REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

MARTIE 2020

ISSN 2065-6432

www.mateinfo.ro

REVISTĂ LUNARĂ DIN FEBRUARIE 2009

revista.mateinfo@yahoo.com

COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ŞI SUSŢINĂTOR PERMANENŢI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ŞI NELA CICEU

ARTICOLE REVISTĂ:

1. **O demonstraţie logico-matematică şi nu numai a faptului că Dumnezeu există ... pag. 2**
   Neculai Stanciu, Buzău

2. **Asupra unor inegalități trigonometrice**
   Inegalități cu sume de forma $\sum\left(b^2+c^2\right) f\left(\frac{A}{2}\right)$ ... pag. 21
   Marin Chirciu

3. **In legătură cu problema L:739 Sclipirea Minții-24 ... pag. 46**
   Marin Chirciu

4. **Problema L:724 Sclipirea Minții-24 ... pag. 45**
   Marin Chirciu

5. **Other solutions for certain problems from School Science and Mathematics**
   By Nela Ciceu, Roşiori, Bacău and Roxana Mihaela Stanciu, Buzău

6. **URMAŞII LUI BACH Concertul No.1**
   Stan Ilie

January 28, 2020

1. O demonstraţie logico-matematică şi nu numai a faptului că Dumnezeu există

Neculai Stanciu, Buzău

Principiul ontologic: ANSELM, DESCARTES, LEIBNIZ, GÖDEL

Deismul este o orientare filozofică-religioasă din secolele XVII-XVIII, care recunoștea existența lui Dumnezeu numai ca o cauză primară, impersonală a lumii, negând ideea întruchipării lui Dumnezeu într-o persoană și teza intervenției acestuia în viața naturii și a societății.

Deistul crede în existența unui Dumnezeu, sau unei ființe supreme, dar neagă religiile, bazându-și credința numai pe lumina primită de la natură, trecută prin filtrul rațiunii. Deiști renumiți au fost: Voltaire, Jean-Jacques Rousseau, Benjamin Franklin, Thomas Jefferson ș.a.

Deismul susține că numai folosind corect rațiunea, omul poate ajunge la o religie naturală sau rațională, capabilă să treacă dincolo de mesajele revelațiilor divine. Deismul se bazează pe mai multe principii, primul dintre ele fiind cel al existenței unei divinități, a cărei existență, susțin deiștii, poate fi afirmată gândindu-ne la ordinea și perfecțiunea Universului. Este vorba deci de o divinitate creatoare. Credința în acest Dumnezeu este cea mai importantă pentru deiști și nu diferitele servicii religioase. Din acest motiv, ei nu cred în preoți, biserici și texte sacre. Deiștii susțin că omul singur nu poate cunoaște binele și răul. Cunoașterea acestora, care constituie o adevărată știință teologică, devine posibilă doar dacă se acceptă ideea că divinitatea a elaborat legi și principii etice, a căror respectare este obligatorie pentru toți indivizii societății. Concepția deistă, născută într-o epocă de mari bătălii religioase, susține că numai folosind rațiunea se poate pune capăt diferitelor controverse religioase, și ca atare, se poate ajunge la aceea unitate religioasă pe care, mai ales iluminiștii, o interpretau ca fiind singura modalitate de a uni toate ființele umane într-o religie unică.

Existența cea veșnică a lui Dumnezeu a fost demonstrată prin intermediul unui argument ontologic de marele matematician și logician *Kurt Gödel*

Demonstrația ontologică a lui Gödel constă dintr-o serie de axiome, definiții și teoreme ce sunt enunţate în cadrul teoretic oferit de logica modală, prin care se demonstrează existența lui Dumnezeu. *Kurt Gödel* (1906–1978) a fost un celebru matematician și logician ce a trăit în secolul al XX-lea, fiind cunoscut în special pentru teorema de incompletitudine ce evidenţiază limitele modelului axiomatic din aritmetica standard. Întocmai ca și prietenul său, genialul savant Albert Einstein, Gödel a avut înclinații către filosofie, descriindu-și propria filosofie ca fiind „raționalistă, idealistă, optimistă și teologică“. El a fost influențat în special de lucrările lui Gottfried Leibniz. Filosofia lui Gödel conținea, ca și în cazul filosofiei lui Leibniz, idei geniale despre teoria monadelor, Dumnezeu fiind considerat drept monada supremă.

Ceea ce este mai puțin cunoscut despre Gödel este faptul că el a schițat o versiune revizuită a argumentului ontologic al Sfântului Anselm de Canterbury (1033–1109). Această formulă nu a fost publicată în timpul vieții, dar în anul 1970 Gödel i-a arătat unui student, Dana Scott (care ulterior a devenit un foarte cunoscut logician) argumentul său, pe care Scott

l-a făcut public pentru prima oară în anul 1987, într-un cerc restrâns. Ulterior, acest argument a fost publicat în mai multe lucrări şi articole despre logică şi despre filosofie.

Argumentul Sfântului *Anselm,* prezentat într-o formă succintă, este următorul: „Dumnezeu, prin definiție, este Acela față de care nimeni şi nimic altceva nu poate fi conceput ca fiind mai mare. Dumnezeu există chiar şi în gândire. Dacă Dumnezeu există chiar şi în gândire, ni-L putem imagina ca fiind cel mai mare care există, de fapt, şi în realitate. Tocmai de aceea, în mod necesar Dumnezeu există în veşnicie!!“ O versiune mai elaborată a acestui argument a fost formulată de către filosoful *Gottfried Leibniz* (1646–1716) la care primează dovedirea existenței în veşnicie a lui Dumnezeu prin mijlocirea rațiunii şi mai ales a conştiinţei.

Argumentul ontologic

Un argument ontologic este un argument deductiv elaborat a priori ce vizează demonstrarea existenței în veşnicie a lui Dumnezeu pornind de la anumite premize raționale, analitice și care sunt necesare.

Gödel a lăsat printre manuscrisele sale o schiță cu paisprezece puncte esenţiale referitoare la convingerile pe care le avea. Punctele relevante pentru demonstrația sa ontologică sunt:

Există şi alte lumi (universuri) ce sunt diferite de lumea noastră (cu alte cuvinte, există lumi ce au o frecvență de vibrație diferită de cea a lumii în care noi trăim) și totodată există ființe conştiente ce sunt înzestrate cu rațiune, ce sunt diferite de ființele umane și care, unele dintre ele, există pe un nivel superior de conștiință.

Lumea (universul) în care trăim acum nu este singura lume existentă (singurul univers) în care am trăit sau în care vom trăi.

Există o filosofie și chiar o teologie științifică (exactă), în care se operează cu anumite concepte ce prezintă cel mai înalt grad de abstractizare; toate acestea fiind, de asemenea, cât se poate de rodnice şi chiar necesare pentru știință.

Demonstrația fundamentală a lui Gödel utilizează logica modală. Argumentele modale abordează problema existenţei lui Dumnezeu în termeni de posibilitate şi de necesitate. Conceptul de existenţă este înlocuit cu cel de existenţă necesară. Despre necesitate şi despre posibilitate se vorbeşte din perspectiva teoriei lumilor.

În cele mai multe semantici ce sunt utilizate pentru logica modală, sunt în mod evident considerate mai multe „lumi posibile“ (altfel spus, mai multe lumi paralele). Astfel, o afirmație de acest gen este posibil adevărată doar dacă este adevărată în cel puţin una dintre lumile posibile, şi ea este în mod necesar adevărată doar dacă este adevărată în oricare dintre lumile posibile. Despre o afirmație care este adevărată în unele lumi, dar care este falsă în alte lumi se poate spune că este contingentă (adică poate să fie sau poate să nu fie adevărată).

Demonstraţia lui *Kurt Gödel*

Semnificația operatorilor logici utilizați in formula lui Gödel.

Literele mari (P, G, E, U, V) și cele grecești (φ, ψ) se referă la proprietăți (atribute).

P se referă la calitatea unei proprietăți de a fi pozitivă. Astfel, P(φ) înseamnă că φ este o proprietate pozitivă; G este proprietatea de „a fi Dumnezeu“; E este proprietatea de „a exista în mod necesar“ (proprietatea existenței necesare).

Literele mici (x, y etc.) se referă la obiecte (eventual entități) care pot să aibă anumite proprietăți.

Faptul că un obiect x are proprietatea P se notează cu P(x).

Relația de implicare (determinare) se notează cu →. Dacă φ și ψ sunt 2 proprietăți, φ→ ψ dacă și numai dacă în toate lumile posibile, toate obiectele (entităţile) care au proprietatea φ

au și proprietatea ψ. Este necesar să observăm că dacă în niciuna din lumile posibile nu există niciun obiect (entitate) cu proprietatea φ, atunci în mod automat aceasta face ca φ implică pe ψ.

Relația de echivalență (↔) între 2 proprietăți. A ↔ B înseamnă că A → B și B → A. Spunem că „A este echivalent cu B".

Definiția. A ⇔ B înseamnă că „A este definit ca fiind B".

Operatorul modal □ semnifică necesitatea. □P se citește: în mod necesar P este adevărată.

Operatorul modal ◇ semnifică posibilitatea. ◇P se citește: este posibil ca P să fie adevărată.

Operatorul logic ∀ are semnificația „oricare" sau „orice".

Operatorul logic ∃ are semnificația „există".

Operatorul logic ¬ are ca semnificație negația proprietății sau obiectului în fața căruia se află.

Operatorul logic ∧ are semnificația „și"; reprezintă conjuncția a două propoziții sau proprietăți.

Axioma 1. $\{P(\varphi) \wedge \Box\forall x\,[\varphi(x) \rightarrow \psi(x)]\} \rightarrow P(\psi)$

Comentariu: Această axiomă afirmă că, dacă φ este o proprietate pozitivă (în notație simbolică, P(φ)) și proprietatea φ implică (sau, în alți termeni, determină) proprietatea ψ(aceasta însemnând că, în mod necesar, orice entitate x care are proprietatea φ, are și proprietatea ψ: $\Box\forall x\,[\varphi(x) \rightarrow \psi(x)]$), atunci ψ este de asemenea o proprietate pozitivă, P(ψ). Altfel spus, orice proprietate determinată – adică în mod strict implicată – de o proprietate pozitivă este, la rândul său, pozitivă.

În conformitate cu afirmațiile unuia dintre biografii săi, pentru Gödel „Ceva este pozitiv (benefic) dacă este considerat în sens moral (spiritual) și estetic (independent de structura în aparenţă accidentală a lumii)… Ceva pozitiv poate fi, de asemenea, un atribut intrinsec, implicit, care este opusul a ceva limitat sau condiţionat". Privind dintr-o perspectivă spirituală, aceasta ne face să ne gândim imediat la Atributele dumnezeiești, care sunt caracterizate de o energie subtilă, sublimă, pură, a cărei frecvență de vibrație nu se modifică niciodată.

Axioma 2. $P(\neg\varphi) \leftrightarrow \neg P(\varphi)$

Comentariu: Această axiomă afirmă că, pentru orice proprietate φ, una și numai una dintre proprietățile φ și ¬φ (negația lui φ) este pozitivă. (Dacă negația lui φ, ¬φ, este pozitivă, aceasta este echivalent cu faptul că φ nu este pozitivă.)

Cu alte cuvinte, dacă o proprietate este pozitivă, atunci negația sa nu este pozitivă.

Teorema 1. $P(\varphi) \rightarrow \Diamond\,\exists x[\varphi(x)]$

Comentariu: Dacă φ este pozitivă (P(φ)), atunci este posibil să existe o entitate x care are proprietatea φ.

Demonstrația teoremei 1: Să considerăm o proprietate pozitivă, φ. Presupunem acum prin reducere la absurd că nu există nicio entitate x care să aibă proprietatea φ. În logica modală o astfel de proprietate este numită inconsistentă. În conformitate cu una din axiomele logicii modale, proprietatea φ implică, în mod trivial, orice altă proprietate; în particular, φ va implica negația sa, ¬φ. Din Axioma 1 rezultă că ¬φ este, de asemenea, pozitivă; dar aceasta contrazice Axioma 2.

În concluzie, dacă o proprietate este pozitivă, atunci se poate afirma că este consistentă, adică este posibil să existe o entitate x care are această proprietate.

Definiția 1. $G(x) \Leftrightarrow \forall\varphi[P(\varphi) \rightarrow \varphi(x)]$

Comentariu: Spunem că entitatea x are proprietatea de „a fi Dumnezeu", proprietate notată cu G (de la God), atunci când ea posedă (este caracterizată de) orice proprietate pozitivă. Astfel, x are proprietatea de „a fi Dumnezeu" dacă și numai dacă x are drept proprietăți (atribute) numai și numai acele proprietăți (atribute) care sunt pozitive (cu alte cuvinte este caracterizat de toate Atributele dumnezeiești).

Din această definiție rezultă că Dumnezeu este în veşnicie unic, în conformitate cu legea indiscernabilității a lui Leibniz: două sau mai multe obiecte sunt identice dacă au exact aceleași proprietăți.

Axioma 3. P(G)

Comentariu: Această axiomă afirmă că proprietatea de „a fi Dumnezeu“ este pozitivă (benefică).

Teorema 2. $\Diamond \exists x\, G(x)$

Comentariu: Este posibil să existe o entitate x care are proprietatea de „a fi Dumnezeu“.

Demonstrația teoremei 2: Rezultă direct din teorema 1 aplicată axiomei 3.

Definiția 2. $\varphi \text{ ess } x \Leftrightarrow \varphi(x) \wedge \forall\psi\, \{\psi(x) \rightarrow \Box\forall x\, [\varphi(x) \rightarrow \psi(x)]\}$

Comentariu. Numim o proprietate, φ, ca fiind proprietate-esență a lui x (simbolic, φ ess x) atunci când sunt îndeplinite următoarele două condiții:

x are proprietatea φ (simbolic, φ(x))

pentru orice proprietate ψ astfel încât x are proprietatea ψ atunci în mod necesar φimplică pe ψ (cu alte cuvinte, orice obiect care are proprietatea φ are, în mod necesar, și proprietatea ψ: $\Box\forall x\, [\varphi(x) \rightarrow \psi(x)]$).

Să observăm că dacă φ și ψ sunt 2 proprietăți-esență ale lui x, atunci din definiția 2 rezultă că $\varphi \rightarrow \psi$ și $\psi \rightarrow \varphi$, adică $\varphi \leftrightarrow \psi$ (φ este echivalent cu ψ). Din punct de vedere ocult, această afirmație, care este adevărată în cadrul logicii modale, poate fi interpretată prin faptul că esența unui individ este unică.

Așa cum se poate deduce dintr-o scrisoare datată cu 14 august 1961, Gödel credea că și oamenii, nu numai Dumnezeu, au o esență veşnică: „Între toate ființele conştiente ce există, «Eu» sunt cu exactitate combinația acelor proprietăți a căror natură are calitatea aceasta și aceea“.

Axioma 4. $P(\varphi) \rightarrow \Box\, P(\varphi)$

Comentariu la axioma 4. Această axiomă afirmă că, dacă φ este o proprietate pozitivă (benefică), atunci în mod necesar φ este pozitivă. Cu alte cuvinte, nu este posibil ca într-o anumită lume paralelă, φ să fie pozitivă și într-o altă lume aceeași proprietate, φ, să fie negativă (malefică).

Această axiomă a suscitat unele obiecții din partea unor filosofi. Unii cercetători au sugerat ca axioma 4 să fie modificată astfel ca ea să facă referire doar la acele proprietăți intrinseci (care sunt proprii, specifice unui lucru, aspect, entitate etc. și care sunt independente de relațiile cu alte lucruri), caz în care argumentului lui Gödel nu i se mai pot aduce obiecții.

Să remarcăm faptul că dacă în axioma 4 luăm în considerare doar acele proprietăți care sunt Atributele divine esențiale, dumnezeiești, cum ar fi iubirea, compasiunea, iertarea, erosul pur, altruismul, instantaneitatea, bunătatea etc., atunci Axioma 4 capătă sens, deoarece Atributele Dumnezeiești sunt astfel de proprietăți esențiale, intrinseci Ființei lui Dumnezeu, care în mod necesar sunt pozitive (benefice) în oricare dintre lumile posibile.

Teorema 3. $G(x) \rightarrow G \text{ ess } x$

Comentariu. Dacă un obiect x are proprietatea de „a fi Dumnezeu“, atunci aceasta este o proprietate-esență a lui x.

Demonstrația teoremei 3. Considerăm entitatea x care are proprietatea de „a fi Dumnezeu“, G(x). Presupunem că x are o proprietatea Q. Deoarece x nu are nicio proprietate negativă, rezultă că Q este pozitivă. De aceea, conform Axiomei 4, Q este în mod necesar pozitivă. Atunci, conform Definiției 1 (referitoare la proprietatea de „a fi Dumnezeu“), x are proprietatea Q. Conform Definiției 2 (a proprietății-esență a unui obiect x), rezultă că proprietatea de „a fi Dumnezeu“, G, este proprietate-esență a lui x.

Definiția 3. $E(x) \Leftrightarrow \forall\varphi[\varphi \text{ ess } x \rightarrow \Box\, \exists x\, \varphi(x)]$

Comentariu. Prin definiție, afirmăm că entitatea x are o existență necesară (și notăm aceasta cu E(x), unde E este proprietatea sau atributul existenței necesare), dacă și numai

dacă pentru orice proprietate-esență φ, a lui x, în mod necesar există o entitate care are proprietatea φ în oricare dintre lumile posibile.

