REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

IUNIE 2021

ISSN 2065-6432

www.mateinfo.ro

REVISTĂ DIN FEBRUARIE 2009

revista.mateinfo@yahoo.com

COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ŞI SUSŢINĂTOR PERMANENŢI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ŞI NELA CICEU

ARTICOLE REVISTĂ:

1. **Miscellaneous matematic … pag. 2**

Neculai Stanciu

2. **Tangent Line Method … pag. 13**

Marin Chirciu

3. **Învăţarea centrata pe elev în cadrul orelor de matematică ... pag. 92**

Borcoman Ana

4. **Calculul ariei unor elemente ale cercului... pag. 115**

Dida-Cristina Isaia

1. Miscellaneous matematic

de Neculai Stanciu, Buzău

Matematica este regina ştiinţelor (*Karl Friedrich Gauss* (1777-1855)).

Matematica este muzica raţiunii (*James Joseph Sylvester* (1814-1897)).

Matematica este o limbă şi o ştiinţă (*Lucian Blaga* (1895-1961)).

Matematica este un joc care se joacă după anumite reguli simple cu semne fără înţeles pe hârtie (*David Hilbert* (1862-1943)).

Matematica este nici mai mult, nici mai puţin, decât partea exacta a gândirii noastre (*Luitzen Egbertus Jan Brouwer* (1881-1966)).

Matematica este un joc cu cele mai simple legi ale judecăţii omeneşti (*Mihai Eminescu* (1850-1889)).

Matematica este un mod de exprimare a legilor naturale, este cel mai simplu şi cel mai potrivit chip de a înfăţişa o lege generală sau curgerea unui fenomen, este cea mai perfectă limbă în care se poate povesti un fenomen natural (*Gheorghe Ţiţeica* (1873-1939)).

Matematica este ceea ce începe, ca şi Nilul, în modestie şi se termină în magnific (*Calvin Colton* **(1789-1857)).**

Matematica este limbajul universului. Aşa că cu cât ştii să rezolvi mai multe ecuaţii, cu atât poţi conversa mai mult cu cosmosul (*Neil deGrasse Tyson* **(1958-)).**

Matematica este la fel de mult un aspect al culturii ca şi o colecţie de algoritmi (*Carl Benjamin Boyer* **(1906-1976)).**

Matematica este limba cu care Dumnezeu a scris universul (*Galileo Galilei* (1564-1642)).

Matematica este arta de a da acelaşi nume la diferite lucruri (*Henri Poincaré* (1854-1912)).

Matematica este singura metafizică bună (*Lord Kelvin* (1824-1907)).

Matematica constă în a dovedi ceea ce este evident în cel mai puţin evident mod (*George Pólya* (1887-1985)).

Matematica este o formă de poezie care transcende poezia prin aceea că proclamă adevărul; o formă de raţionament care transcende raţionamentul prin aceea că vrea să înfăptuiască adevărul pe care îl proclamă; o formă de acţiune, un comportament ritual, care nu găseşte împlinire în faptă, ci trebuie să proclame şi să elaboreze o formă poetică a adevărului (*Salomon Bochne* (1899-1982)).

Matematica este ştiinţa care trage concluzii necesare (*Benjamin Peirce* (1809-1880)).

Matematica poate fi definită ca materia în care nu ştim niciodată despre ce vorbim, nici dacă ceea ce spunem este adevărat (*Bertrand Russell* (1872-1970)).

Matematica, în sensul cel mai larg, este dezvoltarea tuturor tipurilor de raţionament formal, necesar şi deductiv (*Alfred North Whitehead* (1861-1947)).

Matematica este judecătorul suprem; nu există recurs faţă de deciziile sale (*Tobias Dantzig* (1884-1956)).

Matematica este tăcerea care mângâie lumea în sensul religios (*Dima Zainea* **).**

Matematica este unealta în mod special adaptată pentru a avea de a face cu concepte abstracte de orice fel şi nu există o limită a puterii sale în acest domeniu (*Paul Dirac* (1902-1984)).

Matematica este ştiinţa operaţiilor abile cu concepte şi reguli inventate în acest scop **(***Eugene Paul Wigner* **(1902-1995)).**

Matematica este ştiinţa tiparelor (*Lynn Steen* (1941-2015)).

Matematica nu este un limbaj, este o aventură (*Paul Lockhart* (1956-)).

Matematica e un mod de viaţă. Acela de a trăi în siguranţă (*David Boia*).

Matematica este o colecţie de trucuri ieftine şi glume murdare (*Lipman Bers* (1914-1993)).

Eseul *''Scuza matematicianului''* al lui *Godfrey Harold Hardy* (1877-1947), dezvăluie (printre alte lucruri strălucite):

- O ştiinţă sau artă pot fi socotite utile dacă dezvoltarea lor contribuie la bunăstarea materială şi confortul oamenilor, dacă promovează fericirea.
- Gloria matematicienilor se măsoară în inutilitatea operei lor.
- Matematica lui *Fermat*, *Euler*, *Gauss*, *Abel* şi *Riemann* este aproape în întregime nefolositoare.

''Eseul lui Hardy rămâne în istoria matematicii şi a culturii ca o pledoarie pasionată pentru valorile estetice ale raţionamentului matematic, comparate de autor cu cele ale limbajului poetic'' *Viorel Barbu* (1941-)

În şcoala românească structura matematicii este corect reprezentată. Bineînţeles, există opinii care ar dori:

- *''mai mult''* - dorinţa de a face mai multă logică formală care să o aproprie de formalizările acesteia: calculul propoziţional şi calculul cu predicate; din alt unghi de vedere se doreşte dezvoltarea unor domenii ale matematicii şcolare, de exemplu geometria - într-o structură de sistem deductiv semiformalizat sau
- *''mai puţin''* - reduceri drastice de demonstraţii şi chiar din riogoarea prezentării unor concept) în programele şi implicit în manualele şcolare. Actuala selectare a conţinutului matematicii în şcoală reprezintă o poziţie de echilibru.

Creşterea rigorii limbajului profesorului poate avea efecte negative asupra accesibilităţii.

"*Mintea intuitivă este un dar sacru și mintea rațională este un servitor credincios. Am creat o societate care valorifică servitorul și a uitat darul*." *Albert Einstein*

Există două feluri de **gândire în matematică**:

1. **gândirea logică** (raţiunea) şi
2. **gândirea intuitivă** (intuiţia).

Matematica nu se reduce la logică, iar gândirea matematică are o importantă componentă intuitivă, care este, de fapt, adevărata forţă a raţionamentului matematic. În descoperirea matematică trebuie să existe un echilibru subtil între intuiţie şi rigoare logică.

Logicismul a fost creat de *Gottlob Frege* (1848-1925), *Bertrand Russel* (1872-1970), *Alonzo Church* (1903-1995), *Rudolf Carnap* (1891-1970), *Richard Dedekind* (1831-1916), *Georg Cantor* (1845-1918), *Giuseppe Peano* (1858-1932), *Karl Weierstrass* (1815-1897) ş.a. Formalismul a fost creat de *David Hilbert*. Programul hilbertian prevede elaborarea unor teorii axiomatice formalizate necontradictorii şi complete. Acest deziderat este dovedit irealizabil de *Kurt Gődel* (1906-1978).

Intuiţionismul a fost întemeiat de *L.E.J. Brouwer* pe baza ideilor lui *Émile Borel* (1871-1956), *Henri Lebesgue* (1875-1941), *Henri Poincaré* (1854-1912), *Bernhard Riemann* (1826-1866) ş.a. Matematica adevărată, pură, autentică este o realitate independentă, echivalentă cu acele construcţii mentale intuitive, ireductibile. Logica intervine la un stadiu ulterior al metamorfozei suferite de realitatea matematică. Limbajul şi logica intervin în creaţia matematică doar pentru comunicare.

În matematică, unele **definiţii** sunt exagerat de riguros ştiinţific introduse. Din acest punct de vedere ele devin ineficiente. Asigurarea rigorii trebuie realizată într-un mod gradat, accesibil şi coerent. De multe ori efectul este deplasarea înţelegerii spre memorare mecanică. Definiţiile riguroase dau vigoare şi consistenţă logică, dar pun în dificultate învăţământul matematic, care operează mai bine cu variante intuitive. Formalizarea a îndepărtat matematica de ştiinţele şi domeniile în care aceasta joacă un rol central de câteva secole.

Exemplificăm durerile facerii definiţiilor prin următorul exemplu. Presupunem că avem lângă noi o oaie. Vom studia conceperea definiţiei de către diverse personae.

Def 1- Specialistul de la facultatea de biologie: precizează denumirea ştiinţifică şi clasificarea zoologică împreună cu amabila ofertă de argumentare a clasificării.

Def 2- Specialistul zootehnic: aflăm rasa, linia de obţinere a ei şi eventualele considerente asupra potentialului economic şi genetic individual.

Def. 3 – Ciobanul de la care a fost luată oaia: ''Este o oaie a lui Vasile Ipate; nu prea dă lapte şi se umple de scaieţi''.

Def. 4 – Specialistul în industria alimentară: ne oferă detalii asupra calităţii cărnii.

Def. 5 – Specialistul din industria pielii: precizează calitatea blănii ce se poate preleva.

Def. 6 – Ministrul Agriculturii, Petre Daea: ''Oaia e o statuie vie. Lângă oaie găseşti o frunză, dar lângă frunză nu găseşti o oaie''.

Def. 7 – Filosoful: ''Oaia este o formă de existenţă a materiei şi orice alt detaliu este superfluu''.

Def. 8 – de la un *vânzător*: aflăm preţul pe care l-am putea obţine.

O posibilă definiţie concisă şi explicativă pentru ''om'' ar fi: omul este un animal social, dar cu siguranţă nu am aprecia dacă am fi strigaţi pe stradă ''măi animalule ! ''.

Deoarece s-a constatat că 50% dintre elevi uită definiţiile, iar cei care le reţin le redau cu omisiuni esenţiale, deducem că matematicii îi revin următoarele sarcini:

- Toleranţa faţă de definiţii;
- Stoparea (sau temporarea) efortului definitoriu;
- Folosirea definiţiilor echivalente;
- Operarea cu explicaţii în loc de definiţii.

Limbajul hibrid folosit de profesori ne aminteşte de faptul că dacă unul aruncă o piatră în lac, atunci alţi zece nu pot să o scoată. O astfel de meschinărie este este depunctarea ereziei ''$=$'', scăpate de un elev bun, într-o lucrare, în locul savantului ''$\equiv$''. Acum, cu noile manuale, există posibilitatea de a dezvăţa profesorii de asemenea meschinării. În acest sens relatăm câteva fapte istorice.

David Hilbert, a introdus simbolul $\equiv$ (congruenţă) pentru a marca o relaţie primară guvernată de cele cinci axiome din grupa III pentru a nu deconspira prematur că este o relaţie de echivalenţă. După stabilirea acestui fapt, revine la notaţia uzuală, $=$. Aşadar, cei care susţin caracterul ştiinţific a notaţiei $\equiv$ nu par a fi citit mai mult de zece pagini din *''Gründlagen der Geometrie''*.

După *Dan Brânzei* (1942-2012), semnul cel mai inspirit pentru relaţia de congruenţă este $\Rightarrow$şi aparţine lui *Dan Barbilian* (1895-1961); simetria acestei relaţii se obţine din axiome prin raţionamente foarte precise.

În teoria mulţimilor , egalitatea elementelor era transferată prin principiul extensiei la coincidenţa mulţimilor, notată $\equiv$. Ulterior, pentru liniarizarea scrierii, semnul $\equiv$ a fost înlocuit prin $=$. Deci, notarea congruenţei triunghiurilor prin$\equiv$sugerează coincidenţa mulţimitor respective. Luări de atitudine similar celei de aici au fost numeroase imediat după 1980, dar au fost blocate deoarece linia novatoare avea girul celei mai importante familii.

Un adevăr fundamental pe care *Henri Poincaré* îl suţine în numeroase eseuri este: *Matematica nu se reduce la logică, iar gândirea matematică are o importantă componentă intuitivă, care este, adevărata forţă a raţionamentului matematic.*

Observăm la elevi faptul că unora le place să trateze problemele prin ''*logică*'', celorlalţi prin ''*intuiţie*'' .

Raţionamentele care fac apel la **logică** ne conduc întotdeauna la *tautologii*, care nu ar putea crea ceva nou. Într-un anumit sens pentru a face aritmetică, sau geometrie, ne trebuie şi **intuiţie.** Unii elevi au:

1. o **intuiţie geometrică** (figurativă), în timp ce alţii au
2. o **intuiţie algebrică** (operaţională).

Relatăm aici următoare întâmplare.

Andrei Nikolaevici Kolmogorov (1903-1987) *a susţinut o conferinţă despre geometria analitică plană. Întrebat despre succesul conferinţei, a spus că este foarte nedumerit, deoarece a fost lăudat de doi dintre ascultători.*

- Pare foarte normal !

- Nu chiar aşa pentru că m-au lăudat din unghiuri opuse, chiar contradictorii. Unul a spus că abia cu ajutorul sistemelor liniare a înţeles de ce pentru două drepte există doar posibilitatea de a fi paralele, secante sau confundate, fiind imposibil să aibă în comun două sau trei puncte.

- Şi celălalt ?

- Celălalt m-a felicitat că acum a înţeles de ce un sistem linear de două ecuaţii cu două necunoscute poate avea doar zero, una sau o infinitate de soluţii.

Profesorul trebuie să părăsească cadrul abstract şi să opereze cu modele familiare.

George Polya (1887-1985) afirmă:

''Uzaţi de toate mijloacele pentru a face abstracţiunile accesibile. Nimic nu este prea bun sau prea rău, prea poetic sau prea vulgar pentru a clarifica abstracţiunile''.

Michael Eyquem de Montaigne (1533-1592) afirmă:*''Adevărul este un lucru atât de mare, încât nu trebuie să dispreţuim nici unul dintre mijloacele ce ne pot conduce la el. De aceea, dacă sufletul vă îndeamnă să fiţi un pic poetic sau un pic vulgar în clasă, nu vă lăsaţi împiedicaţi de o jenă nejustificată''.*

Ludwig Mies van der Rohe (1886-1969), marele architect german avea o vorbă *''Mai puţin este mai mult''*, şi dacă toţi profesorii şi-ar aminti acest adagio, atunci întreaga audienţă ar fi mai înţeleptă şi mai fericită.

Lecţiile elementare sunt cele mai plăcute. **Lecţiile** trebuie să fie simple şi elementare, nu complicate şi tehnice.

O definiţie bună pentru un savant este cea care satisface regulile logicii.

În învăţământ, o definiţie bună este cea pe care elevii o înţeleg !

De ce oare atât de mulţi elevi nu înţeleg matematica ?
''Oamenii cred că nu înţeleg matematica, dar totul e cum o explici lor. Dacă întrebi un beţiv care număr este mai mare, 2/3 sau 3/5, atunci nu va fi în stare să-ţi spună. Dacă îl întrebi: ce e mai bine, 2 sticle de vodcă pentru 3 oameni sau 3 sticle de vodcă pentru 5 oameni, atunci îţi va răspunde imediat: 2 sticle de vodcă la 3 oameni, bineînţeles !'' Israel Gelfand (1913-2009).

Dacă ne bazăm pe **intuiţie**, aceasta nu dă rigoare, iar **logica** naşte uneori monştri.
Această criză care durează până în zilele noastre, poate fi stăpânită păstrând o dreaptă măsură în procesul de predare între definiţiile formale riguroase şi cele intuitive provenite din practica istorică şi aplicaţiile matematicii în ştiinţele naturii şi tehnologie.

Henri Poincaré, pledează împotriva exagerărilor formalismului logic în predarea matematicii şi în favoarea construcţiilor bazate pe intuiţie – sursa dintotdeauna a ideilor matematice.

Concentrarea mentală la matematică, este intensă iar presiunea psihologică este considerabilă. Urmează un punct de vedere personal. Un olimpic la matematică:

- trebuie să aibă o motivaţie internă;
- dacă îţi place matematica, atunci satisfacţia pe care o obţii din rezolvarea problemelor grele este imensă;
- trebuie să fie interest cu pasiune de rezolvarea problemelor şi să i se dedice matematicii cu totul.

''**Problemele** *sunt motivul, mijlocul şi scopul învăţării matematicii şcolare*''. *Dan Brânzei*

Matematicienii sunt caracterizaţi fie ca ''**rezolvitori de probleme**'', fie ca ''**teoriticieni**'' (*Paul Erdős* (1913-1996) versus *Alexandre Grothendieck* (1928-2014), de exemplu), dar cei mai mulţi se poziţionează între, cu lucrări care soluţionează probleme, cât şi dezvoltarea unor teorii.

De fapt, o problemnă importantă tinde să dezvolte o teorie pentru soluţionarea ei (un exemplu clasic ar fi teorema lui *Pierre de Fermat* (1607-1665)). În schimb, o teorie care nu conduce la rezolvarea unor probleme concrete nu are nicio valoare.

George Pólya, în cartea *How to solve it ?* (apărută în limba română cu titlul *Cum rezolvăm o problemă ?*) prezintă patru paşi generali de abordare a unei probleme:

- înţelegerea problemei;
- elaborarea unui plan;
- aplicarea planului şi
- verificarea.

Spre deosebire de **exerciţiu**, care constă în aplicarea directă a noţiunilor teoretice învăţate, rezolvarea unei **probleme** necesită gândirea creatoare, imaginaţia matematică şi ingeniozitatea elevilor. În vederea rezolvării unei probleme, trebuie să ţinem cont de următoarele:

Înţelegerea problemei.
Iată întrebările care trebuie să ni le formulăm în această primă etapă: Care este necunoscuta? Care sunt datele? Care este condiţia? Este suficientă condiţia pentru a determina cerinţa? Trebuie să facem un desen? Care sunt noutăţile corespunzătoare? Care sunt diversele părţi ale condiţiei? Segmentele condiţiei se pot scrie în limbaj matematic?

Întocmire planului (construirea modelului matematic).
Am învăţat vreo teoremă care ar putea fi aplicată aici? Cunoaştem vreo problemă înrudită având aceeaşi necunoscută, sau căreia am putea să-i folosim metoda de rezolvare? Nu am putea să introducem un element auxiliar pentru a o face utilizabilă? Am putea-o reformula? Ne putem imagina o problemă mai generală? Dar una particulară? Au fost utilizate toate datele problemei? Enunţăm relaţiile dintre date şi necunoscute. Aceste relaţii pot fi egalităţi, inegalităţi sau de altă formă şi ele vor forma aşa-numitul model matematic al problemei.

Rezolvarea modelului matematic. Transformăm elementele care ni se dau şi cele necunoscute. Încercăm să introducem elemente noi, mai apropiate de datele problemei. Generalizăm. Examinăm cazurile particulare. Aplicăm analogii.

Verificarea soluţiei găsite.
Se interpretează datele obţinute. Se aleg soluţiile practice. Nu există oare o altă cale mai directă care să ne ducă la acelaşi rezultat? Se consemnează soluţiile găsite şi în acest fel, schema rezolvării unei probleme a luat sfârşit.

„Dacă vreţi să rezolvaţi o problemă trebuie… să rezolvaţi probleme” George Pólya.
Două aspecte paradoxale (*George Pólya*.):

1. De multe ori se învaţă mai cu folos prin rezolvarea unei probleme… rezolvate (folosindu-ne de alte metode);

2. Uneori, nerezolvarea unei probleme poate fi mai utilă pentru formarea priceperilor, decât rezolvările dintr-o bucată dar care în afară de satisfacţia succesului imediat s-ar putea să nu lase „urme” care să fie folosite şi la alte probleme.

Demonstraţia este produsul final al interacţiunii dintre imaginaţia creatoare şi raţionamentul critic.

Exemplele te ţin cu picioarele pe pământ, te ajută să faci teoria uşor de înţeles. Un exemplu bun este un lucru frumos şi convingător.

Strategia. Cu cât ştii mai multe trucuri şi metode, cu atât poţi încerca să rezolvi mai multe probleme diferite. O idee bună este să-ţi lărgeşti orizonturile.

Metoda este calea care trebuie urmată în vederea rezolvării unei probleme.Metodele generale sunt analiza, sinteza, metoda reducerii la absurd etc.

De exemplu, modul de abordare al lui *Michael Atiyah* (1929 - 2019) este evitarea atacului direct, căutarea unor abordări indirecte. Aceasta presupune conectarea la idei şi tehnici din diverse domenii care ar putea arunca o lumină neaşteptată asupra problemei.
Sir *Michael Atiyah* este matematicianul englez (90 de ani) care anunța recent că a rezolvat celebra **ipoteză Riemann** – 21 septembrie, 2018
(https://drive.google.com/file/d/17NBICP6OcUSucrXKNWvzLmrQpfUrEKuY/view).
După ce și-a prezentat calculele – 24 septembrie, 2018
(https://www.youtube.com/watch?v=jXugkzFW5qY&feature=youtu.be), matematicienii au căzut de acord: calculele lui nu sunt o demonstrație

(https://www.reddit.com/r/math/comments/9igc4d/atiyahs_lecture_on_the_riemann_hypothesis/?st=JMG4YU56&sh=7f88a951), deci premiul (**1 milion $**) rămâne în picioare.

O poveste cu matematicieni e medalia *Fields*. La *Heidelberg Laureate Forum* **HLF** se întâlnesc matematicienii și informaticienii (mulți laureați cu medalia *Fields*, premiul-*Abel* sau premiul *Turing*) pentru a discuta. E momentul când matematica și informatica se află în pragul a noi posibilități cu computerul cuantic și mașini care „învață”? Primul pas, curiozitatea. De multe ori, este suficient să fie “aruncate” anumite lucruri interesante, pentru ca cel care le află să vrea singur să caute mai departe. În același timp, ecuațiile nu trebuie neapărat evitate, depinde și de cunoștintele cititorului.

Mașinile vor deveni „inteligente” ca oamenii? Vom plăti numai cu moneda crypto? Are matematicianul *Michel Atiyah* dovada pentru conjectura *Riemann*? Discuțiile de la **HLF** pot interesa elevi, studenți, matematicieni.

Vasilios Mavroudis este unul din cei 200 de cercetători tineri prezenţi la *Heidelberg*. A ales informatica din curiozitate, pasiune și cu ceva noroc. Se preocupă cu securitatea sistemelor. Ca analist de securitate trebuie să te preocupi cu toate părțile sistemului. Dacă nu se găsesc locuri nesigure treaba e făcută bine.

David Patterson a realizat arhitectură inovatoare pentru computere și a primit premiul Turing. Acum e inginer la Google, acolo unde sunt şi studenții lui de altădată.

’’În esenţă însă, curiozitatea, povestea şi ecuaţiile sunt coloana vertebrală a comunicării ştiinţei’’ C. Prescură (1971-).

Sir *Michael Atiyah* a lovit din nou, de data aceasta în fizică – 30 septembrie, 2018. Într-un alt articol (https://goo.gl/oQyubJ), el susține că a găsit un principiu prin care se pot deduce constantele "fundamentale" din fizică, și exemplifică cu calculul constantei de structură fină (~1/137). Să aibă dreptate? Concluzia? Și de data aceasta calculele lui Sir *Michael Atiyah* sunt greșite (https://goo.gl/uKWfrr) !!! Alarmă falsă!

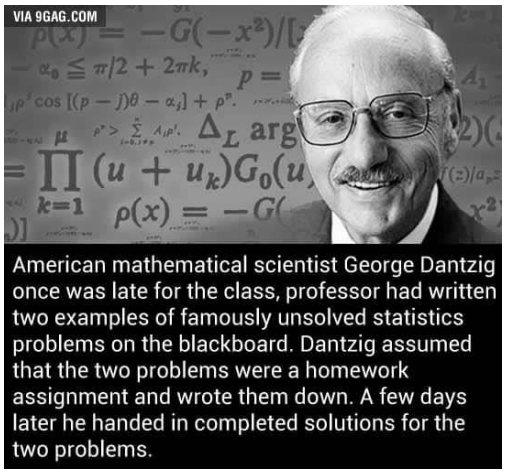
#Un ARGUMENT **FALS:**

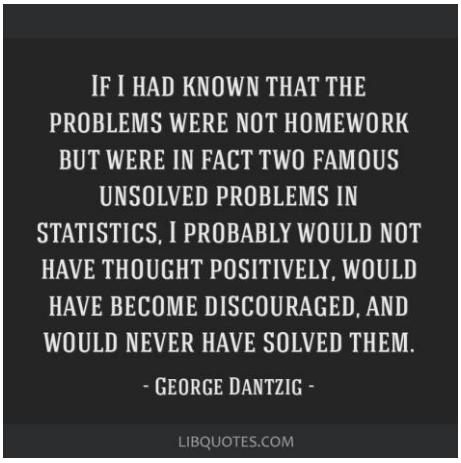
’’Îl respect pe *John Cook*, dar am fost dezamăgit de remarca lui că nici unul dintre criticii lui Sir *Michael Atiyah* nu are o medalie *Fields* sau un premiu *Abel*. Nu aveți nevoie de niciunul dintre aceste lucruri pentru a respinge un argument incorect’’. *David Radcliffe*

Inserăm aici următorul banc universitar:
Cică decanul unei facultăţi de prestigiu se uita la planul de achiziţie al departamentului de fizică şi se ia cu mâinile de cap:

“Vai de mine ! Uite ce de bani ! Uite ce vreţi ! Ciclotron ! Reactor de fisiune ! Reactor de fuziune ! O grămada de bani! De ce nu puteţi fi şi voi ca departamentul de matematică, ei vor doar creioane, hârtie şi un coş de gunoi ! Sau, şi mai bine, ca departementul de filozofie, care nici măcar coş de gunoi nu vor.’’

Pe de altă parte, ignoranţa poate fi o soluţie. Motivaţia este că un elev nu ar avea încredere să atace o problemă faimoasă, dar că, dacă nu i se spune nimic despre importanţa problemei, atunci ar putea face progrese. Această metodă era folosită de *John Edensor Littlewood* (1885-1977), care dădea ca teme studenţilor săi versiuni mascate ale ipotezei *Riemann*. Politica lui nu a dus la găsirea unei demonstraţii la ipoteza lui *Riemann*, dar a condus la formarea unor cercetători optimişti şi luptători.





Conform lui *Godfrey Harold Hardy* (1877-1947), matematica este jocul omului tânăr: *''Nu cunosc un exemplu de progres matematic major iniţiat de o persoană trecută de cincizeci de ani''*. Exemplificări:
- *Isaac Newton* (1643-1727) a renunţat la matematică la 50 de ani. Marile sale descoperiri le-a făcut până aproape de patruzeci de ani.
- *Évariste Galois* (1811-1832) a murit la 21 de ani, *Niels Henrik Abel* (1802-1829) la 27, *Srinivasa Ramanujan* (1887-1920) la 33, *Bernhard Riemann* (1826-1866) la 40.

Adeseori demonstraţiile date de *Euclid* (sec. III, î.e.n.) sunt găsite false, dar nicio teorie din toate cele 30 de cărţi nu este falsă. Acest fenomen nu se limitează doar la trecut. Un matematician de la *Mathematical Reviews* a spus odată că mai bine de jumătate din teoremele publicate în zilele noastre sunt adevărate, deşi demonstraţiile publicate sunt false.
Aşadar, latura logică a matematicii are încă nevoie de explorare.

