REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

MARTIE 2021

ISSN 2065-6432

www.mateinfo.ro

REVISTĂ DIN FEBRUARIE 2009

revista.mateinfo@yahoo.com

COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ŞI SUSŢINĂTOR PERMANENŢI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ŞI NELA CICEU

ARTICOLE REVISTĂ:

1. **Matematica este incompletă. Matematica este inconsistentă. Matematica este indecidabilă … pag. 2**

Neculai Stanciu

2. **Mathematical Olympiads Decembrie 2020… pag.5**

Marin Chirciu

3. **Sclipirea Minții Nr.26/2020 Q64… pag.17**

Marin Chirciu

4. **Sclipirea Minții Nr.26/2020 Q66… pag.18**

Marin Chirciu

5. **Învăţarea centrata pe elev în cadrul orelor de matematică… pag.19**

Borcoman Ana

6. **Studiu de specialitate: determinarea probabilităţii unui eveniment cu ajutorul schemelor clasice de probabilitate … pag. 39**

Iuliana Trașcă

7. **Studiu de specialitate: caracteristici de dispersie … pag. 45**

Iuliana Trașcă

1. Matematica este incompletă. Matematica este inconsistentă. Matematica este indecidabilă.

Neculai Stanciu, Buzău

În 1999, revista Times a nominalizat personajele cele mai importante din secolul XX. „Omul secolului'' – *Albert Einstein*, „Matematicianul secolului'' – *Kurt Gödel*, „Informaticianul secolului'' – *Alan Turing*, „Filosoful secolului'' – *Ludwig Wittgenstein*, iar „Sportivul secolului'' – *Muhammad Ali*.

Primul care a organizat sistematic rezultatele obţinute de marii geometri ai Antichităţii, a fost *Hipocrate* din Chios, pe la 450 î.e.n. Opera sa, se crede că ar fi fost o versiune preliminară a primelor patru cărţi ale *Elementelor* lui *Euclid*, apărute pe la 300 î.e.n.

Raţionamentul matematicienilor greci pleca de la un număr mic de *concepte primitive* nedefinite şi de la un mic număr de *propoziţii primitive nedemonstrate*, numite *postulate*, iar cu acestea se demonstrau propoziţii din ce în ce mai complexe. În lucrarea lui *Euclid* existau 23 de definiţii[1], 5 postulate[2] şi 465 de teoreme. Timp de două mii de ani, opera lui *Euclid* a fos un punct de referinţă în matematică, dar cu trecerea anilor au ieşit la iveală şi puncte slabe. Era deci necesară rescrierea Elementelor.

Cel care s-a ridicat la înălţimea lui *Euclid* a fost *David Hilbert*, care a publicat în 1899, *Fundamentele geometriei* - o capodoperă modernă. Construcţia fundamentelor se baza pe 6 *concepte primitive*[3] şi pe 21 de *axiome*. Unele dintre axiomele lui *Hilbert* sunt rescrieri ale postulatelor lui *Euclid*. De exemplu, *Hilbert* ia ca axiomă cazul L.U.L de congruenţă a două tiunghiuri, care, în Elemente apare demonstrat prin suprapunerea celor două triunghiuri. Alte axiome sunt noi, de exemplu cea de continuitate[4], în lipsa căreia nu se poate demonstra că două drepte perpendiculare se intersectează într-un punct. Fundamentele geometriei lui *Hilbert* nu au adus o schimbare de fond, ci numai una de formă[5]. Schimbarea oferită de *Hilbert* a fost însă examinarea sistemului de axiome. El a demonstrat că cele 21 de axiome erau independente[6], complete[7] şi decidabile[8]. *Hilbert* dorea fundamentarea matematicii cu un sistem care satisfice trei cerinţe de bază: *consistenţă, completitudine* şi *decidabilitate*. *Consistenţa* înseamnă că nu se vor găsi în sistem contradicţii. *Completitudinea* înseamnă că, dacă un enunţ e adevărat, atunci trebuie să existe şi un mod de a-l demonstra urmând regulile sistemului. *Decidabilitatea* înseamnă că există o metodă care, aplicată oricărui enunţ matematic ne permite să decidem dacă enunţul e demonstrabil sau nu. Pentru a demonstra independenţa axiomei paralelelor, a fost necesară producerea unui model de geometrie în care sunt satisfăcute toate axiomele cu excepţia axiomei paralelelor. Prin introducerea axiomei de continuitate, *Hilbert* a dedus că propriile axiome erau complete şi în plus categorice (admit un model unic), adică nu putea exista nicio propoziţie geometrică nedecisă de axiome.

---

[1] De exemplu Euclid încerca să definească şi termeni precum punct (ceea ce nu are părţi), dreaptă (lungime lipsită de lăţime) şi plan (lungime şi lăţime fără înălţime).
[2] Primul postulat: Prin două puncte trece o dreaptă şi numai una; Al cincilea postulat: Printr-un punct exterior unei drepte trece o paralelă la acea dreaptă şi numai una.
[3] „Punctul'', „dreapta'', „planul'', „a fi între'', „a fi pe'', „a fi congruent cu''.
[4] Afirmă că dreptele nu au găuri.
[5] Fundamentele geometriei nu au invalidat nicio teoremă din Elemente, ci s-au mărginit să dea demonstraţii mai precise şi mai complete, bazate pe concept primitive noi şi pe axiome noi.
[6] Nicio axiomă nu putea fi demonstrată folosindu-le pe celelalte.
[7] Axiomele sistemului sunt suficiente.
[8] Toate axiomele laolaltă puteau decide orice propoziţie geometrică.

În 1900, la Congresul Internaţional de Matematică de la Paris, *Hilbert* a făcut o listă cu 23 de probleme deschise pe care le considera cele mai semnificative şi stimulatoare pentru matematică.

În 1928, la Congresul Internaţional de Matematică de la Bologna din 3-10 septembrie, *Hilbert* a propus o listă de patru probleme[9]: demonstrarea consistenţei analizei şi măcar a unei părţi din teoria mulţimilor, completitudinea analizei[10] şi completitudinea logicii. *Hilbert* spera să ajungă la completitudinea analizei pe aceeaşi cale pe care o urmase pentru geometrie: demonstrând că sistemul de axiome al numerelor este categoric, în sensul că admite ca unic model pe acela al numerelor reale. După cum vom vedea primele trei probleme au primit o soluţie negativă şi doar a patra a primit o soluţie pozitivă. *Problema completitudinii logicii* a fost pusă din nou într-o carte – *Principiile logicii matematice* - publicată de *Hilbert* împreună cu un fost student al său *Wilhelm Ackermann* în 1928. În această carte, *Hilbert* enunţa şi *problema deciziei*, care nu figura între cele patru propuse în conferinţa de la Bologna.

Regulile generice care trebuiesc respectate de un sistem formal au fost cercetate pentru prima dată de *Aristotel*[11] (350 î.e.n) în seria sa de şase cărţi care au primit titlul colectiv *Organon* (*Instrumentul*). În jurul anului 250 î.e.n. *Crisippus* şi şcoala stoică nu s-au concentrat pe cuantificatorii care guvernează relaţiile dintre predicate[12] , ci pe conectorii care leagă între ele propoziţiile[13]; au descoperit astfel regulile logice care determină adevărul sau falsitatea, anticipând abordarea semantică a logicii propoziţionale dată de *Wittgenstein* în *Tractatus* cu două mii de ani mai târziu. Abordarea sintactică a fost dată de *Frege*[14] în *Ideografie*[15] (1879). Calculul propoziţional a fost rezolvat de către *Whitehead* şi *Russell*[16] în *Principia Mathematica* (1910).

În 1929, *Kurt Gödel* demonstrează *completitudinea logicii* în teza sa de doctorat - *Asupra completitudinii calculului logicii*, aprobată de *Hahn* şi de *Furtwängler* în 6 iulie 1929. În 1930, *Kurt Gödel* publică articolul *Completitudinea axiomelor calculului functional al logicii* – titlu care anunţa limpede soluţia pozitivă a *problemei completitudinii logicii*. Odată încheiată teza, în vara lui 1929, *Gödel* s-a decis să atace pe cea mai grea dintre cele patru probleme puse de *Hilbert* şi *Ackermann* în 1928 şi anume celebra *„problema a doua a lui Hilbert''*, enunţată încă de la Paris, în 1900.

Gödel, în 1930, în 7 septembrie, la Congresul de Epistemologia Ştiinţelor Exacte de la Königsberg, a făcut anunţul despre *demonstrarea incompletitudinii matematicii*. Apoi, în 23 octombrie 1930, la Academia de Ştiinţe din Viena este anunţată şi rezolvarea *consistenţei matematicii*. *Prima teoremă de incmpletitudine* era despre existenţa propoziţiilor indecidabile din sistemele formale. Aşadar, logiciştilor de tip *Frege* şi *Russell*, care-i provocau pe cei ce nu admiteau egalitatea dintre logică şi matematică să indice punctul unde se termină logica şi începe matematica, rezultatele lui *Kurt Gödel* le-au indicat exact acest punct: *logica se termină cu teoria predicatelor, care e completă, iar matematica începe cu aritmetica, care e incompletă*. *A doua teoremă de incompletitudine – imposibilitatea demonstrării consistenţei* – spune că: *un sistem consistent nu-şi poate demonstra propria consistenţă.* Deci, cele patru

[9] Două din cele patru probleme erau şi în lista celor 23 de probleme prezentate în 1900.
[10] Enunţată şi la Congresul de la Paris.
[11] Aristotel a reuşit să clasifice cele 24 de tipuri corecte de silogism, din cele 256 de posibilităţi.
[12] „toţi'', „unul dintre'', „nici unul''
[13] „nu'', „şi'', „sau'', „deci''.
[14] Frege e considerat părintele logicii moderne.
[15] Aici apare primul sistem formal pentru logica predicatelor.
[16] Au construit logica şi matematica pornind de la axiome şi deducând din ele teoremele logicii şi ale matematicii.

probleme propuse de *Hilbert* în 1928 la Bologna au fost rezolvate de *Kurt Gödel*. După *Von Neumann*, rezultatele lui *Gödel* exprimau sfârşitul programului lui *Hilbert*[17].

Mai rămânea de demonstrat problema *decidabilităţii logicii*. Soluţia a fost dată de *Alan Turing* şi *Alonzo Church* în 1936[18].

Teoremă. *Nici un sistem matematic nu poate fi în acelaşi timp consistent şi complet.*

Demonstraţie. *Kurt Gödel* a folosit următoarea

Teoremă[19]: *„Acest enunţ nu poate fi demonstrat''.*

Dacă enunţul poate fi demonstrat, atunci este fals – contradicţie ! Deci *sistemul este inconsistent* !

Dacă enunţul nu poate fi demonstrat, atunci este adevărat, dar - nu poate fi demonstrat, Deci *sistemul este incomplet* !

Matematica e ori inconsistentă, ori incompletă, Q.E.D.

La data de 17 iunie 1952, Universitatea Harvard acordă o Diplomă Ad Honorem lui *Kurt Gödel*, care a descoperit cel mai semnificativ adevăr matematic al secolului: de neînţeles pentru profan[20], revoluţionar pentru filosof[21] şi logician[22]. În 22 iulie 1952, într-o scrisoare pentru mama sa, *Gödel* îi explica că această diplomă este o „minunată motivaţie'', dar nu trebuie să tragă concluzia că el ar fi „matematicianul secolului''.

Bibliografie

1. **P. Odifreddi** - *Dumnezeul logicii. Viaţa genială a lui Kurt Gödel, matematicianul filosofiei,* Editura Polirom, 2020.

[17] Hilbert s-a împăcat cu teoremele de incompletitudine pe care le-a tratat minuţios împreună cu Bernays în „Grundlagen der Mathematik'' (1934, 1939).

[18] Calea de urmat a fost indicată cu mult înainte (1920) de Emil Post

[19] „Această teoremă este cu adevărat o teoremă tare, tare frumoasă. Cred că această teoremă a lui Gödel este cea mai frumoasă dintre toate cele pe care le ştiu'' Alan Turing

[20] Mari experţi în matematică au avut dificultăţi cu înţelegerea teoremelor lui Gödel. Argumentele diletanţilor incompetenţi adresate unei mase de alţi diletanţi la fel de incompetenţi au atras şi atenţia mass-media.

[21] Filosoful John Lucas în articolul „Minds, Machines and Gödel'' (1959) şi în cartea „The Freedom of the Will'' (1970) promovează ideea că noi suntem capabili să recunoaştem, pentru orice system formal consistent, o propoziţie adevărată pe care sistemul nu o poate recunoaşte ca atare. Adică, mintea umană e superioară oricărui system formal, ea însăşi nefiind formalizabilă. Hilary Putnam în „Minds and Machines'' (1960), a demonstrat că argumentul lui Lucas conţine o eroare grosolană. Comentariile cele mai jenante referitoare la teoremele lui Gödel au fost făcute de filosoful secolului Wittgenstein.

[22] Bertrand Russell s-a pronunţat puţin şi confuz în legătură cu teoremele de incompletidudine vorbind despre ele ca despre nişte „paradoxuri''.

2. Mathematical Olympiads Decembrie 2020

Art 1933

Marin Chirciu[23]

Articolul dezvoltă inegalități în triunghi în legătură cu centrul cercului înscris I - incenter ΔABC, având ca problemă de pornire o inegalitate din Mathematical Olympiads, 12/2020. Se stabilesc relații între F_a, F_b, F_c ariile $\Delta IBC, \Delta ICA, \Delta IAB$.

1) Let F_a, F_b, F_c ariile $\Delta IBC, \Delta ICA, \Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{1}{F_a^2}+\frac{1}{F_b^2}+\frac{1}{F_c^2}\geq\frac{16}{R^4}.$$

Elton P, Mathematical Olympiads, 12/2020

Soluție.

Demonstrăm

Lema.

2) Let F_a, F_b, F_c ariile $\Delta IBC, \Delta ICA, \Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{1}{F_a^2}+\frac{1}{F_b^2}+\frac{1}{F_c^2}=\frac{4}{r^2}\sum\frac{1}{a^2}.$$

Folosind $F_a = A\quad [IBC]=\frac{a\cdot r}{2}$ obținem:

$$\sum\frac{1}{F_a^2}=\sum\frac{1}{\left(\frac{a\cdot r}{2}\right)^2}=\sum\frac{4}{r^2a^2}=\frac{4}{r^2}\sum\frac{1}{a^2}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$E=\sum\frac{1}{F_a^2}=\frac{4}{r^2}\sum\frac{1}{a^2}\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{4}{r^2}\frac{\left(\sum 1\right)^2}{\sum a^2}\overset{Leibniz}{\geq}\frac{4}{r^2}\cdot\frac{9}{9R^2}=\frac{4}{R^2r^2}\overset{Euler}{\geq}\frac{16}{R^4}=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

Să determinăm o inegalitate de sens contrar.

