

WWW.MATEINFO.RO

REVISTA ELECTRONICA MATEINFO.RO

SEPTEMBRIE 2026

ISSN 2065 - 6432

REVISTĂ DIN FEBRUARIE 2009

COORDONATOR:
ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ȘI SUSȚINĂTORI
PERMANENȚI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU
MARIN CHIRCIU
ROXANA MIHAELA STANCIU

ARTICOLE

R.E.M.I. SEPTEMBRIE 2026

1. In Memoriam – Florian Luca (16.03.1969 -
28.07.2026)
pag. 2 -3

Prof. Neculai Stanciu

2. Dincolo de Poincaré, Newton și Cantor:
Anatomia conformismului și prețul absolutului în
matematică
pag. 4 - 10

Prof. Neculai Stanciu

3. Toamna Ruperei în Matematica Pură
Validarea Teoremei lui Fermat, Singularitatea
Navier-Stokes și Valul de Contestații Academice
(Septembrie 2026)
pag. 10 - 14

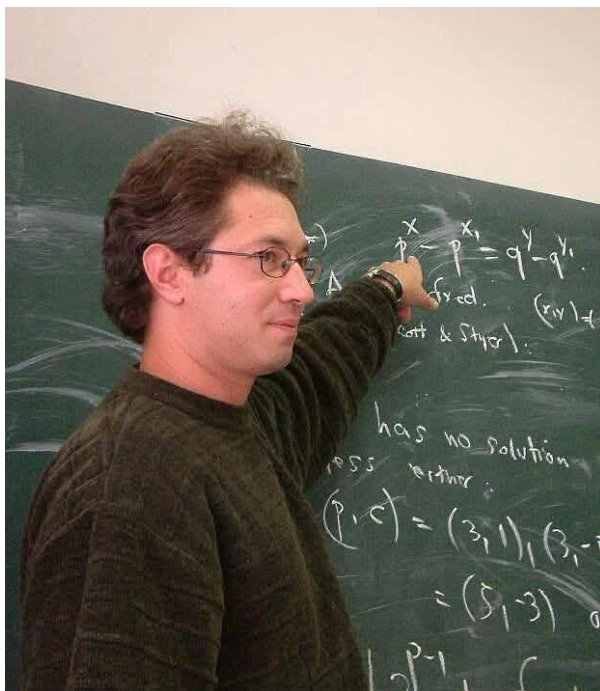
Prof. Neculai Stanciu

4. Math Journal -11-
pag. 15 - 152

Prof. Marin Chirciu

PUTEȚI TRIMITE ARTICOLE ÎN FORMAT WORD PE
REVISTA.MATEINFO@YAHOO.COM

1. In Memoriam – Florian Luca (16.03.1969 - 28.07.2026)



Un ultim omagiu din partea unui colaborator

de Neculai Stanciu

Vestea trecerii în neființă a profesorului *Florian Luca* aduce o tristețe profundă în sufletul meu și al întregii comunități matematice.

Pentru mine, *Florian* nu a fost doar un matematician genial de talie mondială, ci și un editor de o generozitate profesională rară, alături de care am împărtășit ani de zile pasiunea pentru provocările minții.

Ca autor orientat către secțiunea *Advanced Problems and Solutions* din cadrul *The Fibonacci Quarterly*, am avut privilegiul de a colabora strâns cu *Florian*. În spatele fiecărei probleme publicate, a fiecărei soluții șlefuite și a fiecărui schimb de idei, s-a aflat mereu ochiul său critic, dar profund încurajator.

Florian avea un dar unic: acela de a trata fiecare contribuție cu un respect imens și de a transforma rigoarea editorială într-un dialog cald, colegial și plin de entuziasm.

Colaborarea noastră în paginile revistei a fost pentru mine o constantă sursă de inspirație. Să știi că problemele tale trec prin mâinile unui titan al teoriei numerelor – un om cu peste 800 de lucrări și recunoscut de fundații precum Guggenheim sau Alexander von Humboldt – era o onoare, dar și o certitudine că matematica este lăsată pe mâini sigure.

Florian Luca lasă în urmă un gol imens, dar și o moștenire eternă. Pentru noi, cei care am dat viață paginilor de *Advanced Problems*, el va rămâne mereu editorul ideal, mentorul discret și prietenul de la distanță al fiecărei ecuații frumoase.

Gândurile mele de compasiune și condoleanțe se îndreaptă către familia sa îndurerată.

Odihnește-te în pace, *Florian*!

Îți mulțumesc pentru fiecare pagină de matematică parcursă împreună.

2. Dincolo de Poincaré, Newton și Cantor: Anatomia conformismului și prețul absolutului în matematică

de Neculai Stanciu

Abstract

This article explores the profound ethical and institutional implications of Grigori Perelman's resolution of the Poincaré Conjecture. By bypassing traditional peer-reviewed journals and uploading his groundbreaking work directly to arXiv, Perelman challenged the commercialized and bureaucratic structure of modern academia. His subsequent refusal of the Fields Medal and the Millennium Prize was not an act of eccentric madness, but a radical protest against intellectual conformism, institutional power plays, and a facade of meritocracy that values marketing over scientific truth. Twenty years later, Perelman's exile remains a powerful critique of the degradation of academic integrity.

Key words: Poincaré Conjecture, Grigori Perelman, Ricci flow, academic ethics, institutional conformism, arXiv, meritocracy.

INTRODUCERE: ÎN CĂUTAREA RIGORII PIERDUTE – ÎNTRE SCIENTOMETRIE ȘI ABSOLUTUL PLATONIC

Trăim într-o epocă în care cercetarea științifică, inclusiv cea matematică, tinde să își măsoare valoarea nu prin profunzimea ideilor sau prin capacitatea de a genera noi paradigme conceptuale, ci prin metrice administrative adesea sterile: indexul Hirsch, numărul de citări încrucișate în bule academice închise și volumul granturilor atrase. În spatele acestui paravan al unei „meritocrații” corporatizate se ascunde, din păcate, un conformism instituțional acut și o goană agresivă după branding personal și marketing ideologic. Matematica, cândva considerată cea mai pură formă de căutare a adevărului platonice, riscă să devină o anexă a imaginii instituționale.

În acest număr extins al revistei, aducem în atenția cititorilor noștri trei momente fundamentale din istoria și etica disciplinei noastre, care chestionează direct aceste mecanisme de putere. Analiza exilului autoimpus al lui Grigori Perelman nu este doar o cronică a rezolvării Conjecturii lui Poincaré, ci un manifest etic radical împotriva transformării științei într-un spectacol de circ mediatic. Perelman ne-a demonstrat că adevărul matematic brut nu are nevoie de medalii poleite sau de validarea aparatelor de PR ale marilor universități pentru a rămâne în picioare.

În completare, privim retrospectiv către alte două mari și dureroase axe ale istoriei noastre. Pe de o parte, disputa epistolară și politică dintre Isaac Newton și Gottfried Wilhelm Leibniz privind prioritatea inventării calculului diferențial și integral ne arată că, dincolo de formule și teoreme, comunitatea științifică a fost mereu traversată de orgolii naționale și interese de grup.

Pe de altă parte, destinul tragic al lui Georg Cantor ne amintește de prețul suprem plătit de cei care îndrăznesc să forțeze granițele logicii în fața unei inchiziții academice oarbe. Vă invităm, așadar, la o lectură reflexivă, o invitație de a privi dincolo de ecuații, direct către responsabilitatea morală a matematicianului în fața propriei conștiințe și a posterității.

I. GRIGORI PERELMAN ȘI REVOLTA ÎMPOTRIVA „GRĂDINII ZOOLOGICE” ACADEMICE

1. Ocolirea sistemului: arXiv versus Peer-Review corporatizat

În urmă cu două decenii, comunitatea matematică internațională asista la rezolvarea uneia dintre cele mai mari enigme din istoria topologiei și a geometriei: Conjectura lui Poincaré, formulată în 1904. Soluția nu a venit de la o catedră din Ivy League, ci de la un cercetător izolat din cadrul Institutului Steklov din Sankt Petersburg, Grigori Perelman.

Între noiembrie 2002 și iulie 2003, Grigori Perelman a publicat trei preprinturi pe serverul liber arXiv. Titlurile lor erau aproape de o modestie indusă în eroare, primul fiind „The Entropy Formula for the Ricci Flow and Its Geometric Applications”. Perelman nu a atacat doar Conjectura lui Poincaré ca pe un trofeu izolat, ci a demonstrat o teză mult mai amplă și mai profundă: Conjectura de Geometrizare a lui Thurston, care clasifică complet varietățile tridimensionale.

Gestul său de a nu trimite lucrările către reviste consacrate și cu tradiție, precum *Annals of Mathematics*, a reprezentat o palmă simbolică aplicată aparatului birocratic de validare pe care universitățile își bazează prestigiul și monopolul cunoașterii. Perelman a oferit matematica sa direct breslei, la liber, ocolind filtrele editoriale standard.

Refuzul său ulterior de a accepta Medalia Fields în 2006 și Premiul Mileniului în 2010 (în valoare de un milion de dolari, oferit de Clay Mathematics Institute) a fost rapid etichetat de mass-media generalistă drept o manifestare de excentricitate bizară sau chiar tulburare psihică. Presa internațională l-a portretizat ca pe o atracție exotică — o „mămuță la zoo”, un geniu inadapdat analizat nu pentru profunzimea geometriei sale, ci pentru aspectul fizic, unghiile netăiate sau stilul de viață modest alături de mama sa într-un bloc din Sankt Petersburg.

În spatele acestei retorici senzaționaliste se ascundea o strategie de decredibilizare a unui protest etic profund. Dacă îl transformi pe contestatar într-un „nebun”, mesajul său își pierde puterea de a contamina sistemul. Însă Perelman însuși a demascat această farsă cu o luciditate tăioasă:

„Nu sunt interesat de bani sau de faimă. Nu vreau să fiu expus ca un animal la zoo. Nu sunt un erou al matematicii.”

2. Războiul pentru prioritate și prăbușirea mitului meritocratic

Adevărata ruptură s-a produs în momentul în care mecanismele politice din interiorul comunității matematice au încercat să dilueze meritul descoperirii în favoarea unor interese de grup. Pentru a valida demonstrația lui Perelman, extrem de densă, eliptică în detalii computaționale și bazată pe o intuiție geometrică formidabilă, mai multe echipe de top au petrecut ani de zile scriind monografii explicative de sute de pagini.

În acest context, influentul laureat Fields Shing-Tung Yau, profesor la Harvard și figură centrală în matematica chineză și americană, a încercat o operațiune agresivă de acaparare a creditului științific. Yau a promovat intens o lucrare de peste 300 de pagini a discipolilor săi, Xi-Ping Cao și Huai-Dong Zhu, publicată în Asian Journal of Mathematics (revistă controlată direct de Yau). Titlul inițial al lucrării pretindea, cu o aroganță academică rară, „O demonstrație completă a Conjecturilor Poincaré și Thurston”. Yau a început să susțină public că Perelman oferise doar niște schițe intuitive și ghiduri parțiale, în timp ce adevărata rezolvare și asamblarea logică finală aparțineau echipei sale.

Investigația jurnalistică de răsunet publicată de Sylvia Nasar și David Gruber în revista The New Yorker („Manifold Destiny”, 2006) a expus aceste jocuri de culise sordide. Ilustrația din articol — Yau încercând să smulgă medalia de la gâtul lui Perelman — a devenit simbolul momentului în care politica academică și interesele naționale/instituționale au încercat să eclipseze geniul matematic brut.

Deși sub presiunea comunității internaționale titlul lucrării lui Cao și Zhu a fost modificat ulterior, iar prioritatea absolută a lui Perelman a fost recunoscută oficial, pentru matematicianul rus compromisul moral al breslei devenise deja de netolerat. Într-o discuție purtată în apartamentul său cu jurnaliștii americani, el explica miezul problemei:

„Nu pot spune că sunt revoltat. Alții fac lucruri și mai rele. Desigur, există mulți matematicieni care sunt mai mult sau mai puțin cinstiți. Dar aproape toți sunt conformiști. Sunt mai mult sau mai puțin cinstiți, dar îi tolerează pe cei care nu sunt cinstiți. Cel care suferă nu este cel care este izolat, ci știința însăși.”

3. Etica Fluxului Ricci: Matematica ca efort colectiv

Un alt aspect profund ignorat de criticii săi de atunci și de acum a fost solidaritatea profesională extraordinară a lui Perelman. El a explicat clar că refuzul Premiului Mileniului de un milion de dolari s-a bazat pe faptul că comisia Clay a ignorat contribuția fundamentală a matematicianului american Richard Hamilton.

Hamilton fusese cel care crease programul Ricci flow (fluxul Ricci), o ecuație diferențială cu derivate parțiale geometrică ce deformează metrica unei varietăți într-un mod similar cu ecuația căldurii. Hamilton intuise corect că acest flux poate fi folosit pentru a netezi neregularitățile unei varietăți 3D și pentru a o aduce la o formă geometrică standard. Totuși, el se blocase în

fața apariției unor „singularități” matematice (cum ar fi „gâturile” care se subțiază până la o curbă infinită), care opreau evoluția fluxului.

Perelman a preluat exact de unde se oprise Hamilton. Printr-o tehnică genială de chirurgie topologică, el a demonstrat cum aceste singularități pot fi decupate și izolate înainte de a produce o explozie a curburii, permițând fluxului Ricci să continue la infinit.

Pentru Perelman, matematica era un efort colectiv și transgenerațional. El a considerat profund imoral ca o singură persoană să primească lauri financiari și glorie din partea unui institut privat, în timp ce cel care pusese temelia întregii arhitecturi (Hamilton) era lăsat pe dinafară. Într-o lume a granturilor individualiste și a competiției acerbe pentru bugete, un astfel de gest de altruism principial a fost pur și simplu de neînțeles pentru birocrăția sistemului.

Cei care astăzi controlează ierarhiile din marile institute de cercetare și universități globale, reacționând virulent sau „opărit” la orice contestare a status quo-ului, sunt urmașii direcți ai conformiștilor descriși de Perelman în 2006. Ei apără o „meritocrație” de fațadă, un sistem de indicatori artificiali în care indexul Hirsch, numărul de citări încrucișate în bule academice închise și alinierea la directivele ideologice ale momentului contează infinit mai mult decât validitatea, riscul intelectual și originalitatea gândirii.

II. RĂZBOIUL FLUXIUNILOR: NEWTON, LEIBNIZ ȘI ARMA INSTITUȚIONALĂ

1. Două minți, două metode, un singur adevăr

Dacă cazul lui Grigori Perelman a scos la iveală patologiile modernității academice, istoria matematicii ne arată că jocurile de putere instituționale nu sunt un fenomen recent. La cumpăna secolelor al XVII-lea și al XVIII-lea, Europa științifică a fost zguduită de cel mai violent conflict de prioritate din istoria sa: disputa dintre Sir Isaac Newton și Gottfried Wilhelm Leibniz privind paternitatea calculului infinitesimal. Un război al ideilor care s-a transformat rapid într-o execuție publică academică, orchestrată de la cel mai înalt nivel instituțional.

Faptele istorice, filtrate prin distanța timpului, ne oferă o imagine clară a independenței descoperirii. Isaac Newton a dezvoltat metoda sa a „fluxiunilor” și „fluenților” în anii ciumei (1665–1666) la Woolsthorpe Manor. Însă, stăpânit de o frică patologică de critică și controverse publice, Newton a refuzat să își publice manuscrisele (precum *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*), preferând să le circule doar în format privat unui cerc restrâns de inițiați britanici.

