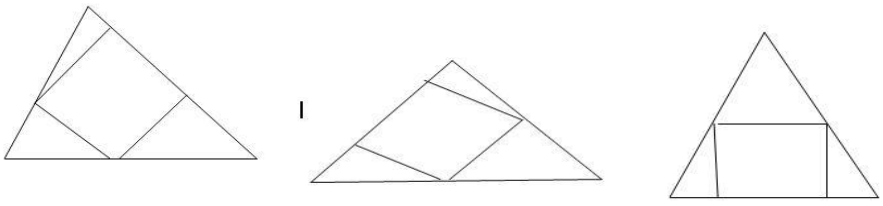
Cebasev $\frac{a}{x_a}+\frac{b}{x_b}+\frac{c}{x_c}\geq\frac{1}{3}(a+b+c)(\frac{1}{x_a}+\frac{1}{x_b}+\frac{1}{x_c})\geq\frac{2p}{3}\cdot\frac{a+b+c+h_a+h_b+h_c}{2S}$,

$\frac{2p}{3}\cdot\frac{a+b+c+h_a+h_b+h_c}{2S}\geq\frac{2p}{3}(\frac{2p}{2S}+\frac{h_a+h_b+h_c}{2S})\geq\frac{2p}{3}(\frac{1}{r}+\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R\cdot 2S})$,

$h_a+h_b+h_c=\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}\geq\frac{2r(5R-r)}{R}, p^2+r^2+4Rr\geq 20Rr-4r^2, \mathrm{p}^2\geq 16Rr-5r^2, (\mathrm{G\,erretsen})$

$\frac{a}{x_a}+\frac{b}{x_b}+\frac{c}{x_c}\geq\frac{2p}{3}[\frac{1}{r}+\frac{2r(5R-r)}{R\cdot 2S}]\geq\frac{2}{3}(\frac{p}{r}+\frac{5R-r}{R})\geq\frac{2p}{3r}+3\geq 2\sqrt{3}+3, \frac{2p}{3r}+\frac{10R-2r}{3R}\geq\frac{2p}{3r}+3,$

Deci $10R-2r\geq 9R, R\geq 2r, (\mathrm{Euler}), \frac{2p}{3r}+3\geq 2\sqrt{3}+3, 2p\geq 6r\sqrt{3}, p\geq 3r\sqrt{3}, (\mathrm{Mitrinovic}).$

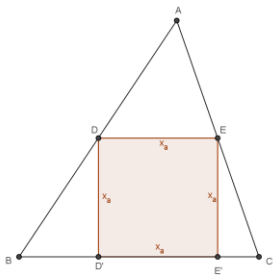


Alte soluții:

1) Profesor Biro Istvan

Din asemănarea triunghiurilor *ADE, ABC* și teorema sinusurilor avem :

$$\begin{cases} \frac{x_a}{a}=\frac{AD}{c}=\frac{AE}{b}=k \\ b=2R\sin(\hat{B})=\frac{2Rx_a}{(1-k)c}\Rightarrow 1-k=\frac{2Rx_a}{bc}\Rightarrow 1-\frac{x_a}{a}=\frac{2Rx_a}{bc}\Rightarrow x_a=\frac{abc}{2Ra+bc} \end{cases}$$



Analog putem afla x_b, x_c și vom avea

$$\frac{a}{x_a}+\frac{b}{x_b}+\frac{c}{x_c}=3+2R\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}\right)=3+\frac{2R\left(a^2+b^2+c^2\right)}{abc}.$$

În continuare folosim următoarele relații cunoscute:

(1) $abc=4Rpr$

(2) $a^2+b^2+c^2=2\left(p^2-r^2-4Rr\right)$

(3) $R\geq 2r$ (*Euler*)

(4) $p^2\geq 16Rr-5r^2$ (*Gerretsen*)

(5) $p\leq 2R+\left(3\sqrt{3}-4\right)r$ (*Blundon*)

(6) $p\geq 3\sqrt{3}r$ (*Mitrovic*).

Astfel prima inegalitate va fi de forma:

$$3+\frac{2R\left(a^2+b^2+c^2\right)}{abc}=3+\frac{\cancel{4}R\left(p^2-r^2-4Rr\right)}{\cancel{4}Rpr}=3+\left(\frac{p}{r}-\frac{r}{p}-\frac{4R}{p}\right)\geq\frac{2}{3}\left(\frac{p}{r}+\frac{5R-r}{R}\right).$$

Din (5) și (3) rezultă $p\leq 2R+\left(3\sqrt{3}-4\right)r\leq 2R+\left(3\sqrt{3}-4\right)\frac{R}{2}<4R$, adică $p<4R$.

