WWW.MATEINFO.RO

REVISTA ELECTRONICA MATEINFO.RO

SEPTEMBRIE 2024

ISSN 2065 - 6432

REVISTĂ DIN FEBRUARIE 2009

COORDONATOR:

ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ȘI SUSȚINĂTORI PERMANENȚI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU

MARIN CHIRCIU

ROXANA MIHAELA STANCIU

ARTICOLE

R.E.M.I. IUNIE 2024

1.O generalizare a dublei inegalități a lui Nicolae Ciorănescu ... pag. 2

Gheorghe Ghiță și Neculai Stanciu

2. Math Journal 3 ... pag. 5

Marin Chirciu

PUTEȚI TRIMITE ARTICOLE ÎN FORMAT WORD PE REVISTA.MATEINFO@YAHOO.COM

1. O generalizare a dublei inegalităţi a lui Nicolae Ciorănescu

de Gheorghe Ghiţă şi Neculai Stanciu

Articolul prezintă o generalizare pentru dubla inegalitate a lui *Nicolae Ciorănescu* prezentată prin problema 4993/GM 1937,nr.12, pag. 671:

Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghi ABC, atunci

$$\frac{15}{4} \le \frac{p+a}{b+c} + \frac{p+b}{c+a} + \frac{p+c}{a+b} < \frac{9}{2},$$

unde p este semiperimetrul triunghiului.

Propoziţie. In orice triunghi ABC pentru $k > 0$ avem inegalităţile:

$$\frac{6k+9}{4} \le \sum \frac{p+ka}{b+c} \le \frac{(8k+10)R+(2k+7)r}{4(R+r)}$$

Demonstraţie.

$$\sum \frac{p+ka}{b+c} \overset{p=\frac{a+b+c}{2}}{=} \sum \frac{a+b+c+2ka}{2(b+c)} =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{2k+1}{2} \sum \frac{a}{b+c} =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{(2k+1)}{2} \sum \frac{a(a+b)(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{(2k+1)}{2} \cdot \frac{\sum a(a^2+ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{3}{2} + \frac{(2k+1)}{2} \cdot \frac{\sum a^3 + \sum a \sum ab}{2p(p^2+r^2+2Rr)} =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{(2k+1)}{2} \cdot \frac{\sum a \sum a^2 + 3abc}{2p(p^2+r^2+2Rr)} =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{(2k+1)}{2} \cdot \frac{2p(2p^2-2r^2-8Rr)+12pRr}{2p(p^2+r^2+2Rr)} = \frac{3}{2} + (2k+1)\frac{p^2-r^2-Rr}{p^2+r^2+2Rr} \quad (*).$$

Prima inegalitate.

Din $(*)$ rezultă:

$$\sum \frac{p+ka}{b+c} = \frac{3}{2} + (2k+1)\frac{p^2-r^2-Rr}{p^2+r^2+2Rr} \overset{(1)}{\geq} \frac{3}{2} + (2k+1)\frac{3}{4} = \frac{6k+9}{4},$$

unde

(1): $\frac{p^2-r^2-Rr}{p^2+r^2+2Rr} \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow p^2 \geq 10Rr + 7r^2$, adevărată din

$$p^2 \overset{Gerretsen}{\geq} 16Rr - 5r^2 \text{ şi } 16Rr - 5r^2 \geq 10Rr + 7r^2 \Leftrightarrow R \overset{Euler}{\geq} 0;$$

A doua inegalitate.

Din$(*)$ rezultă:

$$\sum \frac{p+ka}{b+c} = \frac{3}{2} + (2k+1)\frac{p^2-r^2-Rr}{p^2+r^2+2Rr} \overset{(2)}{\leq} \frac{3}{2} + \frac{(2k+1)(p^2-r^2-Rr)}{p^2+r^2+2Rr}$$

$$\leq \frac{3}{2} + \frac{(2k+1)(4R+r)}{4(R+r)} = \frac{(8k+10)R+(2k+7)r}{4(R+r)},$$

unde (2): $\frac{p^2-r^2-Rr}{p^2+r^2+2Rr} \leq \frac{4R+r}{4(R+r)} \Leftrightarrow 3rp^2 \leq 12R^2r + 14Rr^2 + 5r^3$ adevărată, pentru că

$$3rp^2 \overset{Gerretsen}{\leq} 12R^2r + 12Rr^2 + 9r^3$$

şi

$$12R^2r + 14Rr^2 + 5r^3 \leq 12R^2r + 12Rr^2 + 9r^3 \Leftrightarrow R \overset{Euler}{\geq} 2r.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Notă. Pentru $k = 1$ se obţin inegalităţile lui *Nicolae Ciorănescu* din [1]: $\frac{15}{4} \leq \sum \frac{p+a}{b+c} \leq \frac{18R+9r}{4(R+r)} < \frac{9}{2}$,

ultima inegalitate fiind adevărată, deoarece $\frac{18R+9r}{4(R+r)} < \frac{9}{2} \Leftrightarrow r > 0$.

Bibliografie

1. **M. Drăgan, N. Stanciu,** *Asupra unei inegalităţi duble a lui Nicolae Ciorănescu*, Sclipirea Minţii, Nr.32/2023, pg. 14.
2. **D.M. Bătineţu-Giurgiu, D. Sitaru,N. Stanciu,** *About Nicolae Ciorănescu's double inequality*, Octogon Mathematical Magazine, No. 2, October 2019, pp. 832-840.
3. **M. Drăgan, N. Stanciu,** *Asupra unei probleme din Gazeta Matematică,* Gazeta Matematică Didactica(GMD), Anul XII, Nr. 2, 2022, 51-54.

Art 6000

Math Journal
-3-

Marin Chirciu [1]

Mathematical Journal prezintă o selecție de probleme recente din diverse publicații de specialitate .

Problema164.

In ΔABC

$$3\sqrt{3}r \le \sum \frac{ar_a}{r_b + r_c} \le \left(\frac{R}{r} - 1\right) p .$$

RMM 8/2024, Mehmet Șahin, Turkey

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$\sum \frac{ar_a}{r_b + r_c} = \frac{(4R + r)^2 - 2p^2}{p} .$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{ar_a}{r_b + r_c} = \frac{(4R + r)^2 - 2p^2}{p} \overset{Gerretsen}{\le} \frac{(4R + r)^2 - 2(16Rr - 5r^2)}{p} = \frac{16R^2 - 24Rr + 11r^2}{p} \overset{Euler}{\le}$$
$$\overset{Euler}{\le} \left(\frac{R}{r} - 1\right) p .$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{ar_a}{r_b + r_c} = \frac{(4R + r)^2 - 2p^2}{p} \overset{Doucet}{\ge} p \overset{Mitrinovic}{\ge} 3\sqrt{3}r .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu"Pitești*

In ΔABC

$$3\sqrt{3}r \le p \le \sum \frac{ar_a}{r_b + r_c} \le \frac{16R^2 - 24Rr + 11r^2}{p} \le \left(\frac{R}{r} - 1\right)p .$$

Remarca.

In ΔABC

$$\frac{27r^2}{p} \le \sum \frac{ah_a}{h_b + h_c} \le \frac{27R^4}{16pr^2} .$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$\sum \frac{ah_a}{h_b + h_c} = \frac{p^2\left(p^2 + 2r^2 + 16Rr\right) + r^2\left(4R + r\right)^2}{2p\left(p^2 + r^2 + 2Rr\right)} .$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{ah_a}{h_b + h_c} = \frac{p^2\left(p^2 + 2r^2 + 16Rr\right) + r^2\left(4R + r\right)^2}{2p\left(p^2 + r^2 + 2Rr\right)} \overset{Gerretsen}{\le}$$

$$\overset{Gerretsen}{\le} \frac{\left(4R^2 + 4Rr + 3r^2\right)\left(4R^2 + 4Rr + 3r^2 + 2r^2 + 16Rr\right) + r^2\left(4R + r\right)^2}{2p\left(16Rr - 5r^2 + r^2 + 2Rr\right)} =$$

$$= \frac{16R^4 + 96R^3r + 128R^2r^2 + 88Rr^3 + 16r^4}{2p\left(18Rr - 4r^2\right)} = \frac{8\left(2R^4 + 12R^3r + 16R^2r^2 + 11Rr^3 + 2r^4\right)}{4pr\left(9R - 2r\right)} =$$

$$= \frac{2\left(2R^4 + 12R^3r + 16R^2r^2 + 11Rr^3 + 2r^4\right)}{pr\left(9R - 2r\right)} \overset{Euler}{\le} \frac{2 \cdot \frac{108R^4}{8}}{pr \cdot 16r} = \frac{27R^4}{16pr^2} .$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{ah_a}{h_b + h_c} = \frac{p^2\left(p^2 + 2r^2 + 16Rr\right) + r^2\left(4R + r\right)^2}{2p\left(p^2 + r^2 + 2Rr\right)} \overset{Gerretsen}{\ge}$$

$$\overset{Gerretsen}{\ge} \frac{\left(16Rr - 5r^2\right)\left(16Rr - 5r^2 + 2r^2 + 16Rr\right) + r^2\left(4R + r\right)^2}{2p\left(4R^2 + 4Rr + 3r^2 + r^2 + 2Rr\right)} = \frac{r^2\left(528R^2 - 200Rr + 16r^2\right)}{2p\left(4R^2 + 6Rr + 4r^2\right)} =$$

$$=\frac{8r^2\left(66R^2-25Rr+2r^2\right)}{4p\left(2R^2+3Rr+2r^2\right)}=\frac{2r^2\left(66R^2-25Rr+2r^2\right)}{p\left(2R^2+3Rr+2r^2\right)}\overset{Euler}{\geq}\frac{2r^2}{p}\cdot\frac{27}{2}=\frac{27r^2}{p}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

In ΔABC

$$\sum\frac{ah_a}{h_b+h_c}\leq\sum\frac{ar_a}{r_b+r_c}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

In ΔABC

$$\sum\frac{ah_a}{h_b+h_c}=\frac{p^2\left(p^2+2r^2+16Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2}{2p\left(p^2+r^2+2Rr\right)}.$$

Lema2.

In ΔABC

$$\sum\frac{ar_a}{r_b+r_c}=\frac{\left(4R+r\right)^2-2p^2}{p}.$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2\left(p^2+2r^2+16Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2}{2p\left(p^2+r^2+2Rr\right)}\leq\frac{\left(4R+r\right)^2-2p^2}{p}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5p^4+p^2\left(4r^2+8Rr-32R^2\right)\leq r\left(4R+r\right)^3\Leftrightarrow p^2\left(5p^2+4r^2+8Rr-32R^2\right)\leq r\left(4R+r\right)^3$$

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $\left(5p^2+4r^2+8Rr-32R^2\right)\leq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $\left(5p^2+4r^2+8Rr-32R^2\right)>0$, folosim inegalitatea lui Gerretesen:

$$p^2\leq\frac{R\left(4R+r\right)^2}{2\left(2R-r\right)}\leq 4R^2+4Rr+3r^2.$$

Rămâne să arătăm că:

$$\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}\left(5\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)+4r^2+8Rr-32R^2\right)\le r(4R+r)^3 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 12R^3-12R^2r-23Rr^2-2r^3\ge 0 \Leftrightarrow (R-2r)\left(12R^2+12Rr+r^2\right)\ge 0$, vezi $R\ge 2r$,(Euler).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema165.

In ΔABC

$$\frac{2}{R}\le\sum\frac{1}{s_a}\le\frac{R}{2r^2}.$$

RMM8/2024, Marian Ursărescu, Roman

Soluție.

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum\frac{1}{s_a}\le\sum\frac{1}{h_a}=\frac{1}{r}\overset{Euler}{\le}\frac{R}{2r^2}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum\frac{1}{s_a}\ge\sum\frac{1}{m_a}\ge\frac{2}{R}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

In ΔABC

1). $\frac{2}{R}\le\sum\frac{1}{w_a}\le\frac{1}{r}$.

2). $\frac{2}{R}\le\sum\frac{1}{m_a}\le\frac{1}{r}$.

3). $\frac{4}{3R^2}\le\sum\frac{1}{w_bw_c}\le\frac{1}{3r^2}$.

4). $\frac{4}{3R^2}\le\sum\frac{1}{s_bs_c}\le\frac{1}{3r^2}$.

5). $\frac{4}{3R^2} \le \sum \frac{1}{m_b m_c} \le \frac{1}{3r^2}$.

6). $\frac{4}{3R^2} \le \sum \frac{1}{h_b h_c} \le \frac{1}{3r^2}$.

7). $\frac{4}{3R^2} \le \sum \frac{1}{r_b r_c} \le \frac{1}{3r^2}$.

Dezvoltări,Marin Chirciu

Problema166.

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=3$ then

$$\sum \frac{1}{a^2+a+1} \ge 1.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

Avem $\sum a \le 3$, vezi $\sum a \overset{CBS}{\le} \sqrt{3\sum a^2} = \sqrt{3\cdot 3} = 3$.

$$LHS = \sum \frac{1}{a^2+a+1} \overset{CS}{\ge} \frac{9}{\sum\left(a^2+a+1\right)} = \frac{9}{\sum a^2 + \sum a + 3} \ge \frac{9}{3+3+3} = 1 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca.

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=3$ and $\lambda \ge 0$ then

$$\sum \frac{1}{a^2+\lambda a+\lambda} \ge \frac{3}{2\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Problema167.

In ΔABC

$$\sum \frac{a}{b+c} \tan\frac{A}{2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

Tripletele $\left(\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}\right)$ și $\left(\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}\right)$ sunt la fel ordonate.

$$LHS = \sum \frac{a}{b+c}\tan\frac{A}{2} \overset{Chebyshev}{\geq} \frac{1}{3}\sum\frac{a}{b+c}\sum\tan\frac{A}{2} \overset{Nesbitt}{\geq} \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Am flosit mai sus: $\sum \tan\frac{A}{2} = \frac{4R+r}{p} \overset{Doucet}{\geq} \sqrt{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

In ΔABC

$$1).\ \sum \frac{a}{b+c}\sin^2\frac{A}{2} \geq \frac{3}{8}.$$

$$2).\ \sum \frac{a}{b+c}\sec^2\frac{A}{2} \geq 2.$$

$$3).\ \sum \frac{a}{b+c}\tan^2\frac{A}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

$$4)\ \sum \frac{a}{b+c}\sec A \geq 3, \text{ acute.}$$

$$5).\ \sum \frac{a}{b+c}\tan A \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{ acute.}$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema168.

In ΔABC

$$\sum \frac{\left(\sin^5 A + \sin^5 B\right)\sin C}{\left(\sin^3 A + \sin^3 B\right)\sin A \sin B} \geq \frac{a+b+c}{2R}.$$

RMM 8/2024, Ertan Yildirim, Turkey

Soluție.

Lema.

If $x, y > 0$ then

$$\frac{x^5+y^5}{x^3+y^3}\geq xy.$$

Soluție.

$\frac{x^5+y^5}{x^3+y^3}\geq xy \Leftrightarrow (x-y)(x^4-y^4)\geq 0$, deoarece factorii au același semn.

Folosind **Lema** pentru $(x,y)=(\sin A,\sin B)$ obținem:

$$LHS=\sum\frac{(\sin^5 A+\sin^5 B)\sin C}{(\sin^3 A+\sin^3 B)\sin A\sin B}\overset{Lema}{\geq}\sum\sin A\sin B\cdot\frac{\sin C}{\sin A\sin B}=\sum\sin C=\frac{p}{R}=\text{RHS}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

In ΔABC

$$\sum\frac{(\sin^{n+2} A+\sin^{n+2} B)\sin C}{(\sin^n A+\sin^n B)\sin A\sin B}\geq\frac{a+b+c}{2R}, n\in\mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x,y>0$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\frac{x^{n+2}+y^{n+2}}{x^n+y^n}\geq xy.$$

Problema169.

In acute ΔABC

$$\sum\frac{\tan^2 A+\tan^2 B}{\tan^4 A+\tan^4 B}\leq 1.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

Lema.

If $x,y>0$ then

$$\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\le\frac{2}{x^2+y^2}.$$

Demonstrație.

$$\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\le\frac{2}{x^2+y^2}\Leftrightarrow\left(x^2-y^2\right)^2\ge 0.$$

Folosind **Lema** pentru $(x,y)=(\tan A,\tan B)$ obținem:

$$LHS=\sum\frac{\tan^2 A+\tan^2 B}{\tan^4 A+\tan^4 B}\overset{Lema}{\le}\sum\frac{2}{\tan^2 A+\tan^2 B}\overset{SOS}{\le}\sum\frac{2}{2\tan A\tan B}=\sum\frac{1}{\tan A\tan B}=$$

$$=\sum\cot A\cot B=1=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

In acute ΔABC

1). $\sum\frac{\cot^2 A+\cot^2 B}{\cot^4 A+\cot^4 B}\le\frac{9}{5\left(\frac{2r}{R}\right)^2-4}.$

2). $\sum\frac{\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}}{\tan^4\frac{A}{2}+\tan^4\frac{B}{2}}\le\frac{9R}{2r}.$

3). $\sum\frac{\cot^2\frac{A}{2}+\cot^2\frac{B}{2}}{\cot^4\frac{A}{2}+\cot^4\frac{B}{2}}\le 1.$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema170.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sum\frac{a^6+b^6}{a^5b^5\left(a^4+b^4\right)}\ge 3.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

Lema.

If $a,b>0$ then

$$\frac{a^6+b^6}{a^4+b^4}\ge\frac{a^2+b^2}{2}.$$

Demonstrație.

$\frac{a^6+b^6}{a^4+b^4}\ge\frac{a^2+b^2}{2}\Leftrightarrow\left(a^2-b^2\right)\left(a^4-b^4\right)\ge 0$,deoarece factorii au același semn.

$$LHS=\sum\frac{a^6+b^6}{a^5b^5\left(a^4+b^4\right)}\overset{Lema}{\ge}\sum\frac{a^2+b^2}{2a^5b^5}\overset{AM-GM}{\ge}\sum\frac{2ab}{2a^5b^5}=\sum\frac{1}{a^4b^4}\overset{AM-GM}{\ge}3\sqrt[3]{\prod\frac{1}{a^4b^4}}=$$

$$=\frac{3}{\sqrt[3]{(abc)^8}}=3=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\sum\frac{a^{n+2}+b^{n+2}}{a^{n+1}b^{n+1}\left(a^n+b^n\right)}\ge 3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $a,b>0$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\frac{a^{n+2}+b^{n+2}}{a^n+b^n}\ge\frac{a^2+b^2}{2}.$$

Problema171.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a}{\sqrt{b^2+\frac{1}{4}bc+c^2}}\ge 2.$$

Math Olymp 8/2024, Elton Papanikolla

Soluție.

$$\sum\frac{a}{\sqrt{b^2+\frac{1}{4}bc+c^2}}\sum\frac{a}{\sqrt{b^2+\frac{1}{4}bc+c^2}}\sum a\left(b^2+\frac{1}{4}bc+c^2\right)\overset{Holder}{\geq}\left(\sum a\right)^3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\sum\frac{a}{\sqrt{b^2+\frac{1}{4}bc+c^2}}\right)^2\geq\frac{\left(\sum a\right)^3}{\sum a\left(b^2+\frac{1}{4}bc+c^2\right)}\overset{(1)}{\geq}4,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\frac{\left(\sum a\right)^3}{\sum a\left(b^2+\frac{1}{4}bc+c^2\right)}\geq 4\Leftrightarrow\left(\sum a\right)^3\geq 4\sum a\left(b^2+\frac{1}{4}bc+c^2\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\sum a^3+3(a+b)(b+c)(c+a)\geq 4\sum a\left(b^2+c^2\right)+3abc\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum a^3+3\left(2abc+\sum bc(b+c)\right)\geq 4\sum bc(b+c)+3abc\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\sum a^3+3abc\geq\sum bc(b+c)$, (Schur).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarca.

If $a,b,c>0$ and $\lambda\geq\frac{1}{4}$ then

$$\sum\frac{a}{\sqrt{b^2+\lambda bc+c^2}}\geq\frac{3}{\sqrt{\lambda+2}}.$$

Marin Chirciu

Problema172.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sum\sqrt{1+3a^2}\geq a+b+c+3.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

Lema.

If $a>0$ then

$$\sqrt{1+3a^2}\ge a+\sqrt{a}\,.$$

Demonstrație.

$$\sqrt{1+3a^2}\ge a+\sqrt{a}\Leftrightarrow 1+3a^2\ge\left(a+\sqrt{a}\right)^2\Leftrightarrow 1+2a^2\ge a+2a\sqrt{a}\overset{\sqrt{a}=t}{\Leftrightarrow}2t^4-2t^3-t^2+1\ge 0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (t-1)^2\left(2t^2+2t+1\right)\ge 0$, cu egalitate pentru $t=1\Leftrightarrow a=1$.

Folosind **Lema** obținem:

$$LHS=\sum\sqrt{1+3a^2}\overset{Lema}{\ge}\sum\left(a+\sqrt{a}\right)=\sum a+\sum\sqrt{a}\overset{AM-GM}{\ge}\sum a+3\sqrt[3]{\sqrt{abc}}=\sum a+3=RHS\,.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$1).\ \sum\sqrt{1+8a^2}\ge\frac{7}{3}(a+b+c)+2\,.$$

Soluție.

If $a>0$ then

$$\sqrt{1+8a^2}\ge\frac{7a+2\sqrt{a}}{3}\,.$$

$$2).\ \sum\sqrt{1+\left(\lambda^2-1\right)a^2}\ge\frac{\lambda^2-2}{\lambda}(a+b+c)+\frac{6}{\lambda},\ \lambda\ge\sqrt{2}\,.$$

Soluție.

If $a>0$ then

$$\sqrt{1+\left(\lambda^2-1\right)a^2}\ge\frac{\left(\lambda^2-2\right)a+2\sqrt{a}}{\lambda}\,.$$

$$3).\ \sum\sqrt{1+15a^2}\ge\frac{7}{2}(a+b+c)+\frac{3}{2}\,.$$

Soluție.

If $a>0$ then

$$\sqrt{1+15a^2} \geq \frac{7a+\sqrt{a}}{2}.$$

4). $\sum \sqrt{1+35a^2} \geq \frac{17}{3}(a+b+c)+1.$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

If $a>0$ then

$$\sqrt{1+35a^2} \geq \frac{17a+\sqrt{a}}{3}.$$

Problema173.

In ΔABC

$$\sum \frac{h_a^3}{\cot\frac{A}{2}} \leq \frac{27\sqrt{3}}{8}R^3.$$

Mathematical Inequalities 8/2024, George Apostolopoulos, Greece

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$\sum h_a^3 = \frac{p^6+p^4\left(3r^2-12Rr\right)+3p^2r^4+r^3\left(4R+r\right)^3}{8R^3}.$$

$LHS = \sum \frac{h_a^3}{\cot\frac{A}{2}} = \sum h_a^3 \tan\frac{A}{2} \overset{Chebyshev}{\leq} \frac{1}{3}\sum h_a^3 \sum \tan\frac{A}{2} \overset{(1)}{\leq} \frac{27\sqrt{3}}{8}R^3 = RHS$, unde (1) rezultă din

$\sum h_a^3 \leq \frac{8R^6+4R^3r^3+18R^2r^4+12Rr^5+8r^6}{R^3} \leq \frac{81R^3}{8}$ și $\sum \tan\frac{A}{2} = \frac{4R+r}{p}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

In ΔABC

$$81r^3 \leq \sum h_a^3 \leq \frac{81R^3}{8}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$\sum h_a^3 = \frac{p^6 + p^4\left(3r^2 - 12Rr\right) + 3p^2r^4 + r^3\left(4R + r\right)^3}{8R^3}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum h_a^3 = \frac{p^6 + p^4\left(3r^2 - 12Rr\right) + 3p^2r^4 + r^3\left(4R + r\right)^3}{8R^3} \overset{Gerretsen}{\leq} \frac{64R^6 + 32R^3r^3 + 144R^2r^4 + 96Rr^5 + 64r^6}{8R^3} =$$

$$= \frac{8R^6 + 4R^3r^3 + 18R^2r^4 + 12Rr^5 + 8r^6}{R^3} \overset{Euler}{\leq} \frac{81R^3}{8}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum h_a^3 = \frac{p^6 + p^4\left(3r^2 - 12Rr\right) + 3p^2r^4 + r^3\left(4R + r\right)^3}{8R^3} \overset{Gerretsen}{\geq} \frac{r^3\left(1088R^3 - 1104R^2r + 480Rr^2 - 64r^3\right)}{8R^3} =$$

$$= \frac{r^3\left(136R^3 - 138R^2r + 60Rr^2 - 8r^3\right)}{R^3} \overset{Euler}{\geq} \frac{r^3 \cdot 81R^3}{R^3} = 81r^3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

In ΔABC

$$129r^3 - 6R^3 \leq \sum r_a^3 \leq 82R^3 - 575r^3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$\sum r_a^3 = \left(4R + r\right)^3 - 12Rp^2.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum r_a^3 = \left(4R + r\right)^3 - 12Rp^2 \overset{Gerretsen}{\leq} \left(4R + r\right)^3 - 12R\left(16Rr - 5r^2\right) = 64R^3 - 144R^2r + 72Rr^2 + r^3 \overset{Euler}{\leq}$$

$\overset{Euler}{\leq} 82R^3 - 575r^3$.

Inegalitatea din stânga.

$\sum r_a^3 = (4R+r)^3 - 12Rp^2 \overset{Gerretsen}{\geq} (4R+r)^3 - 12R(4R^2+4Rr+3r^2) = 16R^3 - 24Rr^2 + r^3 \overset{Euler}{\geq}$

$\overset{Euler}{\geq} 129r^3 - 6R^3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

In ΔABC

$$\sum h_a^3 \leq \sum r_a^3 .$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

In ΔABC

$$\sum h_a^3 = \frac{p^6 + p^4(3r^2 - 12Rr) + 3p^2r^4 + r^3(4R+r)^3}{8R^3} .$$

Lema2.

In ΔABC

$$\sum r_a^3 = (4R+r)^3 - 12Rp^2 .$$

Folosind **Lemele** de mai sus inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^6 + p^4(3r^2 - 12Rr) + 3p^2r^4 + r^3(4R+r)^3}{8R^3} \leq (4R+r)^3 - 12Rp^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2\left[p^2\left(p^2 + 3r^2 - 12Rr\right) + 96R^4 + r^4\right] + r^3(4R+r)^3 \leq 8R^3(4R+r)^3 ,$$

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2 \leq \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)} \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$$\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}\left[\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left(4R^2+4Rr+3r^2+3r^2-12Rr\right)+96R^4+r^4\right]+r^3(4R+r)^3\le$$

$$\le 8R^3(4R+r)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16R^5-16R^4r-20R^3r^2-16R^2r^3-17Rr^4+2r^5\ge 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (R-2r)\left(16R^4+16R^3r+12R^2r^2+8Rr^3-r^4\right)\ge 0$, vezi $R\ge 2r$,(Euler).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema174.

If $a,b,c>0$, $abc=8$ then

$$\sum\frac{1}{8a+b^4+c^4}\le\frac{1}{16}.$$

THCS 8/2024, Bat Dang Thuc-Inequality, Vietnam

Soluție.

Folosind $b^4+c^4\ge bc\left(b^2+c^2\right)$ obținem:

$$LHS=\sum\frac{1}{8a+b^4+c^4}\le\sum\frac{1}{8a+bc\left(b^2+c^2\right)}=\sum\frac{1}{8a+\frac{8}{a}\left(b^2+c^2\right)}=\sum\frac{a}{8\left(a^2+b^2+c^2\right)}=$$

$$=\frac{\sum a}{8\sum a^2}\overset{SOS}{\le}\frac{\sum a}{8\frac{\left(\sum a\right)^2}{3}}=\frac{3}{8\sum a}\overset{AM-GM}{\le}\frac{3}{8\cdot 3\sqrt[3]{abc}}=\frac{3}{8\cdot 3\sqrt[3]{8}}=\frac{1}{16}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=2$.

Remarca.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\sum\frac{1}{a^n+b^{n+3}+c^{n+3}}\le 1.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $b^{n+3}+c^{n+3}\ge bc\left(b^{n+1}+c^{n+1}\right) \Leftrightarrow (b-c)\left(b^{n+2}-c^{n+2}\right)\ge 0$, deoarece factorii au același semn, obținem:

$$LHS=\sum\frac{1}{a^n+b^{n+3}+c^{n+3}}\le\sum\frac{1}{a^n+bc\left(b^{n+1}+c^{n+1}\right)}=\sum\frac{1}{a^n+\frac{1}{a}\left(b^{n+1}+c^{n+1}\right)}=\sum\frac{a}{a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}}=$$

$$=\frac{\sum a}{\sum a^{n+1}}\overset{Holder}{\le}\frac{\sum a}{\frac{\left(\sum a\right)^{n+1}}{3^n}}=\frac{3^n}{\left(\sum a\right)^n}\overset{AM-GM}{\le}\frac{3^n}{\left(3\sqrt[3]{abc}\right)^n}=\frac{3^n}{3^n}=1=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Problema175.

If $a,b,c,d>0$, $a+b+c+d=4$ then

$$\frac{a^4}{b^5}+\frac{b^4}{c^5}+\frac{c^4}{d^5}+\frac{d^4}{a^5}\ge 4.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

Folosind inegalitatea mediilor obținem:

$$LHS=\sum\frac{a^4}{b^5}\overset{AM-GM}{\ge}4\sqrt[4]{\prod\frac{a^4}{b^5}}=\frac{4}{\sqrt[4]{abcd}}\overset{AM-GM}{\ge}\frac{4}{\frac{a+b+c+d}{4}}=\frac{16}{\sum a}=\frac{16}{4}=4=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

Remarca.

If $a,b,c,d>0$, $a+b+c+d=4$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$1).\ \frac{a^n}{b^{n+1}}+\frac{b^n}{c^{n+1}}+\frac{c^n}{d^{n+1}}+\frac{d^n}{a^{n+1}}\ge 4.$$

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then

$$2).\ \frac{a^3}{b^4}+\frac{b^3}{c^4}+\frac{c^3}{a^4}\ge 3.$$

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$3).\ \frac{a^n}{b^{n+1}}+\frac{b^n}{c^{n+1}}+\frac{c^n}{a^{n+1}}\ge 3.$$

If $a_1,a_2,...,a_n>0$, $a_1+a_2+...+a_n=n$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$4).\ \frac{a_1^n}{b_1^{n+1}}+\frac{a_2^n}{b_2^{n+1}}+\ldots+\frac{a_n^n}{b_n^{n+1}}\geq n.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema176.

If $a,b>0$, $a+b=2$ then

$$a^2b^{\frac{2}{3}}+b^2a^{\frac{2}{3}}\leq 2.$$

Mathematical Inequalities 8/2024

Soluție.

Lema.

If $x>0$ then

$$x^{\frac{2}{3}}\leq\frac{2x+1}{3}.$$

Soluție.

$x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x\cdot x\cdot 1}\overset{AM-GM}{\leq}\frac{x+x+1}{3}=\frac{2x+1}{3}$, cu egalitate pentru $x=1$.

Folosind **Lema** pentru $x=a$ și $x=b$ obținem:

$$LHS=a^2b^{\frac{2}{3}}+b^2a^{\frac{2}{3}}\overset{Lema}{\leq}a^2\cdot\frac{2b+1}{3}+b^2\cdot\frac{2a+1}{3}=\frac{2ab(a+b)+a^2+b^2}{3}=$$

$$=\frac{2ab(a+b)+(a+b)^2-2ab}{3}=\frac{(a+b)^2+2ab(a+b-1)}{3}\overset{a+b=2\&ab\leq 1}{\leq}\frac{2^2+2\cdot 1(2-1)}{3}=2=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(a,b)=(1,1)$.

Remarca.

