

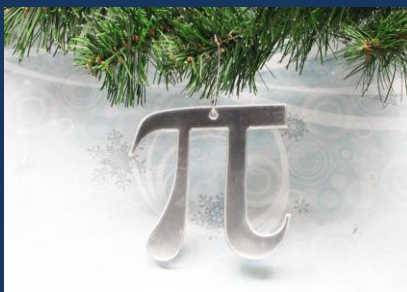
REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

ISSN 2065-6432 – DECEMBRIE 2016

www.mateinfo.ro

REVISTĂ LUNARĂ
DIN FEBRUARIE 2009

revista@mateinfo.ro



COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ȘI SUSȚINĂTOR PERMANENȚI AI REVISTEI
NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ȘI NELA CICEU

ARTICOLE REVISTĂ:

1. UTILIZAREA INEGALITĂȚII LUI CEBÂȘEV ÎN STABILIREA UNOR
INEGALITĂȚI ÎN TRIUNGHI ... PAG. 2
Marin Chirciu
2. SOLUTIONS OF SOME PROBLEMS OF MAGAZINE ROMANIAN MATHEMATICAL... PAG. 5
George-Florin Serban
3. OTHER SOLUTIONS FOR CERTAIN PROBLEMS FROM THE PENTAGON ...PAG. 9
Neculai Stanciu și Titu Zvonaru
4. DRUMURI MINIME ÎNTRE PUNCTE, DREPT STUDIU DE SPECIALITATE-REZULTATE ... PAG. 15
Stan Ilie
5. A CONSEQUENT OF KARAMATA'S THEOREM... PAG. 17
Leonard Giugiuc și Diana Trailescu
6. O TEOREMĂ UTILĂ ÎN DEMONSTRAREA UNOR INEGALITĂȚI... PAG. 18
Sebastian Ilinca
7. INEGALITĂȚI GEOMETRICE ȘI INEGALITĂȚI ALGEBRICE.
PRINCIPIUL DUALITĂȚII ... PAG. 20
Dobre Andrei Octavian
8. DIGIMATHART/PROGRAMARE MATEMATICĂ ÎN GRAFICA -
O ABORDARE INTERDISCIPLINARĂ NECESARĂ UNUI ÎNVĂȚĂMÂNT DE CALITATE...PAG. 21
Roxana Drăgănoiu
9. SOLUȚII - PROBLEMA LUNII NOIEMBRIE 2016 ... PAG. 23
Propusă de conf. dr. Gheorghe PROCOPCIUC, Universitatea Tehnică Iași
10. PROBLEMA LUNII DECEMBRIE 2016... PAG.29
Prof. Mănescu Avram Corneliu
11. MODEL EVALUARE NAȚIONALĂ MATEMATICĂ DECEMBRIE 2016... PAG. 30
12. MODEL BAC MATEMATICĂ MATE-INFO DECEMBRIE 2016... PAG. 33

1. Utilizarea inegalității lui Cebâșev în stabilirea unor inegalități în triunghi

Marin Chirciu¹

Se știe, în baza inegalității lui Cebâșev, că dacă tripletele de numere reale (a_1, a_2, a_3) și (b_1, b_2, b_3) sunt:

(1) la fel ordonate, atunci $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \geq \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$

(2) invers ordonate, atunci $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \leq \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$.

Vom folosi faptul că:

(1) tripletele (l_a, l_b, l_c) și $(p-a, p-b, p-c)$ sunt la fel ordonate deoarece $a \leq b \leq c \Rightarrow \Rightarrow l_a \geq l_b \geq l_c$ și $p-a \geq p-b \geq p-c$.

(2) tripletele (l_a, l_b, l_c) și $\left(\frac{1}{p-a}, \frac{1}{p-b}, \frac{1}{p-c}\right)$ sunt invers ordonate.

În continuare vom demonstra următoarele inegalități în triunghi.

1) $\sum \frac{l_a}{p-a} \leq \frac{9}{2\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{R}{r}\right)$.

Soluție: Tripletele (l_a, l_b, l_c) și $\left(\frac{1}{p-a}, \frac{1}{p-b}, \frac{1}{p-c}\right)$ sunt invers ordonate. Cu inegalitatea

lui Cebâșev obținem: $\sum \frac{l_a}{p-a} \leq \sum l_a \cdot \sum \frac{1}{p-a} \stackrel{(1)}{\leq} \frac{1}{3} \cdot p\sqrt{3} \cdot \frac{4R+r}{rp} = \frac{4R+r}{r\sqrt{3}} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{9R}{2r\sqrt{3}}$, unde

(1) $\Leftrightarrow \sum l_a \leq p\sqrt{3}$, adevărată din $l_a^2 \leq p(p-a)$.

2) $\sum \frac{p-a}{l_a} \leq \frac{p}{3r}$.

Soluție: Tripletele $(p-a, p-b, p-c)$ și $\left(\frac{1}{l_a}, \frac{1}{l_b}, \frac{1}{l_c}\right)$ sunt invers ordonate. Cu inegalitatea

lui Cebâșev obținem: $\sum \frac{p-a}{l_a} \leq \frac{1}{3} \sum (p-a) \cdot \sum \frac{1}{l_a} = \frac{1}{3} \cdot p \cdot \sum \frac{1}{l_a} \stackrel{(2)}{\leq} \frac{1}{3} \cdot p \cdot \frac{1}{r} = \frac{p}{3r}$.

3) $\sum (p-a)l_a \geq 3S$

Soluție: Tripletele (l_a, l_b, l_c) și $(p-a, p-b, p-c)$ sunt la fel ordonate. Cu inegalitatea lui

Cebâșev obținem: $\sum (p-a)l_a \geq \frac{1}{3} \sum (p-a) \cdot \sum l_a = \frac{1}{3} \cdot p \cdot 9r = 3rp = 3S$.

4) $\sum \frac{p-a}{l_a^2} \leq \frac{3}{p} \cdot \left(\frac{R}{2r}\right)^2$.

¹ Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești

Soluție: Tripletele $(p-a, p-b, p-c)$ și $\left(\frac{1}{l_a^2}, \frac{1}{l_b^2}, \frac{1}{l_c^2}\right)$ sunt invers ordonate. Cu inegalitatea

lui Cebâșev obținem: $\sum \frac{p-a}{l_a^2} \leq \frac{1}{3} \sum (p-a) \cdot \sum \frac{1}{l_a^2} = \frac{1}{3} \cdot p \cdot \sum \frac{1}{l_a^2} \stackrel{(3)}{\leq} \frac{1}{3} \cdot p \cdot \left(\frac{3R}{2S}\right)^2 = \frac{3}{p} \cdot \left(\frac{R}{2r}\right)^2$,

unde (3) $\sum \frac{1}{l_a^2} \leq \left(\frac{3R}{2S}\right)^2$, adevărată din $\sum \frac{1}{l_a^2} \leq \sum \frac{1}{h_a^2} = \sum \frac{a^2}{4S^2} \stackrel{\text{Leibniz}}{\leq} \frac{9R^2}{4S^2}$.

$$5) \sum \frac{l_a^2}{p-a} \leq \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{R^2}{p}.$$

Soluție: Tripletele (l_a^2, l_b^2, l_c^2) și $\left(\frac{1}{p-a}, \frac{1}{p-b}, \frac{1}{p-c}\right)$ sunt invers ordonate. Cu inegalitatea

lui Cebâșev obținem: $\sum \frac{l_a^2}{p-a} \leq \frac{1}{3} \sum l_a^2 \cdot \sum \frac{1}{p-a} \leq \frac{1}{3} \cdot p^2 \cdot \frac{4R+r}{rp} \stackrel{\text{Doucet}}{\leq}$

$$\stackrel{\text{Doucet}}{\leq} \frac{1}{3} \cdot \frac{4R+r}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4R+r}{r} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{\left(4R+\frac{R}{2}\right)^2}{3\sqrt{3}r} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{R^2}{p}.$$

$$6) \sum (p-a)l_a^2 \geq \sqrt{3}rp^2 \geq 9r^2p \geq 27\sqrt{3}r^3.$$

Soluție: Tripletele $(p-a, p-b, p-c)$ și (l_a^2, l_b^2, l_c^2) sunt la fel ordonate.

Cu inegalitatea lui Cebâșev obținem: $\sum (p-a)l_a^2 \geq \frac{1}{3} \sum (p-a) \cdot \sum l_a^2 \stackrel{(4)}{\geq} \frac{1}{3} \cdot p \cdot 3S\sqrt{3} = \sqrt{3}rp^2 \stackrel{\text{Mitrinović}}{\geq} 9r^2p \stackrel{\text{Mitrinović}}{\geq} 9r^2 \cdot 3\sqrt{3}r = 27\sqrt{3}r^3$, unde $\sum l_a^2 \geq 3\sqrt{3}S$.

Avem $l_a^2 = bc - a^2 \cdot \frac{bc}{(b+c)^2}$; $\frac{bc}{(b+c)^2} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \sum l_a^2 \geq \frac{p^2 + 3r^2 + 12Rr}{2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{28Rr - 2r^2}{2} = r(14R-r) \geq r \cdot 3p\sqrt{3} = 3\sqrt{3}S$

$$7) \sum (p-a)^2 l_a^2 \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot rp^3.$$

Soluție: Tripletele $((p-a)^2, (p-b)^2, (p-c)^2)$ și (l_a^2, l_b^2, l_c^2) sunt la fel ordonate.

Cu inegalitatea lui Cebâșev obținem: $\sum (p-a)^2 l_a^2 \geq \frac{1}{3} \sum (p-a)^2 \cdot \sum l_a^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{[\sum (p-a)]^2}{3} \cdot \sum l_a^2 \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{p^2}{3} \cdot 3S\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} rp^3$.

$$8) \sum (p-a)^n l_a^n \geq 9r \cdot \left(\frac{p}{3}\right)^n, \text{ unde } n \in \mathbb{N}.$$

Soluție: Tripletele $((p-a)^n, (p-b)^n, (p-c)^n)$ și (l_a^n, l_b^n, l_c^n) sunt la fel ordonate.

Cu inegalitatea lui Cebâșev obținem: $\sum (p-a)^n l_a^n \geq \frac{1}{3} \sum (p-a)^n \cdot \sum l_a^n \stackrel{\text{Holder}}{\geq}$

$$\stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{1}{3} \cdot \frac{[\sum (p-a)]^n}{3^{n-2} \cdot 3} \cdot 9r \geq \frac{p^n \cdot r}{3^{n-2}} = 9r \cdot \left(\frac{p}{3}\right)^n, \text{ adevărată pentru } \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}.$$

Pentru $n=0$ se obține $\sum l_a \geq 9r$, iar pentru $n=1$ se obține 3).

$$9) \sum (p-a)^n l_a^2 \geq 3\sqrt{3}S \cdot \left(\frac{p}{3}\right)^n, \text{ unde } n \in \mathbb{N}.$$

Soluție: Tripletele $((p-a)^n, (p-b)^n, (p-c)^n)$ și (l_a^2, l_b^2, l_c^2) sunt la fel ordonate.