Teoria

O teorie în matematică este dată de:
- un sistem de noţiuni şi relaţii N
- un sistem de propoziţii corect construite P
- un sistem de reguli de construcţie C
- un sistem de reguli de deducţie D
- un sistem de propoziţii adevărate A, ce îndeplineşte condiţiile:

a) $A \subset P$
b) P este stabilă în raport cu C (adică prin aplicări de reguli de construcţie unor propoziţii din P se obţin propoziţii correct construite)
c) A este stabilă în raport cu D

Definiţiile se pot preciza indicând:
- conţinutul, adică totalitatea proprietăţilor ei sau
- sfera, adică totalitatea obiectelor reprezentate de acea noţiune.

Există cinci modalităţi distincte de a defini o noţiune:
- prin sistem axiomatic (ex. noţiunea de număr natural prin considerarea sistemului axiomatic al lui *Peano*)

- prin gen proxim şi diferenţă specifică (ex. definiţia dreptunghiului, genul proxim este paralelogramul)
- enumerarea obiectelor din sferă (ex. patrulater particular: trapez, paralelogram, patrulater convex inscriptibil)
- desfacerea noţiunii pe component (ex. noţiunea de funcţie)
- factorizarea (ex. introducerea numărului rational pozitiv).

Axiomele sunt adevăruri acceptate.

Teoremele sunt adevăruri demonstrate. Teoremele sunt prezentate schematic sub forma *''dacă p atunci q''*, formă transcrisă logic prin $p \Rightarrow q$; spunem că q este **condiţie necesară** pentru p şi că p este **condiţie suficientă** pentru q.

Considerăm $p \Rightarrow q$ ca **teoremă directă**. Sunt cunoscute următoarele propoziţii derivate din cea directă:

- **reciproca** $q \Rightarrow p$
- **contrara** $\neg p \Rightarrow \neg q$
- **contrara reciprocei** $\neg q \Rightarrow \neg p$

Teorema directă este adevărată dacă şi numai dacă **contrara reciprocei** sale este adevărată. Pe această observaţie se bazează metoda demonstraţiei prin **reducere la absurd**, prin care, în loc să demonstrăm teorema directă, demostrăm contrara reciprocei.

Metoda demonstraţiei prin reducere la absurd este foarte utilă în matematică, deoarece de multe ori demonstraţia teoremei directe este foarte dificilă.

Dacă teorema directă şi teorema reciprocă sunt adevărate, atunci avem **condiţia necesară şi suficientă** $p \Leftrightarrow q$.

Propoziţiile care rezultă imediat din alte teoreme se numesc **corolarii.**

Rezultatele care pregătesc demonstraţia unei teoreme se numesc **leme.**

Cum să predăm matematica ?

Răspunsul dat de *Albert Einstein* (1879-1955) şi *Isaac Newton* (1643-1727):

1. stârnește **curiozitatea**;
2. imaginează **povestea** şi
3. construiește **jocul** (cu semne matematice şi legi ale judecăţii omeneşti).

Primele două etape fac parte natural din structura copiilor.

„Mintea unui copil nu este un vas ce trebuie umplut, ci un lemn care trebuie aprins cu o scânteie" Plutarh (45-127).

Curiozitatea este scânteia care, odată ce pătrunde în creier, declanşează o reacţie în lanţ. Aşa cum ştim de la copii, curiozitatea este satisfăcută prin poveşti. Acesta este **al doilea pas** în comunicarea ştiinţelor exacte. Înainte de a ne arunca în explicaţii complexe sau ecuaţii, trebuie să spunem o **poveste** simplă a curiozităţii observate. Succesul comunicării ştiinţei depinde în primul rând de povestea spusă. O poveste cât mai simplă dacă se poate, cu cuvinte obişnuite, imagini şi exemple din imediata apropiere a cititorului sau elevului. Părinţii se plâng de multe ori că, în loc să înveţe din manual, copiii stau pe internet urmărind înregistrări pe youtube. Adevărul este că acestea sunt populare tocmai pentru că spun poveşti atractive şi pe înţelesul lor.

Din păcate, legile naturii nu au fost scrise în limba română, altfel le-am fi aflat din poveștile bunicii sau din romanele lui *Mihail Sadoveanu* (1880-1961). Limbajul naturii este matematica, iar aceasta este o limbă nouă pentru oricare dintre noi. Cine nu o învaţă, nu va putea avansa în înţelegerea ştiinţei. Este cazul pseudoştiinţei, care continuă cu poveştile dincolo de cadrul natural al ştiinţei. De aceea, **al treilea pas** şi cel mai dificil, care nu este prezent mereu în comunicarea ştiinţelor exacte (dar nici nu trebuie neapărat evitat), îl reprezintă **ecuaţiile matematicii**.

Metoda de a introduce ecuațiile poate urmări firul poveștii. Astfel, "personajele" poveștii devin litere si cifre, iar ecuațiile se reconstruiesc folosind "acțiunea" poveștii. Cu cât "personajele" și "acțiunea" sunt mai clare, cu atât povestea este mai inteligibilă, fenomenul mai bine descris, iar ecuaţiile se reconstruiesc în mod natural. Nu este, desigur, o metodă așa de simplă cum este prezentată aici, însă, în linii mari, ea conține esența. Procedând așa, înainte de a ne arunca în rezolvarea ecuaţiilor, vom şti nu numai ce înseamnă fiecare literă, dar mai ales ce reprezintă ea. Pasul final (dacă vrem să ajungem acolo) este rezolvarea sistemului de ecuații. Și aici, însă, este un secret, pe care îl ştie oricine iubeşte matematica: ea trebuie privită ca un puzzle sau ca un rebus, nu ca pe o serie de metode "oarbe" de rezolvare. Elevii se pierd la matematică atunci când învaţă un set de metode pe care le aplică orbeşte, fără a înţelege de ce se folosesc sau la ce ajută. Dacă vi se întâmplă asta, daţi-le elevilor un sistem de ecuaţii, fără o metodă de rezolvare. Spuneţi-le că pot face ce vor ei, rămânând în cadrul legilor matematicii. Pot înmulți cu termeni în ambele părţi ale ecuaţiilor, pot aduna ecuaţiile între ele, le pot scădea, pot face cu adevărat orice vor. Scopul este să le rezolve. După multe încercări, vor reuşi. Pentru că au ajuns la rezultat singuri, se vor bucura, ca atunci când rezolvi un puzzle sau rebus. Cu atenţie, vor recunoaşte în demonstraţia lor şi o „metodă". Pe viitor, vor şti foarte bine să rezolve ecuaţii, pentru că au descoperit „metoda" ei înşişi, iar bucuria descoperirii li se întipăreşte în memorie.

Între poveşti şi ecuaţii există aproape mereu o tensiune, care se remarcă cel mai bine în structura manualelor de matematică. Obligate să se supună unei liste de cerinţe prea lungi din partea ministerului, manualele au puţine "poveşti", abia reuşind să introducă termenii de specialitate, pentru ca apoi să sară direct la ecuaţii, din lipsă de spaţiu. De aceea, un număr ridicat de elevi se îndepărtează de matematică de îndată ce sunt forţaţi să rezolve probleme pe care nici nu le înţeleg.

Comunicarea ştiinţelor exacte nu trebuie să parcurgă neapărat toate etapele de mai sus. Ea se poate opri chiar și la **primul pas, curiozitatea**. De multe ori, este suficient să fie "aruncate" anumite lucruri interesante, pentru ca cel care le află să vrea singur să caute mai departe. În același timp, ecuațiile nu trebuie neapărat evitate, depinde și de cunoștintele cititorului.

În esență însă, curiozitatea, povestea şi ecuaţiile sunt coloana vertebrală a comunicării ştiinţei. Și, atunci când vezi că înţelegi cu mintea ta lucruri pe care Einstein le-a descoperit, nici nu mai vrei să te oprești!
(https://www.youtube.com/watch?v=9mA8dk7_SJc – *Cristian Presură*, **TEDx Talks**, 27 septembrie, 2018).

''Profesorul este ca o lumânare care îi luminează pe alţii, consumându-se pe sine''
Giovanni Ruffini (1807-1881).

Ceea ce v-am spus în aceste pagini nu este o noutate, probabil mulţi s-au confruntat cu unele întrebări de aici într-o formă sau alta. Prezentarea propusă este din mai multe unghiuri de vedere.

''Când lumea o ia razna, matematicianul poate găsi în matematică un calmant care nu suferă comparaţie.'' Godfrey Harold Hardy (1877-1947).

Deoarece matematica este, dintre toate artele şi ştiinţele, cea mai austeră şi mai abstractă, matematicianul ar trebui să fie singurul care să-şi poată găsi refugiul acolo unde

''cel puţin unul din nobilele noastre impulsuri poate să evadeze cel mai bine din exilul plin de tristeţe al lumii actuale'' Bertrand Russel (1872-1970).

Încheiem această notă într-un mod optimist. Sperăm ca raţionamentul matematic, care nu se reduce doar la logică, iar forţa sa nu este doar un proces deductiv, să înglobeze şi unele practici şi experienţe umane. Latura matematică a universului are încă nevoie de explorare !

Matematica este mult peste mintea umană, iar mintea umană este mult peste un computer !

Surse:

1. Viorel Barbu – *Matematica şi cunoaşterea ştiinţifică*, Institutul European, 2011.
2. Dan Brânzei, Roxana Brânzei – *Metodica predării matematicii*, Editura Paralela 45, 2008.

Art 2219

2. Tangent Line Method

Marin Chirciu[1]

Articolul propune folosirea metodei Tangent Line pentru rezolvarea unor inegalităţi algebrice.

Ecuaţia tangentei în punctul $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$, situat pe graficul funcţiei derivabile f este:

$$y - f\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right).$$

În continuare , în raport de convexitatea funcţiei , se arată că graficul funcţiei este de o parte sau de cealaltă a tangentei în punctul considerat.

Astfel se obţine inegalităţi algebrice , printr-un procedeu standardizat.

Aplicaţii.

Aplicaţia 1.

1) If $x, y, z \geq 0$ such that $x + y + z = 3$ then

$$\sum \frac{x+1}{x^2+3} \leq \frac{3}{2}.$$

Soluţie

Demonstrăm

Lema

If $0 \leq x \leq 3$ then

$$\frac{x+1}{x^2+3} \leq \frac{3-x}{2}.$$

Demonstraţie

Folosim Tangent Line Method .

Consider funcţia $f:[0,3] \to \mathbf{R}$, $f\left(x\right) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

[1] *Profesor, Colegiul Naţional „Zinca Golescu”, Piteşti*

Ecuația tangentei în punctul $x_0 = 1$ este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Avem $f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x^2+3)^2}$.

Obținem ecuația tangentei $y = \frac{1}{2}$.

Arătăm că:

$f(x) = \frac{x+1}{x^2+3} \le \frac{1}{2}$.

Avem:

$\frac{x+1}{x^2+3} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x-1)^2 \ge 0$, evident cu egalitate pentru $x = 1$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum \frac{x+1}{x^2+3} \le \sum \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Remarcă.

Inegalitatea se poate dezvolta.

2) If $x, y, z \ge 0$ such that $x + y + z = 3$ and $n \ge 3$ then

$$\sum \frac{x+1}{x^2+n} \le \frac{6}{n+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Demonstrăm

Lema

If $0 \le x \le 3$ then

$$\frac{x+1}{x^2+n} \le \frac{(n-3)x + n + 5}{(n+1)^2}.$$

Demonstrație

Folosim Tangent Line Method .

Consider funcția $f:[0,3]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+n}$.

Ecuația tangentei în punctul $x_0=1$ este $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Avem $f'(x)=\dfrac{-x^2-2x+n}{(x^2+n)^2}$.

Obținem ecuația tangentei $y=\dfrac{(n-3)x+n+5}{(n+1)^2}$.

Arătăm că:

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2+n}\le\frac{(n-3)x+n+5}{(n+1)^2}.$$

Avem:

$\dfrac{x+1}{x^2+n}\le\dfrac{(n-3)x+n+5}{(n+1)^2}\Leftrightarrow(x-1)^2\left[(n-3)x+n+5\right]\ge 0$, care rezultă din condiția din ipoteză $n\ge 3$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum\frac{x+1}{x^2+n}\le\sum\frac{(n-3)x+n+5}{(n+1)^2}=\frac{(n-3)\sum x+3(n+5)}{(n+1)^2}=\frac{(n-3)\cdot 3+3(n+5)}{(n+1)^2}=\frac{6}{n+1}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Aplicația 2.

3) If $x,y,z\ge 0$ such that $x+y+z=1$ then

$$6\left(x^3+y^3+z^3\right)\ge x^2+y^2+z^2+\frac{1}{3}.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție</u>

Demonstrăm

<u>Lema</u>

If $0 \le x \le 1$ then

$$6x^3 - x^2 \ge \frac{4x-1}{3}.$$

Demonstrație

Folosim Tangent Line Method .

Consider funcția $f:[0,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = 6x^3 - x^2$.

Ecuația tangentei în punctul $x_0 = \frac{1}{3}$ este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Avem $f'(x) = 18x^2 - 2x$.

Obținem ecuația tangentei $y = \frac{4x-1}{3}$.

Arătăm că:

$f(x) = 6x^3 - x^2 \ge \frac{4x-1}{3}$.

Avem:

$6x^3 - x^2 \ge \frac{4x-1}{3} \Leftrightarrow (3x-1)^2(2x+1) \ge 0$, evident cu egalitate pentru $x = \frac{1}{3}$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum\left(6x^3 - x^2\right) \ge \sum \frac{4x-1}{3} = \frac{4\sum x - 3}{3} = \frac{4 \cdot 1 - 3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Remarcă.

Inegalitatea se poate dezvolta.

4) If $x, y, z \ge 0$ such that $x + y + z = 1$ and $n \ge 3$ then

$$n\left(x^3 + y^3 + z^3\right) \ge x^2 + y^2 + z^2 + \frac{n-3}{9}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Demonstrăm

Lema

If $0 \le x \le 1$ then

$$nx^3 - x^2 \ge \frac{9(n-2)x+3-2n}{27}.$$

Demonstrație

Folosim Tangent Line Method .

Consider funcția $f:[0,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = nx^3 - x^2$.

Ecuația tangentei în punctul $x_0 = \frac{1}{3}$ este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Avem $f'(x) = 3nx^2 - 2x$.

Obținem ecuația tangentei $y = \frac{9(n-2)x+3-2n}{27}$.

Arătăm că:

$$f(x) = nx^3 - x^2 \ge \frac{9(n-2)x+3-2n}{27}.$$

Avem:

$nx^3 - x^2 \ge \frac{9(n-2)x+3-2n}{27} \Leftrightarrow (3x-1)^2(3nx+n-3) \ge 0$, care rezultă din condiția din ipoteză $n \ge 3$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum(nx^3 - x^2) \ge \sum \frac{9(n-2)x+3-2n}{27} = \frac{9(n-2)\sum x + 3(3-2n)}{27} = \frac{9(n-2)\cdot 1 + 3(3-2n)}{27} =$$

$$= \frac{n-3}{9}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Aplicația 3.

5) If $-1 \le x, y, z \le 1$ such that $x + y + z = 1$ then

$$\sum \frac{1}{x^2+1} \le \frac{27}{10}.$$

Titu Andreescu și Gabriel Dospinescu, Old and News Inequalities, GIL-2006

Soluție

Demonstrăm

Lema

If $-1 \le x \le 1$ then

$$\frac{1}{x^2+1} \le \frac{54-27x}{50}.$$

Demonstrație

Folosim Tangent Line Method .

Consider funcția $f:[-1,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Ecuația tangentei în punctul $x_0 = \frac{1}{3}$ este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Avem $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$.

Obținem ecuația tangentei $y = \frac{54-27x}{50}$.

Arătăm că:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1} \le \frac{54-27x}{50}.$$

Avem:

$\frac{1}{x^2+1} \le \frac{54-27x}{50} \Leftrightarrow (3x-1)^2(4-3x) \ge 0$, evident cu egalitate pentru $x = \frac{1}{3}$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum \frac{x+1}{x^2+3} \le \sum \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Remarcă.

Inegalitatea se poate dezvolta.

6) If $-1 \le x, y, z \le 1$ such that $x + y + z = 1$ and $n \ge \frac{7}{9}$ then

$$\sum \frac{1}{x^2 + n} \le \frac{27}{9n+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Demonstrăm

Lema

If $-1 \le x \le 1$ then

$$\frac{1}{x^2 + n} \le \frac{81n + 27 - 54x}{(9n+1)^2}.$$

Demonstrație

Folosim Tangent Line Method .

Consider funcția $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + n}$.

Ecuația tangentei în punctul $x_0 = \frac{1}{3}$ este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Avem $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + n)^2}$.

Obținem ecuația tangentei $y = \frac{81n + 27 - 54x}{(9n+1)^2}$.

Arătăm că:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + n} \le \frac{81n + 27 - 54x}{(9n+1)^2}.$$

Avem:

$\frac{1}{x^2+n} \le \frac{81n+27-54x}{(9n+1)^2} \Leftrightarrow (3x-1)^2(9n-1-6x) \ge 0$, care rezultă din condiția din ipoteză $n \ge \frac{7}{9}$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum \frac{1}{x^2+n} \le \sum \frac{81n+27-54x}{(9n+1)^2} = \frac{3(81n+27)-54\sum x}{(9n+1)^2} = \frac{3(81n+27)-54\cdot 1}{(9n+1)^2} = \frac{27}{9n+1}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Aplicația 4.

1) 4624. If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=3$ then

$$\sqrt{\frac{ab}{2a+b+c}} + \sqrt{\frac{bc}{2b+c+a}} + \sqrt{\frac{ca}{2c+a+b}} \le \frac{3}{2}.$$

George Apostolopoulos, Greece, Crux Mathematicorum. No.3/2021

<u>Soluție.</u>

Din inegalitatea CBS obținem:

$$Ms = \sum \sqrt{\frac{ab}{2a+b+c}} = \sum \sqrt{\frac{ab}{a+(a+b+c)}} = \sum \sqrt{\frac{ab}{a+3}} \overset{CBS}{\le} \sqrt{\sum b \sum \frac{a}{a+3}} = \sqrt{\sum a \sum \frac{a}{a+3}} =$$

$$= \sqrt{3\sum \frac{a}{a+3}} \overset{Lema}{\le} \sqrt{3\cdot\frac{3}{4}} = \frac{3}{2} = Md.$$

Să demonstrăm

<u>Lema</u>

2) If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=3$ then

$$\sum \frac{a}{a+3} \le \frac{3}{4}.$$

<u>Demonstrație.</u>

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{a}{a+3} \le \frac{3a+1}{16} \Leftrightarrow (a-1)^2 \ge 0$, evident cu egalitate pentru $a=1$.

Obținem:

$$\sum \frac{a}{a+3} \le \sum \frac{3a+1}{16} = \frac{3\sum a+3}{16} = \frac{3\cdot 3+3}{16} = \frac{3}{4}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

3) If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=3$ and $\lambda \ge 1$ then

$$\sqrt{\frac{ab}{\lambda a+b+c}} + \sqrt{\frac{bc}{\lambda b+c+a}} + \sqrt{\frac{ca}{\lambda c+a+b}} \le \frac{3}{\sqrt{\lambda+2}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Din inegalitatea CBS obținem:

$$Ms = \sum \sqrt{\frac{ab}{\lambda a+b+c}} = \sum \sqrt{\frac{ab}{(\lambda-1)a+(a+b+c)}} = \sum \sqrt{\frac{ab}{(\lambda-1)a+3}} \overset{CBS}{\le} \sqrt{\sum b \sum \frac{a}{(\lambda-1)a+3}} =$$

$$\sqrt{\sum a \sum \frac{a}{(\lambda-1)a+3}} = \sqrt{3\sum \frac{a}{(\lambda-1)a+3}} \overset{Lema}{\le} \sqrt{3\cdot\frac{3}{4}} = \frac{3}{2} = Md.$$

Să demonstrăm

Lema

4) If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=3$ then

$$\sum \frac{a}{(\lambda-1)a+3} \le \frac{3}{\lambda+2}.$$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{a}{(\lambda-1)a+3} \le \frac{3a+\lambda-1}{(\lambda+2)^2} \Leftrightarrow 3(\lambda-1)(a-1)^2 \ge 0$, evident cu egalitate pentru $a=1$ sau $\lambda=1$.

Obținem:

$$\sum \frac{a}{(\lambda-1)a+3} \le \sum \frac{3a+\lambda-1}{(\lambda+2)^2} = \frac{3\sum a+3(\lambda-1)}{(\lambda+2)^2} = \frac{3\cdot 3+3(\lambda-1)}{(\lambda+2)^2} = \frac{3}{\lambda+2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Notă.

Pentru $\lambda=2$ se obține Problema 4624 din Crux Mathematicorum, No.3/2021.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Aplicația 5.

1) If $a,b,c>0$, $a+b+c=1$, then

$$\frac{a^2+ab}{1-a^2}+\frac{b^2+bc}{1-b^2}+\frac{c^2+ca}{1-c^2} \ge \frac{3}{4}.$$

Kunihiko Chikaya, Matematica 7/2020

Soluție.

Demonstrăm

Lema

2) If $0<a<1$ then

$$\frac{a}{1-a^2} \ge \frac{3}{32}(15a-1).$$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{a}{1-a^2} \ge \frac{3}{32}(15a-1) \Leftrightarrow (3a-1)^2(5a+3) \ge 0$, evident cu egalitate pentru $a=\frac{1}{3}$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$M_s = \sum \frac{a^2+ab}{1-a^2} = \sum \frac{a(a+b)}{1-a^2} \overset{Lema}{\ge} \frac{3}{32}\sum (15a-1)(a+b) = \frac{3}{32}\sum (15a-1)(1-c) =$$

$$= \frac{3}{32}\sum (15a-1-15ac+c) = \frac{3}{32}\left(16\sum a-3-15\sum bc\right) = \frac{3}{32}\left(16\cdot 1-3-15\sum bc\right)\frac{3}{4} =$$

$=\frac{3}{32}\left(13-15\sum bc\right)\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{4}=M_d$ unde (1) $\Leftrightarrow \frac{3}{32}\left(13-15\sum bc\right)\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow \sum bc\leq\frac{1}{3}$, care rezultă din

$1=a+b+c=\left(a+b+c\right)^2\geq 3\left(ab+bc+ca\right)$, de unde $\Leftrightarrow 1\geq 3\left(ab+bc+ca\right)\Leftrightarrow \sum bc\leq\frac{1}{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Remarcă.

3) If $a,b,c>0$, $a+b+c=1$, then

$$\frac{a^3+ab}{1-a^3}+\frac{b^3+bc}{1-b^3}+\frac{c^3+ca}{1-c^3}\geq\frac{3}{13}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Demonstrăm

Lema

4) If $0<a<1$ then

$$\frac{x^2}{1-x^3}\geq\frac{495x-87}{26^2}.$$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

$\frac{x^2}{1-x^3}\geq\frac{495x-87}{676}\Leftrightarrow\left(3x-1\right)^2\left(55x^2+27x+87\right)\geq 0$, evident cu egalitate pentru $x=\frac{1}{3}$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$M_s=\sum\frac{a^3+ab}{1-a^3}=\sum\frac{a^2\left(a+b\right)}{1-a^3}\overset{Lema}{\geq}\frac{1}{26^2}\sum\left(495a-87\right)\left(a+b\right)=\frac{1}{26^2}\sum\left(495a-87\right)\left(1-c\right)=$$

$$=\frac{1}{26^2}\sum\left(495a-87-495ac+87c\right)=\frac{1}{26^2}\left(282\sum a-3\cdot 87-495\sum bc\right)=$$

$$=\frac{1}{26^2}\left(582-261-495\sum bc\right)\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{26^2}\left(321-495\cdot\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{26^2}\left(321-165\right)=\frac{156}{676}=\frac{3}{13}=M_d,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \sum bc\leq\frac{1}{3}$, care rezultă din

$1=a+b+c=(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$, de unde $\Leftrightarrow 1\geq 3(ab+bc+ca)\Leftrightarrow \sum bc\leq \frac{1}{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Aplicația 6.

5) If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=3$ then

$$\frac{a}{1+3b^4}+\frac{b}{1+3c^4}+\frac{c}{1+3a^4}\geq \frac{3}{4}.$$

Matematica 7/2020

Soluție.

Demonstrăm

Lema

6) If $x>0$ then

$$\frac{1}{1+3x^4}\geq \frac{-3}{4}x+1.$$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

$\frac{1}{1+3x^4}\geq \frac{-3}{4}x+1 \Leftrightarrow 3x(x-1)^2(3x^2+2x+1)\geq 0$, evident cu egalitate pentru $x=1$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$M_s=\sum \frac{a}{1+3b^4}\overset{Lema}{\geq}\sum a\left(\frac{-3}{4}b+1\right)=\frac{-3}{4}\sum ab+\sum a\overset{(1)}{\geq}\frac{-1}{4}(a+b+c)^2+3=\frac{-1}{4}\cdot 9+3=\frac{3}{4}=Md$$

unde (1) $\Leftrightarrow (a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

7) If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=3$ and $n\geq 3$ then

$$\frac{a}{1+nb^4}+\frac{b}{1+nc^4}+\frac{c}{1+na^4}\geq \frac{3}{n+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Demonstrăm

Lema

8) If $x>0$ then

$$\frac{1}{1+nx^4}\geq\frac{-4n}{(n+1)^2}x+\frac{5n+1}{(n+1)^2}.$$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

$\frac{1}{1+nx^4}\geq\frac{-4n}{(n+1)^2}x+\frac{5n+1}{(n+1)^2}\Leftrightarrow(x-1)^2\left[4nx^3+(3n-1)x^2+(2n-2)x+n-3\right]\geq 0$, care rezultă din condiția din ipoteză $n\geq 3$, care asigură $\left[4nx^3+(3n-1)x^2+(2n-2)x+n-3\right]\geq 0$,

cu egalitate pentru $x=1$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$M_s=\sum\frac{a}{1+3b^4}\overset{Lema}{\geq}\sum a\left(\frac{-3}{4}b+1\right)=\frac{-3}{4}\sum ab+\sum a\overset{(1)}{\geq}\frac{-1}{4}(a+b+c)^2+3=\frac{-1}{4}\cdot 9+3=\frac{3}{4}=Md$$

unde (1) $\Leftrightarrow(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)\Leftrightarrow(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația 7.

1) If $x,y,z\geq 0$ and $x+y+z=3$ then

$$\frac{1}{x^3+8}+\frac{1}{y^3+8}+\frac{1}{z^3+8}\leq\frac{1}{3}.$$

Rahim Shahbazov, Baku, Azerbaijan, Mathematical Inequalities 6/2020

Soluție.

Demonstrăm

Lema

2) Dacă $x\geq 0$ atunci

$$\frac{1}{x^3+8}\leq\frac{4-x}{27}.$$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{1}{x^3+8} \le \frac{4-x}{27} \Leftrightarrow x^4-4x^3+8x-5 \le 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2-2x-5) \le 0$, evident cu egalitate pentru $x=1$, deoarece $(x^2-2x-5) \le 0$, pentru $0 \le x \le 3$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$Ms = \sum \frac{1}{x^3+8} \overset{Lema}{\le} \sum \frac{4-x}{27} = \frac{12-3}{27} = \frac{1}{3} = Md$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Remarcă .

Problema se poate dezvolta.