3) Let F_a, F_b, F_c ariile $\Delta IBC, \Delta ICA, \Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{1}{F_a^2}+\frac{1}{F_b^2}+\frac{1}{F_c^2}\leq\frac{1}{r^4}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind **Lema** obținem:

$$E=\sum\frac{1}{F_a^2}=\frac{4}{r^2}\sum\frac{1}{a^2}\overset{(1)}{\leq}\frac{4}{r^2}\cdot\frac{1}{4r^2}=\frac{1}{r^4}=Ms,$$

unde $(1)\Leftrightarrow\sum\frac{1}{a^2}\leq\frac{1}{4r^2}$,(vezi substituțiile lui Ravi).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

[23] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești*

Remarca.
Se poate scrie dubla inegalitate:

4) Let F_a, F_b, F_c ariile $\Delta IBC, \Delta ICA, \Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{4}{R^2r^2} \le \frac{1}{F_a^2} + \frac{1}{F_b^2} + \frac{1}{F_c^2} \le \frac{1}{r^4}.$$

Marin Chirciu

Soluție.
Demonstrăm
Lema.

5) Let F_a, F_b, F_c ariile $\Delta IBC, \Delta ICA, \Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{1}{F_a^2} + \frac{1}{F_b^2} + \frac{1}{F_c^2} = \frac{4}{r^2}\sum\frac{1}{a^2}.$$

Folosind $F_a = A\quad [IBC] = \frac{a\cdot r}{2}$ obținem:

$$\sum\frac{1}{F_a^2} = \sum\frac{1}{\left(\frac{a\cdot r}{2}\right)^2} = \sum\frac{4}{r^2a^2} = \frac{4}{r^2}\sum\frac{1}{a^2}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.
Inegalitatea din dreapta.
Folosind **Lema** obținem:

$$E = \sum\frac{1}{F_a^2} = \frac{4}{r^2}\sum\frac{1}{a^2} \overset{(1)}{\le} \frac{4}{r^2}\cdot\frac{1}{4r^2} = \frac{1}{r^4} = Ms,$$

unde $(1) \Leftrightarrow \sum\frac{1}{a^2} \le \frac{1}{4r^2}$,(Leuenberger),vezi substituțiile lui Ravi.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.
Inegalitatea din stânga.
Folosind **Lema** obținem:

$$E = \sum\frac{1}{F_a^2} = \frac{4}{r^2}\sum\frac{1}{a^2} \overset{Bergstrom}{\ge} \frac{4}{r^2}\frac{\left(\sum 1\right)^2}{\sum a^2} \overset{Leibniz}{\ge} \frac{4}{r^2}\cdot\frac{9}{9R^2} = \frac{4}{R^2r^2} = Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.
Remarca.
În aceeași clasă de probleme.

6) Let F_a, F_b, F_c ariile $\Delta IBC, \Delta ICA, \Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{3}{F}\cdot\frac{1}{r^4} \le \frac{1}{F_a^3} + \frac{1}{F_b^3} + \frac{1}{F_c^3} \le \frac{3}{F}\left(\frac{R}{2r^3}\right)^2.$$

Marin Chirciu

Soluție.
Demonstrăm
Lema.

7) Let F_a, F_b, F_c ariile $\Delta IBC, \Delta ICA, \Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{1}{F_a^3} + \frac{1}{F_b^3} + \frac{1}{F_c^3} = \frac{8}{r^3}\sum\frac{1}{a^3}.$$

Folosind $F_a = A\quad [IBC] = \frac{a\cdot r}{2}$ obținem:

$$\sum\frac{1}{F_a^3}=\sum\frac{1}{\left(\frac{a\cdot r}{2}\right)^3}=\sum\frac{8}{r^3a^3}=\frac{8}{r^3}\sum\frac{1}{a^3}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Inegalitatea din dreapta.

Folosind **Lema** obținem:

$$E=\frac{8}{r^3}\sum\frac{1}{a^3}\overset{(1)}{\le}\frac{8}{r^3}\cdot\frac{3}{2p}\left(\frac{R}{4r^2}\right)^2=\frac{3}{F}\left(\frac{R}{2r^3}\right)^2=Md,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\sum\frac{1}{a^3}\le\frac{3}{2p}\left(\frac{R}{4r^2}\right)^2$, care rezultă din:

$$\sum\frac{1}{a^3}=\frac{p^6+p^4\left(3r^2-12Rr\right)+3p^2r^4+r^3\left(4R+r\right)^3}{64R^3r^3p^3}\overset{Gerretsen}{\le}\frac{3}{2p}\left(\frac{R}{4r^2}\right)^2$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

Folosind **Lema** obținem:

$$E=\frac{8}{r^3}\sum\frac{1}{a^3}\overset{Bergstrom}{\ge}\frac{8}{r^3}\cdot\frac{\left(\sum 1\right)^2}{\sum a^3}=\frac{8}{r^3}\cdot\frac{9}{\sum a^3}\overset{(2)}{\ge}\frac{8}{r^3}\cdot\frac{9}{24pr^2}=\frac{3}{pr^5}=\frac{3}{F}\cdot\frac{1}{r^4}=Md,$$

unde (2) $\Leftrightarrow\sum a^3=2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\overset{Gerretsen}{\ge}2p\left(16Rr-5r^2-3r^2-6Rr\right)=$

$=4pr\left(5R-4r\right)\overset{Euler}{\ge}4pr\cdot 6r=24pr^2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

8) Let F_a,F_b,F_c ariile $\Delta IBC,\Delta ICA,\Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{9}{F}\le\frac{1}{F_a}+\frac{1}{F_b}+\frac{1}{F_c}\le\frac{2p}{3Rr^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Demonstrăm

Lema.

9) Let F_a,F_b,F_c ariile $\Delta IBC,\Delta ICA,\Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{1}{F_a}+\frac{1}{F_b}+\frac{1}{F_c}=\frac{2}{r}\sum\frac{1}{a}.$$

Folosind $F_a=A\quad[IBC]=\frac{a\cdot r}{2}$ obținem:

$$\sum\frac{1}{F_a}=\sum\frac{1}{\frac{a\cdot r}{2}}=\sum\frac{2}{ra}=\frac{2}{r}\sum\frac{1}{a}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Inegalitatea din dreapta.

Folosind **Lema** obținem:

$E=\frac{2}{r}\sum\frac{1}{a}\overset{(1)}{\le}\frac{2}{r}\cdot\frac{p}{3Rr}=\frac{2p}{3Rr^2}Md$, unde (1) $\Leftrightarrow\sum\frac{1}{a}\le\frac{p}{3Rr}$, care rezultă din:

$$\sum\frac{1}{a}=\frac{p^2+r^2+4Rr}{4Rrp}\overset{Gerretsev}{\leq}\frac{p}{3Rr}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

Folosind **Lema** obținem:

$$E=\frac{2}{r}\sum\frac{1}{a}\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{2}{r}\cdot\frac{\left(\sum 1\right)^2}{\sum a}=\frac{2}{r}\cdot\frac{9}{\sum a}=\frac{2}{r}\cdot\frac{9}{2p}=\frac{9}{pr}=\frac{9}{F}=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

10) Let F_a,F_b,F_c ariile $\Delta IBC,\Delta ICA,\Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{4}{R^2r^2}\leq\frac{1}{F_aF_b}+\frac{1}{F_bF_c}+\frac{1}{F_cF_a}\leq\frac{1}{r^4}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Demonstrăm

Lema.

Let F_a,F_b,F_c ariile $\Delta IBC,\Delta ICA,\Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{1}{F_aF_b}+\frac{1}{F_bF_c}+\frac{1}{F_cF_a}=\frac{2}{Rr^3}.$$

Folosind $F_a=A\quad[IBC]=\frac{a\cdot r}{2}$ obținem:

$$\sum\frac{1}{F_bF_c}=\sum\frac{1}{\frac{b\cdot r}{2}\cdot\frac{c\cdot r}{2}}=\sum\frac{4}{r^2bc}=\frac{4}{r^2}\sum\frac{1}{bc}=\frac{4}{r^2}\cdot\frac{1}{2Rr}=\frac{2}{Rr^3},\text{ adevărată din }\sum\frac{1}{bc}=\frac{1}{2Rr}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Inegalitatea din dreapta.

Folosind **Lema** obținem: $E=\frac{2}{Rr^3}\overset{Euler}{\leq}\frac{1}{r^4}=Md$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

Folosind **Lema** obținem: $E=\frac{2}{Rr^3}\overset{Euler}{\geq}\frac{4}{R^2r^2}=Ms$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

11) Let F_a,F_b,F_c ariile $\Delta IBC,\Delta ICA,\Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{R}\right)^8\leq\frac{1}{F_a^2F_b^2}+\frac{1}{F_b^2F_c^2}+\frac{1}{F_c^2F_a^2}\leq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{r}\right)^8.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Demonstrăm

Lema.

12) Let F_a,F_b,F_c ariile $\Delta IBC,\Delta ICA,\Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{1}{F_a^2F_b^2}+\frac{1}{F_b^2F_c^2}+\frac{1}{F_c^2F_a^2}=\frac{16}{r^4}\sum\frac{1}{b^2c^2}.$$

Folosind $F_a=A\quad[IBC]=\frac{a\cdot r}{2}$ obținem:

$$\sum\frac{1}{F_b^2F_c^2}=\sum\frac{1}{\frac{b^2\cdot r^2}{4}\cdot\frac{c^2\cdot r^2}{4}}=\sum\frac{16}{r^4b^2c^2}=\frac{16}{r^4}\sum\frac{1}{b^2c^2}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Inegalitatea din dreapta.

Folosind **Lema** obținem:

$$E=\frac{16}{r^4}\sum\frac{1}{b^2c^2}\overset{(1)}{\le}\frac{16}{r^4}\cdot\frac{9}{16p^2r^2}=\frac{9}{p^2r^6}\overset{Mitrinovic}{\le}\frac{9}{27r^2\cdot r^6}=\frac{1}{3r^8}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{r}\right)^8=Md,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\sum\frac{1}{b^2c^2}=\frac{\sum a^2}{a^2b^2c^2}\overset{Leibniz}{\le}\frac{9R^2}{(4Rrp)^2}=\frac{9}{16p^2r^2}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

Folosind **Lema** obținem: $E=\frac{16}{r^4}\sum\frac{1}{b^2c^2}\overset{(2)}{\ge}\frac{16}{r^4}\cdot\frac{1}{3R^4}\overset{Euler}{\ge}\frac{16}{\left(\frac{R}{2}\right)^4}\cdot\frac{1}{3R^4}=\frac{256}{3R^8}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{R}\right)^8=Ms$.

unde (2) $\Leftrightarrow\sum\frac{1}{b^2c^2}=\frac{\sum a^2}{a^2b^2c^2}\overset{Neuberg}{\ge}\frac{36r^2}{(4Rrp)^2}=\frac{36r^2}{16R^2r^2p^2}=\frac{9}{4R^2p^2}\overset{Mitrinovic}{\ge}\frac{9}{4R^2\cdot\frac{27R^2}{4}}=\frac{1}{3R^4}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

13) Let F_a,F_b,F_c ariile $\Delta IBC,\Delta ICA,\Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{1}{9}\left(\frac{2}{R}\right)^{12}\le\frac{1}{F_a^3F_b^3}+\frac{1}{F_b^3F_c^3}+\frac{1}{F_c^3F_a^3}\le\frac{1}{27}\left(\frac{1}{r}\right)^{12}\left(\frac{2R}{r}-1\right).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Demonstrăm

Lema.

14) Let F_a,F_b,F_c ariile $\Delta IBC,\Delta ICA,\Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{1}{F_a^3F_b^3}+\frac{1}{F_b^3F_c^3}+\frac{1}{F_c^3F_a^3}=\frac{64}{r^6}\sum\frac{1}{b^3c^3}.$$

Folosind $F_a=A\quad[IBC]=\frac{a\cdot r}{2}$ obținem:

$$\sum\frac{1}{F_b^3F_c^3}=\sum\frac{1}{\frac{b^3\cdot r^3}{8}\cdot\frac{c^3\cdot r^3}{8}}=\sum\frac{64}{r^6b^3c^3}=\frac{64}{r^6}\sum\frac{1}{b^3c^3}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Inegalitatea din dreapta.

Folosind **Lema** obținem:

$$E=\frac{64}{r^6}\sum\frac{1}{b^3c^3}\overset{(1)}{\le}\frac{64}{r^6}\cdot\frac{2R-r}{16R^2r^3p^2}=\frac{4(2R-r)}{R^2r^9p^2}\overset{Mitrinovic}{\le}\frac{4(2R-r)}{R^2r^9\cdot27r^2}\overset{Euler}{\le}\frac{4(2R-r)}{4r^2\cdot r^9\cdot27r^2}=$$

$$=\frac{(2R-r)}{27r^{13}}=\frac{1}{27}\left(\frac{1}{r}\right)^{12}\left(\frac{2R}{r}-1\right)=Md,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\sum\frac{1}{b^3c^3}=\frac{\sum a^3}{a^3b^3c^3}\overset{(2)}{\le}\frac{4pR(2R-r)}{(4Rrp)^3}=\frac{4pR(2R-r)}{64R^3r^3p^3}=\frac{2R-r}{16R^2r^3p^2}$,

unde (2) $\sum a^3 = 2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \overset{Gerretsen}{\leq} 2p\left(4R^2+4Rr+3r^2-3r^2-6Rr\right) = 4pR\left(2R-r\right)$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

Folosind **Lema** obținem: $E = \frac{64}{r^6}\sum\frac{1}{b^3c^3} \overset{(2)}{\geq} \frac{64}{r^6}\cdot\frac{1}{9R^6} \overset{Euler}{\geq} \frac{64}{\left(\frac{R}{2}\right)^6}\cdot\frac{1}{9R^6} = \frac{2^{12}}{9R^{12}} = \frac{1}{9}\left(\frac{2}{R}\right)^{12} = Ms$.

unde (2) $\Leftrightarrow \sum\frac{1}{b^3c^3} = \frac{\sum a^3}{a^3b^3c^3} \overset{(3)}{\geq} \frac{24pr^2}{\left(4Rrp\right)^3} = \frac{24pr^2}{64R^3r^3p^3} = \frac{3}{8R^3rp^2} \underset{Mitrinovic}{\overset{Euler}{\geq}} \frac{3}{8R^3\cdot\frac{R}{2}\cdot\frac{27R^2}{4}} = \frac{1}{9R^6}$.

unde (3) $\sum a^3 = 2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \overset{Gerretsen}{\geq} 2p\left(16Rr-5r^2-3r^2-6Rr\right) =$

$= 4pr\left(5R-4r\right) \overset{Euler}{\geq} 4pr\cdot 6r = 24pr^2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

15) Let F_a, F_b, F_c ariile $\Delta IBC, \Delta ICA, \Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{9}{2F} \leq \frac{1}{F_a+F_b}+\frac{1}{F_b+F_c}+\frac{1}{F_c+F_a} \leq \frac{\sqrt{3}}{2r^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Demonstrăm

Lema.

16) Let F_a, F_b, F_c ariile $\Delta IBC, \Delta ICA, \Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{1}{F_a+F_b}+\frac{1}{F_b+F_c}+\frac{1}{F_c+F_a} = \frac{2}{r}\sum\frac{1}{b+c}.$$

Folosind $F_a = A\quad [IBC] = \frac{a\cdot r}{2}$ obținem:

$$\sum\frac{1}{F+F_c} = \sum\frac{1}{\frac{b\cdot r}{2}+\frac{c\cdot r}{2}} = \sum\frac{2}{r\left(b+c\right)} = \frac{2}{r}\sum\frac{1}{b+c}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Inegalitatea din dreapta.