Cu inegalitatea lui Cebășev obținem: $\sum (p-a)^n l_a^2 \geq \frac{1}{3} \sum (p-a)^n \cdot \sum l_a^2 \stackrel{\text{Holder}}{\geq}$

$$\stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{1}{3} \frac{\left[\sum (p-a)\right]^n}{3^{n-2} \cdot 3} \cdot 3S\sqrt{3} \geq \frac{p^n \cdot r}{3^{n-2} \cdot 3} \cdot S\sqrt{3} = 3\sqrt{3}S \cdot \left(\frac{p}{3}\right)^n, \text{ unde } n \geq 2, n \in \mathbb{N}.$$

Pentru $n=0$ se obține $\sum l_a^2 \geq 3\sqrt{3}S$, iar pentru $n=1$ se obține 6).

$$10) \sum \frac{(p-a)^2}{l_a} \leq \frac{(2R-r)^2}{3r}.$$

Soluție: Tripletele $((p-a)^2, (p-b)^2, (p-c)^2)$ și $\left(\frac{1}{l_a}, \frac{1}{l_b}, \frac{1}{l_c}\right)$ sunt invers ordonate.

Cu inegalitatea lui Cebășev obținem: $\sum \frac{(p-a)^2}{l_a} \leq \frac{1}{3} \sum (p-a)^2 \cdot \sum \frac{1}{l_a} =$
 $= \frac{1}{3} \cdot (p^2 - 2r^2 - 8Rr) \cdot \sum \frac{1}{l_a} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{1}{3} \cdot (2R-r)^2 \cdot \frac{1}{r} = \frac{(2R-r)^2}{3r}.$

$$11) \sum \left(\frac{p-a}{l_a}\right)^2 \leq \frac{1}{3} \cdot (2R-r)^2 \cdot \left(\frac{3R}{2S}\right)^2.$$

Soluție: Tripletele $((p-a)^2, (p-b)^2, (p-c)^2)$ și $\left(\frac{1}{l_a^2}, \frac{1}{l_b^2}, \frac{1}{l_c^2}\right)$ sunt invers ordonate.

Cu inegalitatea lui Cebășev obținem:

$$\sum \frac{(p-a)^2}{l_a^2} \leq \frac{1}{3} \sum (p-a)^2 \cdot \sum \frac{1}{l_a^2} \leq \frac{1}{3} \cdot (2R-r)^2 \cdot \left(\frac{3R}{2S}\right)^2.$$

Bibliografie.

- 1.O.Bottema, R.Z.Djordjević, R.R.Janić, D.S.Mitrinović, P.M.Vasić, Geometric Inequalities, Groningen 1969, The Netherlands.
- 2.Marin Chirciu, Inegalități algebrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2014.
- 3.Marin Chirciu, Inegalități geometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2015.
4. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.

2. SOLUTIONS OF SOME PROBLEMS OF MAGAZINE ROMANIAN MATHEMATICAL

**By George-Florin Serban ,
Pedagogical High School "D.P.Perpessicius" , Braila , Romania**

SP.020 If $x, y, z \in (0, \frac{\pi}{2})$, then prove that : $\frac{\tan^2 x}{(y+z)^2} + \frac{\tan^2 y}{(x+z)^2} + \frac{\tan^2 z}{(y+x)^2} > \frac{3}{4}$

Proposed by D.M.Batinetu-Giurgiu, Neculai Stanciu –Romania

Solved by Profesor: George-Florin Serban, Pedagogical High School, Braila, Romania.

$\tan x > x, (\forall) x \in (0, \frac{\pi}{2})$, then $\tan^2 x > x^2, (\forall) x \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$$\frac{\tan^2 x}{(y+z)^2} + \frac{\tan^2 y}{(x+z)^2} + \frac{\tan^2 z}{(y+x)^2} > \frac{x^2}{(y+z)^2} + \frac{y^2}{(x+z)^2} + \frac{z^2}{(y+x)^2} = \left(\frac{x}{y+z}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+z}\right)^2 + \left(\frac{z}{y+x}\right)^2,$$

We applied C.B.S

$$\left(\frac{x}{y+z} \cdot 1 + \frac{y}{x+z} \cdot 1 + \frac{z}{y+x} \cdot 1\right)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2) \left[\left(\frac{x}{y+z}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+z}\right)^2 + \left(\frac{z}{y+x}\right)^2\right],$$

$$\left(\frac{x}{y+z}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+z}\right)^2 + \left(\frac{z}{y+x}\right)^2 \geq \frac{1}{3} \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{y+x}\right)^2 > \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{4},$$

Applying the Nesbit inequality $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{y+x} \geq \frac{3}{2}$, then

$$\frac{\tan^2 x}{(y+z)^2} + \frac{\tan^2 y}{(x+z)^2} + \frac{\tan^2 z}{(y+x)^2} > \frac{3}{4}.$$

UP.025. Compute $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n+3)\sqrt[3]{(n+1)!} - 3n\sqrt[3]{n!} \cdot \sqrt[3]{n^2}$

Proposed by D.M.Batinetu-Giurgiu, Neculai Stanciu –Romania

Solved by Profesor : George-Florin Serban, Pedagogical High School, Braila, Romania.

Propozitie: Let streak $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = a \in (0, \infty)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n = b$,

then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = a \ln b.$$

$$\text{Solution: } \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n = \left[1 + \left(\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{a_{n+1} - a_n}}\right]^{\frac{n}{a_n}(a_{n+1} - a_n)}, \quad \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n = \ln\left[1 + \left(\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{a_{n+1} - a_n}}\right]^{\frac{n}{a_n}(a_{n+1} - a_n)},$$

$$\frac{a_n}{n} \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n = (a_{n+1} - a_n) \ln\left[1 + \left(\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{a_{n+1} - a_n}}\right], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_n} = 1 - 1 = 0,$$

Then $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln[(1 + (\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n})^{\frac{a_n}{a_{n+1} - a_n}})] = \ln e = 1$, then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \ln(\frac{a_{n+1}}{a_n})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) \ln[(1 + (\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n})^{\frac{a_n}{a_{n+1} - a_n}})], \text{ then}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \ln(\frac{a_{n+1}}{a_n})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = a(\ln b).$$

$$\text{Application: } l = \lim_{n \rightarrow \infty} ({}^{3n+3}\sqrt{(n+1)!} - {}^{3n}\sqrt{n!}) \cdot {}^3\sqrt{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} ({}^{3n+3}\sqrt{(n+1)!n^{2(n+1)}} - {}^{3n}\sqrt{(n)!n^{2n}}),$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} ({}^{3n+3}\sqrt{(n+1)!n^{2(n+1)}} - {}^{3n}\sqrt{(n)!n^{2n}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} ({}^{3n+3}\sqrt{(n+1)!(n+1)^{2(n+1)}} \cdot {}^{3n+3}\sqrt{(\frac{n}{n+1})^{2(n+1)}} - {}^{3n}\sqrt{(n)!n^{2n}}),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}^{3n+3}\sqrt{(\frac{n}{n+1})^{2(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n}{n+1})^{\frac{2}{3}} = 1, \text{ then } l = \lim_{n \rightarrow \infty} ({}^{3n+3}\sqrt{(n+1)!(n+1)^{2(n+1)}} - {}^{3n}\sqrt{(n)!n^{2n}}),$$

$$a_n = {}^{3n}\sqrt{(n)!n^{2n}}, \quad l = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n),$$

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{{}^{3n}\sqrt{(n)!n^{2n}}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} {}^3\sqrt{\frac{(n)!n^{2n}}{n^{3n}}} = {}^3\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n)!n^{2n}}{n^{3n}}} = {}^3\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(n+1)^{2n+2}}{(n+1)^{3n+3}} \cdot \frac{n^{3n}}{(n)!n^{2n}}},$$

$$a = {}^3\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n)!(n+1)^{2n+3}}{(n+1)^{3n+3}} \cdot \frac{n^{3n}}{(n)!n^{2n}}} = {}^3\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n}{n+1})^n} = {}^3\sqrt{\frac{1}{e}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{a_n} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \cdot \frac{\sqrt[3]{e}}{1} \cdot 1 = 1,$$

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{a_{n+1}}{a_n})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{{}^{3n+3}\sqrt{(n+1)!(n+1)^{2(n+1)}}}{{}^{3n}\sqrt{(n)!n^{2n}}})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{{}^{3n+3}\sqrt{(n+1)!(n+1)^{2(n+1)}}}{{}^{3n}\sqrt{(n)!n^{2n}}})^n,$$

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{{}^{3n+3}\sqrt{(n+1)!(n+1)^{2(n+1)}}}{{}^{3n}\sqrt{(n)!n^{2n}}})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{{}^{3n+3}\sqrt{n!}}{{}^{3n}\sqrt{(n)!}} \cdot \frac{{}^{3n+3}\sqrt{(n+1)^{2n+3}}}}{{}^{3n}\sqrt{n^{2n}}})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{{}^{3n(n+1)}\sqrt{(n)!}} \cdot \frac{{}^{3n+3}\sqrt{(n+1)^{2n+3}}}}{{}^{3n}\sqrt{n^2}})^n,$$

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{{}^{3n}\sqrt{(n)!}} \cdot \frac{{}^{3n}\sqrt{(n+1)^{2n+3}}}}{{}^{3n}\sqrt{n^{2(n+1)}}})^{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{{}^{3n}\sqrt{(n)!}} \cdot \frac{{}^{3n}\sqrt{(n+1)^{2n+2}}(n+1)}{{}^{3n}\sqrt{n^{2n+2}}})^{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{{}^{3n}\sqrt{n+1}}{{}^{3n}\sqrt{(n)!}} \cdot \sqrt[3]{(\frac{n+1}{n})^{2(n+1)}})^{\frac{n}{n+1}},$$

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} [(\frac{{}^{3n}\sqrt{n+1}}{{}^{3n}\sqrt{(n)!}})^{\frac{n}{n+1}} \cdot (\sqrt[3]{(\frac{n+1}{n})^{2(n+1)}})^{\frac{n}{n+1}}] = \sqrt[3]{e^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{{}^{3n}\sqrt{n+1}}{{}^{3n}\sqrt{(n)!}})^{\frac{n}{n+1}} = \sqrt[3]{e^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n+1}{\sqrt[3]{n!}})^{\frac{n}{3(n+1)}},$$

$$b = \sqrt[3]{e^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{\frac{(n+1)^n}{n!}})^{\frac{n}{3(n+1)}} = \sqrt[3]{e^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)^n})^{\frac{n}{3(n+1)}} = \sqrt[3]{e^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{(n+2)^n(n+2)}{n!(n+1)} \cdot \frac{n!}{(n+1)^n})^{\frac{n}{3(n+1)}},$$

$$b = \sqrt[3]{e^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} ((\frac{n+2}{n+1})^n \cdot \frac{n+2}{n+1})^{\frac{n}{3(n+1)}} = \sqrt[3]{e^2} \cdot e^{\frac{1}{3}} = e,$$

$$\text{Then } l = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = a \ln b = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \cdot \ln e = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} = \lim_{n \rightarrow \infty} ({}^{3n+3}\sqrt{(n+1)!} - {}^{3n}\sqrt{n!}) \cdot {}^3\sqrt{n^2}.$$

UP.026. Compute $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{\sqrt[2n+2]{(2n+1)!!}} - \frac{n}{\sqrt[2n]{(2n-1)!!}} \right)^{\sqrt{n}}$

Proposed by D.M.Batinetu-Giurgiu, Neculai Stanciu –Romania

Solved by Profesor : George-Florin Serban, Pedagogical High School, Braila, Romania.

