REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

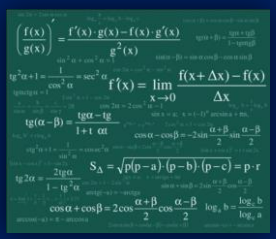
8 ANI DE APARIȚII LUNARE

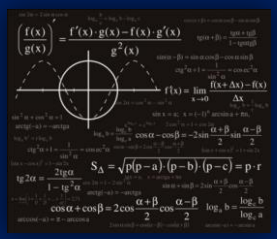
ISSN 2065-6432 –MARTIE 2017

www.mateinfo.ro

REVISTĂ LUNARĂ DIN FEBRUARIE 2009

revista@mateinfo.ro





COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ȘI SUSȚINĂTOR PERMANENȚI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ŞI NELA CICEU

ARTICOLE REVISTĂ:

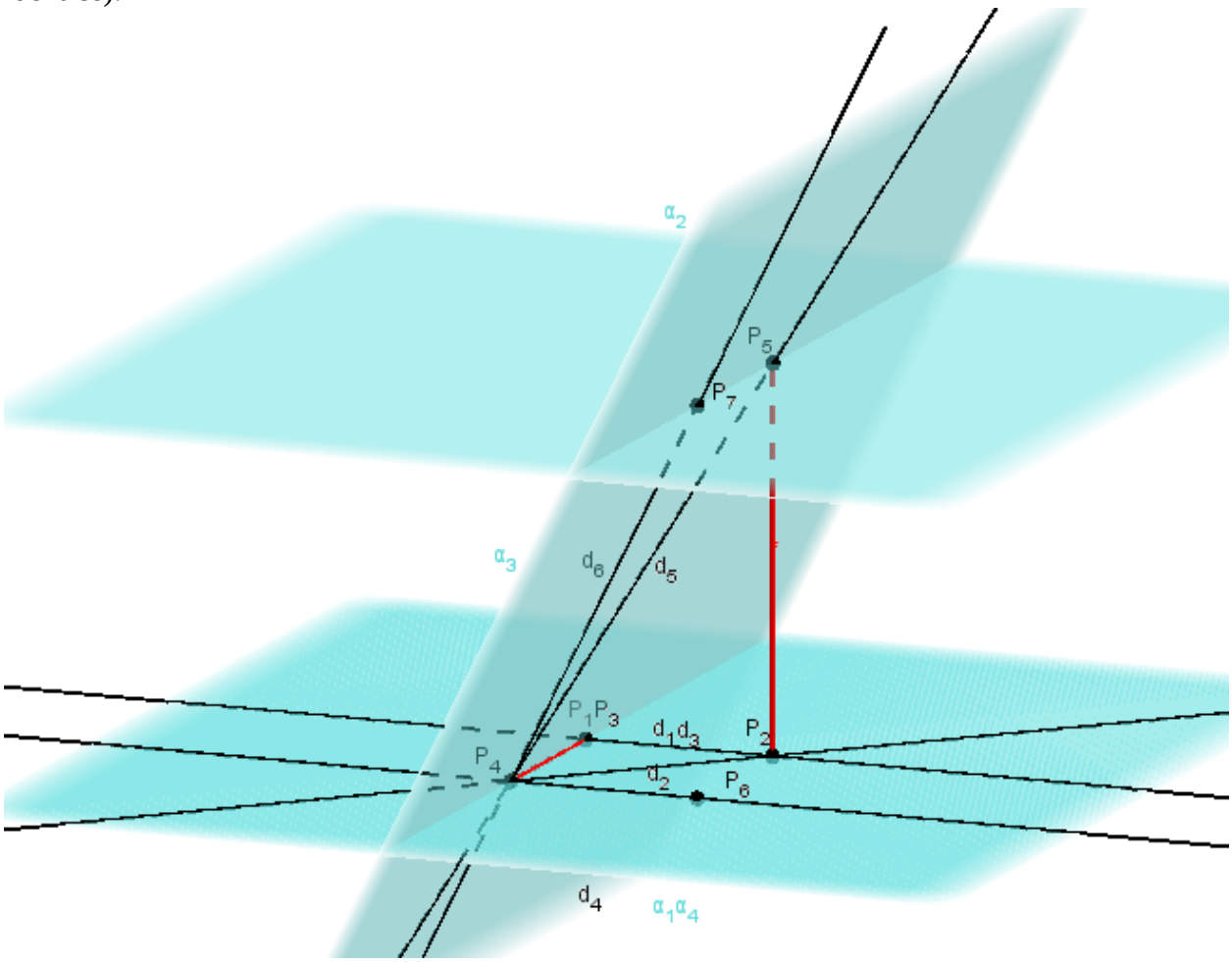
1. PUNCTE, DREPTE, PLANE. POZIȚII RELATIVE. DISTANȚE... pag.2
Stan Ilie
2. STUDIU DE SPECIALITATE ASUPRA VARIAȚIEI DISTANȚEI DINTRE PUNCTELE UNEI DREPTE ȘI UN PUNCT, O DREAPTĂ SAU UN PLAN ...pag. 6
Stan Ilie
3. ÎN LEGĂTURĂ CU PROBLEMELE X.440 DIN RMT 3/2016 ȘI XI.41 ... pag.15
Marin Chirciu
4. CALCULATORUL ŞI PROBLEME CU NUMERE ... pag.26
Nela Ciceu, Bacău şi Roxana Mihaela Stanciu
5. DESPRE PROBLEMA S:E16.70 DIN GAZETA MATEMATICĂ NR. 2/2016, PROPUSĂ PENTRU CLASA A VII-A ... pag. 29
Buzea Gabriela
6. RELAȚII IMPORTANTE ÎN TRIUNGHI ... pag. 32
Oprea Elena Georgiana
7. STUDIUL PUNCTULUI DE ECHILIBRU DE TIP FOCAR ... pag. 34
Oprea Elena Georgiana
8. CARACTERIZAREA NODULUI PENTRU UN SISTEM DINAMIC BIDIMENSIONAL LINIAR ÎN CAZUL ÎN CARE AVEM DOI PARAMETRII NULI ... pag. 37
Florea Maria Luminița
9. SOLUTION TO IRAN 1996 GENERALIZATIONS ... pag. 38
Leo Gigiuc
10. APLICAȚII ALE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIE ... pag.39
Isaia Dida-Cristina
11. SOLUȚII - PROBLEMA LUNII FEBRUARIE 2017 ... pag. 47
12. **PROBLEMA LUNII MARTIE 2016 ... pag.51**

1. PUNCTE, DREPTE, PLANE. POZIŢII RELATIVE. DISTANŢE.

Prof. Stan Ilie
Colegiul Tehnic "Anghel Saligny", Roşiorii de Vede, Teleorman

Din matematica de gimnaziu sunt cunoscute poziţiile relative a două elemente geometrice elementare **P,d,α**(**P**uncte, **d**repte, pl**α**ne):

PP(distincte, identice), **Pd**(pe dreaptă, exterior),
dd(identice, paralele, concurente, necoplanare), **Pα**(interior, exterior),
dα(inclusă, secantă, paralelă), **αα**(paralele, concurente,
identice).



Puncte

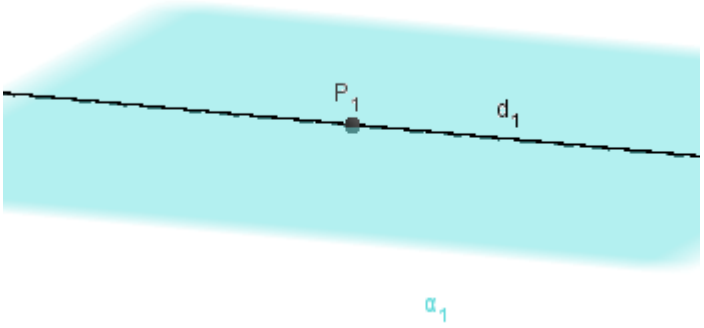
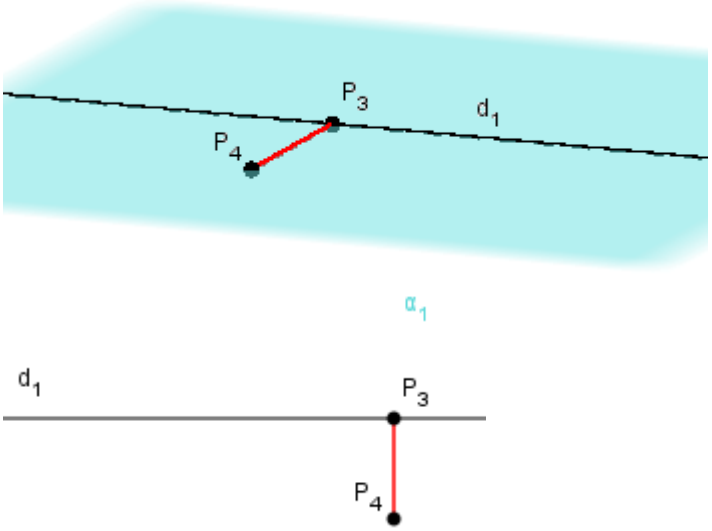
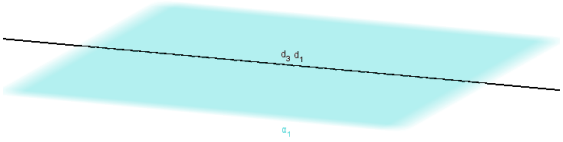
- $P_1 = (0, 0)$
- $P_2 = (1, 0)$
- $P_3 = (0, 0)$
- $P_4 = (0, -1)$
- $P_5 = (1, 0, 2)$
- $P_6 = (1, -1, 0)$
- $P_7 = (1, -1, 2)$

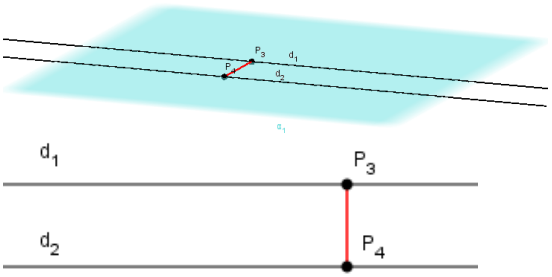
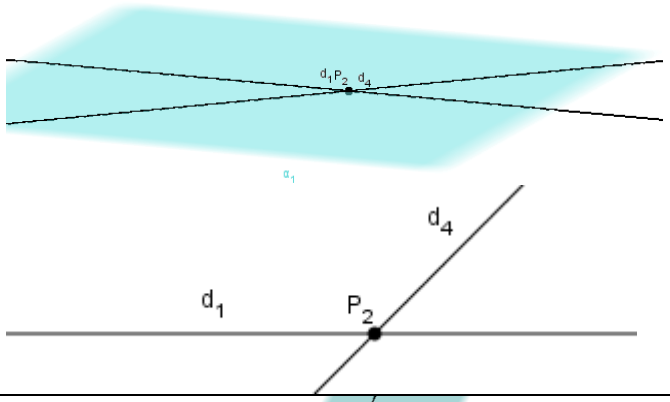
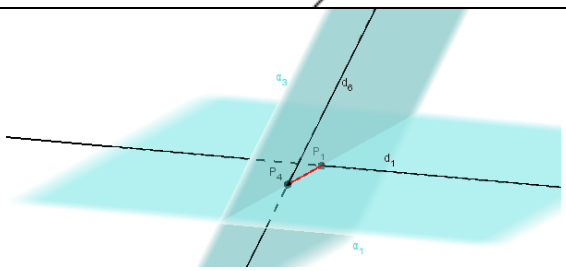
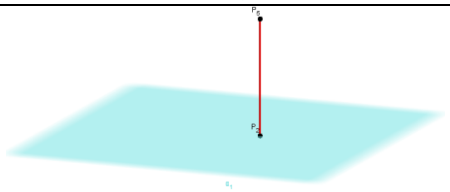
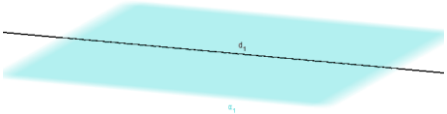
Drepte

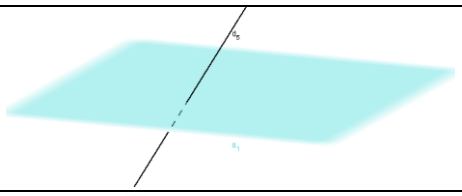
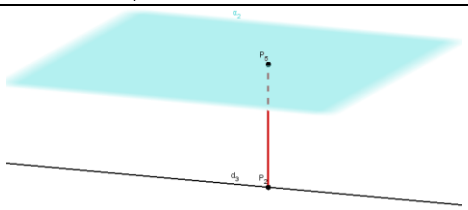
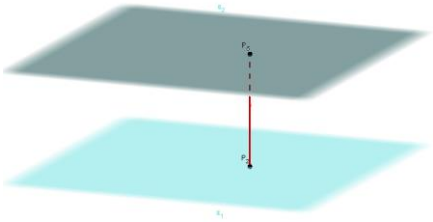
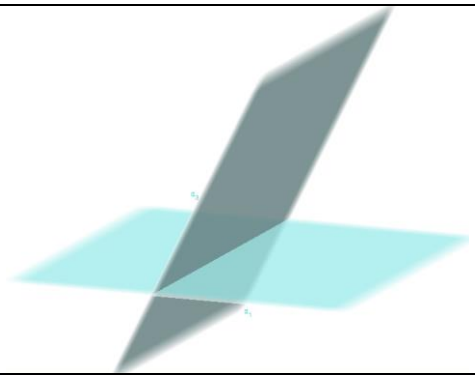
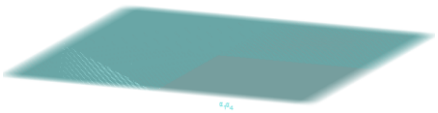
- $d_1: y = 0$
- $d_2: X = (0, -1, 0) + \lambda (1, 0, 0)$
- $d_3: y = 0$
- $d_4: -x + y = -1$
- $d_5: X = (0, -1, 0) + \lambda (1, 1, 2)$
- $d_6: X = (1, -1, 2) + \lambda (-1, 0, -2)$

Plane

- $\alpha_1: z = 0$
- $\alpha_2: z = 2$
- $\alpha_3: -2x + z = 0$
- $\alpha_4: z = 0$

Caz	**Poziţii relative**	**Reprezentare grafică**	**Despre distanţă**
P P	Puncte distincte		Distanţa este lungimea segmentului P_1P_2
	Puncte identice		Distanţă zero.
P d	Punct pe dreaptă		Distanţă zero.
	Punct exterior dreptei		Distanţa de la punct la proiecţia lui pe dreaptă.
d d	drepte identice		Distanţă zero.

	drepte paralele		Distanţa de la un punct al unei drepte la proiecţia lui pe cealaltă dreaptă.
	drepte concurente		Distanţă zero.
	drepte necoplanare		Lungimea segmentului determinat de cele două drepte pe perpendiculara lor comună.
P α	Punct în plan		Distanţă zero.
	Punct exterior planului		Distanţa de la punct la proiecţia lui pe plan.
d α	dreaptă conţinută în plan		Distanţă zero.

	dreaptă ce intersectează planul		Distanţă zero.
	dreaptă paralelă cu planul		Distanţa dintre un punct al dreptei şi proiecţia lui pe plan.
α **α**	plane paralele		Distanţa dintre un punct al unui plan şi proiecţia lui pe celălalt plan.
	plane concurente		Distanţă zero.
	plane identice		Distanţa este desigur zero.

2. STUDIU DE SPECIALITATE ASUPRA VARIAŢIEI DISTANŢEI DINTRE PUNCTELE UNEI DREPTE ŞI UN PUNCT, O DREAPTĂ SAU UN PLAN

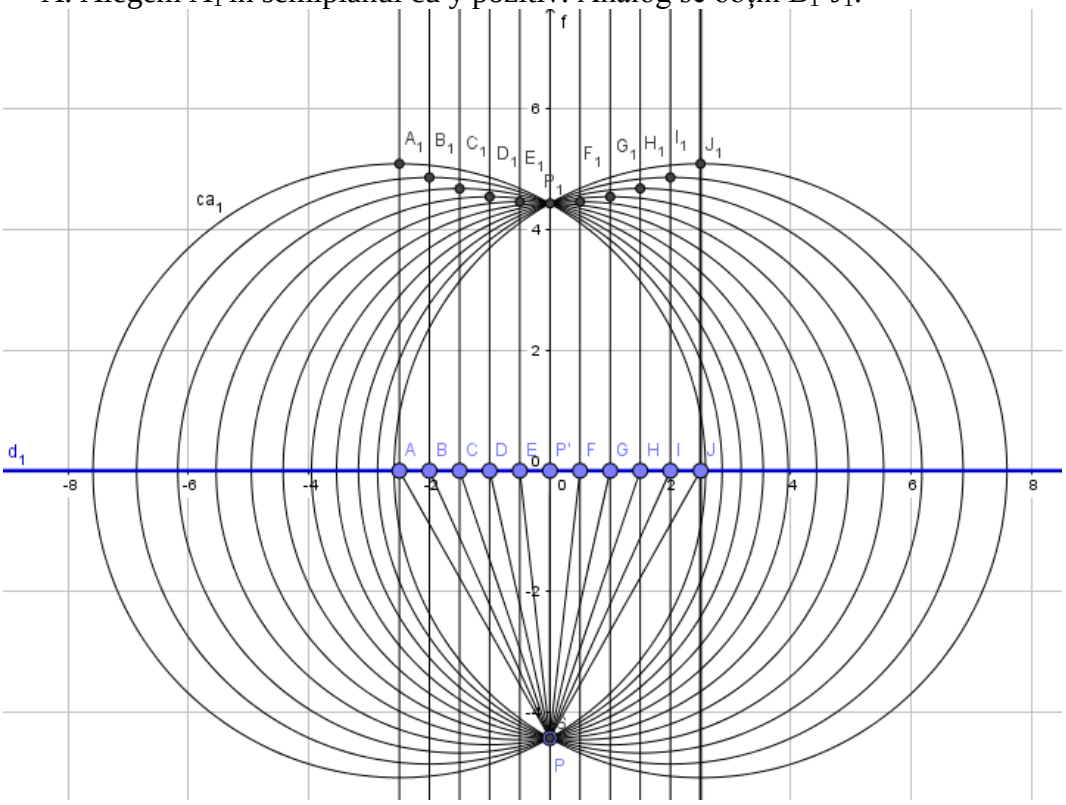
Prof. Stan Ilie
Colegiul Tehnic "Anghel Saligny", Roşiorii de Vede, Teleorman

Actualul studiu este o abordare generalizată a articolului precedent "PUNCTE, DREPTE, PLANE. POZIŢII RELATIVE. DISTANŢE."