Axioma 5. P(E)

Comentariu. Prin această axiomă se postulează că existența necesară este o proprietate pozitivă (benefică).

Teorema 4. □ ∃x G(x)

Comentariu. În mod necesar, există o entitate x care are proprietatea de „a fi Dumnezeu" în toate lumile posibile. Cu alte cuvinte, Dumnezeu există pretutindeni în veşnicie.

Demonstrația teoremei 4. Știm din teorema 2 că este posibil să existe o entitate x care are proprietatea de „a fi Dumnezeu", G(x). Rezultă că x are orice proprietate pozitivă. Din Axioma 5 rezultă că x are proprietatea existenței necesare, E(x). Deoarece G (proprietatea de a fi Dumnezeu) este proprietate-esență pentru x (în conformitate cu Teorema 3), atunci din Definiția 3 rezultă că, în mod necesar, există o entitate care are proprietatea de a fi Dumnezeu.

Reformularea argumentului ontologic al lui Gödel din perspectiva tainei atributelor dumnezeiești și a Legii rezonanței oculte®

În conformitate cu taina dezvăluită a Atributelor Dumnezeiești, acestea sunt niște caracteristici esențiale ale lui Dumnezeu (perfecțiuni dumnezeiești) și despre ele se poate spune că sunt, fiecare dintre ele, caracterizate de existența unor energii subtile sublime, distincte, ce prezintă o anumită frecvență de vibrație care nu se modifică niciodată.

Dumnezeu se face astfel cunoscut oamenilor prin intermediul Atributelor Sale Dumnezeiești. În universul lăuntric al fiecărei ființe umane există zone corespondente (puncte focar) de rezonanță ocultă® cu fiecare dintre aceste Atribute.

În cele ce urmează vom rescrie formula lui Gödel din perspectiva Atributelor Divine. Astfel, vom înlocui P – calitatea de a fi pozitivă a unei proprietăți – cu AD, calitatea unei proprietăți de a fi un Atribut Dumnezeiesc.

Proprietatea G are aceeași semnificație întocmai ca în formula lui Gödel: „a fi Dumnezeu". De asemenea, în formula următoare vom nota prin E Existența Divină prin Sine Însăși (aseitas în latină) care este acel atribut al lui Dumnezeu care se referă la Existența esenţială a lui Dumnezeu ca provenind doar din El Însuși, în virtutea propriei Sale Esențe, neavând drept cauză nimic care să fie în afara Lui Însuși. Acest Atribut al lui Dumnezeu se referă la faptul că Dumnezeu este, sau altfel spus există, fără o cauză, Existența Sa nedepinzând de nicio altă ființă. Privind toate acestea dintr-o altă perspectivă, se poate spune că acest atribut poate fi înțeles în felul următor: Dumnezeu Își este în mod absolut suficient Sieși, propria Sa rațiune de a exista rezidând numai şi numai în Sine Însuși. Acesta este un Atribut Dumnezeiesc care Îl distinge pe Dumnezeu de oricare dintre creaturile Sale, care fiecare își datorează existența unicului lor Creator, Dumnezeu.

Așa cum a arătat Sf. Toma de Aquino, Dumnezeu are în veşnicie o Existență per se, adică în virtutea propriei Sale Esențe Dumnezeiești. Aceasta nu înseamnă că Dumnezeu este propria Sa cauză într-un sens strict cauzal, căci aceasta ar implica faptul că există o distincție între Dumnezeu ca și cauză și Dumnezeu ca efect, ceea ce ar fi în mod evident absurd. Aceasta înseamnă că Existența cea veşnică a lui Dumnezeu este identică cu Esența Sa și deci Esența lui Dumnezeu include în mod necesar Existența Însăși, fără de care Dumnezeu nu ar exista. Deci Dumnezeu este prin excelență Ființa cea Eternă Necesară.

În continuare vom reda argumentul ontologic al lui Gödel în care Definițiile, Axiomele și Teoremele sunt rescrise astfel încât toate referirile la proprietățile pozitive au fost înlocuite cu referiri la Atributele Divine. Am adăugat câteva comentarii, pentru a face în felul acesta mai accesibilă înțelegerea argumentului modal. Modurile, vin acum, să îmbine timpul logic cu cel real. Ceva este posibil: nu a fost, nu este, dar nimic nu-l opreşte să fie în viitor. Este contingent: poate fi în prezent, dar nimic nu-l sileşte să fie. Este imposibil: nu va fi niciodată. Este necesar: dacă nu a fost şi nu este, nu se poate să nu fie în viitor. Astfel, modurile reprezintă ceea ce se poate predica din perspectiva timpului logic în substanţa celui real.

Axioma 1. $\{AD(A) \wedge \Box\forall x\,[A(x) \rightarrow B(x)]\} \rightarrow AD(B)$

Comentariu: Această axiomă afirmă că, dacă A este un Atribut Divin și A implică B, atunciB este de asemenea un Atribut Divin.

Spre exemplu, să presupunem că A este Atributul Iubirii Dumnezeiești. Putem spune că orice ființă umană care rezonează plenar și profund cu acest Atribut Dumnezeiesc manifestă de asemenea și calitatea de a fi bun. În conformitate cu Axioma 1, Bunătatea este un alt Atribut Dumnezeiesc care este implicat de Atributul Iubirii Dumnezeiești.

Axioma 2. $AD(\neg A) \leftrightarrow \neg AD(A)$

Comentariu: Această axiomă afirmă că, dacă A este un Atribut Divin, atunci cu siguranță negația lui A (care este indiferența) nu este un Atribut Divin.

Teorema 1. $AD(V) \rightarrow \Diamond\,\exists\,x[V(x)]$

Comentariu: Dacă V este un Atribut Divin, atunci în cel puțin una dintre lumile paralele posibile există o entitate care este caracterizată de acest Atribut Divin.

Definiția 1. $G(x) \Leftrightarrow \forall\varphi[AD(\varphi) \rightarrow \varphi(x)]$

Comentariu: O entitate x are proprietatea de „a fi Dumnezeu“ dacă și numai dacă ea este caracterizată de toate Atributele Divine.

În conformitate cu această definiție, existența lui Dumnezeu implică totodată și unicitatea Sa eternă.

Axioma 3. $AD(G)$

Comentariu: Această axiomă afirmă că proprietatea de „a fi Dumnezeu“ este un Atribut Dumnezeiesc.

Teorema 2. $\Diamond\,\exists x\,G(x)$

Comentariu: În cel puțin una din lumile posibile există o entitate care are proprietatea de „a fi Dumnezeu“.

Definiția 2. $V \text{ ess } x \Leftrightarrow V(x) \wedge \forall U\,\{U(x) \rightarrow \Box\forall x\,[V(x) \rightarrow U(x)]\}$

Comentariu. Proprietatea V este o „esență“ a lui x dacă și numai dacă sunt îndeplinite condițiile:

Entitatea x are proprietatea V; Dacă x are și proprietatea U, atunci U este implicată de V.

Axioma 4. $AD(\varphi) \rightarrow \Box\,AD(\varphi)$

Comentariu: Această axiomă afirmă că, dacă o anumită proprietate este un Atribut Dumnezeiesc, atunci ea este un Atribut Dumnezeiesc în toate lumile.

Teorema 3. $G(x) \rightarrow G \text{ ess } x$

Comentariu. Dacă o entitate x are proprietatea de „a fi Dumnezeu“, atunci proprietatea de „a fi Dumnezeu“ este o esență a lui x.

Esența lui Dumnezeu este însăși Existența Sa eternă.

Definiția 3 (Existența necesară). $E(x) \Leftrightarrow \forall V\,[V \text{ ess } x \rightarrow \Box\,\exists x\,V(x)]$

Comentariu. Entitatea x are o existență necesară dacă pentru orice proprietate V, dacă V este o esență a lui x, atunci în aproape toate lumile posibile există o entitate care are proprietatea V.

Axioma 5. $AD(E)$

Comentariu. Această axiomă afirmă că existența necesară în eternitate este un Atribut Dumnezeiesc.

Despre Atributul Dumnezeiesc ce este vizat de axioma 5 putem spune că este Existența Divină prin Sine Însăși (Aseitas).

Teorema 4. $\Box\,\exists x\,G(x)$

Comentariu. În aproape toate lumile posibile există o entitate care are proprietatea de „a fi Dumnezeu“.

Demonstrarea argumentului ontologic al lui Gödel cu ajutorul unui program informatic în cadrul logicii modale:

Christoph Benzmüller și Bruno W. Paleo au scris recent, în anul 2013, un scurt articol (Formalization, Mechanization and Automation of Gödel's Proof of God's Existence, 2013, Free University of Berlin and Vienna University of Technology) în care se descrie verificarea cu ajutorul unor programe în mod strict specializate a demonstrației lui Kurt Gödel referitoare la existența lui Dumnezeu.

Gödel și-a structurat demonstrația referitoare la existența lui Dumnezeu în aceeași manieră ca și vestitul filosof și matematician grec, Euclid, care a fondat un sistem matematic extrem de riguros, ce era înzestrat cu axiome și definiții, pe baza cărora el și-a demonstrat celebrele teoreme printr-o argumentație logică, teoreme care sunt valide și utilizate de matematicieni până în ziua de astăzi.

Cei doi cercetători (unul fiind cercetător în domeniul informaticii, iar celălalt fiind cercetător în domeniul logicii) au codat formula lui Gödel și apoi au verificat demonstrația sa cu mai multe programe automate care au fost structurate special ca să lucreze cu operatori și cu afirmații care aparțin logicii modale. Aceste programe sofisticate, numite „Nitpick", „Sledgehammer" și „Metis" au fost apoi rulate pe un computer MacBook suficient de puternic pentru aceasta.

Benzmüller și Paleo afirmă în articolul lor că au utilizat diferite sisteme de logică modală pentru a verifica demonstrația lui Gödel. Atât programele, cât și sistemele modale ce au fost folosite de către cei doi cercetători (sistemul lui Kripke, sistemul B și sistemul S4 – S5, ale căror axiome specifice nu le redăm aici) au confirmat apoi validitatea argumentului ontologic al lui Gödel.

Afirmaţia lui Euler

În 1988, Mathematical Intelligencer, Vol. 10, Nr. 4 – propune evaluarea ''frumuseţii'' a 24 de teoreme. Cele 24 de teoreme au fost evaluate cu note de la 0 la 10.
Criteriile folosite au fost:
1. Frumuseţea; 2. Factorul social; 3. Modificari ale aprecierii în timp; 4. Simplitate şi concizie;
5. Surpriza (misterul); 6. Profunzimea (forţa, intensitatea); 7. Câmpul de interes (importanţa);
8. Aplicaţiile în diferite domenii; 9. Gradul de generalizare (general vs. particular).;
10. Aversiunea (antipatia).
Topul celor 24 de teoreme a aărut în The Mathematical Inteligencer, Vol. 12, Nr. 3, 1990, Springer-Verlag, New York, 37-41.
Primele cinci poziţii în top au fost

Premiul I.1. $e^{i\pi}+1=0$ (*Euler*) – 7,70 (şapte70%);

Premiul II.2. $V+F=E+2$ (*Euler*) – 7,50 (şapte50%);;

Premiul II.3. Mulţimea numerelor prime este infinită (*Euclid*) – 7,50 (şapte50%);;

Premiul III.4. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{n^2}+...=\frac{\pi^2}{6}$ (*Euler*) - 7,00 (şapte);

Premiul III.5.Există 5 poliedre regulate.

Primele trei premii au fost obţinute de Euler. *Euler* a demonstrat că Dumnezeu există astfel: ''Domnule, $e^{i\pi}+1=0$, deci Dumnezeu există!''.

Postulatele lui Blaise Pascal

-Primatul faptelor – faptele nu pot fi negate
-Existenţa ordinelor

Postulatele lui Basarab Nicolescu

-Nivelurile de realitate

-Terţul inclus
-Complexitatea
Există peste 8000 de discipline academice. Poţi să fii hiper-specializat într-o disciplină şi ignorant sau incompetent în celelalte 7999. Deci 8000 de discipline = 8000 de realităţi. Realitatea nu e ceea ce vedem. De exemplu noi nu vedem că pământul se învârte ci vedem că de fapt soarele se mişcă.
Transdisciplinaritatea este un dialog între ştiinţe (omul de ştiinţă spune ''cred că ştiu''), filozofie (filozoful spune ''ştiu că nu ştiu'') şi religie (eu ''ştiu că cred'').

Principiul antropic și Universul fin reglat

Timp de aproape o jumătate de secol, fizicienii teoreticieni au făcut o serie de descoperiri care au evidenţiat faptul că anumite constante din fizica fundamentală par extrem de fin reglate pentru a permite apariția unui Univers care poate găzdui viaţa. Constantele din Modelul Standard al fizicii particulelor au ghidat formarea nucleelor de hidrogen în timpul Big Bang-ului, precum şi formarea atomilor de carbon și oxigen în nucleele stelelor masive de prima generaţie care au explodat sub formă de supernove. La rândul lor, toate aceste procese au stabilit condiţiile pentru apariția sistemelor solare şi planetare capabile să susțină viața pe bază de carbon. Aceasta este dependentă de apă și oxigen.

Dacă formarea Universului este improbabilă, atunci ce este viaţa?

Teoria conform căreia principiul antropic a ghidat procesele fizice și evoluția Universului a fost propusă inițial de către Brandon Carter în timp ce acesta era cercetător postdoctorand în astrofizică la University of Cambridge. Această teorie a fost ulterior dezbătută de către savantul Stephen Hawking și numeroşi alţi fizicieni din întreaga lume.

În prezent, savantul german Ulf-G Meißner, teoretician în fizică nucleară la Helmholtz Institute, University of Bonn, adaugă o serie de noi descoperiri care susţin principiul antropic.

Într-un nou studiu intitulat „Anthropic considerations în nuclear physics" (N.t. Considerații antropice în fizica nucleară) și publicat în revista „Science Bulletin" (denumită anterior „Chinese Science Bulletin"), profesorul Meißner prezintă o imagine de ansamblu a principiului antropic în astrofizică și fizica particulelor. Acesta afirmă că „se pot efectua teste de natură fizică ale acestui principiu abstract în cazul unor procese specifice cum ar fi generarea elementelor chimice"

„Acest lucru poate fi realizat cu ajutorul unor calculatoare foarte performante care ne permit să simulăm lumi diferite în care parametrii fundamentali care stau la baza fizicii nucleare pot lua valori diferite faţă de cele din natură", explică el.

„Ne referim aici la probleme specifice din fizică, cum ar fi cât este de sensibil procesul de formare al elementelor uşoare în Big Bang faţă de schimbarea masei quarcurilor uşori şi, de asemenea, cât este de stabilă starea de rezonanţă în procesul triplu alfa, adică cât se apropie aşa-numita stare Hoyle de energia corespunzătoare pentru 4He+8Be, faţă de variaţia masei quarcurilor şi variaţia constantei structurii fine (N.t aceasta definește forţa interacţiunilor electromagnetice)", adaugă el.

Brandon Carter a afirmat iniţial că: „Universul (şi, prin urmare, parametrii fundamentali de care acesta depinde) trebuie să fie astfel încât să permită apariţia unor observatori în interiorul său, la un moment dat".

Stephen Hawking, expert în problema Big Bang-ului și inflația cosmică, a extins dialogul pe baza principiului antropic într-o serie de lucrări şi cărţi. În „A Brief History of Time (O scurtă istorie a timpului) el prezintă o serie de procese şi constante din astrofizică ce par să susţină teoria principiului antropic şi se întreabă: „De ce a început Universul să se extindă cu o rată de expansiune atât de apropiată de rata critică de expansiune care separă universurile care colapsează de cele care se extind pentru totdeauna, astfel încât chiar şi după zece miliarde de ani, acesta continuă să se extindă cu o rată apropiată de cea critică?"

„Dacă după o secundă de la Big Bang rata de expansiune ar fi fost mai mică numai cu unu la o sută de mii de milioane de milioane”, explică el, „Universul ar fi colapsat înainte de a ajunge vreodată la dimensiunea sa actuală”.

Profesorul Ulf-G Meißner afirmă în noul său studiu că „Universul în care trăim este caracterizat de anumiți parametri care au anumite valori specifice ce par a fi extrem de fin reglate pentru a permite apariţia vieţii, inclusiv pe Pământ”.

„De exemplu, vârsta Universului trebuie să fie suficient de mare pentru a permite formarea galaxiilor, stelelor și planetelor, precum și pentru ca stelele din a doua și a treia generație, care conţin carbon și oxigen, să se răspândească pe baza exploziei stelelor anterioare”, spune el.

„Chiar şi la o scară microscopică”, adăugă el, „anumiți parametri fundamentali ai Modelului Standard pentru maselor quarcurilor uşori şi constanta structurii fine trebuie să aibă anumite valori care permit formarea neutronilor, protonilor şi nucleelor atomice”.

Formarea elementelor greleO reprezentare grafică care arată modul prin care s-au format elementele grele pe baza elementelor uşoare care au apărut după Big Bang. Sursă

În timp ce nucleosinteza Big Bang-ului a dat naștere la nucleele de hidrogen și particulele alfa (nuclee 4He), elementele care sunt considerate, în general, esențiale pentru viață, inclusiv carbonul și oxigenul, au fost produse mai târziu în interiorul stelelor masive ce au avut o durată scurtă de viaţă. Unele dintre acestea au explodat sub formă de supernovă, răspândind aceste elemente pentru generațiile ulterioare de sisteme stelare.