Folosind **Lema** obținem:

$$E = \frac{2}{r}\sum\frac{1}{b+c} \overset{AM-GM}{\leq} \frac{2}{r}\sum\frac{1}{2\sqrt{bc}} = \frac{1}{r}\sum\frac{1}{\sqrt{bc}} = \frac{1}{r\sqrt{abc}}\sum\sqrt{a} \overset{CBS}{\leq} \frac{1}{r\sqrt{4Rrp}}\sqrt{3\sum a} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{r\sqrt{2Rr}} \overset{Euler}{\leq} \frac{\sqrt{3}}{r\sqrt{4r^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2r^2} = Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

Folosind **Lema** obținem:

$$E = \frac{2}{r}\sum\frac{1}{b+c} \overset{CS}{\geq} \frac{2}{r}\cdot\frac{9}{\sum\left(b+c\right)} = \frac{2}{r}\cdot\frac{9}{2\sum a} = \frac{2}{r}\cdot\frac{9}{2\cdot 2p} = \frac{9}{2pr} = \frac{9}{2F} = Ms.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

17) Let F_a, F_b, F_c ariile $\Delta IBC, \Delta ICA, \Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{4}{R^4} \le \frac{1}{(F_a+F_b)^2} + \frac{1}{(F_b+F_c)^2} + \frac{1}{(F_c+F_a)^2} \le \frac{1}{4r^4}.$$

Marin Chirciu

Soluție.
Demonstrăm
Lema.

18) Let F_a, F_b, F_c ariile $\Delta IBC, \Delta ICA, \Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{1}{(F_a+F_b)^2} + \frac{1}{(F_b+F_c)^2} + \frac{1}{(F_c+F_a)^2} = \frac{4}{r^2}\sum \frac{1}{(b+c)^2}.$$

Folosind $F_a = A \quad [IBC] = \frac{a \cdot r}{2}$ obținem:

$$\sum \frac{1}{(F_b+F_c)^2} = \sum \frac{1}{\left(\frac{b\cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2}\right)^2} = \sum \frac{4}{r^2(b+c)^2} = \frac{4}{r^2}\sum \frac{1}{(b+c)^2}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.
Inegalitatea din dreapta.
Folosind **Lema** obținem:

$$E = \frac{4}{r^2}\sum \frac{1}{(b+c)^2} \overset{AM-GM}{\le} \frac{4}{r^2}\sum \frac{1}{4bc} = \frac{1}{r^2}\sum \frac{1}{bc} = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{2Rr} = \frac{1}{2Rr^3} \overset{Euler}{\le} \frac{1}{4r^4} = Md$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.
Inegalitatea din stânga.
Folosind **Lema** obținem:

$$E = \sum \frac{4}{r^2(b+c)^2} = \frac{4}{r^2}\sum \frac{1}{(b+c)^2} \overset{CS}{\ge} \frac{4}{r^2}\cdot\frac{9}{\sum (b+c)^2} \overset{(2)}{\ge} \frac{4}{r^2}\cdot\frac{9}{36R^2} = \frac{1}{R^2r^2} \overset{Euler}{\ge} \frac{1}{R^2\cdot\frac{R^2}{4}} = \frac{4}{R^4} = Ms$$

$$\sum (b+c)^2 = 2\sum a^2 + 2\sum bc = 4\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right) + 2\left(p^2 + r^2 + 4Rr\right) =$$

$$= 2\left(3p^2 - r^2 - 4Rr\right) \overset{Gerretsen}{\le} 2\left(3\left(4R^2 + 4Rr + 3r^2\right) - r^2 - 4Rr\right) = 2\left(12R^2 + 8Rr + 8r^2\right) =$$

$$= 8\left(3R^2 + 2Rr + 2r^2\right) \overset{Euler}{\le} 8\cdot\frac{9R^2}{2} = 36R^2$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

19) Let F_a, F_b, F_c ariile $\Delta IBC, \Delta ICA, \Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{8}{R^4} \le \frac{1}{F_a^2+F_b^2} + \frac{1}{F_b^2+F_c^2} + \frac{1}{F_c^2+F_a^2} \le \frac{1}{2r^4}.$$

Marin Chirciu

Soluție.
Demonstrăm
Lema.

20) Let F_a, F_b, F_c ariile $\Delta IBC, \Delta ICA, \Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{1}{F_a^2+F_b^2} + \frac{1}{F_b^2+F_c^2} + \frac{1}{F_c^2+F_a^2} = \frac{4}{r^2}\sum \frac{1}{b^2+c^2}.$$

Folosind $F_a = A \quad [IBC] = \frac{a \cdot r}{2}$ obținem:

$$\sum\frac{1}{F_b^2+F_c^2}=\sum\frac{1}{\frac{b^2\cdot r^2}{4}+\frac{c^2\cdot r^2}{4}}=\sum\frac{4}{r^2\left(b^2+c^2\right)}=\frac{4}{r^2}\sum\frac{1}{b^2+c^2}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Inegalitatea din dreapta.

Folosind **Lema** obținem: $E=\frac{4}{r^2}\sum\frac{1}{b^2+c^2}\overset{(1)}{\le}\frac{4}{r^2}\cdot\frac{1}{4Rr}=\frac{1}{Rr^3}\overset{Euler}{\le}\frac{1}{2r^4}=Md$,

unde (1) $\Leftrightarrow\sum\frac{1}{b^2+c^2}=\sum\frac{1}{2bc}=\frac{1}{4Rr}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

Folosind **Lema** obținem: $E=\frac{4}{r^2}\sum\frac{1}{b^2+c^2}\overset{(2)}{\ge}\frac{4}{r^2}\cdot\frac{1}{2R^2}\overset{Euler}{\ge}\frac{4}{\left(\frac{R}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2R^2}=\frac{8}{R^4}=Ms$.

unde (2) rezultă din:

$\sum\frac{1}{b^2+c^2}\overset{AM-GM}{\ge}3\sqrt[3]{\prod\frac{1}{b^2+c^2}}=\frac{3}{\sqrt[3]{\prod\left(b^2+c^2\right)}}\overset{(3)}{\ge}\frac{3}{6R^2}=\frac{1}{2R^2}$, unde (3) rezultă din:

$$\sqrt[3]{\prod\left(a^2+b^2\right)}\overset{AM-GM}{\le}\frac{\sum\left(a^2+b^2\right)}{3}=\frac{2\sum a^2}{3}\overset{Leibniz}{\le}\frac{2\cdot 9R^2}{3}=6R^2.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

În aceeași clasă de probleme.

21) Let F_a,F_b,F_c ariile $\Delta IBC,\Delta ICA,\Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{36}{F}\cdot\frac{1}{R^3\left(2R-r\right)}\le\frac{1}{F_a^3+F_b^3}+\frac{1}{F_b^3+F_c^3}+\frac{1}{F_c^3+F_a^3}\le\frac{3}{2F}\cdot\frac{1}{r^4}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Demonstrăm

Lema.

22) Let F_a,F_b,F_c ariile $\Delta IBC,\Delta ICA,\Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{1}{F_a^3+F_b^3}+\frac{1}{F_b^3+F_c^3}+\frac{1}{F_c^3+F_a^3}=\frac{8}{r^3}\sum\frac{1}{b^3+c^3}.$$

Folosind $F_a=A\quad[IBC]=\frac{a\cdot r}{2}$ obținem:

$$\sum\frac{1}{F_b^3+F_c^3}=\sum\frac{1}{\frac{b^3\cdot r^3}{8}+\frac{c^3\cdot r^3}{8}}=\sum\frac{8}{r^3\left(b^3+c^3\right)}=\frac{8}{r^3}\sum\frac{1}{b^3+c^3}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Inegalitatea din dreapta.

Folosind **Lema** obținem: $E=\frac{8}{r^3}\sum\frac{1}{b^3+c^3}\overset{(1)}{\le}\frac{8}{r^3}\cdot\frac{3}{16pr^2}=\frac{3}{2pr^5}=\frac{3}{2F}\cdot\frac{1}{r^4}=Md$,

unde (1) $\Leftrightarrow\sum\frac{1}{b^3+c^3}\overset{AM-GM}{\le}\sum\frac{1}{2bc\sqrt{bc}}=\sum\frac{a\sqrt{a}}{2abc\sqrt{abc}}=\frac{1}{2abc\sqrt{abc}}\sum a\sqrt{a}\overset{CBS}{\le}$

$$\overset{CBS}{\leq}\frac{1}{2\cdot 4Rrp\sqrt{4Rrp}}\sqrt{\sum a^2\sum a}\overset{Leibniz}{\leq}\frac{1}{8Rrp\sqrt{4Rrp}}\sqrt{9R^2\cdot 2p}=\frac{3R}{8Rrp\sqrt{2Rr}}=\frac{3}{8rp\sqrt{2Rr}}\overset{Euler}{\leq}$$

$$\overset{Euler}{\leq}\frac{3}{8rp\sqrt{4r^2}}=\frac{3}{8rp\cdot 2r}=\frac{3}{16pr^2},$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

Folosind **Lema** obținem:

$$E=\frac{8}{r^3}\sum\frac{1}{b^3+c^3}\overset{(2)}{\geq}\frac{8}{r^3}\cdot\frac{9}{8pR(2R-r)}=\frac{9}{pr^3R(2R-r)}\overset{Euler}{\geq}\frac{1}{\left(\frac{R}{2}\right)^2}\cdot\frac{9}{prR(2R-r)}=$$

$$\frac{36}{F}\cdot\frac{1}{R^3(2R-r)},$$

unde (2) rezultă din:

$$\sum\frac{1}{b^3+c^3}\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{\prod\frac{1}{b^3+c^3}}=\frac{3}{\sqrt[3]{\prod(b^3+c^3)}}\overset{(3)}{\geq}\frac{3}{\frac{8pR(2R-r)}{3}}=\frac{9}{8pR(2R-r)},$$ unde (3)

rezultă din:

$$\sqrt[3]{\prod(b^3+c^3)}\overset{AM-GM}{\leq}\frac{\sum(b^3+c^3)}{3}=\frac{2\sum a^3}{3}\overset{Leibniz}{\leq}\frac{2\cdot 4pR(2R-r)}{3}=\frac{8pR(2R-r)}{3}.$$

unde (2) $\sum a^3=2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\overset{Gerretsen}{\leq}2p\left(4R^2+4Rr+3r^2-3r^2-6Rr\right)=4pR(2R-r)$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

23) Let F_a,F_b,F_c ariile $\Delta IBC,\Delta ICA,\Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{1}{6}\left(\frac{2}{R}\right)^8\leq\frac{1}{F_a^4+F_b^4}+\frac{1}{F_b^4+F_c^4}+\frac{1}{F_c^4+F_a^4}\leq\frac{1}{6}\left(\frac{1}{r}\right)^8.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Demonstrăm

Lema.

24) Let F_a,F_b,F_c ariile $\Delta IBC,\Delta ICA,\Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{1}{F_a^4+F_b^4}+\frac{1}{F_b^4+F_c^4}+\frac{1}{F_c^4+F_a^4}=\frac{16}{r^4}\sum\frac{1}{b^4+c^4}.$$

Folosind $F_a=A\quad[IBC]=\frac{a\cdot r}{2}$ obținem:

$$\sum\frac{1}{F_b^4+F_c^4}=\sum\frac{1}{\frac{b^4\cdot r^4}{16}+\frac{c^4\cdot r^4}{16}}=\sum\frac{16}{r^4\left(b^4+c^4\right)}=\frac{16}{r^4}\sum\frac{1}{b^4+c^4}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Inegalitatea din dreapta.

Folosind **Lema** obținem:

$$E=\frac{16}{r^4}\sum\frac{1}{b^4+c^4}\overset{(1)}{\leq}\frac{16}{r^4}\cdot\frac{9}{32p^2r^2}=\frac{9}{2p^2r^6}\overset{Mitrinovic}{\leq}\frac{9}{2\cdot 27r^2\cdot r^6}=\frac{1}{6r^8}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{r}\right)^8=Md,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\sum\frac{1}{b^4+c^4}\overset{AM-GM}{\leq}\sum\frac{1}{2b^2c^2}=\frac{1}{2a^2b^2c^2}\sum a^2\overset{Leibniz}{\leq}\frac{9R^2}{2\cdot 16R^2p^2r^2}=\frac{9}{32p^2r^2}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.
Inegalitatea din stânga.
Folosind **Lema** obținem:

$$E=\frac{16}{r^4}\sum\frac{1}{b^4+c^4}\overset{(2)}{\geq}\frac{16}{r^4}\cdot\frac{27r}{4R^3(4R+r)^2}=\frac{4}{r^3}\cdot\frac{27}{R^3(4R+r)^2}\overset{Euler}{\geq}\frac{4}{\left(\frac{R}{2}\right)^3}\cdot\frac{27}{R^3\left(4R+\frac{R}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{128}{3R^8}=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{R}\right)^8,$$

unde (2) rezultă din:

$$\sum\frac{1}{b^4+c^4}\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{\prod\frac{1}{b^4+c^4}}=\frac{3}{\sqrt[3]{\prod(b^4+c^4)}}\overset{(3)}{\geq}\frac{3}{\frac{4R^3(4R+r)^2}{9r}}=\frac{27r}{4R^3(4R+r)^2},$$

iar (3) rezultă din:

$$\sqrt[3]{\prod(b^4+c^4)}\overset{AM-GM}{\leq}\frac{\sum(b^4+c^4)}{3}=\frac{2\sum a^4}{3}\overset{(4)}{\leq}\frac{2}{3}(4R+r)^2\cdot\frac{2R^3}{3r}=\frac{4R^3(4R+r)^2}{9r},$$

unde (4) $\Leftrightarrow\sum a^4=2\left[p^2\left(p^2-6r^2-8Rr\right)+r^2(4R+r)^2\right]\overset{Gerretsen}{\leq}$

$$\overset{Gerretsen}{\leq}2\left[\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}\left(4R^2+4Rr+3r^2-6r^2-8Rr\right)+r^2(4R+r)^2\right]=$$

$$=2(4R+r)^2\left[\frac{R}{2(2R-r)}\left(4R^2-4Rr-3r^2\right)+r^2\right]=(4R+r)^2\cdot\frac{R\left(4R^2-4Rr-3r^2\right)+2r^2(2R-r)}{(2R-r)}=$$

$$=(4R+r)^2\cdot\frac{4R^3-4R^2r+Rr^2-2r^3}{(2R-r)}\overset{Euler}{\leq}(4R+r)^2\cdot\frac{2R^3}{3r}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

25) Let F_a,F_b,F_c ariile $\Delta IBC,\Delta ICA,\Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{1}{F_a^4}+\frac{1}{F_b^4}+\frac{1}{F_c^4}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{2}{R}\right)^8.$$

Marin Chirciu

Soluție.
Demonstrăm
Lema.