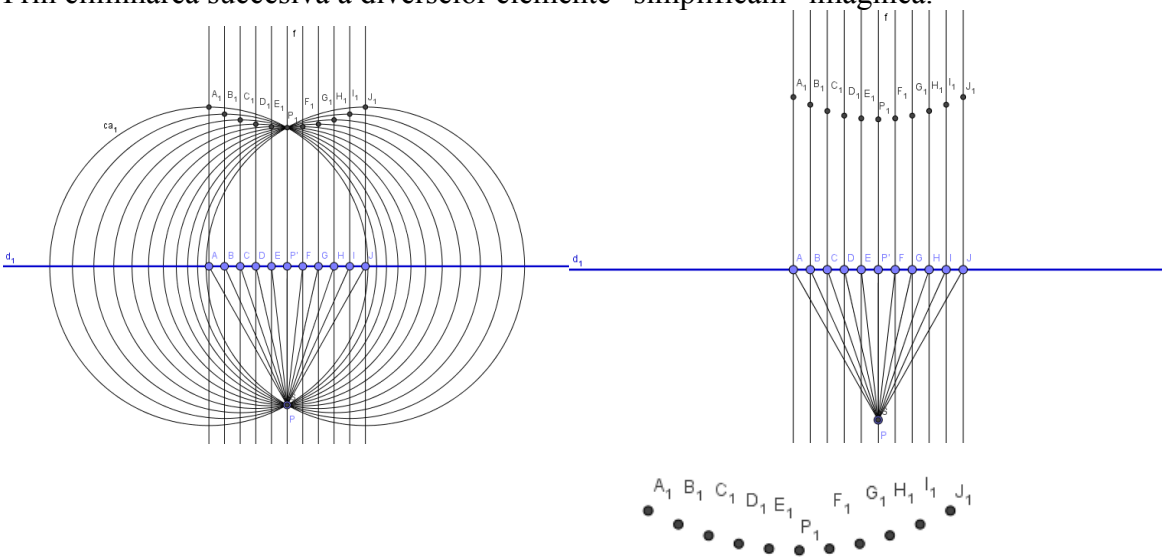
Ne propunem analiza variaţiei distanţei dintre punctele unei drepte(**...d**) şi un element geometric elementar(**P**unct, **d**reaptă, pl**α**n). Reprezentarea grafică este realizată cu GeoGebra 5.0. Prezentarea rezultatelor este pe principiul "O imagine face cât 10^3 cuvinte".
Uneori este ilustrată, în succesiunea ei logică, chiar construcţia geometrică necesară.

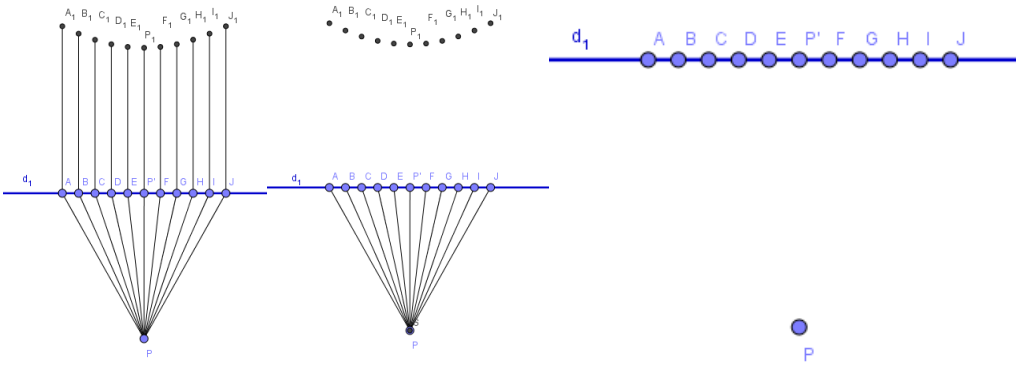
De la punctele unei drepte la un punct (...dP)

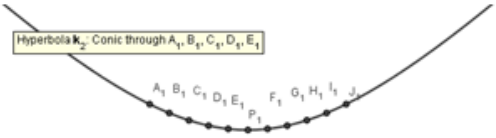
Fie dreapta d_1 şi P un punct exterior ei precum şi punctele A-J situate pe dreaptă. Pentru uşurinţă alegem d_1=Ox şi P∈Oy.
Construim cercul de centru A si rază [AP]. Acesta va intersecta perpendiculara pe d_1 dusă în A. Alegem A_1 în semiplanul cu y pozitiv. Analog se obţin B_1-J_1.



Prin eliminarea succesivă a diverselor elemente “simplificăm” imaginea.



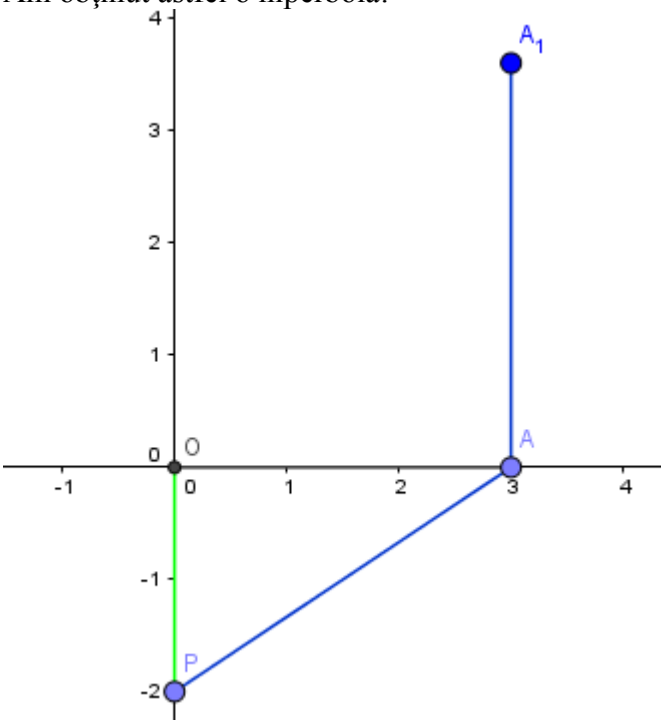








Am obţinut astfel o hiperbolă!



Aceasta se poate şi demonstra uşor

Fie P(0,d), O(0,0), $A(x_A,0)$,

$A_1(x_A, d(P,A))$

$PA^2=d^2+ x_A^2$.

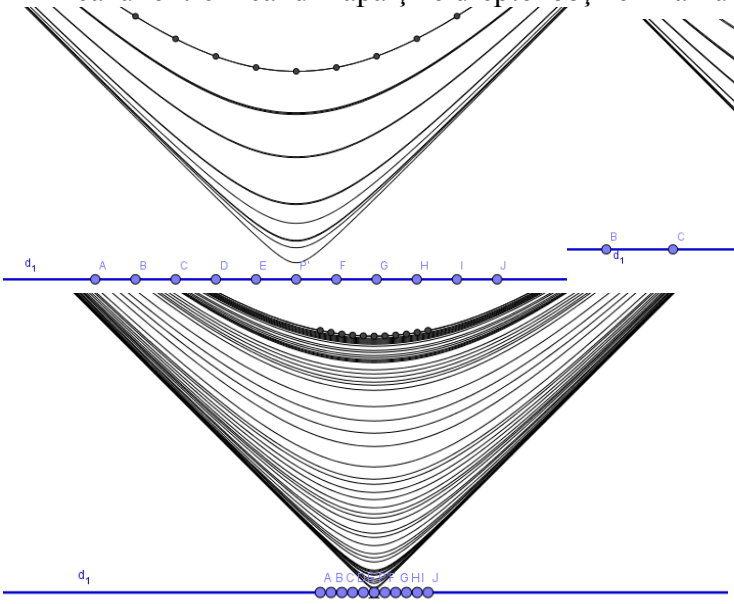
Avem deci $A_1(x_A, \sqrt{d^2 + x_A^2})$

$A_1(x,y)$ si avem relația $y^2-x^2=d^2$

Adica A_1 aparţine unei hiperbole.

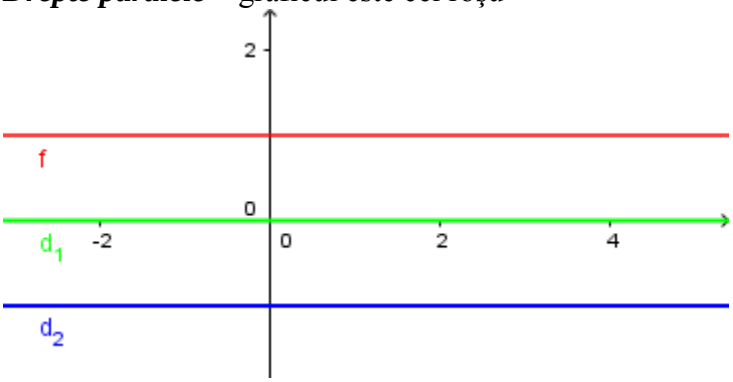
Modificând poziţia lui P obţinem diverse hiperbole.

În cazul extrem când P aparţine dreptei obţinem ramurile pozitive ale celor două bisectoare.



De la punctele unei drepte la o dreaptă (...dd)

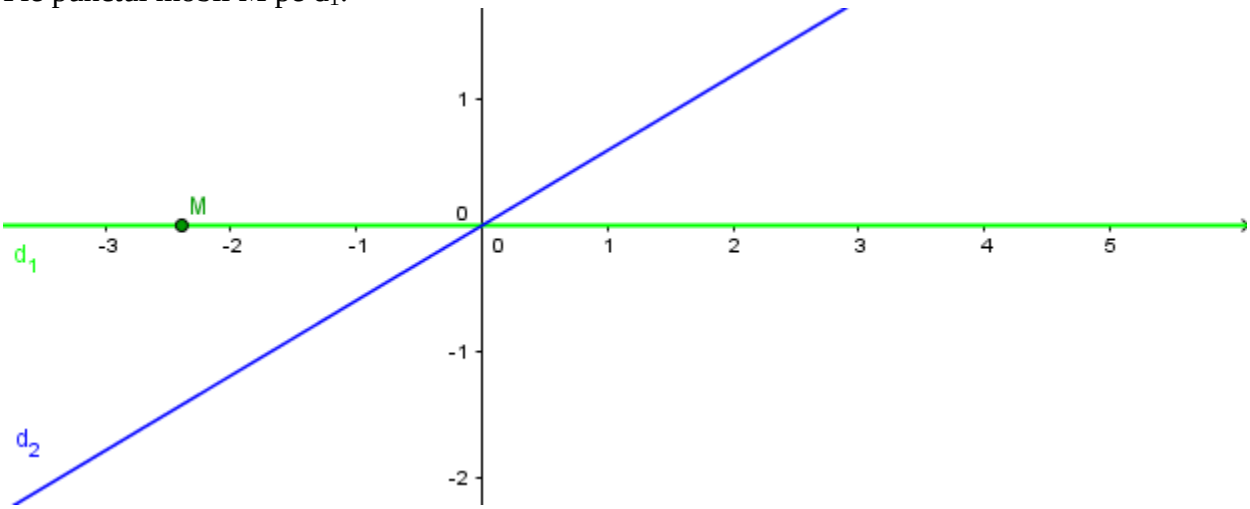
Drepte paralele – graficul este cel roşu



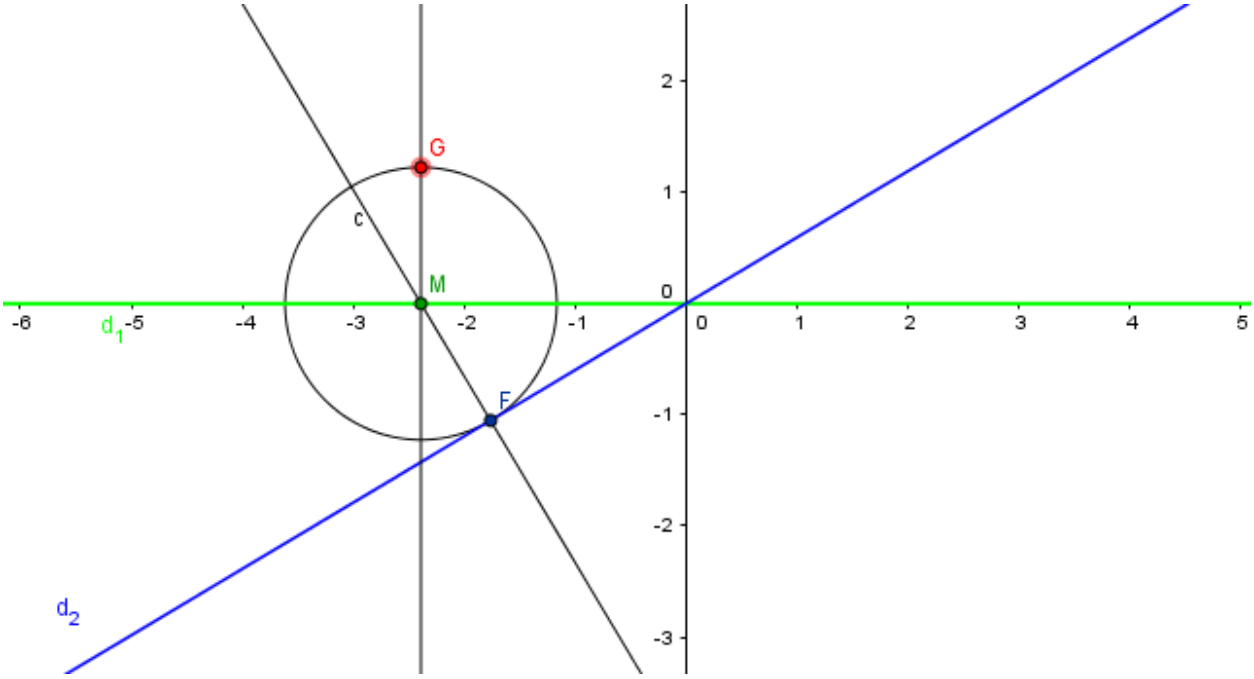
Drepte concurente

Fie dreptele concurente d_1 şi d_2. Pentru uşurinţa reprezentării, printr-o rototranslaţie, aducem punctul de intersecţie în origine, iar pe d_1 o suprapunem cu axa Ox.

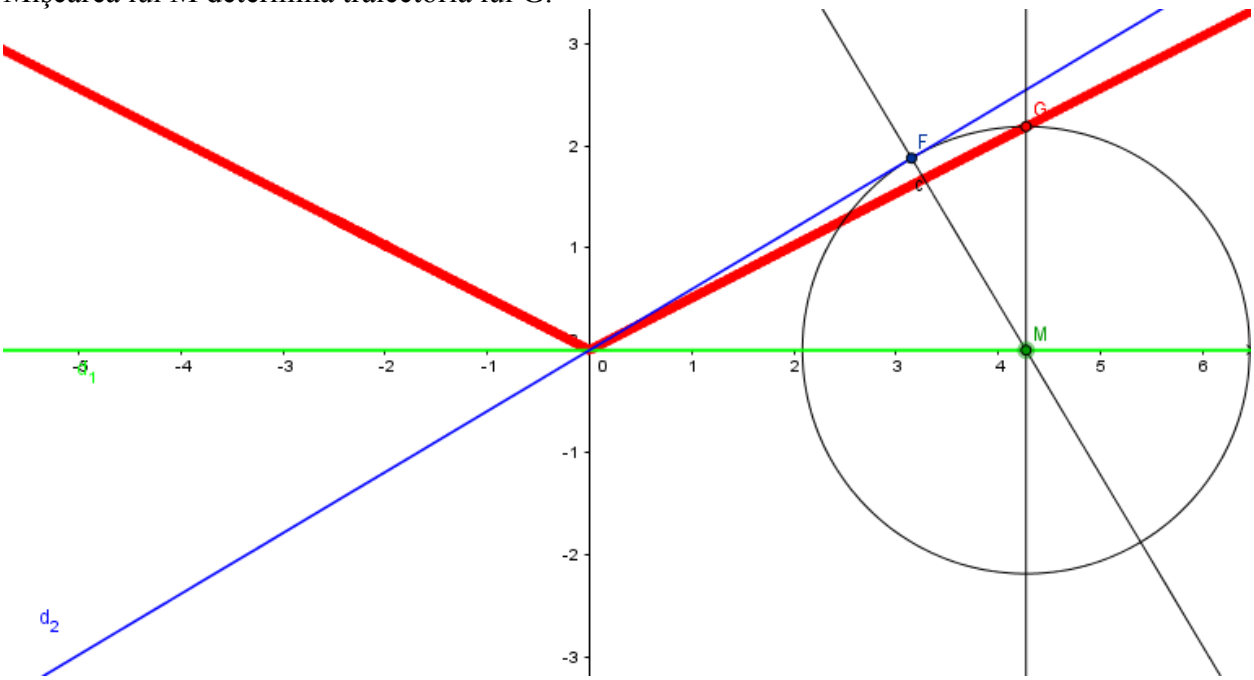
Fie punctul mobil M pe d_1.