Într-o serie de experimente care au implicat simulări computerizate complexe realizate cu ajutorul supercomputerului JUQUUEN de la Forschungszentrum Jülich, profesorul Meißner şi colegii săi au modificat valorile maselor quarcurilor uşori faţă de cele cunoscute pentru a determina cât de mare poate fi aceasta variaţie pentru a împiedica formarea carbonului sau oxigenului în interiorul stelelor masive. „Este puţin probabil ca variaţii ale maselor quarcurilor uşori de până la 2-3 la sută să fie catastrofale pentru formarea carbonului şi a oxigenului”, concluzionează el.

Masa quarcurilor și viața de pe Pământ - O reprezentare grafică ce evidenţiază cât este de sensibilă viaţa de pe Pământ faţă de variaţia masei quarcurilor şi a constantei structurii fine α. Credit: Dean Lee

Chiar mai devreme, în timpul generării nucleelor corespunzătoare primelor două elemente din Tabelul Periodic, „pe baza abundenţei observate a elementelor şi din faptul că neutronul liber se dezintegrează în aproximativ 882 secunde şi că neutronii rămaşi sunt în cea mai mare parte capturaţi în 4He, am descoperit că există o dependenţă strictă faţă de variaţia masei quarcurilor uşori…”

Profesorul Meißner afirmă că „nucleosinteza Big Bang-ului stabileşte într-adevăr nişte limite foarte strânse ale variaţiei masei quarcurilor uşori.” „Un domeniu de variaţie atât de strâns susţine principiul antropic în Univers”, adaugă el.

„În mod evident, cineva se poate gândi la existenţa mai multor universuri, a unui multivers, în care anumiţi parametri fundamentali pot avea diferite valori şi care conduc la apariţia unor universuri foarte diferite de al nostru”, afirmă profesorul Meißn.

Aşa cum susţine profesorul Stephen Hawking, chiar şi o variaţie foarte mică a constantelor fundamentale ale fizicii din acest ipotetic multivers ar putea conduce la „apariţia unor universuri care, deşi ar putea fi foarte frumoase, nu ar putea găzdui fiinţe inteligente capabile să-și pună întrebări cu privire la Universul în care trăiesc”.

„În acest sens”, afirmă profesorul Meißner, „Universul nostru are un statut aparte şi această constatare stă la baza aşa-numitului principiu antropic”.

Principiul antropic are la baza conceptia conform careia universul si legile sale functioneaza intr-un anume reglaj astfel incat sa permita mentinerea vietii.

Martin Heidegger, considerat de mulţi ca fiind cel mai mare filosof al timpurilor noastre, îşi începea unul din cursurile sale cu o întrebare ameţitoare: de ce există ceea ce există, de ce

există totul mai degrabă decât nimic? Mai simplu spus, de ce există Universul, de ce existăm noi?

În contextul specific sceptic şi materialist al vremurilor noastre, această întrebare nu şi-a găsit încă un răspuns care să mulţumească pe toată lumea. Dar provocarea fiind lansată, mai mulţI cercetători, din diferite domenii, au căutat să dea răspuns unei probleme derivată din întrebarea lui Heidegger: cum se face că existăm? Cum au putut da naştere nişte condiţii presupuse iniţial haotice unui univers atât de omogen şi atât de ordonat la scară mare, aşa cum este universul în care trăim noi astăzi?

Problema apartenenţei cosmice şi planetare a omului a ridicat însă o serie de probleme filosofice şi teologice. Oamenii de ştiinţă au constatat că forma noastră de viaţă depinde, în câteva direcţii delicate şi subtile, de unele coincidenţe aparente ale legilor fundamentale ale naturii. Legat de aceste observaţii a fost elaborată ipoteza universului antropic (de la cuvântul grecesc "anthropos" care înseamnă "om"). Această ipoteză, căreia în prezent i se acordă statutul de principiu, conferă câteva calităţi speciale vieţii de pe Pământ.

Ideea de bază a acestui principiu afirmă că, deşi poziţia omului în univers nu este neapărat centrală, ea are totuşi un caracter special şi privilegiat. Se pare că noi, oamenii, beneficiem de o situaţie specială, în sensul că universul este construit după "gusturile" noastre…

Formularea principiului antropic a fost dată în 1961 de astronomul Robert Dicke, care a avut ca punct de plecare unele lucrări ale celebrului fizician englez, laureat al premiului Nobel, Paul Adrien Dirac:

"Universul are proprietăţile pe care le are şi pe care omul le poate observa, deoarece, dacă ar fi avut alte proprietăţi, omul nu ar fi existat". Trebuie să recunoaştem că un astfel de enunţ sună cel puţin ciudat pentru un om de ştiinţă.

Mergând un pas mai departe, astronomul Paul Davies avea să afirme, prin anii '70, că, pur si simplu, omul nu ar fi putut exista în altfel de universuri decât cel prezent!

Vom vedea mai departe o serie din argumentele ştiinţifice pe care se bazează aceste afirmaţii.

Pământul apare în mod evident ca fiind un loc ideal pentru apariţia vieţii, prin faptul că posedă o cantitate abundentă de apă în stare lichidă.

Distanţa faţă de Soare

Dacă temperatura de pe Pământ are fi fost fie mai scăzută, ca pe Marte, de exemplu, fie mai ridicată, cum este cazul planetei Mercur, mediul nu ar fi fost propice pentru dezvoltarea şi supravieţuirea diverselor forme de viaţă. Apa fie s-ar fi evaporat, fie ar fi existat doar sub formă de gheaţă. Numai că Pământul este la o distanţă ideală faţă de Soare! Puţin mai aproape de Soare, şi Pământul ar fi fost astăzi un deşert! Puţin mai departe de Soare, şi frumoasa noastră planetă albastră ar fi apărut acum ca un tărâm ostil. Problema este că nici măcar nu ar fi avut cine să-i constate ostilitatea, noi neputând vieţui în condiţiile respective.

Masa Pământului

Masa Pământului are, de asemenea, o valoare optimă. Dacă Pământul ar fi fost cu 15% mai greu decât cele 5,97×1021 tone, atmosfera terestră ar fi fost cu mult prea densă şi condiţiile de mediu nu ar mai fi permis dezvoltarea proceselor biologice cunoscute azi. Dacă, de asemenea, masa planetei noastre ar fi fost cu 15% mai mică, atmosfera ar fi fost fie prea rarefiată, fie inexistentă (forţa gravitaţională nu ar mai fi fost suficient de puternică pentru a reţine moleculele gazelor care compun atmosfera şi acestea s-ar fi pierdut în spaţiu).

Înclinaţia axei Pământului

În mod analog, biofizicienii arată că o variaţie cu mai mult de două grade a înclinaţiei axei terestre (care este de 23°27′) ar fi făcut imposibilă apariţia vieţii pe Terra.
Cunoaştem cu toţii că perioada de rotaţie a Pământului în jurul axei proprii este de aproximativ 24 ore (mai exact 23 ore şi 56 minute). Această valoare face ca variaţiile de temperatură zi-noapte să nu fie prea mari. Dacă perioada de rotaţie în jurul propriei axe ar fi mai mare sau mai mică, variaţiile de temperatură, în trecerea de la zi la noapte (şi invers), ar afecta decisiv viaţa de pe Pamânt.
"Without Earth's tilt, humanity would be in a sorry state".

Raportul dintre radiaţii

Tot biofizicienii au calculat raportul dintre cantitatea de radiaţie primită de Pământ şi cea reflectată ("albedo"): au găsit valoarea de 0,37.

Se pare că, din nou, am fost "norocoşi"!

Câteva procente în plus sau în minus ar fi făcut imposibilă viaţa pe Pământ!
Pământul reţine exact cantitatea de lumină de care are nevoie! Nici mai mult, nici mai puţin!

Constantele fundamentale

Fizicienii, la rândul lor, au descoperit coincidenţe la fel de stranii: constantele fundamentale, care ne-au dat atâtea bătăi de cap în anii de şcoală, cu memorarea lor, au exact valoarea necesară pentru ca această planetă să ne servească drept cămin. Orice altă valoare pentru constanta gravitaţională (aşa-zisa constantă a lui Cavendish), pentru constanta lui Planck, pentru sarcina electronului ş.a.m.d., fie şi puţin diferită de cea cunoscută, ar fi făcut ca cele patru forţe fundamentale, care guvernează şi procesele vii, să ducă la apariţia unei lumi plicticos de pustie.

Trebuie spus şi faptul că, pe baza valorilor forţelor electromagnetică şi gravitaţională din universul actual, există motive extrem de serioase pentru a argumenta că o fiinţă inteligentă care să poată realiza ceea ce face omul pe planeta Pământ trebuie să aibă exact dimensiunile pe care le are corpul uman.

Raportul masa/proton

Masa unui proton este de 1836 de ori mai mare decât cea a unui electron. Dacă acest raport se micşorează în mod sensibil, formarea structurilor bine definite (cum ar fi structurile cristaline sau moleculele organice) nu ar mai fi posibilă. O modificare, fie şi infimă, a constantei de interacţiune nucleară tare ar fi făcut imposibilă apariţia lanţurilor de carbon, lanţuri care stau la baza moleculelor vii. Dacă, din contră, această constantă ar fi fost mai mare cu aproximativ 10%, tot hidrogenul din univers s-ar fi transformat în helium şi astfel în întreg universul nu am fi găsit nici măcar un strop de apă.

S-au făcut simulări pe computer privind supravieţuirea lumii vii. Computerul a luat pe rând mai multe constante fundamentale şi a modificat puţin valoarea lor. Dacă din tot setul de constante, fie şi numai una era modificată, legile fizicii şi chimiei se modificau în aşa măsură, încât de fiecare dată verdictul computerului era acelaşi: orice posibilitate de existenţă a vieţii şi a fenomenelor conştiente este imposibilă! De fiecare dată computerul găsea că nu mai sunt îndeplinite condiţiile de formare a carbonului. Deci constantele fizice au exact valoarea necesară pentru ca noi, oamenii, să existăm!
(Vezi la sfarsitul articolului tabelul constantelor fundamentale ale caror valori modificate, ar duce la imposibilitatea vietii pe Pamant.)

Majoritatea seturilor de valori ar da naştere unor universuri care, deşi ar putea fi foarte frumoase, nu ar conţine pe cineva care să poată admira acea frumuseţe! S-ar putea ridica aici

întrebarea: dacă setul de constante fizice ale Universului este unic – deci cu o probabilitate de apariţie extrem de mică, oare cum de s-a ajuns tocmai la acest set particular? Să fie doar o simplă coincidenţă?!

Conditiile speciale ale galaxiei noastre

Observaţiile astronomice din ultimele două decenii arată că în galaxia noastră există o zona specială în care condiţiile sunt cele mai favorabile vieţii – aşa-numitul "cerc co-rotaţional", zonă în care se află, desigur, şi sistemul nostru Solar. Mai mult chiar, Soarele este localizat între două braţe spirale ale Galaxiei, departe de ameninţarea radiaţiilor distructive ale novelor, care explodează destul de des în aceste braţe. Suntem plasaţi într-un "colţ" liniştit al Galaxiei noastre!

Argumentele de acest gen ar putea continua aproape la nesfârşit. Concluzia este că noi trăim într-un univers excepţional, construit anume pentru a ne permite nouă, oamenilor, să existăm!

Probabilitatea ca acestea sa fie rezultatul intamplarii: ZERO !!!

Astrofizicianul Trinh Xuan Thuan, în cartea sa "Melodia secretă" a calculat probabilitatea ca toate aceste condiţii necesare apariţiei şi dezvoltării vieţii (din care noi nu am enumerat decât o infimă parte) să fi fost satisfăcute, în mod întâmplător, simultan egală cu probabilitatea ca un arcaş să lovească cu săgeata sa, de la distanţa de 15 miliarde de ani-lumină,o ţintă cu aria de 1 cm² !!!
Adică practic imposibil !

Seneca, cu aproape două mii de ani urmă, scria: "Noi dorim să privim şi dincolo de hotarele acestei lumi, să vedem încotro se îndreaptă, de unde provine şi spre ce sfârşit se grăbeşte aceasta iuţeală atât de mare a universului". Referitor la acest impuls specific uman de a-şi defini locul şi rolul în Univers, principiul antropic, ca o concluzie a dovezilor rezumate mai înainte, ne determină să ne gândim la faptul că, aşa cum spunea cândva matematicianul şi filosoful german Leibniz, "trăim în cea mai bună dintre lumile posibile".

Şi, mai mult, această lume extraordinară care ne înconjoară pare a fi fost creată special ca noi să existăm. Universul ne apare astfel ca o cameră anume aranjată şi mobilată pentru a găzdui fiinţa umană.

Şi dacă în acest Univers copleşitor prin grandoarea şi imensitatea sa, totul, în cele mai mici amănunte, este croit după măsura omului, dacă nici cele mai mici particule şi nici cele mai obscure fenomene nu par a fi întâmplătoare, putem, oare, să mai credem că existenţa noastră este un simplu accident?

Principiul antropic, cu concluziile sale neobişnuite pentru gândirea preponderent materialistă a ultimelor două secole, este inclus de specialişti în categoria curiozităţilor ştiinţifice. Explicaţiile care se încearcă fac ca nedumerirea noastră sa crească… Fiecărei explicaţii parcă îi lipseşte ceva şi de obicei un răspuns generează automat noi întrebări. "Sunt în cer şi pe pământ mai multe lucruri decât visează filosofia voastră" îi spune Hamlet lui Horaţiu…

Şi, într-adevăr, sunt în cer şi pe pământ mult mai multe lucruri decât visează şi ne învaţă astăzi ştiinţa noastră. Mai ales în cer…

Tabelul constantelor fundamentale al caror valoare se incadreaza intre valori foarte stranse pentru a permite existenta vietii pe pamant:

Fine Tuning Parameters for the Universe

1. strong nuclear force constant● *if larger*: no hydrogen would form; atomic nuclei for most life-essential elements would be unstable; thus, no life chemistry ● *if smaller*: no elements heavier than hydrogen would form: again, no life chemistry
2. weak nuclear force constant● *if larger*: too much hydrogen would convert to helium in big bang; hence, stars would convert too much matter into heavy elements making life chemistry impossible ● *if smaller*: too little helium would be produced from big bang; hence, stars would convert too little matter into heavy elements making life chemistry impossible
3. gravitational force constant● *if larger*: stars would be too hot and would burn too rapidly and too unevenly for life chemistry ● *if smaller*: stars would be too cool to ignite nuclear fusion; thus, many of the elements needed for life chemistry would never form
4. electromagnetic force constant● *if greater*: chemical bonding would be disrupted; elements more massive than boron would be unstable to fission ● *if lesser*: chemical bonding would be insufficient for life chemistry
5. ratio of electromagnetic force constant to gravitational force constant● *if larger*: all stars would be at least 40% more massive than the sun; hence, stellar burning would be too brief and too uneven for life support ● *if smaller*: all stars would be at least 20% less massive than the sun, thus incapable of producing heavy elements
6. ratio of electron to proton mass● *if larger*: chemical bonding would be insufficient for life chemistry ● *if smaller*: same as above
7. ratio of number of protons to number of electrons● *if larger*: electromagnetism would dominate gravity, preventing galaxy, star, and planet formation ● *if smaller*: same as above
8. expansion rate of the universe● *if larger*: no galaxies would form ● *if smaller*: universe would collapse, even before stars formed
9. entropy level of the universe● *if larger*: stars would not form within proto-galaxies ● *if smaller*: no proto-galaxies would form
10. mass density of the universe● *if larger*: overabundance of deuterium from big bang would cause stars to burn rapidly, too rapidly for life to form ● *if smaller*: insufficient helium from big bang would result in a shortage of heavy elements
11. velocity of light● *if faster*: stars would be too luminous for life support ● *if slower*: stars would be insufficiently luminous for life support
12. age of the universe● *if older*: no solar-type stars in a stable burning phase would exist in the right (for life) part of the galaxy ● *if younger*: solar-type stars in a stable burning phase would not yet have formed
13. initial uniformity of radiation● *if more uniform*: stars, star clusters, and galaxies would not have formed ● *if less uniform*: universe by now would be mostly black holes and empty space