3) If $x, y, z \ge 0$ and $x+y+z=3$, $n \ge 7$ then

$$\frac{1}{x^3+n} + \frac{1}{y^3+n} + \frac{1}{z^3+n} \le \frac{3}{n+1}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Demonstrăm

Lema

4) Dacă $x \ge 0$ și $n \ge 7$ atunci

$$\frac{1}{x^3+n} \le \frac{n+4-3x}{(n+1)^2}.$$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{1}{x^3+n} \le \frac{n+4-3x}{(n+1)^2} \Leftrightarrow 3x^4-(n+4)x^3+3nx+1-2n \le 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2(3x^2+(2-n)x+1-2n) \le 0$, evident cu egalitate pentru $x=1$, deoarece $(3x^2+(2-n)x+1-2n) \le 0$, pentru $0 \le x \le 3$ și $n \ge 7$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$Ms=\frac{1}{x^3+n}\le\frac{n+4-3x}{(n+1)^2}\overset{Lema}{\le}\sum\frac{n+4-3x}{(n+1)^2}=\frac{3(n+4)-3\cdot 3}{(n+1)^2}=\frac{3(n+1)}{(n+1)^2}=\frac{1}{n+1}=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Aplicația 8.

5) Dacă a,b sunt numere reale atunci

$$\frac{a^4+9a^2+4}{5b^2+8}+\frac{b^4+9b^2+4}{5a^2+8}\ge a+b.$$

Constantin Nicolau, Curtea de Argeș,GM 5/2020

Soluție.

Demonstrăm

Lema

6) Dacă a este număr real atunci

$$\frac{a^4+9a^2+4}{5a^2+8}\ge a.$$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{a^4+9a^2+4}{5a^2+8}\ge a \Leftrightarrow a^4+9a^2+4\ge a\left(5a^2+8\right)\Leftrightarrow a^4-5a^3+9a^2-8a+4\ge 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-2)^2\left(a^2-a+1\right)\ge 0$, evident cu egalitate pentru $a=2$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Notăm $x=a^4+9a^2+4, y=5b^2+8, z=b^4+9b^2+4, t=5a^2+8$.

Obținem

$$\frac{a^4+9a^2+4}{5b^2+8}+\frac{b^4+9b^2+4}{5a^2+8}=\frac{x}{y}+\frac{z}{t} \text{ și } \frac{x}{y}+\frac{z}{t}\ge\frac{x}{t}+\frac{z}{y}\Leftrightarrow (x-z)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{t}\right)\ge 0\Leftrightarrow (x-z)(t-y)\ge 0$$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(a^4+9a^2+4-b^4-9b^2-4\right)\left(5a^2+8-5b^2-8\right)\ge 0\Leftrightarrow \left(a^4+9a^2-b^4-9b^2\right)\left(5a^2-5b^2\right)\ge 0\Leftrightarrow$

$5\left(a^2-b^2\right)^2\left(a^2+b^2+9\right)\ge 0$, evident cu egalitate pentru $a^2=b^2$.

Rezultă:

$$Ms=\frac{a^4+9a^2+4}{5b^2+8}+\frac{b^4+9b^2+4}{5a^2+8}\geq\frac{a^4+9a^2+4}{5a^2+8}+\frac{b^4+9b^2+4}{5b^2+8}\overset{Lema}{\geq}a+b=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=2$.

Remarcă .

Problema se poate dezvolta.

7) Dacă a,b sunt numere reale și $n>0$ atunci

$$\frac{a^4+(n+1)^2a^2+n^2}{(2n+1)b^2+n(n+2)}+\frac{b^4+(n+1)^2b^2+n^2}{(2n+1)a^2+n(n+2)}\geq a+b.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Demonstrăm

Lema

8) Dacă a este număr real și $n>0$ atunci

$$\frac{a^4+(n+1)^2a^2+n^2}{(2n+1)a^2+n(n+2)}\geq a.$$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{a^4+(n+1)^2a^2+n^2}{(2n+1)a^2+n(n+2)}\geq a\Leftrightarrow a^4+(n+1)^2a^2+n^2\geq a\left[(2n+1)a^2+n(n+2)\right]\Leftrightarrow$

$a^4-(2n+1)a^3+(n+1)^2a^2-n(n+2)a+n^2\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(a-n)^2(a^2-a+1)\geq 0$, evident cu egalitate pentru $a=n$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Notăm $x=a^4+(n+1)^2a^2+n^2, y=(2n+1)b^2+n(n+2)$,

$z=b^4+(n+1)^2b^2+n^2, t=(2n+1)a^2+n(n+2)$.

Obținem

$$\frac{a^4+(n+1)^2a^2+n^2}{(2n+1)b^2+n(n+2)}+\frac{b^4+(n+1)^2b^2+n^2}{(2n+1)a^2+n(n+2)}=\frac{x}{y}+\frac{z}{t} \text{ și } \frac{x}{y}+\frac{z}{t}\geq\frac{x}{t}+\frac{z}{y}\Leftrightarrow(x-z)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{t}\right)\geq 0\Leftrightarrow$$
$$(x-z)(t-y)\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\left(a^4+(n+1)^2a^2+n^2-b^4-(n+1)^2b^2-n^2\right)\left((2n+1)a^2+n(n+2)-(2n+1)b^2-n(n+2)\right)\geq 0\Leftrightarrow$$
$$\left(a^4+(n+1)^2a^2-b^4-(n+1)^2b^2\right)\left((2n+1)a^2-(2n+1)b^2\right)\geq 0\Leftrightarrow$$
$(2n+1)\left(a^2-b^2\right)^2\left(a^2+b^2+(n+1)^2\right)\geq 0$, evident cu egalitate pentru $a^2=b^2$.

Rezultă:

$$Ms=\frac{a^4+(n+1)^2a^2+n^2}{(2n+1)b^2+n(n+2)}+\frac{b^4+(n+1)^2b^2+n^2}{(2n+1)a^2+n(n+2)}\geq\frac{a^4+(n+1)^2a^2+n^2}{(2n+1)a^2+n(n+2)}+$$
$$+\frac{b^4+(n+1)^2b^2+n^2}{(2n+1)b^2+n(n+2)}\overset{Lema}{\geq}a+b=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=2$.

Aplicația 9.

1) If $a,b,c,d>0$ then
$$\sqrt[4]{\left(\frac{a}{b+c+d}\right)^3}+\sqrt[4]{\left(\frac{b}{c+d+a}\right)^3}+\sqrt[4]{\left(\frac{c}{d+a+b}\right)^3}+\sqrt[4]{\left(\frac{d}{a+b+c}\right)^3}\geq\frac{4}{\sqrt[4]{27}}.$$

Nguyen Viet Hung , 2020

<u>Soluție</u>.

Datorită omogenității se poate considera $a+b+c+d=4$.

Considerând $f(x)=\sqrt[4]{\left(\frac{x}{4-x}\right)^3}$ arătăm că $f(a)+f(b)+f(c)+f(d)\geq\frac{4}{\sqrt[4]{27}}$

Folosind Tangent Line Method arătăm că $f(x)=\sqrt[4]{\left(\frac{x}{4-x}\right)^3}\geq\frac{x}{\sqrt[4]{27}}$, (1).

Într-adevăr $\sqrt[4]{\left(\frac{x}{4-x}\right)^3}\geq\frac{x}{\sqrt[4]{27}}\Leftrightarrow\left(\frac{x}{4-x}\right)^3\geq\frac{x^4}{27}\Leftrightarrow x^4-12x^3+48x^2-64x+27=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-1)^2\left(x^2-10x+27\right)\geq 0$, evident cu egalitate pentru $x=1$.

Din (1) obținem $f(a)+f(b)+f(c)+f(d)\geq\frac{a++b+c+d}{\sqrt[4]{27}}=\frac{4}{\sqrt[4]{27}}$.

Alternativă.

Folosim inegalitatea lui Jensen pentru funcția convexă $f:(0,4)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt[4]{\left(\frac{x}{4-x}\right)^3}$, cu

$$f(x)=\left(\frac{x}{4-x}\right)^{\frac{3}{4}},\ f'(x)=\frac{3}{4}\cdot\frac{x^{\frac{3}{4}}}{(4-x)^{\frac{7}{4}}},\ f''(x)=\frac{3}{16}\cdot\frac{x^{\frac{-1}{4}}(3x+16)}{(4-x)^{\frac{11}{4}}}>0.$$

Obținem $f(a)+f(b)+f(c)+f(d)\geq 4f\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)=4f(1)=4\sqrt[4]{\left(\frac{1}{4-1}\right)^3}=\frac{4}{\sqrt[4]{27}}$.

În final deducem că are loc inegalitatea din enunț cu egalitatea dacă și numai dacă $a=b=c$.

În final deducem că are loc inegalitatea din enunț cu egalitatea dacă și numai dacă

$a=b=c=d$.

2) If $a,b,c,d>0$ and $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$ then

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b+c+d}\right)^{n-1}}+\sqrt[n]{\left(\frac{b}{c+d+a}\right)^{n-1}}+\sqrt[n]{\left(\frac{c}{d+a+b}\right)^{n-1}}+\sqrt[n]{\left(\frac{d}{a+b+c}\right)^{n-1}}\geq\frac{4}{\sqrt[n]{3^{n-1}}}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Datorită omogenității se poate considera $a+b+c+d=4$.

Considerând $f(x)=\sqrt[n]{\left(\frac{x}{4-x}\right)^{n-1}}$ arătăm că $f(a)+f(b)+f(c)+f(d)\geq\frac{4}{\sqrt[4]{27}}$

Folosim inegalitatea lui Jensen pentru funcția convexă $f:(0,4)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt[n]{\left(\frac{x}{4-x}\right)^{n-1}}$, cu

$$f(x)=\left(\frac{x}{4-x}\right)^{\frac{n-1}{n}},\ f'(x)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{x^{\frac{n-1}{n}}}{(4-x)^{\frac{2n-1}{n}}},\ f''(x)=\frac{n-1}{n^2}\cdot\frac{x^{\frac{-1}{n}}(4n+nx-x)}{(4-x)^{\frac{3n-1}{4}}}>0.$$

Obținem $f(a)+f(b)+f(c)+f(d)\geq 4f\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)=4f(1)=4\sqrt[n]{\left(\frac{1}{4-1}\right)^{n-1}}=\frac{4}{\sqrt[n]{3^{n-1}}}$.

În final deducem că are loc inegalitatea din enunț cu egalitatea dacă și numai dacă $a=b=c$.

În final deducem că are loc inegalitatea din enunț cu egalitatea dacă și numai dacă

$a=b=c=d$.

Notă.

Pentru $n=4$ se obține Problema propusă de Nguyen Viet Hung April 20, 2020 în RMM 4/2020.

Remarcă.

3) If $a,b,c>0$ then

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b+c}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{b}{c+a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{c}{a+b}\right)^2}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

Marin Chirciu, Pitești, Romania

Soluție.

Datorită omogenității se poate considera $a+b+c=3$.

Considerând $f(x)=\sqrt[3]{\left(\frac{x}{3-x}\right)^2}$ arătăm că $f(a)+f(b)+f(c)\geq\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

Folosind Tangent Line Method arătăm că $f(x)=\sqrt[3]{\left(\frac{x}{3-x}\right)^2}\geq\frac{x}{\sqrt[3]{4}}$, (1).

Într-adevăr $\sqrt[3]{\left(\frac{x}{3-x}\right)^2}\geq\frac{x}{\sqrt[3]{4}}\Leftrightarrow\left(\frac{x}{3-x}\right)^2\geq\frac{x^3}{4}\Leftrightarrow x^3-6x^2+9x-4=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-1)^2(4-x)\geq 0$, evident deoarece $x\in(0,3)$ cu egalitate pentru $x=1$.

Din (1) obținem $f(a)+f(b)+f(c)\geq\frac{a++b+c}{\sqrt[4]{27}}=\frac{3}{\sqrt[4]{27}}$.

Alternativă.

Folosim inegalitatea lui Jensen pentru funcția convexă $f:(0,3)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{\left(\frac{x}{3-x}\right)^2}$, cu

$$f(x)=\left(\frac{x}{3-x}\right)^{\frac{2}{3}},\ f'(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}}}{(3-x)^{\frac{5}{3}}},\ f''(x)=\frac{2}{9}\cdot\frac{x^{\frac{-1}{3}}(2x+9)}{(3-x)^{\frac{8}{3}}}>0.$$

Obținem $f(a)+f(b)+f(c)\geq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=3f(1)=3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3-1}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

În final deducem că are loc inegalitatea din enunț cu egalitatea dacă și numai dacă $a=b=c$.

4) If $a,b,c>0$ then

$$\sqrt[4]{\left(\frac{a}{b+c}\right)^3}+\sqrt[4]{\left(\frac{b}{c+a}\right)^3}+\sqrt[4]{\left(\frac{c}{a+b}\right)^3}\geq\frac{3}{\sqrt[4]{8}}.$$

Marin Chirciu, Pitești, Romania

Soluție.

Datorită omogenității se poate considera $a+b+c=3$.

Considerând $f(x)=\sqrt[4]{\left(\frac{x}{3-x}\right)^3}$ arătăm că $f(a)+f(b)+f(c)\geq\frac{3}{\sqrt[4]{8}}$

Folosim inegalitatea lui Jensen pentru funcția convexă $f:(0,3)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt[4]{\left(\frac{x}{3-x}\right)^3}$, cu

$$f(x)=\left(\frac{x}{3-x}\right)^{\frac{3}{4}},\ f'(x)=\frac{3}{4}\cdot\frac{x^{\frac{3}{4}}}{(3-x)^{\frac{7}{4}}},\ f''(x)=\frac{3}{16}\cdot\frac{x^{\frac{-1}{4}}(3x+12)}{(3-x)^{\frac{11}{4}}}>0.$$

Obținem $f(a)+f(b)+f(c)\geq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=3f(1)=3\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3-1}\right)^3}=\frac{3}{\sqrt[4]{8}}$.

În final deducem că are loc inegalitatea din enunț cu egalitatea dacă și numai dacă $a=b=c$.

5) If $a,b,c>0$ then

$$\sqrt[5]{\left(\frac{a}{b+c}\right)^4}+\sqrt[5]{\left(\frac{b}{c+a}\right)^4}+\sqrt[5]{\left(\frac{c}{a+b}\right)^4}\geq\frac{3}{\sqrt[5]{16}}.$$

Marin Chirciu, Pitești, Romania

Soluție.

Datorită omogenității se poate considera $a+b+c=3$.

Considerând $f(x)=\sqrt[5]{\left(\frac{x}{3-x}\right)^4}$ arătăm că $f(a)+f(b)+f(c)\geq\frac{3}{\sqrt[5]{16}}$

Folosim inegalitatea lui Jensen pentru funcția convexă $f:(0,3)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt[5]{\left(\frac{x}{3-x}\right)^4}$, cu

$$f(x)=\left(\frac{x}{3-x}\right)^{\frac{4}{5}},\ f'(x)=\frac{4}{5}\cdot\frac{x^{\frac{4}{5}}}{(3-x)^{\frac{9}{5}}},\ f''(x)=\frac{4}{25}\cdot\frac{x^{\frac{-1}{5}}(4x+15)}{(3-x)^{\frac{14}{5}}}>0.$$

Obținem $f(a)+f(b)+f(c)\geq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=3f(1)=3\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3-1}\right)^4}=\frac{3}{\sqrt[5]{16}}$.

În final deducem că are loc inegalitatea din enunț cu egalitatea dacă și numai dacă $a=b=c$.

6) If $a,b,c>0$ and $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$ then

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b+c}\right)^{n-1}}+\sqrt[n]{\left(\frac{b}{c+a}\right)^{n-1}}+\sqrt[n]{\left(\frac{c}{a+b}\right)^{n-1}}\geq\frac{3}{\sqrt[n]{2^{n-1}}}.$$

Marin Chirciu, Pitești, Romania

Soluție.

Datorită omogenității se poate considera $a+b+c=3$.

Considerând $f(x)=\sqrt[n]{\left(\frac{x}{3-x}\right)^{n-1}}$ arătăm că $f(a)+f(b)+f(c)\geq\frac{3}{\sqrt[n]{2^{n-1}}}$

Folosim inegalitatea lui Jensen pentru funcția convexă $f:(0,3)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt[n]{\left(\frac{x}{3-x}\right)^{n-1}}$, cu

$$f(x)=\left(\frac{x}{3-x}\right)^{\frac{n-1}{n}},\ f'(x)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{x^{\frac{n-1}{n}}}{(3-x)^{\frac{2n-1}{n}}},\ f''(x)=\frac{3}{16}\cdot\frac{x^{\frac{-1}{n}}(3n+nx-1)}{(3-x)^{\frac{3n-1}{n}}}>0.$$

Obținem $f(a)+f(b)+f(c)\geq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=3f(1)=3\sqrt[n]{\left(\frac{1}{3-1}\right)^{n-1}}=\frac{3}{\sqrt[n]{2^{n-1}}}$.

În final deducem că are loc inegalitatea din enunț cu egalitatea dacă și numai dacă $a=b=c$.

Aplicația 10.

If $x,y,z>0$ such that $x+y+z=3$ find the minimum value of

$$P=\frac{x^3}{y\sqrt{x^3+8}}+\frac{y^3}{z\sqrt{y^3+8}}+\frac{z^3}{x\sqrt{z^3+8}}.$$

Proposed by Hoang Le Nhat Tung, Hanoi, Vietnam, RMM Autumn-2021

Soluție.

Pasul 1.

Arătăm că $\frac{x^3}{\sqrt{x^3+8}}+\frac{y^3}{\sqrt{y^3+8}}+\frac{z^3}{\sqrt{z^3+8}}\geq 1$, (1).

Cu inegalitatea mediilor obținem:

$$\sqrt{x^3+8}=\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)}\leq\frac{(x+2)+(x^2-2x+4)}{2}=\frac{x^2-x+6}{2}\text{, de unde}$$

$$\sum\frac{x^3}{\sqrt{x^3+8}}\geq\sum\frac{2x^3}{x^2-x+6}\overset{(2)}{\geq}\sum\frac{17x-11}{18}=\frac{17\sum x-3\cdot 11}{18}=\frac{17\cdot 3-33}{18}=1\text{, unde (2) rezultă din}$$

Tangent Line Method:

$$\frac{2x^3}{x^2-x+6}\geq\frac{17x-11}{18}\Leftrightarrow 19x^3+28x^2-113x+66\geq 0\Leftrightarrow (x-1)^2(19x+66)\geq 0,$$

evident cu egalitate pentru $x=1$.

Pasul 2.

Arătăm că $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3$, (3).

Din inegalitatea mediilor AM-AH avem $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z}=\frac{9}{3}=3$.

Din (1) și (3) obținem

$$P=\frac{x^3}{y\sqrt{x^3+8}}+\frac{y^3}{z\sqrt{y^3+8}}+\frac{z^3}{x\sqrt{z^3+8}}\geq\frac{1}{3}\sum\frac{1}{x}\sum\frac{x^3}{\sqrt{x^3+8}}\geq\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 1=1.$$

Din $P \geq 1$, cu egalitate pentru $x = y = z = 1$ rezultă că minimul expresiei P este egal cu 1 și este atins pentru $(x, y, z) = (1,1,1)$.

Aplicația 11.

1) Fie $x, y, z > 0$ cu $x + y + z = 3$. Arătați că

$$\frac{7-6x}{2+x^2} + \frac{7-6y}{2+y^2} + \frac{7-z}{2+z^2} \geq 1.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim Tangent Line Method .

Rezultă $\frac{7-6x}{2+x^2} \geq \frac{-20x+23}{9} \Leftrightarrow 20x^3 - 23x^2 - 14x + 17 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(20x+17) \geq 0$, evident cu egalitate pentru $x = 1$.

Sumând $\frac{7-6x}{2+x^2} \geq \frac{-20x+23}{9}$ și ținând seama că $x + y + z = 3$ deducem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Remarcă.

Problema se poate dezvolta.

2) Fie $x, y, z > 0$ cu $x + y + z = 3$ și $n \geq 0$. Arătați că

$$\frac{3n+1-3nx}{n+x^2} + \frac{3n+1-3ny}{n+y^2} + \frac{3n+1-3nz}{n+z^2} \geq \frac{3}{n+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim Tangent Line Method .

Rezultă $\frac{3n+1-3nx}{n+x^2} \geq \frac{-(3n^2+3n+2)x+3n^2+4n+3}{(n+1)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3n^2+3n+2)x^3 - (3n^2+4n+3)x^2 - (3n^2+n)x + 3n^2+3n+1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left[(3n^2+3n+2)x + 2n^2+2n+1\right] \geq 0$, evident cu egalitate pentru $x = 1$.

Sumând $\frac{3n+1-3nx}{n+x^2} \geq \frac{-(3n^2+3n+2)x+3n^2+4n+3}{(n+1)^2}$ și ținând seama că $x + y + z = 3$ obținem:

$$M_s=\sum\frac{3n+1-3nx}{n+x^2}\geq\sum\frac{-\left(3n^2+3n+2\right)x+3n^2+4n+3}{\left(n+1\right)^2}=\frac{-\left(3n^2+3n+2\right)\sum x+3\left(3n^2+4n+3\right)}{\left(n+1\right)^2}=$$

$$=\frac{-\left(3n^2+3n+2\right)\cdot 3+3\left(3n^2+4n+3\right)}{\left(n+1\right)^2}=\frac{3\left(n+1\right)}{\left(n+1\right)^2}=\frac{3}{n+1}=M_d,$$

de unde deducem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Aplicația 12.

3) Fie $a,b,c>0$ astfel încât $a+b+c=6$. Arătați că

$$\frac{a^2}{a^2+2}+\frac{b^2}{b^2+2}+\frac{c^2}{c^2+2}\leq 2.$$

<u>Soluție.</u>

Întorcând inegalitatea obținem:

$\sum\frac{a^2}{a^2+2}\leq 2\Leftrightarrow\sum\frac{1}{a^2+2}\geq\frac{1}{2}$, care rezultă din:

<u>Lemă:</u>

4) Dacă $x>0$ atunci

$$\frac{1}{x^2+2}\geq\frac{7-2x}{18}.$$

<u>Demonstrație.</u>

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{1}{x^2+2}\geq\frac{7-2x}{18}\Leftrightarrow 2x^3-7x^2+4x+6\geq 0\Leftrightarrow\left(x-2\right)^2\left(2x+1\right)\geq 0$,

evident cu egalitate pentru $x=2$.

Să trecem la rezolvarea problemei propuse.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum\frac{1}{a^2+2}\geq\sum\frac{1}{a^2+2}\geq\sum\frac{7-2a}{18}=\frac{7\cdot 3-2\sum a}{18}=\frac{7\cdot 3-2\cdot 6}{18}=\frac{1}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=2$.

<u>Remarcă.</u>

Problema se poate dezvolta.

5) Fie $a,b,c>0$ astfel încât $a+b+c=6$ și $0\le n\le 4$. Arătați că

$$\frac{a^2}{a^2+n}+\frac{b^2}{b^2+n}+\frac{c^2}{c^2+n}\le\frac{12}{n+4}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Întorcând inegalitatea obținem:

$\sum\frac{a^2}{a^2+n}\le\frac{12}{n+4}\Leftrightarrow\sum\frac{1}{a^2+n}\ge\frac{3}{n+4}$, care rezultă din:

Lemă:

6) Dacă $x>0$ și $0\le n\le 4$ atunci

$$\frac{1}{x^2+n}\ge\frac{n+12-4x}{(n+4)^2}.$$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{1}{x^2+n}\ge\frac{n+12-4x}{(n+4)^2}\Leftrightarrow 4x^3-(n+12)x^2+4nx+16-4n\ge 0\Leftrightarrow (x-2)^2(4x+4-n)\ge 0$,

evident cu egalitate pentru $x=2$.

Să trecem la rezolvarea problemei propuse.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum\frac{1}{a^2+n}\ge\sum\frac{n+12-4a}{(n+4)^2}\ge\frac{(n+12)\cdot 3-4\sum a}{(n+4)^2}=\frac{(n+12)\cdot 3-4\cdot 6}{(n+4)^2}=\frac{3}{n+4}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=2$.

Aplicația 13.

1) Dacă $x,y,z>0$ astfel încât $x+y+z=3$ să se arate că

$$\frac{x}{x^2+6}+\frac{y}{y^2+6}+\frac{z}{z^2+6}\le\frac{3}{7}.$$

Rahim Shahbazov, Baku, Azerbaijan, RMM 1/2020

Soluție.

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

2) Dacă $x > 0$ atunci

$$\frac{x}{x^2+6} \le \frac{5x+2}{49}.$$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{x}{x^2+6} \le \frac{5x+2}{49} \Leftrightarrow 5x^3+2x^2-19x+12 \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(5x+2) \ge 0$, evident cu egalitate pentru $x=1$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$M_s = \sum \frac{x}{x^2+6} \le \sum \frac{5x+2}{49} = \frac{5(x+y+z)+6}{49} = \frac{5\cdot 3+6}{49} = \frac{21}{49} = \frac{3}{7} = M_d.$$

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate pentru $x=y=z=1$.

Remarcă.

Problema se poate dezvolta.

3) Dacă $x, y, z > 0$ astfel încât $x+y+z=3$ și $n \ge 1$ să se arate că

$$\frac{x}{x^2+n} + \frac{y}{y^2+n} + \frac{z}{z^2+n} \le \frac{3}{n+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

4) Dacă $x > 0$ și $n \ge 1$ atunci

$$\frac{x}{x^2+n} \le \frac{(n-1)x+2}{(n+1)^2}.$$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{x}{x^2+n} \le \frac{(n-1)x+2}{(n+1)^2} \Leftrightarrow (n-1)x^3+2x^2-(3n+1)x+2n \ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left[(n-1)x+2n\right] \ge 0$, $(x-1)^2 \ge 0$, cu egalitate pentru $x=1$ și condiția din ipoteză $n \ge 1$ care asigură $\left[(n-1)x+2n\right] \ge 0$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$M_s = \sum \frac{x}{x^2+n} \le \sum \frac{(n-1)x+2}{(n+1)^2} = \frac{(n-1)(x+y+z)+6}{(n+1)^2} = \frac{(n-1)\cdot 3+6}{(n+1)^2} = \frac{3(n+1)}{(n+1)^2} = \frac{3}{n+1} = M_d$$

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate pentru $x=y=z=1$.

Notă.

Pentru $n=6$ se obține Problema propusă de Rahim Shahbazov, Baku, Azerbaijan în RMM 1/2020.

Aplicația 14.

1) Fie $a,b,c>0$ astfel încât $abc=1$. Arătați că

$$\frac{a^2}{2+7a^3}+\frac{b^2}{2+7b^3}+\frac{c^2}{2+7c^3} \le \frac{1}{3}.$$

Math Group, K. Geronikolas

Soluție .

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

Dacă $x>0$

$$\frac{2}{x^2}+7x \ge 3(x+2).$$

Demonstrație .