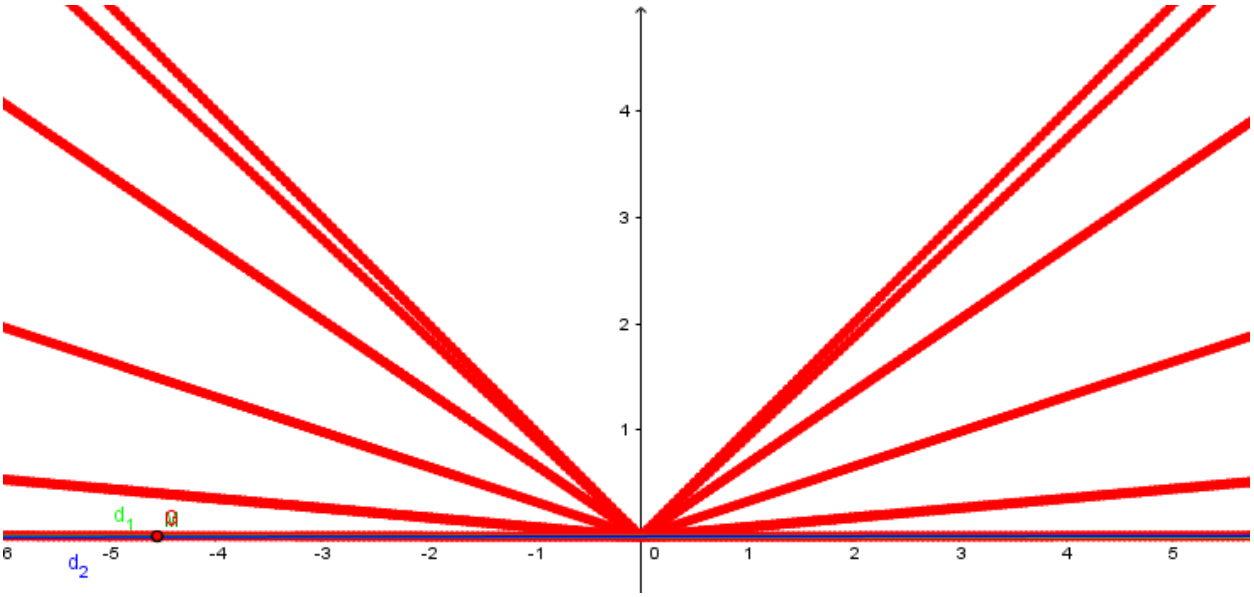
Fie F proiecţia lui M pe dreapta d_2. Cercul de rază MF şi normala la d_1 în M determină în semiplanul cu y pozitiv, punctul G.



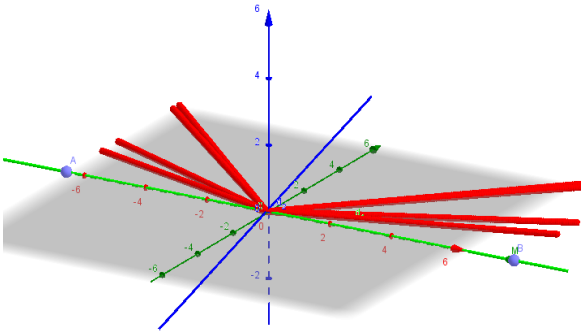
Mişcarea lui M determină traiectoria lui G.



Variind d_2 de la Oy la Ox obţinem grafice de la ramurile pozitive ale bisectoarelor unghiurilor drepte până la Ox.



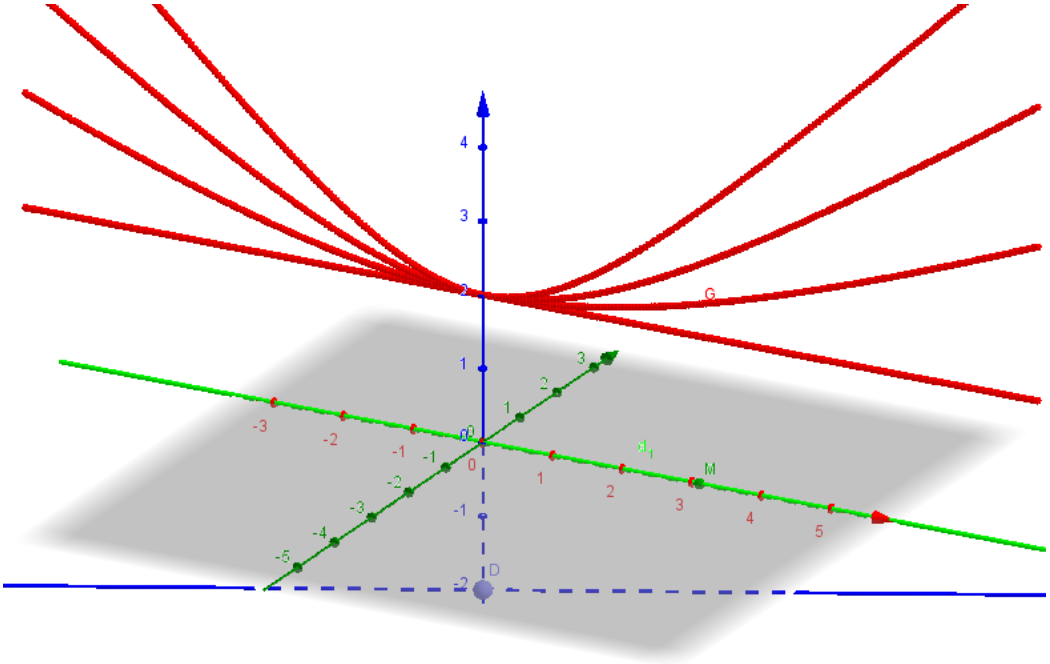
Sau, privit în spaţiu:



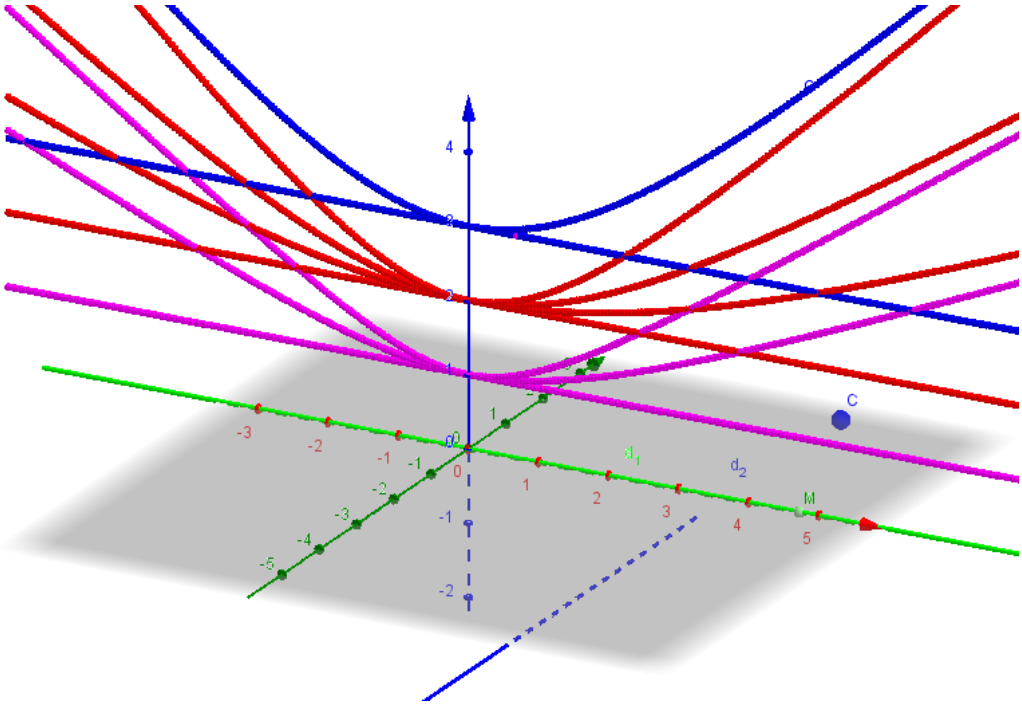
Drepte necoplanare

Două rototranslaţii aduc dreptele în poziţia mai convenabilă reprezentării grafice (d_1 coincide cu Ox, iar perpendiculara comună a lui d_1 şi d_2 se găseşte pe Oz partea negativă). Folosind elementele geometriei analitice, determinăm distanţa de la un punct oarecare al dreptei d_1 la dreapta d_2. Calculele vor confirma faptul că graficul este o…hiperbolă!

In figura următoare se evidenţiază modificarea graficului în funcţie de modificarea unghiului dintre drepte(de la 0 la 90^o), distanţa rămânând aceeaşi.

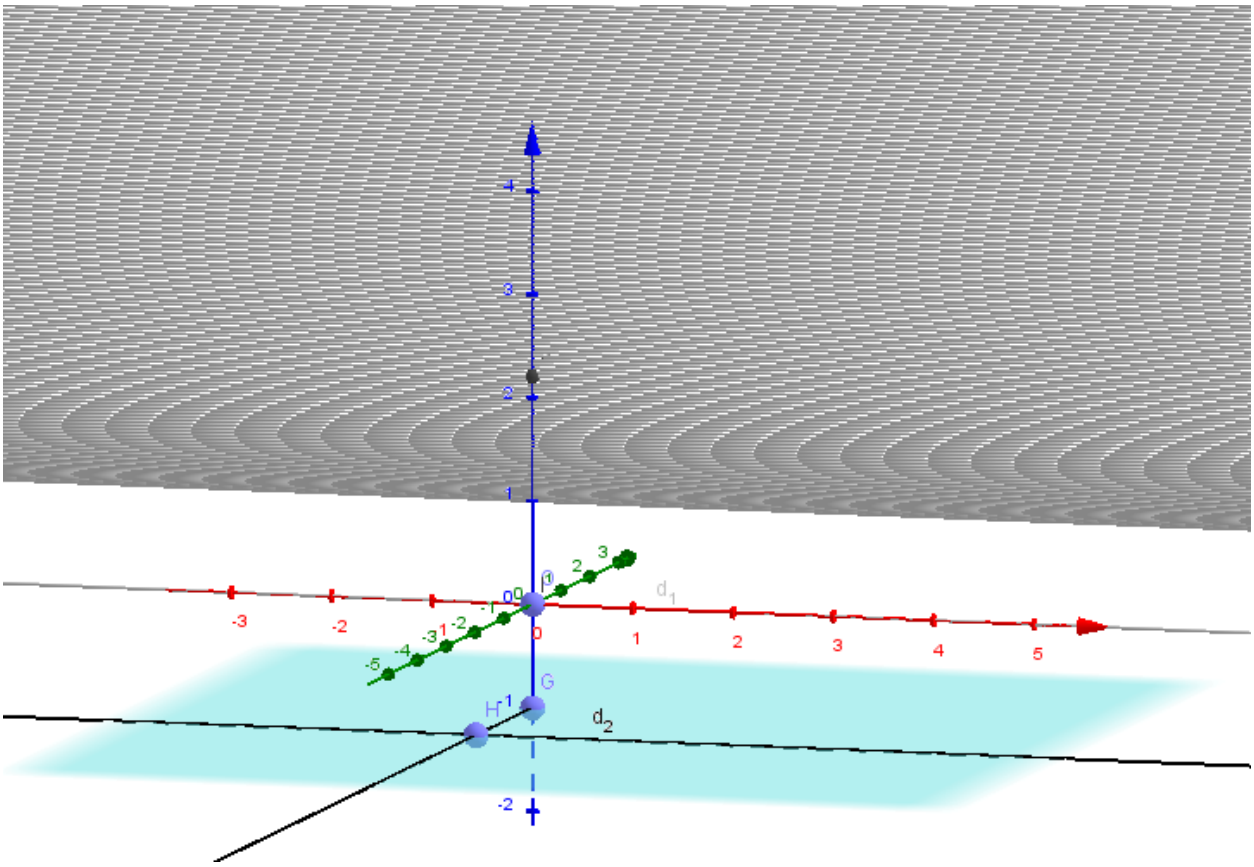


Modificarea graficului în funcţie de modificarea unghiului dintre drepte, respectiv de modificarea distanţei dintre drepte.



De la punctele unei drepte la un plan (...dα)

Dreapta paralelă cu planul – determină un semiplan perpendicular pe planul nostru



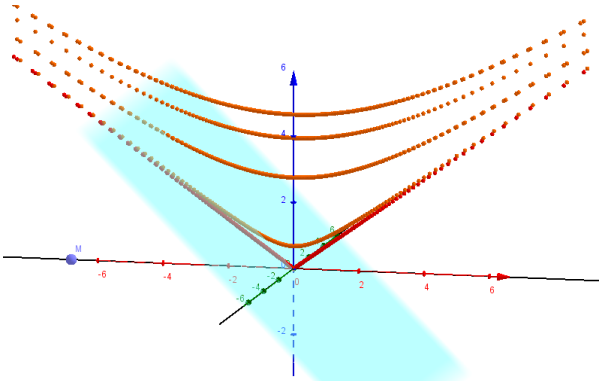
Dreapta concurentă cu planul

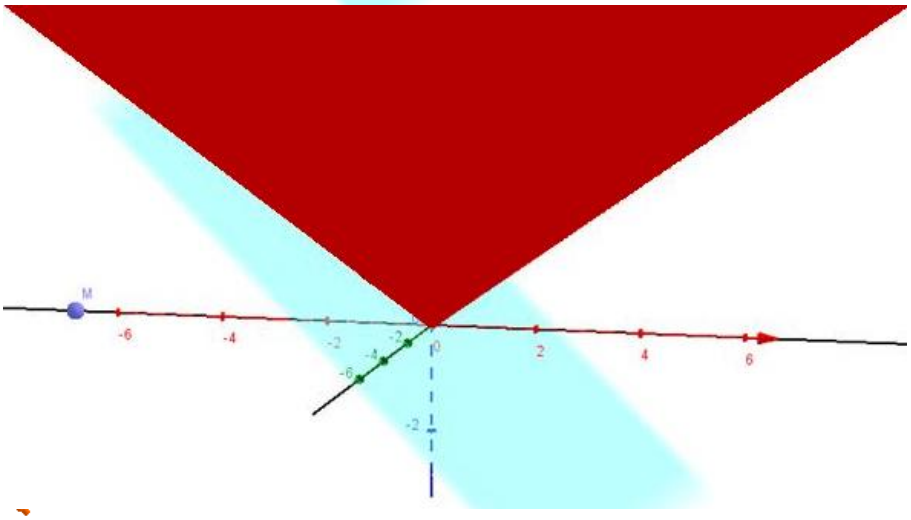
Dreapta coincide cu Ox, iar intersectia cu planul este în origine(o translaţie şi o rotaţie duc oricum la această situaţie...).
Folosim cazurile studiate anterior: drepte concurente(dreapta şi proiecţia ei pe plan), respectiv drepte necoplanare(dreapta şi paralele la proiecţia ei pe plan). Paralelele la proiecţia dreptei pe plan acoperă intregul plan.

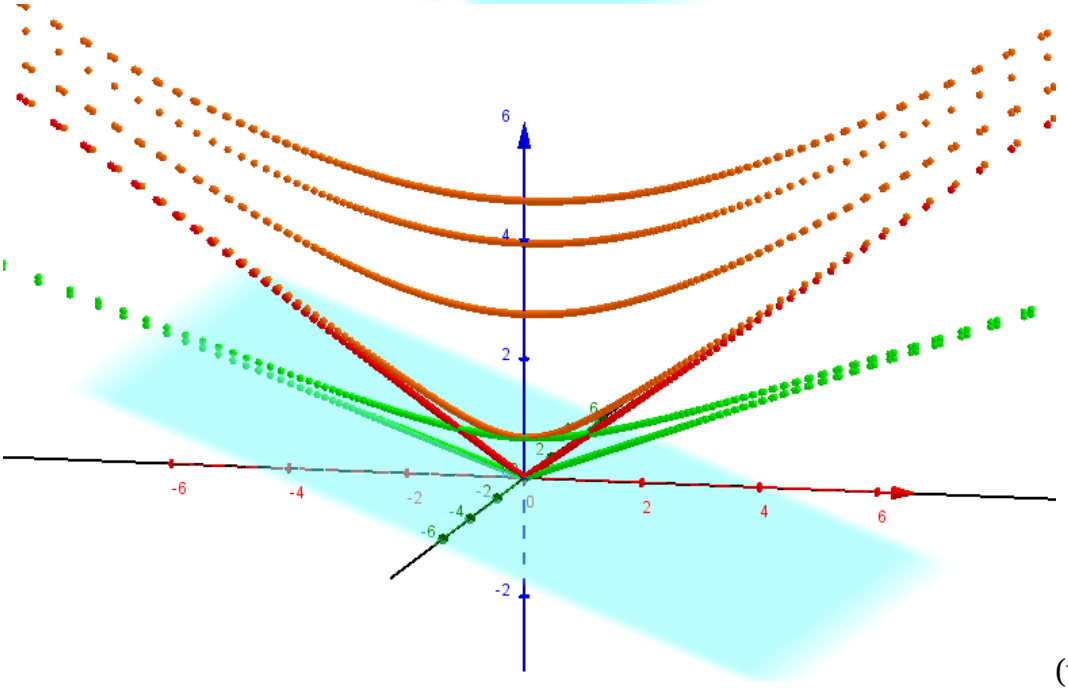
În prima imagine sunt ilustrate câteva dintre hiperbolele cuprinse între laturile unghiului (corespunzător siuaţiei "dreapta şi proiecţia ei pe plan").

În a doua imagine se ilustrează cum hiperbolele acoperă întreg spaţiul dintre laturile unghiului.

Ultima imagine arată(cu verde) variaţia graficului relativ la variaţia inclinării planului faţă de dreapta d_1.







(va urma)

3. ÎN LEGĂTURĂ CU PROBLEMELE X.440 DIN RMT 3/2016 ȘI XI.41 DIN RMM NR.18

Marin Chirciu[1]

În **Revista de Matematică din Timișoara 3/2016** este propusă problema:

X.440 **Arătați că în orice triunghi are loc inegalitatea:**

$$\frac{1}{a^3}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^3}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^3}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geq\frac{9}{4p^2R}.$$

Marian Cucoaneș, Mărășești

iar în **Romanian Mathematical Magazine nr.18- martie2017** este propusă problema:

XI.41 Let a,b,c **be the side lenghts of a triangle** ABC **with inradius** r **.Prove that:**

$$\frac{1}{a^3}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^3}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^3}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\leq\frac{R}{48r^4}.$$

Proposed by George Apostolopoulos,Messolonghi, Greece

Soluție: Articolul prezintă modalități de obținere a unor inegalități cu sume de forma $\sum\frac{1}{a^n}\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, unde $n=1,2,3...$, precum și intărirea inegalităților **X.440** și **XI.41**.