Totodată având în vedere și inegalitățile (3) și (4) deducem că

$Rp^2-3Rr^2-12R^2r\geq R\left(16Rr-5r^2\right)-3Rr^2-12R^2r=4Rr\left(R-2r\right)\geq pr\left(R-2r\right)$, de unde

împărțind ambele părți cu $3Rpr$ obținem:

$$\frac{p}{3r}-\frac{r}{p}-\frac{4R}{p}\geq\frac{1}{3}-\frac{2r}{3R}\Leftrightarrow 3+\frac{2p}{3r}+\frac{p}{3r}-\frac{r}{p}-\frac{4R}{p}\geq 3+\frac{2p}{3r}+\frac{1}{3}-\frac{2r}{3R}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3+\frac{p}{r}-\frac{r}{p}-\frac{4R}{p}\geq\frac{10}{3}+\frac{2p}{3r}-\frac{2r}{3R}\Leftrightarrow 3+\left(\frac{p}{r}-\frac{r}{p}-\frac{4R}{p}\right)\geq\frac{2}{3}\left(\frac{p}{r}+\frac{5R-r}{R}\right).$$

Inegalitatea $\frac{2}{3}\left(\frac{p}{r}+\frac{5R-r}{R}\right)\geq\frac{2p}{3r}+3$ rezultă imediat din (3), iar $\frac{2p}{3r}+3\geq 2\sqrt{3}+3$ din (6).

Egalitățile au loc când triunghiul este echilateral, adică când $R=2r$ și $p=3\sqrt{3}r$.

2) Prof. Nela Ciceu, Bacău şi Prof. Roxana Mihaela Stanciu, Buzău.

În locul primei inegalități vom demonstra inegalitatea mai tare

$$\frac{a}{x_a}+\frac{b}{x_b}+\frac{c}{x_c}\geqslant\frac{2}{3}\left(\frac{p}{r}+\frac{5R-r}{R}\right)+\frac{(8-3\sqrt{3})(R-2r)}{6p} \quad (1)$$

Folosind asemănarea avem

$$\frac{a}{x_a}=\frac{h_a}{h_a-x_a}\Rightarrow\frac{a}{x_a}=\frac{a+h_a}{h_a}=\frac{a^2}{2S}+1,$$

și atunci inegalitatea (1) se scrie

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2pr}-\frac{2p}{3r}-\frac{(8-3\sqrt{3})(R-2r)}{6p}\geqslant\frac{2(5R-r)}{3R}-3 \quad (2)$$

Deoarece $a^2+b^2+c^2=2(p^2-r^2-4Rr)$ si $p^2\geq 16Rr-5r^2$ (Gerretsen), avem

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2pr}-\frac{2p}{3r}-\frac{(8-3\sqrt{3})(R-2r)}{6p}=\frac{3(p^2-r^2-4Rr)-2p^2}{3pr}-\frac{(8-3\sqrt{3})(R-2r)}{6p}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{16Rr-5r^2-3r^2-12Rr}{3pr}-\frac{(8-3\sqrt{3})(R-2r)}{6p}=\frac{4(R-2r)}{3p}-\frac{(8-3\sqrt{3})(R-2r)}{6p}=$$
$$=\frac{(R-2r)(8-8+3\sqrt{3})}{6p}=\frac{3\sqrt{3}(R-2r)}{6p}.$$

Rezultă că inegalitatea (2) este echivalentă cu

$$\frac{3\sqrt{3}(R-2r)}{6p}\geqslant\frac{R-2r}{3R}\Leftrightarrow(R-2r)(3\sqrt{3}R-(a+b+c))\geqslant 0,$$

adevărat.

A doua inegalitate se scrie 2(5R - r) >= 9R <=> R >= 2r, iar a treia inegalitate este itemul 5.11 din Bottema.

Remarcă. Vezi *''Geometric inequalities''* by **O. Bottema** [and others] - Groningen, 1969.

3) Profesor Marin Chirciu,p Pitești

Fie ΔABC ascuțitunghic și $MNPQ$ pătratul înscris pe latura BC iar AD înălțimea din A. Din asemănări de triunghiuri ΔMBQ și ΔABD, respectiv ΔAMN și ΔABC obținem imediat că $x_a = \frac{ah_a}{a+h_a}$, de unde $\frac{a}{x_a} = 1 + \frac{a}{h_a}$.