14. average distance between galaxies● *if larger*: star formation late enough in the history of the universe would be hampered by lack of material
● *if smaller*: gravitational tug-of-wars would destabilize the sun's orbit
15. density of galaxy cluster● *if denser*: galaxy collisions and mergers would disrupt the sun's orbit
● *if less dense*: star formation late enough in the history of the universe would be hampered by lack of material
16. average distance between stars● *if larger*: heavy element density would be too sparse for rocky planets to form
● *if smaller*: planetary orbits would be too unstable for life
17. fine structure constant (describing the fine-structure splitting of spectral lines)● *if larger*: all stars would be at least 30% less massive than the sun
● *if larger than 0.06* : matter would be unstable in large magnetic fields
● *if smaller*: all stars would be at least 80% more massive than the sun
18. decay rate of protons● *if greater*: life would be exterminated by the release of radiation
● *if smaller*: universe would contain insufficient matter for life
19. ^{12}C to ^{16}O nuclear energy level ratio● *if larger*: universe would contain insufficient oxygen for life
● *if smaller*: universe would contain insufficient carbon for life
20. ground state energy level for ^{4}He● *if larger*: universe would contain insufficient carbon and oxygen for life
● *if smaller*: same as above
21. decay rate of ^{8}Be● *if slower*: heavy element fusion would generate catastrophic explosions in all the stars
● *if faster*: no element heavier than beryllium would form; thus, no life chemistry
22. ratio of neutron mass to proton mass● *if higher*: neutron decay would yield too few neutrons for the formation of many life-essential elements
● *if lower*: neutron decay would produce so many neutrons as to collapse all stars into neutron stars or black holes
23. initial excess of nucleons over anti-nucleons● *if greater*: radiation would prohibit planet formation
● *if lesser*: matter would be insufficient for galaxy or star formation
24. polarity of the water molecule● *if greater*: heat of fusion and vaporization would be too high for life
● *if smaller*: heat of fusion and vaporization would be too low for life; liquid water would not work as a solvent for life chemistry; ice would not float, and a runaway freeze-up would result
25. supernovae eruptions● *if too close, too frequent, or too late*: radiation would exterminate life on the planet
● *if too distant, too infrequent, or too soon*: heavy elements would be too sparse for rocky planets to form
26. white dwarf binaries● *if too few*: insufficient fluorine would exist for life chemistry
● *if too many*: planetary orbits would be too unstable for life
● *if formed too soon*: insufficient fluorine production
● *if formed too late*: fluorine would arrive too late for life chemistry
27. ratio of exotic matter mass to ordinary matter mass● *if larger*: universe would collapse before solar-type stars could form
● *if smaller*: no galaxies would form
28. number of effective dimensions in the early universe● *if larger*: quantum mechanics, gravity, and relativity could not coexist; thus, life would be

impossible
● *if smaller*: same result
29. number of effective dimensions in the present universe● *if smaller*: electron, planet, and star orbits would become unstable
● *if larger*: same result
30. mass of the neutrino● *if smaller*: galaxy clusters, galaxies, and stars would not form
● *if larger*: galaxy clusters and galaxies would be too dense
31. big bang ripples● *if smaller*: galaxies would not form; universe would expand too rapidly
● *if larger*: galaxies/galaxy clusters would be too dense for life; black holes would dominate; universe would collapse before life-site could form
32. size of the relativistic dilation factor● *if smaller*: certain life-essential chemical reactions will not function properly
● *if larger*: same result
33. uncertainty magnitude in the Heisenberg uncertainty principle● *if smaller*: oxygen transport to body cells would be too small and certain life-essential elements would be unstable
● *if larger*: oxygen transport to body cells would be too great and certain life-essential elements would be unstable
34. cosmological constant● *if larger*: universe would expand too quickly to form solar-type stars

Argumentul cosmologic

Argumentul cosmologic încearcă să găsească o ultimă justificare universului, să îi fundamenteze cumva prezența și manifestarea. La baza acțiunii justificante de existență a realității stă conceptul de cauză, de sursă creativă a ceva.

Conceptul de cauză are o vechime de milenii și se bazează pe observația umană asupra realității și modificărilor pe care le suferă. Analiza stărilor ambientului și a efectelor acțiunilor umane asupra acestuia a dus la constatarea că orice se întâmplă în natură se poate motiva cumva.

Observația sistematică a realității a sugerat o legătură sistematică între ceea ce se percepe la un moment dat și percepția ulterioară. Generalizând conceptual observațiile între acțiunile și consecințele cotidiene, omul trecutului a tras concluzia că din orice modalitate interactivă apar forme, calități sau situații noi.

Cercetarea schimbării și consecințelor în natură sau chiar în societate a dus la convingerea generalizată că orice obiect, calitate sau eveniment bine diferențiat modal provine din alt obiect sau eveniment anterior, care la rândul lui are și el ca origine alt obiect ori eveniment.

Numele generic a acelui ceva din a cărui prezență și manifestare decurge ceva diferit, a fost numit 'cauză', iar această generalizare a dependenței momentane între ce a fost și ce este, sau între ce este și ce va fi, a avut un rol extrem de important în gândirea și practica umană.

Odată separat criteriul cauzal și transformat în principiu cauzal universal, omul a înțeles că orice stare naturală sau personală are o cauză, iar pentru a înțelege și controla o situație trebuie identificată și înțeleasă cauza care a generat-o.

Consecința acțiunii oricărei cauze a fost numită generic 'efect', iar cuplul 'cauză efect', a devenit mecanismul de explicare a orice există.

Corelarea sistematică cauză-efect a devenit un instrument de cercetare și cunoaștere permanentă a cărui valoare este enormă.

Prin cuplul creativ 'cauză-efect' omul timpurilor trecute a început să își pună întrebări asupra provenienței celor pe care le observă în jurul său, sau să își analizeze cauzal acțiunile.

Cum fiecare efect cerea o cauză, iar cauza tratată ca efect, cerea și ea o altă cauză, pentru a motiva consecințele oricărei stări observate, raționamentele investigante și corelante cauză-efect, au gândit posibilitatea unui șir infinit de cauze și efecte naturale, fapt care punea în încurcătură mintea umană și o împiedică să explice complet și corect, proveniența și însușirile celui mai mărunt obiect sau proces natural.

Pentru a ieși din această regresie la infinit a justificării unei existențe prin alta și tot astfel, gânditorii trecutului au presupus existența unei cauze prime, a unui agent creativ de eveniment care nu provine din altul anterior.

Filozoful grec Platon a sugerat existența unui demiurg, a unui creator al universului, care le face pe toate conform unei concepții a perfecțiunii, necesității și binelui absolut.

Aristotel alt mare metafizician grec, a introdus ideea de 'cauza prima', sau 'motor creativ universal', cel care le face-mișcă pe toate fără a fi el însuși în mișcare -devenire, prin altă cauză.

Justificarea existenței realității printr-o unică cauză primă, creatoare a toate, necauzată ea însăși de altă cauză pentru a exista și a se manifesta, este numită 'argument cosmologic', asta însemnând argumentul apariției și devenirii omului și cosmosului.

În timpurile moderne omul a inventat teorii științifice mai elaborate și coerente cauzal pentru a explica proveniența și evoluția universului.

MISCELLANEOUS

Argumente raţionale pentru dovedirea existenţei lui Dumnezeu

Fiind înzetrat de Dumnezeu cu raţiune, omul a încercat să-şi explice realitatile în mijlocul cărora a trăit. Setea lui de cunoaştere l-a împins să afle şi ultima explicaţie a lumii în întregimea ei, ca şi a vieţii. Argumentele raţionale pentru dovedirea existenţei lui Dumnezeu sunt dovezi scoase din raţiune, care demonstrează că noţiunea de Dumnezeu nu e un produs al imaginaţiei, ci ei îi corespunde o realitate. Cunoştinţe mai bogate despre Dumnezeu primim din revelaţia (descoperirea) divină. Scolastica medievală socotea la peste 5 000 numărul argumentelor pentru dovedirea existenţei lui Dumnezeu. În epoca modernă numărul lor a scăzut vertiginos, astăzi având mai puţin de 10.

Argumentul istoric

Acest argument deduce existenţa lui Dumnezeu din universalitatea ideii de Dumnezeu, idee care există la toate popoarele şi în toate timpurile. Deoarece ideea de Dumnezeu există la toate popoarele, acest argument s-a numit ’’a consensu gentium’’, căci se bazează pe consensul tuturor popoarelor. Cicero spunea : ’’ceea ce este admis de toţi, nu se poate sa fie fals, pentru ca trebuie să aibă rădăcina în însăşi fiinţa omului’’.

S-au adus obiecţii împotriva acestui argument, spunându-se că aşa cum au dispărut unele superstiţii sau credinţe după ce s-a reuşit explicarea lor prin ştiinţă, aşa şi credinţa în Dumnezeu va disparea când oamenii vor reuşi să explice toate fenomenele pe bază ştiinţifică. Însă acele credinţe deşarte şi superstiţiile n-au avut caracterul de credinţe universale, ca ideea de Dumnezeu, ci au fost legate de un loc şi un timp anume.

Argumentul cosmologic

Argumentul cosmologic (cuvântul grecesc cosmos = univers) , bazându-se pe principiul cauzalităţii, susţine existenţa lui Dumnezeu pe faptul că această lume mărginita trebuie să aibă o cauză într-o existenţă absolută, veşnică, necauzată de nimeni, ultima cauză a întregii existenţe.

Argumentul cosmologic este cel mai vechi argument, fiind cunoscut încă în filosofia greacă. Aristotel spune : ''Dumnezeu, care nu poate fi văzut de nimeni, se vădeşte în lucrurile Sale''.

Acest argument este susţinut si de filosoful Leibniz.

Argumentul cosmologic = Argumentul cauzalităţii.

Experienţa şi raţiunea ne arată că lumea este o înşiruire organizată de cauze si efecte. Orice lucru , orice fenomen, este efectul unei cauze care l-a produs, dar poate fi şi cauza unuia pe care- l produce. Însă nu este posibil ca un lucru să fie propria sa cauză, pentru că totdeauna cauza este anterioara efectului. Apoi nu putem merge la infinit din cauză în cauză, ci trebuie să ne oprim la o primă cauză, care nu mai presupune o alta. Existenta acestei prime cauze se impune cu necesitate. Aceasta prima cauza o numim Dumnezeu. La acelasi rezultat ajungem şi dacă urmărim cauzalitatea în regnul animal, vegetal, uman, ori în lumea anorganică.

Argumentul mişcării

A fost formulat de Aristotel. În Evul Mediu i s-a dat o mare importanţă de către reprezentanţii scolasticii, în special de Toma de Aquino. Conform acestui argument, tot ceea ce se mişcă nu se mişcă de la sine şi prin sine, ci se mişcă prin altul. Aşadar un lucru mişcă pe altul, dar raţiunea impune un prim mişcător ''primum movens'', un prim motor care a introdus mişcarea în lume.

Acesta nu a fost mişcat de altceva, şi nu poate fi decât Dumnezeu. Trebuie remarcat că Aristotel întelege mişcarea nu în sens restrâns, ci în cel mai larg sens, ca orice devenire, orice transformare, orice trecere de la o stare la alta. Materia nu poate fi originea acestei mişcări, care are totdeauna o direcţie. Apoi în univers nu există un punct fix de la care să fi început mişcarea, căci universul nu are un centru de forţă. Nici teoria expansiunii continue a universului sau cea a lui ''bing-bang'' nu-i poate găsi un centru de forţă.

În concluzie, nu există în lume o primă cauză care să mişte totul ; dar mişcarea din lume pretinde o astfel de cauză, fără de care ea ar rămâne inexplicabilă. Această primă cauză mişcătoare, acesta energie necondiţionată de nimeni şi de nimic este Dumnezeu.

Argumentul teleologic (fizico-teologic)

Argumentul ordinii care domneşte în univers

Acest argument dovedeşte existenţa lui Dumnezeu prin ordinea, armonia şi finalitatea care există în lume. Putem astfel constata că, cu toata imensitatea şi complexitatea lui, universul e un mecanism care funcţioneaza perfect, supunându-se anumitor legi, şi în el domneşte ordinea, nimic nu se petrece la întâmplare. Mersul lui regulat de milioane de ani si frumuseţile pe care le conţine nu se pot datora întâmplarii, ci trebuie sa aibă un autor, o fiinţă inteligentă , atotputernică, care a organizat universul şi lumea, încât fiecare parte componentă să-şi împlineasca scopul sau. Acest argument a fost folosit de numerosi Sfinţi Părinţi şi filosofi; Sf. Irineu zice : ''ordinea lumii vesteşte pe cel ce o conduce'', iar filosoful Kant afirmă că acest argument merită să fie pomenit totdeauna cu respect : ''el e cel mai vechi, cel mai clar şi mai potrivit cu raţiunea omenească''. Acest argument a fost atacat de cei ce afirmă că ordinea din univers se datorează întâmplării. Însă mai uşor putem concepe ca dintr-un sac plin cu litere pe care îl golim la întâmplare să apară scrisă o pagina din Biblie, decât să afirmăm că frumuseţea lumii se datorează hazardului.

Argumentul moral

În orice timp, loc şi societate, oamenii au trăit respectând anumite principii, obiceiuri şi legi morale, care se reflectau în propria lor conştiinţă. Astfel întotdeauna omul a putut deosebi între bine şi rău, drept şi nedrept, permis şi nepermis, având convingerea că binele trebuie făcut iar răul evitat. Această lege, legea morală naturală, este dăruita (împărtăşită) omului în actul creaţiei.

Sf. Apostol Pavel spune ca e ''înscrisă în inima omului'' (Romani 2,15), iar Cicero zicea : '' legea morală e ceva veşnic, după care trebuie să se conducă lumea; ultima ei temelie e

Dumnezeu, care porunceşte şi opreşte, şi acestă lege e aşa de veche, ca Duhul lui Dumnezeu Însuşi''. Kant preţuia foarte mult acest argument : ''este firesc ca în lume virtutea să aibă ca rasplată fericirea, iar păcatul, viciul, să fie răsplătit cu nefericirea. Dar în lumea acesta, acest raport nu se realizează mereu. Mintea noastra pretinde existenţa unei alte lumi, în care virtutea să fie mereu răsplătită, iar răul, viciul, pedepsit. Însă pentru a se realiza acest raport, în acea lume trebuie sa fie un judecător atotdrept, care să răsplătească pe fiecare după faptele sale''. Iar acest judecător nu poate fi decât Dumnezeu.

Afirmaţiile lui Dumitru Constantin Dulcan

-noi suntem dintr-un univers cuantic = un univers cu o infinitate de dimensiuni
-noi suntem lumină
-locul nostru este în universul fără timp (în care nu există trecut, prezent şi viitor) şi fără spaţiu
-în universul din care am venit şi în care o să mergem un punct are o infinitate de dimensiuni şi o infinitate de frecvenţe
-acum noi cream realitatea
-realitatea este universul cuantic
-universul este creat şi menţinut de o minte – o conştiină – o raţiune
-noi suntem expresia universului care are la bază legea binelui
-noi suntem aici să experimentăm legea binelui
-să fim obiectivi, noi nu vedem realitatea - realitatea este o iluzie
-materia este o condensare a energiei universului
-dacă am vedea atomul cât o minge de ping-pong, atunci lungimea noastră ar fi de 60 de km
-dacă am pune atom lângă atom, atunci toată populaţia SUA ar încăpea într-o cutie de chibrituri
-noi în universul din care am venit şi în care o să mergem suntem o undă – când murim lăsăm material aici şi transcendem dincolo
-''dincolo'' plecăm cu ce am experimentat aici
-noi suntem părţi dintr-o conştiinţă (inteligenţă) care trebuie îmbogăţită
-noi suntem expresia univesului şi trebuie să fim recunoscători sursei care ne-a creat
-noi toţi suntem fiii aceleiaşi surse
-noi experimentăm la infinit noi forme de a fi
-există sursa tuturor lucrurilor
-creierul nu prelucrează informaţia negativă la fel ca informaţia pozitivă
-semnificaţiile negative conduc la boală
-adevărul absolut nu poate fi explicat cu mintea noastră
-inteligenţele noastre sunt interconectate la o inteligenţă absolută = conştiinţa universală
-noi suntem o expresie relativă – un adevăr relativ - al unui adevăr absolut
-noi suntem expresii finite al unui univers infinit
-nu vom şti niciodată sursa lucrurilor
-iubirea şi ura sunt sentimente opuse
-iubirea emite un câmp pozitiv
-ura emite un gând negativ
-când gândim emitem un câmp care ne înconjoară
-ceea ce gândim noi gândesc şi alţii iar gândurile de acelaşi fel se însumează (se grupează) şi formează nori de gânduri pozitivi şi negativi
-gândul meu se emite în spaţiu şi întâlneşte alte gânduri
-norii gândurilor noastre formează binele sau răul
-suntem auziţi de univers când gândim – tot ceea ce emitem se imprimă şi se înregistrează în univers
-forţa gândurilor = egregorul colectiv = un univers inteligent
-au mai fost civilizaţii înaintea noastră pe acest pământ şi care s-au autodistrus

-dacă depăşim acest moment ni se promite o evoluţie extraordinară: modificarea AND-ului, călătoria în timp şi spaţiu, eliminarea morţii (bătrâneţii), călătoriile în univers (care e dincolo de perdea), transportul în universuri paralele, etc.

Afirmaţiile lui Alexander Solzhenitsyn (1918-2008)

-1970 – Premiul Nobel pentru Literatură
-1978 - discurs la Harvard – cauza tuturor relelor = societatea a pus Omul în locul lui Dumnezeu;
''l-aţi uitat pe Dumnezeu !''

Afirmaţiile lui H.R. Patapievici

-cultura europeană s-a născut în 325 la Niceea - primul conciliu (sinod) ecumenic
-Hristos are natură dublă
-Dumnezeu are natură triplă (unul în trei ipostaze)
-natura divină şi natura umană sunt unite dar nu sunt amestecate; distincte între ele dar fără deosebire
-contrariile (A şi nonA) sunt luate dintr-un nivel inferior de realitate şi ridicate în alt nivel de realitate în care ele pot funcţiona într-o persoană în mod necontradictoriu (A = nonA) – aceasta este realitatea cuantică
-credinţa s-a format în cele 7 concilii ecumenice
-mintea greacă a inventat teoria – rezultatul este mintea creştină
-toate realizările moderne au la bază creştinismul
-mintea creştină stă la originea minţii moderne

BIBLIOGRAFIE

BIBLIA = Vechiul Testament (53 de carţi) + Noul Testament (27 de cărţi) = 80 de cărţi!