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{\sqrt[2n+2]{(2n+1)!!}} - \frac{n}{\sqrt[2n]{(2n-1)!!}} \right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{\sqrt[2n+2]{(2n+1)!!}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - \frac{n\sqrt{n}}{\sqrt[2n]{(2n-1)!!}} \right)^{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{\sqrt{n}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1, \quad l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{\sqrt[2n+2]{(2n+1)!!}} - \frac{n\sqrt{n}}{\sqrt[2n]{(2n-1)!!}} \right)^{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{\sqrt{n}},$$

$$a_n = \frac{n\sqrt{n}}{\sqrt[2n]{(2n-1)!!}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[2n]{(2n-1)!!}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{(2n-1)!!}}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n (n+1) \cdot (2n-1)!!}{(2n+1)!! \cdot n^n}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{n+1}{2n+1}} = \sqrt{\frac{e}{2}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{a_n} \cdot \frac{n+1}{n} = \sqrt{\frac{e}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{e}} \cdot 1 = 1,$$

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{\sqrt[2n+2]{(2n+1)!!}} \cdot \frac{\sqrt[2n]{(2n-1)!!}}{n\sqrt{n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[2n]{(2n-1)!!}}{\sqrt[2n+2]{(2n+1)!!}} \right)^n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}} = 1,$$

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[2n]{(2n-1)!!}}{\sqrt[2n+2]{(2n+1)!!}} \right)^n = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[2n]{(2n-1)!!}}{\sqrt[2n+2]{(2n+1)!!}} \right)^{\frac{n}{n+1}}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+3)^n (2n+3)} \cdot \frac{(2n+1)^n}{(2n-1)!!}},$$

$$b = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^n \cdot \frac{2n+1}{2n+3}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{2n+3}\right)^{\frac{2n+3}{-2} \cdot \frac{-2n}{2n+3}}} = \sqrt{e^{-1}} = e^{-\frac{1}{2}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = a \cdot \ln b = \sqrt{\frac{e}{2}} \cdot \ln e^{-\frac{1}{2}} = \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{e}{2}},$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{\sqrt{n}} = \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{e}{2}} \cdot 0 = 0.$$

UP.007. Let be $a, r \in (0, \infty); (a_n)_{n \geq 1}; a_1 = a; a_{n+1} = a_n + r, \quad n \in \mathbb{N}^*; b_n = \prod_{k=1}^n a_k, c_n = \prod_{k=1}^n b_k^2.$

Fiind:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 \sqrt[n]{c_n}}.$$

Proposed by D.M.Batinetu-Giurgiu, Neculai Stanciu –Romania

Solved by Profesor : George-Florin Serban, Pedagogical High School, Braila, Romania.

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n^2]{c_n}}.$$

$$\ln l = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n^2]{\frac{n}{c_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{n}{c_n}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{(n+1)^{(n+1)^2}}{c_{n+1}} - \ln \frac{n^{n^2}}{c_n}}{(n+1)^2 - n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{(n+1)^{(n+1)^2} c_n}{c_{n+1} n^{n^2}}}{2n+1}, \text{ (Cesaro}$$

Stolz)

$$\ln l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{(n+1)^{(n+1)^2} c_n}{c_{n+1} n^{n^2}}}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{(n+2)^{(n+2)^2} c_{n+1}}{c_{n+2} (n+1)^{(n+1)^2}} - \ln \frac{(n+1)^{(n+1)^2} c_n}{c_{n+1} n^{n^2}}}{(2n+3) - (2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{n^{n^2} (n+2)^{(n+2)^2} c_{n+1}^2}{(n+1)^{2(n+1)^2} c_n c_{n+2}}}{2},$$

$$\frac{c_{n+1}^2}{c_n c_{n+2}} = \frac{b_{n+1}^4}{b_{n+1}^2 b_{n+2}^2} = \frac{b_{n+1}^2}{b_{n+2}^2} = \frac{1}{a_{n+2}^2} = \frac{1}{[a + (n+1)r]^2},$$

$$\frac{n^{n^2} (n+2)^{(n+2)^2} c_{n+1}^2}{(n+1)^{2(n+1)^2} c_n c_{n+2}} = \frac{n^{n^2} (n+2)^{n^2} (n+2)^{4n} (n+2)^4}{(n+1)^{2n^2} (n+1)^{4n} (n+1)^2 [a + (n+1)r]^2} = \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}\right)^{n^2} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{4n+2} \left(\frac{n+2}{a + (n+1)r}\right)^2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}\right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{-1}{n^2 + 2n + 1}\right)^{\frac{n^2 + 2n + 1}{-1}} \right\}^{\frac{-n^2}{n^2 + 2n + 1}} = e^{-1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{4n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{1}} \right\}^{\frac{4n+2}{n+1}} = e^4,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{a + (n+1)r}\right)^2 = \left(\frac{1}{r}\right)^2 = r^{-2},$$

$$\ln l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{n^{n^2} (n+2)^{(n+2)^2} c_{n+1}^2}{(n+1)^{2(n+1)^2} c_n c_{n+2}}}{2} = \frac{\ln e^{-1} \cdot e^4 \cdot r^{-2}}{2} = \ln \sqrt{e^3 \cdot r^{-2}}, \quad l = \sqrt{e^3 \cdot r^{-2}} = \frac{e\sqrt{e}}{r},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n^2]{c_n}} = \frac{e\sqrt{e}}{r}.$$

JP.027. Fiind all real numbers x satisfying the following equation

$$(x + \{x\})^2 - (x + \{x\}) = 6[x]\{x\} - 1$$

Where $[x]$ and $\{x\}$ denote the integer part and fractional part of x , respectively.

Proposed by Nguyen Viet Hung -Hanoi - Vietnam

Solved by Profesor : George-Florin Serban, Pedagogical High School, Braila, Romania.

$$x = [x] + \{x\}, [x] = t, \quad (x + x - t)^2 - (x + x - t) = 6t(x - t) - 1,$$

$$(2x - t)^2 - 2x + t = 6tx - 6t^2 - 1, \quad 4x^2 - 4tx + t^2 - 2x + t - 6tx + 6t^2 + 1 = 0,$$

$$4x^2 - x(10t + 2) + 7t^2 + t + 1 = 0,$$

$$\Delta = (10t + 2)^2 - 16(7t^2 + t + 1) = 100t^2 + 40t + 4 - 112t^2 - 16t - 16 = -12t^2 + 24t - 12 \geq 0,$$

$$-12t^2 + 24t - 12 \geq 0, \quad t^2 - 2t + 1 \leq 0, \quad (t - 1)^2 \leq 0, \quad (t - 1)^2 \geq 0, \quad t - 1 = 0, \quad t = 1, \quad [x] = 1,$$

$$x \in [1, 2).$$

3. OTHER SOLUTIONS FOR CERTAIN PROBLEMS FROM THE PENTAGON

By Neculai Stanciu, Buzău, Romania and
Titu Zvonaru, Comănești, Romania

Problem 749. *Proposed by Tom Moore, Professor Emeritus, Bridgewater State University, Bridgewater, MA.*

The pentagonal numbers are 1, 5, 12, 22, ... and are given by $P_n = \frac{n(3n-1)}{2}, \forall n \geq 1$.

Prove that every positive even power of 2 is expressible as the difference of two pentagonal numbers.

Solution: We must have

$$\frac{m(3m-1)}{2} - \frac{n(3n-1)}{2} = 2^{2k} \Leftrightarrow (m-n)(3m+3n-1) = 2^{2k+1}.$$

We take

$$m = \frac{2^{2k} + 2}{3}, \quad n = \frac{2^{2k} - 1}{3}$$

And it is easy to see that m and n are positive integers.

We are done!

Problem 750. *Proposed by Tom Moore, Professor Emeritus, Bridgewater State University, Bridgewater, MA.*

It is fairly well known that if (a, b, c) is a primitive Pythagorean triple (PPT), then the product abc is divisible by 60. Find infinitely many PPTs (a, b, c) such that abc is divisible by 120.

Solution: A (PPT) has the lengths of sides $m^2 + n^2, m^2 - n^2, 2mn$, where m, n are positive integers with different parities, coprime and $m > n$. If we take $m = 4^{2k+1}, n = 1$ we have

$$abc = 2^{4k+3}(4^{2k+1} + 1)(4^{2k+1} - 1)(4^{4k+2} + 1).$$

Since $4^{2k+1} + 1$ is divisible by 5, $4^{2k+1} - 1$ is divisible by 3, yields that for $k \geq 1$ positive integer abc is divisible by 128×15 , so is divisible by 120, and we are done!

Problem 751. *Proposed by Iuliana Trasca, Olt, Romania.*

Prove that if $a, b, c > 0$, then $a^{11} + b^{11} + c^{11} \geq a^4 b^4 c^4 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

Solution: By Chebyshev's inequality and AM-GM inequality we have

$$\begin{aligned} a^{11} + b^{11} + c^{11} &= a^9 a^2 + b^9 b^2 + c^9 c^2 \geq \frac{1}{3} (a^9 + b^9 + c^9) (a^2 + b^2 + c^2) \geq \\ &\geq \frac{1}{3} \cdot 3 \sqrt[3]{a^9 b^9 c^9} (ab + bc + ca) = a^4 b^4 c^4 \cdot \frac{ab + bc + ca}{abc} = a^4 b^4 c^4 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right). \end{aligned}$$

We are done!

Problem 752. *Proposed by Iuliana Trașcă, Olt, Romania.*

Prove that if $x, y, z > 0$, then $\frac{x+y+2z}{4x+4y+3z} + \frac{2x+y+z}{3x+4y+4z} + \frac{x+2y+z}{4x+3y+4z} \geq \frac{12}{11}$

Solutions:

I. We have

$$\begin{aligned} \sum_{cyclic} \frac{x+y+2z}{4x+4y+3z} - \frac{12}{11} &= \sum_{cyclic} \left(\frac{x+y+2z}{4x+4y+3z} - \frac{4}{11} \right) = \sum_{cyclic} \frac{5(z-x) + 5(z-y)}{11(4x+4y+3z)} = \\ &= \sum_{cyclic} \frac{5(z-x)}{11(4x+4y+3z)} + \sum_{cyclic} \frac{5(z-y)}{11(4x+4y+3z)} = \frac{5}{11} \sum_{cyclic} \frac{z-x}{4x+4y+3z} + \frac{5}{11} \sum_{cyclic} \frac{x-z}{3x+4y+4z} = \\ &= \frac{5}{11} \sum_{cyclic} \frac{(z-x)(3x+4y+4z-4x-4y-3z)}{(4x+4y+3z)(3x+4y+4z)} = \frac{5}{11} \sum_{cyclic} \frac{(z-x)^2}{(4x+4y+3z)(3x+4y+4z)} \geq 0. \end{aligned}$$

II. Due to homogeneity, we may assume that $x+y+z=1$; we have to prove that

$$\frac{1+z}{4-z} + \frac{1+x}{4-x} + \frac{1+y}{4-y} \geq \frac{12}{11}.$$

If t is a real number, with $t < 4$, then we have

$$\frac{1+t}{4-t} \geq \frac{45t}{121} + \frac{29}{121} \iff 5(3t-1)^2 \geq 0.$$

Writing this inequality for x, y, z and adding up, it results that

$$\frac{1+z}{4-z} + \frac{1+x}{4-x} + \frac{1+y}{4-y} \geq \frac{45(x+y+z)}{121} + \frac{3 \cdot 29}{121} = \frac{132}{121} = \frac{12}{11}.$$

III. The given inequality is equivalent, in succession, to

$$\begin{aligned} \frac{4x+4y+8z}{4x+4y+3z} + \frac{8x+4y+4z}{3x+4y+4z} + \frac{4x+8y+4z}{4x+3y+4z} &\geq \frac{48}{11} \\ 1 + \frac{5z}{4x+4y+3z} + 1 + \frac{5x}{3x+4y+4z} + 1 + \frac{5y}{4x+3y+4z} &\geq \frac{48}{11} \\ \frac{x}{3x+4y+4z} + \frac{y}{4x+3y+4z} + \frac{z}{4x+4y+3z} &\geq \frac{3}{11} \quad (1) \end{aligned}$$

Using the Bergstrom's Inequality we obtain

$$\begin{aligned} \frac{x}{3x+4y+4z} + \frac{y}{4x+3y+4z} + \frac{z}{4x+4y+3z} &= \frac{x^2}{3x^2+4xy+4xz} + \frac{y^2}{4xy+3y^2+4xz} + \frac{z^2}{4xz+4yz+3z^2} \geq \\ &\geq \frac{(x+y+z)^2}{3(x^2+y^2+z^2)+8(xy+yz+zx)}. \end{aligned}$$

It remains to prove that

$$\begin{aligned} 11(x^2+y^2+z^2) + 22(xy+yz+zx) &\geq 9(x^2+y^2+z^2) + 24(xy+yz+zx) \\ 2(x^2+y^2+z^2) - 2(xy+yz+zx) &\geq 0 \\ (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

IV. Another proof for the inequality (1).

We denote $3x+4y+4z = 11a$, $4x+3y+4z = 11b$, $4x+4y+3z = 11c$. It follows that $x = -7a+4b+4c$, $y = 4a-7b+4c$, $z = 4a+4b-7c$ and the inequality (1) is equivalent to

$$\begin{aligned} \frac{-7a+4b+4c}{11a} + \frac{4a-7b+4c}{11b} + \frac{4a+4b-7c}{11c} &\geq \frac{3}{11} \\ 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) &\geq 24, \end{aligned}$$

which is true because $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$, $\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2$.