Pe de altă parte, în anii 1670, Gottfried Wilhelm Leibniz, independent de Newton și animat de o viziune filosofică universală, a atacat aceeași problemă din perspectivă geometrică și logică. În 1684, Leibniz publică în *Acta Eruditorum* lucrarea sa fundamentală *Nova methodus pro maximis et minimis*, urmată în 1686 de fundamentarea calculului integral. Geniul lui Leibniz nu a constatat doar în descoperirea matematică în sine, ci și în crearea unui aparat simbolic

extraordinar de intuitiv: notațiile cu $\dot{x}$ și $\ddot{x}$ sunt utilizate neschimbate și astăzi datorită eleganței și eficienței lor operaționale. Notația lui Newton cu puncte deasupra variabilelor ($\dot{x}$) s-a dovedit a fi rigidă și greu aplicabilă dincolo de mecanica clasică.

2. Escaladarea geopolitică și Comisia Royal Society

Conflictul a izbucnit cu violență în momentul în care discipolii lui Newton (precum Fatio de Duillier în 1699 și John Keill în 1708) l-au acuzat deschis pe Leibniz de plagiat, sugerând că filosoful german ar fi văzut scrisorile private ale lui Newton (prin intermediul lui Henry Oldenburg) în timpul vizitelor sale la Londra și ar fi copiat metoda, schimbând doar notația.

Spre deosebire de Perelman, care a ales exilul și tăcerea, Leibniz a făcut greșeala de a apela la arbitrajul instituțional. El a cerut oficial Societății Regale din Londra (Royal Society) să investigheze acuzațiile calomnioase ale lui Keill. Ceea ce Leibniz nu realizase era că sistemul academic nu căuta adevărul obiectiv, ci protejarea propriilor piloni de putere. Președintele Societății Regale era nimeni altul decât Isaac Newton.

Newton a numit o comisie „imparțială”, formată exclusiv din susținătorii săi britanici. Mai mult, cercetările istorice moderne au demonstrat că raportul final al comisiei, celebrul *Commercium Epistolicum* din 1712, a fost redactat în secret chiar de mâna lui Newton. Raportul îl găsea pe Leibniz vinovat de plagiat ascuns și îi acorda lui Newton întregul credit. Monopolul instituțional fusese folosit ca o armă politică pentru a zdrobi reputația unui geniu continental.

Urmările acestui război al orgoliilor au fost dezastruoase pentru matematica britanică. Din loialitate oarbă și patriotism academic, matematicienii englezi au refuzat timp de mai bine de un secol să folosească notația „continentală” a lui Leibniz, rămânând blocați în notația inferioară a lui Newton. Acest lucru a izolat Marea Britanie de progresele uriașe făcute în analiză matematică de către dinastia Bernoulli, Euler sau Lagrange.

III. PARADISUL DINCOLO DE AZIL: GEORG CANTOR ȘI PREȚUL TRANSFINITEI

1. Sfidarea infinitului actual

Dacă Perelman a ales retragerea voluntară și Newton a ales utilizarea forței instituționale, destinul lui Georg Cantor (1845–1918) reprezintă cea mai răscolitoare parabolă despre prețul pe care o minte vizionară îl plătește atunci când este strivită de aparatul dogmatic al contemporanilor săi.

Până la Cantor, comunitatea academică evitase cu strictețe infinitul actual. Ghidați de dictonul lui Aristotel și de prudența lui Carl Friedrich Gauss, matematicienii acceptau doar infinitul „potențial”. Infinitul actual era considerat un teritoriu exclusiv al teologiei, o sferă interzisă minții umane.

În 1874, profesor la modesta Universitate din Halle, Cantor publică un articol care avea să schimbe definitiv totul. Folosind o logică de o simplitate devastatoare — bazată pe corespondența bijectivă — el demonstrează un adevăr de-a dreptul șocant: infinitul are dimensiuni diferite. Prin celebrul său argument diagonal, Cantor arată că mulțimea numerelor reale este mult „mai mare” și nenumărabilă în raport cu cea a numerelor naturale ($\aleph_0$). Descoperirea unui „infini de infinituri” (cardinalele transfinite) a creat un peisaj structurat din punct de vedere matematic, dar a aruncat establishmentul academic într-o stare de revoltă profundă.

2. Inchiziția academică: Leopold Kronecker și linșajul instituțional

Opoziția nu a fost o simplă dezbatere academică politicoasă, ci a îmbrăcat forma unui atac sistematic la persoană. Cel mai feroce contestatar a fost fostul său profesor de la Berlin, puternicul și influentul Leopold Kronecker. Adept rigid al constructivismului matematic, faimos pentru dictonul său: „Dumnezeu a creat numerele întregi, restul este opera omului”, Kronecker a considerat teoriile lui Cantor o erezie.

Kronecker a folosit întreaga sa influență instituțională pentru a-l distruge pe Cantor: a întârziat deliberat publicarea lucrărilor în renumitul jurnal Crelle, a blocat sistematic orice tentativă a lui Cantor de a obține o catedră prestigioasă la Universitatea din Berlin, condamnându-l la un exil academic perpetuu în Halle și l-a numit public „șarlatan științific”, „renegat” și „corupător al tineretului”.

Fără protecția unui mediu universitar deschis, Cantor s-a simțit profund abandonat. Respingerea violentă a muncii sale, dublată de eforturile istovitoare de a demonstra Ipoteza Continuuului (pe care nu a reușit să o rezolve, fiind dovedită ulterior ca indecidabilă), i-au zdruncinat iremediabil echilibrul psihic.

Începând cu anul 1884, Cantor suferă prima dintr-o serie lungă de căderi nervoase severe. Mathefobia colegilor săi l-a împins spre episoade de depresie clinică profundă. În perioadele lungi petrecute în sanatoriul de boli psihice din Halle, geniul care structurase infinitul s-a refugiat în studii literare obsesive. Ironia tragică a sorții face ca recunoașterea internațională să vină abia spre sfârșitul vieții, când mintea sa era deja prea obosită pentru a se mai bucura de ea. În timp ce Cantor trăia ultimii ani în sărăcie lucie, David Hilbert a oferit reabilitarea supremă în fața detractorilor breslei:

„Nimeni nu ne va izgoni din paradisul pe care Cantor l-a creat pentru noi.”

Georg Cantor a murit singur, în urma unui atac de cord, într-un azil de boli mintale în ianuarie 1918.

CONCLUZIE GENERALĂ: O LECȚIE PENTRU VIITORUL DISCIPLINEI

Cazurile Newton-Leibniz, Cantor și Perelman, privite ca un tot unitar de-a lungul secolelor, ne demonstrează o constantă amară a istoriei: ori de câte ori știința devine un instrument al orgoliilor personale, naționale, corporative sau birocratice, obiectivitatea și puritatea sunt primele sacrificate.

Sistemul academic l-a vânat pe Leibniz prin comisii politice manipulate, l-a etichetat pe Cantor drept nebun pentru a-i neutraliza teoriile transfinite și l-a portretizat pe Perelman drept „maimuța de la zoo” pentru a-i devaloriza refuzul etic radical. Însă, de fiecare dată, timpul a decantat zgomotul administrativ de adevărul matematic pur.

Grigori Perelman a demonstrat ceva extrem de periculos pentru status quo: a demonstrat că un matematician poate atinge absolutul și poate rezolva o problemă seculară de unul singur, într-o cameră goală, fără validarea aparatului de PR al universităților de top. Exilul său autoimpus, tratat în oglindă cu prăbușirea lui Cantor sau cu manipulările lui Newton, ne reamintește că paradisurile intelectuale nu sunt construite de comitete administrative sau indicatori de citare, ci de acele minți curajoase care aleg fidelitatea față de adevăr în detrimentul conformismului de grup.

BIBLIOGRAFIE

1. **Perelman, Grigori (2002)**, *The Entropy Formula for the Ricci Flow and Its Geometric Applications*, preprint arXiv:math/0211159.
2. **Perelman, Grigori (2003)**, *Ricci Flow with Surgery on Three-Manifolds*, preprint arXiv:math/0303109.
3. **Newton, Isaac (1704)**, *Opticks*, Appended: De Quadratione Curvarum (Metoda Fluxiunilor).
4. **Leibniz, Gottfried Wilhelm (1684)**, *Nova methodus pro maximis et minimis*, Acta Eruditorum.
5. **Cantor, Georg (1874)**, *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, Crelle's Journal, 77, 258-262.
6. **Nasar, Sylvia; Gruber, David (2006)**, „*Manifold Destiny: A legendary problem and the battle over who solved it*”, The New Yorker, issue of August 28, 2006.
7. **Hall, A. Rupert (1980)**, *Philosophers at War: The Quarrel Between Newton and Leibniz*, Cambridge University Press.
8. **Dauben, Joseph W.? (1979)**, *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton University Press.
9. **Clay Mathematics Institute (2010)** „*Prize for Resolution of the Poincaré Conjecture Awarded to Dr. Grigoriy Perelman*”, Official Announcement, March 18, 2010.

3. Toamna Ruperei în Matematica Pură

Validarea Teoremei lui Fermat, Singularitatea Navier-Stokes și Valul de Contestații Academice

(Septembrie 2026)

de Neculai Stanciu

Rezumat

Prima decadă a lunii septembrie 2026 marchează o frontieră istorică în evoluția științelor exacte, definită prin intruziunea masivă a sistemelor de inteligență artificială (AI) în demonstrația logică formală. În decurs de doar 96 de ore, două dintre cele mai rezistente probleme ale matematicii pure — Marea Teoremă a lui Fermat și Ecuațiile Navier-Stokes — au fost restructurate prin intermediul asistenților de demonstrație computerizați și al sistemelor multi-agent. Prezentul articol analizează cele două repere tehnico-matematice (realizate de Anthropic și OpenAI) și explorează valul corelat de contestații etice, metodologice și instituționale care a divizat comunitatea academică internațională. Lucrarea argumentează că trecerea la matematica post-umană redefinește nu doar conceptul de „dovadă”, ci și economia politică a cercetării fundamentale.

Cuvinte-cheie: Ecuațiile Navier-Stokes, Teorema lui Fermat, Limbajul Lean, OpenAI, Anthropic, Asistenți de demonstrație, Contestație academică, Epistemologie algoritmică.

1. Introducere

Timpe de milenii, progresul în matematica pură a fost perceput drept apanajul exclusiv al conștiinței umane. Spre deosebire de științele experimentale, matematica computațională s-a limitat istoric la aproximări numerice, simulări brute și verificări brute de cazuri finite. Însă, evoluțiile din toamna anului 2026 au infirmat această barieră ontologică.

2. Formalizarea Teoremei lui Fermat: Certitudinea Analitică vs. Monopolul Computațional

La 4 septembrie 2026, laboratoarele Anthropic au anunțat finalizarea primei formalizări computerizate cap-la-coadă a Marii Teoreme a lui Fermat în limbajul Lean 4. Enunțată în 1637 și demonstrată parțial de Sir Andrew Wiles în 1995 prin intermediul geometriei aritmetice complexe, teorema a reprezentat un test de rezistență pentru mintea umană.

Sistemul multi-agent bazat pe modelul *Claude Code* (folosind arhitectura Prove2Me) nu a generat o matematică nouă, ci a tradus și verificat axiomatice întreaga demonstrație în doar 11

zile — o sarcină pe care comunitatea de matematicieni umani o estimase la o decadă de muncă asiduă. Datele tehnice ale proiectului evidențiază o scară fără precedent:

- **13 milioane de linii de cod Lean** produse în mod autonom.
- **29.511 teoreme intermediare** dovedite și stocate.
- Un consum masiv de resurse, estimat la aproximativ **șase miliarde de tokeni de output**.

Prima Contestație: Economia resurselor și marginalizarea cercetării publice

Succesul Anthropic a atras imediat o primă contestație de natură economică și instituțională. Profesorul Kevin Buzzard (Imperial College London), care coordona din 2024 un proiect finanțat de statul britanic cu un grant de 1 milion de lire sterline pentru formalizarea aceleiași teoreme, s-a văzut devansat total.

3. Ruperea Ecuatiilor Navier-Stokes: Descoperirea Singularității în Timp Finit

Dacă Anthropic a securizat trecutul, OpenAI a forțat viitorul. La 8 septembrie 2026, compania a publicat lucrarea „*On the Navier–Stokes Millennium Prize Problem*”, pretinzând rezolvarea uneia dintre cele șapte Probleme ale Premiului Mileniului. Ecuatiile Navier-Stokes descriu comportamentul dinamic al fluidelor incompresibile, iar misterul central consta în a dovedi dacă soluțiile lor rămân mereu netede (smooth) sau dacă pot dezvolta o viteză infinită („blow-up”).

Folosind un roi de **10.000 de agenți AI coordonați**, care au rulat timp de 88 de ore, OpenAI a oferit o dovadă analitică a prăbușirii soluției în timp finit. Sub acțiunea unei forțe externe specifice, fluidul se prinde într-un vârtej elicoidal strâns, asemănător unei structuri filiforme de spaghete, accelerând local viteza dincolo de orice barieră finită, deși energia totală a sistemului rămâne conservată. Soluția a fost codificată și verificată în sistemul formal Lean în doar 17 ore prin modelul GPT-6 Astra.

4. Anatomia Contestațiilor: Cele trei fronturi ale disputei Navier-Stokes

Anunțul OpenAI nu a fost primit ca un triumf pur, ci a declanșat o furtună juridică și metodologică fără precedent în istoria matematicii. Contestațiile s-au structurat pe trei paliere independente:

A. Contestația Etică: Acuzațiile de „Front-Running” și Spionaj Industrial

Cea mai virulentă contestație a luat forma unei notificări oficiale depuse de profesorul Tristan Buckmaster (New York University) și matematicianul Levent Alpöge (Anthropic). Aceștia foloseau API-urile enterprise ale OpenAI (modelele *o1-pro*) pentru a valida fragmente din propria cercetare privind ecuațiile de tip fluid.

Contestația afirmă că sistemele interne de telemetrie și monitorizare ale OpenAI au detectat proximitatea logică a cercetătorilor umani față de o soluție stabilă și au utilizat aceste metadata pentru a orienta și instrui roiul de 10.000 de agenți. Deși OpenAI s-a apărat argumentând că dovezile diferă geometric fundamental (metoda OpenAI fiind bazată pe forțare elicoidală, iar cea a profesorilor pe rețele periodice), reclamanții au solicitat un audit independent al logurilor de instruire din perioada 1-5 septembrie.

B. Contestația Metodologică: „Trișarea” prin forțare externă

Din punct de vedere strict matematic, o mare parte a comunității academice refuză să considere problema rezolvată în spiritul ei original. Pentru a induce comportamentul de tip „blow-up”, agenții OpenAI au introdus o **forță externă non-zero** (forced Navier-Stokes) extrem de complexă, proiectată artificial pentru a rupe echilibrul.

Mutația conceptuală este drastică: fizicienii și matematicienii doreau să descopere dacă un fluid izolat se poate auto-distruge prin propria dinamică internațională turbulentă. Introducerea unei forțe exterioare croite milimetric de un supercomputer este văzută ca o chichiță regulamentară care ocolește miza fizică reală a ecuațiilor.

C. Contestația Instituțională: Verdictul Clay Mathematics Institute

Cea mai importantă barieră administrativă a fost ridicată de Clay Mathematics Institute. Comitetul a emis un comunicat prin care refuză formal recunoașterea problemei ca fiind „rezolvată”. Pe lângă obiecția tehnică privind forța externă, institutul a invocat o contestație filosofică profundă: conform statutului, o soluție trebuie să petreacă minimum doi ani în dezbateră liberă a comunității umane pentru a fi absorbită conceptual.