Rezultă că

$$\frac{a}{x_a}+\frac{b}{x_b}+\frac{c}{x_c} = \sum\left(1+\frac{a}{h_a}\right) = 3+\sum\frac{a}{h_a} = 3+\sum\frac{a^2}{ah_a} = 3+\sum\frac{a^2}{2S} = 3+\frac{2\left(p^2-r^2-4Rr\right)}{2rp} =$$

$$= 3+\frac{p^2-r^2-4Rr}{rp}.$$

Prima inegalitate se scrie:

$$3+\frac{p^2-r^2-4Rr}{rp} \geq \frac{2}{3}\left(\frac{p}{r}+\frac{5R-r}{R}\right) \Leftrightarrow \frac{p^2-r^2-4Rr}{rp} \geq \frac{2}{3}\left(\frac{p}{r}+5-\frac{r}{R}\right) \Leftrightarrow \frac{p^2-r^2-4Rr}{rp} \geq$$

$$\geq \frac{1}{3}+\frac{2p}{3r}-\frac{2r}{3R} \Leftrightarrow Rp^2 \geq rp\left(R-2r\right)+3Rr\left(4R+r\right).$$

Distingem cazurile:

Cazul 1. $p \leq 4R$. Cu inegalitatea lui Gerrtsen: $p^2 \geq 16Rr-5r^2$ rămâne să demonstrăm că:

$R(16Rr-5r^2) \geq rp(R-2r)+3Rr(4R+r) \mid :r \Rightarrow R(16R-5r) \geq p(R-2r)+3R(4R+r) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4R^2-8Rr \geq p(R-2r) \Leftrightarrow 4R(R-2r) \geq p(R-2r)$, evidentă din inegalitatea lui Euler: $R \geq 2r$ și $p \leq 4R$. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

Cazul 2. $p > 4R$. Inegalitatea se scrie $p\left[Rp-Rr+2r^2\right] \geq 3Rr(4R+r)$. Este suficient să demonstrăm că: $4R\left[R\cdot 4R-Rr+2r^2\right] \geq 3Rr(4R+r) \mid :R \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4\left[4R^2-Rr+2r^2\right] \geq 3r(4R+r) \Leftrightarrow 16R^2-16Rr+5r^2 \geq 0,$$

evident deoarece $16R(R-r)+5r^2 > 0$ .Inegalitatea este stictă în acest caz.

A doua inegalitate:

$\frac{2}{3}\left(\frac{p}{r}+\frac{5R-r}{R}\right)\geq\frac{2p}{3r}+3$ este echivalentă cu: $\frac{2p}{3r}+\frac{10}{3}-\frac{2r}{3R}\geq\frac{2p}{3r}+3\Leftrightarrow\frac{1}{3}\geq\frac{2r}{3R}\Leftrightarrow R\geq 2r$ (inegalitatea lui Euler). Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

A treia inegalitate:

$\frac{2p}{3r}+3\geq 2\sqrt{3}+3\Leftrightarrow\frac{2p}{3r}\geq 2\sqrt{3}\Leftrightarrow p\geq 3\sqrt{3}r$ (inegalitatea lui Mitrinović).