Problem 755. *Proposed by Mohammad K. Azarian, University of Evansville, Evansville, Indiana.*

Sara has a total number of 26 paper bills in denominations of \$1, \$5, \$10 and \$20 in her purse. The number of \$5 bills is 4 times the number of \$10 bills, and the number of \$1 bills is 1 less than twice the number of \$5 bills. She remembers that the total amount is less than \$100 and more than \$90. Furthermore, she remembers that the total amount is an odd number, but it is not 91 or 99. How much money does she have and what is the number of each denomination?

Solution: We denote by x, y, z and t the number of paper bills in denominations of \$1, \$5, \$10 and \$20. From the statement yields that

$$\begin{cases} x + y + z + t = 26 \\ y = 4z \\ x = 2y - 1 = 8z - 1 \\ 90 < x + 5y + 10z + 20t < 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 130z + 10t = 270 \\ 19z + 10t = a \in \mathbb{Z} \end{cases}, \text{ where } a \in \{46, 47, 48, 49, 50\}.$$

Since we obtain that $111z = 270 - a \Rightarrow a = 48 \Rightarrow x = 15, y = 8, z = 2, t = 1$, and we are done!

Problem 756. *Proposed by Jose Luis Diaz-Barrero, Technical University of Catalonia (BARCELONA TECH), Barcelona, Spain.*

Find all triples of nonzero real numbers x, y, z such that

$$\begin{aligned} 36 \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) &= 1 \\ 36 \left(\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy} \right) &= 49 \\ 36^2 \left(\frac{1}{x^2 y^2} + \frac{1}{y^2 z^2} + \frac{1}{z^2 x^2} \right) &= 49 \end{aligned}$$

Solution: The given system is written

$$\begin{aligned} 36(x + y + z) &= xyz \\ 36(x^2 + y^2 + z^2) &= 49xyz \\ 36^2(x^2 + y^2 + z^2) &= 49x^2 y^2 z^2 \end{aligned}$$

We deduce that $xyz = 36$, $x + y + z = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 49$

Yields that $xy + yz + zx = -24$, so x, y, z are the roots of the equation

$$t^3 - t^2 - 24t - 36 = 0 \Leftrightarrow (t - 2)(t + 3)(t - 6) = 0.$$

We obtain the following solutions of the system

$$\{x, y, z\} = \{-2, -3, 6\}.$$

We are done!

Problem 757. *Proposed by Jose Luis Diaz-Barrero, Technical University of Catalonia (BARCELONA TECH), Barcelona, Spain.*

Let a, b be two complex numbers lying on the circle $|z| = 1$. Prove that

$$\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{1-ab}\right)^2 \geq 1$$

Solution: Let

$$a = \cos\alpha + i\sin\alpha, b = \cos\beta + i\sin\beta.$$

Since

$$\begin{aligned} a+b &= 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \\ 1+ab &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \\ a-b &= -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} - i\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \\ 1-ab &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} - i\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \right), \end{aligned}$$

the given inequality becomes

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}} + \frac{\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}} &\geq 1 \Leftrightarrow (1+\cos(\alpha-\beta))(1-\cos(\alpha+\beta)) + (1-\cos(\alpha-\beta))(1+\cos(\alpha+\beta)) \geq 1-\cos^2(\alpha+\beta) \\ \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta) + 1 &\geq 0. \end{aligned}$$

The last inequality is true because the discriminant is $\Delta = \cos^2(\alpha-\beta) - 1 \leq 0$, and we are done!

Problem 758. *Proposed by the editor.*

Prove that the sequence 11231, 1012301, 100123001, 10001230001 ... (i.e, each number starts and ends with 1 and has $k \geq 0$ zeroes on either side of 123) has an infinite subsequence of all composite numbers.

Solution: It is well-known (by the criterion for divisibility with 11) that the numbers which have an even digits equal with zero on either side of 123 are divisible by 11, so are composite. We are done!

Problem 759. *Proposed by Marcel Chirita, Bucharest, Romania.*

Show how to evaluate the definite integral $\int_0^1 \frac{(x-x^2) \arctan x}{(1+x)(1+x^2)} dx$

Solution: We denote the given integral with I .

We make the changes $t = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan t$, and we have

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t \tan t (1 - \tan t)}{1 + \tan t} dt.$$

We make the changes $t = \frac{\pi}{4} - u \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{4} - t$, and yields that

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \tan u) \tan u}{1 + \tan u} \left(\frac{\pi}{4} - u \right) du, \text{ so}$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \tan u) u \tan u}{1 + \tan u} du + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \tan u) \tan u}{1 + \tan u} \left(\frac{\pi}{4} - u \right) du = \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \tan u) \tan u}{1 + \tan u} du$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{\pi}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \tan u) \tan u}{1 + \tan u} du.$$

We make the changes $v = \tan u \Leftrightarrow u = \arctan v$, and we obtain

$$I = \frac{\pi}{8} \int_0^1 \frac{v - v^2}{(1 + v)(1 + v^2)} dv = \frac{\pi}{8} \int_0^1 \frac{1 + v - (1 + v^2)}{(1 + v)(1 + v^2)} dv = \frac{\pi}{8} \left(\int_0^1 \frac{1}{1 + v^2} dv - \int_0^1 \frac{1}{1 + v} dv \right) =$$

$$I = \frac{\pi}{8} \arctan v \Big|_0^1 - \frac{\pi}{8} \ln(1 + v) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} \left(\frac{\pi}{4} - \ln 2 \right) = \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi \ln 2}{8}.$$

4. DRUMURI MINIME ÎNTRE PUNCTE, DREPTE STUDIU DE SPECIALITATE-REZULTATE

Partea I-a

Prof. Stan Ilie
Colegiul Tehnic “Anghel Saligny”, Roșiorii de Vede, Teleorman

Noțiuni cunoscute:

Punct, Dreaptă, Distanța între două puncte, Distanța de la un punct la o dreaptă. Și altele...

Scop:

Determinarea drumului de lungime minimă dintre două elemente, ce trece printr-un al treilea element.

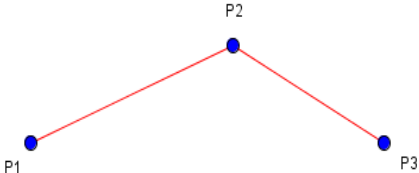
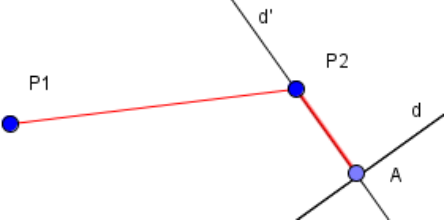
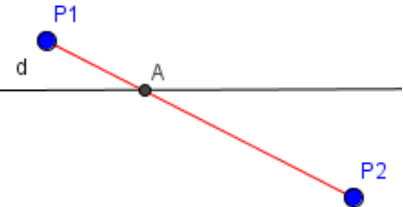
Elemente:

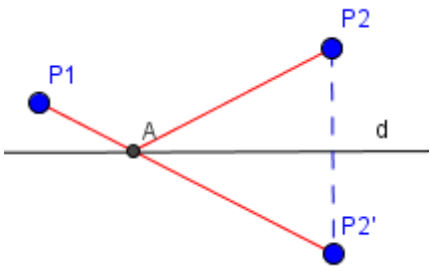
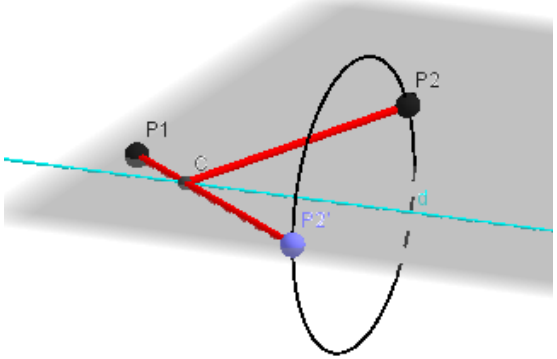
Puncte, Drepte

Notății:

dm =drum minim

X - Y - Z =drumul de la elementul X la elementul Z ce trece prin elementul Y .

I.	3P	3 PUNCTE	
	P_1 - P_2 - P_3	$dm=[P_1P_2]+[P_2P_3]$	
II.	2P+1d	DOUĂ PUNCTE ȘI O DREAPTĂ	
A	P_1 - P_2 - d	Fie A proiecția lui P_2 pe d . $dm=[P_1P_2]+[P_2A]$	
B	P_1 - d - P_2		
1.	Toate elementele coplanare		
a)	Punctele situate de o parte și de cealaltă a dreptei	$dm=[P_1P_2]$	

b)	Punctele situate de aceeași parte a dreptei	Fie P_2' simetricul lui P_2 față de d. $A = d \cap [P_1P_2']$ $dm = [P_1A] + [AP_2]$	
2.	Elemente necoplanare	Fie α planul determinat de d și P_1. $P_2 \notin \alpha$ Fie C cercul determinat de rotirea lui P_2 în jurul lui d. P_2' este $C \cap \alpha$ alături de P_2 și P_1 sunt separate de dreapta d. $C = d \cap [P_1P_2']$ $dm = [P_1C] + [CP_2]$	

(Va urma)

5. A CONSEQUENT OF KARAMATA'S THEOREM

**Leonard Giugiuc și Diana Trailescu,
Drobeta Turnu Severin**

*Abstract: Karamata's theorem we'll lead us to a very useful result in inequalities solving .
Vom reaminti, pentru inceput, teorema lui Karamata .*

Teorema 1 (Karamata):

Fie I un interval inclus in multimea numerelor reale si o functie convexa $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

Daca $(x_1, \dots, x_n)$ si $(y_1, \dots, y_n)$ sunt doua secvente finite cu elemente din I astfel incat $(x_1, \dots, x_n)$ o majoreaza pe $(y_1, \dots, y_n)$, atunci $f(x_1) + \dots + f(x_n) \geq f(y_1) + \dots + f(y_n)$.