If $a,b>0$, $a+b=2$ then

$$a^2b^{\frac{3}{5}}+b^2a^{\frac{3}{5}}\leq 2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x > 0$ then

$$x^{\frac{3}{5}} \leq \frac{3x+2}{5}.$$

Soluție.

$$x^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{x^3} = \sqrt[5]{x \cdot x \cdot x \cdot 1 \cdot 1} \overset{AM-GM}{\leq} \frac{x+x+x+1+1}{5} = \frac{3x+2}{5}$$, cu egalitate pentru $x = 1$.

Folosind **Lema** pentru $x = a$ și $x = b$ obținem:

$$LHS = a^2 b^{\frac{3}{5}} + b^2 a^{\frac{3}{5}} \overset{Lema}{\leq} a^2 \cdot \frac{3b+2}{5} + b^2 \cdot \frac{3a+2}{5} = \frac{3ab(a+b)+2(a^2+b^2)}{5} =$$

$$= \frac{3ab(a+b)+2(a+b)^2-4ab}{5} = \frac{2(a+b)^2+ab(3(a+b)-4)}{5} \overset{a+b=2\&ab\leq 1}{\leq} \frac{2\cdot 2^2+1(3\cdot 2-4)}{5} =$$

$$= 2 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(a,b) = (1,1)$.

Problema177.

Evaluate

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+2^{\sin x}} dx.$$

Math 8/2024

Soluție.

Lema.

If $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, f continuous then

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx.$$

Folosind **Lema** pentru $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$ $f(x) = \frac{x^2}{1+2^{\sin x}}$ obținem :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+2^{\sin x}} dx = \int_{-1}^{1} \frac{(-x)^2}{1+2^{\sin(-x)}} dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+2^{-\sin x}} dx.$$

$$I+I=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+2^{\sin x}}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+2^{-\sin x}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+2^{\sin x}}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+\frac{1}{2^{\sin x}}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+2^{\sin x}}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x^2 2^{\sin x}}{1+2^{\sin x}}dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{x^2\left(1+2^{\sin x}\right)}{1+2^{\sin x}}dx=\int_{-1}^{1}x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}.$$

Din $2I=\frac{2}{3}\Rightarrow I=\frac{1}{3}$.

Deducem că $\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+2^{\sin x}}dx=\frac{1}{3}$.

Remarca.

Let $n\in\mathbf{N}$. Evaluate

$$1).\ \int_{-1}^{1}\frac{x^{2n}}{1+e^{\sin x}}dx.$$

Soluție.

Deducem că $\int_{-1}^{1}\frac{x^{2n}}{1+e^{\sin x}}dx=\frac{1}{3}$.

$$2).\ \int_{-1}^{1}\frac{x^{2n}}{1+e^{\sin 2x}}dx.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că $\int_{-1}^{1}\frac{x^{2n}}{1+e^{\sin 2x}}dx=\frac{1}{3}$.

Problema178.

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=1$ then

$$(a+b+c)^2\left(a^4+b^4+c^4\right)\geq 1.$$

IneMath 8/2024, Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$ then

$$(a+b+c)^2\left(a^4+b^4+c^4\right)\geq\left(a^2+b^2+c^2\right)^3.$$

Demonstrație.

$$(a+b+c)^2\left(a^4+b^4+c^4\right)=(a+b+c)(a+b+c)\left(a^4+b^4+c^4\right)\overset{Holder}{\geq}\left(a^2+b^2+c^2\right)^3.$$

Folosind **Lema** și $a^2+b^2+c^2=1$ obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Problema179.

If $a,b>0$, $a+b=2$ then

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}\geq 1.$$

Mathematical Inequalities 8/2024

Soluție.

Cu substituția $(a,b)=(1-x,1+x)$, $-1<x<1$ inegalitate se scrie:

$$\frac{1}{(1-x)^2+1}+\frac{1}{(1+x)^2+1}\geq 1.$$

$$\frac{1}{(1-x)^2+1}+\frac{1}{(1+x)^2+1}\geq 1\Leftrightarrow\frac{1}{2-2x+x^2}+\frac{1}{2+2x+x^2}\geq 1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{4+2x^2}{4+x^4}\geq 1\Leftrightarrow 4+2x^2\geq 4+x^4\Leftrightarrow 2x^2\geq x^4\Leftrightarrow x^2\left(2-x^2\right)\geq 0,$$

care rezultă din $\left(2-x^2\right)>0\Leftrightarrow x^2<2\Leftrightarrow x<\sqrt{2}$, vezi $x<1<\sqrt{2}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=0\Leftrightarrow(a,b)=(1,1)$.

Remarca.

If $a,b>0$, $a+b=2$ and $0\leq\lambda\leq 1$ then

$$\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}\geq\frac{2}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Cu substituția $(a,b)=(1-x,1+x)$, $-1<x<1$ inegalitate se scrie:

$$\frac{1}{(1-x)^2+\lambda}+\frac{1}{(1+x)^2+\lambda}\geq\frac{2}{\lambda+1}.$$

$$\frac{1}{(1-x)^2+\lambda}+\frac{1}{(1+x)^2+\lambda}\geq\frac{2}{\lambda+1}\Leftrightarrow\frac{1}{\lambda+1-2x+x^2}+\frac{1}{\lambda+1+2x+x^2}\geq\frac{2}{\lambda+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\lambda+2+2x^2}{\lambda^2+2\lambda+1+(2\lambda-2)x^2+2x^4}\geq\frac{2}{\lambda+1}\Leftrightarrow(3-\lambda)x^2\geq 2x^4\Leftrightarrow x^2\left(3-\lambda-2x^2\right)\geq 0$$

care rezultă din $\left(3-\lambda-2x^2\right)>0\Leftrightarrow x^2<\frac{3-\lambda}{2}$, vezi $x^2<1\leq\frac{3-\lambda}{2}$, $0\leq\lambda\leq 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=0\Leftrightarrow(a,b)=(1,1)$.

Problema180.

If $a,b,c>0$, $\frac{1}{a^3+1}+\frac{1}{b^3+1}+\frac{1}{c^3+1}=1$ then

$$abc\geq 2.$$

IneMath 8/2024, Marin Chirciu

Soluție.

$$\frac{1}{a^3+1}+\frac{1}{b^3+1}+\frac{1}{c^3+1}=1\Leftrightarrow a^3b^3c^3=2+a^3+b^3+c^3.$$

Folosind inegalitatea mediilor obținem: $a^3b^3c^3=2+a^3+b^3+c^3\overset{AM-GM}{\geq}2+3abc\Rightarrow$

$$\Rightarrow a^3b^3c^3\geq 2+3abc\overset{abc=t}{\Leftrightarrow}t^3\geq 2+3t\Leftrightarrow t^3-3t-2\geq 0\Leftrightarrow(t-2)(t+1)^2\geq 0\Leftrightarrow t\geq 2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow abc\geq 2.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\sqrt[3]{2}$.

Remarca.

1). If $a,b,c>0$, $\frac{1}{a^4+1}+\frac{1}{b^4+1}+\frac{1}{c^4+1}=1$ then

$$abc \geq 2^{\frac{3}{4}}.$$

2). If $a,b,c>0$, $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}=1$ then

$$abc \geq 2\sqrt{2}.$$

3). If $a,b,c>0$, $\frac{1}{a^n+1}+\frac{1}{b^n+1}+\frac{1}{c^n+1}=1, n\in\mathbf{N}^*$ then

$$abc \geq 2^{\frac{3}{n}}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$\frac{1}{a^n+1}+\frac{1}{b^n+1}+\frac{1}{c^n+1}=1 \Leftrightarrow a^n b^n c^n = 2+a^n+b^n+c^n.$$

Folosind inegalitatea mediilor obținem: $a^n b^n c^n = 2+a^n+b^n+c^n \overset{AM-GM}{\geq} 2+3\sqrt[3]{a^n b^n c^n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^n b^n c^n \geq 2+3\sqrt[3]{a^n b^n c^n} \overset{\sqrt[3]{a^n b^n c^n}=t}{\Leftrightarrow} t^3 \geq 2+3t \Leftrightarrow t^3-3t-2\geq 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow t\geq 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{a^n b^n c^n} \geq 2 \Leftrightarrow abc \geq 2^{\frac{3}{n}}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=2^{\frac{1}{n}}$.

Problema181.

Solve equation

$$2x+1+x\sqrt{x^2+2}+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=0.$$

MathAtelier 8/2024

Soluție.

Lema.

Notând $a=\sqrt{x^2+2}$ și $b=\sqrt{x^2+2x+3}$ avem $a^2=x^2+2, b^2=x^2+2x+3 \Rightarrow b^2-a^2=2x+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{b^2-a^2-1}{2}$ și ecuația se scrie:

$$b^2-a^2+\frac{b^2-a^2-1}{2}\cdot a+\left(\frac{b^2-a^2-1}{2}+1\right)\cdot b=0 \Leftrightarrow \left(b^2-a^2\right)\left(1+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\right)+\frac{1}{2}(b-a)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b-a)\left[(b+a)\left(1+\frac{a+b}{2}+\frac{1}{2}\right)\right]=0 \Leftrightarrow b-a=0 \Leftrightarrow b=a \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+3}=\sqrt{x^2+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x+3=2 \Leftrightarrow x=\frac{-1}{2}.$$

Deducem că $x=\frac{-1}{2}$ este soluția unică a ecuației.

Remarca.

Let $\lambda>0$ fixed. Solve equation

$$\lambda x+1+x\sqrt{x^2+\lambda}+(x+1)\sqrt{x^2+\lambda x+\lambda+1}=0.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că $x=\frac{-1}{\lambda}$ este soluția unică a ecuației.

Problema182.

If $x\geq 0$ then

$$\frac{xe^x+e^x+2x}{x+1+2e^x}+\frac{xe^{-x}+e^{-x}+2x}{x+1+2e^{-x}}\geq\frac{4x}{x+1}.$$

MathAtelier 8/2024

Soluție.

Lema.

If $x\geq 0$, $t\in\mathbf{R}$ then

$$\frac{xe^t+e^t+2x}{x+1+2e^t}\geq\frac{2x}{x+1}.$$

Demonstrație.

$\frac{xe^t+e^t+2x}{x+1+2e^t}\geq\frac{2x}{x+1} \Leftrightarrow e^t(x-1)^2\geq 0$, cu egalitate pentru $x=1$

Folosind **Lema** pentru $t=x$ și $t=-x$ și adunând cele două inegalități obținute rezultă:

$$\frac{xe^x+e^x+2x}{x+1+2e^x}+\frac{xe^{-x}+e^{-x}+2x}{x+1+2e^{-x}}\ge\frac{4x}{x+1}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=1$.

Remarca.

1). If $x\ge 0$ and $\lambda\ge 0$ then

$$\frac{xe^x+e^x+2x}{x+1+2e^x}+\lambda\frac{xe^{-x}+e^{-x}+2x}{x+1+2e^{-x}}\ge 2(\lambda+1)\frac{x}{x+1}.$$

Soluție.

Lema.

If $x\ge 0$, $t\in\mathbf{R}$ then

$$\frac{xe^t+e^t+2x}{x+1+2e^t}\ge\frac{2x}{x+1}.$$

2).If $x,y,z,\lambda\ge 0$ then

$$\frac{xy+y+2x}{x+1+2y}+\lambda\frac{xz+z+2x}{x+1+2z}\ge 2(\lambda+1)\frac{x}{x+1}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x,t\ge 0$ then

$$\frac{xt+t+2x}{x+1+2t}\ge\frac{2x}{x+1}.$$

Problema183.

If $a,b\in\mathbf{R}$, $3ab\ge 1$ then

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}\le\frac{3}{2}.$$

Mathematical Inequalities 8/2024, Nguyen Minh Tho, Vietnam

Soluție.

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+2)\le 3(a^2+1)(b^2+1)\Leftrightarrow 3a^2b^2+a^2+b^2\ge 1,$$

care rezultă din $3a^2b^2+a^2+b^2\overset{SOS}{\geq}3a^2b^2+2ab\overset{ab\geq\frac{1}{3}}{\geq}3\cdot\frac{1}{9}+2\cdot\frac{1}{3}=1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Remarca.

If $a,b\in\mathbf{R}$, $3ab\geq 1$ and $\lambda\geq\frac{1}{3}$ then

$$\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}\leq\frac{6}{3\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}\leq\frac{6}{3\lambda+1}\Leftrightarrow(3\lambda+1)\left(a^2+b^2+2\lambda\right)\leq 6\left(a^2+\lambda\right)\left(b^2+\lambda\right)\Leftrightarrow$$
$$6a^2b^2+(3\lambda-1)\left(a^2+b^2\right)\geq 2\lambda,$$

care rezultă din $6a^2b^2+(3\lambda-1)\left(a^2+b^2\right)\overset{SOS}{\geq}6a^2b^2+2(3\lambda-1)ab\overset{ab\geq\frac{1}{3}}{\geq}6\cdot\frac{1}{9}+2(3\lambda-1)\cdot\frac{1}{3}=2\lambda$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Problema184.

If $a,b>0$, $a+b=2$ then

$$1\leq\frac{1}{a^3+1}+\frac{1}{b^3+1}\leq\frac{8}{7}.$$

Mathematical Inequalities 8/2024, Nguyen Minh Tho, Vietnam

Soluție.

Cu substituția $(a,b)=(1-x,1+x)$, $-1<x<1$ inegalitate se scrie:

$$1\leq\frac{1}{(1-x)^3+1}+\frac{1}{(1+x)^3+1}\leq\frac{8}{7}.$$

Inegalitatea din dreapta $\frac{1}{(1-x)^3+1}+\frac{1}{(1+x)^3+1}\leq\frac{8}{7}$.

$$\frac{1}{(1-x)^3+1}+\frac{1}{(1+x)^3+1}\le\frac{8}{7}\Leftrightarrow\frac{1}{2-3x+3x^2-x^3}+\frac{1}{2+3x+3x^2+x^3}\le\frac{8}{7}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{4+6x^2}{4+3x^2+3x^4-x^6}\le\frac{8}{7}\Leftrightarrow 4x^6-12x^4+9x^2-2\le 0\Leftrightarrow\left(x^2-2\right)\left(2x^2-1\right)^2\le 0,$$

care rezultă din $\left(x^2-2\right)<0$, vezi $x<1<\sqrt{2}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow(a,b)=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}},1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Inegalitatea din stânga $\frac{1}{(1-x)^3+1}+\frac{1}{(1+x)^3+1}\ge 1$.

$$\frac{1}{(1-x)^3+1}+\frac{1}{(1+x)^3+1}\ge 1\Leftrightarrow\frac{1}{2-3x+3x^2-x^3}+\frac{1}{2+3x+3x^2+x^3}\ge 1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{4+6x^2}{4+3x^2+3x^4-x^6}\ge 1\Leftrightarrow x^6-3x^4+3x^2\ge 0\Leftrightarrow x^2\left(x^4-3x^2+3\right)\ge 0,$$

care rezultă din $\left(x^4-3x^2+3\right)>0$, vezi $\Delta=9-12=-3<0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=0\Leftrightarrow(a,b)=(1,1)$.

Remarca.

If $a,b>0$, $a+b=2$ and $0\le\lambda\le\frac{5}{4}$ then

$$\frac{1}{a^3+\lambda}+\frac{1}{b^3+\lambda}\ge\frac{2}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Cu substituția $(a,b)=(1-x,1+x),-1<x<1$ inegalitate se scrie:

$$\frac{1}{(1-x)^3+\lambda}+\frac{1}{(1+x)^3+\lambda}\ge\frac{2}{\lambda+1}.$$

$$\frac{1}{(1-x)^3+\lambda}+\frac{1}{(1+x)^3+\lambda}\ge\frac{2}{\lambda+1}\Leftrightarrow\frac{1}{\lambda+1-3x+3x^2-x^3}+\frac{1}{\lambda+1+3x+3x^2+x^3}\ge\frac{2}{\lambda+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\lambda+2+6x^2}{\lambda^2+2\lambda+1+(6\lambda-3)x^2+3x^4-x^6} \geq \frac{2}{\lambda+1} \Leftrightarrow x^6-3x^4+(6-3\lambda)x^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x^4-3x^2+6-3\lambda\right) \geq 0,$$

care rezultă din $\left(x^4-3x^2+6-3\lambda\right) \geq 0$, vezi $\Delta = 9-4(6-3\lambda) = 12\lambda-15 \leq 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=0 \Leftrightarrow (a,b)=(1,1)$.

Problema185.

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{a^2b}{c}+\frac{b^2c}{a}+\frac{c^2a}{b} \geq ab+bc+ca.$$

Antalya MO 2008

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{b^2c}{a} = \sum \frac{b^2c^2}{ac} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum bc\right)^2}{\sum ac} = \sum bc = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarca.

If $a,b,c>0$ then

$$1)\ \frac{a^3b^2}{c}+\frac{b^3c^2}{a}+\frac{c^3a^2}{b} \geq \frac{1}{3}(ab+bc+ca)^2.$$

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{b^3c^2}{a} = \sum \frac{b^3c^3}{ac} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum bc\right)^3}{3\sum ac} = \frac{1}{3}\left(\sum bc\right)^2 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

$$2).\ \frac{a^4b^3}{c}+\frac{b^4c^3}{a}+\frac{c^4a^3}{b} \geq \frac{1}{9}(ab+bc+ca)^3.$$

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{b^4c^3}{a}=\sum\frac{b^4c^4}{ac}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum bc\right)^4}{9\sum ac}=\frac{1}{9}\left(\sum bc\right)^3=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

3). $\frac{a^{n+1}b^n}{c}+\frac{b^{n+1}c^n}{a}+\frac{c^{n+1}a^n}{b}\geq 3\left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^n, n\in\mathbf{N}.$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n=0$ avem $\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\geq 3$, veziAM-GM.

Pentru $n\in\mathbf{N}^*$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS=\sum\frac{b^{n+1}c^n}{a}=\sum\frac{b^{n+1}c^{n+1}}{ac}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum bc\right)^{n+1}}{3^{n-1}\sum ac}=\frac{1}{3^{n-1}}\left(\sum bc\right)^n=3\left(\frac{\sum bc}{3}\right)^n=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarca.

In ΔABC

$$\sum\frac{\tan^2\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{A}{2}}\geq 1.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

$$LHS=\sum\frac{y^2z}{x}=\sum\frac{y^2z^2}{xz}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum yz\right)^2}{\sum xz}=\sum yz=RHS.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\tan\frac{A}{2},\tan\frac{B}{2},\tan\frac{C}{2}\right)$ obținem:

$$LHS=\sum\frac{\tan^2\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{A}{2}}\geq\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema186.

If $a,b,c>0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=5$ then

$$\sum\sqrt{5b-1}\sqrt{5c-1}\geq 6.$$

Antalya MO 2008

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=5$ then

$$\sqrt{5b-1}\sqrt{5c-1}\geq 2\sqrt{\frac{\sqrt{bc}}{a}}.$$

Demonstrație.

$$\sqrt{5b-1}\sqrt{5c-1}=\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)b-1}\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)c-1}=\sqrt{\frac{b}{a}+\frac{b}{c}}\sqrt{\frac{c}{a}+\frac{c}{b}}\overset{AM-GM}{\geq}\sqrt{2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{c}}}\sqrt{2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{c}{b}}}=$$

$$=2\sqrt{\frac{b}{\sqrt{ca}}\cdot\frac{c}{\sqrt{ab}}}=2\sqrt{\frac{bc}{a\sqrt{bc}}}=2\sqrt{\frac{\sqrt{bc}}{a}}.$$

Folosind **Lema** obținem:

$$LHS=\sum\sqrt{5b-1}\sqrt{5c-1}\overset{Lema}{\geq}\sum 2\sqrt{\frac{\sqrt{bc}}{a}}\overset{AM-GM}{\geq}2\cdot 3\sqrt[3]{\prod\sqrt{\frac{\sqrt{bc}}{a}}}=6=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{3}{5}$.

Remarca.

1). If $a,b,c,\lambda>0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\lambda$ then

$$\sum\sqrt{\lambda b-1}\sqrt{\lambda c-1}\geq 6.$$

2). If $a,b,c>0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ then

$$\sum\sqrt{b-1}\sqrt{c-1}\geq 6.$$

3). If $a,b,c>0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$ then

$$\sum\sqrt{2b-1}\sqrt{2c-1}\geq 6.$$

4). If $a,b,c>0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$ then

$$\sum\sqrt{3b-1}\sqrt{3c-1}\geq 6.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema187.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then

$$\sum\frac{a^3}{ab+2bc}\geq 1.$$

Mathematics(College and High School)8/2024, Amir Sofi, Kosovo

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^3}{ab+2bc}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sum(ab+2bc)}=\frac{3^3}{3\cdot 3\sum bc}=\frac{3}{\sum bc}\overset{(1)}{\geq}1=RHS$$, unde (1) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{\sum bc}\geq 1\Leftrightarrow 3\geq\sum bc\Leftrightarrow\frac{\left(\sum a\right)^2}{3}\geq\sum bc\Leftrightarrow\left(\sum a\right)^2\geq 3\sum bc\Leftrightarrow\sum a^2\geq\sum bc.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\sum\frac{a^3}{ab+\lambda bc}\geq\frac{3}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^3}{ab+\lambda bc}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sum\left(ab+\lambda bc\right)}=\frac{3^3}{3\cdot(\lambda+1)\sum bc}=\frac{9}{(\lambda+1)\sum bc}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{\lambda+1}=RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{9}{(\lambda+1)\sum bc}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{\lambda+1}\Leftrightarrow\frac{3}{\sum bc}\geq 1\Leftrightarrow 3\geq\sum bc\Leftrightarrow\frac{\left(\sum a\right)^2}{3}\geq\sum bc\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\sum a\right)^2\geq 3\sum bc\Leftrightarrow\sum a^2\geq\sum bc$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Problema188.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$\sum x(x+2y)^2\geq 1\geq\sum x\sqrt{x+2y}.$$

Mathematical Inequalities 8/2024, Nguyen Viet Hung, Vietnam

Soluție.

$$\sum x\sqrt{x+2y}=\sum\sqrt{x}\sqrt{x^2+2xy}\overset{CBS}{\leq}\sqrt{\sum x\sum\left(x^2+2xy\right)}=\sqrt{\sum x\left(\sum x\right)^2}=\sqrt{1\cdot 1^2}=1$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

$$\sum x(x+2y)^2=\sum x(y+1-z)^2=\sum x\left(y^2+z^2+1+2y-2z-2yz\right)=\sum x\left(y^2+z^2\right)+\sum x-6xyz=$$

$$=\sum xy(y+z)+\sum x-6xyz=\sum x\sum yz+\sum x-9xyz=pq+p-9r\overset{(1)}{\geq}1,$$

unde (1) $\Leftrightarrow pq+p-9r\geq 1\overset{p=1}{\Leftrightarrow}pq+1-9r\geq 1\Leftrightarrow pq\geq 9r$, vezi

$p=x+y+z\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{xyz}=3\sqrt[3]{r}$, $q=xy+yz+zx\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}=3\sqrt[3]{r^2}\Rightarrow pq\geq 9r$.

Am folosit mai sus pqr -Method:

Am notat: $p=x+y+z=1, q=xy+yz+zx, r=xyz$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Remarca.

If $x,y,z>0$, $x^2+y^2+z^2=3$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\sum x\sqrt{x+\lambda y} \le 3\sqrt{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\sum x\sqrt{x+\lambda y} = \sum \sqrt{x}\sqrt{x^2+\lambda xy} \overset{CBS}{\le} \sqrt{\sum x \sum\left(x^2+\lambda xy\right)} = \sqrt{3\cdot\sum\left(x^2+\lambda xy\right)} =$$
$$= \sqrt{3}\sqrt{\sum x^2+\lambda\sum xy} \le \sqrt{3}\sqrt{\sum x^2+\lambda\sum x^2} = \sqrt{3}\sqrt{(\lambda+1)\sum x^2} = \sqrt{3}\sqrt{(\lambda+1)3} = 3\sqrt{\lambda+1}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Remarca.

In ΔABC

$$1)\quad \sum \frac{1}{r_a}\left(\frac{1}{r_a}+\frac{2}{r_b}\right)^2 \ge \frac{1}{r^3}.$$

Soluție.

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x+y+z=1$ then

$$\sum x(x+2y)^2 \ge 1.$$

Soluție.

$$\sum x(x+2y)^2\sum x \overset{CBS}{\ge} \left(\sum x(x+2y)\right)^2 = \left(\left(\sum x\right)^2\right)^2 = 1.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Se cunoaște identitatea în triunghi $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r} \Leftrightarrow \frac{r}{r_a}+\frac{r}{r_b}+\frac{r}{r_c}=1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{r_a}, \frac{r}{r_b}, \frac{r}{r_c}\right)$ obținem:

$$\sum \frac{r}{r_a}\left(\frac{r}{r_a}+2\frac{r}{r_b}\right)^2 \ge 1 \Leftrightarrow \sum \frac{1}{r_a}\left(\frac{1}{r_a}+\frac{2}{r_b}\right)^2 \ge \frac{1}{r^3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2) $$\sum \frac{1}{h_a}\left(\frac{1}{h_a}+\frac{2}{h_b}\right)^2 \geq \frac{1}{r^3}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema189.

In ΔABC

$$\frac{r}{R}+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{24Rr} \leq \frac{1}{2}.$$

Mathematical Inequalities8/2024, Nguyen Minh Tho, Vietnam

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 2\left(p^2-3r^2-12Rr\right).$$

Demonstrație.

$$\sum (a-b)^2 = 2\sum a^2 - 2\sum ab = 2\cdot 2\left(p^2-r^2-4Rr\right)-2\left(p^2+r^2+4Rr\right) = 2\left(p^2-3r^2-12Rr\right)$$

Am folosit mai sus $\sum a^2 = 2\left(p^2-r^2-4Rr\right)$ $\sum ab = p^2+r^2+4Rr$.

Folosind **Lema** obținem:

$$\frac{r}{R}+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{24Rr} = \frac{r}{R}+\frac{2\left(p^2-3r^2-12Rr\right)}{24Rr} \overset{Gerretsen}{\leq} \frac{r}{R}+\frac{4R^2+4Rr+3r^2-3r^2-12Rr}{12Rr} =$$
$$= \frac{r}{R}+\frac{4R^2-8Rr}{12Rr} = \frac{r}{R}+\frac{R-2r}{3r} \overset{Euler}{\leq} \frac{1}{2}+\frac{1}{3r}(R-2r).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

In ΔABC

1) $$\frac{r}{R}+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{24Rr} \geq \frac{1}{3}\left(1+\frac{r}{R}\right).$$

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2\left(p^2-3r^2-12Rr\right).$$

Folosind **Lema** obținem:

$$\frac{r}{R}+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{24Rr}=\frac{r}{R}+\frac{2\left(p^2-3r^2-12Rr\right)}{24Rr}\overset{Gerretsen}{\geq}\frac{r}{R}+\frac{16Rr-5r^2-3r^2-12Rr}{12Rr}=$$
$$=\frac{r}{R}+\frac{4Rr-8Rr}{12Rr}=\frac{r}{R}+\frac{R-2r}{3R}=\frac{R+r}{3R}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{r}{R}\right).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2) $$\frac{1}{3}\left(1+\frac{r}{R}\right)\leq\frac{r}{R}+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{24Rr}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{3r}(R-2r).$$

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2\left(p^2-3r^2-12Rr\right).$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\frac{r}{R}+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{24Rr}=\frac{r}{R}+\frac{2\left(p^2-3r^2-12Rr\right)}{24Rr}\overset{Gerretsen}{\leq}\frac{r}{R}+\frac{4R^2+4Rr+3r^2-3r^2-12Rr}{12Rr}=$$

$$=\frac{r}{R}+\frac{4R^2-8Rr}{12Rr}=\frac{r}{R}+\frac{R-2r}{3r}\overset{Euler}{\leq}\frac{1}{2}+\frac{1}{3r}(R-2r).$$

Inegalitatea din stînga.

$$\frac{r}{R}+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{24Rr}=\frac{r}{R}+\frac{2\left(p^2-3r^2-12Rr\right)}{24Rr}\overset{Gerretsen}{\geq}\frac{r}{R}+\frac{16Rr-5r^2-3r^2-12Rr}{12Rr}=$$
$$=\frac{r}{R}+\frac{4Rr-8Rr}{12Rr}=\frac{r}{R}+\frac{R-2r}{3R}=\frac{R+r}{3R}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{r}{R}\right).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3) $$\frac{r^2}{R^2}+\frac{1}{R^2}(R-2r)^2\leq\frac{r^2}{R^2}+\frac{(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4}{16R^2r^2}\leq\frac{1}{4}+\frac{1}{r^2}(R-2r)^2.$$

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4=2\left[p^2\left(p^2-6r^2-24Rr\right)+9r^2(4R+r)^2\right].$$

Demonstrație.

$$\sum(a-b)^4=2\sum a^4-4\sum ab\left(a^2+b^2\right)+6\sum a^2b^2=2\left[p^2\left(p^2-6r^2-24Rr\right)+9r^2(4R+r)^2\right]$$

Am folosit mai sus $\sum a^4=2\left[p^4-p^2\left(8Rr+6r^2\right)+r^2(4R+r)^2\right]$,

$\sum ab\left(a^2+b^2\right)=2\left[p^4-4p^2Rr-r^2(4R+r)^2\right], \sum a^2b^2=p^4+p^2\left(2r^2-8Rr\right)+r^2(4R+r)^2$.

Inegalitatea din dreapta:

$$\frac{r^2}{R^2}+\frac{(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4}{16R^2r^2}=\frac{r^2}{R^2}+\frac{2\left[p^2\left(p^2-6r^2-24Rr\right)+9r^2(4R+r)^2\right]}{16R^2r^2}\overset{Gerretsen}{\leq}$$

$$\overset{Gerretsen}{\leq}\frac{r^2}{R^2}+\frac{2\left[\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left(4R^2+4Rr+3r^2-6r^2-24Rr\right)+9r^2(4R+r)^2\right]}{16R^2r^4}=$$

$$=\frac{r^2}{R^2}+\frac{16R^4-64R^3r+64R^2r^2}{16R^2r^2}=\frac{r^2}{R^2}+\frac{R^2-4Rr+4r^2}{r^2}\overset{Euler}{\leq}\frac{1}{4}+\frac{1}{r^2}(R-2r)^2.$$

Inegalitatea din stânga:

$$\frac{r^2}{R^2}+\frac{(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4}{16R^2r^2}=\frac{r^2}{R^2}+\frac{2\left[p^2\left(p^2-6r^2-24Rr\right)+9r^2(4R+r)^2\right]}{16R^2r^2}\overset{Gerretsen}{\geq}$$

$$\overset{Gerretsen}{\geq}\frac{r^2}{R^2}+\frac{2\left[\left(16Rr-5r^2\right)\left(16Rr-5r^2-6r^2-24Rr\right)+9r^2(4R+r)^2\right]}{16R^2r^4}=$$

$$=\frac{r^2}{R^2}+\frac{r^2\left(16R^2-64Rr+64r^2\right)}{16R^2r^2}=\frac{r^2}{R^2}+\frac{R^2-4Rr+4r^2}{R^2}=\frac{r^2}{R^2}+\frac{1}{R^2}(R-2r)^2.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

4) $8r(R-2r)\leq(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\leq 8R(R-2r)$.