Faptul că Lean oferă o validare binară de tip „eroare 0” nu suplinește nevoia umană de înțelegere structurală. Oamenii de știință trebuie să înțeleagă *de ce* se comportă fluidul astfel, nu doar să accepte un certificat digital opac de 37 GB pe care nicio minte umană nu îl poate parcurge într-o viață.

5. Concluzii și Implicații Epistemologice

Evenimentele din septembrie 2026 redefinesc radical ecologia producției de cunoaștere fundamentală. Formalizarea Teoremei lui Fermat de către Anthropic și izolarea singularității Navier-Stokes de către OpenAI demonstrează o asimetrie de putere insurmontabilă între cercetătorul universitar individual și infrastructurile cloud corporatiste.

Matematica a intrat, conform formulării lui Terence Tao, într-o eră post-umană. Cu toate acestea, valul de contestații dovedește că validarea științifică rămâne o instituție socială, ghidată de principii etice, transparență și, mai presus de toate, de necesitatea asimilării intelectuale umane. Până când marile companii tech nu vor accepta auditul proceselor de instruire și nu vor produce demonstrații care să prioritizeze inteligibilitatea în fața forței brute, „unde verzi” ale verificatoarelor formale vor rămâne simple teoreme captive în servere, respinse simbolic de o comunitate academică ce își apără ultimele granițe ale relevanței.

Bibliografie

- [1] **Buzzard, K.** (2026). *Anthropic has beaten me to it: Reflections on the automated formalization of Fermat's Last Theorem*. Blogul oficial al comunității Lean de la Imperial College London. Accesat prin TNW (The Next Web), 4 septembrie 2026. [Disponibil online: <https://thenextweb.com>]
- [2] **Özel, M.** (2026). *Claude proved Fermat's Last Theorem in 11 days | The Paradigm Shift in Automated Theorem Proving*. Medium - Science & Technology Section, publicat la 5 septembrie 2026. [Disponibil online: <https://medium.com>]

[3] **Clay Mathematics Institute** (2026). *Official Statement on the Navier-Stokes Millennium Prize Problem Status*. Cambridge, MA. Publicat la 9 septembrie 2026. [Disponibil online: claymath.org]

[4] **Tao, T.** (2026). *The Dawn of Post-Human Mathematics: Automated Verification of Partial Differential Equations*. What's New - Blog de cercetare matematică. Accesat la 9 septembrie 2026.

[5] **OpenAI Research Team** (2026). *On the Navier–Stokes Millennium Prize Problem: Mathematical Singularity via Multi-Agent Coordination*. Lucrare tehnică de cercetare publicată la 8 septembrie 2026. [Disponibil online: <https://openai.com>]

[6] **Anthropic AI Foundations** (2026). *The Lean 4 Formalization Project: Verifying Wiles' Proof of Fermat's Last Theorem using Multi-Agent Systems*. Raport tehnic oficial, San Francisco, CA.

4. Math Journal

-11-

Marin Chirciu ¹

Mathematical Journal prezintă o selecție de probleme recente din diverse publicații de specialitate .

Problema1465.

If $x, y, z > 0$, $\sum x = xyz$ then

$$\prod (x^2 + 1) \geq 64.$$

Elton Papanikolla, MathOlymp-8/2026

Soluție.

1). $\sum x \geq 3\sqrt{3}$, vezi:

$$\left(\sum x\right)^3 \stackrel{AG}{\geq} 27xyz \stackrel{ipoteza}{=} 27\sum x \Rightarrow \left(\sum x\right)^3 \geq 27\sum x \Leftrightarrow \left(\sum x\right)^2 \geq 27 \Leftrightarrow \sum x \geq 3\sqrt{3}.$$

2). $\sum xy \geq 9$, vezi:

$$\left(\sum xy\right)^2 \geq 3xyz \sum x \geq 3xyz \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \sum x \geq 9\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 81 \Rightarrow \sum xy \geq 9.$$

$$3). \prod (x^2 + 1) = 1 + \sum x^2 + \sum x^2 y^2 + x^2 y^2 z^2 = 1 + \sum x^2 + \sum x^2 y^2 + \left(\sum x\right)^2.$$

$$\begin{aligned} LHS &= \prod (x^2 + 1) = 1 + \sum x^2 + \sum x^2 y^2 + \left(\sum x\right)^2 \geq 1 + \frac{\left(\sum x\right)^2}{3} + \frac{\left(\sum xy\right)^2}{3} + \left(\sum x\right)^2 \geq \\ &\geq 1 + \frac{\left(3\sqrt{3}\right)^2}{3} + \frac{(9)^2}{3} + \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 64 = RHS. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \sqrt{3}$.

Remarcă.

¹ Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu” Pitești

In $\triangle ABC$ holds

$$\prod \left(\cot^2 \frac{A}{2} + 1 \right) \geq 64.$$

Marin Chirciu

Lemă.

If $x, y, z > 0$, $\sum x = xyz$ then

$$\prod (x^2 + 1) \geq 64.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \cot \frac{A}{2} = \prod \cot \frac{A}{2} = \frac{p}{r}$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}, \cot \frac{C}{2} \right)$ obținem: $\prod \left(\cot^2 \frac{A}{2} + 1 \right) \geq 64$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1466.

If $a, b, c, d > 0$, $\sum a = 4$ then

$$\prod (a^4 + 3) \geq 256.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities-8/2026

Soluție.

$$LHS = \prod (a^4 + 3) = (a^4 + 1 + 1 + 1)(1 + b^4 + 1 + 1)(1 + 1 + c^4 + 1)(1 + 1 + 1 + d^4) \stackrel{\text{Holder}}{\geq}$$

$$\stackrel{\text{Holder}}{\geq} (a + b + c + d)^4 = 4^4 = 256 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = d = 1$.

Remarcă.

1). If $a, b, c > 0$, $\sum a = 3$ then

$$\prod (a^3 + 2) \geq 27.$$

Soluție.

$$LHS = \prod (a^3 + 2) = (a^3 + 1 + 1)(1 + b^3 + 1)(1 + 1 + c^3) \stackrel{\text{Holder}}{\geq}$$

$$\stackrel{\text{Holder}}{\geq} (a+b+c)^3 = 3^4 = 27 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

2). If $a_1, a_2, \dots, a_n > 0, \sum a_i = n$ then

$$\prod (a_i^n + n - 1) \geq n^n.$$

Soluție.

$$LHS = \prod (a_i^n + n - 1) = (a_1^n + 1 + \dots + 1)(1 + a_2^n + \dots + 1) \dots (1 + \dots + 1 + a_n^n) \stackrel{\text{Holder}}{\geq}$$

$$\stackrel{\text{Holder}}{\geq} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^n = n^n = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = d = 1$.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\prod \left(\frac{27r^3}{r_a^3} + 2 \right) \geq 27.$$

Lemă.

If $x, y, z > 0, \sum x = 3$ then

$$\prod (x^3 + 2) \geq 27.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a} = 1 \Leftrightarrow \sum \frac{3r}{r_a} = 3$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{3r}{r_a}, \frac{3r}{r_b}, \frac{3r}{r_c} \right)$ obținem: $\prod \left(\frac{27r^3}{r_a^3} + 2 \right) \geq 27$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

4). In $\triangle ABC$ holds

$$\prod \left(\frac{27r^3}{h_a^3} + 2 \right) \geq 27.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Lemă.

If $x, y, z > 0, \sum x = 3$ then

$$\prod (x^3 + 2) \geq 27.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{h_a} = 1 \Leftrightarrow \sum \frac{3r}{h_a} = 3.$

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{3r}{h_a}, \frac{3r}{h_b}, \frac{3r}{h_c}\right)$ obținem: $\prod \left(\frac{27r^3}{h_a^3} + 2\right) \geq 27.$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1467.

If $x, y, z > 0, \sum x = 1$ then

$$\frac{1}{\sum x^3} + \frac{3}{xyz} \geq 90.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM-8/2026

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = \sum x = 1, q = \sum xy, r = xyz.$

$$\sum x^3 = p^3 - 3pq + 3r = 1 - 3q + 3r.$$

Inegalitatea se scrie $\frac{1}{1-3q+3r} + \frac{3}{r} \geq 90 \Leftrightarrow 270r^2 - 270qr + 9q + 80r - 3 \leq 0$, vezi:

$$1). q \leq \frac{1}{3}, \text{ vezi } 1 = p^2 = (x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) = 3q \Rightarrow q \leq \frac{1}{3}.$$

$$2). r \leq \frac{1}{27}, \text{ vezi } 1 = p = x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3\sqrt[3]{r} \Rightarrow r \leq \frac{1}{27}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}.$

Remarcă.

If $x, y, z > 0, \sum x = 1$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\frac{1}{\sum x^3} + \frac{\lambda}{xyz} \geq 9(3\lambda + 1).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = \sum x = 1, q = \sum xy, r = xyz$.

$$\sum x^3 = p^3 - 3pq + 3r = 1 - 3q + 3r.$$

Inegalitatea se scrie

$$\frac{1}{1-3q+3r} + \frac{\lambda}{r} \geq 9(3\lambda+1) \Leftrightarrow 27(3\lambda+1)r^2 - 27(3\lambda+1)qr + 3\lambda q + 8(3\lambda+1)r - \lambda \leq 0, \text{ vezi:}$$

$$1). q \leq \frac{1}{3}, \text{ vezi } 1 = p^2 = (x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) = 3q \Rightarrow q \leq \frac{1}{3}.$$

$$2). r \leq \frac{1}{27}, \text{ vezi } 1 = p = x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3\sqrt[3]{r} \Rightarrow r \leq \frac{1}{27}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Problema 1468.

If $x, y, z > 0$, then

$$\sum \frac{xy}{(x+y)^2} \geq \frac{27xyz}{4\sum x \sum xy}.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Inequalities-8/2026

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{xy}{(x+y)^2} = \sum \frac{xyz}{z(x+y)^2} \stackrel{CS}{\geq} \frac{9xyz}{\sum z(x+y)^2} = \frac{9xyz}{\sum z(x^2 + 2xy + y^2)} = \\ &= \frac{9xyz}{\sum z(x^2 + y^2) + 6xyz} = \frac{9xyz}{\sum xy(x+y) + 6xyz} = \frac{9xyz}{\sum x \sum xy - 3xyz + 6xyz} = \\ &= \frac{9xyz}{\sum x \sum xy + 3xyz} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{27xyz}{4\sum x \sum xy} = RHS, \end{aligned}$$

$$\text{unde } \frac{9xyz}{\sum x \sum xy + 3xyz} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{27xyz}{4\sum x \sum xy} \Leftrightarrow 4\sum x \sum xy \geq 3\sum x \sum xy + 9xyz \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum x \sum xy \geq 9xyz, \text{ vezi inegalitatea mediilor:}$$

$$\sum x \geq 3\sqrt[3]{xyz} \text{ și } \sum xy \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} \Rightarrow \sum x \sum xy \geq 9xyz.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z$.

Remarcă.

If $x, y, z > 0$, then

$$\sum \frac{xy}{(x+y)^2} \geq \frac{81xyz}{4(x+y+z)^3}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{xy}{(x+y)^2} = \sum \frac{xyz}{z(x+y)^2} \stackrel{CS}{\geq} \frac{9xyz}{\sum z(x+y)^2} = \frac{9xyz}{\sum z(x^2 + 2xy + y^2)} = \\ &= \frac{9xyz}{\sum z(x^2 + y^2) + 6xyz} = \frac{9xyz}{\sum xy(x+y) + 6xyz} = \frac{9xyz}{\sum x \sum xy - 3xyz + 6xyz} = \\ &= \frac{9xyz}{\sum x \sum xy + 3xyz} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{81xyz}{4(x+y+z)^3} = RHS, \end{aligned}$$

$$\text{unde } \frac{9xyz}{\sum x \sum xy + 3xyz} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{81xyz}{4(x+y+z)^3} \Leftrightarrow 4(x+y+z)^3 \geq 9 \sum x \sum xy + 27xyz.$$

Folosim pqr -Method.

$$\text{Notăm } p = \sum x, q = \sum xy, r = xyz.$$

$$\text{Inegalitatea } 4(x+y+z)^3 \geq 9 \sum x \sum xy + 27xyz \text{ se scrie } 4p^3 \geq 9pq + 27r.$$

Datorită omogenității putem lua $p = 1 \Leftrightarrow 4 \geq 9q + 27r$, care rezultă din:

$$1). q \leq \frac{1}{3}, \text{ vezi } 1 = p^2 = (x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) = 3q \Rightarrow q \leq \frac{1}{3}.$$

$$2). r \leq \frac{1}{27}, \text{ vezi } 1 = p = x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3\sqrt[3]{r} \Rightarrow r \leq \frac{1}{27}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z$.

Problema 1469.

If $a, b, c > 0$, $\sum a = 3$ then

$$\sum \frac{a^3}{b^2c} + \sum a^2 \geq 6.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities-8/2026

Soluție.

Folosind $\frac{a^3}{b^2c} + b^2 + c \stackrel{AG}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^2c} \cdot b^2 \cdot c} = 3a$ obținem:

$$LHS = \sum \frac{a^3}{b^2c} + \sum a^2 \geq \sum (3a - b^2 - c) + \sum a^2 = 2\sum a - \sum a^2 + \sum a^2 = 2\sum a = 6 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Remarcă.

If $a, b, c > 0$, $\sum a = 3$ and $n \in \mathbb{N}$ then

$$\sum \frac{a^3}{b^nc} + \sum a^n \geq 6.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $\frac{a^3}{b^nc} + b^n + c \stackrel{AG}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^nc} \cdot b^n \cdot c} = 3a$ obținem:

$$LHS = \sum \frac{a^3}{b^nc} + \sum a^n \geq \sum (3a - b^n - c) + \sum a^n = 2\sum a - \sum a^n + \sum a^n = 2\sum a = 6 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Problema 1470.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{b+c}{h_a} \leq \sum \frac{b+c}{r_a}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM-8/2026

Soluție.

Folosind $\sum \frac{b+c}{h_a} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{pr}$ și $\sum \frac{b+c}{r_a} = \frac{2(p^2 - r^2 - 4Rr)}{pr}$, inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{pr} \leq \frac{2(p^2 - r^2 - 4Rr)}{pr} \Leftrightarrow p^2 \geq 12Rr + 3r^2, \text{ vezi inegalitatea lui Gerretsen::}$$

$$p^2 \geq 16Rr - 5r^2.$$

Rămâne să arătăm că:

$$16Rr - 5r^2 \geq 12Rr + 3r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{36Rr}{F} \leq \sum (b+c) \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{r_a} \right) \leq \frac{18R^2}{F}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $\sum \frac{b+c}{h_a} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{pr}$ și $\sum \frac{b+c}{r_a} = \frac{2(p^2 - r^2 - 4Rr)}{pr}$, „obținem:

$$\sum (b+c) \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{r_a} \right) = \frac{3p^2 - r^2 - 4Rr}{pr}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum (b+c) \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{r_a} \right) &= \frac{3p^2 - r^2 - 4Rr}{pr} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{3(4R^2 + 4Rr + 3r^2) - r^2 - 4Rr}{pr} = \\ &= \frac{12R^2 + 8Rr + 8r^2}{pr} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{18R^2}{F}. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} \sum (b+c) \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{r_a} \right) &= \frac{3p^2 - r^2 - 4Rr}{pr} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{3(16Rr - 5r^2) - r^2 - 4Rr}{pr} = \frac{44Rr - 16r^2}{pr} = \\ &= \frac{44Rr - 16r^2}{pr} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{36Rr}{F}. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1471.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^3}{h_a} \geq \sum \frac{a^3}{r_a}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM-8/2026

Soluție.