1)Arătați că în orice triunghi ABC **are loc egalitatea**

$$\frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{p^2+(4R+r)^2}{4Rp^2}.$$

Soluție .

Folosind $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$, $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=rp$

și $\sum\frac{1}{a(p-a)}=\frac{p^2+(4R+r)^2}{4p^2Rr}$ obținem

$$\sum\frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sum\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}=\sum\frac{1}{a}\cdot\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-a)}=\frac{S}{p}\sum\frac{1}{a(p-a)}=$$

$$=r\cdot\frac{p^2+(4R+r)^2}{4p^2Rr}=\frac{p^2+(4R+r)^2}{4p^2R}.$$

Cu ajutorul acestei egalități se poate propune:

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești*

1a)Arătați că în orice triunghi ABC **are loc inegalitatea**

$$\frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geq\frac{1}{R}.$$

Soluție .

Folosind identitatea $\frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{p^2+(4R+r)^2}{4Rp^2}$ și inegalitatea lui Doucet $4R+r\geq p\sqrt{3}$ obținem concluzia.

1b)Arătați că în orice triunghi ABC **are loc inegalitatea**

$$\frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\leq\frac{1}{2r}.$$

Soluție

Folosind identitatea $\frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{p^2+(4R+r)^2}{4Rp^2}$, inegalitatea de demonstrat se scrie $\frac{p^2+(4R+r)^2}{4Rp^2}\leq\frac{1}{2r}\Leftrightarrow p^2(2R-r)\geq r(4R+r)^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerresten $p^2\geq 16Rr-5r^2$ .Rămâne să arătăm că $(16Rr-5r^2)(2R-r)\geq r(4R+r)^2\Leftrightarrow$ $8R^2-17Rr+2r^2\geq 0\Leftrightarrow(R-2r)(8R-r)\geq 0$,evident din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

1c)Arătați că în orice triunghi ABC **are loc inegalitatea**

$$\frac{1}{R}\leq\frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\leq\frac{1}{2r}.$$

Soluție

Se folosesc inegalitățile **1a) și 1b).**

Observație.

S-a obținut o rafinare a inegalității lui Euler.

2)Arătați că în orice triunghi ABC **are loc egalitatea**

$$\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{p^4-2p^2(2Rr-r^2)+r(4R+r)^3}{16p^3R^2r}.$$

Soluție .

Folosind $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$, $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=rp$

și $\sum\frac{1}{a^2(p-a)}=\frac{p^4-2p^2(2Rr-r^2)+r(4R+r)^3}{16p^3R^2r^2}$ obținem

$$\sum \frac{1}{a^2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sum \frac{1}{a^2}\cdot\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}=\sum \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-a)}=\frac{S}{p}\sum\frac{1}{a^2(p-a)}=$$

$$=r\cdot\frac{p^4-2p^2\left(2Rr-r^2\right)+r(4R+r)^3}{16p^3R^2r^2}=\frac{p^4-2p^2\left(2Rr-r^2\right)+r(4R+r)^3}{16p^3R^2r}\ .$$

Cu ajutorul acestei egalități se pot propune:

2a)Arătați că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea

$$\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\ge\frac{\sqrt{3}}{3R^2}.$$

Soluție .

Folosind egalitatea $\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{p^4-2p^2\left(2Rr-r^2\right)+r(4R+r)^3}{16p^3R^2r}$

$$\frac{p^4-2p^2\left(2Rr-r^2\right)+r(4R+r)^3}{16p^3R^2r}\ge\frac{\sqrt{3}}{3R^2}\Leftrightarrow p^2\left[3p^2-2\left(38Rr+5r^2\right)\right]+3r(4R+r)^3\ge 0\ .$$

Distingem cazurile:

i) $3p^2-2\left(38Rr+5r^2\right)\ge 0$, inegalitatea este evidentă.

ii) $3p^2-2\left(38Rr+5r^2\right)<0$, inegalitatea se rescrie

$\Leftrightarrow p^2\left[2\left(38Rr+5r^2\right)-3p^2\right]\le 3r(4R+r)^3$, care rezultă din inegalitatea lui Gerresten

$16Rr-5r^2\le p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$ .Rămâne să arătăm că

$\Leftrightarrow\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left[2\left(38Rr+5r^2\right)-3\left(16Rr-5r^2\right)\right]\le 3r(4R+r)^3$

$\Leftrightarrow 20R^3-17R^2r-37Rr^2-18r^3\ge 0\ \Leftrightarrow(R-2r)\left(20R^2+23Rr+9r^2\right)\ge 0$, evident din inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$.

Observație.

Inegalitatea poate fi întărită:

2b)Arătați că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea

$$\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\ge\frac{3}{2pR}.$$

Soluție .

Folosind egalitatea $\sum\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{p^4-2p^2\left(2Rr-r^2\right)+r(4R+r)^3}{16p^3R^2r}$, inegalitatea lui Doucet $(4R+r)^2\ge 3p^2$ și inegalitatea lui Gerresten $p^2\ge 16Rr-5r^2$ obținem

$$\sum\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\ge\frac{p^4-2p^2\left(2Rr-r^2\right)+r(4R+r)\cdot 3p^2}{16p^3R^2r}=\frac{p^2+5r^2+8Rr}{16pR^2r}\ge\frac{16Rr-5r^2+5r^2+8Rr}{16pR^2r}=\frac{3}{2pR}$$

Observație.
Inegalitatea **2b)** este mai fină decât inegalitatea **2a)**.

2c)Arătați că în orice triunghi ABC **are loc dubla inegalitatea**

$$\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geq\frac{3}{2pR}\geq\frac{\sqrt{3}}{3R^2}.$$

Soluție.
Folosind inegalitatea mediilor obținem

$$\sum\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\geq 3\sqrt[3]{\prod\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}\cdot\frac{r}{p}}=3\sqrt[3]{\frac{1}{(4Rrp)^2}\cdot\frac{r}{p}}=\frac{3}{2p}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2R^2r}}\geq\frac{3}{2p}\sqrt[3]{\frac{1}{R^3}}=\frac{3}{2pR}.$$

Cu inegalitatea lui Mitrinović $p\leq\frac{3R\sqrt{3}}{2}$ avem $\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geq\frac{3}{2pR}\geq\frac{\sqrt{3}}{3R^2}$.

2d)Arătați că în orice triunghi ABC **are loc inegalitatea**

$$\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\leq\frac{\sqrt{3}}{12r^2}.$$

Soluție.
Tripletele $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ și $\left(\frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{A}{2},\frac{1}{b}\operatorname{tg}\frac{B}{2},\frac{1}{c}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$ sunt invers ordonate. Cu inegalitatea lui Cebâșev obținem

$$\sum\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sum\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)\leq\frac{1}{3}\cdot\sum\frac{1}{a}\cdot\sum\frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\leq\frac{1}{3}\cdot\frac{p}{3Rr}\cdot\frac{p^2+(4R+r)^2}{4Rp^2}=\frac{p^2+(4R+r)^2}{36pR^2r}\leq$$

$\leq\frac{\sqrt{3}}{12r^2}$, unde ultima inegalitate este echivalentă cu $r\left[p^2+(4R+r)^2\right]\leq 3R^2\cdot p\sqrt{3}$, care rezultă din inegalitatea lui Gerresten $p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Doucet $4R+r\geq p\sqrt{3}$.
Rămâne să demonstrăm că $r\left[4R^2+4Rr+3r^2+(4R+r)^2\right]\leq 3R^2\cdot(4R+r)\Leftrightarrow$

$12R^3-17R^2r-12Rr^2-4r^3\geq 0\Leftrightarrow(R-2r)(12R^2+7Rr+2r^2)\geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

S-a folosit inegalitatea cunoscută în triunghi $\sum\frac{1}{a}\leq\frac{p}{3Rr}$.

Observație
Inegalitatea poate fi îmbunătățită.

2e)Arătați că în orice triunghi ABC **are loc inegalitatea**

$$\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\leq\frac{\sqrt{3}}{6Rr}.$$

Soluție.

Tripletele $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ și $\left(\frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{A}{2},\frac{1}{b}\operatorname{tg}\frac{B}{2},\frac{1}{c}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$ sunt invers ordonate. Cu inegalitatea lui Cebâșev obținem

$$\sum\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sum\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)\le\frac{1}{3}\cdot\sum\frac{1}{a}\cdot\sum\frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\le\frac{1}{3}\cdot\frac{p}{3Rr}\cdot\frac{p^2+\left(4R+r\right)^2}{4Rp^2}=\frac{p^2+\left(4R+r\right)^2}{36pR^2r}\le$$

$\le\frac{\sqrt{3}}{6Rr}$, unde ultima inegalitate este echivalentă cu $p^2+\left(4R+r\right)^2\le 6R\cdot p\sqrt{3}$, care rezultă din inegalitatea lui Gerresten $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Doucet $4R+r\ge p\sqrt{3}$.

Rămâne să demonstrăm că $4R^2+4Rr+3r^2+\left(4R+r\right)^2\le 6R\cdot\left(4R+r\right)\Leftrightarrow$

$2R^2-3Rr-2r^2\ge 0\Leftrightarrow\left(R-2r\right)\left(2R+r\right)\ge 0$, evident din inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$.

S-a folosit inegalitatea cunoscută în triunghi $\sum\frac{1}{a}\le\frac{p}{3Rr}$.

2f)Arătați că în orice triunghi ABC **au loc inegalitățile**

$$\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\le\frac{\sqrt{3}}{6Rr}\le\frac{3}{4pr}\le\frac{\sqrt{3}}{12r^2}.$$

Soluție.

Se folosește **2e) și** inegalitățile lui Mitrinović $3r\sqrt{3}\le p\le\frac{3R\sqrt{3}}{2}$.

2g)Arătați că în orice triunghi ABC **au loc inegalitățile**

$$\frac{3}{2pR}\le\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\le\frac{3}{4pr}.$$

Soluție.
Se folosește **2a)** și **2f).**
S-a obținut o rafinare a inegalității lui Euler.

3) Arătați că în orice triunghi are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{a^3}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^3}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^3}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\ge\frac{9}{4p^2R}.$$

Marian Cucoaneș, Mărășești

Soluție .

Folosind inegalitatea mediilor, $\prod\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p}$ și inegalitatea lui Mitrinović $p\ge 3r\sqrt{3}$ obținem

$$\sum\frac{1}{a^3}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\ge 3\sqrt[3]{\prod\frac{1}{a^3}\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=3\sqrt[3]{\frac{1}{a^3b^3c^3}\cdot\frac{r}{p}}=\frac{3}{abc}\cdot\sqrt[3]{\frac{r}{p}}=\frac{3}{4Rrp}\cdot\sqrt[3]{\frac{r}{p}}\ge\frac{9}{4p^2R},$$ ultima inegalitate

fiind echivalentă cu $\frac{1}{r}\cdot\sqrt[3]{\frac{r}{p}}\ge\frac{3}{p}\Leftrightarrow p^2\ge 27r^2\Leftrightarrow p\ge 3r\sqrt{3}$.

3a)Arătați că în orice triunghi are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{a^3}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^3}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^3}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geq\frac{9}{2\left[p^2\left(2R+3r\right)-r\left(4R+r\right)^2\right]}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Bergström și identitatea $\sum a^3\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=2\left[p^2\left(2R+3r\right)-r\left(4R+r\right)^2\right]$.

Obținem $\sum\frac{1}{a^3}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sum\frac{1}{a^3\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}\geq\frac{9}{\sum a^3\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}=\frac{9}{2\left[p^2\left(2R+3r\right)-r\left(4R+r\right)^2\right]}$.

Inegalitatea **3a)** este mai tare decât inegalitatea **3)** propusă de Marian Cucoaneș, Mărășești în RMT 3/2016 ,Problema **X.440**.

3b)Arătați că în orice triunghi are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{a^3}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^3}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^3}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geq\frac{9}{2\left[p^2\left(2R+3r\right)-r\left(4R+r\right)^2\right]}\geq\frac{9}{4p^2R}.$$

Soluție.

Se folosește **3a)** și inegalitatea lui Doucet $\left(4R+r\right)^2\geq 3p^2$.

3c) Arătați că în orice triunghi are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{a^3}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^3}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^3}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\leq\frac{R}{48r^4}.$$

George Apostolopoulos,Messolonghi, Greece

Soluție.

Tripletele $\left(\frac{1}{a^2},\frac{1}{b^2},\frac{1}{c^2}\right)$ și $\left(\frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{A}{2},\frac{1}{b}\operatorname{tg}\frac{B}{2},\frac{1}{c}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$ sunt invers ordonate. Cu inegalitatea lui Cebâșev obținem

$$\sum\frac{1}{a^3}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sum\left(\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)\leq\frac{1}{3}\cdot\sum\frac{1}{a^2}\cdot\sum\frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\leq\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4r^2}\cdot\frac{p^2+\left(4R+r\right)^2}{4Rp^2}=\frac{p^2+\left(4R+r\right)^2}{48p^2R}$$

$\leq\frac{R}{48r^4}$, unde ultima inegalitate este echivalentă cu $r^2\left[p^2+\left(4R+r\right)^2\right]\leq p^2R^2\Leftrightarrow$

$p^2\left(R^2-r^2\right)\geq r^2\left(4R+r\right)^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerresten $p^2\geq 16Rr-5r^2$.

Rămâne să demonstrăm că $\left(16Rr-5r^2\right)\left(R^2-r^2\right)\geq r^2\left(4R+r\right)^2\Leftrightarrow$

$16R^3-21R^2r-24Rr^2+4r^3\geq 0\Leftrightarrow\left(R-2r\right)\left(16R^2+11Rr-2r^2\right)\geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

S-a folosit inegalitatea cunoscută în triunghi $\sum\frac{1}{a^2}\le\frac{1}{4r^2}$.

Observație
Inegalitatea poate fi îmbunătățită.

3d) Arătați că în orice triunghi are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{a^3}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^3}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^3}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\le\frac{9R}{16S^2}.$$

Soluție.

Tripletele $\left(\frac{1}{a^2},\frac{1}{b^2},\frac{1}{c^2}\right)$ și $\left(\frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{A}{2},\frac{1}{b}\operatorname{tg}\frac{B}{2},\frac{1}{c}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$ sunt invers ordonate. Cu inegalitatea lui Cebâșev obținem

$$\sum\frac{1}{a^3}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sum\left(\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)\le\frac{1}{3}\cdot\sum\frac{1}{a^2}\cdot\sum\frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\le\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4r^2}\cdot\frac{p^2+(4R+r)^2}{4Rp^2}=\frac{p^2+(4R+r)^2}{48p^2R}$$

$\le\frac{9R}{16r^2p^2}$, unde ultima inegalitate este echivalentă cu $p^2+(4R+r)^2\le 27R^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerresten $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$.

Rămâne să demonstrăm că $4R^2+4Rr+3r^2+(4R+r)^2\le 27R^2\Leftrightarrow$

$7R^2-12Rr-4r^2\ge 0\Leftrightarrow(R-2r)(7R+2r)\ge 0$, evident din inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$.

S-a folosit inegalitatea cunoscută în triunghi $\sum\frac{1}{a^2}\le\frac{1}{4r^2}$.

Observație
Inegalitatea **3d)** este mai tare decât inegalitatea **3c),**propusă de George Apostolopoulos, Grecia în RMM nr.18-martie 2017, Problema **XI.41.**

3e) Arătați că în orice triunghi are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{a^3}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^3}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^3}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\le\frac{1}{12Rr^2}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Tripletele $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ și $\left(\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}\frac{A}{2},\frac{1}{b^2}\operatorname{tg}\frac{B}{2},\frac{1}{c^2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$ sunt invers ordonate. Cu inegalitatea lui Cebâșev obținem

$$\sum\frac{1}{a^3}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sum\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)\le\frac{1}{3}\cdot\sum\frac{1}{a}\cdot\sum\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\le\frac{1}{3}\cdot\frac{p}{3Rr}\cdot\frac{3}{4pr}=\frac{1}{12Rr^2}$$, unde ultima inegalitate rezultă din inegalitatea cunoscută în triunghi $\sum\frac{1}{a}\le\frac{p}{3Rr}$ și $\sum\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\le\frac{3}{4pr}$,

vezi **2f).**

Observație

Inegalitatea **3e)** este mai tare decât inegalitatea **3d),**care la rândul ei este mai tare decât **3c)** propusă de George Apostolopoulos, Grecia în RMM nr.18-martie 2017, Problema **XI.41.**

3e) Arătați că în orice triunghi are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{a^3}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^3}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^3}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\le\frac{1}{12Rr^2}\le\frac{9R}{16S^2}\le\frac{R}{48r^4}.$$

Soluție.

Vezi **3e)** și inegalitățile lui Mitrinović $27r^2\le p^2\le\frac{27R^2}{4}$.

3f) Arătați că în orice triunghi au loc inegalitățile:

$$\frac{9}{4p^2R}\le\frac{1}{a^3}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^3}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^3}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\le\frac{1}{12Rr^2}.$$

Soluție.

Vezi **3a)** și **3d)**

S-a obținut o rafinare a inegalității lui Mitrinović $p^2\ge 27r^2$.

4) Arătați că în orice triunghi ABC **are loc inegalitatea**

$$\frac{1}{a^4}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^4}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^4}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\ge\frac{27}{8p^3R}.$$

Soluție.