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{2}{x^2}+7x \ge 3(x+2) \Leftrightarrow 2x^3-3x^2+1 \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(2x+1) \ge 0$, evident cu egalitate pentru $x=1$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Inegalitatea se scrie echivalent:

$$\frac{a^2}{2+7a^3}+\frac{b^2}{2+7b^3}+\frac{c^2}{2+7c^3}\le\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{\frac{2}{a^2}+7a}+\frac{1}{\frac{2}{b^2}+7b}+\frac{1}{\frac{2}{c^2}+7c}\le\frac{1}{3}.$$

Folosind **Lema** obținem:

$$M_s=\sum\frac{1}{\frac{2}{a^2}+7a}\le\sum\frac{1}{3(a+2)}=\frac{1}{3}\sum\frac{1}{a+2}\overset{(1)}{\le}\frac{1}{3}=M_d\text{, unde}(1)\Leftrightarrow\sum\frac{1}{a+2}\le 1\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\sum(b+2)(c+2)\le\prod(a+2)\Leftrightarrow\sum bc\ge 3$, care rezultă din inegalitatea mediilor și condiția din ipoteză $abc=1$.

Într-adevăr: $\sum bc\ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}=3$, cu egalitate pentru $a=b=c=1$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

Problema se poate dezvolta.

1) Fie $a,b,c>0$ astfel încât $a+b+c=3$ și $1\le n\le 2$. Arătați că

$$\frac{a^2}{a^3+n}+\frac{b^2}{b^3+n}+\frac{c^2}{c^3+n}\le\frac{3}{n+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție .

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

Dacă $x>0$ și $1\le n\le 2$, atunci

$$\frac{x^2}{x^3+n}\le\frac{(2n-1)x+2-n}{(n+1)^2}.$$

Demonstrație .

Folosim Tangent Line Method .

$\frac{x^2}{x^3+n} \le \frac{(2n-1)x+2-n}{(n+1)^2} \Leftrightarrow (2n-1)x^4+(2-n)x^3-(n+1)^2x^2+(2n^2-n)x+2n-n^2 \ge 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2\left[(2n-1)x^2+3nx+n(2-n)\right] \ge 0$, care rezultă din $(a-1)^2 \ge 0$,cu egalitate pentru $x=1$ și $\left[(2n-1)x^2+3nx+n(2-n)\right] > 0$, adevărată din condiția din ipoteză $1 \le n \le 2$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$M_s = \sum \frac{a^2}{a^3+n} \le \sum \frac{(2n-1)a+2-n}{(n+1)^2} = \frac{(2n-1)\sum a+3(2-n)}{(n+1)^2} = \frac{3(2n-1)+3(2-n)}{(n+1)^2} =$$

$$= \frac{3(2n-1)+3(2-n)}{(n+1)^2} = \frac{3}{n+1} = M_d.$$

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

1) Fie $a,b,c>0$ astfel încât $abc=1$. Arătați că

$$\frac{a^3}{1+5a^4}+\frac{b^3}{1+5b^4}+\frac{c^3}{1+5c^4} \le \frac{1}{2}.$$

Marin Chirciu

Soluție .

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

Dacă $x>0$

$$\frac{1}{x^3}+5x \ge 2(x+2).$$

Demonstrație .

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{1}{x^3}+5x \ge 2(x+2) \Leftrightarrow 3x^4-4x^3+1 \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(3x^2+2x+1) \ge 0$, evident cu egalitate pentru $x=1$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Inegalitatea se scrie echivalent:

$$\frac{a^3}{1+5a^4}+\frac{b^3}{1+5b^4}+\frac{c^3}{1+5c^4}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{\frac{1}{a^3}+5a}+\frac{1}{\frac{1}{b^3}+5b}+\frac{1}{\frac{1}{c^3}+5c}\le\frac{1}{2}.$$

Folosind **Lema** obținem:

$$M_s=\sum\frac{1}{\frac{1}{a^3}+5a}\le\sum\frac{1}{2(a+2)}=\frac{1}{2}\sum\frac{1}{a+2}\overset{(1)}{\le}\frac{1}{2}=M_d\text{, unde}(1)\Leftrightarrow\sum\frac{1}{a+2}\le 1\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\sum(b+2)(c+2)\le\prod(a+2)\Leftrightarrow\sum bc\ge 3$, care rezultă din inegalitatea mediilor și condiția din ipoteză $abc=1$.

Într-adevăr: $\sum bc\ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}=3$, cu egalitate pentru $a=b=c=1$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația 15.

1) Fie $a,b,c>0$ astfel încât $a+b+c=3$. Să se arate că

$$\frac{a}{\sqrt{a+3}}+\frac{b}{\sqrt{b+3}}+\frac{c}{\sqrt{c+3}}\le\frac{3}{2}.$$

K. Geronikolas, RMM 10/2019

<u>Soluție.</u>

Demonstrăm rezultatul ajutător:

<u>Lemă.</u>

2) Dacă $x>0$, atunci

$$\frac{x}{\sqrt{x+3}}\le\frac{1+7x}{16}.$$

Folosim Tangent Line Method .

$$\frac{x}{\sqrt{x+3}}\le\frac{1+7x}{16}:\left(\frac{x}{\sqrt{x+3}}\right)^2\le\left(\frac{1+7x}{16}\right)^2\Leftrightarrow\frac{x^2}{x+3}\le\frac{1+14x+49x^2}{256}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 49x^3-95x^2+43x+3\ge 0\Leftrightarrow(x-1)^2(49x+3)\ge 0$, evident cu egalitate pentru $a=1$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum \frac{a}{\sqrt{a+3}} \le \sum \frac{1+7a}{16} = \frac{3+7\sum a}{16} = \frac{3+7\cdot 3}{16} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

Inegalitatea se poate dezvolta:

3) Fie $a,b,c>0$ astfel încât $a+b+c=3$ și $n\ge 0$. Să se arate că

$$\frac{a}{\sqrt{a+n}} + \frac{b}{\sqrt{b+n}} + \frac{c}{\sqrt{c+n}} \le \frac{3}{\sqrt{n+1}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

Dacă $x>0$ și $n\ge 0$, atunci

$$\frac{x}{\sqrt{x+n}\cdot\sqrt{n+1}} \le \frac{1+(2n+1)x}{2(n+1)^2}.$$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

$$\frac{x}{\sqrt{x+n}\cdot\sqrt{n+1}} \le \frac{1+(2n+1)x}{2(n+1)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{x+n}\cdot\sqrt{n+1}}\right)^2 \le \left(\frac{1+(2n+1)x}{2(n+1)^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{(x+n)} \le \frac{\left(1+(2n+1)x\right)^2}{4(n+1)^3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2n+1)^3x^3 - \left(8n^2+7n+2\right)x^2 + \left(4n^2+2n+1\right)x + n \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\left((2n+1)^2x+n\right) \ge 0,$$

evident cu egalitate pentru $x=1$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$M_s = \sum \frac{a}{\sqrt{a+n}} \le \sqrt{n+1}\cdot\sum \frac{1+(2n+1)a}{2(n+1)^2} = \sqrt{n+1}\cdot\frac{3+(2n+1)\sum a}{2(n+1)^2} = \sqrt{n+1}\cdot\frac{3+(2n+1)\cdot 3}{2(n+1)^2} =$$

$$=\sqrt{n+1}\cdot\frac{6(n+1)}{2(n+1)^2}=\sqrt{n+1}\cdot\frac{3}{n+1}=\frac{3}{\sqrt{n+1}}=M_d.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația 16.

1) Let a,b and c be positive real numbers such that $a+b+c=3$. Prove that

$$\left(\frac{a^3+1}{a^2+1}\right)^2+\left(\frac{b^3+1}{b^2+1}\right)^2+\left(\frac{c^3+1}{c^2+1}\right)^2\geq ab+bc+ca.$$

George Apostolopoulos, Crux Mathematicorum,10/2013

Soluție.

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

Dacă $x>0$ atunci $\frac{x^3+1}{x^2+1}\geq\frac{x+1}{2}$.

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{x^3+1}{x^2+1}\geq\frac{x+1}{2}\Leftrightarrow(x-1)^2(x+1)\geq 0$, evident cu egalitate pentru $a=1$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$M_s=\sum\left(\frac{a^3+1}{a^2+1}\right)^2\geq\sum\left(\frac{a+1}{2}\right)^2=\sum\frac{a^2+2a+1}{4}=\frac{\sum a^2+2\sum a+\sum 1}{4}=\frac{\sum a^2+2\cdot 3+3}{4}=$$

$$\frac{\sum a^2+9}{4}\overset{(1)}{\geq}\sum bc=M_d\text{, unde (1)}\Leftrightarrow\sum a^2+9\geq 4\sum bc,$$

care rezultă din sumarea inegalităților:

$$\sum a^2\geq\sum bc \text{ și } 9\geq 3\sum bc\text{, unde } 9\geq 3\sum bc\Leftrightarrow 3\geq\sum bc\Leftrightarrow\frac{(a+b+c)^2}{3}\geq\sum bc\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$, inegalitate cunoscută, cu egalitate pentru $a=b=c$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

2) Let a,b,c and n be positive real numbers such that $a+b+c=3$. Prove that

$$\left(\frac{a^3+n}{a^2+n}\right)^2+\left(\frac{b^3+n}{b^2+n}\right)^2+\left(\frac{c^3+n}{c^2+n}\right)^2\geq ab+bc+ca.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

Dacă $x,n>0$ atunci $\frac{x^3+n}{x^2+n}\geq\frac{x+n}{n+1}$.

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{x^3+n}{x^2+n}\geq\frac{x+n}{n+1}\Leftrightarrow n(x-1)^2(x+1)\geq 0$, evident cu egalitate pentru $a=1$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$M_s=\sum\left(\frac{a^3+n}{a^2+n}\right)^2\geq\sum\left(\frac{a+n}{n+1}\right)^2=\sum\frac{a^2+2na+n^2}{(n+1)^2}=\frac{\sum a^2+2n\sum a+\sum n^2}{(n+1)^2}=\frac{\sum a^2+2n\cdot 3+3n^2}{(n+1)^2}=$$

$$\frac{\sum a^2+6n+3n^2}{(n+1)^2}\overset{(1)}{\geq}\sum bc=M_d\text{, unde (1)}\Leftrightarrow\sum a^2+6n+3n^2\geq(n+1)^2\sum bc,$$

care rezultă din sumarea inegalităților:

$$\sum a^2\geq\sum bc \text{ și } 6n+3n^2\geq(n^2+2n)\sum bc,$$

unde $6n+3n^2\geq(n^2+2n)\sum bc\Leftrightarrow 3\geq\sum bc\Leftrightarrow\frac{(a+b+c)^2}{3}\geq\sum bc\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$, inegalitate cunoscută, cu egalitate pentru $a=b=c$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Notă.

Pentru $n=1$ se obține Problema 3899 din Crux Mathematicorum, Vol39, No10, Dec 2013, propusă de George Apostolopoulos.

Aplicația 17.

3) Fie $a_1, a_2, ...a_n > 0$ astfel încât $a_1 + a_2 + ... + a_n = n$. Arătați că

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^3+1}{a_i^2+1}\right)^4 \geq n.$$

Pascal Academy 10/2019, Jalil Hajimir

Soluție.

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

Dacă $x>0$ atunci $\frac{x^3+1}{x^2+1} \geq \frac{x+1}{2}$.

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{x^3+1}{x^2+1} \geq \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow (x-1)^2(x+1) \geq 0$, evident cu egalitate pentru $a=1$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** și inegalitatea lui Hölder obținem:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^3+1}{a_i^2+1}\right)^4 \geq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i+1}{2}\right)^4 \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i+1}{2}\right)^4}{n^3} = \frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}1}{2}\right)^4}{n^3} = \frac{\left(\frac{n+n}{2}\right)^4}{n^3} = \frac{n^4}{n^3} = n.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$.

4) Fie $a_1, a_2, ...a_n > 0$ astfel încât $a_1 + a_2 + ... + a_n = n$ și $p \in \boldsymbol{N}$. Arătați că

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^{p+1}+1}{a_i^p+1}\right)^4 \geq n.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

Dacă $x>0$ și $p\in \boldsymbol{N}$ atunci $\frac{x^{p+1}+1}{x^p+1}\geq \frac{x+1}{2}$.

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{x^{p+1}+1}{x^p+1}\geq \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow (x-1)(x^p-1)\geq 0$, evident, deoarece factorii $(x-1),(x^p-1)$ au același semn, cu egalitate pentru $x=1$ sau $p=0$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** și inegalitatea lui Hölder obținem:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^{p+1}+1}{a_i^p+1}\right)^4 \geq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i+1}{2}\right)^4 \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i+1}{2}\right)^4}{n^3}=\frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}1}{2}\right)^4}{n^3}=\frac{\left(\frac{n+n}{2}\right)^4}{n^3}=\frac{n^4}{n^3}=n.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1=a_2=...=a_n=1$.

Notă.

Pentru $p=2$ se obține problema propusă de Jalil Hajimir în RMM 10/2019.

5) Fie $a_1,a_2,...a_n>0$ astfel încât $a_1+a_2+...+a_n=n$ și $p,k\in \boldsymbol{N}$. Arătați că

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^{p+1}+1}{a_i^p+1}\right)^k \geq n.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

Dacă $x>0$ și $p\in \boldsymbol{N}$ atunci $\frac{x^{p+1}+1}{x^p+1}\geq \frac{x+1}{2}$.

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{x^{p+1}+1}{x^p+1} \geq \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow (x-1)(x^p-1) \geq 0$, evident, deoarece factorii $(x-1),(x^p-1)$ au același semn, cu egalitate pentru $x=1$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** și inegalitatea lui Hölder obținem:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^{p+1}+1}{a_i^p+1}\right)^k \geq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i+1}{2}\right)^k \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i+1}{2}\right)^k}{n^{k-1}} = \frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}1}{2}\right)^k}{n^{k-1}} = \frac{\left(\frac{n+n}{2}\right)^k}{n^{k-1}} = \frac{n^k}{n^{k-1}} = n,$$

pentru $k \geq 2$.

Pentru $k=1$, inegalitatea este imediată, folosind **Lema**, iar pentru $k=0$ se obține egalitatea $n=n$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1=a_2=...=a_n=1$ sau $k=0$.

Notă.

Pentru $p=2, k=4$ se obține problema propusă de Jalil Hajimir în RMM 10/2019.

Aplicația 18.

1) Fie $x,y,z>0$, astfel încât $x+y+z=48$. Arătați că

$$\frac{1}{8-\sqrt{x}}+\frac{1}{8-\sqrt{y}}+\frac{1}{8-\sqrt{z}} \geq \frac{3}{4}.$$

RMM 2019, George Apostolopoulos, Greece

Soluție.

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

Dacă $0<x<64$ atunci $\frac{1}{8-\sqrt{x}} \geq \frac{x+16}{128}$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Rezultă $\frac{1}{8-\sqrt{x}} \geq \frac{x+16}{128} \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-4\right)^2 \geq 0$, cu egalitate pentru $x=16$.

Să trecem la rezolvarea inegalității din enunț.

Folosind **Lema** rezultă:

$$\sum \frac{1}{8-\sqrt{x}} \leq \sum \frac{x+16}{128} = \frac{x+y+z+16\cdot 3}{128} = \frac{48+48}{128} = \frac{96}{128} = \frac{3}{4}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=16$.

Remarcă.

Inegalitatea **1)** se poate dezvolta.

2) Fie $x,y,z,n>0$, astfel încât $x+y+z=3n^2$. Arătați că

$$\frac{1}{2n-\sqrt{x}} + \frac{1}{2n-\sqrt{y}} + \frac{1}{2n-\sqrt{z}} \geq \frac{3}{n} .$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

Dacă $0<x<4n^2$ atunci $\frac{1}{2n-\sqrt{x}} \geq \frac{x+16}{2n^3}$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Rezultă $\frac{1}{2n-\sqrt{x}} \geq \frac{x+n^2}{2n^3} \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-n\right)^2 \geq 0$, cu egalitate pentru $x=n^2$.

Să trecem la rezolvarea inegalității din enunț.

Folosind **Lema** rezultă:

$$\sum \frac{1}{2n-\sqrt{x}} \leq \sum \frac{x+n^2}{2n^3} = \frac{x+y+z+n^2\cdot 3}{2n^3} = \frac{3n^2+3n^2}{2n^3} = \frac{6n^2}{2n^3} = \frac{3}{n}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=n^2$.

Notă.

Pentru $n=4$ se obține problema propusă de George Apostolopoulos, RMM 8/2019.

Remarcă.

Inegalitatea **2)** se poate generaliza.

3) Fie $x_1, x_2, ..., x_k, n > 0$, astfel încât $x_1 + x_2 + ... + x_k = kn^2$. Arătați că

$$\frac{1}{2n-\sqrt{x_1}} + \frac{1}{2n-\sqrt{x_2}} + ... + \frac{1}{2n-\sqrt{x_k}} \geq \frac{k}{n} .$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

Dacă $0 < x < 4n^2$ atunci $\frac{1}{2n-\sqrt{x}} \geq \frac{x+16}{2n^3}$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Rezultă $\frac{1}{2n-\sqrt{x}} \geq \frac{x+n^2}{2n^3} \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-n\right)^2 \geq 0$, cu egalitate pentru $x = n^2$.

Să trecem la rezolvarea inegalității din enunț.

Folosind **Lema** rezultă:

$$\sum \frac{1}{2n-\sqrt{x_1}} \leq \sum \frac{x_1+n^2}{2n^3} = \frac{x_1+x_2+...+x_k+n^2 \cdot k}{2n^3} = \frac{kn^2+kn^2}{2n^3} = \frac{2kn^2}{2n^3} = \frac{k}{n}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x_1 = x_2 = ... = x_k = n^2$.

Notă.

Pentru $n = 4$ și $k = 3$ se obține problema propusă de George Apostolopoulos, RMM 8/2019.

Aplicația 19.

4) Fie $x, y, z > 0$, astfel încât $x + y + z = 1$. Arătați că

$$\frac{x+1}{x^3+1} + \frac{y+1}{y^3+1} + \frac{z+1}{z^3+1} \leq \frac{27}{7}.$$

Crux Mathematicorum, Vol.41, No.5, May 2015, Dragoljub Milosević

Soluție.

Folosind $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ problema se reformulează:

5) Fie $x,y,z>0$, astfel încât $x+y+z=1$. Arătați că

$$\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{1}{y^2-y+1}+\frac{1}{z^2-z+1}\le\frac{27}{7}.$$

Soluție.

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

Dacă $x>0$ atunci $\frac{1}{x^2-x+1}\ge\frac{27}{49}x+\frac{54}{49}$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Rezultă $\frac{1}{x^2-x+1}\le\frac{27}{49}x+\frac{54}{49}\Leftrightarrow(3x-1)^2(3x+5)\ge 0$, cu egalitate pentru $x=\frac{1}{3}$.

Să trecem la rezolvarea inegalității din enunț.

Folosind **Lema** rezultă:

$$\sum\frac{1}{x^2-x+1}\le\sum\left(\frac{27}{49}x+\frac{54}{49}\right)=\frac{27(x+y+z)+54\cdot 3}{49}=\frac{27+162}{49}=\frac{189}{49}=\frac{27}{7}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

6) Fie $x,y,z>0$, astfel încât $x+y+z=1$ și $n\ge\frac{4}{9}$. Arătați că

$$\frac{1}{x^2-x+n}+\frac{1}{y^2-y+n}+\frac{1}{z^2-z+n}\le\frac{27}{9n-2}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

Dacă $x>0$ și $n\ge\frac{4}{9}$ atunci $\frac{1}{x^2-x+n}\le\frac{27}{(9n-2)^2}x+\frac{27(3n-1)}{(9n-2)^2}$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Rezultă $\frac{1}{x^2-x+n} \le \frac{27}{(9n-2)^2}x+\frac{27(3n-1)}{(9n-2)^2} \Leftrightarrow (3x-1)^2(3x+9n-4) \ge 0$, cu egalitate pentru $x=\frac{1}{3}$.

Să trecem la rezolvarea inegalității din enunț.

Folosind **Lema** rezultă:

$$\sum \frac{1}{x^2-x+n} \le \sum\left(\frac{27}{(9n-2)^2}x+\frac{27(3n-1)}{(9n-2)^2}\right)=\frac{27(x+y+z)+27(3n-1)\cdot 3}{(9n-2)^2}=\frac{27+243n-81}{(9n-2)^2}=$$

$$=\frac{243n-54}{(9n-2)^2}=\frac{27(9n-2)}{(9n-2)^2}=\frac{27}{9n-2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

7) Fie $x,y,z>0$, astfel încât $x+y+z=1$. Arătați că

$$\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{y^2+y+1}+\frac{1}{z^2+z+1} \ge \frac{27}{13}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

Dacă $x>0$ atunci $\frac{1}{x^2+x+1} \ge \frac{-135}{169}x+\frac{162}{169}$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Rezultă $\frac{1}{x^2+x+1} \ge \frac{-135}{169}x+\frac{162}{169} \Leftrightarrow (3x-1)^2(15x+7) \ge 0$, cu egalitate pentru $x=\frac{1}{3}$.

Să trecem la rezolvarea inegalității din enunț.

Folosind **Lema** rezultă:

$$\sum \frac{1}{x^2+x+1} \geq \sum \left(\frac{-135}{169}x + \frac{162}{169} \right) = \frac{-135(x+y+z)+162\cdot 3}{169} = \frac{-135+486}{169} = \frac{351}{169} = \frac{27}{13}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

8) Fie $x, y, z > 0$, astfel încât $x+y+z=1$ și $0 \leq n \leq \frac{16}{9}$. Arătați că

$$\frac{1}{x^2+x+n} + \frac{1}{y^2+y+n} + \frac{1}{z^2+z+n} \geq \frac{27}{13}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

Dacă $x > 0$ și $0 \leq n \leq \frac{16}{9}$ atunci $\frac{1}{x^2+x+n} \geq \frac{-135}{(9n+4)^2}x + \frac{81(n+1)}{(9n+4)^2}$.

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Rezultă $\frac{1}{x^2+x+n} \geq \frac{-135}{(9n+4)^2}x + \frac{81(n+1)}{(9n+4)^2} \Leftrightarrow (3x-1)^2(15x+16-9n) \geq 0$, cu egalitate pentru $x = \frac{1}{3}$.

Să trecem la rezolvarea inegalității din enunț.

Folosind **Lema** rezultă:

$$\sum \frac{1}{x^2+x+n} \geq \sum \left(\frac{-135}{(9n+4)^2}x + \frac{81(n+1)}{(9n+4)^2} \right) = \frac{-135(x+y+z)+81(n+1)\cdot 3}{(9n+4)^2} =$$

$$= \frac{-135+243(n+1)}{(9n+4)^2} = \frac{243n+108}{(9n+4)^2} = \frac{27(9n+4)}{(9n+4)^2} = \frac{27}{9n+4}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

9) Fie $x, y, z > 0$, astfel încât $x+y+z=1$ și $n \in \boldsymbol{N}$. Arătați că

$$\frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^n}+\frac{1}{\left(y^2+y+1\right)^n}+\frac{1}{\left(z^2+z+1\right)^n}\geq 3\left(\frac{9}{13}\right)^n.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

Dacă $x,y,z>0$, astfel încât $x+y+z=1$, atunci $\sum\frac{1}{x^2+x+1}\geq\frac{27}{13}$.

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Rezultă $\frac{1}{x^2+x+1}\geq\frac{-135}{169}x+\frac{162}{169}\Leftrightarrow(3x-1)^2(15x+7)\geq 0$, cu egalitate pentru $x=\frac{1}{3}$.

Să trecem la rezolvarea inegalității din enunț.

Folosind **Lema** rezultă:

$$\sum\frac{1}{x^2+x+1}\geq\sum\left(\frac{-135}{169}x+\frac{162}{169}\right)=\frac{-135(x+y+z)+162\cdot 3}{169}=\frac{-135+486}{169}=\frac{351}{169}=\frac{27}{13}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind inegalitatea lui Hölder obținem:

$$\sum\frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^n}\geq\frac{\left(\sum\frac{1}{x^2+x+1}\right)^n}{3^{n-1}}\overset{Lema}{\geq}\frac{\left(\frac{27}{13}\right)^n}{3^{n-1}}=3\left(\frac{9}{13}\right)^n,\text{ pentru } n\geq 2.$$

Pentru $n=1$ se obține $\sum\frac{1}{x^2+x+1}\geq\frac{27}{13}$, vezi **Lema**, iar pentru $n=0$ se obține egalitatea3=3.

Aplicația 20.

1) Fie $x,y,z>0$ astfel încât $x+y+z=3$. Arătați că

$$\frac{1}{x^6-x+12}+\frac{1}{y^6-y+12}+\frac{1}{z^6-z+12}\leq\frac{1}{4}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{1}{x^6-x+12}\le\frac{17-5x}{144}\Leftrightarrow 5x^7-17x^6-5x^2+77x-60\le 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(x^5-7x^4-19x^3-31x^2-43x-60\right)\le 0$, evident deoarece

$\left(x^5-7x^4-19x^3-31x^2-43x-60\right)<0$, pentru $x<3$.

În final rezultă:

$$\sum\frac{1}{x^6-x+12}\le\sum\frac{17-5x}{144}=\frac{3\cdot 17-5(x+y+z)}{144}=\frac{51-5\cdot 3}{144}=\frac{51-15}{144}=\frac{36}{144}=\frac{1}{4}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

2) Fie $x,y,z>0$ astfel încât $x+y+z=3$ și $n\ge 11$. Arătați că

$$\frac{1}{x^6-x+n}+\frac{1}{y^6-y+n}+\frac{1}{z^6-z+n}\le\frac{3}{n}.$$

Marin Chirciu, Pitești

<u>Soluție:</u>

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{1}{x^6-x+n}\le\frac{n+5-5x}{n^2}\Leftrightarrow 5x^7-(n+5)x^6-5x^2+(6n+5)x-5n\le 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left[5x^5+(5-n)x^4+(5-2n)x^3+(5-3n)x^2+(5-4n)x-5n\right]\le 0$, evident pentru

$n\ge 11$, care asigură $\left[5x^5+(5-n)x^4+(5-2n)x^3+(5-3n)x^2+(5-4n)x-5n\right]<0$.

În final rezultă:

$$\sum\frac{1}{x^6-x+n}\le\sum\frac{n+5-5x}{n^2}=\frac{3(n+5)-5(x+y+z)}{n^2}=\frac{3(n+5)-5\cdot 3}{n^2}=\frac{3n+15-15}{n^2}=\frac{3}{n}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Aplicația 21.

1) Fie $a,b,c>0$ astfel încât $a+b+c=3$. Arătați că:

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}\ge\frac{3}{4}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{1}{(x+1)^2} \geq \frac{2-x}{4}$, $(2) \Leftrightarrow x^3-3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) \geq 0$, evident, cu egalitate pentru $x=1$.

Obținem $\sum \frac{1}{(a+1)^2} \geq \sum \frac{2-a}{4} = \frac{6-(a+b+c)}{4} = \frac{6-3}{4} = \frac{3}{4}$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

2) Fie $a,b,c>0$ astfel încât $a+b+c=3$ și $n \geq 0$. Arătați că:

$$\frac{1}{(a+n)^2}+\frac{1}{(b+n)^2}+\frac{1}{(c+n)^2} \geq \frac{3}{(n+1)^2}$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{1}{(x+n)^2} \geq \frac{n+3-2x}{(n+1)^3}$, $(2) \Leftrightarrow 2x^3+(3n-3)x^2-6nx+3n+1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(2x+3n+1) \geq 0$, evident, cu egalitate pentru $x=1$.

Obținem $\sum \frac{1}{(a+n)^2} \geq \sum \frac{n+3-2a}{(n+1)^3} = \frac{3(n+3)-2(a+b+c)}{(n+1)^3} = \frac{3n+9-6}{(n+1)^3} = \frac{3(n+1)}{(n+1)^3} = \frac{3}{(n+1)^2}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația 22.