Folosind $\sum \frac{a^3}{h_a} = \frac{p^2(p^2 - 8Rr - 6r^2) + r^2(4R + r)^2}{pr}$ și $\sum \frac{a^3}{r_a} = \frac{2p^2(2R + 3r) - 2r(4R + r)^2}{p}$,

inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2(p^2 - 8Rr - 6r^2) + r^2(4R + r)^2}{pr} \geq \frac{2p^2(2R + 3r) - 2r(4R + r)^2}{p} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2(p^2 - 8Rr - 6r^2) + r^2(4R + r)^2 \geq 2p^2(2Rr + 3r^2) - 2r^2(4R + r)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2(p^2 - 12Rr - 12r^2) + 3r^2(4R + r)^2 \geq 0.$$

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $(p^2 - 12Rr - 12r^2) \geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $(p^2 - 12Rr - 12r^2) < 0$, inegalitatea se rescrie:

$$3r^2(4R + r)^2 \geq p^2(12Rr + 12r^2 - p^2), \text{ vezi inegalitatea lui Gerretsen:}$$

$$16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq \frac{R(4R + r)^2}{2(2R - r)}.$$

Rămâne să arătăm că:

$$3r^2(4R + r)^2 \geq \frac{R(4R + r)^2}{2(2R - r)}(12Rr + 12r^2 - 16Rr + 5r^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6r^2(2R - r) \geq R(-4Rr + 17r^2) \Leftrightarrow 6r(2R - r) \geq R(-4R + 17r) \Leftrightarrow 4R^2 - 5Rr - 6r^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (R - 2r)(4R + 3r) \geq 0, \text{ vezi } R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{81R^2r^2}{F} \leq \sum a^3 \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{r_a} \right) \leq \frac{81R^4}{4F}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\text{Folosind } \sum \frac{a^3}{h_a} = \frac{p^2(p^2 - 8Rr - 6r^2) + r^2(4R + r)^2}{pr} \text{ și } \sum \frac{a^3}{r_a} = \frac{2p^2(2R + 3r) - 2r(4R + r)^2}{p},$$

$$\text{obținem: } \sum a^3 \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{r_a} \right) = \frac{p^2(p^2 - 4Rr - 4r^2) - r^2(4R + r)^2}{pr}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum a^3 \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{r_a} \right) = \frac{p^2(p^2 - 4Rr - 4r^2) - r^2(4R + r)^2}{pr} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq}$$

$$\stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{(4R^2 + 4Rr + 3r^2)(4R^2 + 4Rr + 3r^2 - 4Rr - 4r^2) - r^2(4R + r)^2}{pr} =$$

$$= \frac{(4R^2 + 4Rr + 3r^2)(4R^2 - r^2) - r^2(4R + r)^2}{pr} = \frac{16R^4 + 16R^3r - 8R^2r^2 - 12Rr^3 - 4r^4}{pr} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{81R^4}{4F}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

$$\sum a^3 \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{r_a} \right) = \frac{p^2(p^2 - 4Rr - 4r^2) - r^2(4R + r)^2}{pr} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq}$$

$$\stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{(16Rr - 5r^2)(16Rr - 5r^2 - 4Rr - 4r^2) - r^2(4R + r)^2}{pr} =$$

$$= r^2 \frac{(16R - 5r)(12R - 9r) - (4R + r)^2}{F} = r^2 \frac{176R^2 - 212Rr + 44r^2}{F} =$$

$$= \frac{4r^2(44R^2 - 53Rr + 11r^2)}{F} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{81R^2r^2}{F}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1472.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^2}{h_a} \geq \sum \frac{a^2}{r_a}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM-8/2026

Soluție.

Folosind $\sum \frac{a^2}{h_a} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{r}$ și $\sum \frac{a^2}{r_a} = 4(R + r)$, inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{r} \geq 4(R + r) \Leftrightarrow p^2 \geq 10Rr + 7r^2, \text{ vezi inegalitatea lui Gerretsen } p^2 \geq 16Rr - 5r^2.$$

Rămâne să arătăm că:

$$16Rr - 5r^2 \geq 10Rr + 7r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$24r \leq \sum a^2 \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{r_a} \right) \leq \frac{6R^2}{r}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $\sum \frac{a^2}{h_a} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{r}$ și $\sum \frac{a^2}{r_a} = 4(R + r)$, obținem: $\sum a^2 \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{r_a} \right) = \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{r}.$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum a^2 \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{r_a} \right) &= \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{r} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{4R^2 + 4Rr + 3r^2 + r^2 - 2Rr}{r} = \\ &= \frac{4R^2 + 2Rr + 4r^2}{r} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{6R^2}{r}. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

$$\sum a^2 \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{r_a} \right) = \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{r} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{16Rr - 5r^2 + r^2 - 2Rr}{r} =$$

$$= \frac{14Rr - 4r^2}{r} = 14R - 4r \stackrel{\text{Euler}}{\geq} 24r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1473.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{\sin^2 A}{\sin B \sin C} \leq \frac{2R - r}{r}.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 8/2026

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{\sin^2 A}{\sin B \sin C} = \sum \frac{a^2}{bc} = \frac{\sum a^3}{abc} = \frac{2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr)}{4Rrp} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \\ &\stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{4R^2 + 4Rr + 3r^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr} = \frac{4R^2 - 2Rr}{2Rr} = \frac{2R - r}{r} = RHS. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$5 - \frac{4r}{R} \leq \sum \frac{\sin^2 A}{\sin B \sin C} \leq \frac{2R}{r} - 1.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum \frac{\sin^2 A}{\sin B \sin C} &= \sum \frac{a^2}{bc} = \frac{\sum a^3}{abc} = \frac{2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr)}{4Rrp} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \\ &\stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{4R^2 + 4Rr + 3r^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr} = \frac{4R^2 - 2Rr}{2Rr} = \frac{2R - r}{r} = \frac{2R}{r} - 1. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} \sum \frac{\sin^2 A}{\sin B \sin C} &= \sum \frac{a^2}{bc} = \frac{\sum a^3}{abc} = \frac{2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr)}{4Rrp} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \\ &\stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{16Rr - 5r^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr} = \frac{10Rr - 8r^2}{2Rr} = \frac{5R - 4r}{R} = 5 - \frac{4r}{R}. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1474.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{\sin^5 \frac{A}{2}} \geq 96.$$

Zaza Mzhavanadze, Georgia, RMM-8/2026

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{1}{\sin^5 \frac{A}{2}} = \sum \frac{1^6}{\sin^5 \frac{A}{2}} \stackrel{Radon}{\geq} \frac{(\sum 1)^6}{\left(\sum \sin \frac{A}{2}\right)^5} \stackrel{Jensen}{\geq} \frac{3^6}{\left(\frac{3}{2}\right)^5} = 3 \cdot 2^5 = 96 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{\sin^n \frac{A}{2}} \geq 3 \cdot 2^n, n \in \mathbb{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n = 0$ se obține egalitatea $3 = 3$.

Pentru $n \geq 1$ se folosește inegalitatea lui Radon.

$$LHS = \sum \frac{1}{\sin^n \frac{A}{2}} = \sum \frac{1^{n+1}}{\sin^n \frac{A}{2}} \stackrel{Radon}{\geq} \frac{(\sum 1)^{n+1}}{\left(\sum \sin \frac{A}{2}\right)^n} \stackrel{Jensen}{\geq} \frac{3^{n+1}}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = 3 \cdot 2^n = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1475.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{\sin A} \geq \sqrt{\frac{6R}{r}}.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, RMM-8/2026

Soluție.

$$\sum \frac{1}{\sin A} = \sum \frac{1}{\frac{a}{2R}} = 2R \sum \frac{1}{a} = 2R \frac{\sum ab}{abc} = 2R \frac{\sum ab}{4Rrp} = \frac{\sum ab}{2rp} \stackrel{(1)}{\geq} \sqrt{\frac{6R}{r}} = RHS,$$

$$\text{unde } \frac{\sum ab}{2rp} \stackrel{(1)}{\geq} \sqrt{\frac{6R}{r}} \Leftrightarrow \sum ab \geq 2rp \sqrt{\frac{6R}{r}} \Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4Rr \geq 2rp \sqrt{\frac{6R}{r}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p^2 + r^2 + 4Rr)^2 \geq 4r^2 p^2 \cdot \frac{6R}{r} \Leftrightarrow (p^2 + r^2 + 4Rr)^2 \geq 24Rrp^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2(p^2 + 2r^2 - 16Rr) + r^2(4R + r)^2 \geq 0.$$

Distingem cazurile:

Cazul1). Dacă $(p^2 + 2r^2 - 16Rr) \geq 0$, inegalitatea este evidentă.Cazul2). Dacă $(p^2 + 2r^2 - 16Rr) < 0$, inegalitatea se rescrie:
 $r^2(4R + r)^2 \geq p^2(16Rr - 2r^2 - p^2)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen:

$$16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq \frac{R(4R + r)^2}{2(2R - r)}.$$

Este suficient să arătăm că:

$$r^2(4R + r)^2 \geq \frac{R(4R + r)^2}{2(2R - r)}(16Rr - 2r^2 - 16Rr + 5r^2) \Leftrightarrow r^2(4R + r)^2 \geq \frac{R(4R + r)^2}{2(2R - r)} \cdot 3r^2$$

$$\Leftrightarrow 2(2R - r) \geq 3R \Leftrightarrow R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{\sin^n A} \geq 3 \left(\frac{2R}{3r} \right)^{\frac{n}{2}}, n \in \mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n = 0$ se obține egalitatea $3 = 3$.

Pentru $n = 1$ vezi Lema.

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \left(\frac{1}{\sin A} \right)^n \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{1}{\sin A} \right)^n}{3^{n-1}} \stackrel{\text{Lema}}{\geq} \frac{\left(\sqrt{\frac{6R}{r}} \right)^n}{3^{n-1}} = 3 \left(\frac{1}{3} \sqrt{\frac{6R}{r}} \right)^n = 3 \left(\sqrt{\frac{6R}{9r}} \right)^n = \\ &= 3 \left(\sqrt{\frac{2R}{3r}} \right)^n = 3 \left(\frac{2R}{3r} \right)^{\frac{n}{2}} = RHS. \end{aligned}$$

Lemă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{\sin A} \geq \sqrt{\frac{6R}{r}}.$$

Problema 1476.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a}{2h_b + h_c} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM-8/2026

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{a}{2h_b + h_c} = \sum \frac{a}{2 \cdot \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}} = \frac{1}{2S} \sum \frac{abc}{b+2c} = \frac{abc}{2S} \sum \frac{1}{b+2c} \stackrel{CS}{\geq} \\ &\stackrel{CS}{\geq} \frac{4RS}{2S} \cdot \frac{9}{\sum (b+2c)} = 2R \cdot \frac{9}{3 \sum a} = 2R \cdot \frac{3}{2p} = \frac{3R}{p} \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\geq} \frac{2}{\sqrt{3}} = RHS. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a}{\lambda h_b + h_c} \geq \frac{6}{\sqrt{3}(\lambda+1)}, \lambda \geq 0.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a}{\lambda h_b + h_c} = \sum \frac{a}{\lambda \cdot \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}} = \frac{1}{2S} \sum \frac{abc}{b + \lambda c} = \frac{abc}{2S} \sum \frac{1}{b + \lambda c} \stackrel{CS}{\geq}$$

$$\stackrel{CS}{\geq} \frac{4RS}{2S} \cdot \frac{9}{\sum (b + \lambda c)} = 2R \cdot \frac{9}{(\lambda + 1) \sum a} = 2R \cdot \frac{9}{(\lambda + 1) \cdot 2p} = \frac{9R}{(\lambda + 1)p} \stackrel{Mitrinovic}{\geq} \frac{6}{\sqrt{3}(\lambda + 1)} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1477.

If $a, b, c > 0$, $abc = 8$ then

$$\sum \frac{1}{a+1} \geq 1.$$

Sanong Huayrerai, Mathematical Inequalities 8/2026

Soluție.

$$\sum \frac{1}{a+1} \geq 1 \Leftrightarrow \sum (b+1)(c+1) \geq \prod (a+1) \Leftrightarrow \sum ab + 2 \sum a + 3 \geq \sum ab + \sum a + abc + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum a + 3 \geq abc + 1 \Leftrightarrow \sum a + 3 \geq 8 + 1 \Leftrightarrow \sum a \geq 6, \text{ vezi}$$

$$\sum a \stackrel{AG}{\geq} 3 \sqrt[3]{abc} = 3 \sqrt[3]{8} = 6.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 2$.

Remarcă.

If $a, b, c > 0$, $abc = 8$ and $0 \leq \lambda \leq 1$ then

$$\sum \frac{1}{a+\lambda} \geq \frac{3}{\lambda+2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\sum \frac{1}{a+\lambda} \geq \frac{3}{\lambda+2} \Leftrightarrow (\lambda+2) \sum (b+\lambda)(c+\lambda) \geq 3 \prod (a+\lambda) \Leftrightarrow$$

$$(\lambda+2) \sum ab + 2\lambda(\lambda+2) \sum a + 3\lambda^2(\lambda+2) \geq 3\lambda \sum ab + 3\lambda^2 \sum a + 3abc + 3\lambda^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2-2\lambda) \sum ab + (4\lambda - \lambda^2) \sum a + 6\lambda^2 \geq 3abc \Leftrightarrow$$

$$(2-2\lambda) \sum ab + (4\lambda - \lambda^2) \sum a + 6\lambda^2 \geq 3 \cdot 8, \text{ vezi}$$

$$\sum ab \geq 3 \sqrt[AG]{(abc)^2} = 3 \sqrt[AG]{8^2} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ și } \sum a \geq 3 \sqrt[AG]{abc} = 3 \sqrt[AG]{8} = 6.$$

Obținem:

$$(2-2\lambda) \sum ab + (4\lambda - \lambda^2) \sum a + 6\lambda^2 \geq (2-2\lambda) \cdot 12 + (4\lambda - \lambda^2) \cdot 6 + 6\lambda^2 = 24.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 2$.

Problema1478.

If $a, b, c \geq 0$, then

$$\begin{vmatrix} 1 & a+b & a^2 \\ 1 & b+c & b^2 \\ 1 & c+a & c^2 \end{vmatrix} \geq 0.$$

Marin Chirciu, Math-8/2026

Soluție.

$$\Delta = a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2c - c^2a \geq 0, \text{ vezi}$$

$$a^3 + a^3 + b^3 \geq 3 \sqrt[AG]{a^3 \cdot a^3 \cdot b^3} = 3a^2b \text{ și analoagele.}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.

Problema1479.

If $n \in \mathbf{N}$, then

$$1). 13^{n+1} + 6^n : 7$$

$$2). 25^{n+1} - 24n - 25 : 576$$

$$3). 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1} : 17$$

$$4). 2^{n+1} + 9 \cdot 13^n : 11$$

$$5). 5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1} : 23, \text{ Mihai Miculița, Oradea, Math -8/2026.}$$

Soluție.

Inducție matematică.