26) Let F_a,F_b,F_c ariile $\Delta IBC,\Delta ICA,\Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{1}{F_a^4}+\frac{1}{F_b^4}+\frac{1}{F_c^4}=\frac{16}{r^4}\sum\frac{1}{a^4}.$$

Folosind $F_a=A\quad[IBC]=\frac{a\cdot r}{2}$ obținem:

$$\sum\frac{1}{F_a^4}=\sum\frac{1}{\left(\frac{a\cdot r}{2}\right)^4}=\sum\frac{16}{r^4a^4}=\frac{16}{r^4}\sum\frac{1}{a^4}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.
Folosind **Lema** obținem:

$$E=\frac{16}{r^4}\sum\frac{1}{a^4}\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{16}{r^4}\cdot\frac{\left(\sum 1\right)^2}{\sum a^4}=\frac{16}{r^4}\cdot\frac{9}{\sum a^4}\overset{(2)}{\geq}\frac{16}{r^4}\cdot\frac{9}{\frac{27R^5}{2r}}=\frac{32}{3R^5r^3}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{2}{R}\right)^8=Md,$$

unde (2) $\Leftrightarrow \sum a^4=2\left[p^2\left(p^2-6r^2-8Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2\right]\overset{Gerretsen}{\leq}$

$$\overset{Gerretsen}{\leq}2\left[\frac{R\left(4R+r\right)^2}{2\left(2R-r\right)}\left(4R^2+4Rr+3r^2-6r^2-8Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2\right]=$$

$$=2\left(4R+r\right)^2\left[\frac{R}{2\left(2R-r\right)}\left(4R^2-4Rr-3r^2\right)+r^2\right]=$$

$$=2\left(4R+r\right)^2\cdot\frac{R\left(4R^2-4Rr-3r^2\right)+2r^2\left(2R-r\right)}{2\left(2R-r\right)}=$$

$$=2\left(4R+r\right)^2\cdot\frac{4R^3-4R^2r+Rr^2-2r^3}{2\left(2R-r\right)}\overset{Euler}{\leq}2\left(4R+r\right)^2\cdot\frac{R^3}{3r}\overset{Euler}{\leq}2\left(4R+\frac{R}{2}\right)^2\cdot\frac{R^3}{3r}=\frac{27R^5}{2r}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

27) Let F_a,F_b,F_c ariile $\Delta IBC,\Delta ICA,\Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{1}{F_a^n}+\frac{1}{F_b^n}+\frac{1}{F_c^n}\geq 3\left(\frac{3}{F}\right)^n,\text{unde } n\in\mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Demonstrăm

Lema.

28) Let F_a,F_b,F_c ariile $\Delta IBC,\Delta ICA,\Delta IAB$, I -incenter ΔABC. Prove that

$$\frac{1}{F_a^n}+\frac{1}{F_b^n}+\frac{1}{F_c^n}=\left(\frac{2}{r}\right)^n\sum\left(\frac{1}{a}\right)^n,\text{ unde } n\in\mathbf{N}.$$

Folosind $F_a=A\quad[IBC]=\frac{a\cdot r}{2}$ obținem:

$$\sum\frac{1}{F_a^n}=\sum\frac{1}{\left(\frac{a\cdot r}{2}\right)^n}=\sum\frac{2^n}{r^na^n}=\left(\frac{2}{r}\right)^n\sum\left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Pentru $n=0$ se obține egalitatea 3=3.

Pentru $n=1$ se obține $E=\frac{2}{r}\sum\frac{1}{a}\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{2}{r}\cdot\frac{\left(\sum 1\right)^2}{\sum a}=\frac{2}{r}\cdot\frac{9}{\sum a}=\frac{2}{r}\cdot\frac{9}{2p}=\frac{9}{pr}=\frac{9}{F}=Md$.

În continuare vom cosidera $n\geq 2$.

Folosind **Lema** obținem:

$$E=\sum\frac{1}{F_a^n}=\left(\frac{2}{r}\right)^n\sum\left(\frac{1}{a}\right)^n\overset{Holder}{\geq}\left(\frac{2}{r}\right)^n\frac{\left(\sum\frac{1}{a}\right)^n}{3^{n-1}}\overset{CS}{\geq}\left(\frac{2}{r}\right)^n\cdot\frac{\left(\frac{9}{2p}\right)^n}{3^{n-1}}=3\left(\frac{3}{F}\right)^n=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Art 1933

24 Decembrie 2020

Bibliografie:

1. O.Bottema, R.Z.Djordjevic, R.R.Janic, D.S.Mitrinovic, P.M.Vasic, Geometric Inequalities, Groningen 1969, The Netherlands.
2. Elton P, Mathematical Olympiads, 12/2020.
3. Marin Chirciu, Inegalități algebrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2014.
4. Marin Chirciu, Inegalități geometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2015.
5. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.
6. Marin Chirciu, Inegalități cu laturi și raze în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2017.
7. Marin Chirciu, Inegalități cu linii importante în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2018.
8. Marin Chirciu, Puncte remarcabile în triunghi . Inegalități. Distanțe, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2019.
9. Marin Chirciu, Inegalități algebrice 2, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2021, (sub tipar).
10. Marin Chirciu, Inegalități geometrice 2, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2021, (sub tipar).

Marin Chirciu[24]

3. Sclipirea Minții
Nr.26/2020
Q64

Art 2068

If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=1$ then

$$\frac{a^2+b}{b+c}+\frac{b^2+c}{c+a}+\frac{c^2+a}{a+b}\geq 2.$$

Dorin Mărghidanu, Corabia, Romania

Soluție.

Efectuând calculele și omogenizând, inegalitatea se scrie echivalent:

$\sum\left(a^2+b\right)\left(a+b\right)\left(a+c\right)\geq 2\prod\left(b+c\right)\sum a \Leftrightarrow$

$\sum a^4+\sum a^3b+\sum ab^3+abc\sum a\geq \sum a^2b^2+\sum ab^3+2abc\sum a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum a^4+\sum a^3b\geq \sum a^2b^2+\sum a^2bc$, care rezultă din $\sum a^4\geq \sum a^2b^2$,

adevărată din $\sum x^2\geq \sum xy$, pentru $x=a^2, y=b^2, z=c^2$ și

$\sum a^3b\geq \sum a^2bc$, adevărată din inegalitatea lui Muirhead, cu $(3,1,0)\succ(2,1,1)$.

Tripletul $(3,1,0)$ majorizează tripletul $(2,1,1)$, deoarece $3>2, 3+1>2+1, 3+1+0=2+1+1$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Art 2068
15 Februarie 2021

[24] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești*

Marin Chirciu[25]

4. Sclipirea Minții
Nr.26/2020
Q66

Art 2083

If $x, y, z, t > 0$ then

$$\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\right)\left(\frac{z^2}{t}+\frac{t^2}{z}\right)\geq 2(xz+yt).$$

Mihaly Bencze, Brașov, Romania

<u>Soluție</u> (Marin Chirciu și Octavian Stroe, Pitești).

Inegalitatea se scrie echivalent:

$$\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\right)\left(\frac{z^2}{t}+\frac{t^2}{z}\right)\geq 2(xz+yt) \Leftrightarrow \left(\frac{x^3+y^3}{xy}\right)\left(\frac{z^3+t^3}{zt}\right)\geq 2(xz+yt) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (x^3+y^3)(z^3+t^3)\geq 2xyzt(xz+yt)$, (1).

Notând $a=xz, b=xt, c=yz, d=yt$ inegalitatea (1) se scrie:

$a^3+b^3+c^3+d^3\geq 2bc(a+d)$, unde $a,b,c,d>0$, cu $ad=bc$.

Folosim $x^3+y^3\geq \frac{(x+y)^3}{4} \Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2\geq 0$.

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $a+d\geq b+c$ obținem:

$$a^3+b^3+c^3+d^3\geq \frac{(a+d)^3}{4}+\frac{(b+c)^3}{4}\geq \frac{1}{4}(a+d)(b+c)\left[(a+d)+(b+c)\right]\geq$$

$$\geq \frac{1}{4}(a+d)(b+c)\left[(b+c)+(b+c)\right]=\frac{1}{2}(a+d)(b+c)^2\geq \frac{1}{2}(a+d)\cdot 4bc=2bc(a+d).$$

Cazul 2). Dacă $b+c\geq a+d$ obținem:

$$a^3+b^3+c^3+d^3\geq \frac{(a+d)^3}{4}+\frac{(b+c)^3}{4}\geq \frac{1}{4}(a+d)(b+c)\left[(a+d)+(b+c)\right]\geq$$

$$\geq \frac{1}{4}(a+d)(b+c)\left[(a+d)+(a+d)\right]=\frac{1}{2}(b+c)(a+d)^2\geq \frac{1}{2}(b+c)\cdot 4ad=2ad(b+c).$$

Deoarece $ad=bc$ și $b+c\geq a+d$ rezultă că $2ad(b+c)\geq 2bc(a+d)$, iar de aici deducem concluzia $a^3+b^3+c^3+d^3\geq 2bc(a+d)$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d$, adică $x=y=z=t$.

Art 2083
28 Februarie 2021

[25] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești*

5. ÎNVĂŢAREA CENTRATA PE ELEV
ÎN CADRUL ORELOR DE MATEMATICĂ

Prof.

BORCOMAN ANA

ŞCOALA GIMNAZIALĂ NR. 30

BRAŞOV

Învăţarea centrată pe elev reprezintă o abordare care presupune un stil de învăţare activ şi integrarea programelor de învăţare în funcţie de ritmul propriu de învăţare al elevului. Elevul trebuie să fie implicat şi responsabil pentru progresele pe care le face în ceea ce priveşte propria lui educaţie.

Pentru a avea cu adevărat elevul în centrul activităţii instructiv-educative, profesorul îndeplineşte roluri cu mult mai nuanţate decât în şcoala tradiţională. În abordarea centrată pe elev, succesul la clasă depinde de competenţele cadrului didactic de a crea oportunităţile optime de învăţare pentru fiecare elev. Astfel, în funcţie de context, profesorul acţionează mereu, dar adecvat şi adaptat nevoilor grupului.

Avantajele învăţării centrate pe elev sunt:

- ✓ Creşterea motivaţiei elevilor, deoarece aceştia sunt conştienţi că pot influenţa procesul de învăţare;
- ✓ Eficacitate mai mare a învăţării şi a aplicării celor învăţate, deoarece aceste abordări folosesc învăţarea activă;
- ✓ Învăţarea capătă sens, deoarece a stăpâni materia înseamnă a o înţelege;
- ✓ Posibilitate mai mare de includere - poate fi adaptată în funcţie de potenţialul fiecărui elev, de capacităţile diferite de învăţare, de contextele de învăţare specifice.

Metodele de învăţare centrată pe elev fac lecţiile interesante, sprijină elevii în înţelegerea conţinuturilor pe care să fie capabili să le aplice în viaţa reală.

Printre metodele care activează predarea-învăţarea sunt şi cele prin care elevii lucrează productiv unii cu alţii, îşi dezvoltă abilităţi de colaborare şi ajutor reciproc. Ele pot avea un impact extraordinar asupra elevilor datorită denumirilor, caracterului ludic şi oferă alternative de învăţare cu „priză” la elevi.

În vederea dezvoltării gândirii critice la elevi, trebuie să utilizăm, cu precădere unele strategii activ-participative, creative. Acestea nu trebuie rupte de cele tradiţionale, ele marcând un nivel superior în spirala modernizării strategiilor didactice.

Dintre metodele moderne specifice învăţării active care pot fi aplicate cu succes şi la orele de matematică fac parte: ***brainstormingul, metoda mozaicului, metoda cubului, turul galeriei, ciorchinele.***

1. Brainstormingul

Brainstormingul este o metodă care ajută la crearea unor idei şi concepte creative şi inovatoare. Pentru un brainstorming eficient, inhibiţiile şi criticile suspendate vor fi puse de-o parte. Astfel exprimarea va deveni liberă şi participanţii la un proces de brainstorming îşi vor spune ideile şi părerile fără teama de a fi respinşi sau criticaţi. Se expune un concept, o idee sau o problemă şi fiecare îşi spune părerea despre cele expuse şi absolut tot ceea ce le trece prin minte, inclusiv idei comice sau inaplicabile.

O sesiune de brainstorming bine dirijată dă fiecăruia ocazia de a participa la dezbateri şi se poate dovedi o acţiune foarte constructivă.

Etapele unui brainstorming eficient sunt următoarele:

- *deschiderea sesiunii de brainstorming* în care se prezintă scopul acesteia şi se discută tehnicile şi regulile de bază care vor fi utilizate;
- *perioada de acomodare* durează 5-10 minute şi are ca obiectiv introducerea grupului în atmosfera brainstormingului, unde participanţii sunt stimulaţi să discute idei generale pentru a putea trece la un nivel superior;
- *partea creativă a brainstormingului* are o durată de 25-30 de minute. Este recomandabil ca în timpul derulării acestei etape, coordonatorul (profesorul) să amintească timpul care a trecut şi cât timp a mai rămas, să "preseze" participanţii şi în finalul părţii creative să mai acorde câte 3-4 minute în plus. În acest interval de timp grupul participant trebuie să fie stimulaţi să-şi spună părerile fără ocolişuri.
- la sfârşitul părţii creative coordonatorul brainstormingului *clarifică ideile* care au fost notate şi puse în discuţie şi verifică dacă toată lumea a înţeles punctele dezbătute. Este momentul în care se vor elimina sugestiile prea îndrăzneţe şi care nu sunt îndeajuns de pertinente. Se face şi o evaluare a sesiunii de brainstorming şi a contribuţiei fiecărui participant la derularea

sesiunii. Pot fi luate în considerare pentru evaluare: talentele şi aptitudinile grupului, repartiţia timpului şi punctele care au reuşit să fie atinse.

- pentru a stabili un *acord obiectiv* cei care au participat la brainstorming îşi vor spune părerea şi

vor vota cele mai bune idei. Grupul supus la acţiunea de brainstorming trebuie să stabilească singuri care au fost ideile care s-au pliat cel mai bine pe conceptul dezbătut.

Pe timpul desfăşurării brainstormingului participanţilor nu li se vor cere explicaţii pentru ideile lor. Aceasta este o greşeală care poate aduce o evaluare prematură a ideilor şi o îngreunare a procesului în sine.

Brainstormingul funcţionează după principiul: *asigurarea calităţii prin cantitate şi îşi propune să elimine exact acest neajuns generat de autocritică*.

Vă recomandăm **7 reguli** pe care elevii le vor respecta în scopul unei şedinţe reuşite de brainstorming:

1. Nu judecaţi ideile celorlalţi – cea mai importantă regulă.

2. Încurajaţi ideile nebuneşti sau exagerate.

3. Căutaţi cantitate, nu calitate în acest punct.

4. Notaţi tot.

5. Fiecare elev este la fel de important.

6. Naşteţi idei din idei.

7. Nu vă fie frică de exprimare.

Este important de reţinut că obiectivul fundamental al metodei brainstorming constă în

exprimarea liberă a opiniilor prin eliberarea de orice prejudecăţi. De aceea, acceptaţi toate ideile, chiar trăznite, neobişnuite, absurde, fanteziste, aşa cum vin ele în mintea elevilor, indiferent dacă acestea conduc sau nu la rezolvarea problemei. Pentru a determina progresul în învăţare al elevilor este necesar să îi antrenaţi în schimbul de idei; faceţi asta astfel încât toţi elevii să îşi exprime opiniile!

Exemplul 1. ***Aplicarea metodei brainstorming la rezolvarea unei probleme de geometrie la***

clasa a VII-a în care se aplică teorema înălţimii, teorema catetei, teorema lui Pitagora şi funcţiile trigonometrice (a se vedea Anexa1).

2. Mozaicul

Mozaicul sau „metoda grupurilor interdependente" este o strategie bazată pe învăţarea în echipă. Fiecare elev are o sarcină de studiu în care trebuie să devină *expert*. El are în acelaşi timp şi responsabilitatea transmiterii informaţiilor asimilate, celorlalţi colegi.