Folosind inegalitatea mediilor, $\prod\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p}$, inegalitățile $p^2\ge 27r^2$ și $2p^2\ge 27Rr$ obținem

$\sum\frac{1}{a^4}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\ge 3\sqrt[3]{\prod\frac{1}{a^4}\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=3\sqrt[3]{\frac{1}{a^4b^4c^4}}=\sqrt[3]{\frac{1}{(4Rrp)^4}\cdot\frac{r}{p}}\ge\frac{27}{8p^3R}$, ultima inegalitate fiind echivalentă cu $2p^4\ge 3^6Rr^3$, adevărată din înmulțirea inegalităților $p^2\ge 27r^2$ și $2p^2\ge 27Rr$.

4a) Arătați că în orice triunghi ABC **are loc inegalitatea**

$$\frac{1}{a^4}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^4}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^4}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\le\frac{1}{16pr^3}.$$

Soluție.

Tripletele $\left(\frac{1}{a^2},\frac{1}{b^2},\frac{1}{c^2}\right)$ și $\left(\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}\frac{A}{2},\frac{1}{b^2}\operatorname{tg}\frac{B}{2},\frac{1}{c^2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$ sunt invers ordonate. Cu inegalitatea lui Cebâșev obținem

$\sum \frac{1}{a^4}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sum\left(\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)\le\frac{1}{3}\cdot\sum\frac{1}{a^2}\cdot\sum\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\le\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4r^2}\cdot\frac{3}{4pr}=\frac{1}{16pr^3}$, unde ultima inegalitate rezultă din inegalitatea cunoscută $\sum\frac{1}{a^2}\le\frac{1}{4r^2}$ și $\sum\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\le\frac{3}{4pr}$,vezi **3e).**

4b) Arătați că în orice triunghi ABC **are loc inegalitatea**

$$\frac{27}{8p^3R}\le\frac{1}{a^4}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^4}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^4}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\le\frac{1}{16pr^3}.$$

Soluție.

Vezi **4)** și **4a).**

5) Arătați că în orice triunghi ABC **are loc inegalitatea**

$$\frac{1}{a^5}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^5}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^5}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\ge\left(\frac{3}{2p}\right)^4\cdot\frac{1}{R}.$$

Soluție.

Folosind inegalitatea mediilor, $\prod\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p}$, inegalitățile $p^2\ge 27r^2$ și $2p^2\ge 27Rr$ obținem

$\sum\frac{1}{a^5}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\ge 3\sqrt[3]{\prod\frac{1}{a^5}\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=3\sqrt[3]{\frac{1}{a^5b^5c^5}}=\sqrt[3]{\frac{1}{(4Rrp)^5}\cdot\frac{r}{p}}\ge\left(\frac{3}{2p}\right)^4\cdot\frac{1}{R}$, ultima inegalitate fiind echivalentă cu $4p^4\ge 3^9R^2r^4$, adevărată din inegalitățile $p^2\ge 27r^2$ și $2p^2\ge 27Rr$.

5a) Arătați că în orice triunghi ABC **are loc inegalitatea**

$$\frac{1}{a^5}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^5}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^5}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\le\frac{3R}{64p^2r^4}.$$

Soluție.

Tripletele $\left(\frac{1}{a^2},\frac{1}{b^2},\frac{1}{c^2}\right)$ și $\left(\frac{1}{a^3}\operatorname{tg}\frac{A}{2},\frac{1}{b^3}\operatorname{tg}\frac{B}{2},\frac{1}{c^3}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$ sunt invers ordonate. Cu inegalitatea lui Cebâșev obținem

$\sum\frac{1}{a^5}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sum\left(\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{a^3}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)\le\frac{1}{3}\cdot\sum\frac{1}{a^2}\cdot\sum\frac{1}{a^3}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\le\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4r^2}\cdot\frac{9R}{16p^2r^2}=\frac{3R}{64p^2r^4}$, unde ultima inegalitate rezultă din inegalitatea cunoscută $\sum\frac{1}{a^2}\le\frac{1}{4r^2}$ și $\sum\frac{1}{a^3}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\le\frac{9R}{16p^2r^2}$,vezi **3d).**

Observație

Inegalitatea poate fi îmbunătățită.

5b) Arătați că în orice triunghi ABC **are loc inegalitatea**

$$\frac{1}{a^5}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^5}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^5}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\le\frac{1}{144Rr^4}.$$

Soluție.

Tripletele $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ și $\left(\frac{1}{a^4}\operatorname{tg}\frac{A}{2},\frac{1}{b^4}\operatorname{tg}\frac{B}{2},\frac{1}{c^4}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$ sunt invers ordonate. Cu inegalitatea lui Cebâșev obținem

$\sum\frac{1}{a^5}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sum\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a^4}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)\le\frac{1}{3}\cdot\sum\frac{1}{a}\cdot\sum\frac{1}{a^4}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\le\frac{1}{3}\cdot\frac{p}{3Rr}\cdot\frac{1}{16pr^3}=\frac{1}{144Rr^4}$, unde ultima inegalitate rezultă din inegalitatea cunoscută $\sum\frac{1}{a}\le\frac{p}{3Rr}$ și $\sum\frac{1}{a^4}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\le\frac{1}{16pr^3}$,vezi **4a).**

Observație

Inegalitatea **5b)** este mai tare decât inegalitatea **5a).**

5c) Arătați că în orice triunghi ABC **are loc inegalitatea**

$$\frac{1}{a^5}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^5}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^5}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\le\frac{1}{144Rr^4}\le\frac{3R}{64p^2r^4}.$$

Soluție.

Vezi **5b)** și inegalitatea lui Mitrinović $4p^2\le 27R^2$.

5d) Arătați că în orice triunghi ABC **are loc inegalitatea**

$$\frac{81}{16p^4R}\le\frac{1}{a^5}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^5}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^5}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\le\frac{1}{144Rr^4}.$$

Soluție.

Vezi **5)** și **4b).**

6) Arătați că în orice triunghi ABC **are loc inegalitatea**

$$\frac{1}{a^n}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^n}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^n}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\ge\left(\frac{3}{2p}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{R}\text{, unde } n\in N^*\ .$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind inegalitatea mediilor, $\prod\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p}$, inegalitățile $p^2\ge 27r^2$ și $2p^2\ge 27Rr$ obținem

$\sum\frac{1}{a^n}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\ge 3\sqrt[3]{\prod\frac{1}{a^n}\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=3\sqrt[3]{\frac{1}{a^nb^nc^n}}=\sqrt[3]{\frac{1}{(4Rrp)^n}\cdot\frac{r}{p}}\ge\left(\frac{3}{2p}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{R}$, ultima inegalitate fiind echivalentă cu $2^{n-3}p^{2n-4}\ge 3^{3n-6}R^{n-3}r^{n-1}$, adevărată din inegalitățile $p^2\ge 27r^2$ și $2p^2\ge 27Rr\Rightarrow\left(2p^2\right)^{n-3}\ge\left(3^3Rr\right)^{n-3}$, adevărate pentru $n\ge 3$ .Pentru $n=1$ vezi **1a),** iar pentru $n=2$ vezi **2b).**

6a) Arătați că în orice triunghi ABC **are loc inegalitatea**

$$\frac{1}{a^n}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^n}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^n}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\le\left(\frac{p}{9Rr}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2r}\text{, unde } n\in N^*\ .$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Se folosește metoda inducției matematice.

Fie propoziția $P(n):\frac{1}{a^n}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^n}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^n}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\le\left(\frac{p}{9Rr}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2r}, n\in N^*$

Pentru $n=1$ avem $\frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\le\frac{1}{2r}$, adica **1b).**

Să presupunem că $P(n)$ este adevărat și să demonstrăm că $P(n+1)$ este adevărat.

Tripletele $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ și $\left(\frac{1}{a^n}\operatorname{tg}\frac{A}{2},\frac{1}{b^n}\operatorname{tg}\frac{B}{2},\frac{1}{c^n}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$ sunt invers ordonate. Cu inegalitatea lui Cebâșev obținem

$$\sum\frac{1}{a^{n+1}}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sum\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a^n}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)\le\frac{1}{3}\cdot\sum\frac{1}{a}\cdot\sum\frac{1}{a^n}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\le\frac{1}{3}\cdot\frac{p}{3Rr}\cdot\left(\frac{p}{9Rr}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2r}=\left(\frac{p}{9Rr}\right)^{n}\cdot\frac{1}{2r}\text{, unde}$$

ultima inegalitate rezultă din inegalitatea cunoscută $\sum\frac{1}{a}\le\frac{p}{3Rr}$ și inegalitatea

$\sum\frac{1}{a^n}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\le\left(\frac{p}{9Rr}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2r}$, conform presupunerii că $P(n)$ este adevărat**.**

6b) Arătați că în orice triunghi ABC **are loc inegalitatea**

$$\left(\frac{3}{2p}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{R}\le\frac{1}{a^n}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b^n}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c^n}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\le\left(\frac{p}{9Rr}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2r}\text{, unde } n\in N^*\ .$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **6)** și **6a).**

S-a obținut o rafinare a inegalității lui Euler.

La fiecare din inegalitățile de mai sus egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Bibliografie:

1. Marian Cucoaneș, Revista de Matematică din Timișoara nr. 3/2016, Problema X.440.
2. George Apostolopoulos, Romanian Mathematical Magazine nr.18- martie2017 , Problema XI.41.
3. O.Bottema,R.Z.Djordjevic,R.R.Janic,D.S.Mitrinovic,P.M.Vasic,Geometric Inequalities, Groningen 1969, The Netherlands.
4. Marin Chirciu, Inegalități geometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2015.
5. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.

4. CALCULATORUL ŞI PROBLEME CU NUMERE

Nela Ciceu, Bacău şi Roxana Mihaela Stanciu, Buzău

Punctul de plecare al acestor rânduri este următoarea problemă

1. Determinaţi numerele $\overline{abcd}$ stiind ca $\overline{ab}\cdot\overline{cd}+\overline{abd}=\overline{abcd}$.

Gheorghe Iacob, E:15072, G.M.-B 10/2016

Relaţia din enunţ se scrie sub forma $\overline{ab}(\overline{cd}-90)=\overline{(c-b)0}$, şi încercând pentru numerele de două cifre cd valorile 91, 92, ..., 99 obţinem soluţiile 9091, 4592, 3093, 1895, 1596, 1099.

Fără să negăm importanţa unei soluţii în care se folosesc observaţii legate de relaţiile din problemă, dorim sa arătăm că se poate folosi şi calculatorul. Cele mai multe probleme de acest tip nu necesită cunoştinţe aprofundate de programare. Considerăm că în acest fel se poate trezi interesul elevilor pentru folosirea calculatorului şi pentru altceva în afara jocurilor sau a reţelelor de socializare.

În limbajul de programare BASIC, soluţiile problemei de mai sus se obţin foarte repede cu un program uşor de înţeles chiar de către un elev de gimnaziu fără prea multe cunoştinţe de programare.

```
for a = 1 to 9
for b = 0 to 9
for c = 1 to 9
for d = 0 to 9
  st = (10*a+b)*(10*c+d) + (100*a+10*b+d)
  dr = 1000*a+100*c+10*d+c
if st = dr then print dr
next d: next c: next b: next a
```

Continuăm cu altă problemă.

2. Determinaţi numărul $\overline{abcd}$ cu proprietatea

$$\sqrt{\overline{abcd}}=8\sqrt{\overline{ab}}+\sqrt{\overline{cd}}.$$

Aurel Doboşan, E:15079, G.M.-B 10/2016

Programul cu care obţinem soluţia unică 1681 este următorul

```
for a = 1 to 9
for b = 0 to 9
for c = 1 to 9
for d = 0 to 9
  nr = 1000*a+100*b+10*c+d
  st = sqr(nr)
  dr=8*sqr(10*a+b) + sqr(10*c+d)
if st = dr then print nr
next d: next c: next b: next a
```

Apare natural întrebarea dacă putem obține alte probleme înlocuind coeficientul "8". Vom determina dacă următoarea problemă are sau nu soluții:

$$\sqrt{\overline{abcd}} = m\sqrt{\overline{ab}} + n\sqrt{\overline{cd}}\,.$$

Deducem ușor că m + n <= 32. Cu programul

```
for m=1 to 32
for n = 1 to 32-m
for a = 1 to 9
for b = 0 to 9
for c = 1 to 9
for d = 0 to 9
 nr = 1000*a+100*b+10*c+d
 st = sqr(nr)
 dr=m*sqr(10*a+b) + n*sqr(10*c+d)
if st = dr then print nr
next d: next c: next b: next a
next n: next m
```

rezultă că problema nu are soluții.

Putem utiliza același program pentru a vedea dacă obținem soluții pentru următoarele trei probleme:

$$\sqrt{\overline{abcd}} = m\sqrt{\overline{ba}} + n\sqrt{\overline{cd}} \qquad (1)$$
$$\sqrt{\overline{abcd}} = m\sqrt{\overline{ab}} + n\sqrt{\overline{dc}} \qquad (2)$$
$$\sqrt{\overline{abcd}} = m\sqrt{\overline{ba}} + n\sqrt{\overline{dc}} \qquad (3)$$

Modificând corespunzător linia dr=m*sqr(10*a+b) + n*sqr(10*c+d), obținem pentru (1)

$$\sqrt{5445} = 3\sqrt{45} + 8\sqrt{45}, \quad \sqrt{5445} = 4\sqrt{45} + 7\sqrt{45},$$
$$\sqrt{1849} = 4\sqrt{81} + \sqrt{49},$$
$$\sqrt{8427} = 2\sqrt{48} + 15\sqrt{27}, \quad \sqrt{8427} = 5\sqrt{48} + 11\sqrt{27},$$
$$\sqrt{8427} = 8\sqrt{48} + 7\sqrt{27}, \quad \sqrt{8427} = 11\sqrt{48} + 3\sqrt{27}\,.$$

Pentru (2) și (3) nu obținem soluții.

Propunem cititorilor să rezolve în același mod următoarele probleme (eventual să obțină probleme înrudite):

1. Determinați numerele $\overline{abcd}$ care verifică relația

$$\sqrt{\overline{abcd}} - \sqrt{\overline{acd}} = \overline{bb}\,.$$

Petru Todor, E:15114, G.M.-B. 12/2016

2. Rezolvaţi în multimea numeror naturale ecuaţia

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2017}\,.$$

Cristina Maria Militaru, E:15096, G.M.-B 11/2016

3. Aflaţi numerele naturale $\overline{abc}$ ştiind că

$$\sqrt{\overline{abc}}=\sqrt{\overline{cb}}+\sqrt{\overline{ab}}+\sqrt{a+b}+\sqrt{a+c}+a+c.$$

Nicolae Ivăşchescu, G:568, Sclipirea Minţii nr. 16 (2015)

4. Determinaţi numerele $\overline{abcd}$ formate din numere prime, ştiind că
$2a + ad + 3b + bd + cd^2 + 4cd + 3c = d^3 + 7d^2 + 15d + 9$.

Gheorghe Ghiţă, G:618, Sclipirea Minţii nr. 17 (2016)

5. Aflaţi numerele naturale $\overline{ab}$ pentru care avem:

a) $\sqrt{(\overline{aa}+\overline{bb})(a+b)+\overline{aa}\cdot b}=\overline{aa}$;

b) $\sqrt{(\overline{aa}+\overline{bb})(a+b)+\overline{aa}\cdot b}=\overline{bb}$.

Nicolae Ivăşchescu, G:667, Sclipirea Minţii nr. 18 (2016)

6. Să se determine cardinalul mulţimii $A=\left\{\overline{xyz}\mid \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{z}=1\right\}$.

Gheorghe Ghiţă, G:670, Sclipirea Minţii nr. 18 (2016)

7. Să se afle numerele N formate din 4 cifre având proprietatea că răsturnatul lui N se divide cu N + 2.

Titu Zvonaru, E:10705, G.M. 31994

8. Aflaţi cel mai mic număr $\overline{abc}$ astfel încât suma cifrelor numărului $n=\overline{abc}+\overline{cba}$ sa fie impară.

Andrei Eckstein, Concursul interjudeţean "Traian Lalescu", Petroşani 2012

9. Există numere naturale de trei cifre care să fie obţinute prin adunarea sumei cifrelor lor cu produsul cifrelor lor ?

Gheorghe Stoica, O.V. 300, RMT 3/2012

10. Câte numere $\overline{abcd}$ au proprietatea că ab şi cd divid $\overline{abcd}$?

Dr. RMT, O.VI.30, RMT 1/2013

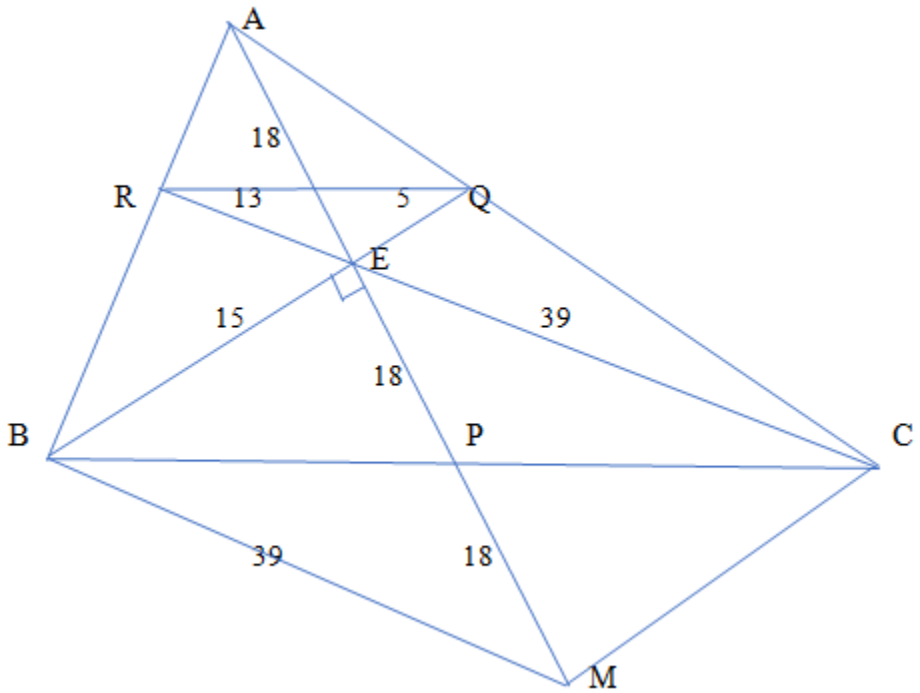
5. DESPRE PROBLEMA S:E16.70 DIN GAZETA MATEMATICĂ NR. 2/2016, PROPUSĂ PENTRU CLASA A VII-A

Prof. Buzea Gabriela
Școala Gimnazială Nr. 56,
București

Fie triunghiul ABC și punctele P∈(BC), Q∈(AC) si R∈(AB) astfel încât AP∩BQ∩CR=$\{E\}$. Știind că EQ=5cm, EB=15 cm, EA=EP=18 cm și CR=52 cm, calculați aria triunghiului ABC.