Anderson, C., 1990, „Some Emendations on Gödel's Ontological Proof", Faith and Philosophy, 7: 291–303.

Christopher G. Small†, „Reflections On Gödel's Ontological Argument", University of Waterloo

Glick, „Kripke's contributions to Modal Logic"

Modal Logic, Stanford University

Sobel, J., 1987, „Gödel's Ontological Proof", in On Being and Saying: Essays for Richard Cartwright, J. Thomson (ed.), Cambridge, MA: MIT Press, pp. 241–61.

Traducere şi adaptare după New Evidence For Anthropic Theory That Fundamental Physics Constants Underlie Life-Enabling Universe

http://www.apaceavie.ro/principiul-antropic/
http://astrolaur.ro/elemente_transformatoare/articole/principiul_antropic.php

https://miscareacharismatica.ro/existenta-cea-vesnica-a-lui-dumnezeu-a-fost-demonstrata-prin-intermediul-unui-argument-ontologic-de-marele-matematician-si-logician-kurt-godel/

http://adevarul.ro/locale/turnu-severin/ce-este-fapt-sufletul-omului-cantareste-teoriile-oamenilor-stiinta-invatatura-crestina-despre-suflet-1_553aa3e7cfbe376e3585a3e9/index.html

https://www.wikipedia.org/

P.S: articolul este dedicat lui Larry Tesler.

Art.452

2. Asupra unor inegalități trigonometrice
Inegalități cu sume de forma $\sum\left(b^2+c^2\right)f\left(\frac{A}{2}\right)$

Marin Chirciu [1]

Articolul pune în evidență identități remarcabile în triunghi și prezintă inegalități cu sume de forma $\sum\left(b^2+c^2\right)f\left(\frac{A}{2}\right)$, unde f este o funcție care depinde de elemente ale triunghiului ABC.

1) In ΔABC

a)

$$\sum\frac{b^2+c^2}{\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{2\left[p^4-12p^2Rr+r^2\left(16R^2-r^2\right)\right]}{r^2}.$$

b)

$$72R^2\le\sum\frac{b^2+c^2}{\sin^2\frac{A}{2}}\le\frac{9R^5}{2r}$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a)Folosind $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}$ obținem:

$$\sum\frac{b^2+c^2}{\sin^2\frac{A}{2}}=\sum\frac{b^2+c^2}{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}=\sum\frac{bc\left(b^2+c^2\right)}{(p-b)(p-c)}=\frac{2\left[p^4-12p^2Rr+r^2\left(16R^2-r^2\right)\right]}{r^2},$$

care rezultă din :

$$\sum\frac{bc\left(b^2+c^2\right)}{(p-b)(p-c)}=\frac{\sum(p-a)bc\left(b^2+c^2\right)}{\prod(p-a)}=\frac{2\left[p^4-12p^2Rr+r^2\left(16R^2-r^2\right)\right]}{r^2}$$, adevărată din

$\sum(p-a)bc\left(b^2+c^2\right)=2p\left[p^4-12p^2Rr+r^2\left(16R^2-r^2\right)\right]$ și $\prod(p-a)=r^2p$.

b).

Inegalitatea din dreapta:

Folosind $\sum\frac{b^2+c^2}{\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{2\left[p^4-12p^2Rr+r^2\left(16R^2-r^2\right)\right]}{r^2}$ inegalitatea se scrie:

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești*

$\frac{2\left[p^4-12p^2Rr+r^2\left(16R^2-r^2\right)\right]}{r^2}\le\frac{9R^5}{r^3}\Leftrightarrow\left[p^4-12p^2Rr+r^2\left(16R^2-r^2\right)\right]\le\frac{9R^5}{2r}$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$.

Obținem:

$p^4-12p^2Rr+r^2\left(16R^2-r^2\right)=p^2\left(p^2-12Rr\right)+r^2\left(16R^2-r^2\right)\le$

$\le\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left(4R^2+4Rr+3r^2-12Rr\right)+r^2\left(16R^2-r^2\right)=$

$=16R^4-16R^3r+8R^2r^2-12Rr^3+8r^4\le\frac{9R^5}{2r}$, ultima inegalitate este echivalentă cu:

$9R^5-32R^4r+32R^3r-16R^2r^3+24Rr^4-16r^5\ge 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(R-2r\right)\left(9R^4-14R^3r+4R^2r^2-8Rr^3+8r^4\right)\ge 0$, evident din inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga:

Folosind $\sum\frac{b^2+c^2}{\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{2\left[p^4-12p^2Rr+r^2\left(16R^2-r^2\right)\right]}{r^2}$ inegalitatea se scrie:

$\frac{2\left[p^4-12p^2Rr+r^2\left(16R^2-r^2\right)\right]}{r^2}\ge 72R^2\Leftrightarrow\left[p^4-12p^2Rr+r^2\left(16R^2-r^2\right)\right]\ge 36R^2r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\ge 16Rr-5r^2$.

Obținem:

$p^4-12p^2Rr+r^2\left(16R^2-r^2\right)=p^2\left(p^2-12Rr\right)+r^2\left(16R^2-r^2\right)\ge$

$\ge\left(16Rr-5r^2\right)\left(16Rr-5r^2-12Rr\right)+r^2\left(16R^2-r^2\right)=4r^2\left(20R^2-25Rr+6r^2\right)\ge 4r^2\cdot 9R^2=36R^2r^2$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2) In ΔABC

a)

$$\sum\frac{b^2+c^2}{\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{2\left[p^4+8p^2\left(R^2+Rr\right)-r\left(4R+r\right)^3\right]}{p^2}.$$

b)

$$48Rr\le\sum\frac{b^2+c^2}{\cos^2\frac{A}{2}}\le 24R^2$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a)Folosind $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{p\left(p-a\right)}{bc}$ obținem:

$$\sum\frac{b^2+c^2}{\cos^2\frac{A}{2}}=\sum\frac{b^2+c^2}{\frac{p\left(p-a\right)}{bc}}=\frac{1}{p}\sum\frac{bc\left(b^2+c^2\right)}{p-a}=\frac{2\left[p^4+8p^2\left(R^2+Rr\right)-r\left(4R+r\right)^3\right]}{p^2},$$

care rezultă din :

$$\sum \frac{bc\left(b^2+c^2\right)}{p-a}=\frac{\sum(p-b)(p-c)bc\left(b^2+c^2\right)}{\prod(p-a)}=\frac{2\left[p^4+8p^2\left(R^2+Rr\right)-r(4R+r)^3\right]}{p},$$

adevărată din

$\sum(p-b)(p-c)bc\left(b^2+c^2\right)=2r^2\left[p^4+8p^2\left(R^2+Rr\right)-r(4R+r)^3\right]$ și $\prod(p-a)=r^2p$.

b).

Inegalitatea din dreapta:

Folosind $\sum \frac{b^2+c^2}{\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{2\left[p^4+8p^2\left(R^2+Rr\right)-r(4R+r)^3\right]}{p^2}$ inegalitatea se scrie:

$$\frac{2\left[p^4+8p^2\left(R^2+Rr\right)-r(4R+r)^3\right]}{p^2}\le 24R^2 \Leftrightarrow p^2+8\left(R^2+Rr\right)-\frac{r(4R+r)^3}{p^2}\le 12R^2,$$

care rezultă din inegalitatea Blundon- Gerretsen $p^2\le\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}\le 4R^2+4Rr+3r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$$4R^2+4Rr+3r^2+8\left(R^2+Rr\right)-\frac{r(4R+r)^3}{\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}}\le 12R^2 \Leftrightarrow \frac{12R^3-4R^2r+7Rr^2+2r^3}{R}\le 12R^2$$

$\Leftrightarrow 4R^2-7Rr-2r^2\ge 0 \Leftrightarrow (R-2r)(4R+r)\ge 0$, evident din inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga:

Folosind $\sum \frac{b^2+c^2}{\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{2\left[p^4+8p^2\left(R^2+Rr\right)-r(4R+r)^3\right]}{p^2}$ inegalitatea se scrie:

$$\frac{2\left[p^4+8p^2\left(R^2+Rr\right)-r(4R+r)^3\right]}{p^2}\ge 48Rr \Leftrightarrow p^4+8p^2\left(R^2+Rr\right)-r(4R+r)^3\ge 24p^2Rr$$

$\Leftrightarrow p^4+8p^2\left(R^2-2Rr\right)-r(4R+r)^3\ge 0 \Leftrightarrow p^2\left(p^2+8R^2-16Rr\right)\ge r(4R+r)^3$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\ge 16Rr-5r^2\ge\frac{r(4R+r)^2}{R+r}$.

Rămâne să arătăm că:

$$\frac{r(4R+r)^2}{R+r}\left(16Rr-5r^2+8R^2-16Rr\right)\ge r(4R+r)^3 \Leftrightarrow 4R^2-5Rr-6r^2\ge 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (R-2r)(4R+3r)\ge 0$, evident din inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3) In ΔABC

a)

$$\sum \frac{b^2+c^2}{tg^2\frac{A}{2}}=8p^2.$$

b)

$$108Rr \le \sum \frac{b^2+c^2}{tg^2\frac{A}{2}} \le 54R^2$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a)Folosind $tg^2\frac{A}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}$ obținem:

$$\sum \frac{b^2+c^2}{tg^2\frac{A}{2}} = \sum \frac{b^2+c^2}{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = p\sum \frac{(p-a)(b^2+c^2)}{(p-b)(p-c)} = 8p^2,$$

care rezultă din : $\sum \frac{(p-a)(b^2+c^2)}{(p-b)(p-c)} = \frac{\sum (p-a)^2(b^2+c^2)}{\prod (p-a)} = \frac{8p^2r^2}{r^2p} = 8p$,

adevărată din $\sum (p-a)^2(b^2+c^2) = 8p^2r^2$ și $\prod (p-a) = r^2p$.

b).

Inegalitatea din dreapta:

Folosind $\sum \frac{b^2+c^2}{tg^2\frac{A}{2}} = 8p^2$ inegalitatea se scrie:

$8p^2 \le 54R^2 \Leftrightarrow p^2 \le \frac{27R^2}{4}$, care rezultă din inegalitatea Mitrinovici $p \le \frac{3R\sqrt{3}}{2}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga:

Folosind $\sum \frac{b^2+c^2}{tg^2\frac{A}{2}} = 8p^2$ inegalitatea se scrie:

$8p^2 \ge 108Rr \Leftrightarrow 2p^2 \ge 27Rr$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \ge 16Rr - 5r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$2(16Rr-5r^2) \ge 27Rr \Leftrightarrow R \ge 2r$ (inegalitatea lui Euler).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

4) In ΔABC

a)

$$\sum \frac{b^2+c^2}{ctg^2\frac{A}{2}} = \frac{2\left[p^2(8R^2+16Rr+2r^2-p^2)-r(4R+r)^3\right]}{p^2}.$$

b)

$$24r^2 \le \sum \frac{b^2+c^2}{ctg^2\frac{A}{2}} \le \frac{3R^3}{r}$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a)Folosind $ctg^2\frac{A}{2}=\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}$ obținem:

$$\sum\frac{b^2+c^2}{ctg^2\frac{A}{2}}=\sum\frac{b^2+c^2}{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}=\frac{1}{p}\sum\frac{(p-b)(p-c)(b^2+c^2)}{p-a}=$$

$$=\frac{2\left[p^2(8R^2+16Rr+2r^2-p^2)-r(4R+r)^3\right]}{p^2},$$

care rezultă din : $\sum\frac{(p-b)(p-c)(b^2+c^2)}{p-a}=\frac{\sum(p-b)^2(p-c)^2(b^2+c^2)}{\prod(p-a)}=$

$$=\frac{2\left[p^2(8R^2+16Rr+2r^2-p^2)-r(4R+r)^3\right]}{p},$$

adevărată din

$\sum(p-b)^2(p-c)^2(b^2+c^2)=2r^2\left[p^2(8R^2+16Rr+2r^2-p^2)-r(4R+r)^3\right]$ și

$\prod(p-a)=r^2p$.

b).

Inegalitatea din dreapta:

Folosind $\sum\frac{b^2+c^2}{ctg^2\frac{A}{2}}=\frac{2\left[p^2(8R^2+16Rr+2r^2-p^2)-r(4R+r)^3\right]}{p^2}$ inegalitatea se scrie:

$$\frac{2\left[p^2(8R^2+16Rr+2r^2-p^2)-r(4R+r)^3\right]}{p^2}\le\frac{3R^3}{r}\Leftrightarrow$$

$$8R^2+16Rr+2r^2-p^2-\frac{r(4R+r)^3}{p^2}\le\frac{3R^3}{2r},$$

care rezultă din inegalitatea Blundon- Gerretsen $16Rr-5r^2\le p^2\le\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$.

Rămâne să arătăm că:

$$8R^2+16Rr+2r^2-16Rr+5r^2-\frac{r(4R+r)^3}{\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}}\le\frac{3R^3}{2r}\Leftrightarrow\frac{8R^3-16R^2r+11Rr^2+2r^3}{R}\le\frac{3R^3}{2r}$$

$\Leftrightarrow 3R^4-16R^3r+32R^2r^2-22Rr^3-4r^4\ge 0\Leftrightarrow(R-2r)(3R^3-10R^2r+12Rr^2+2r^3)\ge 0$,

evident din inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga:

Folosind $\sum\frac{b^2+c^2}{ctg^2\frac{A}{2}}=\frac{2\left[p^2(8R^2+16Rr+2r^2-p^2)-r(4R+r)^3\right]}{p^2}$ inegalitatea se scrie:

$$\frac{2\left[p^2\left(8R^2+16Rr+2r^2-p^2\right)-r\left(4R+r\right)^3\right]}{p^2}\geq 24r^2 \Leftrightarrow$$

$8R^2+16Rr+2r^2-p^2-\frac{r\left(4R+r\right)^3}{p^2}\geq 12r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen

$$\frac{r\left(4R+r\right)^2}{R+r}\leq 16Rr-5r^2\leq p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2.$$

Rămâne să arătăm că:

$8R^2+16Rr+2r^2-4R^2-4Rr-3r^2-\frac{r\left(4R+r\right)^3}{\frac{r\left(4R+r\right)^2}{R+r}}\geq 12r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$ (inegalitatea lui Euler).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

5) In ΔABC

a)

$$\sum\frac{b^2+c^2}{tg\frac{A}{2}}=\frac{2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)}{r}.$$

b)

$$24rp\leq\sum\frac{b^2+c^2}{tg\frac{A}{2}}\leq\frac{3R^3p}{r^2}$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a)Folosind $tg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ obținem:

$$\sum\frac{b^2+c^2}{tg\frac{A}{2}}=\sum\frac{b^2+c^2}{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}}=\frac{p}{S}\sum(p-a)\left(b^2+c^2\right)=\frac{2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)}{r},$$

care rezultă din : $\sum(p-a)\left(b^2+c^2\right)=2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)$.

b).

Folosind inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2\leq p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$ obținem:

$12r^2\leq p^2-3r^2-6Rr\leq\frac{3R^3}{2r}$, (1).

Folosind $\sum\frac{b^2+c^2}{tg\frac{A}{2}}=\frac{2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)}{r}$ și (1), obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

6) In ΔABC

a)

$$\sum \frac{b^2+c^2}{ctg\frac{A}{2}} = \frac{2\left[p^2(2R+3r)-r(4R+r)^2\right]}{p}.$$

b)

$$\frac{216r^3}{p} \le \sum \frac{b^2+c^2}{ctg\frac{A}{2}} \le \frac{27R^3}{p}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a)Folosind $ctg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$ obținem:

$$\sum \frac{b^2+c^2}{ctg\frac{A}{2}} = \sum \frac{b^2+c^2}{\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}} = \frac{1}{S}\sum (p-b)(p-c)(b^2+c^2) = \frac{2\left[p^2(2R+3r)-r(4R+r)^2\right]}{p}$$

care rezultă din : $\sum (p-b)(p-c)(b^2+c^2) = 2r\left[p^2(2R+3r)-r(4R+r)^2\right]$.

b).

Folosind inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2 \le p^2 \le 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \ge 2r$ obținem:

$108r^3 \le p^2(2R+3r)-r(4R+r)^2 \le \frac{27R^3}{2}$, (1).

Folosind $\sum \frac{b^2+c^2}{ctg\frac{A}{2}} = \frac{2\left[p^2(2R+3r)-r(4R+r)^2\right]}{p}$ și (1) , rezultă concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

7) In ΔABC

a)

$$\sum \frac{b^2+c^2}{tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}} = \frac{p^4+8p^2(R^2+Rr)-r(4R+r)^3}{2Rp}.$$

b)

$$\frac{162Rr^2}{p} \le \sum \frac{b^2+c^2}{tg\frac{B}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2}} \le \frac{81R^3}{2p}$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a)Folosind:

$tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$, obținem $\mathrm{tg}\frac{B}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2} = \frac{a(p-a)}{S}$.

$$\sum \frac{b^2+c^2}{tg\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{C}{2}}=\sum \frac{b^2+c^2}{\frac{a(p-a)}{S}}=S\sum \frac{b^2+c^2}{a(p-a)}=\frac{p^4+8p^2(R^2+Rr)-r(4R+r)^3}{2Rp},$$

care rezultă din :

$$\sum \frac{b^2+c^2}{a(p-a)}=\frac{\sum bc(b^2+c^2)(p-b)(p-c)}{abc\prod(p-a)},$$

$$\sum bc(b^2+c^2)(p-b)(p-c)=2r^2\left[p^4+8p^2(R^2+Rr)-r(4R+r)^3\right] \text{și} \prod(p-a)=r^2p.$$

b).