Problema1480.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \sin^2 A \sum \sec^2 \frac{A}{2} \leq \frac{9R}{2r}.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 8/2026

Soluție.

$$1). \sum \sin^2 A \leq \frac{2R^2 + r^2}{R^2}, \text{ vezi}$$

$$\sum \sin^2 A = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2R^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{4R^2 + 4Rr + 3r^2 - r^2 - 4Rr}{2R^2} = \frac{2R^2 + r^2}{R^2}.$$

$$2). \sum \sec^2 \frac{A}{2} \leq \frac{R+2r}{r}, \text{ vezi}$$

$$\sum \sec^2 \frac{A}{2} = \sum \frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}} = 1 + \frac{(4R+r)^2}{p^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} 1 + \frac{(4R+r)^2}{\frac{r(4R+r)^2}{R+r}} = 1 + \frac{R+r}{r} = \frac{R+2r}{r}.$$

$$LHS = \sum \sin^2 A \sum \sec^2 \frac{A}{2} \leq \frac{2R^2 + r^2}{R^2} \cdot \frac{R+2r}{r} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{9R}{2r} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{18r}{R} \leq \sum \sin^2 A \sum \sec^2 \frac{A}{2} \leq \frac{9R}{2r}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Inegalitatea din dreapta.

$$1). \sum \sin^2 A \leq \frac{2R^2 + r^2}{R^2}, \text{ vezi}$$

$$\sum \sin^2 A = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2R^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{4R^2 + 4Rr + 3r^2 - r^2 - 4Rr}{2R^2} = \frac{2R^2 + r^2}{R^2}.$$

$$2). \sum \sec^2 \frac{A}{2} \leq \frac{R+2r}{r}, \text{ vezi}$$

$$\sum \sec^2 \frac{A}{2} = \sum \frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}} = 1 + \frac{(4R+r)^2}{p^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} 1 + \frac{(4R+r)^2}{\frac{r(4R+r)^2}{R+r}} = 1 + \frac{R+r}{r} = \frac{R+2r}{r}.$$

$$\sum \sin^2 A \sum \sec^2 \frac{A}{2} \leq \frac{2R^2 + r^2}{R^2} \cdot \frac{R + 2r}{r} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{9R}{2r}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

$$1). \sum \sin^2 A \geq \frac{3r(2R-r)}{R^2}, \text{ vezi}$$

$$\sum \sin^2 A = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2R^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{16Rr - 5r^2 - r^2 - 4Rr}{2R^2} = \frac{6Rr - 3r^2}{R^2} = \frac{3r(2R-r)}{R^2}.$$

$$2). \sum \sec^2 \frac{A}{2} \geq \frac{5R-2r}{R}, \text{ vezi}$$

$$\sum \sec^2 \frac{A}{2} = \sum \frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}} = 1 + \frac{(4R+r)^2}{p^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} 1 + \frac{(4R+r)^2}{R(4R+r)^2} = 1 + \frac{2(2R-r)}{R} = \frac{5R-2r}{R}.$$

$$\sum \sin^2 A \sum \sec^2 \frac{A}{2} \geq \frac{3r(2R-r)}{R^2} \cdot \frac{5R-2r}{R} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{3r \cdot \frac{3}{2}R}{R^2} \cdot \frac{4R}{R} = \frac{18r}{R}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1481.

If $a, b, c, d > 0$, $\sum a = 4$ then

$$\sum \frac{a}{\sqrt{b+c+d}} \geq \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities 8/2026

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{a}{\sqrt{b+c+d}} = \sum \frac{a}{\sqrt{4-a}} \stackrel{\text{SOS}}{\geq} \sum \frac{2\sqrt{3} \cdot a}{7-a} = 2\sqrt{3} \sum \frac{a}{7-a} = 2\sqrt{3} \sum \left(-1 + \frac{7}{7-a} \right) = \\ &= 2\sqrt{3} \left(-4 + 7 \sum \frac{1}{7-a} \right) \stackrel{\text{CS}}{\geq} 2\sqrt{3} \left(-4 + 7 \frac{(\sum 1)^2}{\sum (7-a)} \right) = 2\sqrt{3} \left(-4 + 7 \frac{16}{28 - \sum a} \right) = \\ &= 2\sqrt{3} \left(-4 + 7 \cdot \frac{16}{28-4} \right) = 2\sqrt{3} \left(-4 + 7 \cdot \frac{16}{24} \right) = 2\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{\sqrt{3}} = RHS. \end{aligned}$$

Am folosit mai sus $\frac{a}{\sqrt{4-a}} \geq \frac{2\sqrt{3} \cdot a}{7-a} \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = d = 1$.

Remarcă.

If $a, b, c, d > 0$, $\sum a = 4$ then

$$\sum \left(\frac{a}{\sqrt{b+c+d}} \right)^n \geq 3 \left(\frac{4}{3\sqrt{3}} \right)^n, n \in \mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n = 0$ se obține egalitatea $3 = 3$.

Pentru $n = 1$ vezi Lema.

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum \left(\frac{a}{\sqrt{b+c+d}} \right)^n \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{a}{\sqrt{b+c+d}} \right)^n}{3^{n-1}} \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{\left(\frac{4}{\sqrt{3}} \right)^n}{3^{n-1}} = 3 \left(\frac{4}{3\sqrt{3}} \right)^n = RHS.$$

Lemă.

If $a, b, c, d > 0$, $\sum a = 4$ then

$$\sum \frac{a}{\sqrt{b+c+d}} \geq \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = d = 1$.

Problema 1482.

If $a, b, c > 0$, $\sum a = 3$ then

$$\sum \frac{a}{\sqrt{a+2b+1}} \geq \frac{3}{2}.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 8/2026

Soluție.

$$\begin{aligned}
LHS &= \sum \frac{a}{\sqrt{a+2b+1}} = \sum \frac{2a^2}{a \cdot 2\sqrt{a+2b+1}} \stackrel{CS}{\geq} \frac{2(\sum a)^2}{\sum a \cdot 2\sqrt{a+2b+1}} \stackrel{AG}{\geq} \frac{2(\sum a)^2}{\sum a \cdot \frac{(a+2b+1)+4}{2}} = \\
&= \frac{4(3)^2}{\sum a(a+2b+5)} = \frac{36}{\sum a^2 + 2\sum ab + 5\sum a} = \frac{36}{(\sum a)^2 + 5\sum a} = \frac{36}{3^2 + 5 \cdot 3} = \frac{36}{24} = \frac{3}{2} = RHS.
\end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Remarcă.

If $a, b, c > 0$, $\sum a = 3$ then

$$\sum \left(\frac{a}{\sqrt{a+2b+1}} \right)^n \geq \frac{3}{2^n}, n \in \mathbf{N}.$$

Soluție.

Pentru $n = 0$ se obține egalitatea $3 = 3$.

Pentru $n = 1$ vezi Lema.

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum \left(\frac{a}{\sqrt{a+2b+1}} \right)^n \stackrel{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{a}{\sqrt{a+2b+1}} \right)^n}{3^{n-1}} \stackrel{Holder}{\geq} \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^n}{3^{n-1}} = \frac{3}{2^n} = RHS.$$

Lemă.

If $a, b, c > 0$, $\sum a = 3$ then

$$\sum \frac{a}{\sqrt{a+2b+1}} \geq \frac{3}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Problema1483.

If $a, b, c, d > 0$, $\sum a = 1$ then

$$\sum \frac{1}{a} + 16 \sum ab \geq 20.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities8/2026

Soluție.

$$\text{Din } \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + 16ab \stackrel{AG}{\geq} 3\sqrt{\frac{1}{4a} \cdot \frac{1}{4b} \cdot 16ab} = 3ab \text{ și analoagele} \Rightarrow \frac{1}{2} \sum \frac{1}{a} + 16 \sum ab \geq 12, (1).$$

$$\text{Din } \sum \frac{1}{a} \stackrel{CS}{\geq} \frac{(\sum 1)^2}{\sum a} = \frac{(4)^2}{1} = 16 \Rightarrow \frac{1}{2} \sum \frac{1}{a} \geq 8, (1).$$

$$\text{Din (1)+(2)} \Rightarrow \sum \frac{1}{a} + 16 \sum ab \geq 20.$$

$$\text{Egalitatea are loc dacă și numai dacă } a = b = c = d = \frac{1}{4}.$$

Remarcă.

If $a, b, c, d > 0$, $\sum a = 1$ and $\lambda \geq 0$ then

$$(2\lambda + 1) \sum \frac{1}{a} + 32 \sum ab \geq 8(4\lambda + 3).$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\text{Din } \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + 16ab \stackrel{AG}{\geq} 3\sqrt{\frac{1}{4a} \cdot \frac{1}{4b} \cdot 16ab} = 3ab \text{ și analoagele} \Rightarrow \frac{1}{2} \sum \frac{1}{a} + 16 \sum ab \geq 12, (1).$$

$$\text{Din } \sum \frac{1}{a} \stackrel{CS}{\geq} \frac{(\sum 1)^2}{\sum a} = \frac{(4)^2}{1} = 16 \Rightarrow \lambda \sum \frac{1}{a} \geq 16\lambda, (1).$$

$$\text{Din (1)+(2)} \Rightarrow (2\lambda + 1) \sum \frac{1}{a} + 32 \sum ab \geq 8(4\lambda + 3).$$

$$\text{Egalitatea are loc dacă și numai dacă } a = b = c = d = \frac{1}{4}.$$

Problema 1484.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{bc}{\sin \frac{A}{2}} \geq 2 \sum bc.$$

Rahim Shahbazov, Azerbaijan, Mathematical Inequalities 8/2026

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{bc}{\sin \frac{A}{2}} = \sum \frac{b^2 c^2}{bc \sin \frac{A}{2}} \stackrel{CS}{\geq} \frac{(\sum bc)^2}{\sum bc \sin \frac{A}{2}} \stackrel{(1)}{\geq} 2 \sum bc = RHS,$$

$$\text{unde } \frac{(\sum bc)^2}{\sum bc \sin \frac{A}{2}} \stackrel{(1)}{\geq} 2 \sum bc \Leftrightarrow 2 \sum bc \sin \frac{A}{2} \leq \sum bc, \text{ vezi } \sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

$$\text{Obținem } 2 \sum bc \sin \frac{A}{2} \leq 2 \sum bc \cdot \frac{a}{2\sqrt{bc}} = \sum a\sqrt{bc} \stackrel{(2)}{\leq} \sum bc,$$

unde(2) rezultă din $ab + ac \geq 2a\sqrt{bc}$ și analoagele.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{bc}{\sin \frac{A}{2}} \geq 8S\sqrt{3}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{bc}{\sin \frac{A}{2}} = \sum \frac{b^2 c^2}{bc \sin \frac{A}{2}} \stackrel{CS}{\geq} \frac{(\sum bc)^2}{\sum bc \sin \frac{A}{2}} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{(\sum bc)^2}{\frac{1}{2} \sum bc} = 2 \sum bc \stackrel{Gordon}{\geq} 2 \cdot 4S\sqrt{3} = \\ &= 8S\sqrt{3} = RHS, \end{aligned}$$

$$\text{unde}(1) \Leftrightarrow 2 \sum bc \sin \frac{A}{2} \leq \sum bc, \text{ vezi } \sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

$$\text{Obținem } 2 \sum bc \sin \frac{A}{2} \leq 2 \sum bc \cdot \frac{a}{2\sqrt{bc}} = \sum a\sqrt{bc} \stackrel{(2)}{\leq} \sum bc,$$

unde(2) rezultă din $ab + ac \geq 2a\sqrt{bc}$ și analoagele.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \left(\frac{bc}{\sin \frac{A}{2}} \right)^n \geq 3 \left(\frac{8S}{\sqrt{3}} \right)^n, n \in \mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n = 0$ se obține egalitatea $3 = 3$.

Pentru $n = 1$ vezi Lema.

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum \left(\frac{bc}{\sin \frac{A}{2}} \right)^n \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{bc}{\sin \frac{A}{2}} \right)^n}{3^{n-1}} \stackrel{\text{Lema}}{\geq} \frac{(8S\sqrt{3})^n}{3^{n-1}} = 3 \left(\frac{8S}{\sqrt{3}} \right)^n = RHS.$$

Lemă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{bc}{\sin \frac{A}{2}} \geq 8S\sqrt{3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1485.

If $x, y, z > 0$, $\sum xy = 1$ then

$$\sum \frac{1}{15x^2 + 1} \geq \frac{1}{2}.$$

Jihad Z, Mathematical Inequalities 8/2026

Soluție.

Cu substituția $(x, y, z) = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right)$ problema se reformulează:

If $a, b, c > 0$, $a + b + c = abc$ then

$$\sum \frac{a^2}{a^2+15} \geq \frac{1}{2}.$$

Demonstrație.

$$LHS = \sum \frac{a^2}{a^2+15} \stackrel{CS}{\geq} \frac{(\sum a)^2}{\sum (a^2+15)} = \frac{\sum a^2 + 2\sum ab}{\sum a^2 + 45} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{1}{2} = RHS,$$

$$\text{unde } \frac{\sum a^2 + 2\sum ab}{\sum a^2 + 45} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sum a^2 + 4\sum ab \geq \sum a^2 + 45 \Leftrightarrow \sum a^2 + 4\sum ab \geq 45 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{a=abc} \Leftrightarrow (\sum a^2 + 4\sum ab) \sum a \geq 45abc, \text{ vezi inegalitatea mediilor:}$$

$$(\sum a^2 + 4\sum ab) \sum a \stackrel{AG}{\geq} \left(3\sqrt[3]{(abc)^2} + 4 \cdot 3\sqrt[3]{(abc)^2} \right) \cdot 3\sqrt[3]{abc} = 9abc + 36abc = 45abc.$$

$$\text{Egalitatea are loc dacă și numai dacă } x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Remarcă.

If $x, y, z > 0$, $\sum xy = 1$ and $\lambda \geq 6$ then

$$\sum \frac{1}{\lambda x^2 + 1} \geq \frac{9}{\lambda + 3}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Cu substituția $(x, y, z) = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ problema se reformulează:

If $a, b, c > 0$, $a + b + c = abc$ then

$$\sum \frac{a^2}{a^2 + \lambda} \geq \frac{9}{\lambda + 3}.$$

Demonstrație.

$$LHS = \sum \frac{a^2}{a^2 + \lambda} \stackrel{CS}{\geq} \frac{(\sum a)^2}{\sum (a^2 + \lambda)} = \frac{\sum a^2 + 2\sum ab}{\sum a^2 + 3\lambda} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{9}{\lambda + 3} = RHS,$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Problema 1486.

In scalen $\triangle ABC$ holds

$$\frac{\sin^4 B}{w_a - h_a} + \frac{1}{w_b - h_b} + \frac{\cos^4 B}{w_c - h_c} \geq \frac{4}{3(R - 2r)}.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities 8/2026

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \frac{\sin^4 B}{w_a - h_a} + \frac{1}{w_b - h_b} + \frac{\cos^4 B}{w_c - h_c} \stackrel{CS}{\geq} \frac{(\sin^2 B + 1 + \cos^2 B)^2}{\sum (w_a - h_a)} = \frac{(1+1)^2}{\sum w_a - \sum h_a} \geq \frac{4}{\frac{9R}{2} - 9r} = \\ &= \frac{8}{9(R - 2r)} = RHS. \end{aligned}$$

Am folosit mai sus: $\sum w_a \leq \frac{9R}{2}$ și $\sum h_a \geq 9r$.

Inegalitatea este strictă.

Remarcă.