Autor Prof. Mihaela Berindeanu

Soluţia 1



În triunghiul ABC, AP∩BQ∩CR=$\{E\}$, aplicăm teorema lui Gergonne și obținem

$$\frac{EP}{AP}+\frac{EQ}{BQ}+\frac{ER}{CR}=1\Rightarrow\frac{18}{36}+\frac{5}{20}+\frac{ER}{52}=1\Rightarrow ER=13\ cm, CE=39\ cm.$$

Construiesc simetricul punctului E față de punctul P.

$S_P(E)=M\Rightarrow\overline{E,P,M}$ și EP=PM=18 cm, EM=36 cm.

Demonstrăm că punctul P este mijlocul segmentului BC.

$$\left.\begin{matrix}\frac{RE}{EC}=\frac{1}{3}\\ \frac{QE}{EB}=\frac{1}{3}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{RE}{EC}=\frac{QE}{EB}\Rightarrow\left.\begin{matrix}RQ\parallel BC\\ \frac{RQ}{BC}=\frac{1}{3}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{AR}{RB}=\frac{1}{2}$$

În triunghiul ABP aplicăm teorema lui Menelaus, cu secanta R-E-C, obținând

$$\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PE}{EA}\cdot\frac{AR}{RB}=1\Rightarrow BC=2CP\Rightarrow P\ este\ mijlocul\ segmentului\ [BC].$$

În patrulaterul BECM, $\left.\begin{matrix}BC\cap EM=\{P\}\\ EP=PM\\ BP=PC\end{matrix}\right\}\Rightarrow BECM\ paralelogram\Rightarrow$

$EC=BM=39\ cm.$

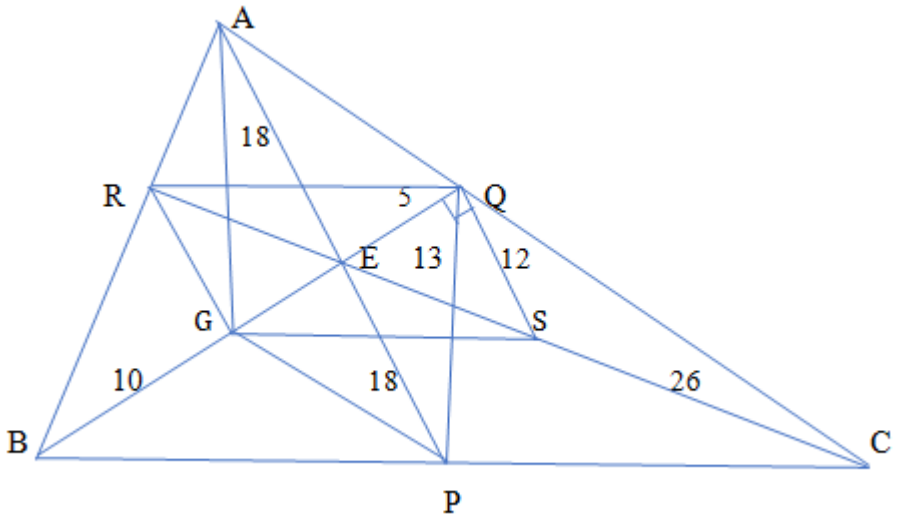
În triunghiul BEM, BE=15 cm, EM=36 cm, BM=39 cm, conform reciprocei teoremei lui Pitagora rezultă că triunghiul BEM este dreptunghic în E.

Atunci BE⊥AP.

$A_{\triangle ABP}=\frac{BE\cdot AP}{2}=270\ cm^2.$

Cum AP este mediană în triunghiul ABC, rezultă că $A_{\triangle ABC}=2\,A_{\triangle ABP}$, deci $A_{\triangle ABC}=540\ cm^2$.

Soluţia 2



Fie punctul $G\in[BE]$ astfel încât GE=5cm, BG=10 cm.

În triunghiul ABP, BE mediană și $\frac{BG}{GE}=\frac{2}{1}$, rezultă că punctul G este centru de greutate al triunghiul ABP.

În patrulaterul AGPQ, $\left.\begin{matrix}AP\cap GQ=\{E\}\\ AE=EP\\ GE=EQ\end{matrix}\right\}\Rightarrow$ AGPQ

paralelogram$\Rightarrow\left.\begin{matrix}GP\parallel AQ\\ Q\in AC\end{matrix}\right\}\Rightarrow GP\parallel AC$ și cum BG=GQ=10 cm, rezultă că GP este linie mijlocie în triunghiul BQC, deci punctul P este mijlocul lui BC.

În triunghiul APC, aplicăm teorema lui Menelaus, cu secanta B-E-Q,

$$\frac{CB}{BP}\cdot\frac{PE}{EA}\cdot\frac{AQ}{QC}=1\Rightarrow\quad\frac{AQ}{QC}=\frac{1}{2}.$$

În triunghiul ABC aplicăm teorema lui Ceva şi obţinem

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1\Rightarrow\quad\frac{AR}{RB}=\frac{1}{2}.$$

În triunghiul ARC aplicăm teorema lui Menelaus, cu secanta B-E-Q

$$\frac{AB}{BR}\cdot\frac{RE}{EC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1\Rightarrow\quad\frac{RE}{EC}=\frac{1}{3}\quad.$$

Cum RC=52 cm, obţinem RE=13 cm şi EC=39 cm.

Fie S ∈ $[EC]$ astfel încât ES=13 cm, deci SC=26 cm şi cum

$$\left.\begin{matrix}\frac{SC}{SE}=\frac{2}{1}\\ \frac{CQ}{QA}=\frac{2}{1}\end{matrix}\right\}\Rightarrow QS\parallel AE\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{QS}{AE}=\frac{2}{3}\Rightarrow QS=12\ cm.$$

În triunghiul EQS, EQ=5 cm, QS=12 cm , ES=13 cm, conform reciprocei teoremei lui Pitagora obţinem că măsura unghiului EQS este de 90^0, deci, EQ⊥QS. Dar, QS∥AE , şi atunci AE⊥QE.

$A_{\triangle ABP}=\frac{BE\cdot AP}{2}=\frac{15\cdot 36}{2}=270$ cm^2.

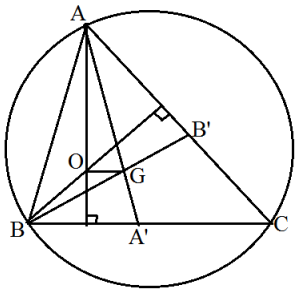
În triunghiul ABC, AP mediană, deci $A_{\triangle ABC}=2\,A_{\triangle ABP}=540$ cm^2.

6. RELAŢII IMPORTANTE ÎN TRIUNGHI

Oprea Elena Georgiana, Liceul Tehnologic, Puieşti

1. Distanţa dintre centrul de greutate G şi centrul cercului circumscris O al triunghiului ΔABC este dată de

$$OG^2 = R^2 + \left(a^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + b^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + c^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$$



Demonstraţie: Cum G are coordonatele baricentrice $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, considerăm O punctul oarecare din plan avem

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OC}$$

rezultă

$$OG^2 = \frac{1}{9} \cdot OA^2 + \frac{1}{9} \cdot OB^2 + \frac{1}{9} \cdot OC^2 + 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot OA^2 \cdot OB^2 + 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot OA^2 \cdot OC^2 + 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot OB^2 \cdot OC^2 ,$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \cdot OB \cdot \cos(\sphericalangle AOB) = OA \cdot OB \cdot \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB}.$$

Astfel

$$OG^2 = \frac{1}{9} \cdot OA^2 + \frac{1}{9} \cdot OB^2 + \frac{1}{9} \cdot OC^2 + \frac{1}{9} \cdot \left(OA^2 + OB^2 - AB^2 \right) +$$

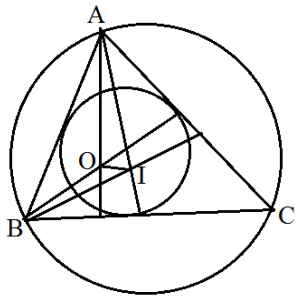
$$+ \frac{1}{9} \cdot \left(OA^2 + OC^2 - AC^2 \right) + \frac{1}{9} \cdot \left(OB^2 + OC^2 - BC^2 \right)$$

$$= \frac{3}{9} \cdot R^2 + \frac{3}{9} \cdot R^2 + \frac{3}{9} \cdot R^2 - \frac{1}{9} \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2 \right)$$

$$= R^2 - \frac{1}{9} \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2 \right)$$

2. Distanţa dintre centrul O al cercului circumscris şi I al cercului înscris triunghiului ΔABC este dată de

$$OI^2 = R^2 - 2Rr .$$



Demonstraţie: Cum coordonatele baricentrice ale cercului înscris în triunghi sunt $I\left(\frac{a}{2p},\frac{b}{2p},\frac{c}{2p}\right)$,rezultă

$$\overrightarrow{OI}=\frac{a}{2p}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{b}{2p}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{c}{2p}\cdot\overrightarrow{OC}.$$

Astfel obţinem

$$\overrightarrow{OI}=\frac{a^2}{4p^2}\cdot\overrightarrow{OA}^2+\frac{b^2}{4p^2}\cdot\overrightarrow{OB}^2+\frac{c^2}{4p^2}\cdot\overrightarrow{OC}^2+2\cdot\frac{a}{2p}\cdot\frac{b}{2p}\cdot\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+2\cdot\frac{a}{2p}\cdot\frac{c}{2p}\cdot\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+2\cdot\frac{b}{2p}\cdot\frac{c}{2p}\cdot\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$$

Deci

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|OA|\cdot|OB|\cdot\cos\left(\sphericalangle AOB\right)=|OA|\cdot|OB|\cdot\frac{OA^2+OB^2-AB^2}{2\cdot OA\cdot OB}=$$

$$=\frac{OA^2+OB^2-AB^2}{2}$$

De unde rezultă

$$OI^2=\frac{a^2}{4p^2}\cdot OA^2+\frac{b^2}{4p^2}\cdot OB^2+\frac{c^2}{4p^2}\cdot OC^2+\frac{ab}{2p^2}\cdot\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{ac}{2p^2}\cdot\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\frac{bc}{2p^2}\cdot\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=$$

$$=R^2-\left(a\cdot\frac{bc}{4p^2}+b\cdot\frac{ac}{4p^2}+c\cdot\frac{ab}{4p^2}\right)=R^2-\frac{abc}{2p}=$$

$$=R^2-\frac{4RS}{2p}=R^2-2Rr.$$

Bibliografie:

1. Chiş, M.Smale, *Coordonate baricentrice*,(http://www.viitori olimpici.ro/uploads/attachdata/68/17/25//coordonatebaricentrice.pdf).
2. N., Teodorescu, *Culegere de probleme pentru concursurile de matematică*, vol.5, Bucureşti, 1977.
3. http://ro.math.wikia.com/wiki/Coordonate baricentrice.

7. STUDIUL PUNCTULUI DE ECHILIBRU DE TIP FOCAR

Studiu de specialitate

Oprea Elena Georgiana, Liceul Tehnologic, Puieşti

Punctul de echilibru este de tip focar dacă valorile proprii ale matricei liniare

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sunt reale şi diferite de zero. Aceste valori proprii sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice

$$\lambda^2 - tr(A)\cdot\lambda + \det(A) = 0,$$

care are două soluţii complexe $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ diferite de 0 dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ \det(A) > 0 \end{cases} \qquad (1.1)$$

Condiţia (1.1) este echivalentă cu $\begin{cases} (a+d)^2 + 4\cdot b\cdot c < 0 \\ b\cdot c < 0 \end{cases}$ (1.2)

Observaţie : Din $b\cdot c < 0$ rezultă că $b, c \neq 0$.

Cazul a=0

În acest caz sistemul $\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$ devine $\begin{cases} \dot{x} = by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$, unde $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cu valorile proprii

$$\lambda_{1,2} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 + 4bc}}{2} = \frac{d \pm i\sqrt{4bc + d^2}}{2},$$

iar condiţia (1.2) devine $\begin{cases} d^2 + 4bc < 0 \\ bc < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |d| < 2|-bc| \\ bc < 0 \end{cases}$.

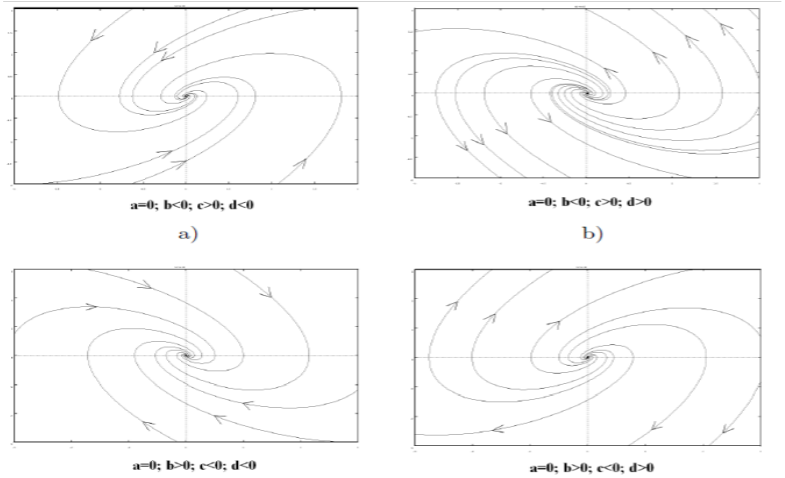


Fig.1. Portrete de fază pentru sistemul dinamic

Condiţii asupra parametrilor		Figura	Denumire
d>0	b<0, c>0	Fig.1.a)	Focar repulsiv
	b>0, c<0	Fig.1.b)	
d<0	b<0, c>0	Fig.1.c)	Focar atractiv
	b>0, c<0	Fig.1.d)	

Cazul d=0

În acest caz sistemul devine $\begin{cases}\dot{x}=ax+by\\ \dot{y}=cx\end{cases}$, unde $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & 0\end{pmatrix}$ cu valorile proprii

$$\lambda_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4bc}}{2}=\frac{a\pm i\sqrt{4bc+a^2}}{2},$$

iar condiţia (1.1) devine $\begin{cases}a^2+4bc<0\\ bc<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a|<2|-bc|\\ bc<0\end{cases}$.

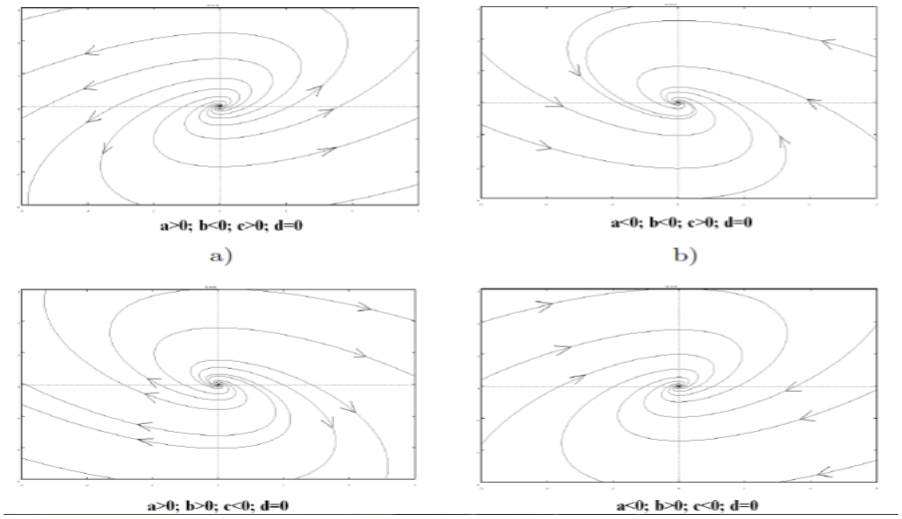


Fig.2. Portrete de fază pentru sistemul dinamic

Condiţii asupra parametrilor		Figura	Denumire
a>0	b<0, c>0	Fig.2.a)	Focar repulsiv
	b>0, c<0	Fig.2.b)	
a<0	b<0, c>0	Fig.2.c)	Focar atractiv
	b>0, c<0	Fig.2.d)	

8. CARACTERIZAREA NODULUI PENTRU UN SISTEM DINAMIC BIDIMENSIONAL LINIAR ÎN CAZUL ÎN CARE AVEM DOI PARAMETRII NULI

Studiu de specialitate

Florea Maria Luminița- Școala Gimnazială „Sf. Andrei" Tăcuta, Vaslui

Considerăm sistemul dinamic bidimensional liniar

$$\begin{cases}\dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy\end{cases}, \quad (1)$$

unde a,b,c,d sunt parametrii reali.

În ceea ce privește parametrii vom determina numărul și pantele direcțiilor asimptotice.

Știind că punctul de echilibru $(0,0)$ este nod atunci valorile proprii λ_1, λ_2 ale matricei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sunt reale și diferite de 0.

Soluția sistemului anterior este

$$\dot{x} = c_1\alpha_{11}e^{\lambda_1 t} + c_2\alpha_{21}e^{\lambda_2 t}$$
$$\dot{y} = c_1\alpha_{12}e^{\lambda_1 t} + c_2\alpha_{22}e^{\lambda_2 t},$$

unde c_1, c_2 sunt constante reale, și $(\alpha_{11}, \alpha_{12})^T (\alpha_{21}, \alpha_{22})^T$ sunt vectorii proprii corespunzători valorilor proprii λ_1, λ_2.