1) If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then:

$$\frac{a}{b^3+b^2+b+3}+\frac{b}{c^3+c^2+c+3}+\frac{c}{a^3+a^2+a+3} \geq \frac{1}{2} .$$

Soluție:

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

2) Dacă $x>0$ atunci:

$$\frac{1}{x^3+x^2+x+3} \geq \frac{-1}{6}x+\frac{1}{3}.$$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Inegalitatea se scrie echivalent $x(x+1)(x-1)^2 \geq 0$, evident, cu egalitate pentru $x=1$.

Să trecem la rezolvarea inegalității din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum \frac{a}{b^3+b^2+b+3} \geq \sum a\left(\frac{-1}{6}b+\frac{1}{3}\right) = \frac{\sum a(2-b)}{6} \overset{(1)}{\geq} \frac{1}{2},$$

unde (1) $\Leftrightarrow \sum a(2-b) \geq 3 \Leftrightarrow 2\sum a - \sum bc \geq 3 \Leftrightarrow 2\cdot 3 - \sum bc \geq 3 \Leftrightarrow 3 \geq \sum bc \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3\sum bc \Leftrightarrow \sum a^2 \geq \sum bc$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

Inegalitatea se poate dezvolta.

3) If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then:

$$\frac{a}{b^3+b^2+b+n}+\frac{b}{c^3+c^2+c+n}+\frac{c}{a^3+a^2+a+n} \geq \frac{3}{n+3}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

4) Dacă $x>0$ și $0 \leq n \leq 3$ atunci:

$$\frac{1}{x^3+x^2+x+n} \geq \frac{-6x+n+9}{(n+3)^2}.$$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{1}{x^3+x^2+x+n} \geq \frac{-6x+n+9}{(n+3)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2\left[6x^2+(9-n)x+3(3-n)\right] \geq 0$, evident din $x>0$ și $0 \leq n \leq 3$, cu egalitate pentru $x=1$.

Să trecem la rezolvarea inegalității din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum \frac{a}{b^3+b^2+b+n} \geq \sum a\left(\frac{-6b+n+9}{(n+3)^2}\right) = \frac{\sum a(n+9-6b)}{(n+3)^2} \overset{(1)}{\geq} \frac{3}{n+3},$$

unde (1) $\Leftrightarrow \sum a(n+9-6b) \geq 3(n+3) \Leftrightarrow (n+9)\sum a - 6\sum bc \geq 3(n+3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (n+9)\cdot 3 - 6\sum bc \geq 3(n+3) \Leftrightarrow 3 \geq \sum bc \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3\sum bc \Leftrightarrow \sum a^2 \geq \sum bc$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

Să mărim numărul varibilelor de la trei la patru.

5) If $a,b,c>0$, $a+b+c+d=4$ then:

$$\frac{a}{b^3+b^2+b+3}+\frac{b}{c^3+c^2+c+3}+\frac{c}{d^3+d^2+d+3}+\frac{d}{a^3+a^2+a+3} \geq \frac{2}{3}.$$

Soluție:

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

6) Dacă $x>0$ atunci:

$$\frac{1}{x^3+x^2+x+3} \geq \frac{-1}{6}x+\frac{1}{3}.$$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Inegalitatea se scrie echivalent $x(x+1)(x-1)^2 \geq 0$, evident, cu egalitate pentru $x=1$.

Să trecem la rezolvarea inegalității din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum \frac{a}{b^3+b^2+b+3} \geq \sum a\left(\frac{-1}{6}b+\frac{1}{3}\right) = \frac{\sum a(2-b)}{6} \overset{(1)}{\geq} \frac{2}{3},$$

unde (1) $\Leftrightarrow \sum a(2-b) \geq 4 \Leftrightarrow 2\sum a - \sum ab \geq 4 \Leftrightarrow 2\cdot 4 - \sum ab \geq 4 \Leftrightarrow 4 \geq \sum ab \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a+b+c+d)^2 \geq 4\sum ab \Leftrightarrow (a-b+c-d)^2 \geq 0$.

Prin $\sum ab$ am simbolizat $ab+bc+cd+da$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

Remarcă.

Inegalitatea se poate dezvolta.

7) Dacă $a,b,c,d>0$, $a+b+c+d=4$ și $0\le n\le 3$ atunci:

$$\frac{a}{b^3+b^2+b+n}+\frac{b}{c^3+c^2+c+n}+\frac{c}{d^3+d^2+d+n}+\frac{d}{a^3+a^2+a+n}\ge\frac{4}{n+3}\ .$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

8) Dacă $x>0$ și $0\le n\le 3$ atunci:

$$\frac{1}{x^3+x^2+x+n}\ge\frac{-6x+n+9}{(n+3)^2}.$$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{1}{x^3+x^2+x+n}\ge\frac{-6x+n+9}{(n+3)^2}\Leftrightarrow(x-1)^2\left[6x^2+(9-n)x+3(3-n)\right]\ge 0$, evident din $x>0$ și $0\le n\le 3$, cu egalitate pentru $x=1$.

Să trecem la rezolvarea inegalității din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum\frac{a}{b^3+b^2+b+n}\ge\sum a\left(\frac{-6b+n+9}{(n+3)^2}\right)=\frac{\sum a(n+9-6b)}{(n+3)^2}\overset{(1)}{\ge}\frac{4}{n+3},$$

unde (1) $\Leftrightarrow\sum a(n+9-6b)\ge 4(n+3)\Leftrightarrow(n+9)\sum a-6\sum ab\ge 4(n+3)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(n+9)\cdot 4-6\sum ab\ge 4(n+3)\Leftrightarrow 4\ge\sum bc\ \Leftrightarrow(a+b+c+d)^2\ge 4\sum ab\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(a-b+c-d)^2\ge 0$.

Prin $\sum ab$ am simbolizat $ab+bc+cd+da$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

9) If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then:

$$\frac{a}{b^3+b^2+b}+\frac{b}{c^3+c^2+c}+\frac{c}{a^3+a^2+a}\ge 1\ .$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

10) Dacă $x>0$ atunci:

$$\frac{1}{x^3+x^2+x}\geq\frac{-2}{3}x+1.$$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Inegalitatea se scrie echivalent $3(x-1)^2(2x^2+3x+3)\geq 0$, evident, cu egalitate pentru $x=1$.

Să trecem la rezolvarea inegalității din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum\frac{a}{b^3+b^2+b+n}\geq\sum a\left(\frac{-2}{3}x+1\right)=\frac{\sum a(3-2b)}{3}\overset{(1)}{\geq}1,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \sum a(3-2b)\geq 3 \Leftrightarrow 3\sum a-2\sum bc\geq 3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\cdot 3-2\sum bc\geq 3\Leftrightarrow 3\geq\sum bc \Leftrightarrow (a+b+c)^2\geq 3\sum bc\Leftrightarrow \sum a^2\geq\sum bc$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

11) If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then:

$$\frac{a}{b^3+b^2+b+1}+\frac{b}{c^3+c^2+c+1}+\frac{c}{a^3+a^2+a+1}\geq\frac{3}{4}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

12) Dacă $x>0$ atunci:

$$\frac{1}{x^3+x^2+x+1}\geq\frac{-3x+5}{8}.$$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Inegalitatea se scrie echivalent $\Leftrightarrow 2(x-1)^2(3x^2+4x+3)\geq 0$, evident , cu egalitate pentru $x=1$.

Să trecem la rezolvarea inegalității din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum\frac{a}{b^3+b^2+b+n}\geq\sum a\left(\frac{-3b+5}{8}\right)=\frac{\sum a(5-3b)}{8}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{4},$$

unde (1) $\Leftrightarrow \sum a(5-3b)\geq 6 \Leftrightarrow 5\sum a-3\sum bc\geq 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\cdot 3-3\sum bc\geq 6 \Leftrightarrow 3\geq\sum bc \Leftrightarrow (a+b+c)^2\geq 3\sum bc \Leftrightarrow \sum a^2\geq\sum bc$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

13) If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then:

$$\frac{a}{b^3+b^2+b+2}+\frac{b}{c^3+c^2+c+2}+\frac{c}{a^3+a^2+a+2}\geq\frac{3}{5}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

14) Dacă $x>0$ atunci:

$$\frac{1}{x^3+x^2+x+2}\geq\frac{-6x+11}{25}.$$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Inegalitatea se scrie echivalent $\Leftrightarrow (x-1)^2(6x^2+7x+15)\geq 0$, evident , cu egalitate pentru $x=1$.

Să trecem la rezolvarea inegalității din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum\frac{a}{b^3+b^2+b+n}\geq\sum a\left(\frac{-6x+11}{25}\right)=\frac{\sum a(11-6b)}{25}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{5},$$

unde (1) $\Leftrightarrow \sum a(11-6b)\geq 15 \Leftrightarrow 11\sum a-6\sum bc\geq 15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 11\cdot 3-6\sum bc\geq 15 \Leftrightarrow 3\geq\sum bc \Leftrightarrow (a+b+c)^2\geq 3\sum bc \Leftrightarrow \sum a^2\geq\sum bc$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

15) Dacă $a,b,c,d>0$, $a+b+c+d=4$ atunci:

$$\frac{a}{b^3+b^2+b}+\frac{b}{c^3+c^2+c}+\frac{c}{d^3+d^2+d}+\frac{d}{a^3+a^2+a}\geq\frac{4}{3}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

16) Dacă $x>0$ atunci:

$$\frac{1}{x^3+x^2+x}\geq\frac{-2x+3}{3}.$$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Inegalitatea se scrie echivalent $3(x-1)^2(2x^2+3x+3)\geq 0$, evident, cu egalitate pentru $x=1$.

Să trecem la rezolvarea inegalității din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum\frac{a}{b^3+b^2+b+n}\geq\sum a\left(\frac{-2}{3}x+1\right)=\frac{\sum a(3-2b)}{3}\overset{(1)}{\geq}1,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \sum a(3-2b)\geq 4 \Leftrightarrow 3\sum a-2\sum ab\geq 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\cdot 4-2\sum ab\geq 4 \Leftrightarrow 4\geq\sum ab \Leftrightarrow (a+b+c+d)^2\geq 4\sum ab \Leftrightarrow (a-b+c-d)^2\geq 0$.

Prin $\sum ab$ am simbolizat $ab+bc+cd+da$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

17) If $a,b,c,d>0$, $a+b+c+d=4$ then:

$$\frac{a}{b^3+b^2+b+1}+\frac{b}{c^3+c^2+c+1}+\frac{c}{d^3+d^2+d+1}+\frac{d}{a^3+a^2+a+1}\geq 1.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

18) Dacă $x>0$ atunci:

$$\frac{1}{x^3+x^2+x+1}\geq\frac{-3x+5}{8}.$$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Inegalitatea se scrie echivalent $2(x-1)^2(3x^2+4x+3)\geq 0$, evident , cu egalitate pentru $x=1$.

Să trecem la rezolvarea inegalității din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum\frac{a}{b^3+b^2+b+n}\geq\sum a\left(\frac{-3b+5}{8}\right)=\frac{\sum a(5-3b)}{8}\overset{(1)}{\geq}1,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \sum a(5-3b)\geq 8 \Leftrightarrow 5\sum a-3\sum ab\geq 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\cdot 4-3\sum ab\geq 8 \Leftrightarrow 4\geq\sum ab \Leftrightarrow (a+b+c+d)^2\geq 4\sum ab \Leftrightarrow (a-b+c-d)^2\geq 0$.

Prin $\sum ab$ am simbolizat $ab+bc+cd+da$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

19) If $a,b,c,d>0$, $a+b+c+d=4$ then:

$$\frac{a}{b^3+b^2+b+2}+\frac{b}{c^3+c^2+c+2}+\frac{c}{d^3+d^2+d+2}+\frac{d}{a^3+a^2+a+2}\geq\frac{4}{5}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

20) Dacă $x>0$ atunci:

$$\frac{1}{x^3+x^2+x+2}\geq\frac{-6x+11}{25}.$$

Demonstrație.

Folosim Tangent Line Method .

Inegalitatea se scrie echivalent $(x-1)^2(6x^2+7x+15)\geq 0$, evident , cu egalitate pentru $x=1$.

Să trecem la rezolvarea inegalității din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum \frac{a}{b^3+b^2+b+n} \geq \sum a\left(\frac{-6x+11}{25}\right) = \frac{\sum a(11-6b)}{25} \overset{(1)}{\geq} \frac{4}{5},$$

unde (1) $\Leftrightarrow \sum a(11-6b) \geq 20 \Leftrightarrow 11\sum a - 6\sum ab \geq 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 11\cdot 4 - 6\sum ab \geq 20 \Leftrightarrow 4 \geq \sum ab \Leftrightarrow (a+b+c+d)^2 \geq 4\sum ab \Leftrightarrow (a-b+c-d)^2 \geq 0$.

Prin $\sum ab$ am simbolizat $ab+bc+cd+da$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

Aplicația 23.

21) If $a,b,c>0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=6$ then

$$\frac{3a}{4a^2+2a+1}+\frac{3b}{4b^2+2b+1}+\frac{3c}{4c^2+2c+1} \leq a+b+c \ .$$

Proposed by Daniel Sitaru-Romania, RMM2019

<u>Soluție:</u>

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{3x}{4x^2+2x+1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (2x-1)^2 \geq 0$, evident cu egalitate pentru $x=\frac{1}{2}$.

Rezultă $\sum \frac{3a}{4a^2+2a+1} \leq \sum \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \overset{(1)}{\leq} a+b+c$, unde (1) rezultă din:

$\frac{a+b+c}{3} \overset{AM-HM}{\geq} \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, adică $a+b+c \geq \frac{3}{2}$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate pentru $a=b=c=\frac{1}{2}$.

<u>Remarcă.</u>

Dacă mărim numărul variabilelor obținem:

22) If $a,b,c,d>0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=8$ then

$$\frac{3a}{4a^2+2a+1}+\frac{3b}{4b^2+2b+1}+\frac{3c}{4c^2+2c+1}+\frac{3d}{4d^2+2d+1}\le a+b+c+d\ .$$

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{3x}{4x^2+2x+1}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow(2x-1)^2\ge 0$, evident cu egalitate pentru $x=\frac{1}{2}$.

Rezultă $\sum\frac{3a}{4a^2+2a+1}\le\sum\frac{1}{2}=2\overset{(1)}{\le}a+b+c+d$, unde (1) rezultă din:

$\frac{a+b+c+d}{4}\overset{AM-HM}{\ge}\frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, adică $a+b+c+d\ge 2$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate pentru $a=b=c=d=\frac{1}{2}$.

23) If $a_1,a_2,...,a_k,n>0$, $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k}=2k$ then

$$\frac{3a_1}{4a_1^2+2a_1+1}+\frac{3a_2}{4a_2^2+2a_2+1}+...+\frac{3a_k}{4a_k^2+2a_k+1}\le a_1+a_2+...+a_k\ .$$

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{3x}{4x^2+2x+1}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow(2x-1)^2\ge 0$, evident cu egalitate pentru $x=\frac{1}{2}$.

Rezultă $\sum\frac{3a_1}{4a_1^2+2a_1+1}\le\sum\frac{1}{2}=\frac{k}{2}\overset{(1)}{\le}a_1+a_2+...+a_k$, unde (1) rezultă din:

$\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k}\overset{AM-HM}{\ge}\frac{k}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k}}=\frac{k}{2k}=\frac{1}{2}$, adică $a_1+a_2+...+a_k\ge\frac{k}{2}$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate pentru $a_1=a_2=...=a_k=\frac{1}{2}$.

Remarcă.

Inegalitățile de mai sus pot fi dezvoltate:

24) If $a,b,c,n>0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3n$ then

$$\frac{4a}{n^2a^2+2na+1}+\frac{4b}{n^2b^2+2nb+1}+\frac{4c}{n^2c^2+2nc+1}\le a+b+c\ .$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{4x}{n^2x^2+2nx+1}\le\frac{1}{n}\Leftrightarrow(nx-1)^2\ge 0$, evident cu egalitate pentru $x=\frac{1}{n}$.

Rezultă $\sum\frac{4a}{n^2a^2+2na+1}\le\sum\frac{1}{n}=\frac{3}{n}\overset{(1)}{\le}a+b+c$, unde (1) rezultă din:

$\frac{a+b+c}{3}\overset{AM-HM}{\ge}\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\frac{3}{3n}=\frac{1}{n}$, adică $a+b+c\ge\frac{3}{n}$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate pentru $a=b=c=\frac{1}{n}$.

Remarcă.

Dacă mărim numărul variabilelor obținem:

25) If $a,b,c,d,n>0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=4n$ then

$$\frac{4a}{n^2a^2+2na+1}+\frac{4b}{n^2b^2+2nb+1}+\frac{4c}{n^2c^2+2nc+1}+\frac{4d}{n^2d^2+2nd+1}\le a+b+c+d\ .$$

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{4x}{n^2x^2+2nx+1}\le\frac{1}{n}\Leftrightarrow(nx-1)^2\ge 0$, evident cu egalitate pentru $x=\frac{1}{n}$.

Rezultă $\sum\frac{4a}{n^2a^2+2na+1}\le\sum\frac{1}{n}=\frac{4}{n}\overset{(1)}{\le}a+b+c+d$, unde (1) rezultă din:

$$\frac{a+b+c+d}{4} \overset{AM-HM}{\geq} \frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} = \frac{4}{4n} = \frac{1}{n}, \text{ adică } a+b+c+d \geq \frac{4}{n}.$$

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate pentru $a=b=c=d=\frac{1}{n}$.

26) If $a_1, a_2, ..., a_k, n > 0$, $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k} = kn$ then

$$\frac{4a_1}{n^2a_1^2+2na_1+1}+\frac{4a_2}{n^2a_2^2+2na_2+1}+...+\frac{4a_k}{n^2a_k^2+2na_k+1} \leq a_1+a_2+...+a_k.$$

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{4x}{n^2x^2+2nx+1} \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow (nx-1)^2 \geq 0$, evident cu egalitate pentru $x=\frac{1}{n}$.

Rezultă $\sum \frac{4a_1}{n^2a_1^2+2na_1+1} \leq \sum \frac{1}{n} = \frac{k}{n} \overset{(1)}{\leq} a_1+a_2+...+a_k$, unde (1) rezultă din:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k} \overset{AM-HM}{\geq} \frac{k}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k}} = \frac{k}{nk} = \frac{1}{n}, \text{ adică } a_1+a_2+...+a_k \geq \frac{k}{n}.$$

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate pentru $a_1=a_2=...=a_k=\frac{1}{n}$.

27) If $a,b,c > 0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 9$ then

$$\frac{5a}{9a^2+9a+1}+\frac{5b}{9b^2+9b+1}+\frac{5c}{9c^2+9c+1} \leq a+b+c.$$

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{5x}{9x^2+9x+1} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow (3x-1)^2 \geq 0$, evident cu egalitate pentru $x=\frac{1}{3}$.

Rezultă $\sum \frac{5a}{9a^2+9a+1} \leq \sum \frac{1}{3} = 1 \overset{(1)}{\leq} a+b+c$, unde (1) rezultă din:

$$\frac{a+b+c}{3} \overset{AM-HM}{\geq} \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \text{ adică } a+b+c \geq 1.$$

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate pentru $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Remarcă.

Dacă mărim numărul variabilelor obținem:

28) If $a,b,c,d>0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=12$ then

$$\frac{5a}{9a^2+9a+1}+\frac{5b}{9b^2+9b+1}+\frac{5c}{9c^2+9c+1}+\frac{5d}{9d^2+9d+1} \leq a+b+c+d \ .$$

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{5x}{9x^2+9x+1} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow (3x-1)^2 \geq 0$, evident cu egalitate pentru $x=\frac{1}{3}$.

Rezultă $\sum \frac{5a}{9a^2+9a+1} \leq \sum \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \overset{(1)}{\leq} a+b+c+d$, unde (1) rezultă din:

$$\frac{a+b+c+d}{4} \overset{AM-HM}{\geq} \frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \text{ adică } a+b+c+d \geq \frac{4}{3}.$$

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate pentru $a=b=c=d=\frac{1}{3}$.

29) If $a_1,a_2,...,a_k,n>0$, $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k}=3k$ then

$$\frac{5a_1}{9a_1^2+9a_1+1}+\frac{5a_2}{9a_2^2+9a_2+1}+...+\frac{5a_k}{9a_k^2+9a_k+1} \leq a_1+a_2+...+a_k \ .$$

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{5x}{9x^2+9x+1} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow (3x-1)^2 \geq 0$, evident cu egalitate pentru $x=\frac{1}{3}$.

Rezultă $\sum \frac{5a_1}{9a_1^2+9a_1+1} \leq \sum \frac{1}{3} = \frac{k}{3} \overset{(1)}{\leq} a_1+a_2+...+a_k$, unde (1) rezultă din:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k} \overset{AM-HM}{\geq} \frac{k}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k}} = \frac{k}{3k} = \frac{1}{3}, \text{ adică } a_1+a_2+...+a_k \geq \frac{k}{3}.$$

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate pentru $a_1 = a_2 = ... = a_k = \frac{1}{3}$.

30) If $a,b,c,n>0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3n$ then

$$\frac{3a}{n^2a^2+na+1}+\frac{3b}{n^2b^2+nb+1}+\frac{3c}{n^2c^2+nc+1} \leq a+b+c \ .$$

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{3x}{n^2x^2+nx+1} \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow (nx-1)^2 \geq 0$, evident cu egalitate pentru $x=\frac{1}{n}$.

Rezultă $\sum \frac{3a}{n^2a^2+na+1} \leq \sum \frac{1}{n} = \frac{3}{n} \overset{(1)}{\leq} a+b+c$, unde (1) rezultă din:

$$\frac{a+b+c}{3} \overset{AM-HM}{\geq} \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{3}{3n} = \frac{1}{n}, \text{ adică } a+b+c \geq \frac{3}{n}.$$

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate pentru $a=b=c=\frac{1}{n}$.

Remarcă.

Dacă mărim numărul variabilelor obținem:

31) If $a,b,c,d,n>0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=4n$ then

$$\frac{3a}{n^2a^2+na+1}+\frac{3b}{n^2b^2+nb+1}+\frac{3c}{n^2c^2+nc+1}+\frac{3d}{n^2d^2+nd+1} \leq a+b+c+d \ .$$

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{3x}{n^2x^2+nx+1} \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow (nx-1)^2 \geq 0$, evident cu egalitate pentru $x=\frac{1}{n}$.

Rezultă $\sum \frac{3a}{n^2a^2+na+1} \leq \sum \frac{1}{n} = \frac{4}{n} \overset{(1)}{\leq} a+b+c+d$, unde (1) rezultă din:

$$\frac{a+b+c+d}{4} \overset{AM-HM}{\geq} \frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} = \frac{4}{4n} = \frac{1}{n}, \text{ adică } a+b+c+d \geq \frac{4}{n}.$$

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate pentru $a=b=c=d=\frac{1}{n}$.

32) If $a_1, a_2, ..., a_k, n > 0$, $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k} = kn$ then

$$\frac{3a_1}{n^2a_1^2+na_1+1}+\frac{3a_2}{n^2a_2^2+na_2+1}+...+\frac{3a_k}{n^2a_k^2+na_k+1} \leq a_1+a_2+...+a_k.$$

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{3x}{n^2x^2+nx+1} \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow (nx-1)^2 \geq 0$, evident cu egalitate pentru $x=\frac{1}{n}$.

Rezultă $\sum \frac{3a_1}{n^2a_1^2+na_1+1} \leq \sum \frac{1}{n} = \frac{k}{n} \overset{(1)}{\leq} a_1+a_2+...+a_k$, unde (1) rezultă din:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k} \overset{AM-HM}{\geq} \frac{k}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k}} = \frac{k}{nk} = \frac{1}{n}, \text{ adică } a_1+a_2+...+a_k \geq \frac{k}{n}.$$

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate pentru $a_1=a_2=...=a_k=\frac{1}{n}$.

33) If $a,b,c > 0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=12$ then

$$\frac{6a}{16a^2+16a+1}+\frac{6b}{16b^2+16b+1}+\frac{6c}{16c^2+16c+1} \leq a+b+c.$$

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{6x}{16x^2+16x+1} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow (4x-1)^2 \geq 0$, evident cu egalitate pentru $x=\frac{1}{4}$.

Rezultă $\sum \frac{6a}{16a^2+16a+1} \leq \sum \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \overset{(1)}{\leq} a+b+c$, unde (1) rezultă din:

$$\frac{a+b+c}{3} \overset{AM-HM}{\geq} \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}, \text{ adică } a+b+c \geq \frac{3}{4}.$$

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate pentru $a=b=c=\frac{1}{4}$.

Remarcă.

Dacă mărim numărul variabilelor obținem:

34) If $a,b,c,d>0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=16$ then

$$\frac{6a}{16a^2+16a+1}+\frac{6b}{16b^2+16b+1}+\frac{6c}{16c^2+16c+1}+\frac{6d}{16d^2+16d+1}\le a+b+c+d\ .$$

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{6x}{16x^2+16x+1}\le\frac{1}{4}\Leftrightarrow(4x-1)^2\ge 0$, evident cu egalitate pentru $x=\frac{1}{4}$.

Rezultă $\sum\frac{6a}{16a^2+16a+1}\le\sum\frac{1}{4}=4\overset{(1)}{\le}a+b+c+d$, unde (1) rezultă din:

$$\frac{a+b+c+d}{4}\overset{AM-HM}{\ge}\frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4},\text{ adică } a+b+c+d\ge 1.$$

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate pentru $a=b=c=d=\frac{1}{4}$.

35) If $a_1,a_2,...,a_k,n>0$, $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k}=4k$ then

$$\frac{6a_1}{16a_1^2+16a_1+1}+\frac{6a_2}{16a_2^2+16a_2+1}+...+\frac{6a_k}{16a_k^2+16a_k+1}\le a_1+a_2+...+a_k\ .$$

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{(n+2)x}{n^2x^2+n^2x+1}\le\frac{1}{n}\Leftrightarrow(nx-1)^2\ge 0$, evident cu egalitate pentru $x=\frac{1}{n}$.

Rezultă $\sum\frac{6a_1}{16a_1^2+16a_1+1}\le\sum\frac{1}{4}=\frac{k}{4}\overset{(1)}{\le}a_1+a_2+...+a_k$, unde (1) rezultă din:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k}\overset{AM-HM}{\ge}\frac{k}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k}}=\frac{k}{4k}=\frac{1}{4},\text{ adică } a_1+a_2+...+a_k\ge\frac{k}{4}.$$

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate pentru $a_1 = a_2 = ... = a_k = \frac{1}{4}$.

36) If $a,b,c,n > 0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3n$ then

$$\frac{(n+2)a}{n^2a^2+n^2a+1}+\frac{(n+2)b}{n^2b^2+n^2b+1}+\frac{(n+2)c}{n^2c^2+n^2c+1} \le a+b+c \ .$$

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{(n+2)x}{n^2x^2+n^2x+1} \le \frac{1}{n} \Leftrightarrow (nx-1)^2 \ge 0$, evident cu egalitate pentru $x=\frac{1}{n}$.