În cadrul acestei metode rolul profesorului este mult diminuat, el intervine semnificativ la începutul lecţiei când împarte elevii în grupurile de lucru şi trasează sarcinile şi la sfârşitul activităţii când va prezenta concluziile activităţii.

Există mai multe variante ale metodei mozaic iar noi vom prezenta varianta standard a acestei metode care se realizează în cinci ***etape***.

1. ***Pregătirea materialului de studiu***

- Profesorul stabileşte tema de studiu şi o împarte în 4 sau 5 *sub-teme*. Opţional, poate stabili

pentru fiecare sub-temă, elementele principale pe care trebuie să pună accentul elevul, atunci când studiază materialul în mod independent. Acestea pot fi formulate fie sub formă de întrebări, fie afirmativ, fie un text eliptic care va putea fi completat numai atunci când elevul studiază materialul.

- Realizează o *fişă-expert* în care trece cele 4 sau 5 sub-teme propuse şi care va fi oferită

fiecărui grup.

2. ***Organizarea colectivului în echipe de învăţare*** de câte 4-5 elevi (în funcţie de numărul lor în

clasă)

- Fiecare elev din echipă, primeşte o literă (A, B, C, D) şi are ca sarcină să studieze în mod

independent, sub-tema corespunzătoare literei sale.

- El trebuie să devină expert în problema dată. De exemplu, elevii cu litera A vor aprofunda sub-

tema din Fişa „A". Cei cu litera B vor studia sub-tema din Fişa „B", etc.

- Faza independentă: fiecare elev studiază sub-tema lui, citeşte textul corespunzător. Acest studiu

independent poate fi făcut în clasă sau poate constitui o temă de casă, realizată înaintea organizării mozaicului.

3. ***Constituirea grupului de experţi***

- După ce au parcurs faza de lucru independent, experţii cu aceaşi literă se reunesc, constituind

grupe de experţi pentru a dezbate problema împreună. Astfel, elevii cu litera A, părăsesc echipele de învăţare iniţiale şi se adună la o masă pentru a aprofunda sub-tema din Fişa „A”. La fel procedează şi ceilalţi elevi cu literele B, C, şi D. Dacă grupul de experţi are mai mult de 6 membri, acesta se divizează în două grupe mai mici.

- Faza discuţiilor în grupul de experţi: elevii prezintă un *raport individual* asupra a ceea ce au

studiat independent. Au loc discuţii pe baza datelor şi a materialelor avute la dispoziţie, se adaugă elemente noi şi se stabileşte modalitatea în care noile cunoştinţe vor fi transmise şi celorlaţi membrii din echipa iniţială.

- Fiecare elev este membru într-un grup de experţi şi face parte dintr-o echipă de învăţare. Din

punct de vedere al aranjamentului fizic, mesele de lucru ale grupurilor de experţi trebuie plasate în diferite locuri ale sălii de clasă, pentru a nu se deranja reciproc.

- Scopul comun al fiecărui grup de experţi este să se instruiască cât mai bine, având

responsabilitatea propriei învăţări şi a predării şi învăţării colegilor din echipa iniţială.

4. ***Reîntoarcerea în echipa iniţială de învăţare***

- Faza raportului de echipă: experţii transmit cunoştinţele asimilate, reţinând la rândul lor

cunoştinţele pe care le transmit colegii lor, experţi în alte sub-teme. Modalitatea de transmitere trebuie să fie scurtă, concisă, atractivă, putând fi însoţită de suporturi audio-vizuale, diverse materiale.

- Specialiştii într-o sub-temă pot demonstra o idee, citi un raport, folosi computerul, pot ilustra

ideile cu ajutorul diagramelor, desenelor, fotografiilor. Membrii sunt stimulaţi să discute, să pună întrebări şi să-şi noteze, fiecare realizându-şi propriul plan de idei.

5. ***Evaluarea***

- Faza demonstraţiei: grupele prezintă rezultatele întregii clase. În acest moment elevii sunt gata

să demonstreze ce au învăţat. Profesorul poate pune întrebări, poate cere un raport sau un eseu ori poate da spre rezolvare fiecărui elev o fişă de evaluare. Dacă se recurge la evaluarea orală, atunci fiecărui elev i se va adresa o întrebare la care trebuie să răspundă fără ajutorul echipei.

Exemplul 2. ***Aplicarea metodei mozaicului la predarea criteriilor de divizibilitate cu 2, 5, 10 şi***

3 la clasa a VI-a. (a se vedea Anexa 2).

Ca toate celelalte metode de învăţare prin cooperare şi aceasta presupune următoarele ***avantaje***:

- stimularea încrederii în sine a elevilor;
- dezvoltarea abilităţilor de comunicare argumentativă şi de relaţionare în cadrul grupului;
- dezvoltarea gândirii logice, critice şi independente;
- dezvoltarea răspunderii individuale şi de grup;
- optimizarea învăţării prin predarea achiziţiilor altcuiva.

„Trebuie să remarcăm calitatea metodei grupurilor interdependente de a anihila manifestarea

efectului Ringelmann. Lenea socială, cum se mai numeşte acest efect, apare cu deosebire atunci când individul îşi imaginează că propria contribuţie la sarcina de grup nu poate fi stabilită cu precizie. Interdependenţa dintre membri şi individualizarea aportului fac din metoda mozaicului un remediu sigur împotriva acestui efect”.

3. Metoda cubului

Metoda cubului presupune explorarea unui subiect, a unei situaţii din mai multe perspective, permiţând abordarea complexă şi integratoare a unei teme.

Sunt recomandate următoarele etape:

- Realizarea unui cub pe ale cărui feţe sunt scrise cuvintele: *descrie, compară, analizează,*

asociază, aplică, argumentează.

- Anunţarea temei, subiectului pus în discuţie.
- Împărţirea clasei în 6 grupe, fiecare dintre ele examinând tema din perspectiva

cerinţei de pe una din feţele cubului.

- **Descrie**: *culorile, formele, mărimile,* etc.
- **Compară**: *ce este asemănător? Ce este diferit?*
- **Analizează**: *spune din ce este făcut, din ce se compune.*
- **Asociază**: *la ce te îndeamnă să te gândeşti?*
- **Aplică**: *ce poţi face cu aceasta? La ce poate fi folosită?*

- **Argumentează**: *pro sau contra şi enumeră o serie de motive care vin în sprijinul afirmaţiei tale.*

▪ Redactarea finală şi împărtăşirea ei celorlalte grupe.

▪ Afişarea formei finale pe tablă sau pe pereţii clasei.

Exemplul 3. ***Aplicarea la lecţia de recapitulare şi sistematizare a cunoştinţelor* – Poliedre – *clasa a VIII-a (a se vedea Anexa 3).***

4. Turul galeriei

Turul galeriei este o metodă interactivă de învăţare bazată pe colaborarea între elevi, care sunt

puşi în ipostaza de a găsi soluţii de rezolvare a unor probleme. Această metodă presupune evaluarea interactivă şi profund formativă a produselor realizate de grupuri de elevi.

Astfel, **turul galeriei** constă în următoarele:

1. Elevii, în grupuri de trei sau patru, rezolvă o problemă (o sarcină de învăţare) susceptibilă de a

avea mai multe soluţii (mai multe perspective de abordare).

2. Produsele muncii grupului se materializează într-o schemă, diagramă, inventar de idei etc.

notate pe o hârtie (un poster).

3. Posterele se expun pe pereţii clasei, transformaţi într-o veritabilă galerie.
4. La semnalul profesorului, grupurile trec pe rând, pe la fiecare poster pentru a examina soluţiile

propuse de colegi. Comentariile şi observaţiile vizitatorilor sunt scrise pe posterul analizat.

5. După ce se încheie turul galeriei (grupurile revin la poziţia iniţială, înainte de plecare) fiecare

echipă îşi reexaminează produsul muncii lor comparativ cu ale celorlalţi şi discută observaţiile şi comentariile notate de colegi pe propriul poster.

Turul galeriei se foloseşte cu succes împreună cu metoda cubului aşa cum se poate vedea şi în exemplul 3 prezentat anterior.

5. Ciorchinele

Deşi este o variantă mai simplă a brainstorming-ului, ***ciorchinele*** este o metodă care presupune
identificarea unor conexiuni logice între idei, poate fi folosită cu succes atât la începutul unei lecţii pentru reactualizarea cunoştinţelor predate anterior, cât şi în cazul lecţiilor de sinteză, de recapitulare, de sistematizare a cunoştinţelor.

Ciorchinele este o tehnică de căutare a căilor de acces spre propriile cunoştinţe evidenţiind modul de a înţelege o anumită temă, un anumit conţinut.

Ciorchinele reprezintă o tehnică eficientă de predare şi învăţare care încurajează elevii să gândească liber şi deschis.

Metoda ciorchinelui funcţionează după următoarele *etape*:

1. Se scrie un cuvânt / temă (care urmează a fi cercetat) în mijlocul tablei sau a unei foi de hârtie.
2. Elevii vor fi solicitaţi să-şi noteze toate ideile, sintagmele sau cunoştinţele pe care le au în minte

în legătură cu tema respectivă, în jurul cuvântului din centru, trăgându-se linii între acestea şi cuvântul iniţial.

3. În timp ce le vin în minte idei noi şi le notează prin cuvintele respective, elevii vor trage linii

între toate ideile care par a fi conectate.

4. Activitatea se opreşte când se epuizează toate ideile sau când s-a atins limita de timp acordată.

Există câteva *reguli* ce trebuie respectate în utilizarea tehnicii ciorchinelui:

- Scrieţi tot ce vă trece prin minte referitor la tema / problema pusă în discuţie.
- Nu judecaţi / evaluaţi ideile produse, ci doar notaţiile.
- Nu vă opriţi până nu epuizaţi toate ideile care vă vin în minte sau până nu expiră timpul alocat; dacă ideile refuză să vină insistaţi şi zăboviţi asupra temei până ce vor apărea unele idei.
- Lăsaţi să apară cât mai multe şi mai variate conexiuni între idei; nu limitaţi nici numărul ideilor, nici fluxul legăturilor dintre acestea.

Avantajele acestei tehnici de învăţare sunt:

- În etapa de reflecţie vom utiliza “ciorchinele revizuit” în care elevii vor fi ghidaţi prin intermediul unor întrebări, în gruparea informaţiilor în funcţie de anumite criterii.

- Prin această metodă se fixează mai bine ideile şi se structurează infomaţiile facilizându-se reţinerea şi înţelegerea acestora.
- Adesea poate rezulta un "ciorchine" cu mai mulţi "sateliţi".

Exemplul 4. ***Aplicarea metodei ciorchinelui la recapitularea unităţii de învăţare – Mulţimi – clasa a V-a (a se vedea Anexa 4).***

Utilizarea acestor metode antrenează elevii într-o continuă participare şi colaborare, creşte motivarea intrinsecă deoarece li se solicită să descopere fapte, să aducă argumente pro şi contra. Lucrul în echipă dezvoltă atitudinea de toleranţă faţă de ceilalţi şi sunt eliminate motivele de stres iar emoţiile se atenuează.

Pot susţine cu convingere că beneficiarii învăţământului centrat pe elev sunt elevii deoarece, aşa cum spune "crezul instruirii active": ***"Ce aud-uit; Ce aud şi văd - îmi amintesc puţin; Ce aud, văd şi întreb - încep să înţeleg; Ce aud, văd, întreb şi exersez - îmi însuşesc şi deprind; Ceea ce pun în practică învăţ cu adevărat".***

BIBLIOGRAFIE

- ✓ Ardelean Liviu, Secelean Nicolae – *Didactica matematicii – noţiuni generale, comunicare didactică specifică matematicii*, Ed. Universităţii "Lucian Blaga", Sibiu, 2007
- ✓ Ardelean Liviu, Secelean Nicolae – *Didactica matematicii – managementul, proiectarea şi evaluarea activităţilor didactice*, Ed. Universităţii "Lucian Blaga", Sibiu, 2007
- ✓ Dumitru Ion Alexandru – *Dezvoltarea gândirii critice şi învăţarea eficientă*, Ed. de Vest, Timişoara, 2000
- ✓ Sarivan Ligia, coord. – *Predarea interactivă centrată pe elev*, Educaţia 2000+, Bucureşti, 2005
- ✓ Singer Mihaela, Voica Cristian – *Recuperarea rămânerii în urmă la matematică,* Educaţia 2000+, Bucureşti, 2005

ANEXE

Anexa 1. ***Aplicarea metodei brainstorming la rezolvarea unei probleme de geometrie la clasa a VII-a în care se aplică teorema înălţimii, teorema catetei, teorema lui Pitagora şi funcţiile trigonometrice.***

Etape:

1. *Alegerea sarcinii de lucru. Problema este scrisă pe tablă.*

În triunghiul ABC cu $m(\hat{A}) = 90^\circ$ şi AD ⊥ BC, D ∈ BC se cunosc BD = 8 cm şi BC = 32 cm. Aflaţi AB, DC, AD, AC, $m(\hat{B})$ şi $m(\hat{C})$.

2. *Solicitarea exprimării într-un mod cât mai rapid, a tuturor ideilor legate de rezolvarea problemei. Sub nici un motiv, nu se vor admite referiri critice.*

Cereţi elevilor să propună strategii de rezolvare a problemei. Pot apărea, de exemplu, sugestii
legate de realizarea unei figuri cât mai corecte. Lăsaţi elevii să propună orice metodă le trece prin minte!

3. *Înregistrarea tuturor ideilor în scris (pe tablă). Anunţarea unei pauze pentru aşezarea ideilor (de la 15 minute până la o zi).*

Notaţi toate propunerile elevilor. La sfârşitul orei, puneţi elevii să transcrie toate aceste idei şi
cereţi-le ca pe timpul pauzei, să mai reflecteze asupra lor.

4. *Reluarea ideilor emise pe rând şi gruparea lor pe categorii, simboluri, cuvinte cheie, etc.*

Pentru problema analizată, cuvintele-cheie ar putea fi: teoremele învăţate la relaţiile metrice în triunghiul dreptunghic, precum şi funcţiile trigonometrice.

5. *Analiza critică, evaluarea, argumentarea, contraargumentarea ideilor emise anterior. Selectarea ideilor originale sau a celor mai apropiate de soluţii fezabile pentru problema supusă atenţiei.*

Puneţi întrebări de tipul: Cine este BD, dar BC pentru triunghiul ABC? Cum putem afla cateta
AB? Dar proiecţia DC?

6. *Afişarea ideilor rezultate în forme cât mai variate şi originale: cuvinte, propoziţii, colaje, imagini, desene, etc.*

Ca urmare a discuţiilor avute cu elevii, trebuie să rezulte strategia de rezolvare a problemei. Aceasta poate fi sintetizată sub forma unor indicaţii de rezolvare de tipul:

- construim triunghiul;
- aplicăm teorema catetei, teorema înălţimii şi teorema lui Pitagora;
- aplicăm funcţiile sinus sau cosinus.

Anexa 2. ***Aplicarea metodei mozaicului la predarea criteriilor de divizibilitate cu 2, 5, 10 şi 3 la clasa a VI-a.***

Etape:

1. *Împărţirea clasei a VI-a în 5 grupuri eterogene de 4 elevi, fiecare dintre aceştia primind câte o fişă de învăţare notată cu câte o literă (A, B, C, D). Fişele cuprind părţi ale unui material, ce urmează a fi înţeles şi discutat de către elevi.*

Propuneţi lecţia „Criterii de divizibilitate cu 2, 5, 10 şi 3” – clasa a VI-a

2. *Prezentarea succintă a subiectului tratat. Explicarea sarcinii de lucru şi a modului în care se va desfăşura activitatea.*

În cazul analizat, subiectul analizat este „Criteriile de divizibilitate cu 2, 5, 10 şi 3”.