Folosind inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2\le p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$ obținem:

$324R^2r^2\le p^4+8p^2(R^2+Rr)-r(4R+r)^3\le 81R^4$, (1).

Folosind $\sum \frac{b^2+c^2}{tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}}=\frac{p^4+8p^2(R^2+Rr)-r(4R+r)^3}{2Rp}$ și (1), obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

8) In ΔABC

a)

$$\sum(b^2+c^2)\left(tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}\right)=\frac{2\left[p^2(6R-r)-r(4R+r)^2\right]}{p}.$$

b)

$$\frac{108R^2r}{p}\le\sum(b^2+c^2)\left(tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}\right)\le\frac{54R^3}{p}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a) Folosind:

$tg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$, obținem $\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{C}{2}=\frac{a(p-a)}{S}$.

$$\sum(b^2+c^2)\left(tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\right)=\sum(b^2+c^2)\cdot\frac{a(p-a)}{S}=\frac{1}{S}\sum a(p-a)(b^2+c^2)=$$

$=\frac{2\left[p^2(6R-r)-r(4R+r)^2\right]}{p}$ care rezultă din :

$$\sum a(p-a)(b^2+c^2)=2r\left[p^2(6R-r)-r(4R+r)^2\right].$$

b).

Folosind inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2\le p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$ obținem:

$54R^2r\le p^2(6R-r)-r(4R+r)^2\le 27R^3$, (1).

Folosind $\sum(b^2+c^2)\left(tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\right)=\frac{2\left[p^2(6R-r)-r(4R+r)^2\right]}{p}$ și (1) , rezultă concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

9) In ΔABC

a)

$$\sum \frac{b^2+c^2}{ctg\frac{B}{2}+ctg\frac{C}{2}}=\frac{p^4-4p^2Rr-r^2(4R+r)^2}{2Rp}.$$

b)

$$\frac{54Rr^2}{p}\le \sum \frac{b^2+c^2}{\text{ctg}\frac{B}{2}+\text{ctg}\frac{C}{2}}\le \frac{27R^3}{2p}$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a)Folosind:

$ctg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$, obținem $\text{ctg}\frac{B}{2}+\text{ctg}\frac{C}{2}=\frac{a}{r}$.

$$\sum \frac{b^2+c^2}{ctg\frac{B}{2}+\text{ctg}\frac{C}{2}}=\sum \frac{b^2+c^2}{\frac{a}{r}}=r\sum \frac{b^2+c^2}{a}=\frac{p^4-4p^2Rr-r^2(4R+r)^2}{2Rp},$$

care rezultă din :

$\sum \frac{b^2+c^2}{a}=\frac{\sum bc(b^2+c^2)}{abc}=\frac{p^4-4p^2Rr-r^2(4R+r)^2}{2Rp}$, adevărată din

$\sum bc(b^2+c^2)=2\left[p^4-4p^2Rr-r^2(4R+r)^2\right]$ și $abc=4Rrp$.

b).

Folosind inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2\le p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$ obținem:

$108R^2r^2\le p^4-4p^2Rr-r^2(4R+r)^2\le 27R^4$, (1).

Folosind $\sum \frac{b^2+c^2}{ctg\frac{B}{2}+ctg\frac{C}{2}}=\frac{p^4-4p^2Rr-r^2(4R+r)^2}{2Rp}$ și (1), obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

10) In ΔABC

a)

$$\sum (b^2+c^2)\left(ctg\frac{B}{2}+ctg\frac{B}{2}\right)=\frac{2p(p^2+r^2-2Rr)}{r}.$$

b)

$$48rp\le \sum (b^2+c^2)\left(ctg\frac{B}{2}+ctg\frac{B}{2}\right)\le \frac{12R^2p}{r}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a Folosind:

$ctg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$, obținem $\text{ctg}\frac{B}{2}+\text{ctg}\frac{C}{2}=\frac{a}{r}$.

$$\sum(b^2+c^2)\left(ctg\frac{B}{2}+ctg\frac{C}{2}\right)=\sum(b^2+c^2)\cdot\frac{a}{r}=\frac{1}{r}\sum a(b^2+c^2)=\frac{2p(p^2+r^2-2Rr)}{r},$$

care rezultă din : $\sum a(b^2+c^2)=2p(p^2+r^2-2Rr)$.

b).

Folosind inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2\le p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$ obținem:

$24r^2\le p^2+r^2-2Rr\le 6R^2$, (1).

Folosind $\sum(b^2+c^2)\left(ctg\frac{B}{2}+ctg\frac{B}{2}\right)=\frac{2p(p^2+r^2-2Rr)}{r}$ și (1) , rezultă concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

11) In ΔABC

a)

$$\sum(b^2+c^2)\sin^2\frac{A}{2}=\frac{p^2(2R+r)+r(r^2-16R^2)}{2R}.$$

b)

$$18r^2\le\sum(b^2+c^2)\sin^2\frac{A}{2}\le\frac{9R^2}{2}$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a)Folosind $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}$ obținem:

$$\sum(b^2+c^2)\sin^2\frac{A}{2}=\sum(b^2+c^2)\frac{(p-b)(p-c)}{bc}=\frac{\sum a(b^2+c^2)(p-b)(p-c)}{abc}=$$

$=\frac{p^2(2R+r)+r(r^2-16R^2)}{2R}$, care rezultă din :

$$\sum a(b^2+c^2)(p-b)(p-c)=2rp\left[p^2(2R+r)+r(r^2-16R^2)\right].$$

b).

Folosind inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2\le p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$ obținem:

$36Rr^2\le p^2(2R+r)+r(r^2-16R^2)\le 9R^3$, (1).

Folosind $\sum(b^2+c^2)\sin^2\frac{A}{2}=\frac{p^2(2R+r)+r(r^2-16R^2)}{2R}$ și (1) , rezultă concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

12) In ΔABC

a)

$$\sum(b^2+c^2)\cos^2\frac{A}{2}=\frac{p^2(6R-r)-r(4R+r)^2}{2R}.$$

b)

$$27Rr \le \sum\left(b^2+c^2\right)\cos^2\frac{A}{2} \le \frac{27R^2}{2}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a) Folosind $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{p(p-a)}{bc}$ obținem:

$$\sum\left(b^2+c^2\right)\cos^2\frac{A}{2}=\sum\left(b^2+c^2\right)\frac{p(p-a)}{bc}=p\sum\frac{\left(b^2+c^2\right)(p-a)}{bc}=\frac{p^2(6R-r)-r(4R+r)^2}{2R},$$

care rezultă din :

$$\sum\frac{\left(b^2+c^2\right)(p-a)}{bc}=\frac{\sum a\left(b^2+c^2\right)(p-a)}{abc}=\frac{p^2(6R-r)-r(4R+r)^2}{2Rp},$$ adevărată din

$$\sum a(p-a)\left(b^2+c^2\right)=2r\left[p^2(6R-r)-r(4R+r)^2\right].$$

b).

Folosind inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2 \le p^2 \le 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \ge 2r$ obținem:

$54R^2r \le p^2(6R-r)-r(4R+r)^2 \le 27R^3$, (1).

Folosind $\sum\left(b^2+c^2\right)\cos^2\frac{A}{2}=\frac{p^2(6R-r)-r(4R+r)^2}{2R}$ și (1) , rezultă concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

13) In ΔABC

a)

$$\sum\frac{b^2+c^2}{\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}=\frac{8R\left[p^2(2R+r)+r\left(r^2-16R^2\right)\right]}{r^2}.$$

b)

$$288R^2 \le \sum\frac{b^2+c^2}{\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}} \le \frac{72R^4}{r^2}$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a)Folosind $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}$ obținem:

$$\sum\frac{b^2+c^2}{\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}=\sum\frac{b^2+c^2}{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}\cdot\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}=\frac{abc}{\prod(p-a)}\sum\frac{a\left(b^2+c^2\right)}{p-a}=$$

$$=\frac{8R\left[p^2(2R+r)+r\left(r^2-16R^2\right)\right]}{r^2},$$ care rezultă din :

$$\sum\frac{a\left(b^2+c^2\right)}{p-a}=\frac{\sum a\left(b^2+c^2\right)(p-b)(p-c)}{\prod(p-a)}=\frac{2\left[p^2(2R+r)+r\left(r^2-16R^2\right)\right]}{r},$$ adevărată din

$\sum a\left(b^2+c^2\right)(p-b)(p-c)=2rp\left[p^2(2R+r)+r\left(r^2-16R^2\right)\right]$ și $\prod(p-a)=r^2p$.

b).

Folosind inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2\le p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$ obținem:

$36Rr^2\le p^2(2R+r)+r\left(r^2-16R^2\right)\le 9R^3$, (1).

Folosind $\sum\frac{b^2+c^2}{\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}=\frac{8R\left[p^2(2R+r)+r\left(r^2-16R^2\right)\right]}{r^2}$ și (1), rezultă concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

14) In ΔABC

a)

$$\sum\frac{b^2+c^2}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}=\frac{8R\left[p^2(6R-r)-r(4R+r)^2\right]}{p^2}.$$

b)

$$64Rr\le\sum\frac{b^2+c^2}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}\le\frac{16R^3}{r}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a) Folosind $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{p(p-a)}{bc}$ obținem:

$$\sum\frac{b^2+c^2}{\frac{p(p-b)}{ac}\cdot\frac{p(p-c)}{ab}}=\frac{abc}{p^2}\sum\frac{a\left(b^2+c^2\right)}{(p-b)(p-c)}=\frac{8R\left[p^2(6R-r)-r(4R+r)^2\right]}{p^2},$$

care rezultă din :

$\sum\frac{a\left(b^2+c^2\right)}{(p-b)(p-c)}=\frac{\sum a(p-a)\left(b^2+c^2\right)}{\prod(p-a)}=\frac{2\left[p^2(6R-r)-r(4R+r)^2\right]}{rp}$, adevărată din

$\sum a(p-a)\left(b^2+c^2\right)=2r\left[p^2(6R-r)-r(4R+r)^2\right]$.

b).

Folosind inegalitatea Blundon- Gerretsen

$\frac{r(4R+r)^2}{R+r}\le 16Rr-5r^2\le p^2\le\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}\le 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$

obținem:

$8r\le 6R-r-\frac{r(4R+r)^2}{p^2}\le\frac{2R^2}{r}$, (1).

Folosind $\sum\frac{b^2+c^2}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}=\frac{8R\left[p^2(6R-r)-r(4R+r)^2\right]}{p^2}$ și (1), rezultă concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

15) In ΔABC

a)

$$\sum \frac{b^2+c^2}{tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}} = \frac{2\left[p^2(2R+3r)-r(4R+r)^2\right]}{r}.$$

b)

$$216r^2 \le \sum \frac{b^2+c^2}{tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}} \le \frac{27R^3}{r}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a) Folosind $tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ obținem $\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} = \frac{p-a}{p}$:

$\sum \frac{b^2+c^2}{tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}} = \sum \frac{b^2+c^2}{\frac{p-a}{p}} = p\sum \frac{b^2+c^2}{p-a} = \frac{2\left[p^2(2R+3r)-r(4R+r)^2\right]}{r}$ care rezultă din :

$\sum \frac{b^2+c^2}{p-a} = \frac{\sum(b^2+c^2)(p-b)(p-c)}{\prod(p-a)} = \frac{2\left[p^2(2R+3r)-r(4R+r)^2\right]}{rp}$, adevărată din

$\sum(p-b)(p-c)(b^2+c^2) = 2r\left[p^2(2R+3r)-r(4R+r)^2\right]$ și $\prod(p-a) = r^2p$.

b).

Folosind inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2 \le p^2 \le 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \ge 2r$ obținem:

$108r^3 \le p^2(2R+3r)-r(4R+r)^2 \le \frac{27R^3}{2}$, (1).

Folosind $\sum \frac{b^2+c^2}{tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}} = \frac{2\left[p^2(2R+3r)-r(4R+r)^2\right]}{r}$ și (1) , rezultă concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

16) In ΔABC

a)

$$\sum \frac{b^2+c^2}{ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}} = 2\left(p^2-3r^2-6Rr\right).$$

b)

$$24r^2 \le \sum \frac{b^2+c^2}{ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}} \le \frac{3R^3}{r}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a) Folosind $ctg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$ obținem $\text{ctg}\frac{B}{2}\text{ctg}\frac{C}{2}=\frac{p}{p-a}$:

$$\sum\frac{b^2+c^2}{ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}}=\sum\frac{b^2+c^2}{\frac{p}{p-a}}=\frac{1}{p}\sum(b^2+c^2)(p-a)=2(p^2-3r^2-6Rr)$$

care rezultă din : $\sum(b^2+c^2)(p-a)=2p(p^2-3r^2-6Rr)$.

b).

Folosind inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2\le p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$ obținem:

$12r^2\le p^2-3r^2-6Rr\le\frac{3R^3}{2r}$, (1).

Folosind $\sum\frac{b^2+c^2}{ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}}=2(p^2-3r^2-6Rr)$ și (1) , rezultă concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

17) In ΔABC

a)

$$\sum\frac{b^2+c^2}{tg^2\frac{B}{2}tg^2\frac{C}{2}}=\frac{2\left[p^2(8R^2+16Rr+2r^2-p^2)-r(4R+r)^3\right]}{r^2}.$$

b)

$$162R^2\le\sum\frac{b^2+c^2}{tg^2\frac{B}{2}tg^2\frac{C}{2}}\le\frac{81R^5}{4r^3}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a) Folosind $tg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ obținem $\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2}=\frac{p-a}{p}$:

$$\sum\frac{b^2+c^2}{tg^2\frac{B}{2}tg^2\frac{C}{2}}=\sum\frac{b^2+c^2}{\left(\frac{p-a}{p}\right)^2}=p^2\sum\frac{b^2+c^2}{(p-a)^2}=\frac{2\left[p^2(8R^2+16Rr+2r^2-p^2)-r(4R+r)^3\right]}{r^2},$$

care rezultă din :

$$\sum\frac{b^2+c^2}{(p-a)^2}=\frac{\sum(b^2+c^2)(p-b)^2(p-c)^2}{\prod(p-a)^2}=\frac{2\left[p^2(8R^2+16Rr+2r^2-p^2)-r(4R+r)^3\right]}{r^2p^2},$$

adevărată din

$\sum(b^2+c^2)(p-b)^2(p-c)^2=2r^2\left[p^2(8R^2+16Rr+2r^2-p^2)-r(4R+r)^3\right]$ și

$\prod(p-a)=r^2p$.

b).

Folosind inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2 \le p^2 \le 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \ge 2r$ obținem:

$$81R^2r^2 \le \left[p^2\left(8R^2+16Rr+2r^2-p^2\right)-r\left(4R+r\right)^3\right] \le \frac{81R^5}{8r}, \ (1).$$

Folosind $\sum \frac{b^2+c^2}{tg^2\frac{B}{2}tg^2\frac{C}{2}} = \frac{2\left[p^2\left(8R^2+16Rr+2r^2-p^2\right)-r\left(4R+r\right)^3\right]}{r^2}$ și (1) , rezultă concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

18) In ΔABC

a)

$$\sum \frac{b^2+c^2}{ctg^2\frac{B}{2}ctg^2\frac{C}{2}} = 8r^2.$$

b)

$$8r^2 \le \sum \frac{b^2+c^2}{ctg^2\frac{B}{2}ctg^2\frac{C}{2}} \le 2R^2.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a) Folosind $ctg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$ obținem $\text{ctg}\frac{B}{2}\text{ctg}\frac{C}{2} = \frac{p}{p-a}$:

$$\sum \frac{b^2+c^2}{ctg^2\frac{B}{2}ctg^2\frac{C}{2}} = \sum \frac{b^2+c^2}{\left(\frac{p}{p-a}\right)^2} = \frac{1}{p^2}\sum\left(b^2+c^2\right)\left(p-a\right)^2 = 8r^2$$

care rezultă din : $\sum\left(b^2+c^2\right)\left(p-a\right)^2 = 8r^2p^2$.

b).

Folosind $\sum \frac{b^2+c^2}{ctg^2\frac{B}{2}ctg^2\frac{C}{2}} = 8r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \ge 2r$, rezultă concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

19) In ΔABC

a)

$$\sum\left(b^2+c^2\right)\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} = \frac{p^4-12p^2Rr+r^2\left(16R^2-r^2\right)}{8R^2}.$$

b)

$$\frac{9r^2}{2} \le \sum\left(b^2+c^2\right)\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} \le \frac{9R^3}{16r}$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a)Folosind $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}$ obținem:

$$\sum(b^2+c^2)\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}=\sum(b^2+c^2)\frac{(p-a)(p-c)}{ac}\cdot\frac{(p-a)(p-b)}{ab}=$$

$$=\frac{\prod(p-a)}{abc}\sum\frac{(b^2+c^2)(p-a)}{a}=\frac{p^4-12p^2Rr+r^2(16R^2-r^2)}{8R^2},$$

care rezultă din :

$$\sum\frac{(b^2+c^2)(p-a)}{a}=\frac{\sum bc(b^2+c^2)(p-a)}{abc}=\frac{p^4-12p^2Rr+r^2(16R^2-r^2)}{2Rr}$$, adevărată din

$\sum bc(b^2+c^2)(p-a)=2p\left[p^4-12p^2Rr+r^2(16R^2-r^2)\right]$ și $\prod(p-a)=r^2p$.

b).