Rezultă $\sum \frac{(n+2)a}{n^2a^2+n^2a+1} \le \sum \frac{1}{n} = \frac{3}{n} \overset{(1)}{\le} a+b+c$, unde (1) rezultă din:

$\frac{a+b+c}{3} \overset{AM-HM}{\ge} \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{3}{3n} = \frac{1}{n}$, adică $a+b+c \ge \frac{3}{n}$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate pentru $a=b=c=\frac{1}{n}$.

Remarcă.

Dacă mărim numărul variabilelor obținem:

37) If $a,b,c,d,n > 0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=4n$ then

$$\frac{(n+2)a}{n^2a^2+n^2a+1}+\frac{(n+2)b}{n^2b^2+n^2b+1}+\frac{(n+2)c}{n^2c^2+n^2c+1}+\frac{(n+2)d}{n^2d^2+n^2d+1} \le a+b+c+d \ .$$

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{(n+2)x}{n^2x^2+n^2x+1} \le \frac{1}{n} \Leftrightarrow (nx-1)^2 \ge 0$, evident cu egalitate pentru $x=\frac{1}{n}$.

Rezultă $\sum \frac{(n+2)a}{n^2a^2+n^2a+1} \le \sum \frac{1}{n} = \frac{4}{n} \overset{(1)}{\le} a+b+c+d$, unde (1) rezultă din:

$$\frac{a+b+c+d}{4} \overset{AM-HM}{\geq} \frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} = \frac{4}{4n} = \frac{1}{n}, \text{ adică } a+b+c+d \geq \frac{4}{n}.$$

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate pentru $a=b=c=d=\frac{1}{n}$.

38) If $a_1, a_2, ..., a_k, n > 0$, $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k} = kn$ then

$$\frac{(n+2)a_1}{n^2a_1^2+n^2a_1+1}+\frac{(n+2)a_2}{n^2a_2^2+n^2a_2+1}+...+\frac{(n+2)a_k}{n^2a_k^2+n^2a_k+1} \leq a_1+a_2+...+a_k.$$

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{(n+2)x}{n^2x^2+n^2x+1} \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow (nx-1)^2 \geq 0$, evident cu egalitate pentru $x=\frac{1}{n}$.

Rezultă $\sum \frac{(n+2)a_1}{n^2a_1^2+n^2a_1+1} \leq \sum \frac{1}{n} = \frac{k}{n} \overset{(1)}{\leq} a_1+a_2+...+a_k$, unde (1) rezultă din:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k} \overset{AM-HM}{\geq} \frac{k}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k}} = \frac{k}{kn} = \frac{1}{n}, \text{ adică } a_1+a_2+...+a_k \geq \frac{k}{n}.$$

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate pentru $a_1=a_2=...=a_k=\frac{1}{n}$.

39) If $a,b,c,n > 0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$ then

$$\frac{a}{a^2+na+1}+\frac{b}{b^2+nb+1}+\frac{c}{c^2+nc+1} \leq \frac{a+b+c}{n+2}.$$

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{x}{x^2+nx+1} \leq \frac{1}{n+2} \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$, evident cu egalitate pentru $x=1$.

Rezultă $\sum \frac{a}{a^2+na+1} \leq \sum \frac{1}{n+2} = \frac{3}{n+2} \overset{(1)}{\leq} \frac{a+b+c}{n+2}$, unde (1) rezultă din:

$a+b+c \geq \dfrac{9}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \dfrac{9}{3} = 3$, adică $a+b+c \geq 3$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate pentru $a=b=c=1$.

Remarcă.

Dacă mărim numărul variabilelor obținem:

40) If $a,b,c,d,n>0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=4$ then

$$\frac{a}{a^2+na+1}+\frac{b}{b^2+nb+1}+\frac{c}{c^2+nc+1}+\frac{d}{d^2+nd+1} \leq \frac{a+b+c+d}{n+2}.$$

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\dfrac{x}{x^2+nx+1} \leq \dfrac{1}{n+2} \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$, evident cu egalitate pentru $x=1$.

Rezultă $\sum \dfrac{a}{a^2+na+1} \leq \sum \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{4}{n+2} \overset{(1)}{\leq} \dfrac{a+b+c+d}{n+2}$, unde (1) rezultă din:

$\dfrac{a+b+c+d}{4} \overset{AM-HM}{\geq} \dfrac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} = \dfrac{4}{4} = 1$, adică $a+b+c+d \geq 4$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate pentru $a=b=c=d=1$.

41) If $a_1,a_2,...,a_k,n>0$, $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k}=k$ then

$$\frac{a_1}{a_1^2+na_1+1}+\frac{a_2}{a_2^2+na_2+1}+...+\frac{a_k}{a_k^2+na_k+1} \leq \frac{a_1+a_2+...+a_k}{n+2}.$$

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\dfrac{x}{x^2+nx+1} \leq \dfrac{1}{n+2} \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$, evident cu egalitate pentru $x=1$.

Rezultă $\sum \dfrac{a_1}{a_1^2+na_1+1} \leq \sum \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{k}{n+2} \overset{(1)}{\leq} \dfrac{a_1+a_2+...+a_k}{n+2}$, unde (1) rezultă din:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k} \overset{AM-HM}{\geq} \frac{k}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k}} = \frac{k}{k} = 1, \text{ adică } a_1+a_2+...+a_k \geq k.$$

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate pentru $a_1 = a_2 = ... = a_k = 1$.

Aplicația 24.

1) Fie $a,b,c,d \geq 0$ astfel încât $a+b+c+d=4$. Arătați că

$$\frac{1}{11+a^2}+\frac{1}{11+b^2}+\frac{1}{11+c^2}+\frac{1}{11+d^2} \leq \frac{1}{3}.$$

AOPS 12/2018

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{1}{11+x^2} \leq \frac{7-x}{72} \Leftrightarrow (x-1)^2(x-5) \leq 0$, evident pentru $0 \leq x \leq 4$.

Obținem:

$$\sum \frac{1}{11+a^2} \leq \sum \frac{7-a}{72} = \frac{7\cdot 4-\sum a}{72} = \frac{28-4}{72} = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

2) Fie $a,b,c \geq 0$ astfel încât $a+b+c=3$ și $n \geq 7$. Arătați că

$$\frac{1}{n+a^2}+\frac{1}{n+b^2}+\frac{1}{n+c^2} \leq \frac{3}{n+1}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{1}{n+x^2} \leq \frac{n+3-2x}{(n+1)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2(2x+1-n) \leq 0$, evident pentru $0 \leq x \leq 3$ și $n \geq 7$.

Rezultă:

$$\sum \frac{1}{n+a^2} \leq \sum \frac{n+3-2x}{(n+1)^2} = \frac{(n+3)3-2\sum a}{(n+1)^2} = \frac{3n+9-2\cdot 3}{(n+1)^2} = \frac{3n+3}{(n+1)^2} = \frac{3}{n+1}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

3) Fie $a,b,c\geq 0$ astfel încât $a+b+c=3$. Arătați că

$$\frac{1}{8+a^2}+\frac{1}{8+b^2}+\frac{1}{8+c^2}\leq\frac{1}{3}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{1}{8+x^2}\leq\frac{11-2x}{81}\Leftrightarrow(x-1)^2(2x-7)\leq 0$, evident pentru $0\leq x\leq 3$.

Rezultă:

$$\sum\frac{1}{8+a^2}\leq\sum\frac{11-2x}{81}=\frac{11\cdot 3-2\sum a}{81}=\frac{33-2\cdot 3}{81}=\frac{27}{81}=\frac{1}{3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

4) Fie $a,b,c\geq 0$ astfel încât $a+b+c=3$. Arătați că

$$\frac{1}{7+a^2}+\frac{1}{7+b^2}+\frac{1}{7+c^2}\leq\frac{3}{8}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{1}{7+x^2}\leq\frac{5-x}{32}\Leftrightarrow(x-1)^2(x-3)\leq 0$, evident pentru $0\leq x\leq 3$.

Rezultă:

$$\sum\frac{1}{7+a^2}\leq\sum\frac{5-x}{32}=\frac{5\cdot 3-\sum a}{32}=\frac{15-3}{32}=\frac{12}{32}=\frac{3}{8}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

5) Fie $a,b,c\geq 0$ astfel încât $a+b+c=\frac{3}{2}$ și $n\geq 7$. Arătați că

$$\frac{1}{n+(b+c)^2}+\frac{1}{n+(c+a)^2}+\frac{1}{n+(a+b)^2}\leq\frac{3}{n+1}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Notând $b+c=x, c+a=y, a+b=z$, avem $x,y,z>0$ și $x+y+z=3$ și problema se reformulează:

Fie $a,b,c\geq 0$ astfel încât $x+y+z=3$ și $n\geq 7$. Arătați că

$$\frac{1}{n+x^2}+\frac{1}{n+y^2}+\frac{1}{n+z^2}\leq\frac{3}{n+1}.$$

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{1}{n+x^2}\leq\frac{n+3-2x}{(n+1)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2(2x+1-n)\leq 0$, evident pentru $0\leq x\leq 3$ și $n\geq 7$.

Rezultă:

$$\sum\frac{1}{n+x^2}\leq\sum\frac{n+3-2x}{(n+1)^2}=\frac{(n+3)3-2\sum x}{(n+1)^2}=\frac{3n+9-2\cdot 3}{(n+1)^2}=\frac{3n+3}{(n+1)^2}=\frac{3}{n+1}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1 \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$.

6) Fie $a,b,c\geq 0$ astfel încât $a+b+c=\frac{3}{2}$. Arătați că

$$\frac{1}{7+(b+c)^2}+\frac{1}{7+(c+a)^2}+\frac{1}{7+(a+b)^2}\leq\frac{3}{8}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Notând $b+c=x, c+a=y, a+b=z$, avem $x,y,z>0$ și $x+y+z=3$ și problema se reformulează:

Fie $a,b,c\geq 0$ astfel încât $x+y+z=3$. Arătați că

$$\frac{1}{7+x^2}+\frac{1}{7+y^2}+\frac{1}{7+z^2}\leq\frac{3}{8}.$$

Vezi inegalitatea **4)**.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1 \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$.

7) Fie $a,b,c\geq 0$ astfel încât $a+b+c=\frac{3}{2}$. Arătați că

$$\frac{1}{8+(b+c)^2}+\frac{1}{8+(c+a)^2}+\frac{1}{8+(a+b)^2}\leq\frac{1}{3}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Notând $b+c=x, c+a=y, a+b=z$, avem $x,y,z>0$ și $x+y+z=3$ și problema se reformulează:

Fie $a,b,c\geq 0$ astfel încât $x+y+z=3$. Arătați că

$$\frac{1}{8+x^2}+\frac{1}{8+y^2}+\frac{1}{8+z^2}\leq\frac{1}{3}.$$

Vezi inegalitatea **3)**.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1 \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$.

8) Fie $a,b,c\geq 0$ astfel încât $a+b+c=3$. Arătați că

$$\frac{1}{28+(b+c)^2}+\frac{1}{28+(c+a)^2}+\frac{1}{28+(a+b)^2}\leq\frac{3}{32}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Notând $b+c=x, c+a=y, a+b=z$, avem $x,y,z>0$ și $x+y+z=6$, iar problema se reformulează:

Fie $x,y,z\geq 0$ astfel încât $x+y+z=6$. Arătați că

$$\frac{1}{28+x^2}+\frac{1}{28+y^2}+\frac{1}{28+z^2}\leq\frac{3}{32}.$$

Soluție:

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{1}{28+x^2}\leq\frac{10-x}{256} \Leftrightarrow (x-2)^2(x-6)\leq 0$, evident pentru $0\leq x\leq 6$.

Rezultă:

$$\sum\frac{1}{28+x^2}\leq\sum\frac{10-x}{256}=\frac{10\cdot 3-\sum x}{256}=\frac{30-6}{256}=\frac{24}{256}=\frac{3}{32}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=2 \Leftrightarrow a=b=c=1$.

9) Fie $a,b,c\geq 0$ astfel încât $a+b+c=3$ și $n\geq 28$. Arătați că

$$\frac{1}{n+(b+c)^2}+\frac{1}{n+(c+a)^2}+\frac{1}{n+(a+b)^2}\leq\frac{3}{n+4}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Notând $b+c=x, c+a=y, a+b=z$, avem $x,y,z>0$ și $x+y+z=6$, iar problema se reformulează:

Fie $x,y,z\geq 0$ astfel încât $x+y+z=6$. Arătați că

$$\frac{1}{n+x^2}+\frac{1}{n+y^2}+\frac{1}{n+z^2}\leq\frac{3}{n+4}.$$

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{1}{n+x^2}\leq\frac{n+12-4x}{(n+4)^2} \Leftrightarrow (x-2)^2(4x+4-n)\leq 0$, evident pentru $0\leq x\leq 6$ și $n\geq 28$.

Rezultă:

$$\sum\frac{1}{n+x^2}\leq\sum\frac{n+12-4x}{(n+4)^2}=\frac{3(n+12)-4\sum x}{(n+4)^2}=\frac{3n+36-4\cdot 6}{(n+4)^2}=\frac{3n+12}{(n+4)^2}=\frac{3}{n+4}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=2 \Leftrightarrow a=b=c=1$.

Aplicația 25.

1) Numerele $x,y,z\geq\frac{-1}{4}$ verifică relația $x+y+z=3$. Arătați că

$$\frac{3x^2+4}{2x^2+1}+\frac{3y^2+4}{2y^2+1}+\frac{3z^2+4}{2z^2+1}\geq 7 .$$

Sebastian Drăgan, Sibiu,RMT 1/2019

Soluție.

Folosim Tangent Line Method .

Obținem $\frac{3x^2+4}{2x^2+1}\geq\frac{-10x+31}{9} \Leftrightarrow 4x^3-7x^2+2x+1\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(4x+1)\geq 0$,

evident , conform ipotezei $x\geq\frac{-1}{4}$.

Se vor scrie și celelalte două inegalități analoage și se adună cele trei inegalități obținute.

Rezultă:

$$\frac{3x^2+4}{2x^2+1}+\frac{3y^2+4}{2y^2+1}+\frac{3z^2+4}{2z^2+1}\geq\frac{-10x+31}{9}+\frac{-10y+31}{9}+\frac{-10z+31}{9}=\frac{-10(x+y+z)+3\cdot 31}{9}=$$

$$=\frac{-10\cdot 3+93}{9}=\frac{63}{9}=7.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$

Remarcă.

Inegalitatea se poate dezvolta:

2) Numerele $x,y,z\geq\frac{-1}{4}$ verifică relația $x+y+z=3$. Arătați că

$$\frac{nx^2+n+1}{2x^2+1}+\frac{ny^2+n+1}{2y^2+1}+\frac{nz^2+n+1}{2z^2+1}\geq 2n+1 \text{ , unde } n>-2.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosim Tangent Line Method .

Obținem $\frac{nx^2+n+1}{2x^2+1}\geq\frac{-x(2n+4)+8n+7}{9}\Leftrightarrow(n+2)(4x^3-7x^2+2x+1)\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(n+2)(x-1)^2(4x+1)\geq 0$, evident , conform ipotezei $n>-2$ și $x\geq\frac{-1}{4}$.

Se vor scrie și celelalte două inegalități analoage și se adună cele trei inegalități obținute.

Rezultă $\sum\frac{nx^2+n+1}{2x^2+1}\geq\sum\frac{-x(2n+4)+8n+7}{9}=\frac{-(2n+4)(x+y+z)+3(8n+7)}{9}=$

$$=\frac{-(2n+4)\cdot 3+3(8n+7)}{9}=\frac{18n+9}{9}=2n+1.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Notă.

Pentru $n=3$ se obține Problema E.219 din RMT nr. 1/2019, autor Sebastian Drăgan, Sibiu.

3) Numerele $x,y,z\geq\frac{-1}{4}$ verifică relația $x+y+z=3$. Arătați că

$$\frac{nx^2+k}{2x^2+1}+\frac{ny^2+k}{2y^2+1}+\frac{nz^2+k}{2z^2+1}\geq n+k \text{ , unde } n\leq 2k.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosim Tangent Line Method .

Obținem $\frac{nx^2+k}{2x^2+1} \geq \frac{x(2n-4k)+n+7k}{9} \Leftrightarrow (2k-n)(4x^3-7x^2+2x+1) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2k-n)(x-1)^2(4x+1) \geq 0$, evident , conform ipotezei $n \leq 2k$ și $x \geq \frac{-1}{4}$.

Se vor scrie și celelalte două inegalități analoage și se adună cele trei inegalități obținute.

Rezultă $\sum \frac{nx^2+k}{2x^2+1} \geq \sum \frac{x(2n-4k)+n+7k}{9} = \frac{(2n-4k)(x+y+z)+3(n+7k)}{9} =$

$= \frac{(2n-4k)\cdot 3+3(n+7k)}{9} = \frac{9n+9k}{9} = n+k$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$ sau dacă $n=2k$.

Aplicația 26.

1) Numerele reale $a,b,c,d \geq \frac{1}{3}$ verifică relația $a+b+c+d=4$. Arătați că

$$\frac{1}{3a^2+5}+\frac{1}{3b^2+5}+\frac{1}{3c^2+5}+\frac{1}{3d^2+5} \geq \frac{1}{2} .$$

RMT 3/2018, Vasile Giurgi, Sighetu Marmației

<u>Soluție(Marin Chirciu și Octavian Stroe, Pitești).</u>

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{1}{3x^2+5} \geq \frac{7-3x}{32} \Leftrightarrow 3x^3-7x^2+5x-1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(3x-1) \geq 0$, evident pentru $x \geq \frac{1}{3}$.

Sumând $\frac{1}{3a^2+5} \geq \frac{7-3a}{32}$ și folosind $a+b+c+d=4$ obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

<u>Remarcă.</u>

Inegalitatea se poate dezvolta.

2) Numerele reale $a_1,a_2,...,a_n \geq \frac{1}{3}$ verifică relația $a_1+a_2+...+a_n=n$. Arătați că

$$\frac{1}{3a_1^2+5}+\frac{1}{3a_2^2+5}+...+\frac{1}{3a_n^2+5} \geq \frac{n}{8} .$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Sumând $\frac{1}{3a^2+5} \geq \frac{7-3a}{32}$ și folosind $a_1+a_2+...+a_n=n$ obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1=a_2=...=a_n=1$.

Notă.

Pentru $n=4$ se obține Problema IX.486 din RMT 3/2018, propusă de Vasile Giurgi, Sighetu Marmației

3) Fie $a,b>0$. Numerele reale $x_1,x_2,...,x_n \geq \frac{b-a}{2a}$ verifică relația $x_1+x_2+...+x_n=n$. Arătați că

$$\frac{1}{ax_1^2+b}+\frac{1}{ax_2^2+b}+...+\frac{1}{ax_n^2+b} \geq \frac{n}{a+b}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{1}{ax^2+b} \geq \frac{3a+b-2a\cdot x}{(a+b)^2} \Leftrightarrow 2ax^3-(3a+b)x^2+2bx+a-b \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(2ax+a-b) \geq 0$, evident pentru $x \geq \frac{b-a}{2a}$.

Sumând $\frac{1}{ax^2+b} \geq \frac{3a+b-2a\cdot x}{(a+b)^2}$ și folosind $x_1+x_2+...+x_n=n$ obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x_1=x_2=...=x_n=1$.

Notă.

Pentru $a=3$, $b=5$ și $n=4$ se obține Problema IX.486 din RMT 3/2018, propusă de Vasile Giurgi, Sighetu Marmației

Aplicația 27.

Aplicația 28.

Numerele reale $a,b,c \geq \frac{1}{4}$ verifică relația $a+b+c=3$. Să se arate că

$$\frac{1}{2a^2+3}+\frac{1}{2b^2+3}+\frac{1}{2c^2+3}\geq\frac{3}{5}.$$

GM 11/2017, Aurel Oporanu, Craiova

Soluție.

Folosim Tangent Line Method .

Rezultă $\frac{1}{2x^2+3}\geq\frac{-4x+9}{25}\Leftrightarrow 4x^3-9x^2+6x-1\geq 0\Leftrightarrow (x-1)^2(4x-1)^2\geq 0$,

evident pentru $x\geq\frac{1}{4}$.

Avem $\sum\frac{1}{2a^2+3}\geq\sum\frac{-4a+9}{25}=\frac{-4(a+b+c)+3\cdot 9}{25}=\frac{-4\cdot 3+27}{25}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

Inegalitatea se poate dezvolta:

Numerele reale $a,b,c\geq\frac{1}{2n},n>0$ verifică relația $a+b+c=3$. Să se arate că

$$\frac{1}{na^2+n+1}+\frac{1}{nb^2+n+1}+\frac{1}{nc^2+n+1}\geq\frac{3}{2n+1}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosim Tangent Line Method .

Rezultă $\frac{1}{nx^2+n+1}\geq\frac{-2nx+4n+1}{(2n+1)^2}\Leftrightarrow 2n^2x^3-(4n^2+n)x^2+(2n^2+n)x-n\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(2nx-1)^2\geq 0$, evident pentru $x\geq\frac{1}{2n}$.

Avem

$$\sum\frac{1}{na^2+n+1}\geq\sum\frac{-2na+4n+1}{(2n+1)^2}=\frac{-2n(a+b+c)+3(4n+1)}{(2n+1)^2}=\frac{-2n\cdot 3+3(4n+1)}{(2n+1)^2}=\frac{6n+3}{(2n+1)^2}=\frac{3}{2n+1}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația 29.

Fie numerele reale $x,y,z\geq 1$ astfel încât $x+y+z=6$. Să se arate că:

$$\frac{x^2+3}{3x^2+1}+\frac{y^2+3}{3y^2+1}+\frac{z^2+3}{3z^2+1}\geq\frac{3}{2}.$$

GM 12/2017, Otilia Sorana Bejan, Reșița

Soluție.

Folosim Tangent Line Method .

Rezultă $\frac{x^2+3}{3x^2+1}\geq\frac{155-32x}{169}\Leftrightarrow 12x^3-37x^2+4x+44\geq 0\Leftrightarrow (x-2)^2(12x+11)\geq 0$, evident pentru $x\geq\frac{-11}{12}$, cu egalitate dacă și numai dacă $x=2$ sau $x=\frac{-11}{12}$.

Obținem $\sum\frac{x^2+3}{3x^2+1}\geq\sum\frac{155-32x}{169}=\frac{155\cdot 3-32(x+y+z)}{169}=\frac{465-192}{169}=\frac{21}{13}>\frac{3}{2}$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, inegalitatea fiind strictă.

Observație .

Condiția $x,y,z\geq 1$ poate fi slăbită la $x,y,z\geq\frac{-11}{12}$.

Remarcă.

Inegalitatea se poate dezvolta:

Fie numerele reale $x,y,z\geq 0$ astfel încât $x+y+z=6$ și $n\geq 1$. Să se arate că:

$$\frac{x^2+n}{nx^2+1}+\frac{y^2+n}{ny^2+1}+\frac{z^2+n}{nz^2+1}\geq\frac{3(n+4)}{4n+1}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosim Tangent Line Method .

Rezultă $\frac{x^2+n}{nx^2+1}\geq\frac{(4-4n^2)x+12n^2+17n-4}{(4n+1)^2}\Leftrightarrow$

$(4n^3-4n)x^3+(-12n^3-n^2+12n+1)x^2+(4n^2-4)x+16n^3-4n^2-16n+4\geq 0\Leftrightarrow (n^2-1\geq 0)$

$\Leftrightarrow 4nx^3-(12n+1)x^2+4x+4(4n-1)\geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2(4nx+4n-1)\geq 0$, evident pentru $x\geq 0$, cu egalitate dacă și numai dacă $x=2$.

Obținem $\sum \frac{x^2+n}{nx^2+1} \geq \sum \frac{\left(4-4n^2\right)x+12n^2+17n-4}{\left(4n+1\right)^2} = \frac{\left(4-4n^2\right)\left(x+y+z\right)+3\left(12n^2+17n-4\right)}{\left(4n+1\right)^2} =$

$= \frac{6\left(4-4n^2\right)+3\left(12n^2+17n-4\right)}{\left(4n+1\right)^2} = \frac{12n^2+51n+12}{\left(4n+1\right)^2} = \frac{3\left(n+4\right)\left(4n+1\right)}{\left(4n+1\right)^2} = \frac{3\left(n+4\right)}{4n+1}$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate dacă și numai dacă $x=y=z=2$.

Aplicația 30.

Fie $a,b,c \in \left(0,\infty\right)$, cu $a+b+c=3$. Arătați că

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2} \leq 1 .$$

RMT2/2017, Marian Cucoaneș, Mărășești

Soluție.

Folosim Tangent Line Method .

Avem $\frac{x}{x^2+2} \leq \frac{x+2}{9} \Leftrightarrow x^3+2x^2-7x+4 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2\left(x+4\right) \geq 0$,evident cu egalitate dacă și numai dacă $x=1$.

Obținem $\sum \frac{a}{a^2+2} \leq \sum \frac{a+2}{9} = \frac{\sum a+6}{9} = \frac{3+6}{9} = 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Notă

Inegalitatea poate fi dezvoltată:

Fie $a,b,c \in \left(0,\infty\right)$, cu $a+b+c=3$. Arătați că

$$\frac{a}{a^2+n}+\frac{b}{b^2+n}+\frac{c}{c^2+n} \leq \frac{3}{n+1}, \text{ unde } n \geq 1 .$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosim Tangent Line Method .

$\frac{x}{x^2+n} \leq \frac{\left(n-1\right)x+2}{\left(n+1\right)^2} \Leftrightarrow \left(n-1\right)x^3+2x^2-\left(3n+1\right)x+2n \geq 0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2\left[\left(n-1\right)x+2n\right] \geq 0$,

evident cu egalitate dacă și numai dacă $x=1$.

Obținem $\sum \frac{a}{a^2+n} \le \sum \frac{(n-1)a+2}{(n+1)^2} = \frac{(n-1)\sum a+6}{(n+1)^2} = \frac{(n-1)3+6}{(n+1)^2} = \frac{3}{n+1}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă

Pentru $n=2$ se obține **problema IX.457** din **RMT 2/2017.**

Aplicația 31.

1) If $a,b,c>0$ and $a+b+c=3$ then

$$\sum \frac{1}{a^2+1} \ge \frac{3}{2}.$$

Nguyen Van Canh, RMM 5/2018

Soluție.

Demonstrăm

Lema

2) If $x>0$ then

$$\frac{1}{x^2+1} \ge \frac{2-x}{2}.$$

Soluție.

Avem $\frac{1}{x^2+1} \ge \frac{2-x}{2} \Leftrightarrow x(x-1)^2 \ge 0$, evident cu egalitate pentru $x=1$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$Ms = \sum \frac{1}{a^2+1} \ge \sum \frac{2-x}{2} = \frac{6-\sum x}{2} = \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2} = Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

Problema se poate dezvolta.

3) If $a,b,c>0$ with $a+b+c=3$ and $0 \le \lambda \le 1$ then

$$\sum \frac{1}{a^2+\lambda} \ge \frac{3}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Demonstrăm

Lema

4) If $x>0$ and $0\le\lambda\le 1$ then

$$\frac{1}{x^2+\lambda}\ge\frac{-2x+\lambda+3}{(\lambda+1)^2}.$$

Soluție.

Avem $\frac{1}{x^2+1}\ge\frac{2-x}{2}\Leftrightarrow x(x-1)^2\ge 0$, evident cu egalitate pentru $x=1$.

Demonstrație

Folosim Tangent Line Method .