3. *Regruparea elevilor, în funcţie de litera fişei primite, în* ***grupuri de experţi****: toţi elevii care au litera A vor forma un grup, cei cu litera B vor forma alt grup ş.a.m.d.*

Aşadar, unul dintre grupurile de „experţi” va fi format din toţi elevii care au primit, în cadrul

grupului iniţial de 4, *Criteriul de divizibilitate cu 3*.

4. *Învăţarea prin cooperare a secţiunii care a revenit fiecărui grup de experţi. Elevii citesc, discută, încearcă să înţeleagă cât mai bine, hotărăsc modul în care pot preda ceea ce au înţeles colegilor din grupul lor originar.*

Elevii din fiecare grup decid cum vor „preda”. Ei pot folosi exemple numerice, texte în vorbirea curentă, simboluri matematice.

5. *Revenirea în grupul iniţial şi predarea secţiunii pregătite celorlalţi membri. Dacă sunt neclarităţi, se adresează întrebări expertului. Dacă neclarităţile persistă se pot adresa întrebări şi celorlalţi membrii din grupul expert pentru secţiunea respectivă.*

   În fiecare grup, sunt astfel „predate” cele patru criterii de divizibilitate, cu exemple. În acest fel,

fiecare elev devine responsabil atât pentru propria învăţare, cât şi pentru transmiterea corectă şi completă a informaţiilor. Este important să monitorizaţi această activitate, pentru ca achiziţiile să fie corect transmise.

6. *Trecerea în revistă a materialului dat prin prezentare orală cu toată clasa / cu toţi participanţii.*

Câteva exerciţii bine alese de profesor vor evidenţia nivelul de înţelegere a temei.

Metoda Mozaicului are avantajul că implică toţi elevii în activitate şi că fiecare dintre ei devine responsabil, atât pentru propria învăţare, cât şi pentru învăţarea celorlalţi. De aceea, metoda este foarte utilă în motivarea elevilor: faptul că se transformă, pentru scurt timp, în „profesori" le conferă un ascendent moral asupra colegilor.

Fişe de experţi

- **Fişa „A": Criteriul de divizibilitate cu 2**

  Un număr natural este divizibil cu 2 dacă şi numai dacă ultima sa cifră este cifră pară.
- **Fişa „B": Criteriul de divizibilitate cu 5**

  Un număr natural este divizibil cu 5 dacă şi numai dacă ultima sa cifră este 0 sau 5.
- **Fişa „C": Criteriul de divizibilitate cu 10**

  Un număr natural este divizibil cu 10 dacă şi numai dacă ultima sa cifră este 0.
- **Fişa „D": Criteriul de divizibilitate cu 3**

  Un număr natural este divizibil cu 3 dacă şi numai dacă suma cifrelor sale este multiplu de 3.

Anexa 3. ***La lecţia de recapitulare şi sistematizare a cunoştinţelor - Unitatea de învăţare: Poliedre - clasa a VIII-a, am folosit metoda cubului şi turul galeriei.*** Am realizat un cub din carton şi am colorat fiecare faţă diferit, iar fiecărei feţe i-am asociat un

verb, astfel:

Faţa 1 - albastru
– verbul DESCRIE
Faţa 2 - roşu
– verbul COMPARĂ
Faţa 3 - verde
– verbul ASOCIAZĂ

Faţa 4 - portocaliu
– verbul ANALIZEAZĂ
Faţa 5 - galben
– verbul ARGUMENTEAZĂ
Faţa 6 - mov
– verbul APLICĂ

În desfăşurarea activităţii, am avut grijă să dau indicaţii unde a fost necesar, să soluţionez situaţiile în care nu toţi elevii s-au implicat în cadrul activităţii în grup sau atunci când un elev a monopolizat toate activităţile.

Elevii care au primit fişa de lucru cu verbul ***DESCRIE*** au avut următoarele sarcini:

- de enumerat poliedrele studiate
- de desenat corpurile şi desfăşurările lor plane
- de identificat elementele acestora şi de descris forma feţelor şi a bazei
- de evidenţiat, într-un tabel, muchiile, feţele şi diagonalele

Elevii care au primit fişa de lucru cu verbul ***COMPARĂ*** au de stabilit asemănări şi deosebiri între corpurile studiate şi o comparaţie între poliedrele oarecare şi cele regulate.

Elevii care au primit fişa de lucru cu verbul ***ASOCIAZĂ*** vor asocia fiecărui poliedru formulele de calcul pentru volum şi arie (laterală, totală), apoi vor identifica obiecte cunoscute care au forma obiectului respectiv.

Pentru grupa care a avut verbul ***ANALIZEAZĂ***, sarcina de lucru a cerut ca elevii să analizeze diferite secţiuni în corpurile studiate (secţiuni diagonale, secţiuni cu un plan paralel cu baza). Se vor realiza desene corespunzătoare în care se vor pune în evidenţă toate planele de secţiune şi forma secţiunii rezultate, prin markere. Datele se vor sistematiza într-un tabel.

Corpul studiat	Forma secţiunii diagonale	Forma secţiunii cu un plan paralel cu baza

Elevii care au primit o fişă de lucru cu verbul ***ARGUMENTEAZĂ*** au avut de analizat şi justificat în scris valoarea de adevăr a unor propoziţii, ce au conţinut şi chestiuni capcane. Le-am cerut să realizeze şi scurte demonstraţii sau să descopere greşeala dintr-o redactare a unei rezolvări.

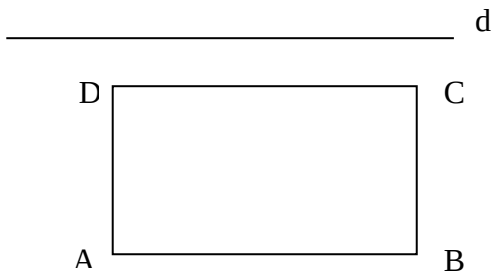
Elevii din grupa verbului ***APLICĂ*** au avut un set de întrebări grilă în care au aplicat formulele de calcul a ariei şi volumului unor poliedre în contexte variat.

Fişa nr.1: Verbul „DESCRIE”

1. Enumeraţi poliedrele studiate: .....
2. Realizaţi câte un desen corespunzător fiecărui corp.
3. Realizaţi desfăşurarea plană a fiecărui corp.

4. Identificaţi în desenele realizate elementele corpurilor, precum şi forma feţelor şi a bazei.

5. Se dă dreptunghiul ABCD cu [BC] = 4 cm şi [CD] = 5 cm. Se consideră o dreaptă (d) în exteriorul dreptunghiului situată la distanţa de 2 cm faţă de segmentul [CD]. Să se descrie corpul obţinut prin rotaţia dreptunghiului în jurul dreptei (d).



Fişa nr.2: Verbul „COMPARĂ”

1. Realizaţi un scurt eseu matematic în care să puneţi în evidenţă asemănări şi deosebiri sau

analogii între poliedrele oarecare şi cele regulate.

2. Redactaţi şi comparaţi rezultatele obţinute:

Cubul ABCDA'B'C'D' are diagonala unei feţe laterale de 8 cm. Să se afle volumul cubului,

apoi volumul tetraedrului A'BC'D format în interiorul cubului şi să se compare rezultatele.

Fişa nr.3: Verbul „ASOCIAZĂ”

1. Asociază fiecărui poliedru studiat formulele corespunzătoare pentru calculul ariei laterale,

totale şi pentru calculul volumului.

2. Identifică în mediul înconjurător câteva obiecte care să aibă formă de cub, paralelipiped

dreptunghic, prismă şi piramidă.

3. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsurile corecte:

a) Piramida regulată cu toate muchiile congruente se numeşte .....

b) Un cub are aria laterală de 100 cm², atunci muchia cubului este de ..... cm.

c) O prismă patrulateră regulată are latura bazei de 8 cm şi înălţimea de 15 cm. Atunci aria laterală a prismei este de ..... cm².

d) O piramidă triunghiulară regulată cu aria bazei de $4\sqrt{3}$ cm şi înălţimea de 9 cm are volumul de .....cm³.

Fişa nr.4: Verbul „ANALIZEAZĂ”

1. Desenaţi un cub şi puneţi în evidenţă secţiunile diagonale şi secţiunile cu un plan paralel cu baza.

2. Desenaţi un paralelipiped dreptunghic şi puneţi în evidenţă secţiunile diagonale şi secţiunile cu un plan paralel cu baza.

3. Desenaţi un trunchi de piramidă patrulateră şi puneţi în evidenţă secţiunile diagonale şi secţiunile cu un plan paralel cu baza.

Pentru fiecare secţiune specificaţi forma secţiunii şi corpurile care se formează prin secţionare, o formulă utilă pentru calculul ariei secţiunii formate.

Întocmiţi un tabel de forma de mai jos pentru a sistematiza datele:

Corpul studiat	Forma secţiunii diagonale	Forma secţiunii cu un plan paralel cu baza

4. Secţiunea diagonală a unei prisme patrulatere regulate este un pătrat cu aria de 16 cm². Arătaţi că aria laterală a prismei este de $32\sqrt{2}$ cm².

5. O piramidă triunghiulară regulată are volumul de $300\sqrt{3}$ cm³ şi apotema bazei de 5 cm. Calculaţi aria laterală a piramidei.

Fişa nr.5: Verbul „ARGUMENTEAZĂ”

Citiţi cu atenţie enunţurile următoare şi justificaţi:

1. Paralelipipedul dreptunghic care are toate muchiile congruente este cub – justificare prin desen.

2. Latura bazei unei prisme triunghiulare regulate este jumătate din înălţime, atunci aria unei feţe laterale este de trei ori mai mică decât aria laterală a prismei. Construiţi un exemplu numeric ilustrativ.

3. Aria laterală a unei prisme patrulatere regulate este egală cu aria bazei sale, atunci latura bazei este de patru ori mai mică decât înălţimea sa.

Adevărat sau fals?

1. Dacă latura bazei unei prisme triunghiulare regulate se dublează, atunci aria laterală a prismei se dublează şi ea.

2. Dacă latura bazei unei piramide patrulatere regulate se triplează, atunci volumul piramidei se triplează şi el.

3. Dacă muchia unui cub se înjumătăţeşte atunci cubul care se formează are aria laterală o pătrime din aria laterală a cubului iniţial.

Fişa nr.6: Verbul „APLICĂ”

1. Un cub are muchia de 3 cm. Aria totală a cubului este de:

a) 24 cm²;

b) 54 cm²;

c) 35 cm².

2. O prismă triunghiulară regulată care are l = 6 cm şi h = 5 cm are aria laterală de:

a) 65 cm²;

b) 70 cm²;

c) 90 cm².

3. O piramidă patrulateră regulată care are aria bazei de 16 cm² şi h = 4 cm, atunci:

a) l =h;

b) l = 2 h;

c) h = 3 l.

4. Secţiunea diagonală a unei prisme patrulatere regulate este un pătrat cu latura de 6 cm. Volumul prismei este de:

a) 120 cm³;

b) 96 cm³;

c) 75 cm³;

d) 108 cm³.

Pentru evaluarea activităţii, după expirarea timpului de lucru (20-25 minute), am aplicat metoda **„turul galeriei”**.

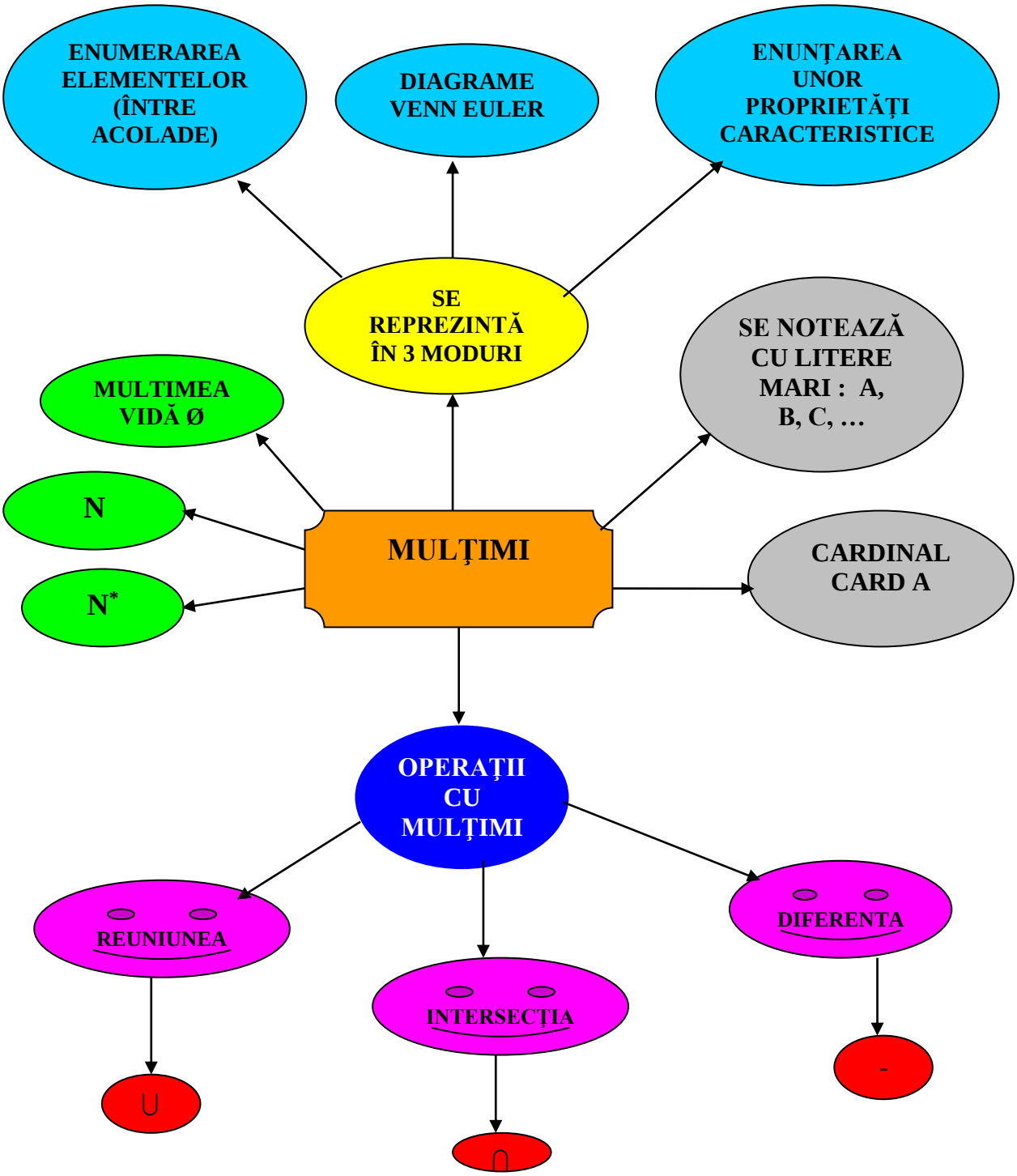
Materialele realizate au fost expuse în 6 locuri vizibile. Elevii din fiecare grup şi-au prezentat sarcina de lucru şi modul de realizare a ei, după care au acordat note materialelor realizate de celelalte grupe, urmând ca eu să discut împreună cu ei obiectivitatea notelor acordate şi să corectez eventualele erori.