Folosind inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2\le p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$ obținem:

$$36R^2r^2\le p^4-12p^2Rr+r^2(16R^2-r^2)\le\frac{9R^5}{2r},\ (1).$$

Folosind $\sum(b^2+c^2)\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}=\frac{p^4-12p^2Rr+r^2(16R^2-r^2)}{8R^2}$ și (1) , rezultă concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

20) In ΔABC

a)

$$\sum(b^2+c^2)\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}=\frac{\left[p^4+8p^2(R^2+Rr)-r(4R+r)^3\right]}{8R^2}.$$

b)

$$\frac{81r^2}{2}\le\sum(b^2+c^2)\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\le\frac{81R^2}{8}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a) Folosind $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{p(p-a)}{bc}$ obținem:

$$\sum(b^2+c^2)\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}=\sum(b^2+c^2)\frac{p(p-b)}{ac}\cdot\frac{p(p-c)}{ab}=\frac{p^2}{abc}\sum\frac{(b^2+c^2)(p-b)(p-c)}{a}=$$

$$=\frac{\left[p^4+8p^2(R^2+Rr)-r(4R+r)^3\right]}{8R^2},$$

care rezultă din :

$$\sum\frac{(b^2+c^2)(p-b)(p-c)}{a}=\frac{\sum bc(p-b)(p-c)(b^2+c^2)}{abc}=\frac{\left[p^4+8p^2(R^2+Rr)-r(4R+r)^3\right]}{2Rp}$$

adevărată din

$$\sum bc(p-b)(p-c)(b^2+c^2)=2r^2\left[p^4+8p^2(R^2+Rr)-r(4R+r)^3\right].$$

b).

Folosind inegalitatea Gerretsen

$16Rr-5r^2 \le p^2 \le 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \ge 2r$ obținem:

$324R^2r^2 \le \left[p^4+8p^2\left(R^2+Rr\right)-r\left(4R+r\right)^3\right] \le 81R^4$, (1).

Folosind $\sum\left(b^2+c^2\right)\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}=\frac{\left[p^4+8p^2\left(R^2+Rr\right)-r\left(4R+r\right)^3\right]}{8R^2}$ și (1) , rezultă concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

21) In ΔABC

a)

$$\sum\left(b^2+c^2\right)tg^2\frac{B}{2}tg^2\frac{C}{2}=8r^2.$$

b)

$$8r^2 \le \sum\left(b^2+c^2\right)tg^2\frac{B}{2}tg^2\frac{C}{2} \le 2R^2.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a) Folosind $tg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ obținem $\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2}=\frac{p-a}{p}$:

$$\sum\left(b^2+c^2\right)tg^2\frac{B}{2}tg^2\frac{C}{2}=\sum\left(b^2+c^2\right)\left(\frac{p-a}{p}\right)^2=\frac{1}{p^2}\sum\left(b^2+c^2\right)(p-a)^2=8r^2$$

care rezultă din : $\sum\left(b^2+c^2\right)(p-a)^2=8r^2p^2$.

b).

Folosind $\sum\left(b^2+c^2\right)tg^2\frac{B}{2}tg^2\frac{C}{2}=8r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \ge 2r$, rezultă concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

22) In ΔABC

a)

$$\sum\left(b^2+c^2\right)ctg^2\frac{B}{2}ctg^2\frac{C}{2}=\frac{2\left[p^2\left(8R^2+16Rr+2r^2-p^2\right)-r\left(4R+r\right)^3\right]}{r^2}.$$

b)

$$162R^2 \le \sum\left(b^2+c^2\right)ctg^2\frac{B}{2}ctg^2\frac{C}{2} \le \frac{81R^5}{4r^3}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a) Folosind $ctg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$ obținem $\text{ctg}\frac{B}{2}\text{ctg}\frac{C}{2}=\frac{p}{p-a}$:

$$\sum\left(b^2+c^2\right)ctg^2\frac{B}{2}ctg^2\frac{C}{2}=\sum\left(b^2+c^2\right)\left(\frac{p}{p-a}\right)^2=p^2\sum\frac{b^2+c^2}{(p-a)^2}=$$

$$=\frac{2\left[p^2\left(8R^2+16Rr+2r^2-p^2\right)-r\left(4R+r\right)^3\right]}{r^2},$$

care rezultă din :

$$\sum\frac{b^2+c^2}{(p-a)^2}=\frac{\sum\left(b^2+c^2\right)(p-b)^2(p-c)^2}{\prod(p-a)^2}=\frac{2\left[p^2\left(8R^2+16Rr+2r^2-p^2\right)-r\left(4R+r\right)^3\right]}{r^2p^2},$$

adevărată din

$\sum\left(b^2+c^2\right)(p-b)^2(p-c)^2=2r^2\left[p^2\left(8R^2+16Rr+2r^2-p^2\right)-r\left(4R+r\right)^3\right]$ și

$\prod(p-a)=r^2p$.

b).

Folosind inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2\le p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$ obținem:

$$81R^2r^2\le\left[p^2\left(8R^2+16Rr+2r^2-p^2\right)-r\left(4R+r\right)^3\right]\le\frac{81R^5}{8r},\ (1).$$

Folosind $\sum\left(b^2+c^2\right)ctg^2\frac{B}{2}ctg^2\frac{C}{2}=\frac{2\left[p^2\left(8R^2+16Rr+2r^2-p^2\right)-r\left(4R+r\right)^3\right]}{r^2}$ și (1) , rezultă concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

23) In ΔABC

a)

$$\sum\left(b^2+c^2\right)tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=2\left(p^2-3r^2-6Rr\right).$$

b)

$$24r^2\le\sum\left(b^2+c^2\right)tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}\le\frac{3R^3}{r}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a) Folosind $tg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ obținem $\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2}=\frac{p-a}{p}$:

$$\sum\left(b^2+c^2\right)tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=\sum\left(b^2+c^2\right)\frac{p-a}{p}=\frac{1}{p}\sum\left(b^2+c^2\right)(p-a)=2\left(p^2-3r^2-6Rr\right)$$

care rezultă din : $\sum\left(b^2+c^2\right)(p-a)=2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)$.

b).

Folosind inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2\le p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$ obținem:

$$12r^2\le p^2-3r^2-6Rr\le\frac{3R^3}{2r},\ (1).$$

Folosind $\sum\left(b^2+c^2\right)tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=2\left(p^2-3r^2-6Rr\right)$ și (1) , rezultă concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

24) In ΔABC

a)

$$\sum\left(b^2+c^2\right)ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}=\frac{2\left[p^2\left(2R+3r\right)-r\left(4R+r\right)^2\right]}{r}.$$

b)

$$216r^2\le\sum\left(b^2+c^2\right)ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}\le\frac{27R^3}{r}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a) Folosind $ctg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$ obținem $\text{ctg}\frac{B}{2}\text{ctg}\frac{C}{2}=\frac{p}{p-a}$:

$\sum\left(b^2+c^2\right)ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}=\sum\left(b^2+c^2\right)\frac{p}{p-a}=p\sum\frac{b^2+c^2}{p-a}=\frac{2\left[p^2\left(2R+3r\right)-r\left(4R+r\right)^2\right]}{r}$ care rezultă din :

$\sum\frac{b^2+c^2}{p-a}=\frac{\sum\left(b^2+c^2\right)(p-b)(p-c)}{\prod(p-a)}=\frac{2\left[p^2\left(2R+3r\right)-r\left(4R+r\right)^2\right]}{rp}$, adevărată din

$\sum(p-b)(p-c)\left(b^2+c^2\right)=2r\left[p^2\left(2R+3r\right)-r\left(4R+r\right)^2\right]$ și $\prod(p-a)=r^2p$.

b).

Folosind inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2\le p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$ obținem:

$108r^3\le p^2\left(2R+3r\right)-r\left(4R+r\right)^2\le\frac{27R^3}{2}$, (1).

Folosind $\sum\left(b^2+c^2\right)ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}=\frac{2\left[p^2\left(2R+3r\right)-r\left(4R+r\right)^2\right]}{r}$ și (1) , rezultă concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

1 Aprilie 2019

3. In legătură cu problema L:739
Sclipirea Minții-24

Art 1072

Marin Chirciu[2]

L:739.

1) Dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi cu aria S să se demonstreze inegalitatea:

$$\left(\sum\frac{a^3}{a+b}\right)\cdot\left(\sum\frac{a^3}{a+3b}\right)\geq 6S^2.$$

D. M. Bătinețu-Giurgiu, București și Neculai Stanciu, Buzău

Soluție.

Demonstrăm rezultatele ajutătoare:

Lema 1.

2) In ΔABC

$$\sum\frac{a^3}{a+b}\geq 9Rr.$$

Demonstrație:

Folosind inegalitatea lui Bergstrőm obținem:

$$\sum\frac{a^3}{a+b}=\sum\frac{a^4}{a(a+b)}\geq\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a(a+b)}=\frac{\left[2\left(p^2-r^2-4Rr\right)\right]^2}{2\left(p^2-r^2-4Rr\right)+p^2+r^2+4Rr}\overset{(1)}{=}$$

$$=\frac{4\left[p^4-2p^2\left(r^2+4Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2\right]}{3p^2-r^2-4Rr}\overset{(2)}{\geq}9Rr=M_d$$, unde (1) rezultă din identitățile cunoscute în triunghi $\sum a^2=2\left(p^2-r^2-4Rr\right)$ și $\sum ab=p^2+r^2+4Rr$,

iar (2) $\Leftrightarrow\dfrac{4\left[p^4-2p^2\left(r^2+4Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2\right]}{3p^2-r^2-4Rr}\geq 9Rr\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^2\left(4p^2-8r^2-59Rr\right)+r^2\left(100R^2+41Rr+4r^2\right)\geq 0.$

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $\left(4p^2-8r^2-59Rr\right)\geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $\left(4p^2-8r^2-59Rr\right)<0$, inegalitatea se rescrie:

$r^2\left(100R^2+41Rr+4r^2\right)\geq p^2\left(59Rr+8r^2-4p^2\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen:

$16Rr-5r^2\leq p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2.$

Rămâne să arătăm că:

$r^2\left(100R^2+41Rr+4r^2\right)\geq\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left(59Rr+8r^2-4\left(16Rr-5r^2\right)\right)\Leftrightarrow$

[2] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești*

$\Leftrightarrow 5R^3+2R^2r-14Rr^2-20r^3\geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(5R^2+12Rr+10r^2)\geq 0$,

evident din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Lema 2.

3) In ΔABC

$$\sum \frac{a^3}{a+3b}\geq \frac{9Rr}{2}.$$

Demonstrație:

Folosind inegalitatea lui Bergstrőm obținem:

$$\sum \frac{a^3}{a+3b}=\sum \frac{a^4}{a(a+3b)}\geq \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a(a+3b)}=\frac{\left[2\left(p^2-r^2-4Rr\right)\right]^2}{2\left(p^2-r^2-4Rr\right)+3\left(p^2+r^2+4Rr\right)}\overset{(1)}{=}$$

$$=\frac{4\left[p^4-2p^2\left(r^2+4Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2\right]}{5p^2+r^2+4Rr}\overset{(2)}{\geq}\frac{9Rr}{2}=M_d$$, unde (1) rezultă din identitățile

cunoscute în triunghi $\sum a^2=2\left(p^2-r^2-4Rr\right)$ și $\sum ab=p^2+r^2+4Rr$,

iar (2) $\Leftrightarrow \dfrac{4\left[p^4-2p^2\left(r^2+4Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2\right]}{3p^2-r^2-4Rr}\geq 9Rr \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^2\left(8p^2-16r^2-109Rr\right)+r^2\left(92R^2+55Rr+8r^2\right)\geq 0$.

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $\left(8p^2-16r^2-109Rr\right)\geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $\left(8p^2-16r^2-109Rr\right)<0$, inegalitatea se rescrie:

$r^2\left(92R^2+55Rr+8r^2\right)\geq p^2\left(109Rr+16r^2-8p^2\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen:

$16Rr-5r^2\leq p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$r^2\left(92R^2+55Rr+8r^2\right)\geq\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left(109Rr+16r^2-8\left(16Rr-5r^2\right)\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 19R^3-14R^2r-28Rr^2-40r^3\geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)\left(19R^2+24Rr+20r^2\right)\geq 0$,

evident din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Să trecem la rezolvarea inegalității propuse.

Folosind **Lemele** de mai sus obținem:

$$M_s=\left(\sum\frac{a^3}{a+b}\right)\cdot\left(\sum\frac{a^3}{a+3b}\right)\geq 9Rr\cdot\frac{9Rr}{2}=\frac{81R^2r^2}{2}\overset{(M)}{\geq}6S^2=M_d,$$

unde (M) $\Leftrightarrow \dfrac{81R^2r^2}{2}\geq 6r^2p^2 \Leftrightarrow 27R^2\geq 4p^2$, evident din inegalitatea lui Mitrinović:

$p\leq \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Notă.

Inegalitatea poate fi întărită.

4) In ΔABC

$$\left(\sum \frac{a^3}{a+b}\right)\cdot\left(\sum \frac{a^3}{a+3b}\right) \geq \frac{81R^2r^2}{2} \geq 6S^2.$$

Soluție.
Vezi mai sus.
Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

5) In ΔABC

$$2\left(\sum \frac{a^3}{a+b}\right)\cdot\left(\sum \frac{a^3}{a+3b}\right) \geq (9Rr)^2.$$

Marin Chirciu

Soluție.
Vezi mai sus.
Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.
Problema se poate dezvolta.

6) In ΔABC

$$(n+1)\left(\sum \frac{a^3}{a+b}\right)\cdot\left(\sum \frac{a^3}{a+nb}\right) \geq 2(9Rr)^2 \text{ ,unde } n \geq \frac{2}{7}.$$

Marin Chirciu

Soluție.
Demonstrăm rezultatele ajutătoare:

Lema 1.
In ΔABC

$$\sum \frac{a^3}{a+b} \geq 9Rr.$$

Demonstrație:

Folosind inegalitatea lui Bergstrőm obținem:

$$\sum \frac{a^3}{a+b} = \sum \frac{a^4}{a(a+b)} \geq \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a(a+b)} = \frac{\left[2\left(p^2-r^2-4Rr\right)\right]^2}{2\left(p^2-r^2-4Rr\right)+p^2+r^2+4Rr} \overset{(1)}{=}$$

$$= \frac{4\left[p^4-2p^2\left(r^2+4Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2\right]}{3p^2-r^2-4Rr} \overset{(2)}{\geq} 9Rr = M_d$$, unde (1) rezultă din identitățile cunoscute în triunghi $\sum a^2 = 2\left(p^2-r^2-4Rr\right)$ și $\sum ab = p^2+r^2+4Rr$,

iar (2) $\Leftrightarrow \dfrac{4\left[p^4-2p^2\left(r^2+4Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2\right]}{3p^2-r^2-4Rr} \geq 9Rr \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^2\left(4p^2-8r^2-59Rr\right)+r^2\left(100R^2+41Rr+4r^2\right) \geq 0.$

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $\left(4p^2-8r^2-59Rr\right) \geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $\left(4p^2-8r^2-59Rr\right) < 0$, inegalitatea se rescrie:

$r^2\left(100R^2+41Rr+4r^2\right) \geq p^2\left(59Rr+8r^2-4p^2\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen:

$16Rr-5r^2 \leq p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2.$

Rămâne să arătăm că:

$r^2\left(100R^2+41Rr+4r^2\right)\geq\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left(59Rr+8r^2-4\left(16Rr-5r^2\right)\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5R^3+2R^2r-14Rr^2-20r^3\geq 0\Leftrightarrow\left(R-2r\right)\left(5R^2+12Rr+10r^2\right)\geq 0$,

evident din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Lema 2.

7) In ΔABC

$$\sum\frac{a^3}{a+nb}\geq\frac{18Rr}{n+1},\text{ unde } n\geq\frac{2}{7}.$$

Demonstrație:

Folosind inegalitatea lui Bergstrőm obținem:

$$\sum\frac{a^3}{a+nb}=\sum\frac{a^4}{a\left(a+nb\right)}\geq\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a\left(a+nb\right)}=\frac{\left[2\left(p^2-r^2-4Rr\right)\right]^2}{2\left(p^2-r^2-4Rr\right)+n\left(p^2+r^2+4Rr\right)}\overset{(1)}{=}$$

$$=\frac{4\left[p^4-2p^2\left(r^2+4Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2\right]}{\left(n+2\right)p^2+\left(n-2\right)r^2+\left(4n-8\right)Rr}\overset{(2)}{\geq}\frac{18Rr}{n+1}=M_d$$, unde (1) rezultă din identitățile

cunoscute în triunghi $\sum a^2=2\left(p^2-r^2-4Rr\right)$ și $\sum ab=p^2+r^2+4Rr$,

iar (2) $\Leftrightarrow\dfrac{4\left[p^4-2p^2\left(r^2+4Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2\right]}{\left(n+2\right)p^2+\left(n-2\right)r^2+\left(4n-8\right)Rr}\geq\dfrac{18Rr}{n+1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$p^2\left[\left(2n+2\right)p^2-\left(4n+4\right)r^2-\left(25n+34\right)Rr\right]+r^2\left[\left(104-4n\right)R^2+\left(7n+34\right)Rr+\left(2n+2\right)r^2\right]\geq 0$

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $\left[\left(2n+2\right)p^2-\left(4n+4\right)r^2-\left(7n+34\right)Rr\right]\geq 0$,

folosim inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)\left[\left(2n+2\right)p^2-\left(4n+4\right)r^2-\left(25n+34\right)Rr\right]+$

$+r^2\left[\left(104-4n\right)R^2+\left(7n+34\right)Rr+\left(2n+2\right)r^2\right]\geq 0\Leftrightarrow$

$\left(27n+18\right)R^2-\left(49n+45\right)Rr+\left(18n+18\right)r^2\geq 0$, adevărată din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$, inegalitatea fiind strictă.