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2\left(p^2-3r^2-12Rr\right).$$

<u>Inegalitatea din dreapta.</u>

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2\left(p^2-3r^2-12Rr\right)\overset{Gerretsen}{\leq}2\left(4R^2+4Rr+3r^2-3r^2-12Rr\right)=$$

$$=2\left(4R^2-8Rr\right)=8R(R-2r).$$

<u>Inegalitatea din stînga.</u>

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2\left(p^2-3r^2-12Rr\right)\overset{Gerretsen}{\geq}2\left(16Rr-5r^2-3r^2-12Rr\right)=$$

$$=2\left(4Rr-8r^2\right)=8r(R-2r).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

5) $32r^2(R-2r)^2\leq(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4\leq 32R^2(R-2r)^2.$

Dezvoltări, Marin Chirciu

<u>Soluție.</u>

<u>Lema.</u>

In ΔABC

$$(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4=2\left[p^2\left(p^2-6r^2-24Rr\right)+9r^2(4R+r)^2\right].$$

<u>Inegalitatea din dreapta:</u>

$$(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4=2\left[p^2\left(p^2-6r^2-24Rr\right)+9r^2(4R+r)^2\right]\overset{Gerretsen}{\leq}$$

$$\overset{Gerretsen}{\leq}2\left[\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left(4R^2+4Rr+3r^2-6r^2-24Rr\right)+9r^2(4R+r)^2\right]=$$

$$=2\left(16R^4-64R^3r+64R^2r^2\right)=32R^2\left(R^2-4Rr+4r^2\right)\overset{Euler}{\leq}32R^2(R-2r)^2.$$

<u>Inegalitatea din stânga:</u>

$$(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4=2\left[p^2\left(p^2-6r^2-24Rr\right)+9r^2(4R+r)^2\right]\overset{Gerretsen}{\geq}$$

$$\overset{Gerretsen}{\geq}2\left[\left(16Rr-5r^2\right)\left(16Rr-5r^2-6r^2-24Rr\right)+9r^2(4R+r)^2\right]=$$

$$=2r^2\left(16R^2-64Rr+64r^2\right)=32r^2\left(R^2-4Rr+4r^2\right)=32r^2(R-2r)^2.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema190.

If $x, y \in \mathbf{R}$ then

$$x^4+y^4+4x^2y^2 \geq 3xy\left(x^2+y^2\right).$$

RMM 8/2024, Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

$$x^4+y^4+4x^2y^2 \geq 3xy\left(x^2+y^2\right) \Leftrightarrow x^4-3x^3y+4x^2y^2-3xy^3+y^4 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2\left(x^2-xy+y^2\right) \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y$.

Remarca.

If $x, y \in \mathbf{R}$ and $0 \leq \lambda \leq 4$ then

1). $x^4+y^4+2(\lambda-1)x^2y^2 \geq \lambda xy\left(x^2+y^2\right)$.

2). $x^4+y^4+3x^2y^2 \geq 2xy\left(x^2+y^2\right)$.

3). $x^4+y^4+6x^2y^2 \geq 4xy\left(x^2+y^2\right)$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema191.

If $x, y > 0$ then

$$\frac{x^4+y^4}{(x+y)^4}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{5}{8}.$$

RMM 8/2024, Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

$$LHS=\frac{x^4+y^4}{(x+y)^4}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y} \overset{GM-HM}{\geq} \frac{x^4+y^4}{(x+y)^4}+\frac{\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}}{x+y}=\frac{x^4+y^4}{(x+y)^4}+\frac{2xy}{(x+y)^2} \overset{(1)}{\geq} \frac{5}{8}=RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \dfrac{x^4+y^4}{(x+y)^4}+\dfrac{2xy}{(x+y)^2} \geq \dfrac{5}{8} \Leftrightarrow 3x^4-4x^3y+2x^2y^2-4xy^3+3y^4 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-y)^2(3x^2+2xy+3y^2)\geq 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y$.

Remarca.

If $x,y>0$ and $\lambda\leq\frac{5}{4}$ then

$$\frac{x^4+y^4}{(x+y)^4}+\lambda\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\geq\frac{4\lambda+1}{8}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\frac{x^4+y^4}{(x+y)^4}+\lambda\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\overset{GM-HM}{\geq}\frac{x^4+y^4}{(x+y)^4}+\lambda\frac{\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}}{x+y}=\frac{x^4+y^4}{(x+y)^4}+\lambda\frac{2xy}{(x+y)^2}\overset{(1)}{\geq}\frac{4\lambda+1}{8}=RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{x^4+y^4}{(x+y)^4}+\lambda\frac{2xy}{(x+y)^2}\geq\frac{4\lambda+1}{8}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (7-4\lambda)x^4-4x^3y+2(4\lambda-3)x^2y^2-4xy^3+(7-4\lambda)y^4\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-y)^2\left[(7-4\lambda)x^2+2(5-4\lambda)xy+(7-4\lambda)y^2\right]\geq 0$, care rezultă din $\lambda\leq\frac{5}{4}$,

care asigură $\left[(7-4\lambda)x^2+2(5-4\lambda)xy+(7-4\lambda)y^2\right]>0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y$.

Remarca.

If $x,y>0$ then

$$\frac{x^4+y^4}{(x+y)^4}+\frac{5\sqrt{xy}}{4(x+y)}\geq\frac{3}{4}.$$

Marin Chirciu

Problema192.

Prove that

$$\frac{\cos 15^\circ}{1-\sin 15^\circ}=\tan 52,5^\circ .$$

Mathematical Inequalities8/2024, George Apostolopoulos, Greece

Soluție.

Lema.

Prove that

$$\frac{\cos x}{1-\sin x}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$$

Demonstrație.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{x}{2}}=\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}=\frac{1+\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1-\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}=\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\cos x}{1-\sin x}.$$

Egalitatea are sens pentru $1-\sin x\neq 0$ și $\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\neq 0$.

Folosind **Lema** pentru $x=15^\circ$ obținem:

$$\frac{\cos 15^\circ}{1-\sin 15^\circ}=\tan\left(45^\circ+7,5^\circ\right)=\tan 52,5^\circ .$$

Remarca.

Prove that

1). $\frac{\cos 75^\circ}{1-\sin 75^\circ}=\tan 82,5^\circ$.

2). $\frac{\cos 10^\circ}{1-\sin 10^\circ}=\tan 50^\circ$.

3). $\frac{\cos 5^\circ}{1-\sin 5^\circ}=\tan 47,5^\circ$.

4). $\frac{\cos 70^\circ}{1-\sin 70^\circ}=\tan 80^\circ$.

5). $\frac{\cos 1^\circ}{1-\sin 1^\circ}=\tan 45,5^\circ$.

Dezvoltări,Marin Chirciu

Problema193.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$\sum\frac{x^2+xy}{y+z}\geq 1.$$

Problem(715)8/21, Konstantinos Geronikolas, Greece

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{x^2+xy}{y+z}=\sum\frac{x(x+y)}{y+z}+\sum(x+y)-\sum(x+y)=\sum(x+y)\left(\frac{x}{y+z}+1\right)-2\sum x=$$

$$=\sum(x+y)\left(\frac{x}{y+z}+1\right)-2\sum x=\sum(x+y)\left(\frac{x+y+z}{y+z}\right)-2\cdot 1=\sum(x+y)\left(\frac{1}{y+z}\right)-2=$$

$$=\sum\frac{x+y}{y+z}-2\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{\prod\frac{x+y}{y+z}}-2=3\sqrt[3]{1}-2=1=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Remarca.

In ΔABC

$$1).\ \sum\frac{r_a+r_b}{r_a^2(r_b+r_c)}\geq\frac{1}{r}.$$

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$\sum \frac{x^2+xy}{y+z} \geq 1.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r} \Leftrightarrow \frac{r}{r_a}+\frac{r}{r_b}+\frac{r}{r_c}=1$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{r}{r_a},\frac{r}{r_b},\frac{r}{r_c}\right)$ obținem:

$$\sum \frac{\frac{r}{r_a}\left(\frac{r}{r_a}+\frac{r}{r_b}\right)}{\frac{r}{r_b}+\frac{r}{r_c}} \geq 1 \Leftrightarrow \sum \frac{\frac{1}{r_a}\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)}{\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}} \geq \frac{1}{r} \Leftrightarrow \sum \frac{r_a+r_b}{r_a^2\left(r_b+r_c\right)} \geq \frac{1}{r}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). $\sum \frac{h_a+h_b}{h_a^2\left(h_b+h_c\right)} \geq \frac{1}{r}$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema194.

In ΔABC

$$5(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq (a+b+c)^3+18abc.$$

Mathematical Inequalities 8/2024, Pham Le Van, Vietnam

Soluție.

Folosind $\sum a=2p$, $\sum bc=p^2+r^2+4Rr$ și $abc=4Rrp$ inegalitatea se scrie:

$$5\cdot 2p\left(p^2+r^2+4Rr\right) \geq 8p^3+18\cdot 4Rrp \Leftrightarrow 5\left(p^2+r^2+4Rr\right) \geq 4p^2+36Rr \Leftrightarrow p^2 \geq 16Rr-5r^2$$

vezi inegalitatea lui Gerretsen.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

1). Let $n \geq 4, 9n \geq k+27$. In ΔABC

$$n(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq (a+b+c)^3+kabc.$$

Soluție.

Folosind $\sum a = 2p$, $\sum bc = p^2 + r^2 + 4Rr$ și $abc = 4Rrp$ inegalitatea se scrie:

$n \cdot 2p\left(p^2 + r^2 + 4Rr\right) \geq 8p^3 + k \cdot 4Rrp \Leftrightarrow n\left(p^2 + r^2 + 4Rr\right) \geq 4p^2 + 2kRr \Leftrightarrow$
$(n-4)p^2 \geq (2k-4n)Rr - nr^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$(n-4)\left(16Rr - 5r^2\right) \geq (2k-4n)Rr - nr^2 \Leftrightarrow (10n - k - 32)R \geq 2(n-5)r$, care rezultă din inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Este suficient să arătăm că:

$(10n - k - 32) \cdot 2r \geq 2(n-5)r \Leftrightarrow (10n - k - 32) \geq (n-5) \Leftrightarrow 9n \geq k + 27$.

Remarca.

2). Let $\lambda \geq 5$. In ΔABC

$$\lambda(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq (a+b+c)^3 + 9(\lambda - 3)abc.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $\sum a = 2p$, $\sum bc = p^2 + r^2 + 4Rr$ și $abc = 4Rrp$ inegalitatea se scrie:

$\lambda \cdot 2p\left(p^2 + r^2 + 4Rr\right) \geq 8p^3 + 9(\lambda - 3) \cdot 4Rrp \Leftrightarrow \lambda\left(p^2 + r^2 + 4Rr\right) \geq 4p^2 + 18(\lambda - 3)Rr \Leftrightarrow$
$(\lambda - 4)p^2 \geq (14\lambda - 54)Rr - \lambda r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$(\lambda - 4)\left(16Rr - 5r^2\right) \geq (14\lambda - 54)Rr - \lambda r^2 \Leftrightarrow (\lambda - 5)R \geq 2(\lambda - 5)r$, care rezultă din inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$ și $\lambda \geq 5$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema196.

In ΔABC, G -barycenter, x, y, z -circumradii of triangles BGC, CGA, AGB. Prove that:

$$\frac{\sin A}{x \cdot m_a} = \frac{\sin B}{y \cdot m_b} = \frac{\sin C}{z \cdot m_c}.$$

Mathematical Olympiads, George Apostolopoulos, Greece

Soluție.

Lema.

In ΔABC, x, y, z-circumradii of triangles BGC. Prove that:

$$x = \frac{a \cdot m_b m_c}{3F}.$$

Demonstrație.

Avem $[BGC] = [CGA] = [AGB] = \frac{[ABC]}{3} = \frac{F}{3}$.

Rezultă: $x = R = \frac{abc}{4S} = \frac{BG \cdot CG \cdot BC}{4[BGC]} = \frac{\frac{2m_b}{3} \cdot \frac{2m_c}{3} \cdot a}{\frac{4F}{3}} = \frac{a \cdot m_b m_c}{3F}$.

Obținem $\frac{\sin A}{x \cdot m_a} = \frac{\frac{a}{2R}}{\frac{a \cdot m_b m_c}{3F} \cdot m_a} = \frac{3F}{2R m_a m_b m_c}$.

Deducem $\frac{\sin A}{x \cdot m_a} = \frac{\sin B}{y \cdot m_b} = \frac{\sin C}{z \cdot m_c}$.

Remarca.

In ΔABC, G-barycenter, R_1, R_2, R_3-circumradii of triangles BGC, CGA, AGB. Prove that:

$$1).\ R_1 + R_2 + R_3 \ge \frac{2}{3r}\left(17r^2 - 2R^2\right).$$

Soluție.

Lema.

In ΔABC, G-barycenter, R_1-circumradii of triangle BGC. Prove that:

$$R_1 = \frac{a \cdot m_b m_c}{3F}.$$

$$\sum R_1 = \sum \frac{a \cdot m_b m_c}{3F} = \frac{1}{3F} \sum a \cdot m_b m_c \overset{(1)}{\ge} \frac{1}{3pr} \cdot 2p\left(17r^2 - 2R^2\right) = \frac{2\left(17r^2 - 2R^2\right)}{3r} =$$

$$= \frac{2}{3r}\left(17r^2 - 2R^2\right),$$

unde (1) $\Leftrightarrow \sum a\cdot m_b m_c \geq 2p\left(17r^2-2R^2\right)$, vezi $m_b m_c \geq \frac{2a^2-4b^2-4c^2+9bc}{4}$,

(Crux Math18/1992) $\Rightarrow\ am_b m_c \geq \frac{2a^3-4a\left(b^2+c^2\right)+9abc}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum am_b m_c \geq \sum \frac{2a^3-4a\left(b^2+c^2\right)+9abc}{4} = \frac{2\sum a^3-4\sum a\left(b^2+c^2\right)+27abc}{4} =$$

$$= \frac{2\cdot 2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)-4\cdot 2p\left(p^2+r^2-2Rr\right)+27\cdot 4Rrp}{4} = p\left(25Rr-5r^2-p^2\right) \overset{Gerretsen}{\geq}$$

$$\overset{Gerretsen}{\geq} p\left(25Rr-5r^2-4R^2-4Rr-3r^2\right) = p\left(21Rr-8r^2-4R^2\right) \overset{Euler}{\geq} p\left(42r^2-8r^2-4R^2\right) =$$

$$= p\left(34r^2-4R^2\right) = 2p\left(17r^2-2R^2\right).$$

2). $R_1^2+R_2^2+R_3^2 \geq \frac{4}{27r^2}\left(17r^2-2R^2\right)^2$.

Soluție.

Lema.

In ΔABC, G -barycenter, R_1-circumradii of triangle BGC. Prove that:

$$R_1 = \frac{a\cdot m_b m_c}{3F}.$$

$$\sum R_1 = \sum \frac{a\cdot m_b m_c}{3F} = \frac{1}{3F}\sum a\cdot m_b m_c \overset{(1)}{\geq} \frac{1}{3pr}\cdot 2p\left(17r^2-2R^2\right) = \frac{2\left(17r^2-2R^2\right)}{3r} =$$

$$= \frac{2}{3r}\left(17r^2-2R^2\right),$$

$$\sum R_1^2 \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum R_1\right)^2}{3} \geq \frac{\left[\frac{2}{3r}\left(17r^2-2R^2\right)\right]^2}{3} = \frac{4}{27r^2}\left(17r^2-2R^2\right)^2.$$

3). $\frac{2}{3r}\left(17r^2-2R^2\right) \leq R_1+R_2+R_3 \leq \frac{R\left(2R^2+r^2\right)}{3r^2}$.

Soluție.

Lema.

In ΔABC, G -barycenter, R_1-circumradii of triangle BGC. Prove that:

$$R_1 = \frac{a \cdot m_b m_c}{3F}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum R_1 = \sum \frac{a \cdot m_b m_c}{3F} = \frac{1}{3F} \sum a \cdot m_b m_c \overset{Panaitopol}{\leq} \frac{1}{3F} \sum a \cdot \frac{Rp}{b} \cdot \frac{Rp}{c} = \frac{R^2 p^2}{3rp} \sum \frac{a}{bc} = \frac{R^2 p}{3r} \cdot \frac{\sum a^2}{abc} =$$

$$= \frac{R^2 p}{3r} \cdot \frac{2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)}{4Rrp} \overset{Gerretsen}{\leq} \frac{R}{3r} \cdot \frac{\left(4R^2 + 4Rr + 3r^2 - r^2 - 4Rr\right)}{2r} = \frac{R}{3r} \cdot \frac{\left(4R^2 + 2r^2\right)}{2r} =$$

$$= \frac{R\left(2R^2 + r^2\right)}{3r^2}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum R_1 = \sum \frac{a \cdot m_b m_c}{3F} = \frac{1}{3F} \sum a \cdot m_b m_c \overset{(1)}{\geq} \frac{1}{3pr} \cdot 2p\left(17r^2 - 2R^2\right) = \frac{2\left(17r^2 - 2R^2\right)}{3r} =$$

$$= \frac{2}{3r}\left(17r^2 - 2R^2\right).$$

$$\text{4).}\quad R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 \geq \frac{4}{27r^2}\left(17r^2 - 2R^2\right)^2.$$

Soluție.

Lema.

In ΔABC, G -barycenter, R_1-circumradii of triangle BGC. Prove that:

$$R_1 = \frac{a \cdot m_b m_c}{3F}.$$

$$\sum R_1 = \sum \frac{a \cdot m_b m_c}{3F} = \frac{1}{3F} \sum a \cdot m_b m_c \overset{(1)}{\geq} \frac{1}{3pr} \cdot 2p\left(17r^2 - 2R^2\right) = \frac{2\left(17r^2 - 2R^2\right)}{3r} =$$

$$= \frac{2}{3r}\left(17r^2 - 2R^2\right).$$

$$\sum R_1^2 \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum R_1\right)^2}{3} \geq \frac{\left[\frac{2}{3r}\left(17r^2 - 2R^2\right)\right]^2}{3} = \frac{4}{27r^2}\left(17r^2 - 2R^2\right)^2.$$

$$5).\ \frac{12r^2}{R^3} \le \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \le \frac{3R}{4r^2}.$$

Soluție.

Lema.

In ΔABC, G -barycenter, R_1-circumradii of triangle BGC. Prove that:

$$R_1 = \frac{a \cdot m_b m_c}{3F}.$$

Demonstrație.

Folosind **Lema** obținem:

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{1}{R_1} = \sum \frac{3F}{a \cdot m_b m_c} = 3F\frac{\sum bcm_a}{abcm_a m_b m_c} \le 3F\frac{\frac{R^2p^2}{r}}{4Rrp \cdot rp^2} = \frac{3R}{4r^2}$$

Am folosit mai sus $m_a m_b m_c \ge r_a r_b r_c = rp^2$ și $\sum bcm_a \le \frac{R^2p^2}{r}$, vezi

$$\sum bcm_a \overset{Panaitopol}{\le} \sum bc\frac{Rp}{a} = Rp\sum \frac{bc}{a} = Rp\frac{\sum b^2c^2}{abc} \overset{Goldstone}{\le} \frac{R^2p^2}{r}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{1}{R_1} = \sum \frac{3F}{a \cdot m_b m_c} = 3F\frac{\sum bcm_a}{abcm_a m_b m_c} \ge 3F\frac{54Rr^2}{4Rrp \cdot \frac{Rp^2}{2}} = \frac{81r^2}{Rp^2} \overset{Mitrinovic}{\ge} \frac{81r^2}{R \cdot \frac{27R^2}{4}} = \frac{12r^2}{R^3}.$$

Am folosit mai sus $m_a m_b m_c \le \frac{Rp^2}{2}$ și $\sum bcm_a \ge 54Rr^2$, vezi

$$\sum bcm_a \overset{Chebyshev}{\ge} \frac{1}{3}\sum bc\sum m_a \ge \frac{1}{3} \cdot 18Rr \cdot 9r = 54Rr^2.$$

$$6).\ \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_3^2} \ge \frac{48r^4}{R^6}.$$

Soluție.

Lema.

In ΔABC, G -barycenter, R_1-circumradii of triangle BGC. Prove that:

$$R_1 = \frac{a \cdot m_b m_c}{3F}.$$

Obținem:

$$\sum \frac{1}{R_1^2} \geq \sum \frac{9F^2}{a^2 \cdot m_b^2 m_c^2} = 9F^2 \frac{\sum b^2c^2m_a^2}{a^2b^2c^2m_a^2m_b^2m_c^2} \geq 9F^2 \frac{972R^2r^4}{16R^2r^2p^2 \cdot \frac{R^2p^4}{4}} = \frac{2187r^4}{R^2p^4} \overset{Mitrinovic}{\geq}$$

$$\overset{Mitrinovic}{\geq} \frac{2187r^4}{R^2 \cdot \left(\frac{27R^2}{4}\right)^2} = \frac{48r^4}{R^6}.$$

Am folosit mai sus $m_am_bm_c \leq \frac{Rp^2}{2}$ și $\sum bcm_a \geq 54Rr^2$, vezi

$$\sum bcm_a \overset{Chebyshev}{\geq} \frac{1}{3}\sum bc \sum m_a \geq \frac{1}{3} \cdot 18Rr \cdot 9r = 54Rr^2 \text{ și } \sum b^2c^2m_a^2 \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum bcm_a\right)^2}{3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

7). $4Rr^2 \leq R_1R_2R_3 \leq \frac{R^5}{4r^2}$.

<u>Soluție.</u>

<u>Lema.</u>

In ΔABC, G -barycenter, R_1-circumradii of triangle BGC. Prove that:

$$R_1 = \frac{a \cdot m_b m_c}{3F}.$$

<u>Inegalitatea din dreapta.</u>

$$\prod R_1 = \prod \frac{a \cdot m_b m_c}{3F} = \frac{abc\left(m_am_bm_c\right)^2}{27F^3} \leq \frac{4Rrp\left(\frac{Rp^2}{2}\right)^2}{27p^3r^3} = \frac{R^3p^2}{27r^2} \overset{Mitrinovic}{\leq} \frac{R^3 \cdot \frac{27R^2}{4}}{27r^2} = \frac{R^5}{4r^2}.$$

Am folosit mai sus $m_am_bm_c \leq \frac{Rp^2}{2}$.

<u>Inegalitatea din stânga.</u>

$$\prod R_1 = \prod \frac{a \cdot m_b m_c}{3F} = \frac{abc\left(m_am_bm_c\right)^2}{27F^3} \geq \frac{4Rrp\left(rp^2\right)^2}{27p^3r^3} = \frac{4Rp^2}{27} \overset{Mitrinovic}{\geq} \frac{4R \cdot 27r^2}{27} = 4Rr^2.$$

Am folosit mai sus $m_a m_b m_c \geq r_a r_b r_c = rp^2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

8). $6Rr \leq R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 \leq \dfrac{3R^5}{8r^3}$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

In ΔABC, G -barycenter, R_1-circumradii of triangle BGC. Prove that:

$$R_1 = \frac{a \cdot m_b m_c}{3F}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum R_2R_3 = \sum \frac{b \cdot m_c m_a}{3F} \frac{c \cdot m_a m_b}{3F} = \frac{m_a m_b m_c}{9F^2}\sum bc \cdot m_a \overset{Panaitopol}{\leq} \frac{\frac{Rp^2}{2}}{9F^2}\sum bc \cdot \frac{Rp}{a} = \frac{Rp^2 \cdot Rp}{18r^2p^2}\sum \frac{bc}{a} =$$

$$= \frac{R^2p}{18r^2} \cdot \frac{\sum b^2c^2}{abc} \overset{Godstone}{\leq} \frac{R^2p}{18r^2} \cdot \frac{4R^2p^2}{4Rrp} = \frac{R^3p^2}{18r^3} \overset{Mitrinovic}{\leq} \frac{R^3\frac{27R^2}{4}}{18r^3} = \frac{3R^5}{8r^3}.$$

Am folosit mai sus $m_a m_b m_c \leq \dfrac{Rp^2}{2}$ și $\sum b^2c^2 \leq 4R^2p^2$ (Goldstone).

Inegalitatea din stânga.

$$\sum R_2R_3 = \sum \frac{b \cdot m_c m_a}{3F} \frac{c \cdot m_a m_b}{3F} = \frac{m_a m_b m_c}{9F^2}\sum bc \cdot m_a \geq \frac{rp^2}{9r^2p^2} \cdot 54Rr^2 = 6Rr$$

$$= \frac{R^2p}{18r^2} \cdot \frac{\sum b^2c^2}{abc} \overset{Godstone}{\leq} \frac{R^2p}{18r^2} \cdot \frac{4R^2p^2}{4Rrp} = \frac{R^3p^2}{18r^3} \overset{Mitrinovic}{\leq} \frac{R^3\frac{27R^2}{4}}{18r^3} = \frac{3R^5}{8r^3}.$$

Am folosit mai sus : $m_a m_b m_c \geq r_a r_b r_c = rp^2$ și $\sum bcm_a \geq 54Rr^2$, vezi

$$\sum bcm_a \overset{Chebyshev}{\geq} \frac{1}{3}\sum bc \sum m_a \geq \frac{1}{3} \cdot 18Rr \cdot 9r = 54Rr^2.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema197.

Evaluate

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx\,,\, x\in\mathbf{R}\,.$$

MathOlymp 8/2024

Soluție.

$$F=\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx=\int\left(1-\frac{2}{e^{2x}+1}\right)dx=x-2\int\frac{dx}{e^{2x}+1}\overset{u=e^{2x}}{=}x-\int\frac{du}{u(u+1)}=x-\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du=$$

$$=x-\left(\ln u-\ln(u+1)\right)=\ln e^{x}-\ln\frac{u}{u+1}=\ln e^{x}-\ln\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}=\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{x}}\right)=\ln\left(e^{x}+e^{-x}\right).$$

În final $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx=\ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)+C$.

Remarca.

Let $\lambda\geq 0$. Evaluate

1). $\int \frac{e^{2x}-\lambda}{e^{2x}+\lambda}dx\,,\, x\in\mathbf{R}$.

2). $\int \frac{e^{3x}-\lambda}{e^{3x}+\lambda}dx\,,\, x\in\mathbf{R}$.

3). $\int \frac{e^{nx}-\lambda}{e^{nx}+\lambda}dx\,,\, x\in\mathbf{R}\,,\, n>0$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $\lambda=0$ obținem $\int dx=x+C$.

În continuare fie $\lambda>0$.

$$F=\int \frac{e^{nx}-\lambda}{e^{nx}+\lambda}dx=\int\left(1-\frac{2\lambda}{e^{nx}+\lambda}\right)dx=x-2\lambda\int\frac{dx}{e^{nx}+\lambda}\overset{u=e^{nx}}{=}x-\frac{2\lambda}{n}\int\frac{du}{u(u+\lambda)}=x-\frac{2}{n}\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+\lambda}\right)du=$$

$$=x-\frac{2}{n}\left(\ln u-\ln(u+\lambda)\right)=\ln e^{x}-\frac{2}{n}\ln\frac{u}{u+\lambda}=\ln e^{x}-\frac{2}{n}\ln\frac{e^{nx}}{e^{nx}+\lambda}=\ln\frac{\left(e^{nx}+\lambda\right)^{\frac{2}{n}}}{e^{x}}=$$

$=\frac{2}{n}\ln\left(e^{nx}+\lambda\right)-x$.

În final $\int \frac{e^{nx}-\lambda}{e^{nx}+\lambda}dx=\frac{2}{n}\ln\left(e^{nx}+\lambda\right)-x+C$.

Problema198.

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2+abc=4$ then

$$a+b+c+2(ab+bc+ca)+3abc\le 12.$$

IneMath8/2024, Marin Chirciu

Soluție.

Lema .

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2+abc=4$ then

$$a+b+c\le 3;$$

$$ab+bc+ca\le 3;$$

$$abc\le 1.$$

Demonstrație.

Cu substituția $(a,b,c)=(2\cos A,2\cos B,2\cos C)$, ΔABC =acute, obținem:

$$a+b+c=2\sum\cos A=2\left(1+\frac{r}{R}\right)\overset{Euler}{\le}2\cdot\frac{3}{2}=3.$$

$$ab+bc+ca=4\sum\cos B\cos C=4\sum\frac{p^2+r^2-4R^2}{R^2}\overset{Gerretsen}{\le}4\cdot\frac{3}{4}=3.$$

$$abc=8\prod\cos A=8\cdot\frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}\overset{Gerretsen}{\le}8\cdot\frac{1}{8}=1.$$

Folosind **Lema** obținem:

$$LHS=a+b+c+2(ab+bc+ca)+3abc\overset{Lema}{\le}3+2\cdot 3+3\cdot 1=12=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca.

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2+abc=4$ then

1). $a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)+5abc\le 17$.

2). $\sum a^2(a^2+1)\ge 6$.

Marin Chirciu

3). $a^2+b^2+c^2\ge 3$;

Demonstrație.

Cu substituția $(a,b,c)=(2\cos A,2\cos B,2\cos C)$, ΔABC =acute, obținem:

$$a^2+b^2+c^2=4\sum\cos^2 A=4\cdot\frac{6R^2+4Rr+r^2-p^2}{2R^2}\overset{Gerretsen}{\ge}4\cdot\frac{3}{4}=3.$$

4). $\sum a^{2n}\ge 3, n\in\mathbf{N}$.

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $a^2+b^2+c^2\ge 3$ obținem:

$$\sum a^{2n}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum a^2\right)^n}{3^{n-1}}\overset{Lema}{\ge}\frac{3^n}{3^{n-1}}=3.$$

$$LHS=\sum a^4+\sum a^2\overset{Lema}{\ge}3+3=6.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Problema199.

If $f(x)=e^x+2x+1$ then evaluate

$$\int_2^{e+3} f^{-1}(x)\,dx.$$

MathOlymp8/2024, Elton Papanikolla

Soluție.

FolosimYoung identity extended:

Dacă $f:[a,b]\to[c,d]$, f derivabilă, $f'(x)\in\mathbf{R}^*$, $\forall x\in[a,b]$, $f(a)=c$, $f(b)=d$, atunci:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_c^d f^{-1}(x)dx = bd - ac .$$

În cazul nostru:

$f:[0,1] \to [2, e+3]$, $f(x) = e^x + 2x + 1$, $f(0) = 2$, $f(1) = e+3$, $f'(x) = e^x + 2 > 0$.

Rezultă:

$$\int_0^1 f(x)dx + \int_2^{e+3} f^{-1}(x)dx = (e+3)\cdot 1 - 0\cdot 2 = e+3.$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (e^x + 2x + 1)dx = (e^x + x^2 + x)\Big|_0^1 = e + 2 - 1 = e + 1.$$

Obținem $\int_2^{e+3} f^{-1}(x)dx = (e+3) - (e+1) = 2$.

Remarca.

1). If $f(x) = e^x + 3x^2 + 1$ then evaluate

$$\int_2^{e+4} f^{-1}(x)dx .$$

Obținem $\int_2^{e+4} f^{-1}(x)dx = (e+4) - (e+1) = 3$.

2).If $f(x) = e^x + 4x^3 + 1$ then evaluate

$$\int_2^{e+5} f^{-1}(x)dx .$$

Obținem $\int_2^{e+4} f^{-1}(x)dx = (e+5) - (e+1) = 4$.

3). If $f(x) = e^x + nx^{n-1} + 1, n \geq 2$ then evaluate

$$\int_2^{e+n+1} f^{-1}(x)dx .$$

Obținem $\int_2^{e+n+1} f^{-1}(x)dx = (e+n+1) - (e+1) = n$.

4). If $f(x)=e^x+3x^2+2x$ then evaluate

$$\int_1^{e+5} f^{-1}(x)dx.$$

Obținem $\int_1^{e+5} f^{-1}(x)dx=(e+5)-(e+1)=4$.

5). If $f(x)=e^x+nx^{n-1}+(n+1)x^n, n\geq 2$ then evaluate

$$\int_1^{e+2n+1} f^{-1}(x)dx.$$

Obținem $\int_1^{e+2n+1} f^{-1}(x)dx=(e+2n+1)-(e+1)=2n$.