Avem $\dot{y} = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{c_1\alpha_{12}\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\alpha_{22}\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1\alpha_{11}\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\alpha_{21}\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}$, prin urmare avem următoarele cazuri

- Dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2$ atunci punctul de echilibru $(0,0)$ este un nod nedegenerat cu două direcții asimptotice. Traiectoriile au aceeași direcție ca și vectorul propriu al valorilor absolute mai mici față de punctul critic, pentru t mai mare se duc spre direcția vectorului propriu corespunzător valorii proprii cu valoarea proprie absolută mai mare.
- Dacă $\lambda_1 = \lambda_2$ și există doi vectori liniar independenți, atunci punctul de echilibru $(0,0)$ este un nod nedegenerat cu o infinitate de direcții asimptotice. Traiectoriile pleacă în direcțiile $\frac{c_1\alpha_{12} + c_2\alpha_{22}}{c_1\alpha_{11} + c_2\alpha_{21}}$.
- Dacă $\lambda_1 = \lambda_2$ și există un singur vector, atunci punctul de echilibru $(0,0)$ este un nod degenerat cu o singură direcție asimptotică. Traiectoriile merg spre direcția vectorului propriu corespunzător valorii proprii.

Valorile proprii ale sistemului (1) sunt rădăcinile ecuației caracteristice

$\lambda^2 + trA\ \lambda + \det A = 0,$

care are două soluții reale diferite de 0 dacă și numai dacă

$$\begin{cases}\Delta \geq 0 \\ P > 0\end{cases}, \quad (2)$$

unde $\Delta = tr^2 A - 4\det A$ și $P = \det A$.

Sistemul (2) este achivalent cu

$$\begin{cases}(a-d)^2+4bc \geq 0\\ ad-bc>0\end{cases}, (3)$$

prin urmare, valorile proprii ale matricei A sunt

$$\lambda_{1,2}=\frac{(a+d)\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}.$$

Dacă $b=0, c=0$ sistemul (1) devine

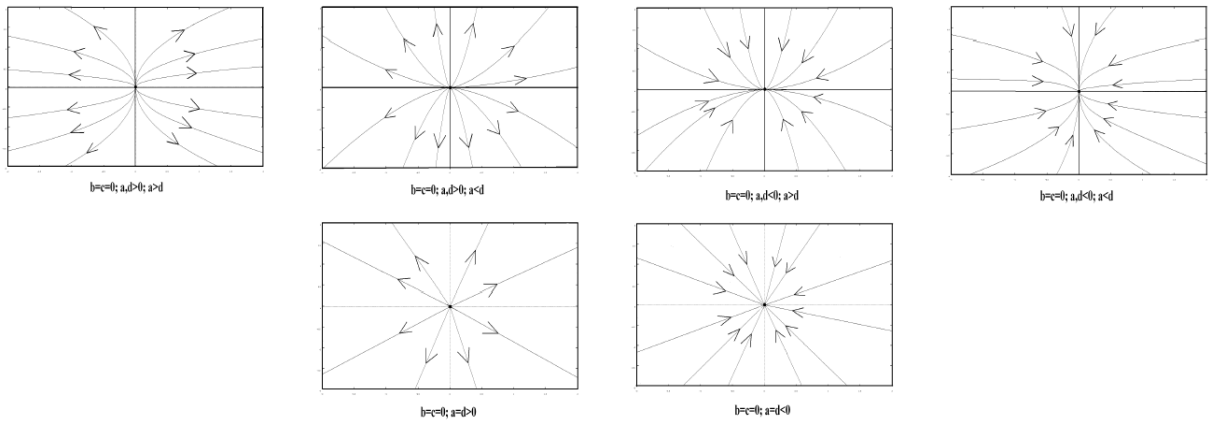
$$\begin{cases}\dot{x}=ax\\ \dot{y}=dy\end{cases},$$

unde $A=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}$ cu valorile proprii $\lambda_1=a, \lambda_2=d$ și sistemul (3) este $\begin{matrix}(a-d)^2\geq 0\\ ad>0\end{matrix}$.

Dacă $ad>0$ rezultă că $a>0, d>0$ caz în care punctul de echilibru $(0,0)$ este un nod repulsiv sau $a<0, d<0$ caz în care punctul de echilibru $(0,0)$ este un nod atractiv.

Vectorii proprii corespunzători valorilor proprii $\lambda_1=a, \lambda_2=\mathrm{d}$ pentru $a\neq d$ sunt $(1,0)^T$ și $(0,1)^T$ pentru care punctul de echilibru $(0,0)$ este un nod nedegenerat cu două direcții asimptotice, și anume cele două axe de coordonate $(OX$ și $OY)$. Dacă $a=d$, există doi vectori proprii liniar independenți, pentru care punctul de echilibru $(0,0)$ este nod degenerat cu o infinitate de direcții asimptotice. Se numește sursă dacă $a<0, d<0$ sau centru dacă $a>0, d>0$.

În figura următoare vom reprezenta portretele de fază ale sistemului



Bibliografie:

1. R. Curtu, *Introduction in the dynamical systems theory*, Infomarket, Brasov, 2000.
2. A. Georgescu, M. Moroianu, I. Oprea, *Bifurcation Theory. Principles and applications, Applied Mathematics and Applications Series, Nr.1*, University Pitesti, 2000.
3. http://www.math.psu.edu/tseng/class/Math251/Notes-PhasePlane.pdf
4. http://www.math.psu.edu/bressan/PSPDF/M411-review2.pdf

9. SOLUTION TO IRAN 1996 GENERALIZATIONS

By Leo Giugiuc

If $x, y, z, m > 0$ *and, then* $\left(\sum x^{2m+2}\right)\left(\sum \frac{1}{(y+z)^{2m+2}}\right) \geq \frac{9}{4^{m+1}}$.

Authors: D. M. Batinetu Giurgiu and Neculai Stanciu, Romania

Lemma 1 (Iran 1996): *If* $a, b, c \geq 0$ *then* $(ab+bc+ca)\left(\sum \frac{1}{(a+b)^2}\right) \geq \frac{9}{4}$.

Lemma 2 : *The function* $f(t) = t^{m+1}$ *is convex on* $(0,\infty)$.

Both results are well known, hence we'll not prove them . Back to the problem .

From lemma 2 , $(y+z)^{m+1} \leq 2^m(y^{m+1}+z^{m+1}) \Rightarrow \frac{1}{(y+z)^{2m+2}} \geq \frac{1}{4^m(y^{m+1}+z^{m+1})^2}$.

Let $x^{m+1} = a, y^{m+1} = b$ *and* $z^{m+1} = c$ *.Then* $\sum x^{2m+2} = \sum a^2$

$\geq ab+bc+ca$ *and from above,*

$$\sum \frac{1}{(y+z)^{2m+2}} \geq \frac{1}{4^m}\sum \frac{1}{(y^{m+1}+z^{m+1})^2} = \frac{1}{4^m}\left(\sum \frac{1}{(a+b)^2}\right).$$

But from lemma 1, $(ab+bc+ca)\left(\sum \frac{1}{(a+b)^2}\right) \geq \frac{9}{4}$ *. Done !!*

10. APLICAŢII ALE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIE

Isaia Dida-Cristina

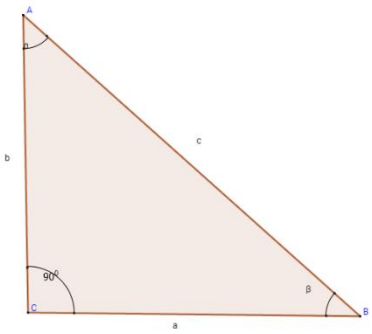
Profesor, Şcoala Gimnazială Nr. 20 Galaţi

Funcţiile trigonometrice prezentate în trigonometrie fac posibilă folosirea unghiurilor pentru determinarea elementelor necunoscute din diferite figuri geometrice. După cum ne indică şi numele trigonometria (măsurarea a trei unghiuri) se ocupă cu rezolvarea triunghiurilor, respectiv a tuturor figurilor care se pot reduce la triunghiuri prin trasare de diagonale.

Rezolvarea triunghiurilor dreptunghice

Metode generale

În trigonometrie se dau definiţiile funcţiilor geometrice ale unghiurilor dintr-un triunghi dreptunghic care se extind cu ajutorul cercului unitate la orice fel de unghiuri. Aceste definiţii conţin relaţii între laturile şi unghiurile unui triunghi dreptunghic astfel încât cunoaşterea a două elemente este suficientă pentru calculul celorlalte. Notăm ipotenuza cu *c*, catetele cu *a* şi *b*, iar unghiurile opuse lor cu α şi β. Folosim două relaţii din geometrie referitoare la triunghiul dreptunghic (fig. 1):



1. Teorema lui Pitagora $c^2=a^2+b^2$.
2. Unghiurile alăturate ipotenuzei sunt suplementare: $\alpha+\beta=90^0$.

Există patru cazuri tipice pentru rezolvarea triunghiurilor dreptunghice.

I. Se dă ipotenuza *c* şi un unghi alăturat, de exemplu α:

1. $\beta=90^0-\alpha$; 2. $\sin\alpha=\frac{a}{c}$, $a=c\sin\alpha$; 3. $\cos\alpha=\frac{b}{c}$, $b=c\cos\alpha$.

II. Se dă ipotenuza c și o catetă, de exemplu a:

1. $\sin\alpha=\frac{a}{c}$; 2. $\beta=90^0-\alpha$; 3a. $b=\sqrt{c^2-a^2}$ sau cu ajutorul unghiului calculat α

3b. $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a}$; $b=a\operatorname{ctg}\alpha$ sau 3c. $\cos\alpha=\frac{b}{c}$, $b=c\cos\alpha$.

III. Se dă o catetă, de exemplu a și un unghi, de exemplu α.

1.$\beta=90^0-\alpha$; 2. $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a}$, $b=a\operatorname{ctg}\alpha$; 3. $\sin\alpha=\frac{a}{c}$, $c=\frac{a}{\sin\alpha}$;

sau cu ajutorul unghiului calculat β

2a. $\operatorname{tg}\beta=\frac{b}{a}$, $b=a\operatorname{tg}\beta$; 3a. $\cos\beta=\frac{a}{c}$, $c=\frac{a}{\cos\beta}$.

IV. Se dau ambele catete a și b:

1. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$; 2. $\beta=90^0-\alpha$; 3a. $c=\sqrt{a^2+b^2}$;

sau cu ajutorul unghiului calculat α 3b. $c=\frac{a}{\sin\alpha}$ sau 3c. $c=\frac{a}{\cos\beta}$.

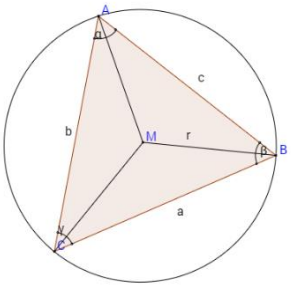
Relații trigonometrice într-un triunghi oarecare

Elementele pe care vrem să le calculăm nu se află în general în triunghiuri dreptunghice. De aceea trebuie studiate relațiile dintre unghiurile și laturile unui triunghi oarecare. Cele mai importatnte relații sunt teorema sinusurilor și teorema cosinusului. Teorema cosinusului în cazul în care lucrăm cu tabele este mai puțin folosită și poate fi folosită înlocuită cu teorema tangentelor sau cu formulele referitoare la jumătatea unghiurilor.

Teoremele geometriei plane

Teorema sinusurilor

Orice triunghi *ABC* are un cerc circumscris lui, al cărui centru se află la intersectia mediatoarelor (fig. 2). Laturile triunghiului vor fi coarde, iar vârfurile triunghiului se află pe cerc.



Dacă notăm cu *R* raza cercului circumscris, laturile vor fi *a=2R* sinα, *b=2R* sinβ, *c=2R* sinγ. Deci, $2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

Într-un triunghi raportul dintre o latură și sinusul unghiului opus este egal cu diametrul cercului circumscris triunghiului.

Teorema sinusurilor

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Într-un triunghi raportul a două laturi este egal cu raportul sinusurilor unghiurilor opuse.

Teorema cosinusului

În triunghiul *ABC* notăm cu *D* punctul de intersecție al înălțimii h_c cu latura *c* și *AD=q* este proiecția laturii *b* pe latura *c*. Această proiecție *q=b* cos α este pozitivă în cazul lui α ascuțit și negativă pentru α obtuz. Lungimea lui *DB* va fi egală cu *c – q,* iar h_c = *b* sinα. Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic *DBC,*
$a^2 = {h_c}^2 + (c-q)^2 = b^2\sin^2\alpha + c^2 + b^2\cos^2\alpha -$
- *2bc* cos α sau grupând termenii $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Relații asemănătoare se obțin prin permutări circulare.

Teorema cosinusului

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ sau $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ sau $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Pătratul lungimii unei laturi a unui triunghi este egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două minus de două ori produsul lor înmulțit cu cosinusul unghiului dintre ele.

Teorema tangentei

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2},\quad \frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{180^0-\gamma}{2}$$
$$\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2},\quad \frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{180^0-\alpha}{2}$$
$$\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}=\frac{c-a}{c+a}\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2},\quad \frac{\gamma+\alpha}{2}=\frac{180^0-\beta}{2}$$

Formulele tangentei

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{p(p-c)}}$, unde $2p=a+b+c$.

Raza cercului înscris în triunghi

În triunghiul *ABC* bisectoarele se intersectează în centrul cercului înscris. Trasăm razele cercului în punctele de tangență *E, F, G* și vom obține șase triunghiuri dreptunghice. Ele sunt două câte două congruente, deci laturile notate cu *x, y, z* respectiv sunt egale. Lungimile laturilor egale vor fi

$x=p-a$, $y=p-b$, $z=p-c$, unde $2p=a+b+c$. În triunghiul *AGM*, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{x}=\frac{r}{p-a}$. Folosind formula $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$, obținem $\frac{r}{p-a}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$, de unde rezultă:

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Aria unui triunghi

Înlocuind în formula ariei $A=\frac{1}{2}c\cdot h_c$ pe h_c cu b sin α, obținem $A=\frac{1}{2}bc$ sin α. Aplicând teorema sinusurilor în formula ariei obținem următorele formule pentru arie:

$$A = \frac{abc}{4R} = 2R^2 sin\alpha\ sin\beta\ sin\gamma = a^2\frac{sin\beta\ sin\gamma}{2sin\alpha} = b^2\frac{sin\gamma\ sin\alpha}{2sin\beta} = c^2\frac{sin\alpha\ sin\beta}{sin\gamma}.$$

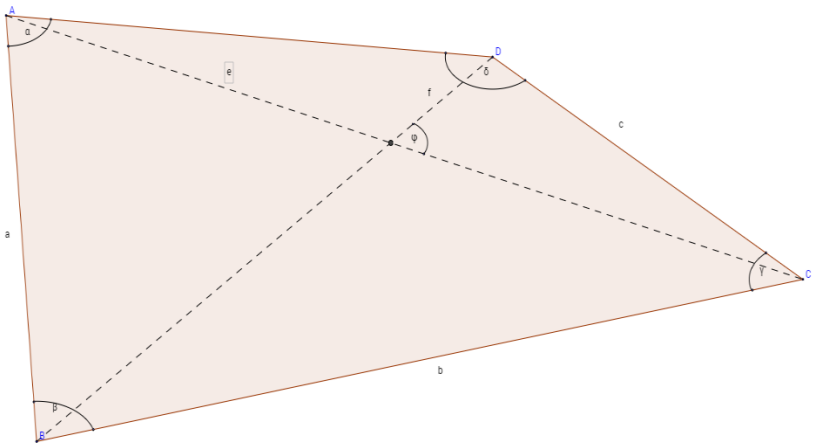
Prin adunarea ariilor triunghiurilor *ABM*, *BCM*, *CAM*, din figura 2, ale căror înălțimi sunt egale cu raza cercului înscris obținem ***formula lui Heron*** pentru arie:

$$A = \frac{1}{2}(cr + br + ar) = rp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

unde $2p = a + b + c$.

Aria unui patrulater oarecare

Un patrulater oarecare *ABCD* este determinat de cinci elemente, cele patru laturi și suma a două unghiuri opuse, de exemplu α și γ.



Notăm cu *p* semiperimetrul: $p = \frac{a+b+c+d}{4}$ și cu $\varepsilon = \alpha + \gamma$.

Ariile triunghiurilor ABD și BCD și aria patrulaterului A_p vor fi:

$$A_1 = \frac{1}{2}ad\ sin\alpha;\ A_2 = \frac{1}{2}bc\ sin\gamma;\ A_p = \frac{1}{2}(ad\ sin\alpha + bc\ sin\beta).$$

Aplicând teorema cosinusului obținem:

$$a^2 + d^2 - 2ad\ cos\alpha = f^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\gamma.$$

Atunci:

$$(4A)^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4(a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd\ cos2\varepsilon).$$

Efectuând calculele obținem:

$$A_p = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\ cos^2\varepsilon}.$$

Probleme rezolvate

1. Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel dacă și numai dacă:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{4}.$$

Rezolvare:

" $\Longrightarrow$ "

Dacă a = b și triunghiul ABC este dreptunghic $\Longrightarrow$ $A_{\Delta ABC} = \frac{a^2}{2} = \frac{(a+a)\sqrt{aa}}{2} =$

$= \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}$.

" $\Longleftarrow$ "

Se știe că $R = \frac{abc}{4A_{\Delta ABC}}$. Observăm că $A_{\Delta ABC} = \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{4} \Leftrightarrow R(a+b) = c\sqrt{ab}.$

Deoarece $c = 2R \sin C \Longrightarrow R(a+b) = 2R\sqrt{ab} \sin C \Longrightarrow \sin C = \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$

Din inegalitatea mediilor rezultă că $\sin C = \frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \geq 1 \Longrightarrow C = 90^0, a = b, c = a\sqrt{2}.$

2. În orice triunghi există relația: $OI^2 = R(R - 2r)$, unde O și I sunt centrele cercurilor circumscris, respectiv înscris. (Euler)

Rezolvare:

În triunghiul *ABC*, mediatoarea *OM* intersectează arcul *BC* în punctul *D*. Rezultă că *AD* este bisectoarea unghiului *A* și deci trece prin centru cercului înscris. Avem:

m($\sphericalangle DBI$) = m($\sphericalangle DBC$) + m($\sphericalangle CBI$) = $\frac{1}{2}$ [m(A)+m($\sphericalangle B$)],

dar m($\sphericalangle DIB$) = $\frac{1}{2}$ [m(A)+m($\sphericalangle B$)](exterior unghiului *BIA*).