Ca **PREMIU**, fiecare echipă a primit câte un material informativ, astfel:

- Echipa 1 – un material despre marele matematician Euler
- Echipa 2 – un referat cu tema *Poliedrele regulate* (tetraedrul, cubul, octoedrul, dodecaedrul)
- Echipa 3 – un material despre *Marea Piramidă – Piramida lui Keops*.
- Echipa 4 – un material informativ despre poliedre aşa cum sunt prezentate de şcoala lui Platon
- Echipa 5 – un referat despre Arhimede şi corpurile semiregulate
- Echipa 6 – un material informativ despre Aristotel, întemeietorul logicii ca ştiinţă.

Materialele vor fi multiplicate pentru fiecare membru al echipei şi vor fi afişate în clasă

Anexa 4. ***Aplicaţi metoda ciorchinelui la recapitularea unităţii de învăţare –Mulţimi – clasa a V-a***


ENUMERAREA ELEMENTELOR (ÎNTRE ACOLADE)
DIAGRAME VENN EULER
ENUNŢAREA UNOR PROPRIETĂŢI CARACTERISTICE
SE REPREZINTĂ ÎN 3 MODURI
SE NOTEAZĂ CU LITERE MARI : A, B, C, …
MULTIMEA VIDĂ Ø
N
N*
MULŢIMI
CARDINAL CARD A
OPERAŢII CU MULŢIMI
REUNIUNEA
INTERSECŢIA
DIFERENTA
∪
∩
-

6. STUDIU DE SPECIALITATE: DETERMINAREA PROBABILITĂŢII UNUI EVENIMENT CU AJUTORUL SCHEMELOR CLASICE DE PROBABILITATE

Prof. Iuliana TRAŞCĂ,
Şcoala Gimnazială „Gheorghe Popescu" Mărgineni – Slobozia

Abstract. *Classical schemes of probability represent mathematical models for many phenomena occuring in nature and society, and are important for probability calculus himself. The Poisson's scheme, the Bernoulli's scheme and the hypergeometric scheme are presented and some of their applications too.*

Studiul aşa numitelor *scheme clasice de probabilitate* este important datorită faptului că acestea constituie modele matematice pentru multe fenomene întâlnite în natură şi în societate. Aceste scheme de probabilitate au o mare însemnătate pentru însuşi calculul probabilităţilor, ca ştiinţă matematică.

În cele ce urmează vom studia trei scheme de probabilitate.

Ele ne oferă un răspuns pentru calculul probabilităţii unor evenimente în anumite situaţii, să le numim „situaţii standard".

1. Schema binomială generalizată (sau Schema lui Poisson)

Activitate iniţială

Trei trăgători execută foc asupra unei ţinte. Din 100 de încercări, primul nimereşte ţinta, în medie, de 70 de ori, al doilea de 80 de ori, iar al treilea de 90 de ori. Fiecare din cei trei trage câte un foc asupra ţintei. Găsiţi probabilitatea ca, din cele trei focuri trase, două să nimerească ţinta şi al treilea să o rateze.

Mod de rezolvare. Putem considera următoarele evenimente:

A_1 : „focul tras de primul trăgător nimereşte ţinta";

A_2: „focul tras de al doilea trăgător nimereşte ţinta";

A_3: „focul tras de al treilea trăgător nimereşte ţinta"şi notăm cu A evenimentul a cărui probabilitate s-a cerut.

Pentru a se realiza evenimentul A, trebuie să se realizeze două din cele trei evenimente A_i şi să nu se realizeze celălalt eveniment(3 -2 = 1), adică trebuie să se realizeze unul din evenimentele $A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}$, $A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3$, $\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3$. Rezultă că A este reuniunea celor trei evenimente $A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}$, $A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3$, $\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3$, care sunt incompatibile. Aplicăm prima regulă de adunare a probabilităţilor şi obţinem

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) + P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) + P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3).$$

Cele trei evenimente care se intersectează în egalitatea anterioară sunt evenimente independente şi atunci probabilitatea intersecţiei lor este egală cu produsul probabilităţilor evenimentelor care se intersectează. Astfel, putem scrie

$$P(A) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3}) + P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3) + P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot P(A_3).$$

Dacă notăm cu $p_i = P(A_i)$ şi $q_i = 1 - p_i$, $i \in \{1,2,3\}$, atunci egalitatea de mai sus devine

$$P(A) = p_1\cdot p_2\cdot q_3 + p_1\cdot q_2\cdot p_3 + q_1\cdot p_2\cdot p_3 .$$

Se observă că membrul al doilea al acestei egalităţi este egal cu coeficientul lui x^2 din polinomul $(p_1x + q_1)(p_2x + q_2)(p_3x + q_3)$.

Pentru problema noastră $p_1 = \frac{70}{100} = 0,7$; $q_1 = 1 - 0,7 = 0,3$; $p_2 = 0,8$;

$q_2 = 1 - 0,8 = 0,2$; $p_3 = 0,9$; $q_3 = 1 - 0,9 = 0,1$.

Aşadar, $P(A) = 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,1 + 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,398$.

Rezolvarea problemei se poate rezuma astfel:

Dându-se trei evenimente independente A_1, A_2, A_3 ale unei experienţe , probabilitatea realizării a două evenimente din cele trei este egală cu coeficientul lui x^2 din polinomul $(p_1x + q_1)(p_2x + q_2)(p_3x + q_3)$, unde $p_i = P(A_i)$ şi $q_i = 1 - p_i$, $i \in \{1,2,3\}$[3, p. 252].

În general pentru n evenimente independente diferite, putem aplica:

Schema binomială generalizată sau **schema lui Poisson.**

Dacă $A_1, A_2, ..., A_n$ *sunt evenimente independente, atunci probabilitatea să se realizeze k din cele n evenimente (şi să nu se realizeze n - k) este coeficientul lui* X^k *din dezvoltarea polinomului* $(p_1X + q_1)(p_2X + q_2)..(p_nX + q_n)$ *unde* p_i *este probabilitatea evenimentului* A_i *şi* $q_i = 1 - p_i, i \in \{1,2,...,n\}$.

Demonstraţie. Notăm cu A evenimentul a cărui probabilitate se cere.

Fie $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k}$ cele k evenimente care se realizează şi $A_{i_{k+1}}, A_{i_{k+2}}, ..., A_{i_n}$ cele $n - k$ evenimente care nu se realizează. Pentru a se realiza A , trebuie să se realizeze unul din evenimentele de forma $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap \overline{A}_{i_{k+2}} \cap ... \cap \overline{A}_{i_n}$.

Rezultă că A este reuniunea evenimentelor incompatibile de această formă:

$A = \bigcup (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap \overline{A}_{i_{k+2}} \cap ... \cap \overline{A}_{i_n})$,

unde $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ parcurge familia submulţimilor de k elemente ale mulţimii de indici $\{1,2,...,n\}$. Deducem că $P(A) = \sum p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot ... \cdot p_{i_k} \cdot q_{i_{k+1}} \cdot ... \cdot q_{i_n}$. Observăm că membrul drept al acestei egalităţi este coeficientul lui X^k din dezvoltarea polinomului $(p_1X + q_1)(p_2X + q_2)...(p_nX + q_n)$[2, p.28].

Exemple.

1) În trei cutii se găsesc câte 10 piese identice, confecţionate respectiv de trei muncitori. Cele trei cutii conţin respectiv 2, 1, 3 piese defecte. Alegem câte o piesă din fiecare cutie. Care este probabilitatea ca toate piesele să fie bune (o piesă este bună când nu este defectă)? Dar numai una singură?

Soluţie. Considerăm evenimentele independente:

A_1: „piesa din prima cutie este bună”;

A_2: „piesa din a doua cutie este bună”;

A_3: „piesa din a treia cutie este bună”.

Avem $p_1 = P(A_1) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ (8 piese din prima cutie sunt bune), $q_1 = 1 - p_1 = \frac{1}{5}$, $p_2 = \frac{9}{10}$, $q_2 = \frac{1}{10}$, $p_3 = \frac{7}{10}$, $q_3 = \frac{3}{10}$.

Problema cere probabilitatea realizării a 3 din cele trei evenimente, respectiv a unui singur eveniment din cele trei.

Aplicăm schema lui Poisson pentru $n = 3$, $k = 3$ pentru prima cerinţă şi $n = 3$, $k = 1$ pentru a doua cerinţă. Folosim polinomul $\left(\frac{4}{5}x + \frac{1}{5}\right)\left(\frac{9}{10}x + \frac{1}{10}\right)\left(\frac{7}{10}x + \frac{3}{10}\right)$.

Prima probabilitate este coeficientul lui x^3 din acest polinom, adică $\frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{63}{125}$.

A doua probabilitate cerută este coeficientul lui x din dezvoltarea aceluiaşi polinom şi este egală cu $\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{7}{10}=\frac{23}{250}$.

2) Se dau 3 urne: U_1 conţine 4 bile albe şi 6 bile verzi, U_2 conţine 8 bile albe şi 2 verzi, U_3 conţine 5 bile albe şi 5 bile verzi. Din fiecare urnă se extrage câte o bilă. Care este probabilitatea ca să apară 2 bile albe şi una verde ?

Soluţie. Luăm evenimentele independente :

A_1: „bila din prima urnă este albă";

A_2: „bila din a doua urnă este albă";

A_3: „bila din a treia urnă este albă".

Problema cere găsirea probabilităţii producerii a două din cele trei evenimente, lucru care se poate face aplicând schema lui Poisson. Calculăm $p_1=P(A_1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, $q_1=1-p_1=\frac{3}{5}$, $p_2=P(A_2)=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$, $q_2=1-p_2=\frac{1}{5}$, $p_3=P(A_3)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$, $q_3=1-p_3=\frac{1}{2}$. Considerăm $n=3$, $k=2$ şi rezultă că probabilitatea cerută este coeficientul lui X^2 din dezvoltarea polinomului $\left(\frac{2}{5}X+\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}X+\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}\right)$, adică $\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{11}{25}$.

2. Schema binomială (Bernoulli)

Dacă evenimentele independente $A_1, A_2, ..., A_n$ *au aceeaşi probabilitate,* $p_i = p$; $q_i = q = 1-p, i\in\{1,2,...,n\}$,*atunci probabilitatea să se realizeze k din cele n evenimente este coeficientul lui* x^k *din dezvoltarea binomului* $(px+q)^n$, *adică este egală cu* $C_n^k p^k q^{n-k}$.

Observaţii.

1) Schema lui Bernoulli poate fi privită ca un caz particular al schemei lui Poisson, în care evenimentele independente sunt echiprobabile.

2) Schema descrisă a căpătat denumirea de *schema lui Bernoulli* , întrucât studiul ei sistematic a fost făcut de cunoscutul savant elveţian Jacob Bernoulli, care a trăit spre sfârşitul secolului al XVII-lea(1654-1705)[1, p. 39].

3) Modelul matematic al schemei lui Bernoulli poate fi dat de o urnă în care avem a bile albe şi b bile roşii şi efectuăm din urnă *n* extrageri, punând după fiecare extragere bila extrasă înapoi[2, p. 30]. Probabilitatea ca la o extragere să obţinem o bilă albă este:

$$p=\frac{a}{a+b}.$$

Probabilitatea ca din *n* extrageri să obţinem *k* bile albe este $C_n^k p^k q^{n-k}$ [2, p. 31].

Exemple.

1) Se aruncă o monedă de n ori. Care este probabilitatea ca, din cele n aruncări, să apară de k ori faţa cu banul ?

Soluţie. Experienţa ξ a aruncării de n ori a unei monede constă în: prima aruncare a monedei (ξ_1), a doua aruncare (ξ_2), etc. Considerăm următoarele evenimente:

A_1: „ apare banul la prima aruncare";

A_2 : „apare banul la a doua aruncare”, etc., respectiv legate de evenimentele ξ_1, ξ_2, …, ξ_n. Evenimentele $A_1, A_2, ..., A_n$ sunt independente şi avem $p = P(A_1) = P(A_2) = ... = P(A_n) = \frac{1}{2}$ şi $q = \frac{1}{2}$.

Probabilitatea ca, în cele n aruncări, să obţinem de k ori banul este egală cu $C_n^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = C_n^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Generalizarea problemei propuse este: Dacă A este un eveniment asociat unei experienţe, cu probabilitatea $P(A) = p$ şi dacă repetăm de n ori experienţa, atunci probabilitatea ca A să se realizeze de k ori este egală cu $C_n^k p^k q^{n-k}$, unde $q = 1 - p$ şi, prin abuz de limbaj, am spus A în loc de $A_1, A_2, ..., A_n$ [2, p.29-30].

2) O urnă conţine 6 bile verzi şi 4 bile roşii. Se extrag succesiv din urnă trei bile, bila extrasă fiind pusă înapoi în urnă înainte de fiecare extragere. Care este probabilitatea ca din cele trei bile extrase, 2 să fie verzi şi una roşie ?

Soluţie. Considerăm evenimentele independente A_1: „prima bilă extrasă este verde”, A_2: „a doua bilă extrasă este verde”, A_3: „a treia bilă extrasă este verde”. Problema cere probabilitatea realizării a două din cele trei evenimente.

La o efectuare a experienţei probabilitatea evenimentului „bila extrasă este verde” este de $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Suntem în cazul schemei lui Bernoulli pentru $n = 3$, $k = 2$, $p = \frac{3}{5}$, $q = \frac{2}{5}$. Probabilitatea cerută este coeficientul lui X^2 din binomul $\left(\frac{3}{5}X + \frac{2}{5}\right)^3$ adică $C_3^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{54}{125}$.

3) Se aruncă de 15 ori două zaruri. Aflaţi probabilitatea ca să apară de 4 ori suma 9.

Soluţie. Avem o experienţă care permite aplicarea schemei lui Bernoulli.

La o efectuare a experienţei, evenimentul „ apariţia sumei 9” are probabilitatea $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ (deoarece sunt 6 · 6 = 36 cazuri posibile, iar suma 9 se obţine pentru perechile(3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4), adică avem 4 cazuri favorabile).

Conform schemei lui Bernoulli, aplicată pentru $n = 15$, $k = 4$, $p = \frac{1}{9}$, $q = \frac{8}{9}$, probabilitatea cerută este $C_{15}^4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{11}$

3. Schema hipergeometrică (Schema bilei neîntoarse)

Ca model matematic, schema hipergeometrică are acelaşi punct de plecare ca schema lui Bernoulli, şi anume extragerea dintr-o urnă, cu o componenţă dată, a unui număr de bile. Diferenţa esenţială este aceea că, la schema hipergeometrică, după fiecare extragere, bila extrasă nu este pusă înapoi în urnă.

Schema hipergeometrică:

Dintr-o urnă cu a bile albe şi b bile roşii (a + b = N) se extrag n bile, $n \le N$, fără ca să se pună după fiecare extragere bila extrasă înapoi în urnă. Probabilitatea ca din n extrageri să obţinem α bile albe (şi evident $n - \alpha$ bile roşii) este

$$P_n(\alpha)=\frac{C_a^{\alpha}\cdot C_b^{n-\alpha}}{C_N^n}.$$

Să determinăm şi condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească numărul de bile albe α, pentru a putea funcţiona corect schema.