Vom reaminti ca $(x_1, \dots, x_n)$ o majoreaza pe $(y_1, \dots, y_n)$ daca:

(i) $x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n$;

(ii) $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ si $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$;

(iii) $x_1 + \dots + x_k \geq y_1 + \dots + y_k \forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Scopul notei de fata este acela de a arata cum se aplica teorema 1, si nu acela de a da o demonstratie acesteia, aspectele teoretice gasindu-se in bibliografie .

Teorema 2 (Leonard Giugiuc):

Fie $x_1, \dots, x_n$ numere reale nenegative astfel incat $x_1 + \dots + x_n = n$.

Atunci pentru orice numar pozitiv α ,

$x_1^\alpha + \dots + x_n^\alpha \leq \max\{n, n^\alpha\}$.

Demonstratia teoremei 2:

Daca $\alpha < 1$, atunci functia $f(x)$

$= x^\alpha$ este concava pe intervalul $[0, \infty)$, deci in virtutea teoremei

lui Jensen , $f(x_1) + \dots + f(x_n) \leq nf\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) = nf(1) = n$.

Daca $\alpha > 1$, atunci functia $f(x) = x^\alpha$ este convexa pe intervalul $[0, \infty)$.

Vom presupune WLOG ca $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$. Este evident ca secventa

$(n, 0, \dots, 0)$ majoreaza secventa $(x_1, \dots, x_n)$. Deci in virtutea teoremei 1,

$x_1^\alpha + \dots + x_n^\alpha = f(x_1) + \dots + f(x_n) \leq f(n) + \dots + f(0) = n^\alpha$.

Deci demonstratia teoremei 2 este incheiata .

Aplicatia 3 (Hung Nguyen Viet, Vietnam):

Fie numerele reale a, b, c si d astfel incat $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$.

Sa se demonstreze ca $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \leq 8$.

Demonstratia aplicatiei 3 (Diana Trailescu):

Avem:

$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \leq |a|^3 + |b|^3 + |c|^3 + |d|^3$; in alta ordine de idei,

$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$.

Notam $|a|^2 = x, |b|^2 = y, |c|^2 = z$ si $|d|^2 = t$. Deci

$x, y, z, t \geq 0$ si $x + y + z + t = 4$. Mai mult, $|a|^3 = x^{\frac{3}{2}}, |b|^3 = y^{\frac{3}{2}}, |c|^3 = z^{\frac{3}{2}}$ si $|d|^3 = t^{\frac{3}{2}}$.

In virtutea teoremei 2, obtinem:

$|a|^3 + |b|^3 + |c|^3 + |d|^3 = x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{3}{2}} \leq 4^{\frac{3}{2}} = 8$.

Demonstratia aplicatiei 3 a fost incheiata .

Bibliografie:

- 1) https://en.wikipedia.org/wiki/Karamata's_inequality
- 2) http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t243f6_inequalities
- 3) <https://www.facebook.com/groups/1486244404996949/>

6. O TEOREMĂ UTILĂ ÎN DEMONSTRAREA UNOR INEGALITĂȚI

Prof. Sebastian Ilinca

În [1] apare următoarea teoremă, ea constituie o sursă importantă pentru obținerea de numeroase inegalități.

Teoremă: Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă (funcția poate avea și domeniul intervalul $[0, 1)$) $f(1) > 1$ (sau $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$).

Fie g o funcție continuă cu domeniul $[0, 1)$ și $g(1) \leq 1$. Presupunând că $\frac{f(x)}{x}$ și $\frac{g(x)}{x}$ sunt strict descrescătoare pe domeniile lor de definiție și $f(x) \neq x$, $x \in (0, 1)$.

Demonstrați că $f(g(x)) \leq g(f(x))$, $x \in (0, 1)$.

Demonstrație: Deoarece $\frac{f(x)}{x}$ este descrescătoare pentru $0 < y \leq 1$ avem

$$\frac{f(xy)}{xy} \leq \frac{f(x)}{x}, \quad 0 < x < 1 \text{ și în consecință } f(xy) \leq yf(x), \quad \forall x \in (0, 1), y \in (0, 1). \quad (1).$$

Deoarece $f(0) = 0$, $f(1) > 1$ și ținând cont de faptul că f este continuă rezultă că există $\varepsilon_1 \in (0, 1)$ a.î. $f(\varepsilon_1) = 1$ și $f(x) > 1$, $\forall x \in [\varepsilon_1, 1)$.

Din $\frac{f(x)}{x}$ crescătoare rezultă că și f este crescătoare astfel există un unic ε_1 cu proprietățile date.

Vom determina șirul $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ recursiv $f(\varepsilon_{n+1}) = \varepsilon_n$ și $f(x) \geq \varepsilon_n$, $\forall x \in [\varepsilon_{n+1}, 1)$.

Atunci $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ este șir de numere pozitiv descrescător, el va converge la un punct limită ε .

Dacă $\varepsilon > 0$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\varepsilon_n) = f(\varepsilon) = \varepsilon$. (f este continuă). Deoarece am presupus că

$f(x) \neq x$, $x \in (0, 1)$ deducem că $\varepsilon = 0$.

Fie $\varepsilon_0 = 1$. Cum $\varepsilon_n \rightarrow 0$ fiecare x va aparține unuia din intervalele $[\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n]$. În acest interval avem $f(x) \geq \varepsilon_n$.

Relația (1) se rescrie $f(g(x)) = f\left(x \frac{g(x)}{x}\right) \leq \frac{f(x)g(x)}{x}$, $\forall x \in [\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n]$.

Relația (1) este aplicabilă deoarece $\frac{g(x)}{x} \leq \frac{g(1)}{1} \leq 1$ (2).

Pentru $x \in (\varepsilon_1, 1)$, $f(1) > 1$ și astfel $\frac{g(1)}{1} \leq \frac{g(f(x))}{f(x)}$, deoarece $\frac{g(x)}{x}$ este descrescătoare.

Avem $f(g(x)) \leq g(f(x))$, $\forall x \in (\varepsilon_1, 1)$.

Dacă $n \geq 1$, deoarece funcția $\frac{g(x)}{x}$ este descrescătoare se obține

$$f(g(x)) \leq \frac{f(x)g(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n}, x \leq \varepsilon_n. \text{ Dar, } \varepsilon_n \leq f(x) \text{ și } g \text{ este descrescătoare}$$

$$f(g(x)) \leq f(x) \frac{g(f(x))}{f(x)} = g(f(x)), x \in [\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n).$$

Cum n a fost ales arbitrar concluzia este valabilă pentru orice $x \in (0, 1)$. ■

Vom ilustra aplicabilitatea teoremei pentru următoarele exemple:

1. Fie $f(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$, $g(x) = x^a$, $a > 1$. Punând $x := \frac{2}{\pi}$ se obține

$$\operatorname{tg} \left[\left(\frac{2}{\pi} \right)^{a-1} y^a \right] \leq \left(\frac{2a}{\pi} \right)^{a-1} (\operatorname{tgy})^a.$$

Pentru $a = 2$ se obține inegalitatea $\operatorname{tg} \frac{2y^2}{\pi} \leq \left(\frac{2}{\pi} \right) \operatorname{tg}^2 y$, $\forall y \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right)$.

2. Fie $f(x) = -\ln(1-x)$, $g(x) = x^a$, $a \geq 1$. Atunci $\ln \frac{1}{1-x^a} \leq \left(\log \frac{1}{1-x} \right)^a$, $\forall x \in (0, 1)$.

Punem $x = 1 - e^{-y}$, $y > 0$ și se obține imediat inegalitatea

$$\ln \frac{1}{1 - (1 - e^{-y})^a} \leq y^a, y > 0, a > 1.$$

Luând funcțiile $f(x) = -\log(1-x)$, $g(x) = \frac{e^x - 1}{e - 1}$ se obține prin aplicarea teoremei

3. inegalitatea $\ln \frac{e-1}{e-e^x} \leq \frac{x}{(1-x)(e-1)}$, $\forall x \in [0, 1)$

BIBLIOGRAFIE

1. Boas R.P: Inequalities for a collection .Math . Mag.52,28-31,1997
2. Rădulescu V, T.Rădulescu : Problems in Real Analysis: Advanced Calculus on the Real Axis, Springer, New York, 2009

7. INEGALITĂȚI GEOMETRICE ȘI INEGALITĂȚI ALGEBRICE. PRINCIPIUL DUALITĂȚII

Prof. Dobre Andrei Octavian

Există o stransă legătură între inegalitățile geometrice într-un triunghi și inegalitățile algebrice între trei numere reale și pozitive.

Propozitie: Numerele a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi dacă și numai dacă există trei numere $x, y, z > 0$, astfel încât $a = y + z, b = z + x, c = x + y$

Importanța acestei propoziții este mare, întrucât, dacă a, b, c, p, R, r, S sunt marimile ce caracterizează un triunghi oarecare ABC , iar $F(a, b, c, p, R, r, S) \geq 0$ este o inegalitate ce leagă aceste marimi, atunci este adevărată și inegalitatea $F(a', b', c', p', R', r', S') \geq 0$, unde marimile $a', b', c', p', R', r', S'$ sunt date de următoarele relații:

$$a' = y + z, b' = z + x, c' = x + y, p' = x + y + z, R' = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}}, r' = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}},$$

$$S' = \sqrt{xyz(x+y+z)}$$

Reciproc, pentru orice inegalitate de forma $G(x, y, z) \geq 0$ cu $x, y, z > 0$, există inegalitatea geometrică $G(p-a, p-b, p-c) \geq 0$, unde $a = y + z, b = z + x, c = x + y, p = x + y + z$ sunt marimile laturilor, respectiv semiperimetrul unui triunghi ABC . Acesta este principiul dualității între inegalitățile geometrice și inegalitățile algebrice și în conformitate cu el putem reduce demonstrarea unei inegalități geometrice în triunghi la demonstrarea unei inegalități algebrice între trei numere reale și pozitive. De asemenea, o inegalitate între trei numere reale și pozitive poate fi demonstrată prin demonstrarea unei inegalități geometrice, inegalitatea duală ei.

Voi ilustra în cele ce urmează printr-un exemplu concret acest principiu al dualității dintre inegalitățile geometrice și inegalitățile algebrice.

INEGALITATEA LUI EULER $R \geq 2r$

Această inegalitate a fost demonstrată de Euler care a calculat pătratul distanței dintre centrul O al cercului circumscris unui triunghi și centrul I al cercului înscris în același triunghi:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr$$

Inegalitatea rezultă imediat: $OI^2 = R^2 - 2Rr \geq 0 \Leftrightarrow R(R - 2r) \geq 0 \Leftrightarrow R - 2r \geq 0 \Leftrightarrow R \geq 2r$

Conform principiului de dualitate formulat înainte, inegalității geometrice $R \geq 2r$ îi corespunde inegalitatea algebrică

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}} \geq 2\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}} \Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz, x, y, z > 0, \text{ care rezultă prin}$$

aplicarea inegalității mediilor și înmulțirea inegalităților:

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}, y + z \geq 2\sqrt{yz}, z + x \geq 2\sqrt{zx}$$

Inegalitatea lui Euler este echivalentă cu o lungă serie de inegalități geometrice în triunghi.