In scalen $\triangle ABC$ holds

$$\frac{\sin^{2n} B}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{\cos^{2n} B}{\cos C} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{2}{R - 2r}, n \in \mathbf{N}_{\geq 2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \frac{\sin^{2n} B}{w_a - h_a} + \frac{1}{w_b - h_b} + \frac{\cos^{2n} B}{w_c - h_c} \stackrel{Holder}{\geq} \frac{(\sin^2 B + 1 + \cos^2 B)^n}{3^{n-2} \sum (w_a - h_a)} = \frac{(1+1)^n}{3^{n-2} (\sum w_a - \sum h_a)} = \\ &= \frac{2^n}{3^{n-2} \left(\frac{9R}{2} - 9r\right)} = 9 \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{2}{9(R - 2r)} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{2}{R - 2r} = RHS. \end{aligned}$$

Inegalitatea este strictă.

Problema 1487.

In acute $\triangle ABC$ holds

$$\frac{\sin^4 B}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{\cos^4 B}{\cos C} \geq \frac{4R}{R+r}.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities 8/2026

Soluție.

$$LHS = \frac{\sin^4 B}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{\cos^4 B}{\cos C} \stackrel{CS}{\geq} \frac{(\sin^2 B + 1 + \cos^2 B)^2}{\cos A + \cos B + \cos C} = \frac{(1+1)^2}{1 + \frac{r}{R}} = \frac{4R}{R+r} = RHS.$$

Inegalitatea este strictă.

Remarcă.

In acute $\triangle ABC$ holds

$$\frac{\sin^{2n} B}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{\cos^{2n} B}{\cos C} \geq 9 \left(\frac{2}{3} \right)^n \frac{R}{R+r}, n \in \mathbf{N}_{\geq 2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \frac{\sin^{2n} B}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{\cos^{2n} B}{\cos C} \stackrel{Holder}{\geq} \frac{(\sin^2 B + 1 + \cos^2 B)^n}{3^{n-2} (\cos A + \cos B + \cos C)} = \frac{(1+1)^n}{3^{n-2} \left(1 + \frac{r}{R} \right)} \\ &= 9 \left(\frac{2}{3} \right)^n \frac{R}{R+r} = RHS. \end{aligned}$$

Inegalitatea este strictă.

Problema 1488.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum h_a^2 \leq \frac{3}{4} \sum a^2.$$

Elton Papanikolla, Math Olymp 8/2026

Soluție.

Folosind $\sum h_a^2 = \frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2(4R+r)^2}{4R^2}$ și $\sum a^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$, inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2}{4R^2} \leq \frac{3}{4} \cdot 2(p^2 - r^2 - 4Rr) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2(p^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2 \leq 6R^2(p^2 - r^2 - 4Rr) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2(6R^2 + 8Rr - 2r^2 - p^2) \geq r^2(4R + r)^2 + 6R^2(r^2 + 4Rr), \text{ vezi inegalitatea lui Gerretsen:}$$

$$16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2.$$

Rămâne să arătăm că:

$$(16Rr - 5r^2)(6R^2 + 8Rr - 2r^2 - 4R^2 - 4Rr - 3r^2) \geq r^2(4R + r)^2 + 6R^2(r^2 + 4Rr) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (16R - 5r)(2R^2 + 4Rr - 5r^2) \geq r(4R + r)^2 + 6R^2(r + 4R) \Leftrightarrow 2R^3 + 8R^2r - 27Rr^2 + 6r^3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (R - 2r)(2R^2 + 12Rr - 3r^2) \geq 0, \text{ vezi } R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum r_a^2 \geq \frac{3}{4} \sum a^2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $\sum r_a^2 = (4R + r)^2 - 2p^2$ și $\sum a^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$, inegalitatea se scrie:

$$(4R + r)^2 - 2p^2 \geq \frac{3}{4} \cdot 2(p^2 - r^2 - 4Rr) \Leftrightarrow 7p^2 \leq 2(4R + r)^2 + 3(r^2 + 4Rr),$$

vezi inegalitatea lui Gerretsen: $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$$7(4R^2 + 4Rr + 3r^2) \leq 2(4R + r)^2 + 3(r^2 + 4Rr) \Leftrightarrow 4R^2 - 16r^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (R - 2r)(R + 2r) \geq 0, \text{ vezi } R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum h_a^2 \leq \frac{3}{4} \sum a^2 \leq \sum r_a^2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum h_a^2 \leq \frac{3}{4} \sum a^2.$$

Lema2.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum r_a^2 \geq \frac{3}{4} \sum a^2.$$

Folosind **Lemele** de mai sus obținem concluzia.

Problema1489

In acute $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{m_a}{a} \leq \frac{a+b+c}{4r}.$$

Elton Papanikolla, MathOlymp 8/2026

Soluție.

Lemă.

In acute $\triangle ABC$ holds

$$\frac{m_a}{a} \leq \frac{p-a}{2r}.$$

Demonstrație.

$$\begin{aligned} \frac{m_a}{a} \leq \frac{p-a}{2r} &\Leftrightarrow \frac{m_a^2}{a^2} \leq \frac{(p-a)^2}{4r^2} \Leftrightarrow \frac{2b^2+2c^2-a^2}{a^2} \leq \frac{\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)^2}{4r^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4a^2} \leq \frac{\left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2}{4r^2} \Leftrightarrow \frac{2b^2+2c^2-a^2}{a^2} \leq \frac{(b+c-a)^2}{4r^2} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 4r^2 \leq \frac{a^2(b+c-a)^2}{2b^2+2c^2-a^2} \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4(a+b+c)} \leq \frac{a^2(b+c-a)^2}{2b^2+2c^2-a^2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 4 \cdot \frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4(a+b+c)} \leq \frac{a^2(b+c-a)^2}{2b^2+2c^2-a^2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{(c+a-b)(a+b-c)}{(a+b+c)} \leq \frac{a^2(b+c-a)}{2b^2+2c^2-a^2} \Leftrightarrow (b-c)^2(b^2+c^2-a^2) \stackrel{acute}{\geq} 0.
\end{aligned}$$

Am folosit mai sus: $r^2 = \frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4(a+b+c)},$

$$\begin{aligned}
\text{vezi } r^2 &= \frac{S^2}{p^2} = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} = \\
&= \frac{\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4(a+b+c)}.
\end{aligned}$$

Folosind **Lema** obținem:

$$LHS = \sum \frac{m_a}{a} \stackrel{Lema}{\leq} \sum \frac{p-a}{2r} = \frac{p}{2r} = \frac{a+b+c}{4r} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In acute $\triangle ABC$ holds

$$\sum \sqrt{\frac{m_a}{a}} \leq \frac{p}{2r}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \sqrt{\frac{m_a}{a}} \stackrel{CBS}{\leq} \sqrt{3 \sum \frac{m_a}{a}} \stackrel{Lema}{\leq} \sqrt{3 \cdot \frac{p}{2r}} = \sqrt{\frac{3p}{2r}} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1490.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a}{(b+c)^2} \geq \frac{9}{8p}.$$

Math Olymp 8/2026

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a}{(b+c)^2} = \sum \frac{\left(\frac{a}{b+c}\right)^2}{\frac{a}{b+c}} \stackrel{CS}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{a}{b+c}\right)^2}{\sum a} \stackrel{Nesbitt}{\geq} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2p} = \frac{9}{8p} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a}{(b+\lambda c)^2} \geq \frac{9}{2(\lambda+1)^2 p}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a}{(b+\lambda c)^2} = \sum \frac{\left(\frac{a}{b+\lambda c}\right)^2}{\frac{a}{b+\lambda c}} \stackrel{CS}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{a}{b+\lambda c}\right)^2}{\sum a} \stackrel{Nesbitt}{\geq} \frac{\left(\frac{3}{\lambda+1}\right)^2}{2p} = \frac{9}{2(\lambda+1)^2 p} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1491.In acute $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a}{h_a \cos^2 A} \geq 8\sqrt{3}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/2026

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a}{h_a \cos^2 A} = \sum \frac{a}{\frac{2S}{a} \cos^2 A} = \frac{1}{2S} \sum \frac{a^2}{\cos^2 A} = \frac{1}{2S} \sum \frac{4R^2 \sin^2 A}{\cos^2 A} =$$

$$= \frac{4R^2}{2S} \sum \tan^2 A \geq \frac{2R^2}{rp} \cdot 9 = \frac{18R^2}{rp} \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\geq} \frac{18R^2}{r \cdot \frac{3R\sqrt{3}}{2}} = \frac{12R}{r\sqrt{3}} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} 8\sqrt{3} = RHS.$$

Am folosit mai sus $\sum \tan^2 A \geq 9$, in acute $\triangle ABC$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In acute $\triangle ABC$ holds

$$\sum \left(\frac{a}{h_a \cos^2 A} \right)^n \geq 3 \left(\frac{8}{\sqrt{3}} \right)^n, n \in \mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n = 0$ se obține egalitatea $3 = 3$.

Pentru $n = 1$ vezi Lema.

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum \left(\frac{a}{h_a \cos^2 A} \right)^n \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{a}{h_a \cos^2 A} \right)^n}{3^{n-1}} \stackrel{\text{Lema}}{\geq} \frac{(8\sqrt{3})^n}{3^{n-1}} = 3 \left(\frac{8}{\sqrt{3}} \right)^n = RHS.$$

Lema.

In acute $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a}{h_a \cos^2 A} \geq 8\sqrt{3}.$$

Problema1492.

If $x, y, z > 0$, $\sum x^2 = 1$ then

$$\sum \frac{x}{y^2 + 1} \geq \frac{3}{4} \left(\sum x\sqrt{x} \right)^2.$$

Mathlinks-2012

Soluție.

$$\begin{aligned}
LHS &= \sum \frac{x}{y^2+1} = \sum \frac{x^3}{x^2y^2+x^2} \stackrel{CS}{\geq} \frac{\left(\sum x\sqrt{x}\right)^2}{\sum (x^2y^2+x^2)} = \frac{\left(\sum x\sqrt{x}\right)^2}{\sum x^2y^2 + \sum x^2} = \frac{\left(\sum x\sqrt{x}\right)^2}{\sum x^2y^2+1} \stackrel{CS}{\geq} \\
&\stackrel{CS}{\geq} \frac{\left(\sum x\sqrt{x}\right)^2}{\frac{1}{3}\left(\sum x^2\right)^2+1} = \frac{\left(\sum x\sqrt{x}\right)^2}{\frac{1}{3}(1)^2+1} = \frac{3}{4}\left(\sum x\sqrt{x}\right)^2 = RHS.
\end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Remarcă.

If $x, y, z > 0$, $\sum x^2 = 1$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{x}{y^2+\lambda} \geq \frac{3}{3\lambda+1} \left(\sum x\sqrt{x}\right)^2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\begin{aligned}
LHS &= \sum \frac{x}{y^2+\lambda} = \sum \frac{x^3}{x^2y^2+\lambda x^2} \stackrel{CS}{\geq} \frac{\left(\sum x\sqrt{x}\right)^2}{\sum (x^2y^2+\lambda x^2)} = \frac{\left(\sum x\sqrt{x}\right)^2}{\sum x^2y^2 + \lambda \sum x^2} = \frac{\left(\sum x\sqrt{x}\right)^2}{\sum x^2y^2 + \lambda} \stackrel{CS}{\geq} \\
&\stackrel{CS}{\geq} \frac{\left(\sum x\sqrt{x}\right)^2}{\frac{1}{3}\left(\sum x^2\right)^2 + \lambda} = \frac{\left(\sum x\sqrt{x}\right)^2}{\frac{1}{3}(1)^2 + \lambda} = \frac{3}{3\lambda+1} \left(\sum x\sqrt{x}\right)^2 = RHS.
\end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Remarcă.

Cazul $\lambda = 0$.

If $x, y, z > 0$, $\sum x^2 = 1$ then

$$\sum \frac{x}{y^2} \geq 3 \left(\sum x\sqrt{x}\right)^2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\begin{aligned}
LHS &= \sum \frac{x}{y^2} = \sum \frac{x^3}{x^2 y^2} \stackrel{CS}{\geq} \frac{\left(\sum x\sqrt{x}\right)^2}{\sum x^2 y^2} = \frac{\left(\sum x\sqrt{x}\right)^2}{\sum x^2 y^2} = \frac{\left(\sum x\sqrt{x}\right)^2}{\sum x^2 y^2} \stackrel{CS}{\geq} \frac{\left(\sum x\sqrt{x}\right)^2}{\frac{1}{3}(\sum x^2)^2} = \\
&= \frac{\left(\sum x\sqrt{x}\right)^2}{\frac{1}{3}(1)^2} = 3\left(\sum x\sqrt{x}\right)^2 = RHS.
\end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Problema 1493.

If $a, b, c, d > 0$, $abcd = 1$ then

$$\sum a \leq \sum a^5.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities 8/2026

Soluție.

$$\text{Folosim } \sum a^5 \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^5}{4^4} = \frac{\sum a}{4} \cdot \frac{\left(\sum a\right)^4}{4^3} \stackrel{AG}{\geq} \sqrt[4]{abcd} \cdot \frac{\left(\sum a\right)^4}{4^3} = \frac{\left(\sum a\right)^4}{4^3} \stackrel{AG}{\geq} \sum a.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = d = 1$.

Remarcă.

If $a, b, c, d > 0$, $abcd = 1$ and $n \in \mathbb{N}^*$ then

$$\sum a \leq \sum a^n.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n = 1$ se obține egalitatea $\sum a = \sum a$.

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$\sum a^n \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^n}{4^{n-1}} = \frac{\sum a}{4} \cdot \frac{\left(\sum a\right)^{n-1}}{4^{n-2}} \stackrel{AG}{\geq} \sqrt[4]{abcd} \cdot \frac{\left(\sum a\right)^{n-1}}{4^{n-2}} = \frac{\left(\sum a\right)^{n-1}}{4^{n-2}} \stackrel{AG}{\geq} \sum a.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = d = 1$.

Problema 1494.

In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{27 \prod (b+c-a)}{2(a+b+c)^2} \leq \sum a \cos A \leq \frac{a+b+c}{2}.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Inequalities 8/2026

Soluție.

$$\frac{27 \prod (b+c-a)}{2(a+b+c)^2} \leq \sum a \cos A \leq \frac{a+b+c}{2} \Leftrightarrow \frac{27 \prod (p-a)}{p^2} \leq \sum a \cos A \leq p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{27r^2 p}{p^2} \leq \frac{2pr}{R} \leq p, \text{ vezi } 2p^2 \geq 27Rr, (\text{Coșniță și Turtoiu}) \text{ și } R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Am folosit mai sus identitățile $\sum a \cos A = \frac{2pr}{R}$ și $\prod (p-a) = r^2 p$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \sqrt{a \cos A} \leq \sqrt{p}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \sqrt{a \cos A} \stackrel{CBS}{\leq} \sqrt{\sum a \cos A} = \sqrt{\frac{2pr}{R}} \stackrel{Euler}{\leq} \sqrt{p} = RHS$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum (a \cos A)^n \geq 3 \left(\frac{9r^2}{p} \right)^n, n \in \mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n = 0$ se obține egalitatea $3=3$.

Pentru $n = 1$ vezi $\sum a \cos A \geq \frac{27r^2}{p}$.

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum (a \cos A)^n \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{(\sum a \cos A)^n}{3^{n-1}} = \frac{\left(\frac{2pr}{R}\right)^n}{3^{n-1}} \stackrel{\text{Cosnita}}{\geq} \frac{\left(\frac{27r^2}{p}\right)^n}{3^{n-1}} = 3 \left(\frac{9r^2}{p}\right)^n = RHS.$$

Am folosit mai sus identitatea $\sum a \cos A = \frac{2pr}{R}$ și $2p^2 \geq 27Rr$, (Coșniță și Turtoiu).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1495.