Cum $\alpha \le n$ şi $\alpha \le a$, rezultă că $\alpha \le \min(a,n)$. Dacă sunt α bile albe, atunci $n-\alpha$ sunt bile roşii, de unde $n-\alpha \le b$ sau $\alpha \ge n-b$. Dar $\alpha \ge 0$, deci $\alpha \ge \max(0,n-b)$. Deci

$$\max(0,n-b)\le \alpha \le \min(a,n).$$

Demonstraţie. În condiţiile schemei, numărul cazurilor posibile este dat de numărul de combinări făcute cu N bile din urnă, luat în raport cu numărul n de bile extrase. Determinăm mai departe numărul cazurilor favorabile, adică numărul grupurilor de α bile albe şi $n-\alpha$ bile roşii. Sunt C_a^{α} grupuri de α bile albe pe care le putem forma cu cele a bile din urnă şi $C_b^{n-\alpha}$ grupări de $n-\alpha$ bile roşii, pe care le putem forma cu cele b bile roşii existente în urnă. Obţinem $C_a^{\alpha}\cdot C_b^{n-\alpha}$ cazuri favorabile. De aici rezultă formula pentru $P_n(\alpha)$[2, p.31].

Exemple.

1) Dintr-o urnă în care sunt aşezate toate numerele naturale de la 1 la 90, se extrag 6 numere. Care este probabilitatea ca să iasă două din numerele:

5, 72, 27, 31, 16, 82 ?[3, p. 32]

Rezolvare. Observăm că numerele extrase nu se întorc în urnă după extragere.

Numărul cazurilor posibile este numărul de combinări făcute cu cele 90 de numere din urnă, luate câte 6 numere (câte se extrag). Găsim C_{90}^6 cazuri posibile.

Observăm mai departe că din cele 6 numere două trebuie să iasă şi 6 – 2 = 4 nu. Se poate aplica schema bilei neîntoarse pentru N = 90, n = 6, α =2, $n-\alpha$ = 4, a = 6, b = 90 – 6 = 84.

Aşadar, probabilitatea cerută este $\frac{C_6^2\cdot C_{84}^4}{C_{90}^6}$.

2) O urnă conţine 15 bile albe şi 20 bile negre. Se extrag 7 bile fără întoarcerea bilei extrase. Care este probabilitatea ca , din cele 7 bile extrase, 2 să fie albe şi 5 negre ?

Rezolvare. Suntem în cazul bilei neîntoarse. Numărul total de bile este N =15 + 20 = 35. Numărul de bile extrase este n = 7. Numărul cazurilor posibile este C_{35}^7, iar numărul cazurilor favorabile este $C_{15}^2\cdot C_{20}^5$. Probabilitatea cerută este $\frac{C_{15}^2\cdot C_{20}^5}{C_{35}^7}$.

Observaţie. Schema hipergeometrică se poate generaliza pentru o urnă conţinând bile care au n culori. În acest caz obţinem probabilitatea cerută este $\frac{C_{a_1}^{\alpha_1}\cdot C_{a_2}^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot C_{a_n}^{\alpha_n}}{C_{a_1+a_2+\ldots+a_n}^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}$.

Exemplu.

Într-un coş sunt 100 mere, dintre care 10 sunt bătute, iar 4 sunt stricate(restul fiind bune). Din coş se aleg 12 mere. Aflaţi probabilitatea ca din acestea 8 să fie bune, 3 să fie bătute şi unul stricat.

Rezolvare. Observăm că în coş sunt 100 – 10 – 4 = 86 mere bune. Aplicăm acum generalizarea anterioară, pentru schema hipergeometrică, şi obţinem că probabilitatea cerută este

$$\frac{C_{86}^8\cdot C_{10}^3\cdot C_4^1}{C_{100}^{12}}.$$

Ştiaţi că…

Numele de schemă hipergeometrică provine de la faptul că valorile $P_n(\alpha)$ intervin în seria hipergeometrică a lui Gauss(1777 - 1855), unul din marii matematicieni ai lumii, care a publicat lucrări importante şi în teoria probabilităţilor[2, p. 31]

Bibliografie

[1] Gnedenko, B.V., Hincin, A.I. – *Introducere elementară în calculul probabilităţilor*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1953.
[2] Mihoc, Gh., Micu, N. - *Matematică – manual pentru clasa a XII-a, Elemente de teoria probabilităţilor şi statistică matematică* – Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.
[3] Burtea, M., Burtea, G. – *Matematică – Manual pentru clasa a X-a, Trunchi comun+ Curriculum diferenţiat* – Editura Carminis Educational, Piteşti, 2005.

7. STUDIU DE SPECIALITATE: CARACTERISTICI DE DISPERSIE

Iuliana TRAŞCĂ,
Şcoala Gimnazială „Gheorghe Popescu" Mărgineni – Slobozia

Studiul elementelor de statistică matematică este important pentru desluşirea informaţiilor care ne înconjoară şi care, interpretate în mod eronat, conduc la concluzii greşite asupra problemei sau fenomenului studiat. Pentru elevii clasei a X-a de liceu, învăţarea *caracteristicilor de dispersie* contribuie la îndeplinirea acestui obiectiv. Aceste caracteristici oferă informaţii asupra valorilor unei variabile statistice şi furnizează date care ajută la formularea unor predicţii privind producerea viitoare a fenomenului cercetat.

Pentru predarea – învăţarea acestei lecţii am gândit utilizarea unor sugestii metodice, menite să îndrume activitatea didactică.

La începutul lecţiei avem un *antrenament mental* care ajută la recapitularea cunoştinţelor din lecţiile precedente şi *o situaţie – problemă*, menită să implice şi să motiveze elevii pentru activităţile desfăşurate în cadrul orei.

Scoatem în evidenţă apoi greşelile pe care le pot face elevii în învăţarea caracteristicilor de dispersie. Modalităţile de remediere rămân la latitudinea fiecărui profesor de matematică. Noi am gândit câteva posibilităţi, pe care le-am şi expus.

Sumarul sintetizează cunoştinţele teoretice predate. Puteţi lăsa elevii să facă acest sumar în ultimele minute din oră. Aşa veţi avea un real feed-back, care este necesar unei învăţări eficiente, şi veţi putea observa modul în care elevii au înţeles cunoştinţele predate.

1. Iniţierea activităţii

Antrenament mental – calcul al parametrilor de poziţie

Pentru mulţimea de date 2, 4, 5, 5, 6, 8 cât este mediana ? Dar modul ? Care este valoarea medie a seriei ?

Recurgerea la o situaţie - problemă

Se studiază timpul necesar fabricării unei piese de către muncitorii a două ateliere de acelaşi profil. Datele obţinute formează două serii statistice cu o variabilă, descrise în tabelul următor[4, p. 24].:

Timpul (min.)	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	170
Nr. muncitori seria 1	0	1	0	2	0	0	4	0	0	1	0	1	1
Nr. muncitori seria 2	0	0	0	0	1	2	4	0	2	0	1	0	0

Calculaţi pentru fiecare serie cei trei parametri de poziţie, adică modul, mediana, valoarea medie. Ce observaţi ? Ce puteţi spune de modul de răspândire, faţă de valoarea medie, a valorilor pentru cele două serii ?

2. Repere strategice ale lecţiei

● Arătaţi elevilor că valoarea medie, fiind puternic influenţată de „outliers" (valorile extreme), nu poate furniza o descriere exactă, corectă a datelor[37, p.440]. Pentru a susţine cele afirmate, consideraţi două mulţimi de date care au aceeaşi valoare medie, dar ale căror

valori sunt mai grupate sau mai împrăştiate faţă de valoarea medie calculată. Implicaţi elevii în alcătuirea celor două mulţimi de date.

● Este firesc că pasul următor al lecţiei este completarea informaţiilor furnizate de valoarea medie cu o măsură care să ne arate gradul în care valorile sunt mai apropiate sau mai depărtate faţă de valoarea medie.

● Puteţi defini amplitudinea unei serii statistice prin analogie cu conceptul de amplitudine(lungime) a unei clase(interval), şi într-un caz şi în celălalt amplitudinea fiind diferenţa valorilor extreme.

● Motivaţi folosirea relativ restrânsă a amplitudinii pentru studierea gradului de împrăştiere a datelor, prin faptul că, deşi este un indicator care trebuie să caracterizeze dispersia tuturor valorilor unei variabile, amplitudinea are dezavantajul că nu ţine seama de mulţimea valorilor considerate.

Conduceţi discuţia către următorul pas al lecţiei prin întrebări de tipul: „Ce se întâmplă cu amplitudinea dacă se elimină valoarea maximă sau cea minimă a seriei date?”, „Pentru calculul amplitudinii câte valori ale variabilei folosim ?” „Sunt folosite toate valorile seriei date ?”, „Ne ajută acest indicator pentru a şti cât de răspândite faţă de medie sunt valorile variabilei considerate ?”. Elevii vor constata singuri, răspunzând la aceste întrebări, care sunt limitele folosirii amplitudinii. Astfel se creează atmosfera şi motivaţia necesare cunoaşterii celorlalte caracteristici de dispersie – dispersia şi abaterea medie pătratică - care să servească scopului nostru: acela de a afla cât de dispersate sunt valorile seriei studiate faţă de medie.

● Folosiţi ambele denumiri pentru cele două caracteristici: *dispersie – varianţă, abatere medie pătratică – deviaţie*(*abatere*) *standard*.

● Pentru aflarea *dispersiei* şi a *abaterii medii pătratice*, calculele, uneori greoaie, impun folosirea calculatorului şi consider că este suficient să se lucreze în clasă o singură aplicaţie, precum următorul:

Exemplu :

Notele obţinute la un test de cei 20 *elevi din clasei a X-a B sunt* :

3, 7, 8, 5, 5, 3, 4, 7, 7, 8, 8, 6, 5, 7, 9, 9, 10, 7, 5, 6.

a) *Care este amplitudinea seriei* ?

b) *Reproduceţi tabelul următor, completaţi primele trei coloane şi calculaţi media* $\bar{x}$ *(notaţiile sunt cele folosite în lecţie).*

Note (x_i)	Fr. abs. (n_i)	$n_i\, x_i$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$n_i \lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$n_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2$
3 : :	2 : :	6 : :	… : :	…. : :	… : :
	Total N =	Total A=		Total B =	Total C=

a) *Terminaţi calculul din tabel.*

b) *Calculaţi abaterea medie* $D_x = \dfrac{B}{N}$, *varianţa* (*dispersia*) V = $\sigma^2 = \dfrac{C}{N}$ *şi abaterea medie pătratică* (*deviaţia standard*) $\sigma = \sqrt{\dfrac{C}{N}}$.

c) *Alt calcul pentru dispersie.*

Reproduceţi tabelul de mai jos cu aceleaşi valori pentru seria dată şi completaţi-l.

Note (x_i)	Fr. abs. (n_i)	x_i^2	$n_i\, x_i^2$
3 : :	2 : :	9 : :	18 : :
			Total D =

Verificaţi, pentru acest exemplu, că $\sigma^2 = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2$.

Observaţiile necesare lucrului pentru acest exemplu se vor face pe parcursul rezolvării, atât frontal, cât şi individual. Urmează ca, după aceea, elevii să-şi însuşească deprinderile de calcul, rezolvând singuri una sau două din aplicaţiile de pe fişa de lucru suplimentară sau din manual.

● De multe ori este mai simplu să se calculeze dispersia folosind formula:

$\sigma^2 = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2$. Lucrând acelaşi exerciţiu şi în al doilea mod, elevii vor constata că obţin acelaşi rezultat pentru cele două caracteristici de dispersie.

● Elevii pot întreba care este caracteristica de împrăştiere cel mai des utilizată şi de ce. Fiţi pregătiţi să aduceţi argumente în favoarea folosirii abaterii medii pătratice, altele decât acela că valoarea medie nu caracterizează suficient de bine o serie statistică.

Astfel, **dacă** elevii vor şti că:

▪ abaterea medie pătratică se obţine în urma unui calcul relativ uşor, care face apel la operaţii cu numere reale(calcul numeric);

▪ o valoare scăzută a abaterii medii pătratice reflectă o mare concentrare a datelor în jurul valorii medii şi reciproc;

▪ abaterea medie pătratică este legată de dispersia aşa - numitelor distribuţii normale, reprezentate printr-o curbă în formă de clopot, care sunt cele mai frecvente[6, p.183];

▪ valoarea medie şi abaterea medie pătratică intervin în calculul extremităţilor a două intervale $[\overline{x}-\sigma;\overline{x}+\sigma]$ şi $[\overline{x}-2\sigma;\overline{x}+2\sigma]$, care se iau adesea în considerare în studiile statistice.

▪ Procentajul valorilor (variabilei) situate în aceste intervale, este folosit, în particular, la definirea standardelor(normelor) tehnice (pentru instrumente de măsurare, utilaje industriale, ş.a.)[43, p.193];

atunci ei vor afla răspuns la întrebări, vor fi mai motivaţi pentru studiul acestui indicator şi vor realiza legătura dintre acesta şi viaţa practică.

● Expresiile dispersiei şi abaterii medii pătratice par să fie greu de reţinut, astfel că pentru unii elevi este mai uşor să reţină aceste definiţii verbale:

▪ Dispersia este media pătratelor „distanţelor” fiecărei valori faţă de medie.

▪ Abaterea medie pătratică este rădăcina pătrată a dispersiei.

3. ***Analiza erorilor***

Greşeli posibile	**Modalităţi de remediere**
Confundă caracteristicile de dispersie cu cele de poziţie	Daţi elevilor ca sarcină în timpul orei următoare să realizeze o hartă conceptuală a caracteristicilor, de poziţie şi de dispersie, studiate sau cereţi elevilor să scrie pe o coală A_4 cu un marker, pe coloane distincte caracteristicile de poziţie, respectiv pe cele de dispersie, cu formulele lor.

Greşesc formula $\sigma^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$, scriind-o invers	Puneţi câţiva elevi să repete pe rând această proprietate, folosind propoziţia: *Dispersia este media pătratelor valorilor minus valoarea medie la pătrat*

4.Sumarul lecţiei

● *Amplitudinea, dispersia* şi *abaterea medie pătratică* sunt indicatorii răspândirii sau împrăştierii valorilor dintr-o serie statistică.

În cadrul lecţiei de predare a acestei teme, pot exista una sau mai multe secvenţe de învăţare cu ajutorul calculatorului. Folosim calculatorul în scopul creării unor lecţii de statistică dinamice şi atractive. Implementarea unor elemente de informatică este o modalitate de predare–învăţare care motivează elevii şi determină o înţelegere corectă şi de lungă durată a fenomenelor studiate.

Folosind limbajul de programare C/C++ şi ca interfaţă de prezentare programul PowerPoint, elevii vor calcula indicatorii de dispersie şi vor observa cum se modifică aceştia dacă se adaugă sau se elimină anumite valori ale variabilei studiate.

Formule de calcul:

Amplitudinea unei serii statistice este $A = x_{max} - x_{min}$

Dispersia se calculează cu formula

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{p} n_i}$$

, unde x_i sunt valorile variabilei, iar n_i este frecvenţa absolută a valorii x_i

Abaterea medie pătratică se notează σ şi este rădăcina pătrată a dispersiei.