Listă cu inegalități echivalente cu inegalitatea lui Euler:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{R^2}$$

$$\frac{1}{\sin A \sin B} + \frac{1}{\sin B \sin C} + \frac{1}{\sin C \sin A} \geq 4$$

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}$$

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$$

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

8. DIGIMATHART/PROGRAMARE MATEMATICA IN GRAFICA - O ABORDARE INTERDISCIPLINARA NECESARA UNUI INVATAMANT DE CALITATE

Motto: “CEL MAI PUTERNIC ARGUMENT PENTRU INTERDISCIPLINARITATE ESTE CHIAR FAPTUL CA VIATA NU ESTE IMPARTITA PE DISCIPLINE.” J. Moffet

Este evident ca sistemul traditional de educatie nu mai poate satisface nevoia de cunoastere a generatiilor care se nasc si se dezvoltă acum într-o lume a informatiei si a tehnologiei aflate în evolutie exponentiala. Saltul calitativ către un sistem de educatie dinamic, adaptabil si personalizat se poate face doar prin conexiuni între discipline si prin legaturi între notiunile invatate la diverse cursuri. Inter-disciplinele devin, astfel, o solutie si o necesitate.

DigiMathArt (Programarea Matematica în Grafica) este una dintre inter-disciplinele care pot face trecerea spre cunoastere – scopul educatiei viitorului – iar eficienta ei este recunoscuta de specialistii în educatie la nivel international.

Metoda DigiMathArt este centrata pe aplicatii practice, sustinute de notiuni teoretice ce apartin mai multor capitole si discipline. Interactivitatea permanenta si eliberarea creativitatii naturale a copilului asigura o invatare fluida si autentica, bine fixata la nivel cerebral.

Cursul este structurat pe 3 module, corespunzător actualelor clase 9-11. Fiind gândit ca o solutie de eliminare a lacunelor acumulate la orele de curs traditionale, NU necesita cunostinte din matematica sau informatica de liceu.

PROGRAMARE MATEMATICĂ



MODULUL I Modelare Matematică

Matematică:
- compunere de funcții
- ecuații parametrice

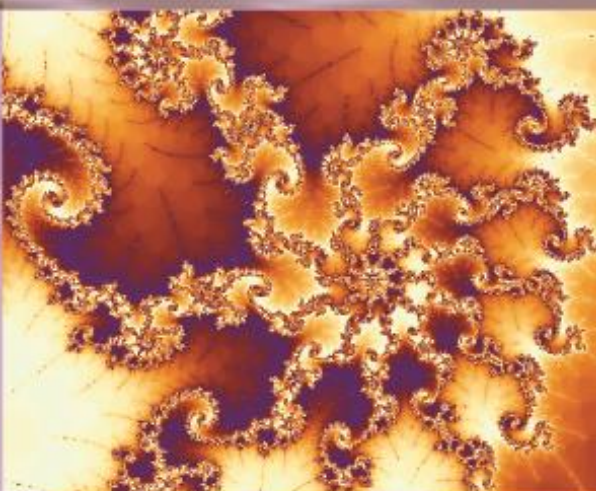
Informatică:
- programare C / C++



MODULUL II Fractali

Matematică:
- numere complexe
- matrici
- șiruri
- fractali

Informatică:
- programare procedurală în C / C++



MODULUL III Tehnici de programare pentru grafică 2D și 3D

Matematică:
- geometrie analitică
- geometrie vectorială

Informatică:
- Programare
Orientată pe Obiecte în C++
- metoda Ray Tracing



Date de contact: Roxana Drăgănoiu, 0745 065 963
<http://mate-hobby.blogspot.ro/>

9. SOLUȚII PENTRU PROBLEMA LUNII NOIEMBRIE 2016

Propusă de conf. dr. Gheorghe PROCOPIUC, Universitatea Tehnică Iași



Fie ABC un triunghi oarecare. Bisectoarele interioare AA_1 , BB_1 , CC_1 ale triunghiului ABC intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului în punctele A_2 , B_2 , C_2 . Să se demonstreze dubla inegalitate:

$$3(4r)^n \leq AA_2^n + BB_2^n + CC_2^n \leq 3(2R)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Soluție: Evident $AA_2 \leq 2R$, $BB_2 \leq 2R$, $CC_2 \leq 2R$. Ducem $IB' \perp AC$ (Fig. 1). Avem: $AI = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}$. Apoi, $\triangle A_2IB$ este isoscel, deoarece $m(\widehat{A_2BI}) = m(\widehat{A_2IB}) = \frac{1}{2} [m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})]$, deci $IA_2 = BA_2 = 2R \sin \frac{A}{2}$, cum rezultă din teorema sinusurilor aplicată în $\triangle ABA_2$.

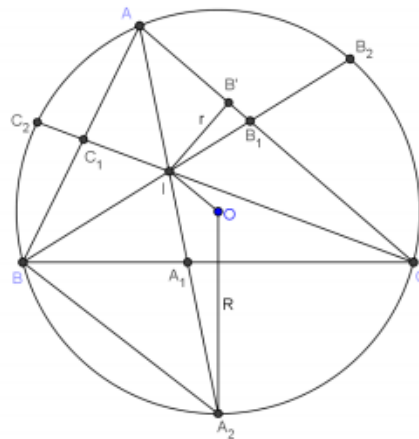


Fig. 1

Ca atare

$$AA_2 = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} + 2R \sin \frac{A}{2}. \quad (1)$$

Pe de altă parte, puterea punctului I față de cercul $C(O, R)$ fiind $AI \cdot IA_2 = R^2 - OI^2$, cu expresiile precedente pentru AI și IA_2 , obținem (relația lui Euler):

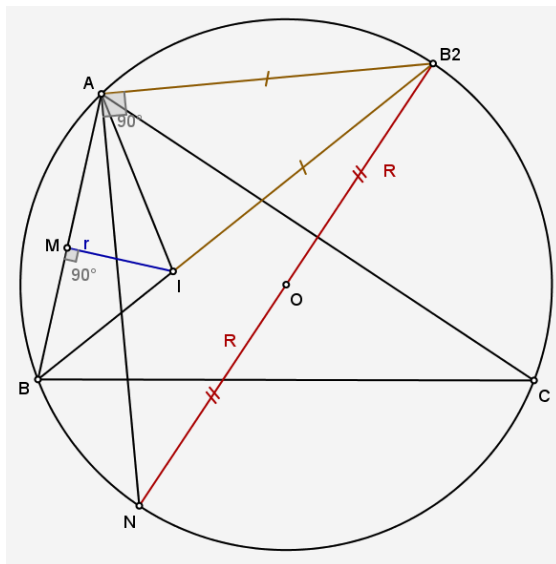
$$OI^2 = R^2 - 2rR. \quad (2)$$

$$AA_2 = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} + 2 \left(r + \sqrt{r^2 + a^2} \right) \sin \frac{A}{2}.$$
$$r \left(1 - 4 \sin \frac{A}{2} + 2 \sin^2 \frac{A}{2} \right) + 2\sqrt{r^2 + a^2} \sin^2 \frac{A}{2} \geq r \left(1 - 2 \sin \frac{A}{2} \right)^2 \geq 0.$$

PROBLEMA LUNII NOIEMBRIE 2016 – ALTE SOLUTII

Adunând aceste trei inegalități, obținem:

$$AA_2^n + BB_2^n + CC_2^n \leq 3 \cdot (2R)^n \quad (1).$$



Pentru a demonstra inegalitatea $AA_2^n + BB_2^n + CC_2^n \geq 3 \cdot (4r)^n$, prima dată demonstrăm că $BI \cdot IB_2 = 2Rr$ (și analogele).

$$\text{În triunghiul } AIB_2: m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle IAC) + m(\sphericalangle CAB_2) = \frac{m(\sphericalangle BAC)}{2} + \frac{m(\sphericalangle ABC)}{2}.$$

$$m(\sphericalangle I) = \frac{m(\sphericalangle BAC)}{2} + \frac{m(\sphericalangle ABC)}{2} \quad (\text{măsura unghiului exterior } \sphericalangle AIB_2 \text{ al triunghiului } \triangle AIB)$$

este egală cu suma măsurilor unghiurilor neadiacente lui $\sphericalangle AIB_2$, din $\triangle AIB$), deci

$$m(\sphericalangle I) = m(\sphericalangle A) \Rightarrow \triangle AIB_2 \text{ este isoscel} \Rightarrow IB_2 = AB_2. (*)$$

Avem $\triangle NB_2A \sim \triangle BIM$ (U.U. : $\sphericalangle B_2NA \equiv \sphericalangle IBM$, $m(\sphericalangle NAB_2) = m(\sphericalangle BMI) = 90^\circ$) $\Rightarrow$

$$\frac{NB_2}{BI} = \frac{AB_2}{MI} \xrightarrow{(*)} \frac{2R}{BI} = \frac{IB_2}{r} \Rightarrow BI \cdot IB_2 = 2Rr (**).$$

$$BB_2 = BI + IB_2 \stackrel{A-G}{\geq} 2\sqrt{BI \cdot IB_2} \stackrel{(**)}{=} 2\sqrt{2Rr} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} 2\sqrt{2 \cdot 2r \cdot r} = 4r, \text{ adică}$$

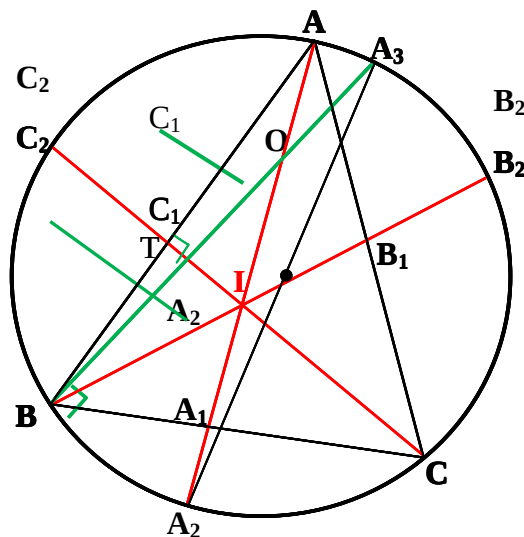
$$BB_2 \geq 4r, \quad BB_2^n \geq (4r)^n.$$

În mod similar putem scrie $AA_2^n \geq (4r)^n$, $CC_2^n \geq (4r)^n$. Însușind inegalitățile, avem:

$$AA_2^n + BB_2^n + CC_2^n \geq 3 \cdot (4r)^n \quad (2).$$

$$(1) \wedge (2) \Rightarrow 3 \cdot (4r)^n \leq AA_2^n + BB_2^n + CC_2^n \leq 3 \cdot (2R)^n \text{ q.e.d.}$$

2. Prof. Gheorghe ROTARIU – Grupul Școlar „Al. Vlahuță” Șendriceni, jud. Botoșani



Observație: Am trasat cu roșu bisectoarele unghiurilor triunghiului ABC.

Construim: O centrul cercului circumscris triunghiului ABC , A_3 punctul diametral opus lui A_2 și $IT \perp AB$, $T \in AB$.

Vom demonstra dubla inegalitate pentru o bisectoare (de exemplu AA_2):

$(4r)^n \leq AA_2^n \leq (2R)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, rezultatul rămânând valabil și pentru celelalte două, apoi se vor aduna inegalitățile membru cu membru și vom obține inegalitatea de demonstrat.

$$\triangle ATI \sim \triangle A_3BA_2 \Rightarrow \frac{TI}{BA_2} = \frac{AI}{A_3A_2} \Rightarrow TI \cdot A_3A_2 = AI \cdot BA_2 \Rightarrow 2Rr = AI \cdot BA_2 \quad (1)$$

Vom demonstra că $\triangle BIA_2$ este isoscel cu $IA_2 = BA_2$.