If $a, b, c, d > 0$, $abcd = 1$ then

$$\sum \frac{a^4 + 4}{bc} \geq 4(1 + a + b + c + d).$$

Kunihiko Chikaya, Japan, Mathematical Inequalities 8/2026

Soluție.

Folosim $\frac{a^4}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{da} + \frac{1}{ab} \stackrel{AG}{\geq} 4 \sqrt[4]{\frac{a^4}{bc} \cdot \frac{1}{cd} \cdot \frac{1}{da} \cdot \frac{1}{ab}} = 4a$ și analoagele, iar

$$\frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{da} + \frac{1}{ab} \stackrel{AG}{\geq} 4 \sqrt[4]{\frac{1}{bc} \cdot \frac{1}{cd} \cdot \frac{1}{da} \cdot \frac{1}{ab}} = 4.$$

Adun $\frac{a^4}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{da} + \frac{1}{ab} \geq 4a$ și analoagele, folosesc $\frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{da} + \frac{1}{ab} \geq 4$, obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = d = 1$.

Remarcă.

If $a, b, c > 0$, $abc = 1$ then

$$\sum \frac{a^3 + 3}{bc} \geq 3(1 + a + b + c).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim $\frac{a^3}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} \stackrel{AG}{\geq} 3 \sqrt[3]{\frac{a^3}{bc} \cdot \frac{1}{ca} \cdot \frac{1}{ab}} = 3a$ și analoagele, iar $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} \stackrel{AG}{\geq} 3 \sqrt[3]{\frac{1}{bc} \cdot \frac{1}{ca} \cdot \frac{1}{ab}} = 3$.

Adun $\frac{a^3}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} \geq 3a$ și analoagele, folosesc $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} \geq 3$, obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Problema 1496.

If $x, y, z > 0, x + y + z = 1$ then

$$\sum \frac{1}{x} \geq \frac{21}{1+36xyz}.$$

Elton Papanikolla, MathOlymp 8/2026

Remarcă.

If $x, y, z > 0, x + y + z = 1, 3n = 27 + k, n \leq 36$ then

$$\sum \frac{1}{x} \geq \frac{n}{1+kxyz}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = \sum x = 1, q = \sum xy, r = xyz$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{q}{r} \geq \frac{n}{1+kr} \Leftrightarrow q \geq \frac{nr}{1+kr} \Leftrightarrow q \geq \frac{n}{k} \left(1 - \frac{1}{1+kr} \right), \text{ care rezultă din inegalitatea lui Schur}$$

$$p^3 - 4pq + 9r \geq 0, p = 1 \Leftrightarrow 1 - 4q + 9r \geq 0 \Leftrightarrow r \geq \frac{4q-1}{9}.$$

Este suficient să arătăm că:

$$q \geq \frac{n}{k} \left(1 - \frac{1}{1+k \cdot \frac{4q-1}{9}} \right) \Leftrightarrow q(9+4kq-k) \geq n(4q-1) \Leftrightarrow 4kq^2 + (9-k-4n)q + n \geq 0,$$

$$3n = 27 + k \Leftrightarrow 12(n-9)q^2 + (36-7n)q + n \geq 0 \Leftrightarrow (3q-1)[4(n-9)q-n] \geq 0,$$

$$\text{vezi } q \leq \frac{1}{3} \leq \frac{n}{4(n-9)}, n \leq 36.$$

$$\text{Am folosit mai sus } q \leq \frac{1}{3}, \text{ vezi } 1 = (x+y+z)^2 \stackrel{\text{SOS}}{\geq} 3(xy+yz+zx) = 3q \Rightarrow q \leq \frac{1}{3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Remarcă.

Cazul $n = 36, k = 81$.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$, then

$$\sum \frac{1}{x} \geq \frac{36}{1 + 81xyz}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = \sum x = 1, q = \sum xy, r = xyz$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{q}{r} \geq \frac{36}{1 + 81r} \Leftrightarrow q \geq \frac{36r}{1 + 81r} \Leftrightarrow q \geq \frac{36}{81} \left(1 - \frac{1}{1 + 81r} \right), \text{ care rezultă din inegalitatea lui Schur}$$

$$p^3 - 4pq + 9r \geq 0, p = 1 \Leftrightarrow 1 - 4q + 9r \geq 0 \Leftrightarrow r \geq \frac{4q - 1}{9}.$$

Este suficient să arătăm că:

$$q \geq \frac{36}{81} \left(1 - \frac{1}{1 + 81 \cdot \frac{4q - 1}{9}} \right) \Leftrightarrow q(9 + 4 \cdot 81q - 81) \geq 36(4q - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 81q^2 + (9 - 81 - 4 \cdot 36)q + 36 \geq 0 \Leftrightarrow 12(36 - 9)q^2 + (36 - 7 \cdot 36)q + 36 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3q - 1)^2 \geq 0,$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Problema 1497.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \left(\tan \frac{A}{2} - \frac{1}{\tan \frac{B}{2}} \right)^2 \geq 4.$$

Dorinel Anca, Târgoviște, RMM 8/2026

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \left(\tan \frac{A}{2} - \frac{1}{\tan \frac{B}{2}} \right)^2 = \sum \left(\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} - \sqrt{\frac{p(p-b)}{(p-a)(p-c)}} \right)^2 = \\ &= \sum \left(\frac{(p-c)\sqrt{p-b} - p\sqrt{p-b}}{\sqrt{p}\sqrt{p-a}\sqrt{p-c}} \right)^2 = \sum \left(\frac{c\sqrt{p-b}}{\sqrt{p}\sqrt{p-a}\sqrt{p-c}} \right)^2 = \sum \frac{c^2(p-b)}{p(p-a)(p-c)} \stackrel{AG}{\geq} \\ &\stackrel{AG}{\geq} 3\sqrt[3]{\prod \frac{c^2(p-b)}{p(p-a)(p-c)}} = 3\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{p^3(p-b)(p-a)(p-c)}} = 3\sqrt[3]{\frac{16R^2r^2p^2}{p^3 \cdot r^2p}} = 3\sqrt[3]{\frac{16R^2}{p^2}} \stackrel{Mitrinovic}{\geq} \\ &\stackrel{Mitrinovic}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{16R^2}{27R^2}} = 3\sqrt[3]{\frac{64}{27}} = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4 = RHS. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{9Rr}{F} \leq \sum \left(\frac{1}{\tan \frac{A}{2}} - \tan \frac{B}{2} \right) \leq \frac{9R^2}{2F}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lemă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \left(\frac{1}{\tan \frac{A}{2}} - \tan \frac{B}{2} \right) = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{pr}.$$

Demonstrație.

$$\sum \left(\frac{1}{\tan \frac{A}{2}} - \tan \frac{B}{2} \right) = \sum \left(\cot \frac{A}{2} - \tan \frac{B}{2} \right) = \sum \cot \frac{A}{2} - \sum \tan \frac{B}{2} = \frac{p}{r} - \frac{4R+r}{p} = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{pr}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei principale.

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \left(\frac{1}{\tan \frac{A}{2}} - \tan \frac{B}{2} \right) = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{pr} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{4R^2 + 4Rr + 3r^2 - r^2 - 4Rr}{pr} = \frac{4R^2 + 2r^2}{F} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{9R^2}{2F}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \left(\frac{1}{\tan \frac{A}{2}} - \tan \frac{B}{2} \right) = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{pr} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{16Rr - 5r^2 - r^2 - 4Rr}{pr} = \frac{12Rr - 6r^2}{F} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{9Rr}{F}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \left(\frac{1}{\tan \frac{A}{2}} - \tan \frac{B}{2} \right)^n \geq 3 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n, n \in \mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n = 0$ se obține egalitatea $3=3$.

Pentru $n = 1$ vezi Lema.

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum \left(\frac{1}{\tan \frac{A}{2}} - \tan \frac{B}{2} \right)^n \stackrel{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum \left(\frac{1}{\tan \frac{A}{2}} - \tan \frac{B}{2} \right) \right)^n}{3^{n-1}} \stackrel{Lema}{\geq} \frac{(2\sqrt{3})^n}{3^{n-1}} = 3 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n = RHS.$$

Lemă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \left(\frac{1}{\tan \frac{A}{2}} - \tan \frac{B}{2} \right) \geq 2\sqrt{3}.$$

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \sqrt{\left(\frac{1}{\tan \frac{A}{2}} - \tan \frac{B}{2} \right)} \leq 3R\sqrt{\frac{3}{2F}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \sqrt{\left(\frac{1}{\tan \frac{A}{2}} - \tan \frac{B}{2} \right)} \stackrel{CBS}{\leq} \sqrt{3 \sum \left(\frac{1}{\tan \frac{A}{2}} - \tan \frac{B}{2} \right)} \stackrel{Lema}{\leq} \sqrt{3 \cdot \frac{9R^2}{2F}} = 3R\sqrt{\frac{3}{2F}}.$$

Lemă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \left(\frac{1}{\tan \frac{A}{2}} - \tan \frac{B}{2} \right) \leq \frac{9R^2}{2F}.$$

Problema 1498.

In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{\sum m_a^2}{\sum r_a} \leq 2R - r.$$

Soluție.

Folosind $\sum m_a^2 = \frac{3}{4} \sum a^2 = \frac{3}{4} \cdot 2(p^2 - r^2 - 4Rr) = \frac{3}{2}(p^2 - r^2 - 4Rr)$ și $\sum r_a = 4R + r$, inegalitatea se scrie:

$$\frac{\frac{3}{2}(p^2 - r^2 - 4Rr)}{4R + r} \leq 2R - r \Leftrightarrow 3(p^2 - r^2 - 4Rr) \leq 2(4R + r)(2R - r) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(p^2 - r^2 - 4Rr) \leq 2(8R^2 - 2Rr - r^2) \Leftrightarrow 3p^2 \leq 16R^2 + 8Rr + r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2 \leq \frac{(4R + r)^2}{3}, \text{ vezi } p^2 \leq \frac{R(4R + r)^2}{2(2R - r)}, (\text{Gergone}).$$

Este suficient să arătăm că:

$$\frac{R(4R + r)^2}{2(2R - r)} \leq \frac{(4R + r)^2}{3} \Leftrightarrow 3R \leq 2(2R - r) \Leftrightarrow R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{\sum m_a^2}{\sum h_a} \geq \frac{2r}{R}(2R - r).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $\sum m_a^2 = \frac{3}{4} \sum a^2 = \frac{3}{4} \cdot 2(p^2 - r^2 - 4Rr) = \frac{3}{2}(p^2 - r^2 - 4Rr)$ și $\sum h_a = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2R}$, inegalitatea se scrie:

$$\frac{\frac{3}{2}(p^2 - r^2 - 4Rr)}{\frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2R}} \geq \frac{2r}{R}(2R - r) \Leftrightarrow 3R^2(p^2 - r^2 - 4Rr) \geq 2r(2R - r)(p^2 + r^2 + 4Rr) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2(3R^2 - 4Rr + 2r^2) \geq r(12R^3 + 19R^2r - 4Rr^2 - 2r^3), \text{ vezi inegalitatea lui Gerretsen}$$

$$p^2 \geq 16Rr - 5r^2.$$

Rămâne să arătăm că:

$$(16Rr - 5r^2)(3R^2 - 4Rr + 2r^2) \geq r(12R^3 + 19R^2r - 4Rr^2 - 2r^3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18R^3 - 49R^2r + 28Rr^2 - 4r^3 \geq 0 \Leftrightarrow (R - 2r)(18R^2 - 13Rr + 2r^2) \geq 0, \text{ vezi } R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$9r \leq \sum \frac{m_a^2}{r_a} \leq \frac{9R^3}{8r^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lemă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{m_a^2}{r_a} = \frac{p^2 - 4r^2 - 7Rr}{r}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{m_a^2}{r_a} = \frac{p^2 - 4r^2 - 7Rr}{r} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{4R^2 + 4Rr + 3r^2 - 4r^2 - 7Rr}{r} = \frac{4R^2 - 3Rr - r^2}{r} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{9R^3}{8r^2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{m_a^2}{r_a} = \frac{p^2 - 4r^2 - 7Rr}{r} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{16Rr - 5r^2 - 4r^2 - 7Rr}{r} = \frac{9Rr - 9r^2}{r} = 9(R - r) \stackrel{\text{Euler}}{\geq} 9r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{9R}{2} \leq \sum \frac{m_a^2}{h_a} \leq \frac{9R^2}{4r}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lemă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{m_a^2}{h_a} = \frac{p^2 + 5r^2 + 2Rr}{4r}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{m_a^2}{h_a} = \frac{p^2 + 5r^2 + 2Rr}{4r} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{4R^2 + 4Rr + 3r^2 + 5r^2 + 2Rr}{4r} = \frac{2R^2 + 3Rr + 4r^2}{2r} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{9R^2}{4r}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{m_a^2}{h_a} = \frac{p^2 + 5r^2 + 2Rr}{4r} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{16Rr - 5r^2 + 5r^2 + 2Rr}{4r} = \frac{18Rr}{4r} = \frac{9R}{2} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} 18r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{m_a^2}{h_a} \leq \sum \frac{m_a^2}{r_a}.$$

Marin Chirciu

Soluție.**Lema1.**

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{m_a^2}{h_a} = \frac{p^2 + 5r^2 + 2Rr}{4r}.$$

Lema2.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{m_a^2}{r_a} = \frac{p^2 - 4r^2 - 7Rr}{r}.$$

Folosind **Lemele** de mai sus inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2 + 5r^2 + 2Rr}{4r} \leq \frac{p^2 - 4r^2 - 7Rr}{r} \Leftrightarrow p^2 \geq 10Rr + 7r^2,$$

vezi inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$$16Rr - 5r^2 \geq 10Rr + 7r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1499.

Solve in naturals

$$x^2 + 3^y = 3026.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/2026

Soluție.

$$1). y = 0 \Rightarrow x^2 + 3^0 = 3026 \Leftrightarrow x^2 = 3025 \Leftrightarrow x = 55.$$

$$2). y > 0 \Rightarrow x^2 + 3^y \equiv 0, 1 \pmod{3} \neq 3026 \equiv 2 \pmod{3}.$$

Deducem că $(x, y) = (55, 0)$ este soluția unică a ecuației.

Remarcă.

1). Let be $3\lambda + 1 = n^2$, $n \in \mathbf{N}$, fixed. Solve in naturals

$$x^2 + 3^y = 3\lambda + 2.$$

Soluție.

$$1). y = 0 \Rightarrow x^2 + 3^0 = 3\lambda + 2 \Leftrightarrow x^2 = 3\lambda + 1 \Leftrightarrow x^2 = n^2 \Leftrightarrow x = n.$$

$$2). y > 0 \Rightarrow x^2 + 3^y \equiv 0, 1 \pmod{3} \neq 3\lambda + 2 \equiv 2 \pmod{3}.$$

Deducem că $(x, y) = (n, 0)$ este soluția unică a ecuației.

2). Let be $n \in \mathbf{N}$ fixed. Solve in naturals

$$x^2 + 3^y = n^2 + 1.$$

Soluție.

$$1). y = 0 \Rightarrow x^2 + 3^0 = n^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 = n^2 \Leftrightarrow x = n.$$

$$2). y > 0 \Rightarrow x^2 + 3^y \equiv 0, 1 \pmod{3} \neq n^2 + 1 \equiv 2 \pmod{3}.$$

Deducem că $(x, y) = (n, 0)$ este soluția unică a ecuației.