Cazul 2). Dacă $\left[\left(2n+2\right)p^2-\left(4n+4\right)r^2-\left(7n+34\right)Rr\right]<0$, inegalitatea se rescrie:

$r^2\left[\left(104-4n\right)R^2+\left(7n+34\right)Rr+\left(2n+2\right)r^2\right]\geq p^2\left[\left(7n+34\right)Rr+\left(4n+4\right)r^2-\left(2n+2\right)p^2\right]$,

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen: $16Rr-5r^2\leq p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$r^2\left[\left(104-4n\right)R^2+\left(7n+34\right)Rr+8\left(2n+2\right)r^2\right]\geq$

$\geq\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left[\left(25n+34\right)Rr+\left(4n+4\right)r^2-\left(2n+2\right)\left(16Rr-5r^2\right)\right]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(7n-2\right)R^3+\left(10-8n\right)R^2r-\left(7n+7\right)Rr^2-\left(10n+10\right)r^3\geq 0\Leftrightarrow$

$\left(R-2r\right)\left[\left(7n-2\right)R^2+\left(6n+6\right)Rr+\left(5n+5\right)r^2\right]\geq 0$,

evident din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$ și condiția din ipoteză $n\geq\dfrac{2}{7}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Să trecem la rezolvarea inegalității propuse.

Folosind **Lemele** de mai sus obținem: $\left(\sum \frac{a^3}{a+b}\right)\cdot\left(\sum \frac{a^3}{a+nb}\right) \geq 9Rr\cdot\frac{18Rr}{n+1} = \frac{162R^2r^2}{n+1}$,

de unde $(n+1)\left(\sum \frac{a^3}{a+b}\right)\cdot\left(\sum \frac{a^3}{a+nb}\right) \geq 2(9Rr)^2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

8) In ΔABC

$$(n+1)\left(\sum \frac{a^3}{a+b}\right)\cdot\left(\sum \frac{a^3}{a+nb}\right) \geq 24S^2 \text{ ,unde } n \geq \frac{2}{7}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Se folosește inegalitatea $(n+1)\left(\sum \frac{a^3}{a+b}\right)\cdot\left(\sum \frac{a^3}{a+nb}\right) \geq 2(9Rr)^2$ și $9Rr \geq 2S\sqrt{3}$, adevărată

din $S = rp$ și inegalitatea lui Mitrinović: $p \leq \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

Cea mai bună inegalitate de forma de mai sus se obține pentru $n = \frac{2}{7}$.

9) In ΔABC

$$3\left(\sum \frac{a^3}{a+b}\right)\cdot\left(\sum \frac{a^3}{7a+2b}\right) \geq 8S^2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Punem $n = \frac{2}{7}$ în inegalitatea $(n+1)\left(\sum \frac{a^3}{a+b}\right)\cdot\left(\sum \frac{a^3}{a+nb}\right) \geq 24S^2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

4. Problema L:724 Sclipirea Minții-24

Art 1075

Marin Chirciu[3]

L:724.

1) Dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi cu semiperimetrul p, atunci

$$(2a-p)(2b-p)(2c-p)\le(p-a)(p-b)(p-c).$$

D. M. Bătinețu-Giurgiu, București și Neculai Stanciu, Buzău

Soluție.

Demonstrăm rezultatele ajutătoare:

Lema 1.

In ΔABC

$$(2a-p)(2b-p)(2c-p)=p\left(16Rr-4r^2-p^2\right).$$

Demonstrație:

Avem $(2a-p)(2b-p)(2c-p)=8abc-4p\sum bc+2p^2\sum a-p^3=$

$=8\cdot 4Rrp-4p\left(p^2+r^2+4Rr\right)+2p^2\cdot 2p-p^3=16Rrp-4r^2p-p^3=p\left(16Rr-4r^2-p^2\right).$

Lema 2.

In ΔABC

$$(p-a)(p-b)(p-c)=r^2p.$$

Demonstrație:

Avem $(p-a)(p-b)(p-c)=p^3-p^2\sum a+p\sum bc-abc=$

$=p^3-p^2\cdot 2p+p\left(p^2+r^2+4Rr\right)-4Rrp=r^2p.$

Să trecem la rezolvarea inegalității propuse.

Folosind **Lemele** de mai sus inegalitatea se scrie:

$p\left(16Rr-4r^2-p^2\right)\le r^2p \Leftrightarrow p^2\ge 16Rr-5r^2$, (inegalitatea lui Gerretsen).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2) Dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi cu semiperimetrul p și $n,k\ge 1$ astfel încât $(n-1)(2n-1)^2\ge(k-1)(k-2)^2$ și $(3n-2)^3-16(n-1)\ge(2k-3)^3$, atunci

$$(ka-p)(kb-p)(kc-p)\le(np-a)(np-b)(np-c).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Demonstrăm rezultatele ajutătoare:

Lema 1.

In ΔABC

$$(ka-p)(kb-p)(kc-p)=4k^2(k-1)Rrp-k^2r^2p-(k-1)^2p^3.$$

Demonstrație:

[3] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești*

Avem $(ka-p)(kb-p)(kc-p)=k^3abc-k^2p\sum bc+kp^2\sum a-p^3=$

$=k^3\cdot 4Rrp-k^2p\left(p^2+r^2+4Rr\right)+kp^2\cdot 2p-p^3=4k^2(k-1)Rrp-k^2r^2p-(k-1)^2p^3$.

Lema 2.

In ΔABC

$$(np-a)(np-b)(np-c)=n(n-1)^2p^3+pr\left[4(n-1)R+nr\right].$$

Demonstrație:

Avem $(p-a)(p-b)(p-c)=n^3p^3-n^2p^2\sum a+np\sum bc-abc=$

$=n^3p^3-n^2p^2\cdot 2p+np\left(p^2+r^2+4Rr\right)-4Rrp=n(n-1)^2p^3+pr\left[4(n-1)R+nr\right]$.

Să trecem la rezolvarea inegalității propuse.

Folosind **Lemele** de mai sus inegalitatea se scrie:

$4k^2(k-1)Rrp-k^2r^2p-(k-1)^2p^3\le n(n-1)^2p^3+pr\left[4(n-1)R+nr\right]\Leftrightarrow$

$p^2\left[n(n-1)^2+(k-1)^2\right]\ge 4Rr\left(k^3-k^2-n+1\right)-r^2\left(k^2+n\right)$,care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\ge 16Rr-5r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)\left[n(n-1)^2+(k-1)^2\right]\ge 4Rr\left(k^2(k-1)-(n-1)\right)-r^2\left(k^2+n\right)\Leftrightarrow$

$(16R-5r)\left[n(n-1)^2+(k-1)^2\right]\ge 4R\left(k^3-k^2-n+1\right)-r\left(k^2+n\right)\Leftrightarrow$

$4R\left(4n^3-8n^2+4n+4k^2-8k+4-k^3+k^2-n+1\right)\ge r\left(5n^3-10n^2+5n+5k^2-10k+5-k^2-n\right)$

$\Leftrightarrow 4R\left(4n^3-8n^2+3n+5k^2-8k+5-k^3\right)\ge r\left(5n^3-10n^2+4n+4k^2-10k+5\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4R\left[(n-1)(2n-1)^2-(k-1)(k-2)^2\right]\ge r\left[5n(n-1)^2+5(k-1)^2-\left(k^2+n\right)\right]$, care resultă din inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$ și condițiile din ipoteză.

Rămâne să arătăm că:

$8\left[(n-1)(2n-1)^2-(k-1)(k-2)^2\right]\ge r\left[5n(n-1)^2+5(k-1)^2-\left(k^2+n\right)\right]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8R\left(4n^3-8n^2+3n+5k^2-8k+5-k^3\right)\ge r\left(5n^3-10n^2+4n+4k^2-10k+5\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 27n^3-54n^2+20n+35\ge 8k^3-36k^2+54k\Leftrightarrow (3n-2)^3-16n+43\ge (2k-3)^3+27\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3n-2)^3-16n+16\ge (2k-3)^3\Leftrightarrow (3n-2)^3-16(n-1)\ge (2k-3)^3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Notă.

Pentru $n=1$ și $k=2$ se obține Problema L:724 din Sclipirea Minții Nr. 24, 2019, propusă de D. M. Bătinețu-Giurgiu, București și Neculai Stanciu, Buzău.

January 28, 2020

5. Other solutions for certain problems from School Science and Mathematics

By Nela Ciceu, Roşiori, Bacău
and
Roxana Mihaela Stanciu, Buzău

• **5391:** *Proposed by Kenneth Korbin, New York, NY*

A triangle with integer length sides $(49, b, b+1)$ has integer area. Find two possible values of b.

Solution:
We denote by s, the perimeter of triangle. We have

$$s = \frac{49+b+(b+1)}{2} = \frac{50+2b}{2} = 25+b.$$

We denote by F the area of triangle. By Heron's formula we have

$$F = \sqrt{s(s-49)(s-b)(s-(b+1))} = \sqrt{(25+b)\cdot 25\cdot 24\cdot (b-24)} = \sqrt{5^2\cdot 4^2\cdot 6(b+25)(b-24)}.$$

So, by above a triangle with integer lengths sides $(49, b, b+1)$ has integer area if

$$6(b+25)(b-24) \text{ is perfect square.}$$

For b, we obtain with a computer the following values

$$b \in \{122, 1200, 11882, 117624\}.$$

5394: *Proposed by Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain*

Let a, b and c be positive real numbers such that $ab+bc+ca=3$ and $n>1$. Prove that

$$\sqrt[n]{a+\frac{1}{abc}} + \sqrt[n]{b+\frac{1}{abc}} + \sqrt[n]{c+\frac{1}{abc}} \geq 3\sqrt[n]{2}.$$

Solution: By AM-GM inequality we have

$$\sqrt[2n]{bc} = \sqrt[2n]{1\cdot 1\cdot 1\cdot \ldots \cdot (bc)} \leq \frac{2n-1+bc}{2n},$$

and other two analogously.
Hence, by AM-GM inequality and Bergström's inequality we obtain

$$\sqrt[n]{a+\frac{1}{abc}} + \sqrt[n]{b+\frac{1}{abc}} + \sqrt[n]{c+\frac{1}{abc}} \geq \sqrt[n]{2}\left(\frac{1}{\sqrt[2n]{bc}} + \frac{1}{\sqrt[2n]{ca}} + \frac{1}{\sqrt[2n]{ab}}\right) \overset{Bergstrom}{\geq}$$

$$\overset{Bergstrom}{\geq} \sqrt[n]{2}\cdot\frac{9}{\sqrt[2n]{ab}+\sqrt[2n]{bc}+\sqrt[2n]{ca}} \geq \sqrt[n]{2}\cdot\frac{9}{\frac{2n-1+ab+2n-1+bc+2n-1+ca}{2n}} = \sqrt[n]{2}\cdot\frac{18n}{6n} = 3\sqrt[n]{2}$$

,
and we are done.

- **5379:** *Proposed by Kenneth Korbin, New York, NY*

Solve:

$$\frac{(x+1)^4}{(x-1)^2} = 17x.$$

Solution:
Since $x \neq 0$, we can write

$$\frac{(x+1)^4}{(x-1)^2} = 17x \Leftrightarrow x^4 - 13x^3 + 40x^2 - 13x + 1 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 13\left(x + \frac{1}{x}\right) + 40 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 13\left(x + \frac{1}{x}\right) + 38 = 0.$$

Hence

$$x + \frac{1}{x} = \frac{13 \pm \sqrt{17}}{2},$$

which yields that

$$2x^2 - (13+\sqrt{17})x + 2 = 0, \text{ or } 2x^2 - (13-\sqrt{17})x + 2 = 0.$$

Therefore,

$$x_{1,2} = \frac{13+\sqrt{17} \pm \sqrt{(17+\sqrt{17})(9+\sqrt{17})}}{4},$$

$$x_{3,4} = \frac{13-\sqrt{17} \pm \sqrt{(17-\sqrt{17})(9-\sqrt{17})}}{4}.$$

- **5373:** *Proposed by Kenneth Korbin, New York, NY*

Given the equation $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{343-147\sqrt{5}} - \sqrt{315-135\sqrt{5}}} = \sqrt{x + y\sqrt{5}}.$

Find positive integers x and y.

Solution:
We have

$$\sqrt{343-147\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{441}{2}}-\sqrt{\frac{245}{2}}=\frac{21\sqrt{2}}{2}-\frac{7\sqrt{10}}{2},\ \sqrt{315-135\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{405}{2}}-\sqrt{\frac{225}{2}}=\frac{9\sqrt{10}}{2}-\frac{15\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{343-147\sqrt{5}}-\sqrt{315-135\sqrt{5}}=\frac{21\sqrt{2}}{2}-\frac{7\sqrt{10}}{2}-\frac{9\sqrt{10}}{2}+\frac{15\sqrt{2}}{2}=18\sqrt{2}-8\sqrt{10},$$

and then

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{343-147\sqrt{5}}-\sqrt{315-135\sqrt{5}}}=\frac{1}{9-4\sqrt{5}}=9+4\sqrt{5}.$$

Hence

$$x=161,\ y=72.$$

6. URMAŞII LUI BACH
Concertul No.1

Prof. Stan Ilie[4]

Aşa(-n)dar...2(trei) Bachuşi,
Unul din Huşi, unul din Buhuşi,
Şi altul de pe la Ruşi,
De teama unor "inimoşi" viruşi,
Se ascunseră în spatele unor uşi.
Nu de biserică. Dar asta pricepuşi!

În faţă aveau câte un (mereu gol) pahar,
Iar la povestit (mereu mult) har!
Începu Bachusul#1(cel cu faţa de tâlhar):
(N-a făcut vreo crimă, dar n-am găsit eu altă rimă!)

- „Într-o zi, un prieten m-a invitat,
La...bibliotecă(!). La masă m-a aşezat,
Unui litru de...lichid m-a prezentat,
Cu instrucţiunile de urmat:
<<Acuma, să îl împărţim frăţeşte: juma-juma!>>

Eu jumătatea mi-am…lichidat, Şi m-am pus pe aşteptat!
Când prietenul a revenit, Jumătate din ce a găsit a sorbit,
Şi să continuăm tot aşa ... m-a poftit! Până la (ne)sfârşit!!"

Intuiţia acum vă invit să v-o testaţi! Nu trişaţi!
În maxim 10 secunde un răspuns rapid să daţi:
Cât ar fi trebuit să plătească fiecare?
E timp destul, pe urmă, pentru cercetare!

Într-ale ... matematicii surori şi fraţi,
Vă rog frumos, apoi, să generalizaţi!

[4] Liceul Tehnologic "Anghel Saligny", Roşiorii de Vede, Teleorman, stan_ilie@yahoo.com

Soluţia #1 (pentru prietenii nematematicieni):

- la prima sorbire primul a băut jumătate, iar al doilea un sfert.
- altfel zis: primul-două sferturi, iar al doilea-un sfert
- proportia se pastrează în continuare: primul două părţi, iar al doilea o parte
- in final: din cele 3 părţi, două sunt la primul...iar una la al doilea!
- răspuns final: 2/3 vs 1/3

Soluţia #2 (pentru cei îndrăgostiţi de suma termenilor unei progresii geometrice şi de limite):

Fie $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ şirul cantităţilor consumate de primul

$b_1=\frac{1}{2}$, $b_2=\frac{1}{4}b_1$, $b_3=\frac{1}{4}b_2$,...

$b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} b_1 \cdot \frac{1}{4} b_2 \cdot \ldots \cdot \frac{1}{4} b_{n-1} \Rightarrow b_n = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{4})^{n-1} \Rightarrow b_n = 2 \cdot 4^{-n}$

Fie $S_{1,n}$ cantitatea totală consumată de primul ... consumator după n ture

$$S_{1,n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1}$$ care la limită tinde către $\frac{2}{3}$

Soluţia #3 (cea mai scurtă):

$S_1=1/2+1/8+1/32+...=(2+1/2+1/8+1/32+...)/4=(2+S_1)/4 \Rightarrow 4S_1=2+S_1 \Rightarrow S_1=2/3$

Soluţia #4 (probabil cea mai frumoasă):

Fie S_1 şi S_2 cantităţile corespunzătoare celor doi

$$S_1+S_2 = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \ldots =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \ldots\right) = S_1 + \frac{1}{2} S_1 = \frac{3}{2} S_1$$

$\Rightarrow S_1 = \frac{2}{3}$ şi $S_2 = \frac{1}{3}$