6). If $f(x)=e^x+2x+3x^2$ then evaluate

$$\int_1^{e+5} f^{-1}(x)dx.$$

7). If $f(x)=e^x+3x^2+4x^3$ then evaluate

$$\int_1^{e+7} f^{-1}(x)dx.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Obținem $\int_1^{e+7} f^{-1}(x)dx=(e+7)-(e+1)=6$.

Problema200.

Solve in real numbers

$$3\sqrt{y+z}+2\sqrt{x-y}+\sqrt{z-x}=z+7.$$

MathOlymp 8/2024, Miguel Velaquez Culque

Soluție.

Cu substituția $\left(\sqrt{y+z},\sqrt{x-y},\sqrt{z-x}\right)=(a,b,c)$ avem $a^2+b^2+c^2=2z$ și $3a+2b+c=z+7$.

Obținem $a^2+b^2+c^2=2(3a+2b+c)\Leftrightarrow(a-3)^2+(b-2)^2+(c-1)^2=0\Leftrightarrow(a,b,c)=(3,2,1)$
$\Leftrightarrow(x,y,z)=(6,2,7)$.

Deducem că $(x,y,z)=(6,2,7)$ este soluția ecuației.

Remarca.

1). Let $n,m,k\in\mathbf{R}$ fixed. Solve in real numbers

$$n\sqrt{y+z}+m\sqrt{x-y}+k\sqrt{z-x}=z+\frac{1}{2}\left(n^2+m^2+k^2\right).$$

Soluție.

Cu substituția $\left(\sqrt{y+z},\sqrt{x-y},\sqrt{z-x}\right)=(a,b,c)$ avem $a^2+b^2+c^2=2z\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+n^2+m^2+k^2=2z+n^2+m^2+k^2$ și $na+mb+kc=z+\frac{1}{2}\left(n^2+m^2+k^2\right)$.

Obținem $a^2+b^2+c^2+n^2+m^2+k^2=2(na+mb+kc)\Leftrightarrow(a-n)^2+(b-m)^2+(c-k)^2=0\Leftrightarrow$
$(a,b,c)=(n,m,k)\Leftrightarrow(x,y,z)=\left(\frac{n^2+m^2-k^2}{2},\frac{n^2-m^2-k^2}{2},\frac{n^2+m^2+k^2}{2}\right)$.

Deducem că $(x,y,z)=\left(\frac{n^2+m^2-k^2}{2},\frac{n^2-m^2-k^2}{2},\frac{n^2+m^2+k^2}{2}\right)$ este soluția ecuației.

Remarca.

2). Let $\lambda\in\mathbf{R}$ fixed. Solve in real numbers

$$(\lambda+1)\sqrt{y+z}+\lambda\sqrt{x-y}+\sqrt{z-x}=z+\lambda^2+\lambda+1.$$

Deducem că $(x,y,z)=\left(\lambda^2+\lambda,\lambda,\lambda^2+\lambda+1\right)$ este soluția ecuației.

Remarca.

3). Let $\lambda,n\in\mathbf{R}$ fixed. Solve in real numbers:

$$(\lambda+n)\sqrt{y+z}+\lambda\sqrt{x-y}+n\sqrt{z-x}=z+\lambda^2+\lambda n+n^2.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Deducem că $(x,y,z)=\left(\lambda^2+\lambda n,\lambda n,\lambda^2+\lambda n+n^2\right)$ este soluția ecuației.

Problema201.

In acute ΔABC

$$\sum(\sin A+\tan A)\geq\frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

RMM 8/2024, Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

Funcția $f(x)=\sin x+\tan x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ este convexă, vezi $f'(x)=\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}$,

$f''(x)=\sin x\left(\frac{2}{\cos^3 x}-1\right)>0$.

$LHS=\sum(\sin A+\tan A)\geq 3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)=3f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{9\sqrt{3}}{2}=RHS$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

In ΔABC

$$1).\ \sum\left(\sin\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\right)\geq\frac{3}{2}+\sqrt{3}.$$

Soluție.

Funcția $f(x)=\sin x+\tan x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ este convexă,

$$2).\ \sum\left(\cos\frac{A}{2}+\cot\frac{A}{2}\right)\geq\frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Soluție.

Funcția $f(x)=\cos x+\cot x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ este convexă,

$$3).\ \sum(\cos A+\cot A)\geq\frac{3}{2}+\sqrt{3}\text{, acute.}$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema202.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum a^4+3\sum a^2b^2\geq 2\sum ab\left(a^2+b^2\right).$$

Mathematical Inequalities 8/2024, Le Thu, Vietnam

Soluție.

Folosim $\left(\sum a^2\right)^2=\sum a^4+2\sum a^2b^2$ și $\left(\sum ab\right)^2=\sum a^2b^2+2abc\sum a$.

Inegalitatea se scrie:

$$\left(\sum a^2\right)^2-2\sum a^2b^2+3\sum a^2b^2\geq 2\sum ab\left(a^2+b^2\right)\Leftrightarrow\left(\sum a^2\right)^2+\sum a^2b^2\geq 2\sum ab\left(a^2+b^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sum a^2\right)^2+\sum a^2b^2\geq 2\sum ab\left(a^2+b^2\right)\Leftrightarrow\left(\sum a^2\right)^2-2\sum a^2\sum bc+\sum b^2c^2\geq 0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\left(\sum a^2-\sum bc\right)^2\geq 0$, cu egalitate pentru $\sum a^2=\sum bc\Leftrightarrow\sum(a-b)^2=0$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Problema203.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3xyz$ then

$$\sum\sqrt{3x^2+1}\leq 2\sum yz.$$

THCS 8/2024, Pu Tin Dao, Vietnam

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3xyz$ then

$$\sqrt{3x^2+1}\leq 1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\right).$$

Demonstrație.

$$\sqrt{3x^2+1}=\sqrt{x^2\frac{x+y+z}{xyz}+1}=2\sqrt{\frac{(x+y)(x+z)}{yz}}\overset{AM-GM}{\leq}\frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{y}+\frac{x+z}{z}\right)=1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\right),$$

cu egalitate pentru $x+y+z=3xyz$ și $\dfrac{x+y}{y}=\dfrac{x+z}{z}\Leftrightarrow y=z$ și $x+2y=3xy^2$.

$$LHS=\sum\sqrt{3x^2+1}\overset{Lema}{\leq}\frac{1}{2}\sum\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+2\right)=\frac{1}{2}\sum x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\sum\frac{1}{x}(y+z)+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\sum\frac{(y+z)^2}{yz}+\frac{3}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum\frac{x\left(y^2+z^2\right)}{xyz}+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\frac{\sum x\sum yz}{xyz}+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\sum yz+\frac{3}{2}\le\frac{3}{2}\sum yz+\frac{1}{2}\sum yz=2\sum yz=RHS\,.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Problema204.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=xyz$ then

$$2\sum\sqrt{x^2+1}\le 3+\sum yz\,.$$

THCS 8/2024, Pu Tin Dao, Vietnam

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=xyz$ then

$$2\sqrt{x^2+1}\le\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+2\,.$$

Demonstrație.

$$2\sqrt{x^2+1}=2\sqrt{x^2\frac{x+y+z}{xyz}+1}=2\sqrt{\frac{(x+y)(x+z)}{yz}}\overset{AM-GM}{\le}\frac{x+y}{y}+\frac{x+z}{z}=\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+2\,.$$

$$LHS=2\sum\sqrt{x^2+1}\overset{Lema}{\le}\sum\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+2\right)=\sum x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+6=\sum\frac{1}{x}(y+z)+6=\sum\frac{(y+z)^2}{yz}+6=$$

$$=\sum\frac{x\left(y^2+z^2\right)}{xyz}+6=\frac{\sum x\sum yz}{xyz}+3=\sum yz+3=RHS\,.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\sqrt{3}$.

Remarca.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=xyz$ then

$$8\prod\sqrt{x^2+1}\le\left(1+\frac{1}{3}\sum yz\right)^3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = xyz$ then

$$2\sqrt{x^2+1} \le \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + 2.$$

$$LHS = \prod 2\sqrt{x^2+1} \overset{Lema}{\le} \prod\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+2\right) \overset{AM-GM}{\le} \left[\frac{\sum\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+2\right)}{3}\right]^3 = \left[\frac{\sum x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+6}{3}\right]^3 =$$

$$= \left[\frac{\sum \frac{1}{x}(y+z)+6}{3}\right]^3 = \left[\frac{\sum \frac{(y+z)^2}{yz}+6}{3}\right]^3 = \left[\frac{\sum \frac{x(y^2+z^2)}{xyz}+6}{3}\right]^3 = \left[\frac{\frac{\sum x \sum yz}{xyz}+3}{3}\right]^3 =$$

$$= \left[\frac{\sum yz+3}{3}\right]^3 = \left(1+\frac{1}{3}\sum yz\right)^3 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \sqrt{3}$.

Problema205.

If $a, b, c > 0$, $a + b + c = 3abc$ then

$$\sum \frac{bc}{3a+bc+abc} \ge \frac{3}{5}.$$

MathOlymp 8/2024, Elton Papanikolla

Soluție.

Cu substituția $(x, y, z) = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ inegalitatea se reformulează:

If $x, y, z > 0$, $xy + yz + zx = 3$ then

$$\sum \frac{x}{x+3yz+1} \ge \frac{3}{5}.$$

Demonstrație.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = x + y + z, q = xy + yz + zx = 3, r = xyz$.

$$LHS=\sum\frac{x}{x+3yz+1}=\sum\frac{x^2}{x^2+3xyz+x}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum\left(x^2+3xyz+x\right)}=\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum x^2+9xyz+\sum x}=$$

$$=\frac{p^2}{p^2-2q+9r+p}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{5}=RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\ \dfrac{p^2}{p^2-2q+9r+p}\geq\dfrac{3}{5}\Leftrightarrow 2p^2-3p+6q\geq 27r\overset{q=3}{\Leftrightarrow}2p^2-3p+18\geq 27r$,

care rezultă din $r\leq\dfrac{p}{3}$, vezi $3p=\sum xy\sum x\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\cdot 3\sqrt[3]{xyz}=9xyz=9r\Rightarrow r\leq\dfrac{p}{3}$.

Este suficient să arătăm că:

$$2p^2-3p+18\geq 27\cdot\frac{p}{3}\Leftrightarrow 2p^2-12p+18\geq 0\Leftrightarrow (p-3)^2\geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Remarca.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3abc$ and $\lambda\geq 3$ then

$$\sum\frac{bc}{\lambda a+bc+abc}\geq\frac{3}{\lambda+2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Cu substituția $(x,y,z)=\left(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{c}\right)$ inegalitatea se reformulează:

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=3$ then

$$\sum\frac{x}{x+\lambda yz+1}\geq\frac{3}{\lambda+2}.$$

Demonstrație.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=x+y+z, q=xy+yz+zx=3, r=xyz$.

$$LHS=\sum\frac{x}{x+\lambda yz+1}=\sum\frac{x^2}{x^2+\lambda xyz+x}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum\left(x^2+\lambda xyz+x\right)}=\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum x^2+3\lambda xyz+\sum x}=$$

$$=\frac{p^2}{p^2-2q+3\lambda r+p}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{\lambda+2}=RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \dfrac{p^2}{p^2-2q+3\lambda r+p}\geq\dfrac{3}{\lambda+2}\Leftrightarrow(\lambda-1)p^2-3p+6q\geq 9\lambda r\overset{q=3}{\Leftrightarrow}$

$(\lambda-1)p^2-3p+18\geq 9\lambda r$,

care rezultă din $r\leq\dfrac{p}{3}$, vezi $3p=\sum xy\sum x\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\cdot 3\sqrt[3]{xyz}=9xyz=9r\Rightarrow r\leq\dfrac{p}{3}$.

Este suficient să arătăm că:

$$(\lambda-1)p^2-3p+18\geq 9\lambda\cdot\frac{p}{3}\Leftrightarrow(\lambda-1)p^2-3(\lambda+1)p+18\geq 0\Leftrightarrow(p-3)\left[(\lambda-1)p-6\right]\geq 0,$$

care rezultă din $p\geq 3$, vezi $p^2=(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)=3\cdot 3=9\Rightarrow p\geq 3$.

Avem $\left[(\lambda-1)p-6\right]\geq 0$ pentru $\lambda\geq 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Problema206.

In ΔABC

$$\sum\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}\geq 18Rr.$$

RMM 8/2023, Mehmet Șahin, Turkey

Soluție.

Lema.

If $a,b>0$ then

$$\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}\geq\frac{a^2+b^2}{2}.$$

Demonstrație.

$\dfrac{a^4+b^4}{a^2+b^2}\geq\dfrac{a^2+b^2}{2}\Leftrightarrow\left(a^2-b^2\right)^2\geq 0$, cu egalitate pentru $a=b$.

$$LHS=\sum\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{a^2+b^2}{2}=\sum a^2\overset{Lema}{\geq}18Rr=RHS.$$

Remarca.

In ΔABC

$$\sum \frac{a^{n+2}+b^{n+2}}{a^n+b^n} \geq 18Rr,\ n \in \mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $a,b>0$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\frac{a^{n+2}+b^{n+2}}{a^n+b^n} \geq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Demonstrație.

$\frac{a^{n+2}+b^{n+2}}{a^n+b^n} \geq \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow \left(a^2-b^2\right)\left(a^n-b^n\right)\geq 0$,deoarece factorii au același semn.

$$LHS=\sum \frac{a^{n+2}+b^{n+2}}{a^n+b^n} \overset{Lema}{\geq} \sum \frac{a^2+b^2}{2} = \sum a^2 \overset{Lema}{\geq} 18Rr = RHS.$$

Problema207.

If $a,b>0$, $ab=1$ then

$$\left(a^2+b^2\right)\left(a+b+1\right)+\frac{4}{a^2+b^2}\geq 8.$$

RMM 8/2024, Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

$$LHS=\left(a^2+b^2\right)\left(a+b+1\right)+\frac{4}{a^2+b^2}=\left(a^2+b^2\right)\left(a+b\right)+\left(a^2+b^2\right)+\frac{4}{a^2+b^2}\overset{AM-GM}{\geq}$$

$$\overset{AM-GM}{\geq} 2ab\cdot 2\sqrt{ab}+2\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\cdot\frac{4}{a^2+b^2}}=2\cdot 2+2\cdot 2=8=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=1$.

Remarca.

If $a,b>0$, $ab=1$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\left(a^2+b^2\right)\left(a+b+\lambda\right)+\frac{4\lambda}{a^2+b^2}\geq 4\left(\lambda+1\right).$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\left(a^2+b^2\right)\left(a+b+\lambda\right)+\frac{4\lambda}{a^2+b^2}=\left(a^2+b^2\right)\left(a+b\right)+\lambda\left(a^2+b^2\right)+\frac{4\lambda}{a^2+b^2}\overset{AM-GM}{\geq}$$

$$\overset{AM-GM}{\geq}2ab\cdot2\sqrt{ab}+2\lambda\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\cdot\frac{4}{a^2+b^2}}=2\cdot2+2\lambda\cdot2=4\left(\lambda+1\right)=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=1$.

Problema208.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$\sum\frac{1}{\sqrt{x+y}}\leq\frac{1}{\sqrt{2xyz}}.$$

MathOlymp 8/2024

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{1}{\sqrt{x+y}}\overset{CBS}{\leq}\sqrt{3\sum\frac{1}{x+y}}\overset{(1)}{\leq}\frac{1}{\sqrt{2xyz}}=RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\sqrt{3\sum\frac{1}{x+y}}\leq\frac{1}{\sqrt{2xyz}}\Leftrightarrow3\sum\frac{1}{x+y}\leq\frac{1}{2xyz}\Leftrightarrow3\sum\frac{1}{1-z}\leq\frac{1}{2xyz}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow3\frac{\sum(1-x)(1-y)}{\prod(1-x)}\leq\frac{1}{2xyz}.$$

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=x+y+z=1, q=xy+yz+zx, r=xyz$.

Avem $q\leq\frac{1}{3}$, vezi $3q=3\sum xy\leq\left(\sum x\right)^2=1\Rightarrow q\leq\frac{1}{3}$.

Avem $r\leq\frac{q^2}{3}$, vezi $q^2=\left(\sum xy\right)^2\geq3xyz\sum x=3rp=3r\Rightarrow r\leq\frac{q^2}{3}$.

Obținem $3\frac{\sum(1-x)(1-y)}{\prod(1-x)}\leq\frac{1}{2xyz}\Leftrightarrow3\cdot\frac{1+q}{q-r}\leq\frac{1}{2r}\Leftrightarrow6(1+q)\leq\frac{q}{r}-1$.

Folosind $r \le \frac{q^2}{3}$, pentru $6(1+q) \le \frac{q}{r} - 1$ este suficient $\Leftrightarrow 6(1+q) \le \frac{q}{\frac{q^2}{3}} - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6q^2 + 7q - 3 \le 0 \Leftrightarrow (3q-1)(2q+3) \le 0 \Leftrightarrow (3q-1) \le 0$, vezi $q \le \frac{1}{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Remarca.

In ΔABC

$$1).\ \sum \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b}}} \le \frac{p}{\sqrt{2r}}.$$

Soluție.

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$\sum \frac{1}{\sqrt{x+y}} \le \frac{1}{\sqrt{2xyz}}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} \Leftrightarrow \frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b} + \frac{r}{r_c} = 1$.

Folosind Lema pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{r_a}, \frac{r}{r_b}, \frac{r}{r_c}\right)$ obținem:

$$\sum \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b}}} \le \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \frac{r}{r_a} \cdot \frac{r}{r_b} \cdot \frac{r}{r_c}}} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b}}} \le \frac{1}{\sqrt{\frac{2r^2}{r_a r_b r_c}}} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b}}} \le \frac{1}{\sqrt{\frac{2r^2}{rp^2}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b}}} \le \frac{p}{\sqrt{2r}}.$$

Am folosit mai sus $r_a r_b r_c = rp^2$.

2). $\sum \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}}} \leq \frac{p}{\sqrt{R}}$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema209.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\sum \frac{b^5+c^5}{a^3\left(b^3+c^3\right)} \geq 6.$$

RMM8/2024, Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{b^5+c^5}{a^3\left(b^3+c^3\right)} \geq \frac{1}{a^4}.$$

Din $\frac{b^5+c^5}{b^3+c^3} \geq \frac{b^2+c^2}{2} \Leftrightarrow (b-c)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{b^5+c^5}{a^3\left(b^3+c^3\right)} \geq \frac{b^2+c^2}{2a^3} \geq \frac{2bc}{2a^3} = \frac{bc}{a^3} = \frac{abc}{a^4} = \frac{1}{a^4}$.

$$LHS = \sum \frac{1}{a} + \sum \frac{b^5+c^5}{a^3\left(b^3+c^3\right)} \overset{Lema}{\geq} \sum \frac{1}{a} + \sum \frac{1}{a^4} \overset{AM-GM}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^4b^4c^4}} = 3+3=6=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca.

1). If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{b^5+c^5}{a^3\left(b^3+c^3\right)} + \lambda\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 3(\lambda+1).$$

Soluție.

Lema.

$$LHS = \sum \frac{b^5+c^5}{a^3\left(b^3+c^3\right)} + \lambda \sum \frac{1}{a} \overset{Lema}{\geq} \sum \frac{1}{a^4} + \lambda \sum \frac{1}{a} \overset{AM-GM}{\geq} +3\sqrt[3]{\frac{1}{a^4b^4c^4}} + 3\lambda\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} =$$

$=3+3\lambda=3(\lambda+1)=RHS$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca.

2). If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\sum\frac{b^{n+2}+c^{n+2}}{a^3\left(b^n+c^n\right)}\geq 6.$$

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{b^{n+2}+c^{n+2}}{a^3\left(b^n+c^n\right)}\geq\frac{1}{a^4}.$$

Demonstrație.

Avem $\frac{b^{n+2}+c^{n+2}}{b^n+c^n}\geq\frac{b^2+c^2}{2}\Leftrightarrow\left(b^2-c^2\right)\left(b^n-c^n\right)\geq 0$, deoarece factorii au același semn.

Rezultă $\frac{b^{n+2}+c^{n+2}}{a^3\left(b^n+c^n\right)}\geq\frac{b^2+c^2}{2a^3}\geq\frac{2bc}{2a^3}=\frac{bc}{a^3}=\frac{abc}{a^4}=\frac{1}{a^4}$, cu egalitate pentru $b=c$.

$$LHS=\sum\frac{1}{a}+\sum\frac{b^{n+2}+c^{n+2}}{a^3\left(b^n+c^n\right)}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{1}{a}+\sum\frac{1}{a^4}\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}+3\sqrt[3]{\frac{1}{a^4b^4c^4}}=3+3=6=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca.

3). If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $\lambda\geq 0$, $n\in\mathbf{N}$ then

$$\lambda\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\sum\frac{b^{n+2}+c^{n+2}}{a^3\left(b^n+c^n\right)}\geq 3(\lambda+1).$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\frac{b^{n+2}+c^{n+2}}{a^3\left(b^n+c^n\right)}\geq\frac{1}{a^4}.$$

$$LHS=\lambda\sum\frac{1}{a}+\sum\frac{b^{n+2}+c^{n+2}}{a^3\left(b^n+c^n\right)}\overset{Lema}{\geq}\lambda\sum\frac{1}{a}+\sum\frac{1}{a^4}\overset{AM-GM}{\geq}3\lambda\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}+3\sqrt[3]{\frac{1}{a^4b^4c^4}}=3\lambda+3=$$

$$=3(\lambda+1)=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Problema210.

In acute ΔABC

$$(1+\sec A)(1+\csc A)>5.$$

MathOlymp 8/2024, Elton Papanikolla

Soluție.

Lema.

If $x,y>0$ then

$$(1+x)(1+y)\geq\left(1+\sqrt{xy}\right)^2.$$

Demonstrație.

$(1+x)(1+y)\geq\left(1+\sqrt{xy}\right)^2\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\geq 0$, cu egalitate pentru $x=y$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y)=(\sec A,\csc A)$ obținem:

$$LHS=(1+\sec A)(1+\csc A)\overset{Lema}{\geq}\left(1+\sqrt{\sec A\csc A}\right)^2=\left(1+\frac{1}{\sqrt{\sin A\cos A}}\right)^2=$$

$$=\left(1+\sqrt{\frac{2}{\sin 2A}}\right)^2\overset{\sin x\leq 1}{\geq}\left(1+\sqrt{\frac{2}{1}}\right)^2>5=RHS.$$

Remarca.

In acute ΔABC

1). $(1+\sin A)(1+\cos A)\geq\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\sin 2A}\right)^2.$

Soluție.

Lema.

If $x, y > 0$ then

$$(1+x)(1+y) \geq (1+\sqrt{xy})^2.$$

Folosind **Lema** pentru $(x, y) = (\sin A, \cos A)$ obținem:

$$LHS = (1+\sin A)(1+\cos A) \overset{Lema}{\geq} (1+\sqrt{\sin A \cos A})^2 = \left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\sin 2A}\right)^2$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $\sin A = \cos A \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{4}$.

Remarca.

In acute ΔABC

2). $(1+\tan A)(1+\cot A) \geq 4$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x, y > 0$ then

$$(1+x)(1+y) \geq (1+\sqrt{xy})^2.$$

Folosind **Lema** pentru $(x, y) = (\tan A, \cot A)$ obținem:

$$LHS = (1+\tan A)(1+\cot A) \overset{Lema}{\geq} (1+\sqrt{\tan A \cot A})^2 = (1+\sqrt{1})^2 = 4 = RHS$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $\tan A = \cot A \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{4}$.

Problema211.

In ΔABC

$$\sum \frac{h_a}{b+c} \sin A \leq \frac{9}{8}.$$

RMM 8/2024, Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$\sum \frac{h_a}{b+c}\sin A = \frac{r}{2R}\cdot\frac{5p^2+r^2+4Rr}{p^2+r^2+2Rr}.$$

$$LHS = \sum \frac{h_a}{b+c}\sin A = \frac{r}{2R}\cdot\frac{5p^2+r^2+4Rr}{p^2+r^2+2Rr} \overset{(1)}{\leq} \frac{9}{8} = RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{r}{2R}\cdot\frac{5p^2+r^2+4Rr}{p^2+r^2+2Rr} \leq \frac{9}{8} \Leftrightarrow 4r\left(5p^2+r^2+4Rr\right) \leq 9R\left(p^2+r^2+2Rr\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^2\left(9R-20r\right)+r\left(18R^2-7Rr-4r^2\right) \geq 0$.

Distingem cazurile:

Cazul1). Dacă $\left(9R-20r\right) \geq 0$ inegalitatea este evidentă.

Cazul2). Dacă $\left(9R-20r\right) < 0$ inegalitatea se rescrie: $r\left(18R^2-7Rr-4r^2\right) \geq p^2\left(20r-9R\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$r\left(18R^2-7Rr-4r^2\right) \geq \left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left(20r-9R\right) \Leftrightarrow 18R^3-13R^2r-30Rr^2-32r^3 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(R-2r\right)\left(18R^2+23Rr+16r^2\right) \geq 0$, vezi $R \geq 2r$,(Euler).

Remarca.

In ΔABC

$$\sum \frac{h_a}{b+c}\sin A \geq \frac{9r}{4R}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$\sum \frac{h_a}{b+c} \sin A = \frac{r}{2R} \cdot \frac{5p^2 + r^2 + 4Rr}{p^2 + r^2 + 2Rr}.$$

$$LHS = \sum \frac{h_a}{b+c} \sin A = \frac{r}{2R} \cdot \frac{5p^2 + r^2 + 4Rr}{p^2 + r^2 + 2Rr} \geq \frac{9r}{4R} = RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{r}{2R} \cdot \frac{5p^2 + r^2 + 4Rr}{p^2 + r^2 + 2Rr} \geq \frac{9r}{4R} \Leftrightarrow p^2 \geq 10Rr + 7r^2$, vezi Gerretsen: $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$.

Rămâne să arătăm că: $16Rr - 5r^2 \geq 10Rr + 7r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$ (Euler).

Remarca.

In ΔABC

$$\frac{9r}{4R} \leq \sum \frac{h_a}{b+c} \sin A \leq \frac{9}{8}.$$

Remarca.

In ΔABC

$$\frac{9}{8} \leq \sum \frac{r_a}{b+c} \sin A \leq \frac{9R}{16r}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$\sum \frac{r_a}{b+c} \sin A = \frac{2p^2(R-r) + Rr(4R+r)}{R(p^2 + r^2 + 2Rr)}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{r_a}{b+c} \sin A = \frac{2p^2(R-r) + Rr(4R+r)}{R(p^2 + r^2 + 2Rr)} \overset{Gerretsen}{\leq} \frac{2(4R^2 + 4Rr + 3r^2)(R-r) + Rr(4R+r)}{R(16Rr - 5r^2 + r^2 + 2Rr)} =$$

$$= \frac{8R^3 + 4R^2 r - Rr^2 - 6r^3}{R(18Rr - 4r^2)} = \frac{1}{2Rr} \cdot \frac{8R^3 + 4R^2 r - Rr^2 - 6r^3}{9R - 2r} \overset{Euler}{\leq} \frac{1}{2Rr} \cdot \frac{9R^2}{8} = \frac{9R}{16r}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{r_a}{b+c}\sin A = \frac{2p^2(R-r)+Rr(4R+r)}{R(p^2+r^2+2Rr)} \geq \frac{9}{8} \Leftrightarrow p^2(7R-16r)+Rr(14R-r)\geq 0.$$

Distingem cazurile:

Cazul1). Dacă $(7R-16r)\geq 0$ inegalitatea este evidentă.

Cazul2). Dacă $(7R-16r)<0$ inegalitatea se rescrie: $Rr(14R-r)\geq p^2(16r-7R)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$$Rr(14R-r)\geq(4R^2+4Rr+3r^2)(16r-7R) \Leftrightarrow 14R^3-11R^2r-22Rr^2-24r^3\geq 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (R-2r)(14R^2+17Rr+12r^2)\geq 0$, vezi $R\geq 2r$,(Euler).

Remarca.

In ΔABC

$$\sum \frac{h_a}{b+c}\sin A \leq \frac{9}{8} \leq \sum \frac{r_a}{b+c}\sin A.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

In ΔABC

$$\sum \frac{h_a}{b+c}\sin A = \frac{r}{2R}\cdot\frac{5p^2+r^2+4Rr}{p^2+r^2+2Rr}.$$

Lema2.

In ΔABC

$$\sum \frac{r_a}{b+c}\sin A = \frac{2p^2(R-r)+Rr(4R+r)}{R(p^2+r^2+2Rr)}.$$

Prima inegalitate. $\sum \frac{h_a}{b+c}\sin A \leq \frac{9}{8}$.

$$\sum \frac{h_a}{b+c}\sin A = \frac{r}{2R}\cdot\frac{5p^2+r^2+4Rr}{p^2+r^2+2Rr} \overset{(1)}{\leq} \frac{9}{8},$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{r}{2R}\cdot\frac{5p^2+r^2+4Rr}{p^2+r^2+2Rr}\le\frac{9}{8} \Leftrightarrow 4r\left(5p^2+r^2+4Rr\right)\le 9R\left(p^2+r^2+2Rr\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^2\left(9R-20r\right)+r\left(18R^2-7Rr-4r^2\right)\ge 0$.

Distingem cazurile:

Cazul1). Dacă $\left(9R-20r\right)\ge 0$ inegalitatea este evidentă.

Cazul2). Dacă $\left(9R-20r\right)<0$ inegalitatea se rescrie: $r\left(18R^2-7Rr-4r^2\right)\ge p^2\left(20r-9R\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$r\left(18R^2-7Rr-4r^2\right)\ge\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left(20r-9R\right)\Leftrightarrow 18R^3-13R^2r-30Rr^2-32r^3\ge 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(R-2r\right)\left(18R^2+23Rr+16r^2\right)\ge 0$, vezi $R\ge 2r$,(Euler).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

<u>A doua inegalitate.</u> $\frac{9}{8}\le\sum\frac{r_a}{b+c}\sin A$.

$$\sum\frac{r_a}{b+c}\sin A=\frac{2p^2\left(R-r\right)+Rr\left(4R+r\right)}{R\left(p^2+r^2+2Rr\right)}\ge\frac{9}{8}\Leftrightarrow p^2\left(7R-16r\right)+Rr\left(14R-r\right)\ge 0.$$

Distingem cazurile:

Cazul1). Dacă $\left(7R-16r\right)\ge 0$ inegalitatea este evidentă.

Cazul2). Dacă $\left(7R-16r\right)<0$ inegalitatea se rescrie: $Rr\left(14R-r\right)\ge p^2\left(16r-7R\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$Rr\left(14R-r\right)\ge\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left(16r-7R\right)\Leftrightarrow 14R^3-11R^2r-22Rr^2-24r^3\ge 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(R-2r\right)\left(14R^2+17Rr+12r^2\right)\ge 0$, vezi $R\ge 2r$,(Euler).

<u>Problema212.</u>

In ΔABC

$$\sum\sqrt{\frac{m_a}{h_a}}\sqrt{r_a}\le 2\sqrt{\frac{R}{2}\left(\frac{R^2}{r^2}-\frac{R}{r}-1\right)}.$$

Mathematical Inequalities8/2024, Konstantinos Geronikolas, Greece

Soluție.

$$LHS=\sum\sqrt{\frac{m_a}{h_a}}\sqrt{r_a}\overset{CBS}{\le}\sqrt{\sum\frac{m_a}{h_a}\sum r_a}\overset{Panaitopol}{\le}\sqrt{\sum\frac{R}{2r}(4R+r)}=\sqrt{\frac{3R}{2r}(4R+r)}\overset{Euler}{\le}$$

$$\overset{Euler}{\le}2\sqrt{\frac{R}{2}\left(\frac{R^2}{r^2}-\frac{R}{r}-1\right)}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

In ΔABC

$$1).\ \sum\sqrt{\frac{m_a}{h_a}}\sqrt{w_a}\le\frac{3R}{2}\sqrt{\frac{3}{r}}.$$

$$2).\ \sum\sqrt{\frac{m_a}{h_a}}\sqrt{s_a}\le\frac{3R}{2}\sqrt{\frac{3}{r}}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema213.