Consider funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+\lambda}$, $f(1)=\frac{1}{\lambda+1}$

Ecuația tangentei în punctul $x_0=1$ este $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Avem $f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+\lambda)^2}$, $f'(1)=\frac{-2}{(\lambda+1)^2}$.

Ecuația tangentei în punctul $x_0=1$ este $y-\frac{1}{\lambda+1}=\frac{-2}{(\lambda+1)^2}(x-1)$.

Obținem ecuația tangentei $y=\frac{-2x+\lambda+3}{(\lambda+1)^2}$.

Arătăm că:

$$f(x)=\frac{1}{x^2+\lambda}\ge\frac{-2x+\lambda+3}{(\lambda+1)^2}.$$

Avem:

$$\frac{1}{x^2+\lambda}\ge\frac{-2x+\lambda+3}{(\lambda+1)^2}\Leftrightarrow 2x^3-(\lambda+3)x^2+2\lambda x-\lambda+1\ge 0\Leftrightarrow (x-1)^2(2x-\lambda+1)\ge 0,$$

care rezultă $(x-1)^2\ge 0$ și $(2x-\lambda+1)>0$, adevărată din condiția din ipoteză $0\le\lambda\le 1$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$Ms=\sum\frac{1}{a^2+\lambda}\geq\sum\frac{-2a+\lambda+3}{(\lambda+1)^2}=\frac{-2\sum a+3(\lambda+3)}{(\lambda+1)^2}=\frac{-2\cdot 3+3(\lambda+3)}{(\lambda+1)^2}=\frac{3}{\lambda+1}=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Notă.

Pentru $\lambda=1$ se obține Problema propusă de Nguyen Van Canh în RMM 5/2018.

If $a,b,c>0$ and $a+b+c=3$ then

$$\sum\frac{1}{a^2+1}\geq\frac{3}{2}.$$

Nguyen Van Canh

Aplicația 32.

1) If $a,b,c,d>0$ such that $a+b+c+d=4$ then

$$\sum\frac{a}{a^3+8}\leq\frac{4}{9}.$$

Adil Abdullayev, Azerbaijan, Math 5/2021

Soluție.

Demonstrăm

Lema

2) If $x>0$ and $\lambda\geq 2$ then

$$\frac{x}{x^3+\lambda}\leq\frac{(\lambda-2)x+3}{(\lambda+1)^2}.$$

Demonstrație

Folosim Tangent Line Method .

Consider funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^3+\lambda}$, $f(1)=\frac{1}{\lambda+1}$

Ecuația tangentei în punctul $x_0=1$ este $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Avem $f'(x)=\frac{\lambda-2x^3}{(x^3+\lambda)^2}$, $f'(1)=\frac{\lambda-2}{(\lambda+1)^2}$.

Ecuația tangentei în punctul $x_0 = 1$ este $y - \frac{1}{\lambda+1} = \frac{\lambda-2}{(\lambda+1)^2}(x-1)$.

Obținem ecuația tangentei $y = \frac{(\lambda-2)x+3}{(\lambda+1)^2}$.

Arătăm că:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+\lambda} \le \frac{(\lambda-2)x+3}{(\lambda+1)^2}.$$

Avem:

$$\frac{x}{x^3+\lambda} \le \frac{(\lambda-2)x+3}{(\lambda+1)^2} \Leftrightarrow (\lambda-2)x^4 + 3x^3 - (4\lambda+1)x + 3\lambda \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2\left[(\lambda-2)x^2 + (2\lambda-1)x + 3\lambda\right] \ge 0,$$

care rezultă $(x-1)^2 \ge 0$ și $\left[(\lambda-2)x^2 + (2\lambda-1)x + 3\lambda\right] > 0$, adevărată din condiția din ipoteză $\lambda \ge 2$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$Ms = \sum \frac{a}{a^3+\lambda} \ge \sum \frac{(\lambda-2)a+3}{(\lambda+1)^2} = \frac{(\lambda-2)\sum a + 3\cdot 4}{(\lambda+1)^2} = \frac{(\lambda-2)\cdot 4 + 12}{(\lambda+1)^2} = \frac{4}{\lambda+1} = Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = d = 1$.

Pentru $\lambda = 8$ se obține inegalitatea din enunț.

<u>Remarcă.</u>

Problema se poate dezvolta.

3) If $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ such that $a_1 + a_2 + ... + a_n = n$ and $\lambda \ge 2$ then

$$\sum \frac{a_1}{a_1^3+\lambda} \le \frac{n}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție.</u>

Demonstrăm

<u>Lema</u>

4) If $x>0$ and $\lambda \geq 2$ then

$$\frac{x}{x^3+\lambda} \leq \frac{(\lambda-2)x+3}{(\lambda+1)^2}.$$

Demonstrație

Folosim Tangent Line Method .

Consider funcția $f:(0,\infty)\to \mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^3+\lambda}$, $f(1)=\frac{1}{\lambda+1}$

Ecuația tangentei în punctul $x_0=1$ este $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Avem $f'(x)=\frac{\lambda-2x^3}{(x^3+\lambda)^2}$, $f'(1)=\frac{\lambda-2}{(\lambda+1)^2}$.

Ecuația tangentei în punctul $x_0=1$ este $y-\frac{1}{\lambda+1}=\frac{\lambda-2}{(\lambda+1)^2}(x-1)$.

Obținem ecuația tangentei $y=\frac{(\lambda-2)x+3}{(\lambda+1)^2}$.

Arătăm că:

$$f(x)=\frac{1}{x^2+\lambda} \leq \frac{(\lambda-2)x+3}{(\lambda+1)^2}.$$

Avem:

$$\frac{x}{x^3+\lambda} \leq \frac{(\lambda-2)x+3}{(\lambda+1)^2} \Leftrightarrow (\lambda-2)x^4+3x^3-(4\lambda+1)x+3\lambda \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left[(\lambda-2)x^2+(2\lambda-1)x+3\lambda\right] \geq 0,$$

care rezultă $(x-1)^2 \geq 0$ și $\left[(\lambda-2)x^2+(2\lambda-1)x+3\lambda\right]>0$, adevărată din condiția din ipoteză $\lambda \geq 2$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$Ms=\sum \frac{a_1}{a_1^3+\lambda} \geq \sum \frac{(\lambda-2)a_1+3}{(\lambda+1)^2}=\frac{(\lambda-2)\sum a_1+3\cdot n}{(\lambda+1)^2}=\frac{(\lambda-2)\cdot n+3n}{(\lambda+1)^2}=\frac{n}{\lambda+1}=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$.

Notă.

Pentru $\lambda = 8, n = 4$ se obține Problema propusă de Adil Abdullayev în Math 5/2021.

Art 2219

14 Mai 2021

Bibliografie:

1. Marius Stănean, Mathematical Reflections, Nr.1/2018.
2. Olimpiada de Matematică, USA 2003.
3. Marin Chirciu, Inegalități algebrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2014.
4. Daniel Sitaru, 588 Cyclic Inequality, Romanian Mathematical Magazine, 2019.
5. Titu Andreescu și Gabriel Dospinescu, Old and News Inequalities, GIL-2006.
6. George Apostolopoulos, Greece, Crux Mathematicorum. No.3/2021.
7. Kunihiko Chikaya, Matematica 7/2020.
8. Rahim Shahbazov, Azerbaijan, Mathematical Inequalities 6/2020.
9. Nguyen Viet Hung ,Vietnam, Romanian Mathematical Magazine 4/2020.
10. Hoang Le Nhat Tung, Romanian Mathematical Magazine Autumn-2021.
11. Kostas Geronikolas, Greece, Pascal Academy, Math Group 5/2020.
12. Constantin Nicolau, Curtea de Argeș, GM 5/2020.
13. Jalil Hajimir,Canada, Pascal Academy , , Math Group 10/2019.
14. Dragoljub Milosević, Belgrad, Crux Mathematicorum, Vol.41, No.5, May 2015.
15. Daniel Sitaru, Romanian Mathematical Magazine 2019.
16. Sebastian Drăgan, Sibiu, RMT 1/2019.
17. Vasile Giurgi, Sighetu Marmației , RMT 3/2018.
18. Aurel Oporanu, Craiova , GM 11/2017.
19. Otilia Sorana Bejan, Reșița, GM 12/2017.
20. Marian Cucoaneș, Mărășești , RMT2/2017.
21. Nguyen Van Canh,Vietnam, RMM 5/2018.
22. Adil Abdullayev, Azerbaijan, Math 5/2021.
23. Marin Chirciu și Octavian Stroe, Pitești, RMT3/2016.
24. Marin Chirciu, Inegalități algebrice2, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2021.

Art 2219

10 Aprilie 2021

3. ÎNVĂŢAREA CENTRATA PE ELEV ÎN CADRUL ORELOR DE MATEMATICĂ

Prof. BORCOMAN ANA

ŞCOALA GIMNAZIALĂ NR. 30 BRAŞOV

Învăţarea centrată pe elev reprezintă o abordare care presupune un stil de învăţare activ şi integrarea programelor de învăţare în funcţie de ritmul propriu de învăţare al elevului. Elevul trebuie să fie implicat şi responsabil pentru progresele pe care le face în ceea ce priveşte propria lui educaţie.

Pentru a avea cu adevărat elevul în centrul activităţii instructiv-educative, profesorul îndeplineşte roluri cu mult mai nuanţate decât în şcoala tradiţională. În abordarea centrată pe elev, succesul la clasă depinde de competenţele cadrului didactic de a crea oportunităţile optime de învăţare pentru fiecare elev. Astfel, în funcţie de context, profesorul acţionează mereu, dar adecvat şi adaptat nevoilor grupului.

Avantajele învăţării centrate pe elev sunt:

- ✓ Creşterea motivaţiei elevilor, deoarece aceştia sunt conştienţi că pot influenţa procesul de învăţare;
- ✓ Eficacitate mai mare a învăţării şi a aplicării celor învăţate, deoarece aceste abordări folosesc învăţarea activă;
- ✓ Învăţarea capătă sens, deoarece a stăpâni materia înseamnă a o înţelege;
- ✓ Posibilitate mai mare de includere - poate fi adaptată în funcţie de potenţialul fiecărui elev, de capacităţile diferite de învăţare, de contextele de învăţare specifice.

Metodele de învăţare centrată pe elev fac lecţiile interesante, sprijină elevii în înţelegerea conţinuturilor pe care să fie capabili să le aplice în viaţa reală.

Printre metodele care activează predarea-învăţarea sunt şi cele prin care elevii lucrează productiv unii cu alţii, îşi dezvoltă abilităţi de colaborare şi ajutor reciproc. Ele pot avea un impact extraordinar asupra elevilor datorită denumirilor, caracterului ludic şi oferă alternative de învăţare cu ,,priză" la elevi.

În vederea dezvoltării gândirii critice la elevi, trebuie să utilizăm, cu precădere unele strategii activ-participative, creative. Acestea nu trebuie rupte de cele tradiţionale, ele marcând un nivel superior în spirala modernizării strategiilor didactice.

Dintre metodele moderne specifice învăţării active care pot fi aplicate cu succes şi la orele de matematică fac parte: ***brainstormingul, metoda mozaicului, metoda cubului, turul galeriei, ciorchinele.***

1. Brainstormingul

Brainstormingul este o metodă care ajută la crearea unor idei şi concepte creative şi inovatoare. Pentru un brainstorming eficient, inhibiţiile şi criticile suspendate vor fi puse de-o parte. Astfel exprimarea va deveni liberă şi participanţii la un proces de brainstorming îşi vor spune ideile şi părerile fără teama de a fi respinşi sau criticaţi. Se expune un concept, o idee sau o problemă şi fiecare îşi spune părerea despre cele expuse şi absolut tot ceea ce le trece prin minte, inclusiv idei comice sau inaplicabile.

O sesiune de brainstorming bine dirijată dă fiecăruia ocazia de a participa la dezbateri şi se poate dovedi o acţiune foarte constructivă.

Etapele unui brainstorming eficient sunt următoarele:

- *deschiderea sesiunii de brainstorming* în care se prezintă scopul acesteia şi se discută tehnicile şi regulile de bază care vor fi utilizate;
- *perioada de acomodare* durează 5-10 minute şi are ca obiectiv introducerea grupului în atmosfera brainstormingului, unde participanţii sunt stimulaţi să discute idei generale pentru a putea trece la un nivel superior;

- *partea creativă a brainstormingului* are o durată de 25-30 de minute. Este recomandabil ca în

timpul derulării acestei etape, coordonatorul (profesorul) să amintească timpul care a trecut şi cât timp a mai rămas, să "preseze" participanţii şi în finalul părţii creative să mai acorde câte 3-4 minute în plus. În acest interval de timp grupul participant trebuie să fie stimulaţi să-şi spună părerile fără ocolişuri.

- la sfârşitul părţii creative coordonatorul brainstormingului *clarifică ideile* care au fost notate şi

puse în discuţie şi verifică dacă toată lumea a înţeles punctele dezbătute. Este momentul în care se vor elimina sugestiile prea îndrăzneţe şi care nu sunt îndeajuns de pertinente. Se face şi o evaluare a sesiunii de brainstorming şi a contribuţiei fiecărui participant la derularea sesiunii. Pot fi luate în considerare pentru evaluare: talentele şi aptitudinile grupului, repartiţia timpului şi punctele care au reuşit să fie atinse.

- pentru a stabili un *acord obiectiv* cei care au participat la brainstorming îşi vor spune părerea şi

vor vota cele mai bune idei. Grupul supus la acţiunea de brainstorming trebuie să stabilească singuri care au fost ideile care s-au pliat cel mai bine pe conceptul dezbătut.

Pe timpul desfăşurării brainstormingului participanţilor nu li se vor cere explicaţii pentru ideile lor. Aceasta este o greşeală care poate aduce o evaluare prematură a ideilor şi o îngreunare a procesului în sine.

Brainstormingul funcţionează după principiul: *asigurarea calităţii prin cantitate şi îşi propune să elimine exact acest neajuns generat de autocritică*.

Vă recomandăm **7 reguli** pe care elevii le vor respecta în scopul unei şedinţe reuşite de brainstorming:

1. Nu judecaţi ideile celorlalţi – cea mai importantă regulă.

2. Încurajaţi ideile nebuneşti sau exagerate.

3. Căutaţi cantitate, nu calitate în acest punct.

4. Notaţi tot.

5. Fiecare elev este la fel de important.

6. Naşteţi idei din idei.

7. Nu vă fie frică de exprimare.

Este important de reţinut că obiectivul fundamental al metodei brainstorming constă în exprimarea liberă a opiniilor prin eliberarea de orice prejudecăţi. De aceea, acceptaţi toate ideile, chiar trăznite, neobişnuite, absurde, fanteziste, aşa cum vin ele în mintea elevilor, indiferent dacă acestea conduc sau nu la rezolvarea problemei. Pentru a determina progresul în învăţare al elevilor este necesar să îi antrenaţi în schimbul de idei; faceţi asta astfel încât toţi elevii să îşi exprime opiniile!

Exemplul 1. ***Aplicarea metodei brainstorming la rezolvarea unei probleme de geometrie la***

clasa a VII-a în care se aplică teorema înălţimii, teorema catetei, teorema lui Pitagora şi funcţiile trigonometrice (a se vedea Anexa1).

2. Mozaicul

Mozaicul sau „metoda grupurilor interdependente" este o strategie bazată pe învăţarea în echipă. Fiecare elev are o sarcină de studiu în care trebuie să devină *expert*. El are în acelaşi timp şi responsabilitatea transmiterii informaţiilor asimilate, celorlalţi colegi.

În cadrul acestei metode rolul profesorului este mult diminuat, el intervine semnificativ la începutul lecţiei când împarte elevii în grupurile de lucru şi trasează sarcinile şi la sfârşitul activităţii când va prezenta concluziile activităţii.

Există mai multe variante ale metodei mozaic iar noi vom prezenta varianta standard a acestei metode care se realizează în cinci ***etape***.

1. ***Pregătirea materialului de studiu***

- Profesorul stabileşte tema de studiu şi o împarte în 4 sau 5 *sub-teme*. Opţional, poate stabili

pentru fiecare sub-temă, elementele principale pe care trebuie să pună accentul elevul, atunci când studiază materialul în mod independent. Acestea pot fi formulate fie sub formă de întrebări, fie afirmativ, fie un text eliptic care va putea fi completat numai atunci când elevul studiază materialul.

- Realizează o *fişă-expert* în care trece cele 4 sau 5 sub-teme propuse şi care va fi oferită fiecărui grup.

2. ***Organizarea colectivului în echipe de învăţare*** de câte 4-5 elevi (în funcţie de numărul lor în clasă)

- Fiecare elev din echipă, primeşte o literă (A, B, C, D) şi are ca sarcină să studieze în mod independent, sub-tema corespunzătoare literei sale.

- El trebuie să devină expert în problema dată. De exemplu, elevii cu litera A vor aprofunda sub-tema din Fişa „A”. Cei cu litera B vor studia sub-tema din Fişa „B”, etc.

- Faza independentă: fiecare elev studiază sub-tema lui, citeşte textul corespunzător. Acest studiu independent poate fi făcut în clasă sau poate constitui o temă de casă, realizată înaintea organizării mozaicului.

3. ***Constituirea grupului de experţi***

- După ce au parcurs faza de lucru independent, experţii cu aceaşi literă se reunesc, constituind grupe de experţi pentru a dezbate problema împreună. Astfel, elevii cu litera A, părăsesc echipele de învăţare iniţiale şi se adună la o masă pentru a aprofunda sub-tema din Fişa „A”. La fel procedează şi ceilalţi elevi cu literele B, C, şi D. Dacă grupul de experţi are mai mult de 6 membri, acesta se divizează în două grupe mai mici.

- Faza discuţiilor în grupul de experţi: elevii prezintă un *raport individual* asupra a ceea ce au

studiat independent. Au loc discuţii pe baza datelor şi a materialelor avute la dispoziţie, se adaugă elemente noi şi se stabileşte modalitatea în care noile cunoştinţe vor fi transmise şi celorlaţi membrii din echipa iniţială.

- Fiecare elev este membru într-un grup de experţi şi face parte dintr-o echipă de învăţare. Din

punct de vedere al aranjamentului fizic, mesele de lucru ale grupurilor de experţi trebuie plasate în diferite locuri ale sălii de clasă, pentru a nu se deranja reciproc.

- Scopul comun al fiecărui grup de experţi este să se instruiască cât mai bine, având

responsabilitatea propriei învăţări şi a predării şi învăţării colegilor din echipa iniţială.

4. ***Reîntoarcerea în echipa iniţială de învăţare***

- Faza raportului de echipă: experţii transmit cunoştinţele asimilate, reţinând la rândul lor

cunoştinţele pe care le transmit colegii lor, experţi în alte sub-teme. Modalitatea de transmitere trebuie să fie scurtă, concisă, atractivă, putând fi însoţită de suporturi audio-vizuale, diverse materiale.

- Specialiştii într-o sub-temă pot demonstra o idee, citi un raport, folosi computerul, pot ilustra

ideile cu ajutorul diagramelor, desenelor, fotografiilor. Membrii sunt stimulaţi să discute, să pună întrebări şi să-şi noteze, fiecare realizându-şi propriul plan de idei.

5. ***Evaluarea***

- Faza demonstraţiei: grupele prezintă rezultatele întregii clase. În acest moment elevii sunt gata

să demonstreze ce au învăţat. Profesorul poate pune întrebări, poate cere un raport sau un eseu ori poate da spre rezolvare fiecărui elev o fişă de evaluare. Dacă se recurge la evaluarea orală, atunci fiecărui elev i se va adresa o întrebare la care trebuie să răspundă fără ajutorul echipei.

Exemplul 2. ***Aplicarea metodei mozaicului la predarea criteriilor de divizibilitate cu 2, 5, 10 şi***

3 la clasa a VI-a. (a se vedea Anexa 2).

Ca toate celelalte metode de învăţare prin cooperare şi aceasta presupune următoarele ***avantaje***:

- stimularea încrederii în sine a elevilor;

- dezvoltarea abilităţilor de comunicare argumentativă şi de relaţionare în cadrul grupului;

- dezvoltarea gândirii logice, critice şi independente;

- dezvoltarea răspunderii individuale şi de grup;

- optimizarea învăţării prin predarea achiziţiilor altcuiva.

„Trebuie să remarcăm calitatea metodei grupurilor interdependente de a anihila manifestarea

efectului Ringelmann. Lenea socială, cum se mai numeşte acest efect, apare cu deosebire atunci când individul îşi imaginează că propria contribuţie la sarcina de grup nu poate fi stabilită cu precizie. Interdependenţa dintre membri şi individualizarea aportului fac din metoda mozaicului un remediu sigur împotriva acestui efect”.

3. Metoda cubului

Metoda cubului presupune explorarea unui subiect, a unei situaţii din mai multe perspective, permiţând abordarea complexă şi integratoare a unei teme.

Sunt recomandate următoarele etape:

- Realizarea unui cub pe ale cărui feţe sunt scrise cuvintele: *descrie, compară, analizează, asociază, aplică, argumentează.*

- Anunţarea temei, subiectului pus în discuţie.
- Împărţirea clasei în 6 grupe, fiecare dintre ele examinând tema din perspectiva cerinţei de pe una din feţele cubului.

- **Descrie**: *culorile, formele, mărimile,* etc.

- **Compară**: *ce este asemănător? Ce este diferit?*
- **Analizează**: *spune din ce este făcut, din ce se compune.*
- **Asociază**: *la ce te îndeamnă să te gândeşti?*
- **Aplică**: *ce poţi face cu aceasta? La ce poate fi folosită?*
- **Argumentează**: *pro sau contra şi enumeră o serie de motive care vin în sprijinul afirmaţiei tale.*

▪ Redactarea finală şi împărtăşirea ei celorlalte grupe.

▪ Afişarea formei finale pe tablă sau pe pereţii clasei.

Exemplul 3. ***Aplicarea la lecţia de recapitulare şi sistematizare a cunoştinţelor* – Poliedre – *clasa a VIII-a (a se vedea Anexa 3).***

4. Turul galeriei

Turul galeriei este o metodă interactivă de învăţare bazată pe colaborarea între elevi, care sunt

puşi în ipostaza de a găsi soluţii de rezolvare a unor probleme. Această metodă presupune evaluarea interactivă şi profund formativă a produselor realizate de grupuri de elevi.

Astfel, **turul galeriei** constă în următoarele:

1. Elevii, în grupuri de trei sau patru, rezolvă o problemă (o sarcină de învăţare) susceptibilă de a

avea mai multe soluţii (mai multe perspective de abordare).

2. Produsele muncii grupului se materializează într-o schemă, diagramă, inventar de idei etc. notate pe o hârtie (un poster).

3. Posterele se expun pe pereţii clasei, transformaţi într-o veritabilă galerie.
4. La semnalul profesorului, grupurile trec pe rând, pe la fiecare poster pentru a examina soluţiile

propuse de colegi. Comentariile şi observaţiile vizitatorilor sunt scrise pe posterul analizat.

5. După ce se încheie turul galeriei (grupurile revin la poziţia iniţială, înainte de plecare) fiecare

echipă îşi reexaminează produsul muncii lor comparativ cu ale celorlalţi şi discută observaţiile şi comentariile notate de colegi pe propriul poster.

Turul galeriei se foloseşte cu succes împreună cu metoda cubului aşa cum se poate vedea şi în exemplul 3 prezentat anterior.

5. Ciorchinele

Deşi este o variantă mai simplă a brainstorming-ului, ***ciorchinele*** este o metodă care presupune

identificarea unor conexiuni logice între idei, poate fi folosită cu succes atât la începutul unei lecţii pentru reactualizarea cunoştinţelor predate anterior, cât şi în cazul lecţiilor de sinteză, de recapitulare, de sistematizare a cunoştinţelor.

Ciorchinele este o tehnică de căutare a căilor de acces spre propriile cunoştinţe evidenţiind modul de a înţelege o anumită temă, un anumit conţinut.

Ciorchinele reprezintă o tehnică eficientă de predare şi învăţare care încurajează elevii să gândească liber şi deschis.

Metoda ciorchinelui funcţionează după următoarele *etape*:

1. Se scrie un cuvânt / temă (care urmează a fi cercetat) în mijlocul tablei sau a unei foi de hârtie.
2. Elevii vor fi solicitaţi să-şi noteze toate ideile, sintagmele sau cunoştinţele pe care le au în minte

în legătură cu tema respectivă, în jurul cuvântului din centru, trăgându-se linii între acestea şi cuvântul iniţial.

3. În timp ce le vin în minte idei noi şi le notează prin cuvintele respective, elevii vor trage linii

între toate ideile care par a fi conectate.

4. Activitatea se opreşte când se epuizează toate ideile sau când s-a atins limita de timp acordată.

   Există câteva *reguli* ce trebuie respectate în utilizarea tehnicii ciorchinelui:

- Scrieţi tot ce vă trece prin minte referitor la tema / problema pusă în discuţie.
- Nu judecaţi / evaluaţi ideile produse, ci doar notaţiile.
- Nu vă opriţi până nu epuizaţi toate ideile care vă vin în minte sau până nu expiră timpul alocat; dacă ideile refuză să vină insistaţi şi zăboviţi asupra temei până ce vor apărea unele idei.
- Lăsaţi să apară cât mai multe şi mai variate conexiuni între idei; nu limitaţi nici numărul ideilor, nici fluxul legăturilor dintre acestea.

Avantajele acestei tehnici de învăţare sunt:

- În etapa de reflecţie vom utiliza "ciorchinele revizuit" în care elevii vor fi ghidaţi prin intermediul unor întrebări, în gruparea informaţiilor în funcţie de anumite criterii.
- Prin această metodă se fixează mai bine ideile şi se structurează infomaţiile facilizându-se reţinerea şi înţelegerea acestora.
- Adesea poate rezulta un "ciorchine" cu mai mulţi "sateliţi".

Exemplul 4. ***Aplicarea metodei ciorchinelui la recapitularea unităţii de învăţare – Mulţimi – clasa a V-a (a se vedea Anexa 4).***

Utilizarea acestor metode antrenează elevii într-o continuă participare şi colaborare, creşte motivarea intrinsecă deoarece li se solicită să descopere fapte, să aducă argumente pro şi contra. Lucrul în echipă dezvoltă atitudinea de toleranţă faţă de ceilalţi şi sunt eliminate motivele de stres iar emoţiile se atenuează.

Pot susţine cu convingere că beneficiarii învăţământului centrat pe elev sunt elevii deoarece, aşa cum spune "crezul instruirii active": ***"Ce aud-uit; Ce aud şi văd - îmi amintesc puţin; Ce aud, văd şi întreb - încep să înţeleg; Ce aud, văd, întreb şi exersez - îmi însuşesc şi deprind; Ceea ce pun în practică învăţ cu adevărat".***

BIBLIOGRAFIE

- ✓ Ardelean Liviu, Secelean Nicolae – *Didactica matematicii – noţiuni generale, comunicare didactică specifică matematicii*, Ed. Universităţii "Lucian Blaga", Sibiu, 2007
- ✓ Ardelean Liviu, Secelean Nicolae – *Didactica matematicii – managementul, proiectarea şi evaluarea activităţilor didactice*, Ed. Universităţii "Lucian Blaga", Sibiu, 2007
- ✓ Dumitru Ion Alexandru – *Dezvoltarea gândirii critice şi învăţarea eficientă*, Ed. de Vest, Timişoara, 2000
- ✓ Sarivan Ligia, coord. – *Predarea interactivă centrată pe elev*, Educaţia 2000+, Bucureşti, 2005
- ✓ Singer Mihaela, Voica Cristian – *Recuperarea rămânerii în urmă la matematică,* Educaţia 2000+, Bucureşti, 2005

ANEXE

Anexa 1. ***Aplicarea metodei brainstorming la rezolvarea unei probleme de geometrie la clasa a VII-a în care se aplică teorema înălţimii, teorema catetei, teorema lui Pitagora şi funcţiile trigonometrice.***

Etape:

1. *Alegerea sarcinii de lucru. Problema este scrisă pe tablă.*

În triunghiul ABC cu $m(\hat{A}) = 90^\circ$ şi AD $\perp$ BC, D $\in$ BC se cunosc BD = 8 cm şi BC = 32 cm. Aflaţi AB, DC, AD, AC, $m(\hat{B})$ şi $m(\hat{C})$.