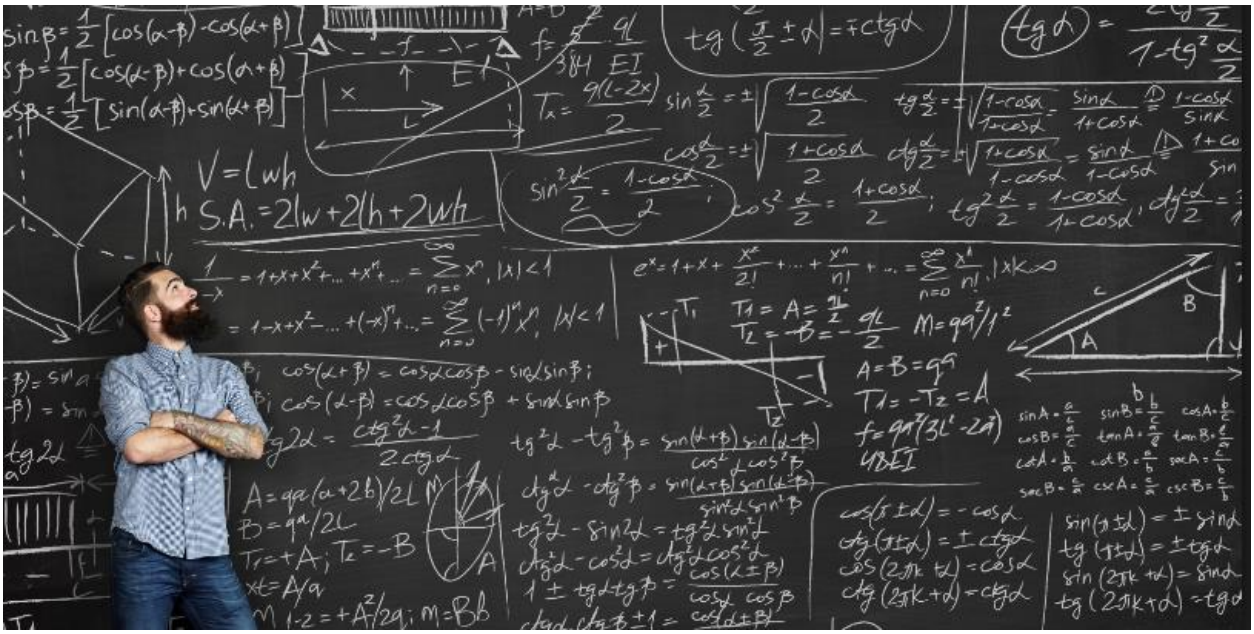
Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

9. PROBLEMA LUNII OCTOMBRIE 2016

Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AD = a;\ AB = b;\ AA' = c;\ AC' = d$. Se iau punctele distincte M, N, P, Q care aparţin feţelor $(ADD'A')$, $(DD'C'C)$, $(BB'C'C)$ respectiv $(AA'B'B)$. Să se demonstreze că: $\frac{P_{ABCD}}{2} < P < 2\sqrt{2(c^2+d^2)}$, unde $P = MN + NP + PQ + QM$

Prof. Manea Cosmin şi Petrica Dragoş, Piteşti

Așteptăm rezultatele până pe data de 1.11.2016 pe adresa de e-mail revista@mateinfo.ro .



10. SIMULARE EVALUARE NAȚIONALĂ MATEMATICĂ
OCTOMBRIE 2016

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru: 2 ore.

SUBIECTUL I – Pe foaia de examen se trec doar rezultatele. (30 de puncte)

(5p) **1**. Rezultatul calculului $(-2)^2 - 2^0 \cdot 0^2$ este ...

(5p) **2**. Dacă $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ și 2a+b=20, atunci media aritmetică a numerelor a și b este ...

(5p) **3**. Cel mai mare număr natural de forma $\overline{abc}$ este …

(5p) **4**. Un dreptunghi are lăţimea de 10 cm şi perimetrul de 100 cm. Atunci aria dreptunghiului este … cm^2.

(5p) **5.** Numărul axelor de simetrie ale unui dreptunghi este ....

(5p) **6**. În urma unui test elevii unei clase au obţinut notele redate în tabelul de mai jos:

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Numărul de elevi	2	5	4	10	6	3	2

Numărul notelor mai mari sau egale cu 8 sunt ....

SUBIECTUL II – Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete. (30 de puncte)

(5p) **1**. Desenaţi pe foaia de examen mediatoarele unui triunghi dreptunghic .

(5p) **2**. Arătați că numărul $\overline{37a} + \overline{7a3} + \overline{a37}$ este divizibil cu 37, oricare ar fi cifra a nenulă.

(5p) **3.** 10% din elevii unei şcoli de artă sunt pasionaţi doar de pictură, 15% sunt pasionaţi doar de muzică şi 100 elevi doar de balet. Restul, care reprezintă jumătate din elevii şcolii, au mai multe pasiuni . Câţi elevi sunt în acea şcoală?

4. Se consideră numerele reale $a = \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ și $b = \sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$

(5p) **a)** Calculați $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$.

(5p) **b)** Calculați media geometrică a numerelor a și b .

(5p) **5**. Stabiliți soluția întreagă a ecuației :

$$\frac{(x+2)^2}{2} - \frac{(x-3)(x+3)}{3} = \frac{2x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{6} .$$

SUBIECTUL III – Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete.(30 de puncte)

2. **Figura 1** reprezintă schiţa unui teren de joacă pentru copii, format dintr-un dreptunghi ABCD care are lungimea de 40m şi lăţimea de 20m şi din patru semicercuri de diametre AB, BC, CD, DA. Punctul P este mijlocul semicercului de diametru DC.