In ΔABC

$$\sum\sqrt{\frac{p-a}{a}}\ge 3\sqrt{\frac{r}{R}}.$$

IneMath8/2024, Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\sqrt{\frac{p-a}{a}}\overset{AM-GM}{\ge}3\sqrt[3]{\prod\sqrt{\frac{p-a}{a}}}=3\sqrt[6]{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}}=3\sqrt[6]{\frac{r^2p}{4Rrp}}=$$

$$=3\sqrt[6]{\frac{r}{4R}}\overset{Euler}{\ge}3\sqrt{\frac{r}{R}}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

In ΔABC

$$1).\ \frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c}\geq\frac{8R}{r}\cdot\frac{p-a}{a}\sin\frac{A}{2}.$$

Soluție.

Folosim $\frac{a}{p-a}=\frac{4R}{r}\sin^2\frac{A}{2}$.

Remarca.

In ΔABC

$$2).\ \sqrt{\frac{b}{p-b}}+\sqrt{\frac{c}{p-c}}\geq\frac{2}{\sqrt{\sin\frac{A}{2}}}.$$

Soluție.

Folosim $\frac{a}{p-a}=\frac{4R}{r}\sin^2\frac{A}{2}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{a}{p-a}}=2\sqrt{\frac{R}{r}}\sin\frac{A}{2}$

Remarca.

In ΔABC

$$3).\ \left(\frac{b}{p-b}\right)^2+\left(\frac{c}{p-c}\right)^2\geq\frac{8R}{r}\cdot\frac{p-a}{a}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema214.

If $0<x<1, x+y+z=\frac{3}{2}$ then

$$\sum\sqrt{\frac{x}{1-x}}\geq 3.$$

IneMath8/2024,Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $0<x<1$ then

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}} \ge 2x.$$

$\sqrt{\frac{x}{1-x}} \ge 2x \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} \ge 4x^2 \Leftrightarrow x(2x-1)^2 \ge 0$, cu egalitate pentru $x = \frac{1}{2}$.

$LHS = \sum\sqrt{\frac{x}{1-x}} \overset{Lema}{\ge} \sum 2x = 2\sum x \overset{AM-GM}{\ge} 2\cdot\frac{3}{2} = 3 = RHS$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Problema215.

If $x, y, z > 0$, $xyz = 1$ then

$$\sum\frac{x^9 + y^9}{x^6 + x^3y^3 + y^6} \ge 2.$$

RMM8/2024, Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

Cu substituția $(a,b,c) = (x^3, y^3, z^3)$ problema se reformulează.

If $a,b,c > 0$, $abc = 1$ then

$$\sum\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} \ge 2.$$

Demonstrație.

Lema.

If $a,b,c > 0$ then

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} \ge \frac{a+b}{3}.$$

$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} \ge \frac{a+b}{3} \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \ge 0$, cu egalitate pentru $a = b$.

$LHS = \sum\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} \overset{Lema}{\ge} \sum\frac{a+b}{3} = \frac{2}{3}\sum a \overset{AM-GM}{\ge} \frac{2}{3}\cdot 3\sqrt[3]{abc} = \frac{2}{3}\cdot 3 = 2 = RHS$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Remarca.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $\lambda\ge -1$ then

$$\sum\frac{a^3+b^3}{a^2+\lambda ab+b^2}\ge\frac{6}{\lambda+2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+\lambda ab+b^2}\ge\frac{a+b}{\lambda+2}.$$

Demonstrație.

$\frac{a^3+b^3}{a^2+\lambda ab+b^2}\ge\frac{a+b}{\lambda+2}\Leftrightarrow(\lambda+1)(a+b)(a-b)^2\ge 0$, cu egalitate pentru $a=b$.

$$LHS=\sum\frac{a^3+b^3}{a^2+\lambda ab+b^2}\overset{Lema}{\ge}\sum\frac{a+b}{\lambda+2}=\frac{2}{\lambda+2}\sum a\overset{AM-GM}{\ge}\frac{2}{\lambda+2}\cdot 3\sqrt[3]{abc}=\frac{2}{\lambda+2}\cdot 3=$$

$$=\frac{6}{\lambda+2}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Problema216.

If $a,b>0$ then

$$\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{8\sqrt{ab}}{a+b}\ge 6.$$

RMM 8/2024, Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

$$LHS=\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{8\sqrt{ab}}{a+b}=\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{4\sqrt{ab}}{a+b}+\frac{4\sqrt{ab}}{a+b}\overset{AM-GM}{\ge}3\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{ab}\cdot\frac{4\sqrt{ab}}{a+b}\cdot\frac{4\sqrt{ab}}{a+b}}=$$

$$=3\sqrt[3]{\frac{16\left(a^2+b^2\right)}{(a+b)^2}}=6\sqrt[3]{\frac{2\left(a^2+b^2\right)}{(a+b)^2}}\overset{(1)}{\ge}6=RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{2(a^2+b^2)}{(a+b)^2}\geq 1 \Leftrightarrow (a-b)^2\geq 0$, cu egalitate pentru $a=b$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b$.

Remarca.

If $a,b>0$ then

$$1).\ \frac{a^3+b^3}{ab\sqrt{ab}}+\frac{12\sqrt{ab}}{a+b}\geq 8.$$

Soluție.

$$LHS=\frac{a^3+b^3}{ab\sqrt{ab}}+\frac{12\sqrt{ab}}{a+b}=\frac{a^3+b^3}{ab\sqrt{ab}}+\frac{4\sqrt{ab}}{a+b}+\frac{4\sqrt{ab}}{a+b}+\frac{4\sqrt{ab}}{a+b}\overset{AM-GM}{\geq}4\sqrt[4]{\frac{a^3+b^3}{ab\sqrt{ab}}\cdot\frac{4\sqrt{ab}}{a+b}\cdot\frac{4\sqrt{ab}}{a+b}\cdot\frac{4\sqrt{ab}}{a+b}}=$$

$$=4\sqrt[4]{\frac{64(a^3+b^3)}{(a+b)^3}}=8\sqrt[3]{\frac{4(a^3+b^3)}{(a+b)^3}}\overset{(1)}{\geq}8=RHS,$$

unde(1) $\Leftrightarrow \frac{4(a^3+b^3)}{(a+b)^3}\geq 1$ rezultă din Holder $a^3+b^3\overset{Holder}{\geq}\frac{(a+b)^3}{2^2}$,

sau (1) $\Leftrightarrow \frac{4(a^3+b^3)}{(a+b)^3}\geq 1 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2\geq 0$, cu egalitate pentru $a=b$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b$.

$$2).\ \frac{a^4+b^4}{a^2b^2}+\frac{16\sqrt{ab}}{a+b}\geq 10.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\frac{a^4+b^4}{a^2b^2}+\frac{16\sqrt{ab}}{a+b}=\frac{a^4+b^4}{a^2b^2}+\frac{4\sqrt{ab}}{a+b}+\frac{4\sqrt{ab}}{a+b}+\frac{4\sqrt{ab}}{a+b}+\frac{4\sqrt{ab}}{a+b}\overset{AM-GM}{\geq}$$

$$\overset{AM-GM}{\geq}5\sqrt[5]{\frac{a^4+b^4}{a^2b^2}\cdot\frac{4\sqrt{ab}}{a+b}\cdot\frac{4\sqrt{ab}}{a+b}\cdot\frac{4\sqrt{ab}}{a+b}\cdot\frac{4\sqrt{ab}}{a+b}}=5\sqrt[5]{\frac{256(a^4+b^4)}{(a+b)^4}}=$$

$=10\sqrt[5]{\frac{8\left(a^4+b^4\right)}{(a+b)^4}}\overset{(1)}{\geq}10=RHS$,unde(1) $\Leftrightarrow\frac{8\left(a^4+b^4\right)}{(a+b)^4}\geq1$ rezultă din Holder $a^4+b^4\overset{Holder}{\geq}\frac{(a+b)^4}{2^3}$

, sau (1) $\Leftrightarrow\frac{8\left(a^4+b^4\right)}{(a+b)^4}\geq1\Leftrightarrow\left(7a^2+10ab+7b^2\right)(a-b)^2\geq0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b$.

Problema217.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\sqrt[3]{4a^3+4b^3}\leq\sum\frac{4a^2}{a+b}.$$

RMM8/2024, Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

Lema.

If $b,c>0$ then

$$\sqrt[3]{4a^3+4b^3}\leq\frac{2\left(a^2+b^2\right)}{a+b}.$$

Demonstrație.

$\sqrt[3]{4a^3+4b^3}\leq\frac{2\left(a^2+b^2\right)}{a+b}\Leftrightarrow4\left(a^3+b^3\right)(a+b)^3\leq8\left(a^2+b^2\right)^3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(a^3+b^3\right)(a+b)^3\leq2\left(a^2+b^2\right)^3\Leftrightarrow a^6-3a^5b+3a^4b^2-2a^3b^3+3a^2b^4-3ab^5+b^6\geq0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(a-b)^4\left(a^2+ab+b^2\right)\geq0$, cu egalitate pentru $a=b$.

$LHS\sum\sqrt[3]{4a^3+4b^3}\overset{Lema}{\leq}\sum\frac{2\left(a^2+b^2\right)}{a+b}\overset{(1)}{=}\sum\frac{4a^2}{a+b}=RHS$,

unde (1) $\Leftrightarrow\sum\frac{2\left(a^2+b^2\right)}{a+b}=\sum\frac{4a^2}{a+b}$, vezi

$\sum\frac{a^2}{a+b}=\sum\frac{a^2-b^2+b^2}{a+b}=\sum\frac{a^2-b^2}{a+b}+\sum\frac{b^2}{a+b}=\sum(a-b)+\sum\frac{b^2}{a+b}=\sum\frac{b^2}{a+b}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarca.

In acute ΔABC

$$1).\ \prod \sqrt[3]{4a^3+4b^3} \le \frac{8R^3 p}{r}.$$

Soluție.

Lema1.

If $b,c>0$ then

$$\sqrt[3]{4a^3+4b^3} \le \frac{2\left(a^2+b^2\right)}{a+b}.$$

Demonstrație.

$$\sqrt[3]{4a^3+4b^3} \le \frac{2\left(a^2+b^2\right)}{a+b} \Leftrightarrow 4\left(a^3+b^3\right)\left(a+b\right)^3 \le 8\left(a^2+b^2\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(a^3+b^3\right)\left(a+b\right)^3 \le 2\left(a^2+b^2\right)^3 \Leftrightarrow a^6-3a^5b+3a^4b^2-2a^3b^3+3a^2b^4-3ab^5+b^6 \ge 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left(a-b\right)^4\left(a^2+ab+b^2\right) \ge 0$, cu egalitate pentru $a=b$.

$$\prod \sqrt[3]{4a^3+4b^3} \overset{Lema}{\le} \prod \frac{2\left(a^2+b^2\right)}{a+b} = \frac{8\prod\left(a^2+b^2\right)}{\prod\left(a+b\right)} \underset{Cesaro}{\overset{Lema2}{\le}} \frac{8\cdot\frac{2R^2}{r^2}\cdot a^2b^2c^2}{8abc} = \frac{2R^2}{r^2}\cdot abc =$$

$$= \frac{2R^2}{r^2}\cdot 4Rrp = \frac{8R^3 p}{r}.$$

Lema2.

In acute ΔABC

$$2).\ \prod\left(b^2+c^2\right) \le \frac{2R^2}{r^2}\cdot a^2b^2c^2.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Demonstrație.

Folosind $\frac{r}{R}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ și $a=2R\sin A$ inegalitatea $\prod\left(b^2+c^2\right) \le \frac{2R^2}{r^2}\cdot a^2b^2c^2$ se scrie:

$$16\prod\sin^2\frac{A}{2}\prod\left(\sin^2 B+\sin^2 C\right)\le 2\prod\sin^2 A\Leftrightarrow\prod\left(\sin^2 B+\sin^2 C\right)\le 8\prod\cos^2\frac{A}{2},$$

care rezultă din $\sin^2 B+\sin^2 C\le 2\cos^2\frac{A}{2}\Leftrightarrow\frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{1-\cos 2C}{2}\le 1+\cos A\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\cos 2B-\cos 2C\le 2\cos A\Leftrightarrow\cos A\cos\left(B-C\right)\le\cos A$,vezi $\cos A>0$ in acute ΔABC și

$\cos\left(B-C\right)\le 1$, cu egalitate pentru $B=C$.

Problema218.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4b^3+4c^3}}\le 2.$$

RMM8/2024, Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

Lema.

If $b,c>0$ then

$$\sqrt[3]{4b^3+4c^3}\ge b+c.$$

Demonstrație.

$$b^3+c^3\overset{Holder}{\ge}\frac{\left(b+c\right)^3}{4}\Rightarrow 4\left(b^3+c^3\right)\ge\left(b+c\right)^3\Rightarrow\sqrt[3]{4b^3+4c^3}\ge b+c.$$

$$LHS=\sum\frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4b^3+4c^3}}\overset{Lema}{\le}\sum\frac{b+c}{a+b+c}=2=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarca.

1).If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{b+c}{a+\sqrt[4]{8b^4+8c^4}}\le 2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $b,c>0$ then

$$\sqrt[4]{8b^4+8c^4}\geq b+c.$$

Demonstrație.

$$b^4+c^4\overset{Holder}{\geq}\frac{(b+c)^4}{2^3}\Rightarrow 8\left(b^4+c^4\right)\geq(b+c)^4\Rightarrow\sqrt[4]{8b^4+8c^4}\geq b+c.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$LHS=\sum\frac{b+c}{a+\sqrt[4]{8b^4+8c^4}}\overset{Lema}{\leq}\sum\frac{b+c}{a+b+c}=2=RHS$$, cu egalitate pentru $b=c$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

2). If $a,b,c>0$ and $n\in\mathbf{N},n\geq 2$ then

$$\sum\frac{b+c}{a+\sqrt[n]{2^{n-1}b^n+2^{n-1}c^n}}\leq 2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $b,c>0$ then

$$\sqrt[n]{2^{n-1}b^n+2^{n-1}c^n}\geq b+c.$$

Demonstrație.

$$b^n+c^n\overset{Holder}{\geq}\frac{(b+c)^n}{2^{n-1}}\Rightarrow 2^{n-1}\left(b^n+c^n\right)\geq(b+c)^n\Rightarrow\sqrt[n]{2^{n-1}b^n+2^{n-1}c^n}\geq b+c.$$

$$LHS=\sum\frac{b+c}{a+\sqrt[n]{2^{n-1}b^n+2^{n-1}c^n}}\overset{Lema}{\leq}\sum\frac{b+c}{a+b+c}=2=RHS$$, cu egalitate pentru $b=c$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Problema219.

If $a,b>0$, $a^2+b^2+a^2b^2=3$ then

$$a+b\le 2.$$

RMM8/2024, Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

$$a^2+b^2+a^2b^2=3\Leftrightarrow\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)=4\Rightarrow 2=\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)}=\sqrt{a^2+1}\sqrt{1+b^2}\overset{CBS}{\ge}a+b.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=1$.

Remarca.

If $a,b,\lambda>0$, $\lambda a^2+\lambda b^2+a^2b^2=3\lambda^2$ then

$$a+b\le 2\sqrt{\lambda}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\lambda a^2+\lambda b^2+a^2b^2=3\lambda^2\Leftrightarrow\left(a^2+\lambda\right)\left(b^2+\lambda\right)=4\lambda^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\lambda=\sqrt{\left(a^2+\lambda\right)\left(b^2+\lambda\right)}=\sqrt{a^2+\lambda}\sqrt{\lambda+b^2}\overset{CBS}{\ge}\sqrt{\lambda}\left(a+b\right)\Rightarrow a+b\le 2\sqrt{\lambda}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=\sqrt{\lambda}$.

Problema220.

In ΔABC

$$\sum\frac{1}{r_a\left(r_a+r_b\right)}\ge\frac{2}{3R^2}.$$

RMM 8/2024, Ertan Yildirim, Turkey

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{1}{r_a\left(r_a+r_b\right)}\overset{AM-GM}{\ge}3\sqrt[3]{\prod\frac{1}{r_a\left(r_a+r_b\right)}}=\frac{3}{\sqrt[3]{\prod r_a\prod\left(r_a+r_b\right)}}=\frac{3}{\sqrt[3]{rp^2\cdot 4Rp^2}}=$$

$$=\frac{3}{\sqrt[3]{4Rrp^4}}\overset{(1)}{\ge}\frac{2}{3R^2}=RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt[3]{4Rrp^4}} \geq \frac{2}{3R^2} \Leftrightarrow \frac{27}{4Rrp^4} \geq \frac{8}{27R^6} \Leftrightarrow 27^2 R^6 \geq 32Rrp^4 \overset{Mitrinovic}{\Leftrightarrow}$

$\overset{Mitrinovic}{\Leftrightarrow} 27^2 R^6 \geq 32Rr\left(\frac{27R^2}{4}\right)^2 \Leftrightarrow R^2 \geq 2Rr \Leftrightarrow R \geq 2r$,(Euler).

Am folosit mai sus $\prod r_a = rp^2$ și $\prod(r_a + r_b) = 4Rp^2$.

Remarca.

In ΔABC

$$1).\ \sum \frac{1}{h_a(h_a+h_b)} \geq \frac{1}{3Rr}.$$

$$2).\ \sum \frac{1}{m_a(m_a+m_b)} \geq \frac{4r}{3R^3}.$$

$$3).\ \sum \frac{1}{s_a(s_a+s_b)} \geq \frac{4r}{3R^3}.$$

$$4).\ \sum \frac{1}{w_a(w_a+w_b)} \geq \frac{4r}{3R^3}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema221

In ΔABC

$$\sum \frac{1}{r_a(r_a+r_b)} \geq \frac{2}{3R^2}.$$

RMM8/2024, Ertan Yildirim, Turkey

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{1}{r_a(r_a+r_b)} \overset{AM-GM}{\geq} 3\sqrt[3]{\prod \frac{1}{r_a(r_a+r_b)}} = \frac{3}{\sqrt[3]{\prod r_a \prod (r_a+r_b)}} = \frac{3}{\sqrt[3]{rp^2 \cdot 4Rp^2}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt[3]{4Rrp^4}} \overset{(1)}{\geq} \frac{2}{3R^2} = RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt[3]{4Rrp^4}} \geq \frac{2}{3R^2} \Leftrightarrow \frac{27}{4Rrp^4} \geq \frac{8}{27R^6} \Leftrightarrow 27^2 R^6 \geq 32Rrp^4 \overset{Mitrinovic}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{Mitrinovic}{\Leftrightarrow} 27^2 R^6 \geq 32Rr\left(\frac{27R^2}{4}\right)^2 \Leftrightarrow R^2 \geq 2Rr \Leftrightarrow R \geq 2r$$,(Euler).

Am folosit mai sus $\prod r_a = rp^2$ și $\prod(r_a + r_b) = 4Rp^2$.

Remarca.

In ΔABC

1). $$\sum \frac{1}{h_a(h_a+h_b)} \geq \frac{1}{3Rr}.$$

2). $$\sum \frac{1}{m_a(m_a+m_b)} \geq \frac{4r}{3R^3}.$$

3). $$\sum \frac{1}{s_a(s_a+s_b)} \geq \frac{4r}{3R^3}.$$

4). $$\sum \frac{1}{w_a(w_a+w_b)} \geq \frac{4r}{3R^3}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema222.

If $a,b>0$, $a+b=2$ then

$$\frac{1}{a^3+4}+\frac{1}{b^3+4} \leq \frac{2}{5}.$$

MathExam 8/2024

Soluție.

$$\frac{1}{a^3+4}+\frac{1}{b^3+4} \leq \frac{2}{5} \Leftrightarrow 2a^3b^3+3a^3+3b^3 \geq 8.$$

Punând $(a,b)=(1-t,1+t)$, inegalitatea $2a^3b^3+3a^3+3b^3 \geq 8$ se scrie:

$$2(1-t)^3(1+t)^3+3(1-t)^3+3(1+t)^3 \geq 8 \Leftrightarrow 2t^6+6t^4+12t^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2t^2(t^4+3t^2+6) \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=1$.

Remarca.

If $a,b>0$, $a+b=2$ and $\lambda \geq 2$ then

$$\frac{1}{a^3+\lambda}+\frac{1}{b^3+\lambda}\le\frac{2}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\frac{1}{a^3+\lambda}+\frac{1}{b^3+\lambda}\le\frac{2}{\lambda+1}\Leftrightarrow 2a^3b^3+(\lambda-1)a^3+(\lambda-1)b^3\ge 2\lambda.$$

Punând $(a,b)=(1-t,1+t)$, inegalitatea $2a^3b^3+(\lambda-1)a^3+(\lambda-1)b^3\ge 2\lambda$ se scrie:

$$2(1-t)^3(1+t)^3+(\lambda-1)(1-t)^3+(\lambda-1)(1+t)^3\ge 2\lambda\Leftrightarrow 2t^6+6t^4+(6\lambda-12)t^2\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2t^2\left[t^4+3t^2+3(\lambda-2)\right]\ge 0$$,vezi $\lambda\ge 2$,cu egalitate pentru $t=0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=1$.

Problema223.

If $x,y,z>0$, $x^2+y^2+z^2=3$ then

$$\frac{x^2+1}{y}+\frac{y^2+1}{z}+\frac{z^2+1}{x}-\frac{1}{x+y+z}\ge\frac{17}{3}.$$

RMM8/2024, Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$, $x^2+y^2+z^2=3$ then

$$\frac{x^2+1}{y}+\frac{y^2+1}{z}+\frac{z^2+1}{x}\ge 4+\frac{18}{(x+y+z)^2}.$$

Demonstrație.

$$\sum\frac{x^2+1}{y}\overset{SOS}{\ge}\sum\frac{2x}{y}=\sum\frac{2x^2}{xy}\overset{CS}{\ge}\frac{2\left(\sum x\right)^2}{\sum xy}=\frac{2\left(\sum x^2+2\sum xy\right)}{\sum xy}=\frac{2\left(3+2\sum xy\right)}{\sum xy}=$$

$$=\frac{6}{\sum xy}+4\overset{SOS}{\ge}\frac{6}{\frac{\left(\sum x\right)^2}{3}}+4=\frac{18}{\left(\sum x\right)^2}+4=4+\frac{18}{(x+y+z)^2}.$$

Folosind **Lema** este suficient să arătăm că:

$$4+\frac{18}{(x+y+z)^2}-\frac{1}{x+y+z}\geq\frac{17}{3}\overset{x+y+z=p}{\Leftrightarrow}4+\frac{18}{p^2}-\frac{1}{p}\geq\frac{17}{3}\Leftrightarrow 5p^2+3p-54\leq 0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (p-3)(5p+18)\leq 0 \Leftrightarrow p\leq 3$, vezi $p=\sum x\overset{CBS}{\leq}\sqrt{3\sum x^2}=\sqrt{3\cdot 3}=3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Remarca.

1). If $x,y,z>0$, $x^2+y^2+z^2=3$ and $\lambda\leq 6$ then

$$\frac{x^2+1}{y}+\frac{y^2+1}{z}+\frac{z^2+1}{x}+\frac{\lambda}{3}\geq 6+\frac{\lambda}{x+y+z}.$$

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$, $x^2+y^2+z^2=3$ then

$$\frac{x^2+1}{y}+\frac{y^2+1}{z}+\frac{z^2+1}{x}\geq 4+\frac{18}{(x+y+z)^2}.$$

Demonstrație.

$$\sum\frac{x^2+1}{y}\overset{SOS}{\geq}\sum\frac{2x}{y}=\sum\frac{2x^2}{xy}\overset{CS}{\geq}\frac{2\left(\sum x\right)^2}{\sum xy}=\frac{2\left(\sum x^2+2\sum xy\right)}{\sum xy}=\frac{2\left(3+2\sum xy\right)}{\sum xy}=$$

$$=\frac{6}{\sum xy}+4\overset{SOS}{\geq}\frac{6}{\frac{\left(\sum x\right)^2}{3}}+4=\frac{18}{\left(\sum x\right)^2}+4=4+\frac{18}{(x+y+z)^2}.$$

Folosind **Lema** este suficient să arătăm că:

$$4+\frac{18}{(x+y+z)^2}+\frac{\lambda}{3}\geq 6+\frac{\lambda}{x+y+z}\overset{x+y+z=p}{\Leftrightarrow}4+\frac{18}{p^2}+\frac{\lambda}{3}\geq 6+\frac{\lambda}{p}\Leftrightarrow(6-\lambda)p^2+3\lambda p-54\leq 0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (p-3)\left[(6-\lambda)p+18\right]\leq 0\Leftrightarrow p\leq 3$, vezi $p=\sum x\overset{CBS}{\leq}\sqrt{3\sum x^2}=\sqrt{3\cdot 3}=3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Remarca.

2).If $x,y,z>0$, $x^2+y^2+z^2=3$ then

$$\frac{x^2+1}{y}+\frac{y^2+1}{z}+\frac{z^2+1}{x}\geq 4+\frac{6}{x+y+z}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Punem $\lambda=6$ în 1).

Problema224.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$a^3+b^3+c^3+6\geq (a+b+c)^2.$$

RMM8/2024, Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$a^3+b^3+c^3\geq \frac{1}{4}(a+b+c)^3-\frac{15}{4}.$$

Demonstrație.

Folosim inegalitatea lui Schur: $a,b,c>0$,

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geq \sum ab(a+b) \Leftrightarrow 4\left(a^3+b^3+c^3\right)+15abc\geq (a+b+c)^3 \overset{abc=1}{\Leftrightarrow}$$

$$4\left(a^3+b^3+c^3\right)+15\geq (a+b+c)^3 \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3\geq \frac{1}{4}(a+b+c)^3-\frac{15}{4}.$$

Folosind **Lema** este suficient să arătăm că:

$$\frac{1}{4}(a+b+c)^3-\frac{15}{4}+6\geq (a+b+c)^2 \overset{a+b+c=p}{\Leftrightarrow} \frac{1}{4}p^3-\frac{15}{4}+6\geq p^2 \Leftrightarrow p^3-4p^2+9\geq 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (p-3)\left(p^2-p-3\right)\geq 0$, care rezultă din $p\geq 3$, vezi $p=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca.

1). If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $\lambda\leq \frac{57}{8}$ then

$$a^3+b^3+c^3+\lambda \geq \frac{\lambda+3}{9}(a+b+c)^2.$$

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$a^3+b^3+c^3 \geq \frac{1}{4}(a+b+c)^3-\frac{15}{4}.$$

Demonstrație.

Folosim inegalitatea lui Schur: $a,b,c>0$, $a^3+b^3+c^3+3abc \geq \sum ab(a+b) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4\left(a^3+b^3+c^3\right)+15abc \geq (a+b+c)^3 \overset{abc=1}{\Leftrightarrow}$$

$$4\left(a^3+b^3+c^3\right)+15 \geq (a+b+c)^3 \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3 \geq \frac{1}{4}(a+b+c)^3-\frac{15}{4}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** este suficient să arătăm că:

$$\frac{1}{4}(a+b+c)^3-\frac{15}{4}+\lambda \geq \frac{\lambda+3}{9}(a+b+c)^2 \overset{a+b+c=p}{\Leftrightarrow} \frac{1}{4}p^3-\frac{15}{4}+\lambda \geq \frac{\lambda+3}{9}p^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9p^3-4(\lambda+3)p^2+9(4\lambda-15) \geq 0 \Leftrightarrow (p-3)\left[9p^2+(15-4\lambda)p+3(15-4\lambda)\right] \geq 0,$$

care rezultă din $p \geq 3$, vezi $p=a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}=3$ și $\left[9p^2+(15-4\lambda)p+3(15-4\lambda)\right] \geq 0$,

vezi $p \geq 3$ și $\lambda \leq \frac{57}{8}$,

$$9p^2+(15-4\lambda)p+3(15-4\lambda)=p\left[9p+(15-4\lambda)\right]+3(15-4\lambda) \overset{p\geq 3}{\geq} 3\left[9\cdot 3+(15-4\lambda)\right]+3(15-4\lambda)=$$

$$=3(57-8\lambda) \overset{\lambda \leq \frac{57}{8}}{\geq} 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca.

2). If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$a^3+b^3+c^3+7 \geq \frac{10}{9}(a+b+c)^2.$$

Soluție.

Punem $\lambda = 7$ în 1).

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$8\left(a^3+b^3+c^3\right)+57\geq 9\left(a+b+c\right)^2.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Punem $\lambda = \frac{57}{8}$ în 1).

Problema225.

If $a,b>0$, $a+b=2$ then

$$\frac{1}{a^3+1}+\frac{1}{b^3+1}\geq 1.$$

MathAtelier 8/2024

Soluție.

$$\frac{1}{a^3+1}+\frac{1}{b^3+1}\geq 1 \Leftrightarrow a^3+b^3+2\geq\left(a^3+1\right)\left(b^3+1\right)\Leftrightarrow a^3+b^3+2\geq a^3b^3+a^3+b^3+1\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 1\geq a^3b^3 \Leftrightarrow ab\leq 1$, vezi $2=a+b\geq 2\sqrt{ab}\Rightarrow ab\leq 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=1$.

Remarca.

If $a,b>0$, $a+b=2$ and $0\leq\lambda\leq 1$ then

$$\frac{1}{a^3+\lambda}+\frac{1}{b^3+\lambda}\geq\frac{2}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\frac{1}{a^3+\lambda}+\frac{1}{b^3+\lambda}\geq\frac{2}{\lambda+1}\Leftrightarrow(\lambda+1)\left(a^3+b^3+2\lambda\right)\geq 2\left(a^3+\lambda\right)\left(b^3+\lambda\right)\Leftrightarrow$$
$$(1-\lambda)\left(a^3+b^3\right)+2\lambda\geq 2a^3b^3.$$

Deoarece $ab\leq 1$, vezi $2=a+b\geq 2\sqrt{ab}\Rightarrow ab\leq 1\Rightarrow 2a^3b^3\leq 2$, este suficient să arătăm că:

$(1-\lambda)(a^3+b^3)+2\lambda \geq 2 \Leftrightarrow (1-\lambda)(a^3+b^3) \geq 2(1-\lambda) \Leftrightarrow a^3+b^3 \geq 2$, care rezultă din

$a^3+b^3 \overset{Holder}{\geq} \frac{(a+b)^3}{4} = \frac{2^3}{4} = 2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=1$.

Problema226.

In ΔABC, AD, BE, CF -internal bisectors, R_1, R_2, R_3 -circumradius $\Delta AEF, \Delta BFD, \Delta CDE$, R - circumradius ΔABC, r -inradius in ΔABC.Prove that

$$R_1+R_2+R_3 \leq \frac{3R^2}{4r}.$$

Mathematical Inequalities8/2024,George Apostolopoulos, Greece

Soluție.

Folosind teorema sinusurilor în ΔAEF și ΔABC avem $\frac{EF}{\sin A} = 2R_1$ și $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a}{2R} = \frac{EF}{2R_1} \Rightarrow R_1 = \frac{R \cdot EF}{a}$.

Inegalitatea se scrie:

$\sum R_1 \leq \frac{3R^2}{4r} \Leftrightarrow \sum \frac{R \cdot EF}{a} \leq \frac{3R^2}{4r} \Leftrightarrow \sum \frac{EF}{a} \leq \frac{3R}{4r}$.

Lema.

In ΔABC, AD, BE, CF -internal bisectors

$$\sum \frac{EF^2}{BC^2} \leq \frac{3R}{8r}.$$

Soluție.