2. *Solicitarea exprimării într-un mod cât mai rapid, a tuturor ideilor legate de rezolvarea problemei. Sub nici un motiv, nu se vor admite referiri critice.*

Cereţi elevilor să propună strategii de rezolvare a problemei. Pot apărea, de exemplu, sugestii legate de realizarea unei figuri cât mai corecte. Lăsaţi elevii să propună orice metodă le trece prin minte!

3. *Înregistrarea tuturor ideilor în scris (pe tablă). Anunţarea unei pauze pentru aşezarea ideilor (de la 15 minute până la o zi).*

Notaţi toate propunerile elevilor. La sfârşitul orei, puneţi elevii să transcrie toate aceste idei şi cereţi-le ca pe timpul pauzei, să mai reflecteze asupra lor.

4. *Reluarea ideilor emise pe rând şi gruparea lor pe categorii, simboluri, cuvinte cheie, etc.*

Pentru problema analizată, cuvintele-cheie ar putea fi: teoremele învăţate la relaţiile metrice în triunghiul dreptunghic, precum şi funcţiile trigonometrice.

5. *Analiza critică, evaluarea, argumentarea, contraargumentarea ideilor emise anterior. Selectarea ideilor originale sau a celor mai apropiate de soluţii fezabile pentru problema supusă atenţiei.*

Puneţi întrebări de tipul: Cine este BD, dar BC pentru triunghiul ABC? Cum putem afla cateta AB? Dar proiecţia DC?

6. *Afişarea ideilor rezultate în forme cât mai variate şi originale: cuvinte, propoziţii, colaje, imagini, desene, etc.*

Ca urmare a discuţiilor avute cu elevii, trebuie să rezulte strategia de rezolvare a problemei. Aceasta poate fi sintetizată sub forma unor indicaţii de rezolvare de tipul:

- construim triunghiul;
- aplicăm teorema catetei, teorema înălţimii şi teorema lui Pitagora;
- aplicăm funcţiile sinus sau cosinus.

Anexa 2. ***Aplicarea metodei mozaicului la predarea criteriilor de divizibilitate cu 2, 5, 10 şi 3 la clasa a VI-a.***

Etape:

1. *Împărţirea clasei a VI-a în 5 grupuri eterogene de 4 elevi, fiecare dintre aceştia primind câte o fişă de învăţare notată cu câte o literă (A, B, C, D). Fişele cuprind părţi ale unui material, ce urmează a fi înţeles şi discutat de către elevi.*

Propuneţi lecţia „Criterii de divizibilitate cu 2, 5, 10 şi 3” – clasa a VI-a

2. *Prezentarea succintă a subiectului tratat. Explicarea sarcinii de lucru şi a modului în care se va desfăşura activitatea.*

În cazul analizat, subiectul analizat este „Criteriile de divizibilitate cu 2, 5, 10 şi 3”.

3. *Regruparea elevilor, în funcţie de litera fişei primite, în* ***grupuri de experţi****: toţi elevii care au litera A vor forma un grup, cei cu litera B vor forma alt grup ş.a.m.d.*

Aşadar, unul dintre grupurile de „experţi” va fi format din toţi elevii care au primit, în cadrul grupului iniţial de 4, *Criteriul de divizibilitate cu 3*.

4. *Învăţarea prin cooperare a secţiunii care a revenit fiecărui grup de experţi. Elevii citesc, discută, încearcă să înţeleagă cât mai bine, hotărăsc modul în care pot preda ceea ce au înţeles colegilor din grupul lor originar.*

Elevii din fiecare grup decid cum vor „preda”. Ei pot folosi exemple numerice, texte în vorbirea curentă, simboluri matematice.

5. *Revenirea în grupul iniţial şi predarea secţiunii pregătite celorlalţi membri. Dacă sunt neclarităţi, se adresează întrebări expertului. Dacă neclarităţile persistă se pot adresa întrebări şi celorlalţi membrii din grupul expert pentru secţiunea respectivă.*

   În fiecare grup, sunt astfel „predate” cele patru criterii de divizibilitate, cu exemple. În acest fel,

fiecare elev devine responsabil atât pentru propria învăţare, cât şi pentru transmiterea corectă şi completă a informaţiilor. Este important să monitorizaţi această activitate, pentru ca achiziţiile să fie corect transmise.

6. *Trecerea în revistă a materialului dat prin prezentare orală cu toată clasa / cu toţi participanţii.*

   Câteva exerciţii bine alese de profesor vor evidenţia nivelul de înţelegere a temei.

Metoda Mozaicului are avantajul că implică toţi elevii în activitate şi că fiecare dintre ei devine responsabil, atât pentru propria învăţare, cât şi pentru învăţarea celorlalţi. De aceea, metoda este foarte utilă în motivarea elevilor: faptul că se transformă, pentru scurt timp, în „profesori” le conferă un ascendent moral asupra colegilor.

Fişe de experţi

- **Fişa „A”: Criteriul de divizibilitate cu 2**

  Un număr natural este divizibil cu 2 dacă şi numai dacă ultima sa cifră este cifră pară.

- **Fişa „B”: Criteriul de divizibilitate cu 5**

  Un număr natural este divizibil cu 5 dacă şi numai dacă ultima sa cifră este 0 sau 5.

- **Fişa „C”: Criteriul de divizibilitate cu 10**

  Un număr natural este divizibil cu 10 dacă şi numai dacă ultima sa cifră este 0.

- **Fişa „D”: Criteriul de divizibilitate cu 3**

  Un număr natural este divizibil cu 3 dacă şi numai dacă suma cifrelor sale este multiplu de 3.

Anexa 3. ***La lecţia de recapitulare şi sistematizare a cunoştinţelor - Unitatea de învăţare: Poliedre - clasa a VIII-a, am folosit metoda cubului şi turul galeriei.*** Am realizat un cub din carton şi am colorat fiecare faţă diferit, iar fiecărei feţe i-am asociat un

verb, astfel:

Faţa 1 - albastru

– verbul DESCRIE

Faţa 2 - roşu

– verbul COMPARĂ

Faţa 4 - portocaliu

– verbul ANALIZEAZĂ

Faţa 5 - galben

– verbul ARGUMENTEAZĂ

În desfăşurarea activităţii, am avut grijă să dau indicaţii unde a fost necesar, să soluţionez situaţiile în care nu toţi elevii s-au implicat în cadrul activităţii în grup sau atunci când un elev a monopolizat toate activităţile.

Elevii care au primit fişa de lucru cu verbul ***DESCRIE*** au avut următoarele sarcini:

- de enumerat poliedrele studiate
- de desenat corpurile şi desfăşurările lor plane
- de identificat elementele acestora şi de descris forma feţelor şi a bazei
- de evidenţiat, într-un tabel, muchiile, feţele şi diagonalele

Elevii care au primit fişa de lucru cu verbul ***COMPARĂ*** au de stabilit asemănări şi deosebiri între corpurile studiate şi o comparaţie între poliedrele oarecare şi cele regulate.

Elevii care au primit fişa de lucru cu verbul ***ASOCIAZĂ*** vor asocia fiecărui poliedru formulele de calcul pentru volum şi arie (laterală, totală), apoi vor identifica obiecte cunoscute care au forma obiectului respectiv.

Pentru grupa care a avut verbul ***ANALIZEAZĂ***, sarcina de lucru a cerut ca elevii să analizeze diferite secţiuni în corpurile studiate (secţiuni diagonale, secţiuni cu un plan paralel cu baza). Se vor realiza desene corespunzătoare în care se vor pune în evidenţă toate planele de secţiune şi forma secţiunii rezultate, prin markere. Datele se vor sistematiza într-un tabel.

Corpul studiat	Forma secţiunii diagonale	Forma secţiunii cu un plan paralel cu baza

Elevii care au primit o fişă de lucru cu verbul ***ARGUMENTEAZĂ*** au avut de analizat şi justificat în scris valoarea de adevăr a unor propoziţii, ce au conţinut şi chestiuni capcane. Le-am cerut să realizeze şi scurte demonstraţii sau să descopere greşeala dintr-o redactare a unei rezolvări.

Elevii din grupa verbului ***APLICĂ*** au avut un set de întrebări grilă în care au aplicat formulele de calcul a ariei şi volumului unor poliedre în contexte variat.

Fişa nr.1: Verbul „DESCRIE”

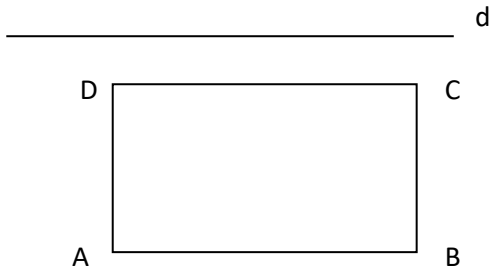
1. Enumeraţi poliedrele studiate: .....

2. Realizaţi câte un desen corespunzător fiecărui corp.

3. Realizaţi desfăşurarea plană a fiecărui corp.

4. Identificaţi în desenele realizate elementele corpurilor, precum şi forma feţelor şi a bazei.

5. Se dă dreptunghiul ABCD cu [BC] = 4 cm şi [CD] = 5 cm. Se consideră o dreaptă (d) în exteriorul dreptunghiului situată la distanţa de 2 cm faţă de segmentul [CD]. Să se descrie corpul obţinut prin rotaţia dreptunghiului în jurul dreptei (d).



Fişa nr.2: Verbul „COMPARĂ”

1. Realizaţi un scurt eseu matematic în care să puneţi în evidenţă asemănări şi deosebiri sau

analogii între poliedrele oarecare şi cele regulate.

2. Redactaţi şi comparaţi rezultatele obţinute:

Cubul ABCDA'B'C'D' are diagonala unei feţe laterale de 8 cm. Să se afle volumul cubului,

apoi volumul tetraedrului A'BC'D format în interiorul cubului şi să se compare rezultatele.

Fişa nr.3: Verbul „ASOCIAZĂ”

1. Asociază fiecărui poliedru studiat formulele corespunzătoare pentru calculul ariei laterale,

totale şi pentru calculul volumului.

2. Identifică în mediul înconjurător câteva obiecte care să aibă formă de cub, paralelipiped

dreptunghic, prismă şi piramidă.

3. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsurile corecte:

a) Piramida regulată cu toate muchiile congruente se numeşte .....

b) Un cub are aria laterală de 100 cm², atunci muchia cubului este de ..... cm.

c) O prismă patrulateră regulată are latura bazei de 8 cm şi înălţimea de 15 cm. Atunci aria laterală a prismei este de ..... cm².

d) O piramidă triunghiulară regulată cu aria bazei de $4\sqrt{3}$ cm şi înălţimea de 9 cm are volumul de .....cm³.

Fişa nr.4: Verbul „ANALIZEAZĂ”

1. Desenaţi un cub şi puneţi în evidenţă secţiunile diagonale şi secţiunile cu un plan paralel cu baza.

2. Desenaţi un paralelipiped dreptunghic şi puneţi în evidenţă secţiunile diagonale şi secţiunile cu un plan paralel cu baza.

3. Desenaţi un trunchi de piramidă patrulateră şi puneţi în evidenţă secţiunile diagonale şi secţiunile cu un plan paralel cu baza.

Pentru fiecare secţiune specificaţi forma secţiunii şi corpurile care se formează prin secţionare, o formulă utilă pentru calculul ariei secţiunii formate.

Întocmiţi un tabel de forma de mai jos pentru a sistematiza datele:

Corpul studiat	Forma secţiunii diagonale	Forma secţiunii cu un plan paralel cu baza

4. Secţiunea diagonală a unei prisme patrulatere regulate este un pătrat cu aria de 16 cm². Arătaţi că aria laterală a prismei este de $32\sqrt{2}$ cm².

5. O piramidă triunghiulară regulată are volumul de $300\sqrt{3}$ cm³ şi apotema bazei de 5 cm. Calculaţi aria laterală a piramidei.

Fişa nr.5: Verbul „ARGUMENTEAZĂ”

Citiţi cu atenţie enunţurile următoare şi justificaţi:

1. Paralelipipedul dreptunghic care are toate muchiile congruente este cub – justificare prin desen.

2. Latura bazei unei prisme triunghiulare regulate este jumătate din înălţime, atunci aria unei

feţe laterale este de trei ori mai mică decât aria laterală a prismei. Construiţi un exemplu numeric ilustrativ.

3. Aria laterală a unei prisme patrulatere regulate este egală cu aria bazei sale, atunci latura bazei este de patru ori mai mică decât înălţimea sa.

Adevărat sau fals?

1. Dacă latura bazei unei prisme triunghiulare regulate se dublează, atunci aria laterală a prismei

se dublează şi ea.

2. Dacă latura bazei unei piramide patrulatere regulate se triplează, atunci volumul piramidei se

triplează şi el.

3. Dacă muchia unui cub se înjumătăţeşte atunci cubul care se formează are aria laterală o

pătrime din aria laterală a cubului iniţial.

Fişa nr.6: Verbul „APLICĂ”

1. Un cub are muchia de 3 cm. Aria totală a cubului este de:

a) 24 cm²;

b) 54 cm²;

c) 35 cm².

2. O prismă triunghiulară regulată care are l = 6 cm şi h = 5 cm are aria laterală de:

a) 65 cm²;

b) 70 cm²;

c) 90 cm².

3. O piramidă patrulateră regulată care are aria bazei de 16 cm² şi h = 4 cm, atunci:

a) l =h;

b) l = 2 h;

c) h = 3 l.

4. Secţiunea diagonală a unei prisme patrulatere regulate este un pătrat cu latura de 6 cm. Volumul prismei este de:

a) 120 cm^3;

b) 96 cm^3;

c) 75 cm^3;

d) 108 cm^3.

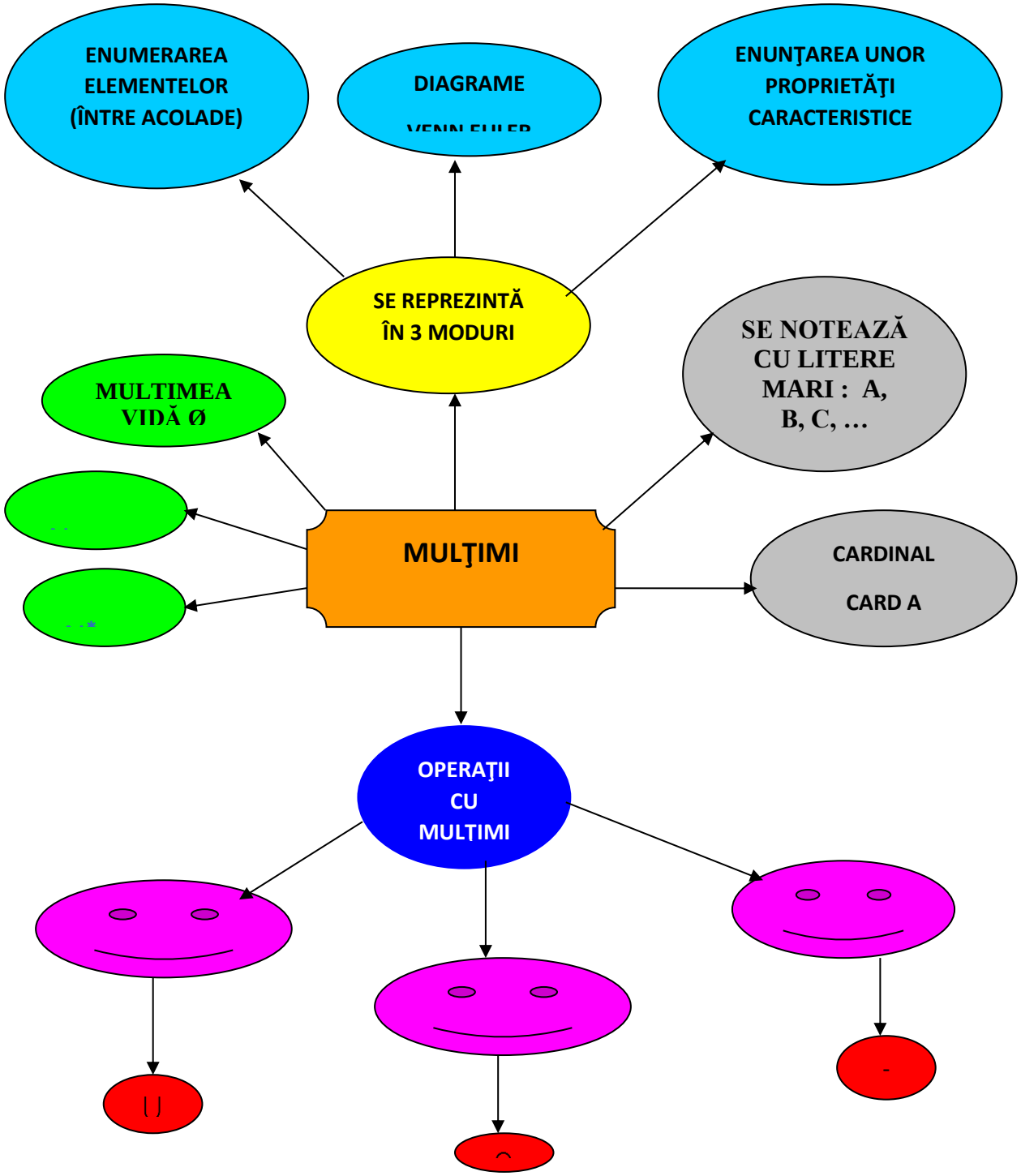
Pentru evaluarea activităţii, după expirarea timpului de lucru (20-25 minute), am aplicat metoda **„turul galeriei”**.

Materialele realizate au fost expuse în 6 locuri vizibile. Elevii din fiecare grup şi-au prezentat sarcina de lucru şi modul de realizare a ei, după care au acordat note materialelor realizate de celelalte grupe, urmând ca eu să discut împreună cu ei obiectivitatea notelor acordate şi să corectez eventualele erori.

Ca **PREMIU**, fiecare echipă a primit câte un material informativ, astfel:

- Echipa 1 – un material despre marele matematician Euler
- Echipa 2 – un referat cu tema *Poliedrele regulate* (tetraedrul, cubul, octoedrul, dodecaedrul)
- Echipa 3 – un material despre *Marea Piramidă – Piramida lui Keops*.
- Echipa 4 – un material informativ despre poliedre aşa cum sunt prezentate de şcoala lui Platon
- Echipa 5 – un referat despre Arhimede şi corpurile semiregulate
- Echipa 6 – un material informativ despre Aristotel, întemeietorul logicii ca ştiinţă.

Materialele vor fi multiplicate pentru fiecare membru al echipei şi vor fi afişate în clasă

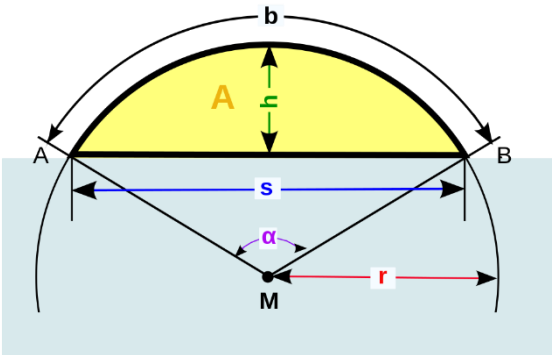


Calculul ariei unor elemente ale cercului

Prof. Dida-Cristina Isaia, Şcoala Gimnazială Nr. 20, Galaţi

1. Segment circular

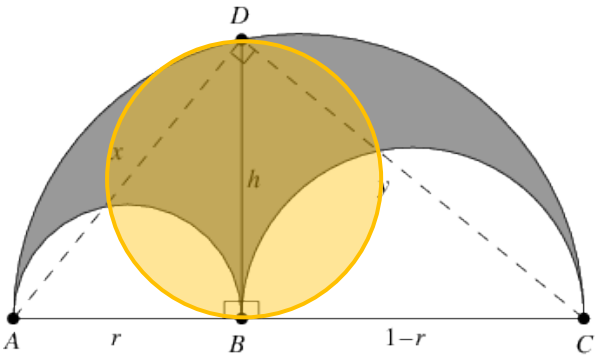
Aria segmentului circular se obține din cea a sectorului circular prin scăderea ariei triunghiului AOB.



$\mathcal{A} = \frac{1}{2} b \cdot r - \frac{1}{2} s(r-h)$, unde s este lungimea coardei AB, b este măsura arcului mic AB și h este înălțimea arcului.

2. Arbelos

Este o figură plană mărginită de trei semicercuri tangente două câte două cu diametrele pe aceeași linie, astfel încât suma lungimilor diametrelor a două ele să fie egală cu lungimea diametrului celui de-al treilea. Cea mai veche referință la această figură se află în *Cartea lemelor*, atribuită lui Arhimede. Cuvântul arbelos înseamnă, în limba greacă, cuțitul cizmarului.



Dacă se duce tangenta comună în punctul de contact al cercurilor mici, ea este perpendiculară pe diametrul cercului mare și reprezintă jumătate dintr-o coardă a acestuia. Cercul care are ca diametru pe h are aceeași arie a arbelosului. Acest diametru este egal cu înălțimea BD a triunghiului dreptunghic ADC, înscris în semicercul mare cu diametrul AC = l. Lungimea lui BD se calculează cu ajutorul teoremei înălțimii: $h^2 = r(l-r)$.

Atunci, $A_{cerc} = \frac{\pi}{4} h^2 = \frac{\pi}{4} r(l-r)$.

Aria arbelosului este $A_{arb} = \frac{1}{2}(A_{AC} - A_{AB} - A_{BC}) = \frac{\pi}{8}[l^2 - r^2 - (l-r)^2] = \frac{\pi}{4} r(l-r)$.

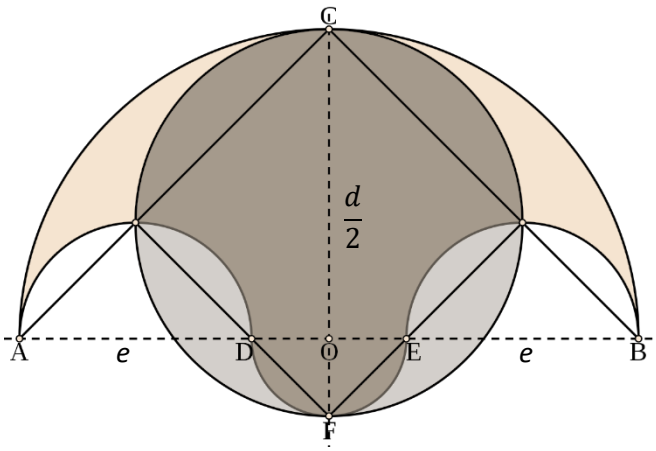
Tipul de cuțit care dă numele figurii

Sculptura Arbelos din Kaatsheuvel, Olanda

3. Salinon

Salinonul este o altă figură care apare în *Cartea lemelor*, formată din patru semicercuri: unul de diametru *AB=d*, apoi două de diametre egale, *AD=EB=e*, având fiecare câte o extremitate comună cu semicercul de diametru AB și fiind de aceeași parte a acestui diametru. Al patrulea semicerc are diametrul pe aceeași linie cu primele trei, se găsește de cealaltă parte a acestei linii și are diametrul *DE = d-2e*.

Cercul de diametru *CF = d - e* are aceeași arie cu a salinonului. $A_{cerc} = \frac{\pi}{4}(d-e)^2$;



$$A_{sal} = \frac{1}{2}(A_{AB} - 2A_{AD} + A_{DE}) =$$

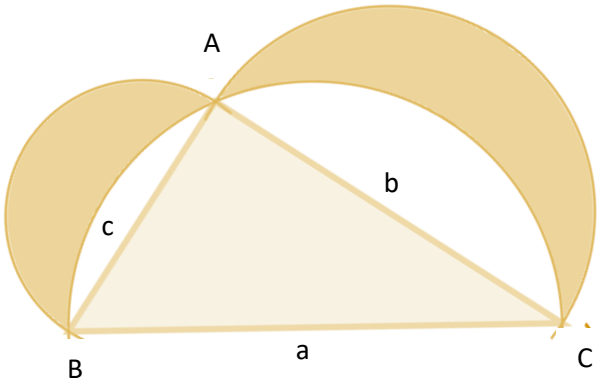
$$= \frac{\pi}{8}[d^2 - 2e^2 + (d-2e)^2] =$$

$$= \frac{\pi}{4}(d^2 - 2de + e^2) = \frac{\pi}{4}(d-e)^2.$$

4. Lunulele lui Hippocrate

Lunula este figura mărginită de două arce de cerc, cel mai mic are ca diametru o coardă care este latură a unui unghi drept înscris în cercul mai mare. În mod echivalent, este o figură plană non-convexă mărginită de un arc circular de 180^0 și un arc circular de 90^0. A fost prima figură curbată

care a avut aria calculată matematic. Hippocrate din Chios (matematician grec, 440 Î.H.) a scris prima carte despre elemente de geometrie și a determinat aria lunulelor, în încercarea de a rezolva problema cuadraturii cercului.



Suma ariilor celor două lunule este egală cu aria triunghiului ABC.

Triunghiul ABC este dreptunghic, avem din teorema lui Pitagora: $b^2 + c^2 = a^2$.

Calculăm suma ariilor celor două segmente circulare AB și AC din cercul de diametru BC.

$$A_{AB} + A_{AC} = A_{semicerc\ de\ diametru\ AC} - A_{\Delta ABC} = \frac{\pi}{8}a^2 - \frac{b \cdot c}{2}$$

Cele două lunule sunt cele două semicercuri de diametre AB și AC, mai puțin cele două părți albe.

$$A_{lunule} = A_{semicerc\ de\ diametru\ AB} + A_{semicerc\ de\ diametru\ AC} - (A_{AB} + A_{AC}) =$$

$$= \frac{\pi}{8}c^2 + \frac{\pi}{8}b^2 - \frac{\pi}{8}a^2 + \frac{b \cdot c}{2} = \frac{\pi}{8}(\underbrace{b^2 + c^2}_{a^2} - a^2) + \frac{b \cdot c}{2} = \frac{b \cdot c}{2} = A_{\Delta ABC}$$

Bibliografie:

Mica enciclopedie matematică, Editura tehnică, 1975

Webgrafie:

http://www.cellulegeometrie.eu/documents/pub/pub_15.pdf (accesat ianuarie 2021)

https://en.wikipedia.org/wiki/Salinon (accesat ianuarie 2021)

https://en.wikipedia.org/wiki/Arbelos (accesat ianuarie 2021)