$\sphericalangle BIA_2$ este unghi exterior triunghiului BIA , ca atare,
 $m\angle(BIA_2) = m\angle(IBA) + m\angle(BAI)$. Dar, $m\angle(IBA)$ este egală cu jumătatea măsurii unghiului B , iar $m\angle(BAI)$ este egală cu jumătatea măsurii unghiului A (deoarece BI și AI sunt bisectoarele unghiurilor B și A). Prin urmare,

$$m\angle(BIA_2) = m\angle \frac{B}{2} + m\angle \frac{A}{2} \quad (2)$$

În triunghiul IBA_2 ,

$$m\angle(IBA_2) = m\angle(IBA_1) + m\angle(A_1BA_2) = m\angle \frac{B}{2} + m\angle \frac{A}{2} \quad (3)$$

(BI este biseectoarea unghiului B , iar $m\angle(A_1BA_2) = m\angle \frac{A}{2}$ deoarece subîntind același arc de cerc, anume A_2C).

Din relațiile (2) și (3) $\Rightarrow m\angle(BIA_2) = m\angle(IBA_2)$, deci triunghiul IA_2B este isoscel. Ca urmare, $IA_2 \equiv BA_2$. Înlocuim pe BA_2 în relația (1), vom avea următoarea egalitate:
 $2Rr = AI \cdot IA_2$

Vom utiliza inegalitatea mediilor pentru AI și IA_2 și binecunoscuta inegalitate a lui Euler: $R \geq 2r$. Avem:

$$\frac{AI + IA_2}{2} \geq \sqrt{AI \cdot IA_2} \Rightarrow AA_2 \geq 2\sqrt{AI \cdot IA_2} \Rightarrow AA_2 \geq 2\sqrt{2Rr} \geq 2\sqrt{4r \cdot r} = 2\sqrt{4r^2} = 4r$$

Deci, $4r \leq AA_2 \Rightarrow (4r)^n \leq AA_2^n \forall n \in \mathbb{N}$. Analog vom avea: $(4r)^n \leq BB_2^n \forall n \in \mathbb{N}$ și $(4r)^n \leq CC_2^n \forall n \in \mathbb{N}$, care, adunate membru cu membru, dau:

$$3 \cdot (4r)^n \leq AA_2^n + BB_2^n + CC_2^n \forall n \in \mathbb{N} \quad (4)$$

Inegalitatea $AA_2 \leq 2R$ este evidentă deoarece AA_2 este catetă în triunghiul dreptunghic A_2AA_3 cu $m\angle(A_2AA_2) = 90^\circ$ iar $A_2A_3 = 2R$ este ipotenuză (sau, o altă justificare este că AA_2 este coardă, care, evident, este mai mică decât diametrul cercului). Prin urmare $AA_2^n \leq (2R)^n \forall n \in \mathbb{N}$. Analog vom avea: $BB_2^n \leq (2R)^n \forall n \in \mathbb{N}$, și $CC_2^n \leq (2R)^n \forall n \in \mathbb{N}$.
 care, adunate membru cu membru dau:

$$AA_2^n + BB_2^n + CC_2^n \leq 3 \cdot (2R)^n \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Din (4) și (5) rezultă:

$$3 \cdot (4r)^n \leq AA_2^n + BB_2^n + CC_2^n \leq 3 \cdot (2R)^n \forall n \in \mathbb{N}. \text{ q.e.d.}$$

3. Prof. Leonard Giugiuc

Pentru inegalitatea stanga, in virtutea AM – GM, e suficient sa arat ca

$$4r \leq \sqrt[3]{AA_2 \cdot BB_2 \cdot CC_2}. \text{ Este binecunoscut faptul ca } AA_2 = \frac{bc}{AA_1} \Rightarrow AA_2 = \frac{(b+c)\sqrt{bc}}{2\sqrt{p(p-a)}} \geq \frac{bc}{\sqrt{p(p-a)}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Analog } BB_2 &\geq \frac{ac}{\sqrt{p(p-b)}} \text{ si } CC_2 \geq \frac{ab}{\sqrt{p(p-c)}} \Rightarrow \sqrt[3]{AA_2 \cdot BB_2 \cdot CC_2} \geq \sqrt[3]{\frac{(abc)^2}{pS}} \\
 &= \sqrt[3]{\frac{16S^2 R^2}{pS}} = \\
 &= \sqrt[3]{16rR^2} \geq 4r \text{ (Euler)}.
 \end{aligned}$$

Pentru inegalitatea dreapta, in virtutea principiului diametrul e coarda maxima, avem :

$$AA_2^n = (2R)^n, BB_2^n = (2R)^n \text{ si } CC_2^n = (2R)^n.$$

Prin sumare, obtinem relatia ceruta .

4. Prof. George-Florin Seban , Liceul Pedagogic “D.P.Perpessicius”, Braila

In triunghiul AA_2B , aplic teorema sinusului $\frac{AA_2}{\sin(ABA_2)} = 2R = \frac{AA_2}{\sin(\frac{A}{2} + C)}$; $AA_2 = 2R \sin(\frac{A}{2} + C)$,

$$AA_2 = 2R \sin(\frac{A}{2} + C) = 2R \cdot \cos(90^\circ - C - \frac{A}{2}) = 2R \cdot \cos(\frac{180^\circ - C - C - A}{2}) = 2R \cdot \cos(\frac{B-C}{2}), \text{ analog}$$

obtinem $BB_2 = 2R \cdot \cos(\frac{A-C}{2})$, $CC_2 = 2R \cdot \cos(\frac{A-B}{2})$. Aratam mai intai a doua inegalitate

$$AA_2^n + BB_2^n + CC_2^n = (2R \cdot \cos(\frac{B-C}{2}))^n + (2R \cdot \cos(\frac{A-C}{2}))^n + (2R \cdot \cos(\frac{A-B}{2}))^n,$$

$$AA_2^n + BB_2^n + CC_2^n = (2R)^n \cdot [(\cos(\frac{B-C}{2}))^n + (\cos(\frac{A-C}{2}))^n + (\cos(\frac{A-B}{2}))^n] \leq (2R)^n \cdot (1+1+1) = 3 \cdot (2R)^n,$$

adevarat. Arat acum prima inegalitate. Deci $AA_2 = 2R \cdot \cos(\frac{B-C}{2}) \geq 2R \cdot \cos^2(\frac{B-C}{2}) \geq 4r$, arat a doua inegalitate. Stim ca

$$4r = 16R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 8R \cos \frac{B+C}{2} (\cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{B+C}{2}) \leq 2R \cdot \cos^2(\frac{B-C}{2}), \text{ deoarece}$$

$$(\cos(\frac{B-C}{2}) - 2\cos(\frac{B+C}{2}))^2 \geq 0. \text{ Am aratat ca } 4r \leq 2R \cdot \cos^2(\frac{B-C}{2}), \text{ deci}$$

$$(4r)^n \leq (2R)^n \cdot \cos^{2n}(\frac{B-C}{2}), \text{ si analoagele } 4r \leq 2R \cdot \cos^2(\frac{A-C}{2}), \text{ deci}$$

$$(4r)^n \leq (2R)^n \cdot \cos^{2n}(\frac{A-C}{2}),$$

Si $4r \leq 2R \cdot \cos^2(\frac{A-B}{2})$, deci $(4r)^n \leq (2R)^n \cdot \cos^{2n}(\frac{A-B}{2})$. Adun cele trei inegalitati si obtin:

$$3 \cdot (4r)^n \leq (2R)^n \cdot \cos^{2n}(\frac{B-C}{2}) + (2R)^n \cdot \cos^{2n}(\frac{A-C}{2}) + (2R)^n \cdot \cos^{2n}(\frac{A-B}{2}), \text{ dar}$$

$$\cos^{2n}(\frac{B-C}{2}) + \cos^{2n}(\frac{A-C}{2}) + \cos^{2n}(\frac{A-B}{2}) \leq \cos^n(\frac{B-C}{2}) + \cos^n(\frac{A-C}{2}) + \cos^n(\frac{A-B}{2}), \text{ rezu}$$

$$3 \cdot (4r)^n \leq (2R)^n \cdot [\cos^{2n}(\frac{B-C}{2}) + \cos^{2n}(\frac{A-C}{2}) + \cos^{2n}(\frac{A-B}{2})], \text{ rezulta}$$

$$3 \cdot (4r)^n \leq (2R)^n \cdot [\cos^n(\frac{B-C}{2}) + \cos^n(\frac{A-C}{2}) + \cos^n(\frac{A-B}{2})] = AA_2^n + BB_2^n + CC_2^n, \quad \text{adevarat.}$$

5. Nela Ciceu și Roxana Mihaela Stanciu

Inegalitatea din dreapta este imediată (și este adevărată pentru orice puncte A_2, B_2, C_2 pe cerc): orice coardă este mai mică decât diametrul cercului, deci $AA_2 \leq 2R$.

Deoarece $BA_2 = CA_2 = a/(2\cos(A/2))$, folosind teorema lui Ptolemeu obținem

$$AA_2 = (b+c)/(2\cos(A/2)).$$

(Putem obține expresia lui AA_2 și fără Ptolemeu: din $BA_1 \cdot A_1C = AA_1 \cdot A_1A_2$ deducem pe A_1A_2 și apoi $AA_2 = AA_1 + A_1A_2$)

$$\begin{aligned} \text{Avem} \quad AA_2 \cdot BB_2 \cdot CC_2 &= \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \geq \frac{abc}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{4Rrp}{\frac{p}{4R}} = \\ &= 16R^2r \geq 64r^3 = (4r)^3, \end{aligned}$$

iar inegalitatea din stânga rezultă cu inegalitatea mediilor.

6. Prof. Biro Istvan

Dubla inegalitate din enunț rezultă imediat din inegalitățile $4r \leq AA_2 \leq 2R$, $4r \leq BB_2 \leq 2R$ și $4r \leq CC_2 \leq 2R$ care se demonstrează în mod similar, de exemplu pentru AA_2 :

$$\bullet \quad AA_2 = IA + IA_2 = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} + 2R \sin \frac{A}{2} \geq \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} + 4r \sin \frac{A}{2} \geq 4r,$$

unde am folosit:

$$IA_2 = BA_2 \left(m(\sphericalangle IBA_2) = m(\sphericalangle BIA_2) = m\left(\sphericalangle \frac{A}{2}\right) + m\left(\sphericalangle \frac{B}{2}\right) \right);$$

▪ inegalitatea lui Euler ($R \geq 2r$);

$$\bullet \quad \frac{r \left(2 \sin \frac{A}{2} - 1 \right)^2}{\sin \frac{A}{2}} \geq 0, \text{ egalitatea având loc când}$$