In ΔABC, AD, BE, CF -internal bisectors

$$\frac{EF^2}{BC^2} \leq \frac{b+c}{8a}.$$

Demonstrație.

Cu teorema bisectoarei în ΔABC avem $AE = \frac{bc}{a+c}, AF = \frac{bc}{a+b}$.

Folosind teorema cosinusului în ΔAEF obținem:

$$EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2AE \cdot AF \cdot \cos A = \left(\frac{bc}{a+c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a+b}\right)^2 - 2\frac{bc}{a+c} \cdot \frac{bc}{a+b} \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} =$$

$$= \frac{b^2c^2}{(a+c)^2} + \frac{b^2c^2}{(a+b)^2} - \frac{bc\left(b^2+c^2-a^2\right)}{(a+b)(a+c)} = \frac{b^2c^2}{(a+c)^2} + \frac{b^2c^2}{(a+b)^2} - \frac{bc\left[2bc+(b-c)^2-a^2\right]}{(a+b)(a+c)} =$$

$$= \frac{b^2c^2}{(a+c)^2} + \frac{b^2c^2}{(a+b)^2} - \frac{2b^2c^2}{(a+b)(a+c)} - \frac{bc(b-c)^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{a^2bc}{(a+b)(a+c)} =$$

$$= \underbrace{\frac{b^2c^2}{(a+c)^2} + \frac{b^2c^2}{(a+b)^2} - \frac{2b^2c^2}{(a+b)(a+c)}} - \frac{bc(b-c)^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{a^2bc}{(a+b)(a+c)} =$$

$$= b^2c^2\left(\frac{1}{a+c} - \frac{1}{a+b}\right)^2 - \frac{bc(b-c)^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{a^2bc}{(a+b)(a+c)} =$$

$$= \frac{b^2c^2(b-c)^2}{(a+b)^2(a+c)^2} - \frac{bc(b-c)^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{a^2bc}{(a+b)(a+c)} =$$

$$= \frac{bc(b-c)^2\left[bc-(a+b)(a+c)\right]}{(a+b)^2(a+c)^2} + \frac{a^2bc}{(a+b)(a+c)} =$$

$$= \frac{bc(b-c)^2\left(-a^2-ab-ac\right)}{(a+b)^2(a+c)^2} + \frac{a^2bc}{(a+b)(a+c)} = \frac{-abc(b-c)^2(a+b+c)}{(a+b)^2(a+c)^2} + \frac{a^2bc}{(a+b)(a+c)} \le$$

$$\le \frac{a^2bc}{(a+b)(a+c)}.$$

Obținem $EF^2 \le \frac{a^2bc}{(a+b)(a+c)} = \frac{a^2bc(b+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)} \overset{Cesaro}{\le} \frac{a^2bc(b+c)}{8abc} = \frac{a(b+c)}{8}$.

Rezultă $\frac{EF^2}{BC^2} \le \frac{\frac{a(b+c)}{8}}{a^2} = \frac{b+c}{8a} \Rightarrow \frac{EF^2}{BC^2} \le \frac{b+c}{8a}$.

Obținem

$$\sum \frac{EF^2}{BC^2} \le \frac{1}{8}\sum \frac{b+c}{a} = \frac{1}{8}\sum\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \overset{Bandila}{\le} \frac{1}{8}\sum \frac{R}{r} = \frac{1}{8} \cdot \frac{3R}{r} = \frac{3R}{8r}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

$$\sum \frac{EF}{a} \overset{CBS}{\leq} \sqrt{3\sum \frac{EF^2}{a^2}} \overset{Lema}{\leq} \sqrt{3\cdot \frac{3R}{8r}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{R}{2r}} \overset{Euler}{\leq} \frac{3R}{4r}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

In ΔABC, AD, BE, CF -internal bisectors, R_1, R_2, R_3 -circumradius $\Delta AEF, \Delta BFD, \Delta CDE$, R -circumradius ΔABC, r -inradius in ΔABC .Prove that

$$1).\ R_1 + R_2 + R_3 \leq \frac{3R}{2}\sqrt{\frac{R}{2r}}.$$

Soluție.

Folosind teorema sinusurilor în ΔAEF și ΔABC avem $\frac{EF}{\sin A} = 2R_1$ și $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a}{2R} = \frac{EF}{2R_1} \Rightarrow R_1 = \frac{R\cdot EF}{a}.$$

Lema.

In ΔABC, AD, BE, CF -internal bisectors

$$R_1 \leq \frac{R}{2}\sqrt{\frac{b+c}{2a}}.$$

$$2).\ R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 \leq \frac{3R^3}{8r}.$$

Soluție.

Folosind teorema sinusurilor în ΔAEF și ΔABC avem $\frac{EF}{\sin A} = 2R_1$ și $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a}{2R} = \frac{EF}{2R_1} \Rightarrow R_1 = \frac{R\cdot EF}{a}.$$

$$LHS = \sum R_1^2 = \sum \frac{R^2\cdot EF^2}{a^2} = R^2\sum \frac{EF^2}{a^2} \overset{Lema}{\leq} R^2\cdot \frac{3R}{8r} = \frac{3R^3}{8r} = RHS.$$

Lema.

In ΔABC, AD, BE, CF -internal bisectors

$$\sum \frac{EF^2}{BC^2} \le \frac{3R}{8r}.$$

Soluție.

In ΔABC, AD, BE, CF -internal bisectors

$$\frac{EF^2}{BC^2} \le \frac{b+c}{8a}.$$

Remarca.

$$3).\ R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 \le \frac{3R^3}{8r}.$$

Soluție.

Folosind teorema sinusurilor în ΔAEF și ΔABC avem $\frac{EF}{\sin A} = 2R_1$ și $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a}{2R} = \frac{EF}{2R_1} \Rightarrow R_1 = \frac{R \cdot EF}{a}.$$

Lema.

In ΔABC, AD, BE, CF -internal bisectors

$$R_1 \le \frac{R}{2}\sqrt{\frac{b+c}{2a}}.$$

$$\sum R_1R_2 \overset{Lema}{\le} \sum \frac{R}{2}\sqrt{\frac{b+c}{2a}} \cdot \frac{R}{2}\sqrt{\frac{c+a}{2b}} = \frac{R^2}{8}\sum\sqrt{\frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b}} = \frac{R^2}{8}\sqrt{\sum\frac{b+c}{a}\sum\frac{c+a}{b}} =$$

$$= \frac{R^2}{8}\sum\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \overset{Bandila}{\le} \frac{R^2}{8}\sum\frac{R}{r} = \frac{R^2}{8} \cdot \frac{3R}{r} = \frac{3R^3}{8r}.$$

$$4).\ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \ge \frac{6}{R}\sqrt{\frac{2r}{R}}$$

Soluție.

Lema

$$R_1 + R_2 + R_3 \le \frac{3R}{2}\sqrt{\frac{R}{2r}}.$$

Folosind teorema sinusurilor în ΔAEF și ΔABC avem $\frac{EF}{\sin A}=2R_1$ și $\frac{a}{\sin A}=2R \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a}{2R}=\frac{EF}{2R_1} \Rightarrow R_1=\frac{R\cdot EF}{a}.$$

Lema.

In ΔABC, AD, BE, CF -internal bisectors

$$R_1 \le \frac{R}{2}\sqrt{\frac{b+c}{2a}}.$$

$$LHS=\sum R_1 \overset{Lema}{\le} \sum \frac{R}{2}\sqrt{\frac{b+c}{2a}} \overset{CBS}{\le} \frac{R}{2}\sqrt{3\sum\frac{b+c}{2a}}=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\sum\frac{b+c}{a}}=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\sum\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)} \overset{Bandila}{\le}$$

$$\overset{Bandila}{\le} \frac{R}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\sum\frac{R}{r}}=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{3R}{r}}=\frac{3R}{2}\sqrt{\frac{R}{2r}} \overset{Euler}{\le} \frac{3R^2}{4r}=RHS.$$

$$LHS=\sum\frac{1}{R_1} \overset{CS}{\ge} \frac{9}{\sum R_1} \overset{Lema}{\ge} \frac{9}{\frac{3R}{2}\sqrt{\frac{R}{2r}}}=\frac{6}{R}\sqrt{\frac{2r}{R}}=RHS.$$

5). $$\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}+\frac{1}{R_3^2} \ge \frac{24r}{R^3}.$$

Soluție.

Lema.

$$R_1^2+R_2^2+R_3^2 \le \frac{3R^3}{8r}.$$

Folosind teorema sinusurilor în ΔAEF și ΔABC avem $\frac{EF}{\sin A}=2R_1$ și $\frac{a}{\sin A}=2R \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a}{2R}=\frac{EF}{2R_1} \Rightarrow R_1=\frac{R\cdot EF}{a}.$$

Obținem:

$$LHS=\sum R_1^2=\sum\frac{R^2\cdot EF^2}{a^2}=R^2\sum\frac{EF^2}{a^2} \overset{Lema}{\le} R^2\cdot\frac{3R}{8r}=\frac{3R^3}{8r}$$

Lema.

In ΔABC, AD, BE, CF -internal bisectors

$$\sum \frac{EF^2}{BC^2} \le \frac{3R}{8r}.$$

Soluție.

In ΔABC, AD, BE, CF -internal bisectors

$$\frac{EF^2}{BC^2} \le \frac{b+c}{8a}.$$

Demonstrație.

$$\sum \frac{EF^2}{BC^2} \le \frac{1}{8}\sum \frac{b+c}{a} = \frac{1}{8}\sum\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \overset{Bandila}{\le} \frac{1}{8}\sum \frac{R}{r} = \frac{1}{8}\cdot\frac{3R}{r} = \frac{3R}{8r}.$$

În final rezultă:

$$LHS = \sum \frac{1}{R_1^2} \overset{CS}{\ge} \frac{9}{\sum R_1^2} \overset{Lema}{\ge} \frac{9}{\frac{3R^3}{8r}} = \frac{24r}{R^3} = RHS.$$

6). $\dfrac{1}{R_1R_2} + \dfrac{1}{R_2R_3} + \dfrac{1}{R_3R_1} \ge \dfrac{24r}{R^3}$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

$$R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 \le \frac{3R^3}{8r}.$$

Folosind teorema sinusurilor în ΔAEF și ΔABC avem $\dfrac{EF}{\sin A} = 2R_1$ și $\dfrac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a}{2R} = \frac{EF}{2R_1} \Rightarrow R_1 = \frac{R\cdot EF}{a}.$$

In ΔABC, AD, BE, CF -internal bisectors

$$R_1 \le \frac{R}{2}\sqrt{\frac{b+c}{2a}}.$$

$$\sum R_1R_2 \overset{Lema}{\le} \sum \frac{R}{2}\sqrt{\frac{b+c}{2a}}\cdot\frac{R}{2}\sqrt{\frac{c+a}{2b}} = \frac{R^2}{8}\sum\sqrt{\frac{b+c}{a}\cdot\frac{c+a}{b}} = \frac{R^2}{8}\sqrt{\sum\frac{b+c}{a}\sum\frac{c+a}{b}} =$$

$$=\frac{R^2}{8}\sum\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\overset{Bandila}{\leq}\frac{R^2}{8}\sum\frac{R}{r}=\frac{R^2}{8}\cdot\frac{3R}{r}=\frac{3R^3}{8r}.$$

$$LHS=\sum\frac{1}{R_1R_2}\overset{CS}{\geq}\frac{9}{\sum R_1R_2}\overset{Lema}{\geq}\frac{9}{\frac{3R^3}{8r}}=\frac{24r}{R^3}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema227.

In ΔABC

$$\sum\frac{h_b+h_c}{b+c}\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

RMM8/2024, Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$\sum\frac{h_b+h_c}{b+c}=\frac{p}{R}.$$

$$LHS=\sum\frac{h_b+h_c}{b+c}=\frac{p}{R}\overset{Mitrinovic}{\leq}\frac{\frac{3\sqrt{3}R}{2}}{R}=\frac{3\sqrt{3}}{2}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

In ΔABC

$$1).\sum\frac{h_b+h_c}{b+c}\geq\frac{3\sqrt{3}r}{R}.$$

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$\sum\frac{h_b+h_c}{b+c}=\frac{p}{R}.$$

$$\sum\frac{h_b+h_c}{b+c}=\frac{p}{R}\overset{Mitrinovic}{\geq}\frac{3\sqrt{3}r}{R}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). $\frac{3\sqrt{3}r}{R}\leq\sum\frac{h_b+h_c}{b+c}\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

3). $\frac{p}{R}\leq\sum\frac{r_b+r_c}{b+c}\leq\frac{p}{2r}$.

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$\sum\frac{r_b+r_c}{b+c}=\frac{2p(3R+2r)}{p^2+r^2+2Rr}.$$

Inegalitatea din dreapta:

$$\sum\frac{r_b+r_c}{b+c}=\frac{2p(3R+2r)}{p^2+r^2+2Rr}\overset{Gerretsen}{\leq}\frac{2p(3R+2r)}{16Rr-5r^2+r^2+2Rr}=\frac{2p(3R+2r)}{18Rr-4r^2}=$$

$$=\frac{p(3R+2r)}{r(9R-2r)}\overset{Euler}{\leq}\frac{p}{r}\cdot\frac{1}{2}=\frac{p}{2r}.$$

Inegalitatea din stânga:

$$\sum\frac{r_b+r_c}{b+c}=\frac{2p(3R+2r)}{p^2+r^2+2Rr}\overset{Gerretsen}{\geq}\frac{2p(3R+2r)}{4R^2+4Rr+3r^2+r^2+2Rr}=\frac{2p(3R+2r)}{4R^2+6Rr+4r^2}=$$

$$=\frac{p(3R+2r)}{2R^2+3Rr+2r^2}\overset{Euler}{\geq}\frac{p}{R}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

4). $\sum\frac{h_b+h_c}{b+c}\leq\sum\frac{r_b+r_c}{b+c}$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

In ΔABC

$$\sum \frac{h_b + h_c}{b+c} = \frac{p}{R}.$$

Lema2.

In ΔABC

$$\sum \frac{r_b + r_c}{b+c} = \frac{2p(3R+2r)}{p^2+r^2+2Rr}.$$

Folosind **Lema** inegalitatea se scrie:

$\frac{p}{R} \le \frac{2p(3R+2r)}{p^2+r^2+2Rr} \Leftrightarrow p^2 \le 6R^2 + 2Rr - r^2$,vezi inegalitatea Gerretsen: $p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$4R^2 + 4Rr + 3r^2 \le 6R^2 + 2Rr - r^2 \Leftrightarrow R^2 - Rr - 2r^2 \ge 0 \Leftrightarrow (R-2r)(R+r) \ge 0$, $R \ge 2r$,(Euler)

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema228.

If $0 \le x \le 2$ then

$$\sqrt{2x} + \sqrt{4-2x} \ge 2(x-1)^2.$$

MathAtelier8/2024, Panagiotis Danousis, Greece

Soluție.

Folosim $\sqrt{a} + \sqrt{b} \ge \sqrt{a+b} \Leftrightarrow a+b+2\sqrt{ab} \ge a+b \Leftrightarrow \sqrt{ab} \ge 0$, cu egal pentru $a = 0$ sau $b = 0$.

$LHS = \sqrt{2x} + \sqrt{4-2x} \ge \sqrt{2x + (4-2x)} = 2 \overset{(1)}{\ge} 2(x-1)^2 = RHS$,

unde (1) $\Leftrightarrow 2 \ge 2(x-1)^2 \Leftrightarrow 1 \ge (x-1)^2 \Leftrightarrow 1 \ge x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le 2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = 0$ sau $x = 2$.

Remarca.

If $0 \le x \le \lambda$ and $0 < \lambda \le 2$ then

$$\sqrt{\lambda x} + \sqrt{\lambda^2 - \lambda x} \ge \lambda (x-1)^2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq\sqrt{a+b} \Leftrightarrow a+b+2\sqrt{ab}\geq a+b \Leftrightarrow \sqrt{ab}\geq 0$, cu egal pentru $a=0$ sau $b=0$.

$$LHS=\sqrt{\lambda x}+\sqrt{\lambda^2-\lambda x}\geq\sqrt{\lambda x+\left(\lambda^2-\lambda x\right)}=\lambda\overset{(1)}{\geq}\lambda(x-1)^2=RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \lambda\geq\lambda(x-1)^2 \Leftrightarrow 1\geq(x-1)^2 \Leftrightarrow 1\geq x^2-2x+1 \Leftrightarrow x^2-2x\leq 0 \Leftrightarrow 0\leq x\leq 2$.

Problema229.

In ΔABC cu $abc=1$

$$5\sum a\left(\sum bc-\sum a^2\right)+2\left(\sum a\right)^3\geq 54.$$

MathOlympiads8/2024, Nguyen Minh Tho, Vietnam

Soluție.

Cu ipoteza $abc=1$ inegalitatea se scrie echivalent: $5\sum a\left(\sum bc-\sum a^2\right)+2\left(\sum a\right)^3\geq 54abc$

Folosind $\sum a=2p$, $\sum bc=p^2+r^2+4Rr$, $\sum a^2=2\left(p^2-r^2-4Rr\right)$, $abc=4Rrp$,

inegalitatea se scrie:

$$5\cdot 2p\left(p^2+r^2+4Rr-2\left(p^2-r^2-4Rr\right)\right)+2(2p)^3\geq 54\cdot 4Rrp \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10p\left(-p^2+3r^2+12Rr\right)+16p^3\geq 216Rrp \Leftrightarrow 5\left(-p^2+3r^2+12Rr\right)+8p^2\geq 108Rr \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3p^2+15r(4R+r)\geq 108Rr \Leftrightarrow p^2+5r(4R+r)\geq 36Rr$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$16Rr-5r^2+5r(4R+r)\geq 36Rr \Leftrightarrow 36Rr\geq 36Rr$, adevărat.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă

1). In ΔABC cu $abc=1$ and $2n\leq 5\lambda$.

$$n\sum a\left(\sum bc-\sum a^2\right)+\lambda\left(\sum a\right)^3\geq 27\lambda.$$

Soluție.

Cu ipoteza $abc=1$ inegalitatea se scrie echivalent: $n\sum a\left(\sum bc-\sum a^2\right)+\lambda\left(\sum a\right)^3\geq 27\lambda abc$

Folosind $\sum a = 2p$, $\sum bc = p^2 + r^2 + 4Rr$, $\sum a^2 = 2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)$, $abc = 4Rrp$,

inegalitatea se scrie:

$$n \cdot 2p\left(p^2 + r^2 + 4Rr - 2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)\right) + \lambda(2p)^3 \geq 27\lambda \cdot 4Rrp \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2np\left(-p^2 + 3r^2 + 12Rr\right) + 8\lambda p^3 \geq 108\lambda Rrp \Leftrightarrow n\left(-p^2 + 3r^2 + 12Rr\right) + 4\lambda p^2 \geq 54\lambda Rr \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (4\lambda - n)p^2 + 3nr(4R + r) \geq 54\lambda Rr$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ și $(4\lambda - n) > 0$, adevărată din $2n \leq 5\lambda$.

Rămâne să arătăm că:

$(4\lambda - n)\left(16Rr - 5r^2\right) + 3nr(4R + r) \geq 54\lambda Rr \Leftrightarrow (5\lambda - 2n)(R - 2r) \geq 0$, vezi $R \geq 2r$, (Euler) și $2n \leq 5\lambda$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă

2) In ΔABC cu $abc = 1$ and $\lambda \leq \frac{5}{2}$.

$$\left(\sum a\right)^3 + \lambda \sum a\left(\sum bc - \sum a^2\right) \geq 27.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Cu ipoteza $abc = 1$ inegalitatea se scrie echivalent: $\left(\sum a\right)^3 + \lambda \sum a\left(\sum bc - \sum a^2\right) \geq 27abc$

Folosind $\sum a = 2p$, $\sum bc = p^2 + r^2 + 4Rr$, $\sum a^2 = 2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)$, $abc = 4Rrp$,

inegalitatea se scrie:

$$(2p)^3 + \lambda \cdot 2p\left(p^2 + r^2 + 4Rr - 2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)\right) \geq 108Rrp \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8p^3 + 2\lambda p\left(-p^2 + 3r^2 + 12Rr\right) \geq 108Rrp \Leftrightarrow 4p^2 + \lambda\left(-p^2 + 3r^2 + 12Rr\right) \geq 54Rr \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (4 - \lambda)p^2 + 3\lambda r(4R + r) \geq 54Rr$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ și $(4 - \lambda) > 0$, adevărată din $\lambda \leq \frac{5}{2}$.

Rămâne să arătăm că:

$(4-\lambda)(16Rr-5r^2)+3\lambda r(4R+r)\ge 54Rr \Leftrightarrow (5-2\lambda)(R-2r)\ge 0$,vezi $R\ge 2r$,(Euler) și

$\lambda \le \frac{5}{2}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema230.

If $a,b>0$, $a^2+b^2=8$ then

$$a^3+b^3\ge 4ab.$$

MathAtelier8/2024, Panagiotis Danousis, Greece

Soluție.

Notând $a+b=S, ab=P$ problema se reformulează.

If $S,P>0$, $S^2-2P=8$ then

$$S^3-3SP\ge 4P.$$

Demonstrație.

Înlocuind $P=\frac{S^2-8}{2}$ în $S^3-3SP\ge 4P$ obținem:

$$S^3-3S\cdot\frac{S^2-8}{2}\ge 4\cdot\frac{S^2-8}{2} \Leftrightarrow S^3+4S^2-24S-32\le 0 \Leftrightarrow (S-4)(S^2+8S+8)\le 0 \Leftrightarrow S\le 4,$$

care rezultă din $8=a^2+b^2\ge\frac{(a+b)^2}{2} \Rightarrow 16\ge (a+b)^2 \Rightarrow S\le 4$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=2$.

Remarca.

If $a,b,\lambda>0$, $a^2+b^2=2\lambda^2$ then

$$a^3+b^3\ge 2\lambda ab.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Notând $a+b=S, ab=P$ problema se reformulează.

If $S,P,\lambda>0$, $S^2-2P=2\lambda^2$ then

$$S^3-3SP\geq 2\lambda P.$$

Demonstrație.

Înlocuind $P=\frac{S^2-2\lambda^2}{2}$ în $S^3-3SP\geq 2\lambda P$ obținem:

$$S^3-3S\cdot\frac{S^2-2\lambda^2}{2}\geq 2\lambda\cdot\frac{S^2-2\lambda^2}{2}\Leftrightarrow S^3+2\lambda S^2-6\lambda^2 S-4\lambda^3\leq 0\Leftrightarrow$$

$(S-2\lambda)(S^2+4\lambda S+2\lambda^2)\leq 0\Leftrightarrow S\leq 2\lambda$, care rezultă din $2\lambda^2=a^2+b^2\overset{CS}{\geq}\frac{(a+b)^2}{2}\Rightarrow$

$4\lambda^2\geq(a+b)^2\Rightarrow S\leq 2\lambda$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=\lambda$.

Problema231.

In ΔABC

$$\sum\frac{\tan^6\frac{A}{2}}{\sin^2 A}\geq\frac{4}{27}.$$

Octogon 2022, Pirkulyev Rovsen, Azerbaijan

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{\tan^6\frac{A}{2}}{\sin^2 A}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum\tan\frac{A}{2}\right)^6}{3^4\sum\sin^2 A}\overset{(1)}{\geq}\frac{\left(\sqrt{3}\right)^6}{3^4\cdot\frac{9}{4}}=\frac{4}{27}=RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\sum\tan\frac{A}{2}\geq\sqrt{3}$, vezi $\sum\tan\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{p}\overset{Doucet}{\geq}\sqrt{3}$ și $\sum\sin^2 A\leq\frac{9}{4}$, vezi

$\sum\sin^2 A=\frac{p^2-r^2-4Rr}{2R^2}\overset{Gerretsen}{\leq}\frac{9}{4}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

In ΔABC

1). $$\sum\frac{\tan^{2n}\frac{A}{2}}{\sin^2 A}\geq\frac{4}{3^n},\ n\in\mathbf{N}.$$

Soluție.

Pentru $n=0$ avem $\sum \frac{1}{\sin^2 A} \ge 4$, vezi $\sum \frac{1}{\sin^2 A} = 4R^2 \sum \frac{1}{a^2} \overset{Steinig}{\ge} 4R^2 \cdot \frac{1}{2Rr} = \frac{2R}{r} \overset{Euler}{\ge} 4$.

Pentru $n \in \mathbf{N}^*$ folosom inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum \frac{\tan^{2n} \frac{A}{2}}{\sin^2 A} \overset{Holder}{\ge} \frac{\left(\sum \tan \frac{A}{2}\right)^{2n}}{3^{2n-2} \sum \sin^2 A} \overset{(1)}{\ge} \frac{\left(\sqrt{3}\right)^{2n}}{3^{2n-2} \cdot \frac{9}{4}} = \frac{4}{3^n} = RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \sum \tan \frac{A}{2} \ge \sqrt{3}$, vezi $\sum \tan \frac{A}{2} = \frac{4R+r}{p} \overset{Doucet}{\ge} \sqrt{3}$ și $\sum \sin^2 A \le \frac{9}{4}$, vezi $\sum \sin^2 A = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2R^2} \overset{Gerretsen}{\le} \frac{9}{4}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). $\sum \frac{\cot^{2n} \frac{A}{2}}{\sin^2 A} \ge 4 \cdot 3^n$, $n \in \mathbf{N}$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n=0$ avem $\sum \frac{1}{\sin^2 A} \ge 4$, vezi $\sum \frac{1}{\sin^2 A} = 4R^2 \sum \frac{1}{a^2} \overset{Steinig}{\ge} 4R^2 \cdot \frac{1}{2Rr} = \frac{2R}{r} \overset{Euler}{\ge} 4$.

Pentru $n \in \mathbf{N}^*$ folosom inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum \frac{\cot^{2n} \frac{A}{2}}{\sin^2 A} \overset{Holder}{\ge} \frac{\left(\sum \cot \frac{A}{2}\right)^{2n}}{3^{2n-2} \sum \sin^2 A} \overset{(1)}{\ge} \frac{\left(3\sqrt{3}\right)^{2n}}{3^{2n-2} \cdot \frac{9}{4}} = 4 \cdot 3^n = RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \sum \cot \frac{A}{2} \ge 3\sqrt{3}$, vezi $\sum \cot \frac{A}{2} = \frac{p}{r} \overset{Mitinovic}{\ge} 3\sqrt{3}$ și $\sum \sin^2 A \le \frac{9}{4}$, vezi $\sum \sin^2 A = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2R^2} \overset{Gerretsen}{\le} \frac{9}{4}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema232.

If $a,b,c > 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ then

$$\sum \frac{a^2}{1+2bc} \geq \frac{3}{5}.$$

Bosnia and Hercegovina 2002

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a^2}{1+2bc} = \sum \frac{a^4}{a^2+2a^2bc} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum\left(a^2+2a^2bc\right)} = \frac{1}{1+2abc\sum a} \overset{(1)}{\geq} \frac{3}{5} = RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{1+2abc\sum a} \geq \frac{3}{5} \Leftrightarrow 3abc\sum a \leq 1 \Leftrightarrow$, vezi $3(xy+yz+zx) \leq (x+y+z)^2$, pentru $(x,y,z)=(ab,bc,ca)$ și $\sum ab \leq \sum a^2 = 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Remarca.

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=1$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{a^2}{1+\lambda bc} \geq \frac{3}{\lambda+3}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $\lambda=0$ obținem egalitatea $1=1$.

În continuare fie $\lambda>0$.

$$LHS = \sum \frac{a^2}{1+\lambda bc} = \sum \frac{a^4}{a^2+\lambda a^2bc} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum\left(a^2+\lambda a^2bc\right)} = \frac{1}{1+\lambda abc\sum a} \overset{(1)}{\geq} \frac{3}{\lambda+3} = RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{1+\lambda abc\sum a} \geq \frac{\lambda}{\lambda+3} \Leftrightarrow 3abc\sum a \leq 1 \Leftrightarrow$, vezi $3(xy+yz+zx) \leq (x+y+z)^2$, pentru $(x,y,z)=(ab,bc,ca)$ și $\sum ab \leq \sum a^2 = 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Problema233.

If $0 \leq x \leq 1$ then

$$\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}+\sqrt{2x^2+1}\geq 5.$$

Mathematical Inequalities7/2024, Imad Zak, Lebanon

Soluție.

$LHS=\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}+\sqrt{2x^2+1}\overset{AM-GM}{\geq} 2\sqrt[4]{16-x^2}+\sqrt{2x^2+1}\overset{(1)}{\geq}5=RHS$,

unde(1) $\Leftrightarrow 2\sqrt[4]{16-x^2}+\sqrt{2x^2+1}\geq 5 \overset{x^2=t}{\Leftrightarrow} 2\sqrt[4]{16-t}+\sqrt{2t+1}\geq 5$.

$g(t)=2\sqrt[4]{16-t}+\sqrt{2t+1}, g'(t)=\dfrac{-1}{2\sqrt[4]{(16-t)^3}}+\dfrac{1}{\sqrt{2t+1}}>0, 0\leq t\leq 1 \Rightarrow g(t)\geq g(0)=5$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $t=0 \Leftrightarrow x=0$.

Soluție2.

$LHS=\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}+\sqrt{2x^2+1}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4+x}+\dfrac{1}{2}\sqrt{4+x}+\dfrac{1}{2}\sqrt{4-x}+\dfrac{1}{2}\sqrt{4-x}+\sqrt{2x^2+1}\overset{AM-GM}{\geq}$

$\overset{AM-GM}{\geq} 5\sqrt[5]{\dfrac{1}{2}\sqrt{4+x}\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{4+x}\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{4-x}\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{4-x}\cdot\sqrt{2x^2+1}}=5\sqrt[5]{\dfrac{1}{16}\left(16-x^2\right)\sqrt{2x^2+1}}\overset{(1)}{\geq}5$,

unde (1) $\Leftrightarrow 5\sqrt[5]{\dfrac{1}{16}\left(16-x^2\right)\sqrt{2x^2+1}}\geq 5 \Leftrightarrow \dfrac{1}{16}\left(16-x^2\right)\sqrt{2x^2+1}\geq 1 \Leftrightarrow$

$\left(16-x^2\right)\sqrt{2x^2+1}\geq 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(16-x^2\right)^2\left(2x^2+1\right)\geq 256 \Leftrightarrow 2x^6-63x^4+480x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2\left(2x^4-63x^2+480\right)\geq 0$,vezi

$0\leq x\leq 1, 2x^4-63x^2+480\overset{x\leq 1}{\geq} 2x^4-63\cdot 1^2+480=2x^4+417>0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=0$.

Remarca.

If $0\leq x\leq 1$ then

$$\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{2x^2+1}\geq 5.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{2x^2+1}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{8+x}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{8+x}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{8-x}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{2x^2+1}\overset{AM-GM}{\ge}$$

$$\overset{AM-GM}{\ge}5\sqrt[5]{\frac{1}{2}\sqrt[3]{8+x}\cdot\frac{1}{2}\sqrt[3]{8+x}\cdot\frac{1}{2}\sqrt[3]{8-x}\cdot\frac{1}{2}\sqrt[3]{8-x}\cdot\sqrt[3]{2x^2+1}}=5\sqrt[5]{\frac{1}{16}\sqrt[3]{\left(64-x^2\right)^2}\sqrt[3]{2x^2+1}}\overset{(1)}{\ge}5,$$

unde (1) $\Leftrightarrow 5\sqrt[5]{\frac{1}{16}\sqrt[3]{\left(64-x^2\right)^2}\sqrt[3]{2x^2+1}}\ge 5\Leftrightarrow \frac{1}{16}\sqrt[3]{\left(64-x^2\right)^2}\sqrt[3]{2x^2+1}\ge 1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{\left(64-x^2\right)^2}\sqrt[3]{2x^2+1}\ge 16\Leftrightarrow\left(64-x^2\right)^2\left(2x^2+1\right)\ge 16^3\Leftrightarrow\left(16-x^2\right)^2\left(2x^2+1\right)\ge 256\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2x^6-255x^4+8064x^2\ge 0\Leftrightarrow x^2\left(2x^4-255x^2+8064\right)\ge 0$, vezi $0\le x\le 1$,

$$2x^4-255x^2+8064\overset{x\le 1}{\ge}2x^4-255\cdot 1^2+8064=2x^4+7809>0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=0$.