(5p) a) Ştiind că terenul este înconjurat de un gard, calculaţi lungimea gardului care-l înconjoară.

(5p) b) Calculaţi suprafaţa (aria) terenului şi verificaţi dacă este mai mică decât 2400m^2 ($3{,}14<\pi<3{,}15$).

(5p) c) Dacă în punctul B este amplasată o cişmea, iar Ciprian se află în punctul P, calculaţi lungimea drumului pe care-l parcurge Ciprian până cişmea.

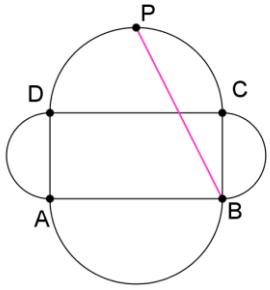


Figura 1

2. În **figura 2** este reprezentat un suport pentru şerveţele sub forma unui trapez dreptunghic ABCD cu AB || CD, $m(\measuredangle A)=m(\measuredangle D)=90^0$, AB = 7 cm, CD = 13cm , iar lungimile laturilor BC şi AD sunt direct proporţionale cu numerele 5 şi 4.

(5p) a) Calculaţi lungimea laturii BC;

(5p) b) Calculaţi suprafaţa trapezului;

(5p) c) Calculaţi distanţa de la punctul D la baza BC a suportului.

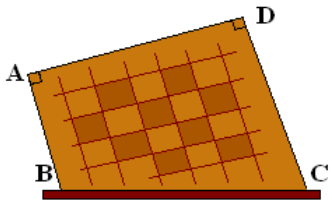


Figura 2

BAREMUL DE REZOLVARE VA APĂREA PE PARCURSUL LUNII OCTOMBRIE PE PAGINA DE FACEBOOK
https://www.facebook.com/www.mateinfo.ro/

11. SIMULARE BAC MATEMATICĂ
mate_info, st_nat, tehnologic
OCTOMBRIE 2016

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1.Într-o progresie geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ se cunosc b_1=1 și q=2.Calculați suma primilor 5 termeni ai progresiei.

(5p) 2.Se consideră funcția f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$.Calculați
$f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)++f(2)+f(3)$.

(5p) 3.Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{x^3-x^2+1}=x+1$.

(5p) 4.După o reducere cu 10% prețul unui produs devine 180 lei.Aflați prețul produsului înainte de ieftinire.

(5p) 5.Se consideră vectorii $\vec{v_1}=2\vec{i}+(a+3)\vec{j}$ și $\vec{v_2}=(a+2)\vec{i}+3\vec{j}$, unde a$\in\mathbb{R}$ .Determinați numărul a<0 pentru care vectorii $\vec{v_1}$ și $\vec{v_2}$ sunt coliniari.

(5p) 6. Aflați aria triunghiului ABC dacă AB=AC=10 și BC=12.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&-3\\-1&3\end{pmatrix}$ și $X(a)=I_2+aA$, unde $a\in\mathbb{Z}$.

(5p) a) Calculați A^2-4A.

(5p) b) Demonstrați că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+4ab)$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{Z}$.

(5p) c)Arătați că $X(a)$ este matrice inversabilă, oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=2xy+6x+6y+15$.

(5p) a)Arătați că $x*y=2(x+3)(y+3)-3$,oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

(5p) b)Arătați că legea „$*$" este asociativă.

(5p) c)Calculați $(-2012)*(-2011)*(-2010)*...*(2010)*(2011)*(2012)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f\left(x\right)=x^{2012}+2012^{x}$.

(5p) a)Să se determine $f^{'}\left(x\right), x\in\mathbb{R}$.

(5p) b) Să se demonstreze că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{'}\left(x\right)-f^{'}\left(0\right)}{x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f\left(x\right)=x^{3}-x^{2}+x+2012^{x}$.

(5p) a) Calculați $f^{'}\left(0\right)$.

(5p) b) Arătați că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(5p) c)Arătați că $a^{3}-a^{2}+a-b^{3}+b^{2}-b\leq 2012^{b}-2012^{a}$,oricare ar fi numérele reale a,b cu $a\leq b$.

Prof: Păcurar Cornel-Cosmin
www.mateinfo.ro

BAREMUL DE REZOLVARE VA APĂREA PE PARCURSUL LUNII OCTOMBRIE PE PAGINA DE FACEBOOK
https://www.facebook.com/www.mateinfo.ro/