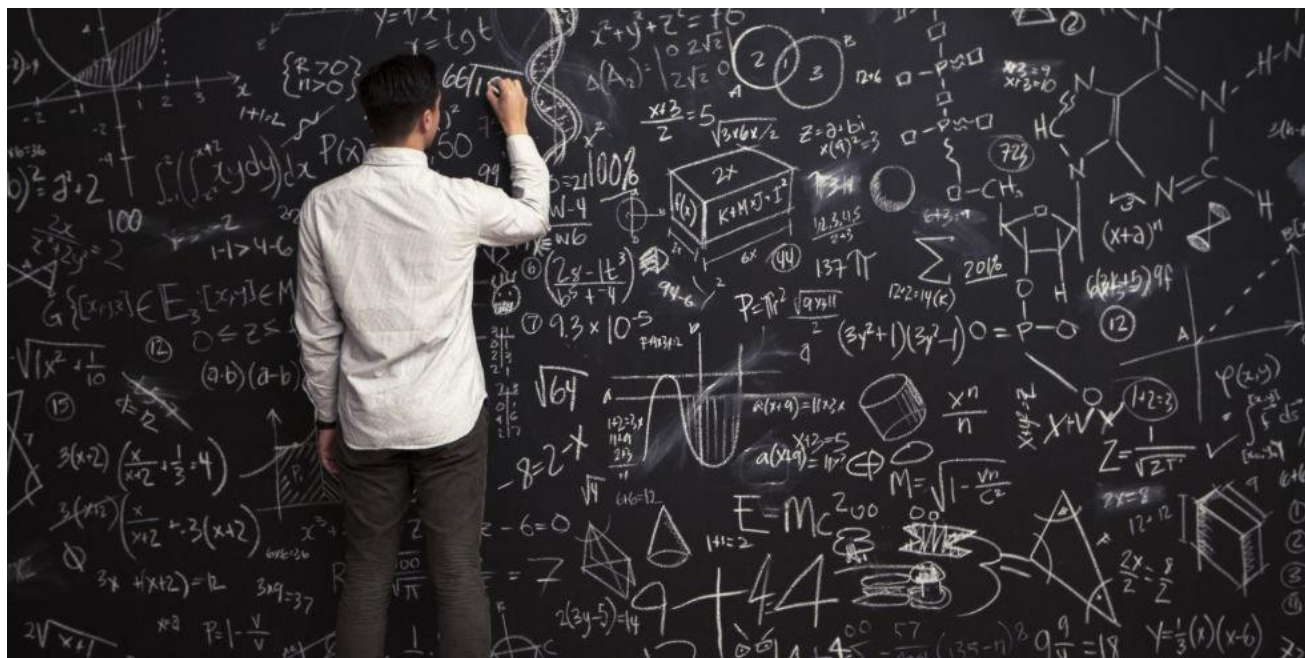
$$m(\hat{A}) = 60^\circ;$$

$$\bullet \quad AA_2 = 2R \sin(\sphericalangle ABA_2) \leq 2R \quad (\text{teorema sinusurilor în } \triangle ABA_2).$$

10. Problema lunii DECEMBRIE 2016

Fie $ABCD$ un patrulater circumscriptibil, O centrul cercului înscris, P, Q, R, S punctele de contact ale cercului cu AB, BC, CD, DA respectiv, $AP = 6$, $BQ = 7$, $CR = 8$. Să se determine $DS = d$ și $OP = r$, știind că aceste lungimi sunt numere naturale.

Prof. Mănescu Avram Corneliu



Așteptăm soluții cât mai interesante până pe data de 4.01.2017 pe adresa de e-mail revista@mateinfo.ro

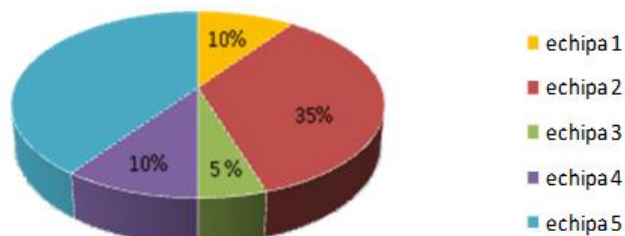
11. MODEL PENTRU LUNA DECEMBRIE 2016

EVALUARE NAȚIONALĂ LA MATEMATICĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru: 2 ore.

SUBIECTUL I – Pe foaia de examen se trec doar rezultatele. (30 de puncte)

- (5p) 1. Rezultatul calculului $2017 - 2017 \cdot 0$ este egal cu
- (5p) 2. Inversul numărului $-\frac{1}{5}$ este egal cu
- (5p) 3. Cel mai mic număr natural nenul din intervalul $[-3;5)$ este
- (5p) 4. Diametrul cercului circumscris unui triunghi dreptunghic isoscel, cu lungimea unei catete de 2 cm, are lungimea de ... cm.
- (5p) 5. Desfășurarea suprafeței laterale a unui cub este un dreptunghi cu aria de 36 cm^2 . Atunci latura cubului este ... cm.
- (5p) 6. La colectarea maculaturii, un colectiv de 30 de elevi a fost împărțit în 5 grupe. Desenul alăturat arată contribuția procentuală a fiecărei echipe la această acțiune. Știind că în total s-au strâns 500 kg de maculatură, echipa cea mai harnică a adunat.....kg.



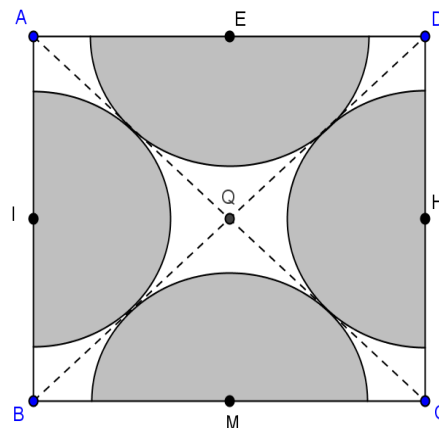
SUBIECTUL al II lea– Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

- (5p) 1. Desenați, pe foaia de examen, o prismă patrulateră regulată și notați-o.
- (5p) 2. Suma a două numere reale este egală cu 117. Aflați cele două numere știind că raportul lor este $\frac{5}{4}$.
- (5p) 3. Într-un coș sunt 150 mere. După ce mănâncă câteva, Andrei așează merele rămase în coșulețe câte 16, apoi câte 18 și de fiecare dată îi rămân 4 mere. Aflați câte mere a mâncat Andrei.
4. Fie expresia $E(x, y) = (2x - y)^2 + (x - 3y)(x + 3y) - (x - 2y)^2$.
- (5p) a) Arătați că $E(x, y) = 4x^2 - 12y^2$.
- (5p) b) Calculați valoarea expresiei pentru x și y care îndeplinesc condițiile : $\overline{2x} + \overline{5y}$ este pătrat perfect și $y = x + 1$.
- (5p) 5. Se dau numerele $x = \sqrt{3} + 2$ și $y = \frac{2}{3} + (\sqrt{3})^{-1}$. Stabiliți dacă $(x - 1)^2 = 6y$

SUBIECTUL al III lea – Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.
(30 de puncte)

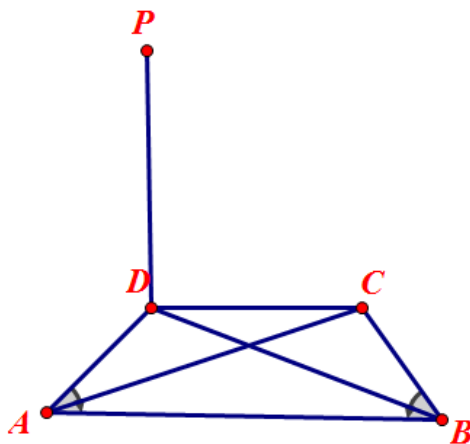
1. O placă de gresie are modelul ca în imagine. Știind că latura pătratului este de 4dm iar cele patru semicercuri cu centrele mijloacele laturilor sunt identice, tangente între ele și tangente la diagonalele pătratului, se cere:

- (5p) a) Să se afle raza semicercurilor;
 (5p) b) Aflați aria suprafeței nehașurate;
 (5p) c) Putem decupa din suprafața nehașurată un cerc cu raza egală cu 1dm? Justificați!



2. Trapezul ABCD ($AB \parallel CD$), $AB > CD$, are măsurile unghiurilor ascuțite de 60° , diagonalele perpendiculare pe laturile neparalele, iar $AD = 24$ cm. Pe planul trapezului se ridică perpendiculara $DP = 36$ cm. Calculați:

- (5p) a) Arătați că $AC = 24\sqrt{3}$ cm;
 (5p) b) Aflați distanța de la punctul P la dreapta BC;
 (5p) a) Aflați distanța de la punctul D la planul (PBC).



BAREMUL DE EVALUARE ȘI NOTARE va apărea în cel mai scurt timp pe
www.mateinfo.ro

Urmăriți pagina de facebook : <https://www.facebook.com/www.mateinfo.ro/>

12. MODEL PENTRU LUNA DECEMBRIE 2016 BAC MATEMATICĂ MATE-INFO

Prof. Silvia Brabeceanu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- ♦ Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- ♦ Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- ♦ La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculați $\frac{(1+3i)^3 + (1-3i)^3}{(3-i)^2 - (3+i)^2}$.

(5p) 2. Să se determine valorile reale ale lui x pentru care $\log_3(x^2 - 1) < \log_3(4x + 4)$.

(5p) 3. Determinați mulțimea $A = \left\{ x \in \mathbb{R} / 2x + 3 \geq 0 \text{ și } \frac{x-2}{x(x-3)} < 0 \right\}$.

(5p) 4. Să se determine termenul ce conține pe x^2 din dezvoltarea

$$\left(yx^{\frac{-1}{3}} + xy^{\frac{-1}{3}} \right)^{30} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(5p) 5. Fie $\vec{r}_A = 3\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{r}_B = -4\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{r}_C = 2\vec{i} + 7\vec{j}$ vectorii de poziție ai vârfurilor triunghiului ABC . Să se determine vectorul de poziție al centrului de greutate a triunghiului ABC .

(5p) 6. Punctele $A(3, 4)$, $B(7, 4)$, $C(11, -3)$, $D(-1, -3)$ sunt vârfurile unui trapez isoscel. Să se calculeze aria trapezului $ABCD$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $S : \begin{cases} 3x + y - 2z = 0 \\ x + y - az = 0 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}.$

Notăm cu A matricea sistemului.

(5p) a) Să se determine rangul matricei A în funcție de a .

(5p) b) Să se rezolve sistemul pentru $a = 1$.

(5p) c) Să se găsească o soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului cu proprietatea $x_0^3 + y_0^2 - z_0 = 0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție

$$x * y = -xy + 5x + 5y - 20, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(5p) a) Să se arate că $x * y = (x - 5)(5 - y) + 5, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

(5p) b) Să se demonstreze că mulțimea $(-\infty, 5)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție.

(5p) c) Se dă expresia $E(x) = (x+8) \cdot (x-7) - 63$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Să se demonstreze că $E(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - 2 \ln(x+1)$.

(5p) a) Să se calculeze derivatele de ordinul întâi și doi ale funcției f .

(5p) b) Fie funcția $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \ln \frac{x}{(x+1)^2}$. Se notează cu $g^{(n)}(x)$ derivata de

ordinul n și cu x_n , $n \in \mathbb{N}^*$ rădăcina derivatei de ordinul n . Să se calculeze x_n , $n \in \mathbb{N}^*$.

(5p) c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x_n}$.

2. Se consideră integralele $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 9} dx$, $n \in \mathbb{N}$.

(5p) a) Să se calculeze $3I_0 - 2I_1$.

(5p) b) Să se demonstreze că pentru $\forall n \in \mathbb{N}$ este adevărată relația $9I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.

(5p) c) Să se arate că $I_n \leq \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Propusă de prof. Silvia Brabeceanu
www.mateinfo.ro

BAREMUL DE EVALUARE ȘI NOTARE va apărea în cel mai scurt timp pe
www.mateinfo.ro

Urmăriți pagina de facebook : <https://www.facebook.com/www.mateinfo.ro/>

Cărți recomandate

Autor:
Marin Chirciu

Unul dintre colaboratorii permanenți ai Revistei Electronice MateInfo.ro.