Problema234.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{\sqrt{ab}}{a+b}+\frac{1}{16}\sum\frac{a+b}{c}\ge\frac{15}{8}.$$

THCS7/2024, Pham Van Tuyen, Vietnam

Soluție.

Avem $\sum\frac{\sqrt{ab}}{a+b}+\frac{1}{16}\sum\frac{a+b}{c}\ge\frac{15}{8}\Leftrightarrow\sum\frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}}+\frac{1}{16}\sum\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\ge\frac{15}{8}$.

Cu substituția $\left(x,y,z\right)=\left(\sqrt{\frac{a}{b}},\sqrt{\frac{b}{c}},\sqrt{\frac{c}{a}}\right)$, $xyz=1$ problema se reformulează:

If $x,y,z>0$, $xyz=1$ then

$$\sum\frac{1}{x+\frac{1}{x}}+\frac{1}{16}\sum\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\ge\frac{15}{8}.$$

Demonstrație.

$$\sum \frac{1}{x+\frac{1}{x}}+\frac{1}{16}\sum\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\geq\frac{15}{8}\Leftrightarrow\sum\left(\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{16}\frac{x^4+1}{x^2}-\frac{5}{8}\right)\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{16}\frac{x^4+1}{x^2}-\frac{5}{8}\geq 0\Leftrightarrow x^6-9x^4+16x^3-9x^2+1\geq 0\Leftrightarrow (x-1)^4\left(x^2+4x+1\right)\geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1\Leftrightarrow a=b=c$.

Remarca.

1). If $a,b,c>0$ and $\lambda\geq\frac{1}{4}$ then

$$\sum\frac{\sqrt{ab}}{a+b}+\lambda\sum\frac{a+b}{c}\geq\frac{3}{2}(4\lambda+1).$$

Soluție.

Avem $\sum\frac{\sqrt{ab}}{a+b}+\lambda\sum\frac{a+b}{c}\geq\frac{3}{2}(4\lambda+1)\Leftrightarrow\sum\frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}}+\lambda\sum\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq\frac{3}{2}(4\lambda+1)$.

Cu substituția $(x,y,z)=\left(\sqrt{\frac{a}{b}},\sqrt{\frac{b}{c}},\sqrt{\frac{c}{a}}\right)$, $xyz=1$ problema se reformulează:

If $x,y,z>0$, $xyz=1$ then

$$\sum\frac{1}{x+\frac{1}{x}}+\lambda\sum\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\geq\frac{3}{2}(4\lambda+1).$$

Demonstrație.

$$\sum\frac{1}{x+\frac{1}{x}}+\lambda\sum\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\geq\frac{3}{2}(4\lambda+1)\Leftrightarrow\sum\left(\frac{x}{x^2+1}+\lambda\frac{x^4+1}{x^2}-\frac{4\lambda+1}{2}\right)\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{x^2+1}+\lambda\frac{x^4+1}{x^2}-\frac{4\lambda+1}{2}\geq 0\Leftrightarrow 2\lambda x^6-(2\lambda+1)x^4+2x^3-(2\lambda+1)x^2+2\lambda\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(2\lambda x^4+4\lambda x^3+(4\lambda-1)x^2+4\lambda x+2\lambda\right)\geq 0,\text{ vezi } \lambda\geq\frac{1}{4}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1\Leftrightarrow a=b=c$.

Remarca.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{\sqrt{ab}}{a+b}+\frac{1}{4}\sum\frac{a+b}{c}\geq 3.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Punem $\lambda=\frac{1}{4}$ în 1).

Problema235.

In ΔABC

$$\sum\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\frac{r}{2R}\geq 1.$$

Pure Inequalities 7/2024, Nguyen Viet Hung, Vietnam

Soluție.

$$LHS=\sum\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\frac{r}{2R}\overset{(1)}{\geq}\sum\sin^2\frac{A}{2}+\frac{r}{2R}=1-\frac{r}{2R}+\frac{r}{2R}=1=RHS,$$

unde(1) $\Leftrightarrow$ $\sin\frac{A}{2}\leq\frac{a}{b+c}$ și $\sum\sin^2\frac{A}{2}=1-\frac{r}{2R}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă

In ΔABC

$$\textbf{1).}\ \sum\left(\frac{a}{b+c}\right)^4-\frac{r^2}{8R^2}\geq\frac{5}{32}.$$

Soluție.

$$LHS=\sum\left(\frac{a}{b+c}\right)^4-\frac{r^2}{8R^2}\overset{(1)}{\geq}\sum\sin^4\frac{A}{2}-\frac{r^2}{8R^2}\overset{(2)}{\geq}\frac{5}{32}+\frac{r^2}{8R^2}-\frac{r^2}{8R^2}=\frac{5}{32}=RHS,$$

unde(1) $\Leftrightarrow$ $\sin\frac{A}{2}\leq\frac{a}{b+c}$ și (2) $\Leftrightarrow\sum\sin^4\frac{A}{2}\geq\frac{5}{32}+\frac{r^2}{8R^2}$,vezi

$$\sum\sin^4\frac{A}{2}=1+\frac{r^2-p^2}{8R^2}\overset{Mitrinovic}{\geq}1+\frac{r^2-\frac{27R^2}{4}}{8R^2}=1+\frac{r^2}{8R^2}-\frac{27}{32}=\frac{5}{32}+\frac{r^2}{8R^2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$$\textbf{2).}\ \sum\left(\frac{a}{b+c}\right)^4+\left(\frac{r}{2R}\right)^2\ge\frac{1}{4}.$$

Soluție.

$$LHS=\sum\left(\frac{a}{b+c}\right)^4+\frac{r^2}{4R^2}\overset{(1)}{\ge}\sum\sin^4\frac{A}{2}+\frac{r^2}{4R^2}\overset{(2)}{\ge}\frac{1}{4}-\frac{r^2}{4R^2}+\frac{r^2}{4R^2}=\frac{1}{4}=RHS,$$

unde(1) $\Leftrightarrow\ \sin\frac{A}{2}\le\frac{a}{b+c}$ și (2) $\Leftrightarrow\ \sum\sin^4\frac{A}{2}\ge\frac{1}{4}-\frac{r^2}{4R^2}$,vezi

$$\sum\sin^4\frac{A}{2}=1+\frac{r^2-p^2}{8R^2}\overset{Gerretsen}{\ge}1+\frac{r^2-4R^2-4Rr-3r^2}{8R^2}=\frac{4R^2-4Rr-2r^2}{8R^2}=$$

$$=\frac{2R^2-2Rr-r^2}{4R^2}\overset{Euler}{\ge}\frac{R^2-r^2}{4R^2}=\frac{1}{4}-\frac{r^2}{4R^2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$$\textbf{3).}\ \sum\left(\frac{a}{b+c}\right)^n\ge3\left(\frac{r}{4R}\right)^{\frac{n}{3}}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\left(\frac{a}{b+c}\right)^n\overset{(1)}{\ge}\sum\left(\sin\frac{A}{2}\right)^n\overset{AM-GM}{\ge}3\sqrt[3]{\left(\prod\sin\frac{A}{2}\right)^n}=3\sqrt[3]{\left(\frac{r}{4R}\right)^n}=3\left(\frac{r}{4R}\right)^{\frac{n}{3}}=RHS,$$

unde(1) $\Leftrightarrow\ \sin\frac{A}{2}\le\frac{a}{b+c}$ și $\prod\sin\frac{A}{2}=\frac{r}{4R}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema236.

Solve the equation for real numbers

$$\frac{4(x+7)}{\sqrt{x-2}}+\frac{y+3}{\sqrt{y-1}}=28.$$

Math for change 7/2024, Amir Sofi, Kosovo

Soluție.

Lema.

Ecuația are sens pentru $x>2, y>1$.

$$LHS=\frac{4(x+7)}{\sqrt{x-2}}+\frac{y+3}{\sqrt{y-1}}=\frac{4(x-2+9)}{\sqrt{x-2}}+\frac{y-1+4}{\sqrt{y-1}}=\left(4\sqrt{x-2}+\frac{36}{\sqrt{x-2}}\right)+\left(\sqrt{y-1}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}\right)\overset{AM-GM}{\geq}$$

$$\overset{AM-GM}{\geq}2\sqrt{4\sqrt{x-2}\cdot\frac{36}{\sqrt{x-2}}}+2\sqrt{\sqrt{y-1}\cdot\frac{4}{\sqrt{y-1}}}=2\sqrt{144}+2\sqrt{4}=2\cdot 12+2\cdot 2=28=RHS,$$

cu egalitate pentru:

$$4\sqrt{x-2}=\frac{36}{\sqrt{x-2}} \text{ și } \sqrt{y-1}=\frac{4}{\sqrt{y-1}} \Leftrightarrow x-2=9 \text{ și } y-1=4 \Leftrightarrow x=11 \text{ și } y=5.$$

Soluția ecuației este $(x,y)=(11,5)$.

Remarca.

1). Let $a,b>0$ fixed. Solve the equation for real numbers

$$\frac{4(x+9-a)}{\sqrt{x-a}}+\frac{y+4-b}{\sqrt{y-b}}=28.$$

Soluție.

Lema.

Ecuația are sens pentru $x>a, y>b$.

$$LHS=\frac{4(x+9-a)}{\sqrt{x-a}}+\frac{y+4-b}{\sqrt{y-1b}}=\frac{4(x-a+9)}{\sqrt{x-a}}+\frac{y-b+4}{\sqrt{y-b}}=\left(4\sqrt{x-a}+\frac{36}{\sqrt{x-a}}\right)+\left(\sqrt{y-b}+\frac{4}{\sqrt{y-b}}\right)\overset{AM-GM}{\geq}$$

$$\overset{AM-GM}{\geq}2\sqrt{4\sqrt{x-a}\cdot\frac{36}{\sqrt{x-a}}}+2\sqrt{\sqrt{y-b}\cdot\frac{4}{\sqrt{y-b}}}=2\sqrt{144}+2\sqrt{4}=2\cdot 12+2\cdot 2=28=RHS,$$

cu egalitate pentru:

$$4\sqrt{x-a}=\frac{36}{\sqrt{x-a}} \text{ și } \sqrt{y-b}=\frac{4}{\sqrt{y-b}} \Leftrightarrow x-a=9 \text{ și } y-b=4 \Leftrightarrow x=a+9 \text{ și } y=b+4.$$

Soluția ecuației este $(x,y)=(a+9,b+4)$.

Remarca.

Cazul $a=1, b=2$

2). Solve the equation for real numbers

$$\frac{4(x+8)}{\sqrt{x-1}}+\frac{y+2}{\sqrt{y-2}}=28.$$

Soluția ecuației este $(x,y)=(10,6)$.

Remarca.

3). Let $a,b,\lambda,n,k>0$ fixed. Solve the equation for real numbers

$$\frac{\lambda^2\left(x+n^2-a\right)}{\sqrt{x-a}}+\frac{y+k^2-b}{\sqrt{y-b}}=2\left(\lambda^2 n+k\right).$$

Soluție.

Soluția ecuației este $(x,y)=\left(a+n^2,b+k^2\right)$.

Remarca.

Cazul $\lambda=3,n=2,k=3$.

4). Let $a,b>0$ fixed. Solve the equation for real numbers

$$\frac{9(x+4-a)}{\sqrt{x-a}}+\frac{y+9-b}{\sqrt{y-b}}=42.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluția ecuației este $(x,y)=(a+4,b+9)$.

Problema237.

Evaluate

$$I=\int_{-2}^{2}\frac{1}{\left(x^2+4\right)\left(3^x+1\right)}dx.$$

a) $I=\frac{\pi}{3}$; b) $I=0$; c) $I=\frac{\pi}{3}$; d) $I=\frac{\pi}{20}$; e) $I=\frac{\pi}{10}$; f) $I=\frac{\pi}{8}$;

Universitatea Politehnica București-2024

Soluție.

$$I=\int_{-2}^{2}\frac{1}{(x^2+4)(3^x+1)}dx=\int_{-2}^{0}\frac{1}{(x^2+4)(3^x+1)}dx+\int_{0}^{2}\frac{1}{(x^2+4)(3^x+1)}dx\overset{x=-t}{=}\int_{2}^{0}\frac{1}{(t^2+4)(3^{-t}+1)}d(-t)+$$

$$+\int_{0}^{2}\frac{dx}{(x^2+4)(3^x+1)}=\int_{0}^{2}\frac{3^x dx}{(x^2+4)(3^x+1)}+\int_{0}^{2}\frac{dx}{(x^2+4)(3^x+1)}=\int_{0}^{2}\frac{(3^x+1)dx}{(x^2+4)(3^x+1)}=$$

$$=\int_{0}^{2}\frac{dx}{x^2+4}=\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}\Big|_0^2=\frac{1}{2}(arctg1-arctg0)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{\pi}{8}.$$

Varianta corectă este f).

Remarca.

1).Let $a>0$ and $b>1$. Evaluate

$$I=\int_{-a}^{a}\frac{1}{(x^2+a^2)(b^x+1)}dx.$$

Soluție.

$$I=\int_{-a}^{a}\frac{1}{(x^2+a^2)(b^x+1)}dx=\int_{-a}^{0}\frac{1}{(x^2+a^2)(b^x+1)}dx+\int_{0}^{a}\frac{1}{(x^2+a^2)(b^x+1)}dx\overset{x=-t}{=}\int_{a}^{0}\frac{1}{(t^2+a^2)(b^{-t}+1)}d(-t)+$$

$$+\int_{0}^{a}\frac{dx}{(x^2+a^2)(b^x+1)}=\int_{0}^{a}\frac{b^x dx}{(x^2+a^2)(b^x+1)}+\int_{0}^{a}\frac{dx}{(x^2+a^2)(b^x+1)}=\int_{0}^{a}\frac{(b^x+1)dx}{(x^2+a^2)(b^x+1)}=$$

$$=\int_{0}^{a}\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}\Big|_0^a=\frac{1}{2}(arctg1-arctg0)=\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{\pi}{4a}.$$

Remarca.

2). Fie $a>1$. Calculați

$$\lim_{n\to\infty}n\int_{-n}^{n}\frac{1}{(x^2+n^2)(a^x+1)}dx.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$I=\int_{-n}^{n}\frac{1}{(x^2+n^2)(a^x+1)}dx\overset{x\to -x}{=}\int_{n}^{-n}\frac{1}{(x^2+n^2)(a^{-x}+1)}d(-x)=\int_{-n}^{n}\frac{1}{(x^2+n^2)(a^{-x}+1)}dx=$$

$$=\int_{-n}^{n}\frac{a^x}{(x^2+n^2)(a^x+1)}dx.$$

$$2I = I + I = \int_{-n}^{n} \frac{1}{(x^2+n^2)(a^x+1)}dx + \int_{-n}^{n} \frac{a^x}{(x^2+n^2)(a^x+1)}dx = \int_{-n}^{n} \frac{a^x+1}{(x^2+n^2)(a^x+1)}dx = \int_{-n}^{n} \frac{dx}{x^2+n^2} =$$

$$= \frac{1}{n} arctg \frac{x}{n}\Big|_{-n}^{n} = \frac{1}{n}\left(arctg1 - arctg(-1)\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{4} - \left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{2n}.$$

Din $2I = \frac{\pi}{2n} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4n}$.

Obținem $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_{-n}^{n} \frac{1}{(x^2+n^2)(a^x+1)}dx = \lim\limits_{n\to\infty} n\frac{\pi}{4n} = \frac{\pi}{4}$.

Problema238.

Solve the system equation

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12 \end{cases}.$$

RMM 7/2024, Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

Avem $3 = \sum \sqrt{x-1} \overset{CBS}{\leq} \sqrt{3\sum(x-1)} = \sqrt{3\left(\sum x - 3\right)} \overset{CS}{\leq} \sqrt{3\left(\sqrt{3\sum x^2} - 3\right)} = \sqrt{3\left(\sqrt{3\cdot 12} - 3\right)} = 3$, cu egalitate pentru $x = y = z = 2$.

Deducem că $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ este soluția unică a sistemului de ecuații.

Remarca.

1). Solve the system equation

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} + \sqrt{t-1} = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 16 \end{cases}.$$

Soluție.

Avem $4 = \sum \sqrt{x-1} \overset{CBS}{\leq} \sqrt{4\sum(x-1)} = \sqrt{4\left(\sum x - 4\right)} \overset{CS}{\leq} \sqrt{4\left(\sqrt{4\sum x^2} - 4\right)} = \sqrt{4\left(\sqrt{4\cdot 16} - 4\right)} = 4$, cu egalitate pentru $x = y = z = t = 2$.

Deducem că $(x, y, z, t) = (2, 2, 2, 2)$ este soluția unică a sistemului de ecuații.

Remarca.

2). Solve the system equation

$$\begin{cases}\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}+\sqrt{z-2}=3\\ x^2+y^2+z^2=27\end{cases}.$$

Deducem că $(x,y,z)=(3,3,3)$ este soluția unică a sistemului de ecuații.

Remarca.

3). Let $\lambda \geq 0$ fixed. Solve the system equation

$$\begin{cases}\sqrt{x-\lambda}+\sqrt{y-\lambda}+\sqrt{z-\lambda}=3\\ x^2+y^2+z^2=3(\lambda+1)^2\end{cases}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că $(x,y,z)=(\lambda,\lambda,\lambda)$ este soluția unică a sistemului de ecuații.

Problema239.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\sqrt{\frac{b+c}{5a+2b+2c}}\geq\sqrt{2}.$$

Mathematical Inequalities7/2024, Vasile Cartoaje, Ploiești

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Holder obținem:

$$\sum\sqrt{\frac{b+c}{5a+2b+2c}}\sum\sqrt{\frac{b+c}{5a+2b+2c}}\sum(b+c)^2(5a+2b+2c)\overset{Holder}{\geq}\left(\sum(b+c)\right)^3.$$

Rezultă: $\left(\sum\sqrt{\frac{b+c}{5a+2b+2c}}\right)^2\geq\frac{\left(2\sum a\right)^3}{\sum(b+c)^2(5a+2b+2c)}$.

Rămâne să arătăm că:

$$\frac{8\left(\sum a\right)^3}{\sum(b+c)^2(5a+2b+2c)}\geq 2\Leftrightarrow 4\left(\sum a\right)^3\geq\sum(b+c)^2(5a+2b+2c)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\left[\sum a^3+3\prod(b+c)\right]\geq\sum(b+c)^2(5a+2b+2c)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\left[\sum a^3+3\left(2abc+\sum bc(b+c)\right)\right]\geq 4\sum a^2+11\sum bc(b+c)+30abc \Leftrightarrow$$

$\sum bc(b+c)\geq 6abc$, care rezultă din AM-GM.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarca.

1). If $a,b,c>0$ and $2\lambda\geq 5n\geq 0$ then

$$\sum\sqrt{\frac{b+c}{\lambda a+nb+nc}}\geq 3\sqrt{\frac{2}{\lambda+2n}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Holder obținem:

$$\sum\sqrt{\frac{b+c}{\lambda a+nb+nc}}\sum\sqrt{\frac{b+c}{\lambda a+nb+nc}}\sum(b+c)^2(\lambda a+nb+nc)\overset{Holder}{\geq}\left(\sum(b+c)\right)^3.$$

Rezultă:

$$\left(\sum\sqrt{\frac{b+c}{\lambda a+nb+nc}}\right)^2\geq\frac{\left(2\sum a\right)^3}{\sum(b+c)^2(\lambda a+nb+nc)}.$$

Rămâne să arătăm că:

$$\frac{8\left(\sum a\right)^3}{\sum(b+c)^2(\lambda a+nb+nc)}\geq\frac{18}{\lambda+2n}\Leftrightarrow 4(\lambda+2n)\left(\sum a\right)^3\geq 9\sum(b+c)^2(\lambda a+nb+nc)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(\lambda+2n)\left[\sum a^3+3\prod(b+c)\right]\geq 9\sum(b+c)^2(\lambda a+nb+nc)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(\lambda+2n)\left[\sum a^3+3\left(2abc+\sum bc(b+c)\right)\right]\geq 9\left[2n\sum a^3+(\lambda+3n)\sum bc(b+c)+6\lambda abc\right]$$

$\Leftrightarrow 2(2\lambda-5n)\sum a^3+3(\lambda-n)\sum bc(b+c)\geq 6(5\lambda-8n)$, care rezultă din AM-GM și $2\lambda\geq 5n\geq 0$

.

Obținem:

$$2(2\lambda-5n)\sum a^3+3(\lambda-n)\sum bc(b+c)\geq 2(2\lambda-5n)\cdot 3abc+3(\lambda-n)\cdot 6abc=6(5\lambda-8n)abc.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarca.

2). If $a,b,c>0$ and $\lambda\geq\frac{5}{2}$ then

$$\sum\sqrt{\frac{b+c}{\lambda a+b+c}}\geq 3\sqrt{\frac{2}{\lambda+2}}.$$

Remarca.

3). If $a,b,c>0$ then

$$\sum\sqrt{\frac{b+c}{a}}\geq 3\sqrt{2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema240.

SP.554. Find:

$$\Omega=\int\frac{8x-1}{e^{8x}+7x}dx\,,\,x\in(0,\infty).$$

RMM- Number 37, Summer 2025, Daniel Sitaru, Romania

Solutie.

$$\Omega=\int\frac{8x-1}{e^{8x}+7x}dx=\int\left(\frac{8}{7}-\frac{1}{7}\cdot\frac{8e^{8x}+7}{e^{8x}+7x}\right)=\frac{8}{7}x-\frac{1}{7}\ln\left(e^{8x}+7x\right)+C.$$

Remarca.

If $m\in\mathbf{R},n\in(0,\infty)$ then find:

$$\Omega=\int\frac{mx-1}{e^{mx}+nx}dx.$$

Solutie.

$$\Omega=\int\frac{mx-1}{e^{mx}+nx}dx=\int\left(\frac{m}{n}-\frac{1}{n}\cdot\frac{me^{mx}+n}{e^{mx}+nx}\right)=\frac{m}{n}x-\frac{1}{n}\ln\left(e^{mx}+nx\right)+C.$$

Problema241.

SP.552. If $a>0,a\neq 1$ then find:

$$\Omega=\int_{-a}^{a}\log_a\left(\sqrt{a^2x^2+1}-ax\right)dx.$$

RMM- Number 37, Summer 2025, Daniel Sitaru, Romania

Solutie.

Functia $f:[-a,a]\to \mathbf{R}$, $f(x)=\log_a\left(\sqrt{a^2x^2+1}-ax\right)$ este impara, vezi:

$$f(x)+f(-x)=\log_a\left(\sqrt{a^2x^2+1}-ax\right)+\log_a\left(\sqrt{a^2x^2+1}+ax\right)=\log_a\left(\sqrt{a^2x^2+1}-ax\right)\left(\sqrt{a^2x^2+1}+ax\right)=$$
$$=\log_a\left(a^2x^2+1-a^2x^2\right)=\log_a 1=0.$$

Folosind faptul ca integrala pe un interval simetric dintr-o functie impara este nula deducem ca
$\Omega=\int_{-a}^{a}\log_a\left(\sqrt{a^2x^2+1}-ax\right)dx=0$.

Remarca.

If $a>0, a\neq 1$ then find:

$$\Omega=\int_{-a}^{a}\log_a\left(\sqrt{a^2x^2+1}+ax\right)dx.$$

Solutie.

Analog $\Omega=\int_{-a}^{a}\log_a\left(\sqrt{a^2x^2+1}+ax\right)dx=0$.

Problema242.

SP.555. Find:

$$\Omega=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\int_0^x\frac{dt}{t+e^t}-1\right).$$

RMM- Number 37, Summer 2025, Daniel Sitaru, Romania

Solutie.

$$\Omega=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\int_0^x\frac{dt}{t+e^t}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\frac{dt}{t+e^t}-x}{x^2}\underset{l`Hospital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+e^x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x-e^x}{2x\left(x+e^x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\left(x+e^x\right)}\lim_{x\to 0}\frac{1-x-e^x}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-x-e^x}{x}\underset{l`Hospital}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-1-e^x}{1}=\frac{1}{2}(-2)=-1.$$

Remarca.

Find:

$$\Omega=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\int_0^x\frac{dt}{\sin t+e^t}-1\right).$$

Marin Chirciu

Solutie.

$$\Omega=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\int_0^x\frac{dt}{\sin t+e^t}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\frac{dt}{\sin t+e^t}-x}{x^2}\underset{l`Hospital}{\overset{\binom{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x+e^x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin x-e^x}{2x\left(\sin x+e^x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\left(\sin x+e^x\right)}\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin x-e^x}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin x-e^x}{x}\underset{l`Hospital}{\overset{\binom{0}{0}}{=}}\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x-e^x}{1}=\frac{1}{2}(-2)=-1.$$

Problema243.

UP.545. Find

$$\Omega=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^5-3x^3}{3x^6-x^4-3x^2+1}dx.$$

RMM- Number 37, Summer 2025, Daniel Sitaru, Romania

Solutie.

Cu substitutia $x^2=t$ obtinem:

$$\Omega=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{t^2-3t}{3t^3-t^2-3t+1}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{t^2-3t}{(t-1)(t+1)(3t-1)}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}}\left(\frac{-\frac{1}{2}}{t-1}+\frac{-1}{3t-1}+\frac{-1}{t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{3}\ln|3t-1|-\ln|t+1|\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}}=\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln|t-1|+\frac{1}{3}\ln|3t-1|+\ln|t+1|\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{4}-1\right|+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3}{4}-1\right|+\ln\left|\frac{1}{4}+1\right|\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\ln\frac{1}{4}+\ln\frac{5}{4}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln 3-\ln 2-\frac{2}{3}\ln 2+\ln 5-2\ln 2\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln 3-\frac{11}{3}\ln 2+\ln 5\right)=$$

$$=\frac{11}{6}\ln 2-\frac{1}{4}\ln 3-\frac{1}{2}\ln 5.$$

Am descompus in fractii simple:

$$\frac{t^2-3t}{(t-1)(3t-1)(t+1)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{3t-1}+\frac{C}{t+1},\text{ cu } A=-\frac{1}{2}, B=-1, C=-1.$$

Problema244.

UP.548. Find

$$\Omega=\int_1^e \frac{1-\ln x}{x^2+\ln^2 x}dx.$$

RMM- Number 37, Summer 2025, Daniel Sitaru, Romania

Solutie.

$$\Omega=\int_1^e \frac{1-\ln x}{x^2+\ln^2 x}dx=\int_1^e \frac{\frac{1-\ln x}{\ln^2 x}}{\left(\frac{x}{\ln x}\right)^2+1}dx=\int_1^e \frac{-\left(\frac{x}{\ln x}\right)'}{\left(\frac{x}{\ln x}\right)^2+1}dx=-\arctan\frac{x}{\ln x}\Big|_1^e=$$

$$=-\left(\arctan\frac{e}{\ln e}-\arctan\frac{1}{\ln 1}\right)=-\left(\arctan e-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\arctan e.$$

Remarca.

Find

$$\Omega=\int_1^e \frac{1-\ln x}{x^2-\ln^2 x}dx.$$

Marin Chirciu

Solutie.

$$\Omega=\int_1^e \frac{1-\ln x}{x^2-\ln^2 x}dx=\int_1^e \frac{\frac{1-\ln x}{\ln^2 x}}{\left(\frac{x}{\ln x}\right)^2-1}dx=\int_1^e \frac{-\left(\frac{x}{\ln x}\right)'}{\left(\frac{x}{\ln x}\right)^2-1}dx=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{x}{\ln x}-1}{\frac{x}{\ln x}+1}\right|\Bigg|_1^e=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-\ln x}{x+\ln x}\right|\Bigg|_1^e=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-\ln x}{x+\ln x}\right|\Bigg|_1^e=-\frac{1}{2}\left(\ln\frac{e-\ln e}{e+\ln e}-\ln\frac{1-\ln 1}{1+\ln 1}\right)=-\frac{1}{2}\left(\ln\frac{e-1}{e+1}-\ln 1\right)=-\frac{1}{2}\ln\frac{e-1}{e+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{e+1}{e-1}.$$

Problema245.

If $a,b,c>1$ then

$$\sum \log_a \left(\frac{b^2}{c} - b + c \right) \geq 3.$$

Mathematical Inequalities 4/2024, Nguyen Viet Hung, Vietnam

Solutie.

Folosind $\frac{b^2}{c} - b + c \geq b \Leftrightarrow (b-c)^2 \geq 0$ obtinem:

$$LHS = \sum \log_a \left(\frac{b^2}{c} - b + c \right) \geq \sum \log_a b = \sum \frac{\lg b}{\lg a} \geq 3\sqrt[3]{\prod \frac{\lg b}{\lg a}} = 3 = RHS.$$

Egalitatea are loc daca si numai daca $a = b = c$.

Remarca.

If $a, b, c > 1$, $abc = \frac{3}{2}$ then

$$\sum \log_a \left(\frac{b^2}{c} - \frac{1}{2} b + c \right) \geq 12.$$

Marin Chirciu

Solutie.

Folosind $\frac{b^2}{c} - \frac{1}{2} b + c \geq \frac{3}{2} b \Leftrightarrow (b-c)^2 \geq 0$ obtinem:

$$LHS = \sum \log_a \left(\frac{b^2}{c} - \frac{1}{2} b + c \right) \geq \sum \log_a \left(\frac{3}{2} b \right) = \sum \log_a \left(\frac{3}{2} \cdot b \right) = \sum \log_a \frac{3}{2} + \sum \log_a b \geq$$

$$\geq 9 + 3 = 12 = RHS.$$

Am folosit mai sus:

$\sum \log_a \frac{3}{2} \geq 9$, vezi $\sum \log_a \frac{3}{2} \geq \frac{9}{\sum \log_{\frac{3}{2}} a} = \frac{9}{\log_{\frac{3}{2}} (abc)} = \frac{9}{\log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{2}} = \frac{9}{1} = 9$

$\sum \log_a b \geq 3$, vezi $\sum \log_a b = \sum \frac{\lg b}{\lg a} \geq 3\sqrt[3]{\prod \frac{\lg b}{\lg a}} = 3$.

Egalitatea are loc daca si numai daca $a = b = c = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

Problema246.

In ΔABC

$$\sum\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\cot A\geq 2.$$

RMM4/2024, Zaza Mzhavanadze, Georgia

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$\sum\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\cot A=2\left(\frac{R}{r}-1\right).$$

Demonstrație.

$$\sum\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\cot A=\sum\tan\frac{A}{2}\sum\cot A-\sum\tan\frac{A}{2}\cot A=\frac{4R+r}{p}\cdot\frac{p^2-r^2-4Rr}{2pr}-$$

$$-\frac{5p^2-(4R+r)^2}{2p^2}=2\left(\frac{R}{r}-1\right).$$

Am folosit mai sus:

$$\sum\tan\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{p},\sum\cot A=\frac{p^2-r^2-4Rr}{2pr},\sum\tan\frac{A}{2}\cot A=\frac{5p^2-(4R+r)^2}{2p^2}.$$

$$\sum\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\cot A=2\left(\frac{R}{r}-1\right)\overset{Euler}{\geq}2.$$

Egalitatea are loc daca si numai daca triunghiul este echilateral.

Remarca.

In ΔABC

1). $$\frac{2R-2r}{r}\leq\sum\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\cot A\leq\frac{R^2}{2r^2}.$$

Lema.