Fie M_1 și M_2 punctele în care dreapta *OP* intersectează cercul circumscris. Avem:

$ID \cdot AI = IM_1 \cdot IM_2 = (R + OI)(R - OI) = R^2 - OI^2$

Deci $R^2 - OI^2 = 2Rr$, de unde $OI^2 = R(R - 2r)$.

3. În exteriorul triunghiului echilateral *ABC* se construiește triunghiul *BDC* astfel încât m(<*BCD*)=10^0 și m(<*CBD*)=20^0. Să se demonstreze că triunghiul *ABD* este isoscel.

Rezolvare:

Notăm m(<*DAC*)=*x*. Aplicând terorema sinusurilor obținem:

$\frac{BD}{\sin 10^0} = \frac{CD}{\sin 20^0} \Rightarrow CD = BD \cdot \frac{\sin 10^0}{\sin 20^0} = BD \cdot \frac{2 \sin 10^0 \cos 20^0}{\sin 10^0}$, adică $CD = 2BD \cos 10^0$.

Mai avem: $\frac{CD}{\sin x} = \frac{AD}{\sin 70^0} \Rightarrow CD = \frac{AD \cdot \sin x}{\cos 20^0}$; $\frac{BD}{\sin(60^0 - x)} = \frac{AD}{\sin 80^0} \Rightarrow BD = \frac{AD \cdot \sin(60^0 - x)}{\cos 10^0}$.

Înlocuind obținem:

$\frac{\sin x}{\cos 20^0} = \frac{2 \sin(60^0 - x)}{\cos 10^0} \cdot \cos 10^0 \Leftrightarrow \sin 20^0 \sin x = 2 \sin 20^0 \cos 20^0 \sin(60^0 - x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin 20^0 \sin x = \sin 40^0 \sin(60^0 - x) \Leftrightarrow \cos(x - 20^0) - \cos(x + 20^0) = \cos(x - 20^0) -$

$- \cos(100^0 - x) \Leftrightarrow \cos(100^0 - x) - \cos(x + 20^0) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin 60^0 \sin(40^0 - x) = 0.$

Rezultă că *x* = 40^0 și m(<*ADC*)=180^0- 40^0- 70^0=70^0, deci Δ*ADC* este isoscel cu *AD*=*AC*.

5. Să se demonstreze că triunghiul ABC în care $a = 2b \sin\frac{A}{2}$, $A \in [\pi/3, \pi)$, este isoscel.

Rezolvare:

Din teorema sinusurilor și relația dată se obține sin *A* = 2 sin *B* sin $\frac{A}{2}$, de unde cos $\frac{A}{2}$ = sin *B* sau sin *B* = sin$\frac{\pi - A}{2}$; deci *B* = $\frac{\pi - A}{2}$ sau *B* = $\pi - A - \frac{\pi - A}{2} = \frac{\pi + A}{2}$.

În primul caz *C* = $\pi - A - \frac{\pi - A}{2} = \frac{\pi - A}{2}$ = *B* și triunghiul ABC este isoscel.

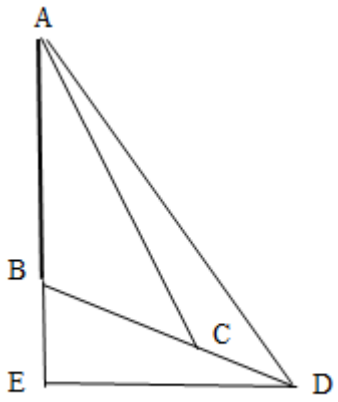
Cazul al doilea nu este posibil deoarece *A* + *B* = $\frac{\pi + 3A}{2} \in [\pi, 2\pi)$, oricare ar fi $A \in [\pi/3, \pi)$.

Determinarea înălțimii unui turn inaccesibil, situat pe un deal.

Fie turnul marcat prin segmentul AB. Alegem un punct accesibil C și lucrăm în planul determinat de punctele A, B, C. Luăm încă un punct accesibil D∈ BC și notăm cu E punctul de intersecție al verticalei prin A cu orizontala prin D.

Prin măsurători se obțin:

$CD = a$, m($\sphericalangle EDB$) = φ, m($\sphericalangle ADB$) = β și m($\sphericalangle ACB$) = α.



În triunghiul *ACD*, avem:

$\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin(\alpha-\beta)}$, deci $AC = \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$.

Din triunghiul ABC se obține:

$\frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}$, deci $AB = \frac{\sin\alpha}{\cos\varphi}\,AC$.

Așadar

$$AB = \frac{a\sin\alpha\,\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)\cos\varphi}.$$

Bibliografie

Mică enciclopedie matematică, Editura Tehnică, Bucureşti 1980

Manual geometrie şi trigonometrie pentru clasa a X-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1988

Gazeta matematică, Ediție electronică 1895-2010, Softwin Intuitext

11. SOLUȚII PROBLEMA LUNII FEBRUARIE 2017

Să se arate că dacă punctele A,B,C,D,O,M din spaţiu îndeplinesc condiţiile: $AB \perp CD,\ AD \perp BC,\ OA \perp BD$ şi $M = pr_{BD}C$, atunci punctele A,C,M,O sunt coplanare.

Prof. C. Telteu, C. N. A. „Regina Maria", Constanţa

Soluţie autor:

Începem cu observaţia că $M = pr_{BD}C \Rightarrow M,B,D$ coliniare şi M,B,D,C coplanare. Fie α planul lor.

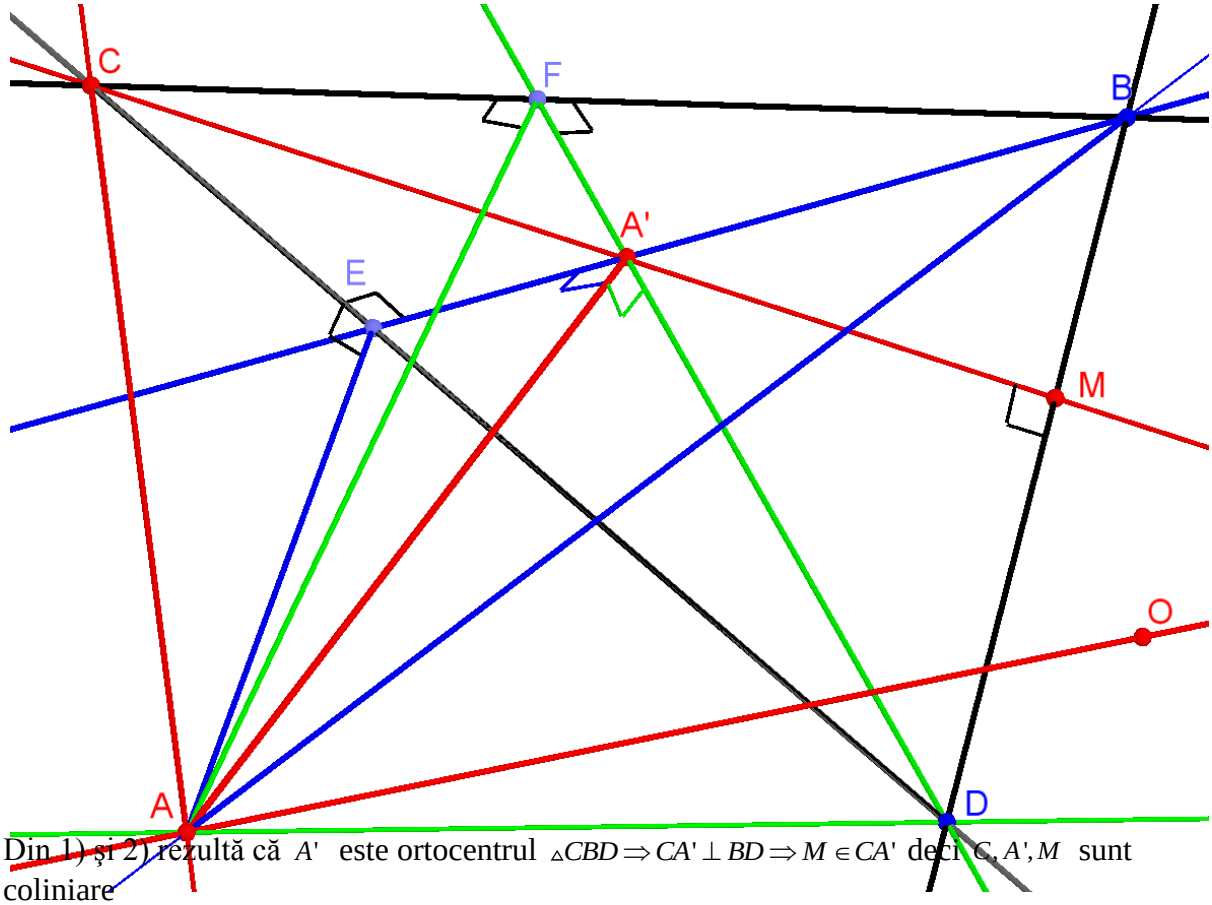
Fie $A' = pr_{\alpha}A$.

1) Fie $F = pr_{BC}A' \Rightarrow (A'AF) \perp BC$ şi pentru că $AD \perp BC \Rightarrow AD \subset (A'AF)$, care este planul normal dreptei BC, ce trece prin A.

Deci punctele F,A',D sunt coliniare ($\in (A'AF) \cap \alpha$).

2) Fie $E = pr_{DC}A' \Rightarrow CD \perp (A'AE)$ şi pentru că $AB \perp CD \Rightarrow AB \subset (A'AE)$, planul normal dreptei CD ce trece prin A. Deci B,A',E sunt coliniare ($\in (A'AE) \cap \alpha$).

Acum figura arată ca mai jos.



Din 1) şi 2) rezultă că A' este ortocentrul $\triangle CBD \Rightarrow CA' \perp BD \Rightarrow M \in CA'$ deci C,A',M sunt coliniare

$(\in (ACM)\cap \alpha)$, (ACM) fiind planul normal dreptei BD ce trece prin A. Deoarece $AO \perp BD \Rightarrow AO \subset (ACM) \Rightarrow A,C,M,O$ sunt coplanare.

Alte soluții:

1. Prof. Biro istvan

Presupunem că punctele *A, B, C, D, O, M* sunt distincte și notăm cu

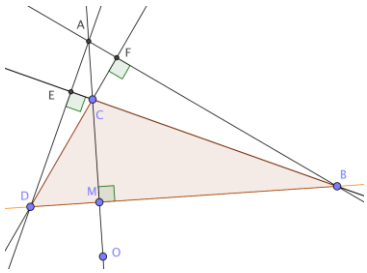
(1) $AB \perp CD$,

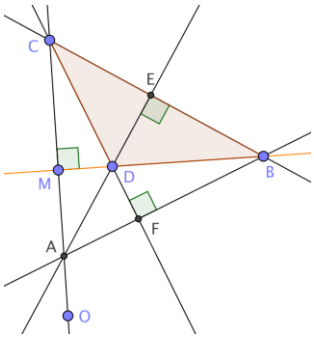
(2) $AD \perp BC$,

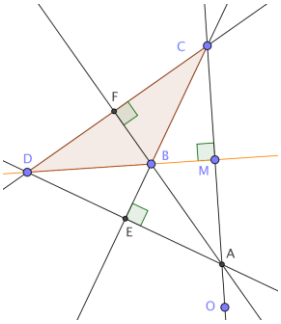
(3) $OA \perp BD$.

Din condiția $M = pr_{BD}C$ rezultă că punctele *B, C, D, M* sunt coplanare ($M \in BD$ și $C \notin BD$) și triunghiul *BCD* nu poate fi dreptunghic. Avem următoarele cazuri:

I. $A \in (BCD)$: din condițiile *(1)* și *(2)* rezultă că *A* este ortocentrul triunghiului *BCD* și *O* poate fi oriunde pe dreapta *AM*; în acest caz *A, C, O, M* sunt colineare.





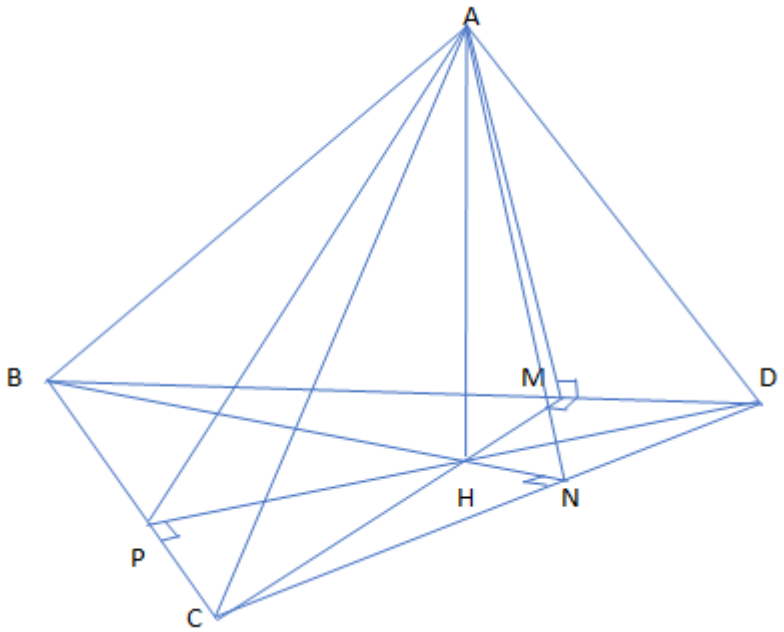


II. $A \notin (BCD)$: din condiția (1) rezultă $AB \perp (BCD)$ și din (2) rezultă $AD \perp (BCD)$, ceea ce contrazice teorema *"Printr-un punct putem duce o unică perpendiculară pe un plan dat"*.

În concluzie condițiile din enunț sunt adevărate dacă toate punctele sunt coplanare.

2. Prof. Buzea Gabriela , Școala Gimnazială Nr. 56, București

Din $M=pr_{BD}C$ rezultă că $CM \perp BD$, $M \in BD$.
Construim $BN \perp CD$, $N \in CD$.



În $\Delta BCD\begin{cases} CM \text{ înălțime} \\ BN \text{ înălțime} \\ CM \cap BN = \{H\} \end{cases}$, rezultă că H este ortocentrul ΔBCD ⇒DH⊥BC ⇒DP⊥BC, P∈BC (1).

Din $\begin{cases} CD \perp AB(ip) \\ CD \perp BN(constr.) \\ AB \cap BN = \{B\} \\ AB, BN \subset (ABN) \end{cases}$ ⇒ CD⊥(ABN) și cum AH⊂(ABN), avem CD⊥AH (2).

Din $\begin{cases} BC \perp DP(1) \\ BC \perp AD(ip) \\ DP \cap AD = \{D\} \\ DP, AD \subset (DAP) \end{cases}$ ⇒BC⊥(DAP) și cum AH⊂(DAP), avem BC⊥AH (3).

Știind că $\begin{cases} AH \perp CD(2) \\ AH \perp BC(3) \\ CD \cap BC = \{C\} \\ CD, BC \subset (BCD) \end{cases}$ rezultă că AH⊥(BCD).

Folosind teorema celor trei perpendiculare, $\left.\begin{matrix} AH \perp (BCD) \\ HM \perp BD \\ HM, BD \subset (BCD) \end{matrix}\right\}$ ⇒AM⊥BD(4).

Din $\left.\begin{matrix} BD \perp AM\ (4) \\ BD \perp CM \\ AM \cap CM = \{M\} \\ AM, CM \subset (ACM) \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (ACM)$ (5).

Din $\left.\begin{matrix} BD \perp OA(ip) \\ BD \perp AM(4) \\ OA \cap AM = \{A\} \\ OA, AM \subset (OAM) \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (OAM)$ (6).

Din relațiile (5) și (6) rezultă că punctele A,O,C și M sunt coplanare.

3. Prof. Cojocaru Petru, Români – Neamț

Consider punctele A, B, C, D din spațiu, vârfurile tetraedrului ABCD și AH ⊥ (BCD).
Din AB ⊥ CD (ipoteză) și AH ⊥ CD (AH înălțime) => CD ⊥ (ABH) și BH ⊥ CD (1).
Din AD ⊥ BC (ipoteză) și AH ⊥ BC (AH înălțime) => BC ⊥ (ADH) și DH ⊥ BC (2).
Din (1) și (2) => H este ortocentru ΔBCD și CH ⊥ BD (3) în M. (ipoteză; M = $pr_{BD}C$)
Din AH ⊥ BD (AH înălțime) și CM ⊥ BD => BD ⊥ (ACH) în speță BD ⊥ AC (4)
Din (4) și BD ⊥ AO (ipoteză) avem BD ⊥ (ACO) în M. (CM ⊥ BD unic). Planele (ACH) și (ACO) au două drepte concurente (AC și CM) incluse, deci coincid.
În planul astfel determinat întâlnim punctele A,C,O,M. (q.e.d.)

12. PROBLEMA LUNII MARTIE 2017

D.M. Bătineţu – Giurgiu, Bucharest and Neculai Stanciu, Buzău, Romania



Prove that in all triangles ABC holds the inequality $\sum_{cyc}\frac{1}{(\sin A+\sin B)^2}\geq 1$.

If you solve the problem, you can post your solution sending it by email to revista@mateinfo.ro .

Deadline 01.04.2017.



Arătați că în orice triunghi ABC este adevărată inegalitatea

$$\sum_{cyc}\frac{1}{(\sin A+\sin B)^2}\geq 1.$$

Așteptăm soluții cât mai interesante până pe data de 1.04.2017 pe adresa de e-mail revista@mateinfo.ro