In ΔABC

$$\sum\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\cot A=2\left(\frac{R}{r}-1\right).$$

Inegalitatea din stanga.

$$\sum\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\cot A=2\left(\frac{R}{r}-1\right)\geq\frac{2R-2r}{r}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\cot A=2\left(\frac{R}{r}-1\right)\overset{Euler}{\leq}\frac{R^2}{2r^2}.$$

Egalitatea are loc daca si numai daca triunghiul este echilateral.

Remarca.

2). $6\leq\sum\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\cot A\leq\frac{3R}{r}.$

Lema.

In ΔABC

$$\sum\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\cot A=2\left(\frac{R}{r}+1\right).$$

Inegalitatea din stanga.

$$\sum\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\cot A=2\left(\frac{R}{r}+1\right)\overset{Euler}{\geq}6.$$

Egalitatea are loc daca si numai daca triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\cot A=2\left(\frac{R}{r}+1\right)\overset{Euler}{\leq}\frac{3R}{r}.$$

Egalitatea are loc daca si numai daca triunghiul este echilateral.

Remarca.

3). $3\sum\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\cot A\geq\sum\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\cot A.$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

In ΔABC

$$\sum\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\cot A=2\left(\frac{R}{r}-1\right).$$

Lema2.

In ΔABC

$$\sum\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\cot A=2\left(\frac{R}{r}+1\right).$$

Folosind **Lemele** de mai susinegalitatea se scrie:

$3\cdot 2\left(\frac{R}{r}-1\right)\geq 2\left(\frac{R}{r}+1\right)\Leftrightarrow R\geq 2r$,(Euler).

Egalitatea are loc daca si numai daca triunghiul este echilateral.

Problema247.

SP.547. If $x,y>1$ then

$$\ln x\ln y\left(\sqrt[3]{\log_x y}+\sqrt[3]{\log_y x}\right)^3\leq 2\ln^2(xy).$$

RMM- Number 37, Summer 2025, Daniel Sitaru, Romania

Solutie.

Cu substitutia $(a,b)=(\ln x,\ln y)$ inegalitatea se scrie: $ab\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^3\leq 2(a+b)^2$.

Notand $(a,b)=(u^3,v^3)$, inegalitatea de mai sus devine:

$$u^3v^3\left(\frac{u}{v}+\frac{v}{u}\right)^3\leq 2\left(u^3+v^3\right)^2\Leftrightarrow u^3v^3\left(\frac{u^3}{v^3}+3\frac{u}{v}+3\frac{v}{u}+\frac{v^3}{u^3}\right)\leq 2\left(u^6+2u^3v^3+v^6\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^6+3u^4v^2+3u^2v^4+v^6\leq 2u^6+4u^3v^3+2v^6\Leftrightarrow u^6-3u^4v^2+4u^3v^3-3u^2v^4+v^6\geq 0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (u-v)^2\left(u^4+2u^3v+2uv^3+v^4\right)\geq 0$, cu egal pentru $u=v\Leftrightarrow a=b\Leftrightarrow \ln x=\ln y\Leftrightarrow x=y$.

Remarca.

If $x,y>1$ then

$$\ln x \ln y\left(\sqrt[4]{\log_x y}+\sqrt[4]{\log_y x}\right)^4 \le 4\ln^2(xy).$$

Marin Chirciu

Solutie.

Cu substitutia $(a,b)=(\ln x,\ln y)$ inegalitatea se scrie: $ab\left(\sqrt[4]{\frac{a}{b}}+\sqrt[4]{\frac{b}{a}}\right)^4 \le 4(a+b)^2$.

Notand $(a,b)=(u^4,v^4)$, inegalitatea de mai sus devine:

$$u^4v^4\left(\frac{u}{v}+\frac{v}{u}\right)^4 \le 4\left(u^4+v^4\right)^2 \Leftrightarrow u^4v^4\left(\frac{u^4}{v^4}+4\frac{u^2}{v^2}+6+4\frac{v^2}{u^2}+\frac{v^4}{u^4}\right)\le 4\left(u^8+2u^4v^4+v^8\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^8+4u^6v^2+6u^4v^4+4u^2v^6+v^8 \le 4u^8+8u^4v^4+4v^8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3u^8-4u^6v^2+2u^4v^4-4u^2v^6+3v^8 \ge 0 \Leftrightarrow \left(u^2-v^2\right)^2\left(3u^4+2u^2v^2+3v^4\right)\ge 0,$$

cu egalitate pentru $u=v \Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow \ln x=\ln y \Leftrightarrow x=y$.

Problema248.

Prove that

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+2\right)\left(2x^2+1\right)}} \ge \frac{\pi}{6}.$$

Octogon2024, PP.41412, Mihaly Bencze, Brasov

Soluție.

Lema.

If $0\le x\le 1$ then

$$\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+2\right)\left(2x^2+1\right)}} \ge \frac{2}{3\left(x^2+1\right)}.$$

Demonstratie.

$\sqrt{\left(x^2+2\right)\left(2x^2+1\right)} \overset{AM-GM}{\le} \dfrac{\left(x^2+2\right)+\left(2x^2+1\right)}{2}=\dfrac{3}{2}\left(x^2+1\right)$, egal : $\left(x^2+2\right)=\left(2x^2+1\right) \Leftrightarrow x=1$.

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(x^2+2)(2x^2+1)}} \geq \frac{2}{3(x^2+1)}.$$

$$LHS = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x^2+2)(2x^2+1)}} \geq \int_0^1 \frac{2dx}{3(x^2+1)} = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{2}{3}\arctan x\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} = RHS.$$

Remarca.

If $\lambda \geq 0$ then

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x^2+\lambda)(\lambda x^2+1)}} \geq \frac{\pi}{2(\lambda+1)}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $0 \leq x \leq 1$ then

$$\frac{1}{\sqrt{(x^2+\lambda)(\lambda x^2+1)}} \geq \frac{2}{(\lambda+1)(x^2+1)}.$$

Demonstratie.

$\sqrt{(x^2+\lambda)(\lambda x^2+1)} \overset{AM-GM}{\leq} \dfrac{(x^2+\lambda)+(\lambda x^2+1)}{2} = \dfrac{\lambda+1}{2}(x^2+1)$, cu egalitate pentru $(x^2+\lambda)=(\lambda x^2+1) \Leftrightarrow x=1$ sau $\lambda=1$.

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(x^2+\lambda)(\lambda x^2+1)}} \geq \frac{2}{(\lambda+1)(x^2+1)}.$$

$$LHS = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x^2+\lambda)(\lambda x^2+1)}} \geq \int_0^1 \frac{2dx}{(\lambda+1)(x^2+1)} = \frac{2}{\lambda+1}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{2}{\lambda+1}\arctan x\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{\lambda+1}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2(\lambda+1)} = RHS.$$

Problema248.

Daca $ABCD$ este patrulater convex cu laturile de lungimi a,b,c,d atunci:

$$[ABCD] \le \frac{1}{16}(a+b+c+d)^2.$$

Mathematical Inequalities 3/2024, George Apostolopoulos, Greece

Soluție.

Daca $a = AB, b = BC, c = CA, d = DA$ atunci

$$[ABCD] = [ABC] + [ACD] = \frac{ab\sin B}{2} + \frac{cd\sin D}{2} \overset{\sin x \le 1}{\le} \frac{ab}{2} + \frac{cd}{2}$$, cu egal pentru $B = D = 90^\circ$.

Analog $[ABCD] = [BCD] + [ABD] = \frac{bc\sin C}{2} + \frac{ad\sin A}{2} \overset{\sin x \le 1}{\le} \frac{bc}{2} + \frac{ad}{2}$, egal: $A = C = 90^\circ$.

Adunand cele doua inegalitati obtinem:

$$2[ABCD] = [ABC] + [ACD] \le \frac{ab}{2} + \frac{cd}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{da}{2} \Rightarrow$$

$$4[ABCD] = [ABC] + [ACD] \le ab + bc + cd + da \overset{(1)}{\le} \frac{1}{4}(a+b+c+d)^2,$$

unde(1) $ab + bc + cd + da \le \frac{1}{4}(a+b+c+d)^2 \Leftrightarrow (a-b+c-d)^2 \ge 0$.

Egalitatea are loc daca si numai daca $ABCD$ este patrat.

Problema249.

If $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ is a convex function then in ΔABC holds:

$$\sum f\left(\frac{1}{r_a}\right) + 3f\left(\frac{1}{3r}\right) \ge 2\sum f\left(\frac{1}{h_a}\right).$$

Octogon, Mihaly Bencze, Brasov

Soluție.

Inegalitatea lui Popoviciu.

If $f : \mathbf{I} \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ is a convex function and $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{I}$ then

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + 3f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) \ge 2\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right) + f\left(\frac{x_3+x_1}{2}\right)\right].$$

Tiberiu Popoviciu Inequality

Sa trecem la rezolvarea problemei din enunt.

Se cunosc identitatile in triunghi $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$ si $\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{2}{h_a}$.

Aplicand inegalitatea lui Popoviciu pentru $(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{1}{r_a},\frac{1}{r_b},\frac{1}{r_c}\right)$ obtinem:

$$f\left(\frac{1}{r_a}\right)+f\left(\frac{1}{r_b}\right)+f\left(\frac{1}{r_c}\right)+3f\left(\frac{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}}{3}\right)\geq 2\sum f\left(\frac{\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{r_a}\right)+f\left(\frac{1}{r_b}\right)+f\left(\frac{1}{r_c}\right)+3f\left(\frac{\frac{1}{r}}{3}\right)\geq 2\sum f\left(\frac{\frac{2}{h_a}}{2}\right)\Leftrightarrow \sum f\left(\frac{1}{r_a}\right)+3f\left(\frac{1}{3r}\right)\geq 2\sum f\left(\frac{1}{h_a}\right).$$

Remarca.

1). Daca $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este o functie convexa si crescatoare pe $\mathbf{R}$ atunci in ΔABC avem:

$$\sum f\left(\frac{1}{r_a^2}\right)+3f\left(\frac{p^2-2r^2-8Rr}{3p^2r^2}\right)\geq 2\sum f\left(\frac{1}{h_a^2}\right).$$

Soluție.

Se cunosc identitatile in triunghi $\sum\frac{1}{r_a^2}=\frac{p^2-2r^2-8Rr}{p^2r^2}$ si $\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}\geq\frac{2}{h_a^2}$.

Aplicand inegalitatea lui Popoviciu pentru $(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{1}{r_a^2},\frac{1}{r_b^2},\frac{1}{r_c^2}\right)$ obtinem:

$$f\left(\frac{1}{r_a^2}\right)+f\left(\frac{1}{r_b^2}\right)+f\left(\frac{1}{r_c^2}\right)+3f\left(\frac{\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}}{3}\right)\geq 2\sum f\left(\frac{\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{r_a^2}\right)+f\left(\frac{1}{r_b^2}\right)+f\left(\frac{1}{r_c^2}\right)+3f\left(\frac{\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}}{3}\right)\geq 2\sum f\left(\frac{\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{r_a^2}\right)+f\left(\frac{1}{r_b^2}\right)+f\left(\frac{1}{r_c^2}\right)+3f\left(\frac{\frac{p^2-2r^2-8Rr}{p^2r^2}}{3}\right)\geq 2\sum f\left(\frac{\frac{2}{h_a^2}}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum f\left(\frac{1}{r_a^2}\right)+3f\left(\frac{p^2-2r^2-8Rr}{3p^2r^2}\right)\geq 2\sum f\left(\frac{1}{h_a^2}\right).$$

Remarca.

2). If $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ is a concave function then in ΔABC holds:

$$\sum f\left(\frac{1}{r_a}\right)+3f\left(\frac{1}{3r}\right)\leq 2\sum f\left(\frac{1}{h_a}\right).$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Se cunosc identitatile in triunghi $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$ si $\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{2}{h_a}$.

Aplicand inegalitatea lui Popoviciu pentru $(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{1}{r_a},\frac{1}{r_b},\frac{1}{r_c}\right)$ obtinem:

$$f\left(\frac{1}{r_a}\right)+f\left(\frac{1}{r_b}\right)+f\left(\frac{1}{r_c}\right)+3f\left(\frac{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}}{3}\right)\leq 2\sum f\left(\frac{\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{r_a}\right)+f\left(\frac{1}{r_b}\right)+f\left(\frac{1}{r_c}\right)+3f\left(\frac{\frac{1}{r}}{3}\right)\leq 2\sum f\left(\frac{\frac{2}{h_a}}{2}\right)\Leftrightarrow \sum f\left(\frac{1}{r_a}\right)+3f\left(\frac{1}{3r}\right)\leq 2\sum f\left(\frac{1}{h_a}\right).$$

Problema250.

If $A,B,C\in M_2(\mathbf{R})$, $\det A,\det B,\det C>0$ and $\det(ABC)=64$ then

$$\det(A+B+C)+\det(-A+B+C)+\det(A-B+C)+\det(A+B-C)\geq 48.$$

CruxMath Sep2023, B135, Daniel Sitaru

Soluție.

Lema

If $X, Y \in M_2(\mathbf{R})$,then

$$\det(X+Y)+\det(X-Y)=2\det X+2\det Y.$$

Folosind **Lema** $(X,Y)=(B+C,A)$ obținem:

$\det(A+B+C)+\det(-A+B+C)=2\det(B+C)+2\det A$,(1).

Folosind **Lema** $(X,Y)=(A,B-C)$ obținem:

$\det(A-B+C)+\det(A+B-C)=2\det A+2\det(B-C)$,(2).

Adunând (1) și (2) rezultă:

$LHS=\det(A+B+C)+\det(-A+B+C)+\det(A-B+C)+\det(A+B-C)=$

$=4\det A+2\det(B+C)+2\det(B-C)\overset{Lema}{=}4\det A+4\det B+4\det C=$

$=4(\det A+\det B+\det C)=4(x+y+z)\overset{AM-GM}{\geq}4\cdot 3\sqrt[3]{xyz}=12\sqrt[3]{\det A\det B\det C}=$

$=12\sqrt[3]{\det(ABC)}=12\sqrt[3]{64}=12\cdot 4=48=RHS$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $\det A=\det B=\det C=4$.

<u>**Remarca.**</u>

If $A,B,C \in M_2(\mathbf{R})$, $\det A, \det B, \det C>0$ and $\det(ABC)=\lambda^3$, $\lambda>0$ then

$$\det(A+B+C)+\det(-A+B+C)+\det(A-B+C)+\det(A+B-C)\geq 12\lambda.$$

Marin Chirciu

<u>**Soluție.**</u>

<u>**Lema**</u>

If $X, Y \in M_2(\mathbf{R})$,then

$$\det(X+Y)+\det(X-Y)=2\det X+2\det Y.$$

Folosind **Lema** $(X,Y)=(B+C,A)$ obținem:

$\det(A+B+C)+\det(-A+B+C)=2\det(B+C)+2\det A$,(1).

Folosind **Lema** $(X,Y)=(A,B-C)$ obținem:

$\det(A-B+C)+\det(A+B-C)=2\det A+2\det(B-C)$,(2).

Adunând (1) și (2) rezultă:

$LHS=\det(A+B+C)+\det(-A+B+C)+\det(A-B+C)+\det(A+B-C)=$

$=4\det A+2\det(B+C)+2\det(B-C)\overset{Lema}{=}4\det A+4\det B+4\det C=$

$=4(\det A+\det B+\det C)=4(x+y+z)\overset{AM-GM}{\geq}4\cdot 3\sqrt[3]{xyz}=12\sqrt[3]{\det A\det B\det C}=$

$=12\sqrt[3]{\det(ABC)}=12\sqrt[3]{\lambda^3}=12\cdot\lambda=RHS$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $\det A=\det B=\det C=\lambda$.

Problema251.

J633. Find the least positive integer n for which

$$n^4-2023n^2+1$$

is a product of two primes.

Mathematical Reflections, Nr.4/2023, Adrian Andreescu, Dallas, USA

Solution.

We have: $n^4-2023n^2+1=n^2(n^2-2023)+1$.

It is necessary that $(n^2-2023)\geq 0$, so $n\geq 45$.

For $n=45\Rightarrow n^2(n^2-2023)+1=45^2\cdot 2+1=2025\cdot 2+1=4051$=prime number,

it is not a solution.

For $n=46\Rightarrow n^2(n^2-2023)+1=46^2\cdot 93+1=2116\cdot 93+1=196789=47\cdot 53\cdot 79$,

it is not a solution.

...

For $n=54\Rightarrow$
$n^2(n^2-2023)+1=54^2\cdot(54^2-2023)93+1=2916\cdot 893+1=2603989=487\cdot 5347=p_1p_2$,

what is solution.

We deduce that the least positive integer n for which $n^4-2023n^2+1$ is a product of two primes is $n=54$ and in this case $n^4-2023n^2+1=487\cdot 5347$.

Remark.

1). Find the least positive integer n for which

$$n^4-2023n^2+1$$

is a product of three primes.

Solution.

We deduce that the least positive integer n for which $n^4-2023n^2+1$ is a product of three primes is $n=46$ and in this case $n^4-2023n^2+1=47\cdot 53\cdot 79$.

Remark.

2). Find the least positive integer n for which

$$n^4-2023n^2+1$$

is a prime number.

Solution.

We deduce that the least positive integer n for which $n^4-2023n^2+1$ is a prime number is $n=45$ and in this case $n^4-2023n^2+1=4051$.

Remark.

3). Find the least positive integer n for which

$$n^4-2024n^2+12$$

is a product of three primes.

Solution.

We deduce that the least positive integer n for which $n^4-2024n^2+12$ is a product of three primes is $n=45$ and in this case $n^4-2024n^2+12=3\cdot 7\cdot 97$.

Remark.

4). Find the least positive integer n for which

$$n^4-2024n^2+10$$

is a product of three primes.

Solution.

We deduce that the least positive integer n for which $n^4 - 2024n^2 + 10$ is a product of three primes is $n = 45$ and in this case $n^4 - 2024n^2 + 10 = 5 \cdot 11 \cdot 37$.

Remark.

5). Find the least positive integer n for which

$$n^4 - 2024n^2 + 6$$

is a product of three primes.

Solution.

We deduce that the least positive integer n for which $n^4 - 2024n^2 + 6$ is a product of two primes is $n = 45$ and in this case $n^4 - 2024n^2 + 6 = 3 \cdot 677$.

Remark.

6). Find the least positive integer n for which

$$n^4 - 2024n^2 + 2$$

is a prime number.

Solution.

We deduce that the least positive integer n for which $n^4 - 2024n^2 + 2$ is a prime number is $n = 45$ and in this case $n^4 - 2024n^2 + 2 = 2027$.

Remark.

7). Find the least positive integer n for which

$$n^4 - 2024n^2 + 14$$

is a prime number.

Solution.

We deduce that the least positive integer n for which $n^4 - 2024n^2 + 14$ is a prime number is $n = 45$ and in this case $n^4 - 2024n^2 + 2 = 2039$.

Remark.

8).Find the least positive integer n for which

$$n^4 - 2024n^2 + 16$$

is a product of three primes.

Solution.

We have: $n^4-2024n^2+16=n^2\left(n^2-2024\right)+16$.

We deduce that the least positive integer n for which $n^4-2024n^2+16$ is a product of two primes is $n=45$ and in this case $n^4-2024n^2+16=13\cdot 157$.

Remark.

9). Find the least positive integer n for which

$$n^4-2024n^2+1$$

is a product of three primes.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Solution.

We deduce that the least positive integer n for which $n^4-2024n^2+1$ is a product of two primes is $n=45$ and in this case $n^4-2024n^2+1=2\cdot 1013$.

Problema252.

If $x,y,z>0$, $xyz=1$

$$\sum\sqrt[3]{\frac{x}{y+7}}\geq\frac{3}{2}.$$

RMM 8/2024, Shirvan Tahirov, Azerbaijan

Soluție.

$$\sum\sqrt[3]{\frac{x}{y+7}}\sum\sqrt[3]{\frac{x}{y+7}}\sum\sqrt[3]{x(y+7)^2}\geq\left(\sum x\right)^3\Rightarrow\left(\sum\sqrt[3]{\frac{x}{y+7}}\right)^2\geq\frac{\left(\sum x\right)^3}{\sum\sqrt[3]{x(y+7)^2}}\overset{(1)}{\geq}\frac{9}{4},$$

unde (1) $\Leftrightarrow\dfrac{\left(\sum x\right)^3}{\sum\sqrt[3]{x(y+7)^2}}\geq\dfrac{9}{4}\Leftrightarrow 4\left(\sum x\right)^3\geq 9\sum\sqrt[3]{x(y+7)^2}$,

care rezultă din $\sum\sqrt[3]{x(y+7)^2}\leq\dfrac{5\sum x+21}{3}$,vezi

$$\sqrt[3]{x(y+7)^2}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{8x(y+7)(y+7)}\overset{AM-GM}{\leq}\frac{1}{2}\cdot\frac{8x+(y+7)+(y+7)}{3}=\frac{4x+y+7}{3}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum \sqrt[3]{x(y+7)^2} \le \sum \frac{4x+y+7}{3} = \frac{5\sum x+21}{3}$, cu egal pentru $8x=(y+7)$.

Rămâne să arătăm că:

$$4\left(\sum x\right)^3 \ge 9\cdot\frac{5\sum x+21}{3} \Leftrightarrow 4\left(\sum x\right)^3 \ge 3\left(5\sum x+21\right) \overset{p=\sum x}{\Leftrightarrow} 4p^3 \ge 3(5p+21) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 4p^3-15p-63\ge 0 \Leftrightarrow (p-3)(4p^2+12p+21)\ge 0 \Leftrightarrow p\ge 3$, vezi $p=\sum x \overset{AM-GM}{\ge} 3\sqrt[3]{xyz}=3$

.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Remarca.

If $x,y,z>0$, $xyz=1$

$$\text{1). } \sum \sqrt[3]{\frac{x}{y+26}} \ge 1.$$

$$\text{2). } \sum \sqrt[3]{\frac{x}{y+63}} \ge \frac{3}{4}.$$

$$\text{3). } \sum \sqrt[3]{\frac{x}{y+\lambda^3-1}} \ge \frac{3}{\lambda}, \lambda \ge 1.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$\sum \sqrt[3]{\frac{x}{y+\lambda^3-1}} \sum \sqrt[3]{\frac{x}{y+\lambda^3-1}} \sum \sqrt[3]{x\left(y+\lambda^3-1\right)^2} \ge \left(\sum x\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sum \sqrt[3]{\frac{x}{y+\lambda^3-1}}\right)^2 \ge \frac{\left(\sum x\right)^3}{\sum \sqrt[3]{x\left(y+\lambda^3-1\right)^2}} \overset{(1)}{\ge} \left(\frac{3}{\lambda}\right)^2,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{\left(\sum x\right)^3}{\sum \sqrt[3]{x\left(y+\lambda^3-1\right)^2}} \ge \frac{9}{\lambda^2} \Leftrightarrow \lambda^2\left(\sum x\right)^3 \ge 9\sum \sqrt[3]{x\left(y+\lambda^3-1\right)^2}$,

care rezultă din $\sum \sqrt[3]{x\left(y+\lambda^3-1\right)^2} \le \frac{32x+y+63}{6}$,vezi

$$\sqrt[3]{x\left(y+\lambda^3-1\right)^2}=\frac{1}{\lambda}\sqrt[3]{\lambda^3x\left(y+\lambda^3-1\right)\left(y+\lambda^3-1\right)}\overset{AM-GM}{\le}\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\lambda^3x+\left(y+\lambda^3-1\right)+\left(y+\lambda^3-1\right)}{3}=$$

$$=\frac{\lambda^3x+2y+2\lambda^3-2}{3\lambda}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum\sqrt[3]{\lambda^3x\left(y+\lambda^3-1\right)^2}\le\sum\frac{\lambda^3x+2y+2\lambda^3-2}{3\lambda}=\frac{\left(\lambda^3+2\right)\sum x+6\left(\lambda^3-1\right)}{3\lambda},$$

cu egalitate pentru $\lambda^3x=\left(y+\lambda^3-1\right)$.

Rămâne să arătăm că:

$$\lambda^2\left(\sum x\right)^3\ge 9\cdot\frac{\left(\lambda^3+2\right)\sum x+6\left(\lambda^3-1\right)}{3\lambda}\Leftrightarrow\lambda^3\left(\sum x\right)^3\ge 3\left(\lambda^3+2\right)\sum x+18\left(\lambda^3-1\right)\overset{p=\sum x}{\Leftrightarrow}$$

$$\lambda^3p^3\ge 3\left(\lambda^3+2\right)p+18\left(\lambda^3-1\right)\Leftrightarrow\lambda^3p^3-3\left(\lambda^3+2\right)p-18\left(\lambda^3-1\right)\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(p-3)\left(\lambda^3p^2+3\lambda^3p+6\lambda^3-6\right)\ge 0\Leftrightarrow p\ge 3$$, vezi $p=\sum x\overset{AM-GM}{\ge}3\sqrt[3]{xyz}=3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Problema253.

U470. Let n be a positive integer. Evaluate

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^n x\cdot\cos nx}{x^2}.$$

Mathematical Reflections 1/2019, Nguyen Viet Hung,Vietnam

Solution.

Notăm $\mathrm{L}_n=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^n x\cdot\cos nx}{x^2}$, unde $n\in\boldsymbol{N}^*$.

Obținem $L_1=1$, $L_2=3$.

$$\mathrm{L}_n=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^n x+\cos^n x-\cos^n x\cdot\cos nx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^n x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos^n x-\cos^n x\cdot\cos nx}{x^2}=A_n+B_n$$

Folosind regula lui Hospital sau limite remarcabile obținem:

$$A_n=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^n x}{x^2}=\frac{n}{2}$$ și

$$B_n=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^n x-\cos^n x\cdot\cos nx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^n x\left(1-\cos nx\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos nx}{x^2}=\frac{n^2}{2}.$$

Rezultă că $\mathrm{L}_n = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^n x\cdot\cos nx}{x^2} = \frac{n}{2}+\frac{n^2}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Problema254.

U500. Evaluate

$$\lim_{n\to\infty}\tan\pi\sqrt{4n^2+n}.$$

Mathematical Reflections 6/2019, Adrian Andreescu,USA

Soluție.

Because the tangent function has the main period π we have:

$$\lim_{n\to\infty}\tan\pi\sqrt{4n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\tan\pi\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right) = \tan\lim_{n\to\infty}\pi\left(\frac{4n^2+n-4n^2}{\sqrt{4n^2+n}+2n}\right) =$$
$$= \tan\lim_{n\to\infty}\pi\left(\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1.$$

Evaluate

$$1).\ \lim_{n\to\infty}\cot\pi\sqrt{4n^2+n}.$$

Soluție.

$$\lim_{n\to\infty}\cot\pi\sqrt{4n^2+n} = 1.$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty}\cos\pi\sqrt{4n^2+n}.$$

Soluție.

$$\lim_{n\to\infty}\cos\pi\sqrt{4n^2+n} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$3).\ \lim_{n\to\infty}\sin\pi\sqrt{4n^2+n}.$$

Soluție.

$$\lim_{n\to\infty}\sin\pi\sqrt{4n^2+n} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$4).\ \lim_{n\to\infty}\tan\pi\sqrt[3]{8n^3+n^2}.$$

Soluție.

$\lim\limits_{n\to\infty} \tan \pi\sqrt[3]{8n^3+n^2} = 2-\sqrt{3}$.

5). $\lim\limits_{n\to\infty} \cot \pi\sqrt[3]{8n^3+n^2}$.

Soluție.

$\lim\limits_{n\to\infty} \cot \pi\sqrt[3]{8n^3+n^2} = 2+\sqrt{3}$.

6). $\lim\limits_{n\to\infty} \cos \pi\sqrt[3]{8n^3+n^2}$.

Soluție.

$\lim\limits_{n\to\infty} \cos \pi\sqrt[3]{8n^3+n^2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

7). $\lim\limits_{n\to\infty} \sin \pi\sqrt[3]{8n^3+n^2}$.

Soluție.

$\lim\limits_{n\to\infty} \sin \pi\sqrt[3]{8n^3+n^2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

8). $\lim\limits_{n\to\infty} \cot \pi\sqrt{n^2+n}$.

Soluție.

$\lim\limits_{n\to\infty} \cot \pi\sqrt{n^2+n} = 0$.

9). $\lim\limits_{n\to\infty} \cot \pi\sqrt[3]{n^3+n^2}$.

Soluție.

$\lim\limits_{n\to\infty} \cot \pi\sqrt[3]{n^3+n^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

10). $\lim\limits_{n\to\infty} \tan \pi\sqrt[3]{n^3+n^2}$.

Soluție.

$$\lim_{n\to\infty} \tan \pi \sqrt[3]{n^3+n^2} = \sqrt{3}.$$

11). $\lim_{n\to\infty} \tan \pi \sqrt[k]{n^k+n^{k-1}}$, unde $k \in \mathbf{N}, k \geq 3$.

Soluție.

$$\lim_{n\to\infty} \tan \pi \sqrt[k]{n^k+n^{k-1}} = \tan \frac{\pi}{k}.$$

12). $\lim_{n\to\infty} \tan \pi \sqrt[k]{(2n)^k+n^{k-1}}$, unde $k \in \mathbf{N}, k \geq 2$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$\lim_{n\to\infty} \tan \pi \sqrt[k]{(2n)^k+n^{k-1}} == \tan \frac{\pi}{k \cdot 2^{k-1}}.$$

Bibliografie:

1. C.Năstăsescu, C.Niță, M.Brandiburu, D. Joița , Exerciții de algebră, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1992.
2. O. Bottema, R. Z. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović și P. M. Vasić, „Geometric Inequalities”, Groningen 1969, Olanda .
3. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.
4. Marin Chirciu, Inegalități cu linii importante în triunghi ,de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2018.
5. Marin Chirciu, Inegalități cu laturi și cu raze în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2017.
6. George Apostolopoulos, Greece , Mathematical Inequalites 8/2024.
7. Kostantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 8/2021.

14. Mehmet Șahin, Turkey, RMM 8/2024.

15.Ertan Yildirim, Turkey, RMM 8/2024.

16.Marian Ursărescu, Roman, RMM 8/2024.

15. Amir Sofi, Kosovo, Mathematics(College and High School) 8/2024.
16. Nguyen Hung Cuong,Vietnam, RMM 8/2024.
17. Pham Van Tuyen,Vietnam, THCS 7/2024.
18. Zaza Mzhavanadze, Georgia, RMM 4/2024.

19.Nguyen Minh Tho, Vietnam, Mathematical Inequalites 8/2024.

20.Pham Le Van, Vietnam, Mathematical Inequalites 8/2024.

21.Miguel Velaquez Culque, MathOlymp 8/2024.

22. Pu Tin Dao, Vietnam, THCS 8/2024.

23.Panagiotis Danousis, Greece, MathAtelier 8/2024.

24.Pirkulyev Rovsen, Azerbaijan, Octogon 2022.

25.Le Thu, Vietnam, Mathematical Inequalites 8/2024.

26. Imad Zak, Lebanon, Mathematical Inequalities 7/2024.

27.Vasile Cartoaje, Ploiești, Mathematical Inequalities 7/2024.

28.Mihaly Bencze, Brasov, Octogon , PP.41412.

29.Adrian Andreescu, Dallas, USA, Mathematical Reflections, Nr.4/2023.

30.Shirvan Tahirov, Azerbaijan, RMM 8/2024.

31.Elton Papanikola, MathOlymp 8/2024.

32.Daniel Sitaru, Romania, RMM- Number 37, Summer 2025.

33.Nguyen Viet Hung,Vietnam, Mathematical Reflections 1/2019.

34.Marin Chirciu, Inegalități algebrice 2, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2021.

35.Marin Chirciu, Inegalități geometrice 2, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2021.

Art 6000

1 Septembrie 2024