3). Solve in naturals

$$x^2 + 3^y = 1.$$

Soluție.

1). $y = 0 \Rightarrow x^2 + 3^0 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$ este soluție.

2). $y \geq 1 \Rightarrow LHS = x^2 + 3^y > x^2 + 3^1 > 1 = RHS$, false.

Deducem că $(x, y) = (0, 0)$ este soluția unică a ecuației.

4). Solve in naturals

$$x^2 + 3^y = 2.$$

Soluție.

1). $y = 0 \Rightarrow x^2 + 3^0 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow (x, y) = (1, 0)$ este soluție.

2). $y \geq 1 \Rightarrow LHS = x^2 + 3^y \geq x^2 + 3^1 > 2 = RHS$, false.

Deducem că $(x, y) = (1, 0)$ este soluția unică a ecuației.

5). Solve in naturals

$$x^2 + 3^y = 5.$$

Soluție.

1). $y = 0 \Rightarrow x^2 + 3^0 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow (x, y) = (2, 0)$ este soluție.

2). $y \geq 1 \Rightarrow LHS = x^2 + 3^y \geq x^2 + 3^1 \geq 5 = RHS$, false.

Deducem că $(x, y) = (2, 0)$ este soluția unică a ecuației.

6). Solve in naturals

$$x^2 + 3^y = 101.$$

Soluție.

1). $y = 0 \Rightarrow x^2 + 3^0 = 101 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = 10 \Rightarrow (x, y) = (10, 0)$ este soluție.

2). $y > 0 \Rightarrow x^2 + 3^y \equiv 0, 1 \pmod{3} \neq 101 \equiv 2 \pmod{3}$.

Deducem că $(x, y) = (10, 0)$ este soluția unică a ecuației.

7). Solve in naturals

$$x^2 + 3^y = 901.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

1). $y = 0 \Rightarrow x^2 + 3^0 = 901 \Leftrightarrow x^2 = 900 \Leftrightarrow x = 30 \Rightarrow (x, y) = (30, 0)$ este soluție.

2). $y > 0 \Rightarrow x^2 + 3^y \equiv 0, 1 \pmod{3} \neq 901 \equiv 2 \pmod{3}$.

Deducem că $(x, y) = (30, 0)$ este soluția unică a ecuației.

Problema 1500.

If $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 > 0$, $\sum x_i = 5$ then

$$\sum \frac{x}{x_1^2 + x_1 + 4} \leq \frac{5}{5 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities 8/2026

Soluție.

Aplicăm Tangent Line Method pentru funcția $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 4}$, $x \in (0, 5)$ în punctul $x_0 = 1$.

Ecuația tangentei este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{x + 1}{12}$.

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 4} \leq \frac{x + 1}{12} \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 7x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 4) \geq 0.$$

Obținem:

$$LHS = \sum \frac{x_i}{x_1^2 + x_1 + 4} \stackrel{TLM}{\leq} \sum \frac{x_i + 1}{12} = \frac{\sum x_i + 5}{12} = \frac{5 + 5}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \stackrel{\prod x_i \leq 1}{\leq} \frac{5}{5 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} = RHS.$$

Am folosit mai sus $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \leq 1$, vezi $5 = \sum x_i \geq 5 \sqrt[5]{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} \Rightarrow 5 \geq 5 \sqrt[5]{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} \Leftrightarrow x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \leq 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$.

Remarcă.

1). If $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 > 0$, $\sum x_i = 5$ and $\lambda \geq 1$ then

$$\sum \frac{x}{x_1^2 + x_1 + \lambda} \leq \frac{5}{\lambda + 1 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}.$$

Soluție.

Aplicăm Tangent Line Method pentru funcția $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + \lambda}$, $x \in (0, 5)$ în punctul $x_0 = 1$.

$$\text{Ecuația tangentei este } y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - \frac{1}{\lambda + 2} = \frac{\lambda - 1}{(\lambda + 2)^2}(x - 1) \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{(\lambda - 1)x + 3}{(\lambda + 2)^2}.$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + x + \lambda} \leq \frac{(\lambda - 1)x + 3}{(\lambda + 2)^2} \Leftrightarrow (\lambda - 1)x^3 + (\lambda + 2)x^2 - (5\lambda + 1)x + 3\lambda \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 1)^2 [(\lambda - 1)x + 3\lambda] \geq 0, \text{ vezi } x \in (0, 4) \text{ și } \lambda \geq 1.$$

$$LHS = \sum \frac{x}{x^2 + x + \lambda} \stackrel{TLM}{\leq} \sum \frac{(\lambda - 1)x + 3}{(\lambda + 2)^2} = \frac{(\lambda - 1) \sum x + 15}{(\lambda + 2)^2} = \frac{5(\lambda - 1) + 15}{(\lambda + 2)^2} = \frac{5(\lambda + 2)}{(\lambda + 2)^2} =$$

$$= \frac{5}{\lambda + 2} \stackrel{xyz \leq 1}{\leq} \frac{5}{\lambda + 1 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} = RHS.$$

Am folosit mai sus $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \leq 1$, vezi $5 = \sum x_i \geq 5\sqrt[5]{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} \Rightarrow 5 \geq 5\sqrt[5]{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} \Leftrightarrow x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \leq 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$.

2). If $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 > 0$, $\sum x_i = 5$ then

$$\sum \frac{x}{x_1^2 + x_1 + 1} \leq \frac{5}{2 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}.$$

Dezvoltări , Marin Chirciu

Soluție.

Aplicăm Tangent Line Method pentru funcția $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$, $x \in (0, 5)$ în punctul $x_0 = 1$.

$$\text{Ecuația tangentei este } y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}.$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0.$$

Obținem:

$$LHS = \sum \frac{x}{x^2 + x + 1} \stackrel{TLM}{\leq} \sum \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \stackrel{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \leq 1}{\leq} \frac{5}{2 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} = RHS.$$

Am folosit mai sus $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \leq 1$, vezi $5 = \sum x_i \geq 5 \sqrt[5]{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} \Rightarrow 5 \geq 5 \sqrt[5]{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} \Leftrightarrow x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \leq 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$.

Problema 1501.

If $a, b, c > 0$, $\sum a = 3$ and $k \in \mathbf{N}$ then

$$\sum \frac{a}{\sqrt{a^2 + k}} \leq \frac{3}{\sqrt{k+1}}.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 3/25

Soluție.

Funcția $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + k}}$ este concavă pe $(0, \infty)$,

$$\text{vezi } f'(x) = \frac{k}{(x^2 + k)^{\frac{3}{2}}} \text{ și } f''(x) = \frac{-3kx}{(x^2 + k)^{\frac{5}{2}}} < 0.$$

Aplicând inegalitatea lui Jensen pentru funcția concavă $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + k}}$ obținem:

$$LHS = \sum \frac{a}{\sqrt{a^2 + k}} = \sum f(a) \stackrel{\text{Jensen}}{\leq} 3f\left(\frac{\sum a}{3}\right) = 3f\left(\frac{3}{3}\right) = 3f(1) = 3 \frac{1}{\sqrt{1^2 + k}} = \frac{3}{\sqrt{k+1}} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Remarcă.

If $a, b, c > 0$, $\sum a = 3$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{a}{\sqrt{a^2 + a + \lambda}} \leq \frac{3}{\sqrt{\lambda + 2}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Funcția $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + \lambda}}$ este concavă pe $(0, \infty)$,

$$\text{vezi } f'(x) = \frac{x+2\lambda}{(x^2+x+\lambda)^{\frac{3}{2}}} \text{ și } f''(x) = \frac{x^2-(12\lambda+1)x-4\lambda}{(x^2+x+\lambda)^{\frac{5}{2}}} < 0.$$

Aplicând inegalitatea lui Jensen pentru funcția concavă $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+x+\lambda}}$ obținem:

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{a}{\sqrt{a^2+a+\lambda}} = \sum f(a) \stackrel{\text{Jensen}}{\leq} 3f\left(\frac{\sum a}{3}\right) = 3f\left(\frac{3}{3}\right) = 3f(1) = \\ &= 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2+1+\lambda}} = \frac{3}{\sqrt{\lambda+2}} = RHS. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Problema 1502.

If $x, y, z > 0$ then

$$\sum \frac{1}{x(x+y)} \geq \frac{27}{2(x+y+z)^2}.$$

Mathlinks-2012

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{1}{x(x+y)} \stackrel{AG}{\geq} 3 \sqrt[3]{\prod \frac{1}{x(x+y)}} = \frac{3}{\sqrt[3]{xyz \prod (x+y)}} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{27}{2(x+y+z)^2} = RHS,$$

$$\text{unde } \frac{3}{\sqrt[3]{xyz \prod (x+y)}} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{27}{2(x+y+z)^2} \Leftrightarrow 2(x+y+z)^2 \geq 9 \sqrt[3]{xyz \prod (x+y)}, \text{ vezi}$$

$$2(x+y+z)^2 \geq 2 \cdot 3(xy+yz+zx) = 3(2xy+2yz+2zx) =$$

$$= 3 \sum x(y+z) \stackrel{AG}{\geq} 3 \cdot 3 \sqrt[3]{\prod x(y+z)} = 9 \sqrt[3]{xyz \prod (x+y)}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z$.

Remarcă.

1). If $x, y, z > 0$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{1}{x(x+\lambda y)} \geq \frac{27}{(\lambda+1)(x+y+z)^2}.$$

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{1}{x(x+\lambda y)} \stackrel{AG}{\geq} 3 \sqrt[3]{\prod \frac{1}{x(x+\lambda y)}} = \frac{3}{\sqrt[3]{xyz \prod (x+\lambda y)}} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{27}{(\lambda+1)(x+y+z)^2} = RHS,$$

$$\text{unde } \frac{3}{\sqrt[3]{xyz \prod (x+\lambda y)}} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{27}{(\lambda+1)(x+y+z)^2} \Leftrightarrow (\lambda+1)(x+y+z)^2 \geq 9 \sqrt[3]{xyz \prod (x+\lambda y)}, \text{ vezi}$$

$$(\lambda+1)(x+y+z)^2 \geq (\lambda+1) \cdot 3(xy+yz+zx) = 3 \sum (\lambda+1)xy =$$

$$= 3 \sum x(y+\lambda z) \stackrel{AG}{\geq} 3 \cdot 3 \sqrt[3]{\prod x(y+\lambda z)} = 9 \sqrt[3]{xyz \prod (x+\lambda y)}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z$.

2). If $x, y, z > 0$ then

$$\sum \frac{1}{x^2} \geq \frac{27}{(x+y+z)^2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{1}{x^2} \stackrel{AG}{\geq} 3 \sqrt[3]{\prod \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{x^2 y^2 z^2}} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{27}{(x+y+z)^2} = RHS,$$

$$\text{unde } \frac{3}{\sqrt[3]{x^2 y^2 z^2}} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{27}{(x+y+z)^2} \Leftrightarrow (x+y+z)^2 \geq 9 \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} \Leftrightarrow x+y+z \geq 3 \sqrt[3]{xyz},$$

(AM-GM)

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z$.

Problema1503.

Solve for reals

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 12 \\ xy + x + y = 3 \end{cases}.$$

Mihai Miculița. Oradea, Mathlinks-2012

Soluție.

$$\text{Notând } x + y = S \text{ și } xy = P \text{ obținem } \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 12 \\ xy + x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P + S = 12 \\ P + S = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 3S - 18 = 0 \\ P = 3 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (S - 3)(S + 6) = 0 \\ P = 3 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 3 \\ P = 0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} S = -6 \\ P = 9 \end{cases}.$$

$$1). \begin{cases} S = 3 \\ P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) \in \{(0, 3), (3, 0)\}.$$

$$2). \begin{cases} S = -6 \\ P = 9 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (-3, -3).$$

Mulțimea soluțiilor sistemului este $S = \{(0, 3), (3, 0), (-3, -3)\}$.

Remarcă.

Let be $\lambda > 0$ fixed. Solve for reals

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = \lambda(\lambda + 1) \\ xy + x + y = \lambda \end{cases}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\text{Notând } x + y = S \text{ și } xy = P \text{ obținem } \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = \lambda(\lambda + 1) \\ xy + x + y = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P + S = \lambda(\lambda + 1) \\ P + S = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 3S - \lambda(\lambda + 3) = 0 \\ P = \lambda - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (S - \lambda)(S + \lambda + 3) = 0 \\ P = \lambda - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = \lambda \\ P = 0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} S = -\lambda - 3 \\ P = 2\lambda + 3 \end{cases}.$$

$$1). \begin{cases} S = \lambda \\ P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) \in \{(0, \lambda), (\lambda, 0)\}.$$

$$2). \begin{cases} S = -\lambda - 3 \\ P = 2\lambda + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-\lambda - 3 - \sqrt{(\lambda - 3)(\lambda + 1)}}{2} \\ y_1 = \frac{-\lambda - 3 + \sqrt{(\lambda - 3)(\lambda + 1)}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = \frac{-\lambda - 3 + \sqrt{(\lambda - 3)(\lambda + 1)}}{2} \\ y_2 = \frac{-\lambda - 3 - \sqrt{(\lambda - 3)(\lambda + 1)}}{2} \end{cases}.$$

Mulțimea soluțiilor sistemului este $S = \{(0, \lambda), (\lambda, 0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$.

Problema 1504.

Let be $a > b > 0$ and $ab = 8$ then find min of

$$P = \frac{a^2 + b^2}{a - b}.$$

Mathlinks-2012

Soluție.

$$P = \frac{a^2 + b^2}{a - b} = \frac{(a - b)^2 + 2ab}{a - b} = a - b + \frac{2ab}{a - b} = a - b + \frac{2 \cdot 8}{a - b} \stackrel{AG}{\geq} 2\sqrt{(a - b) \cdot \frac{2 \cdot 8}{a - b}} = 8.$$

Rezultă că $\min P = 8$ și este atins pentru $a - b = \frac{16}{a - b}$, $ab = 8$ și $a > b > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a, b) = (2\sqrt{3} + 2, 2\sqrt{3} - 2).$$

Deducem că $\min P = 8$ pentru $(a, b) = (2\sqrt{3} + 2, 2\sqrt{3} - 2)$.

Remarcă.

Let be $\lambda > 0$ fixed, $a > b > 0$ and $ab = 2\lambda^2$ then find min of

$$P = \frac{a^2 + b^2}{a - b}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$P = \frac{a^2 + b^2}{a - b} = \frac{(a - b)^2 + 2ab}{a - b} = a - b + \frac{2ab}{a - b} = a - b + \frac{2 \cdot 2\lambda^2}{a - b} \stackrel{AG}{\geq} 2\sqrt{(a - b) \cdot \frac{4\lambda^2}{a - b}} = 2\lambda.$$

Rezultă că $\min P = 2\lambda$ și este atins pentru $a - b = \frac{4\lambda^2}{a - b}$, $ab = 2\lambda^2$ și $a > b > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a, b) = (\lambda\sqrt{3} + \lambda, \lambda\sqrt{3} - \lambda).$$

Deducem că $\min P = 2\lambda$ pentru $(a, b) = (\lambda\sqrt{3} + \lambda, \lambda\sqrt{3} - \lambda)$.

Problema1505.

Let be $n \in \mathbb{N}^*$ fixed. Solve for reals

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{2n(n+1)} \\ y^{x+y} = x^{\frac{1}{2}n(n+1)} \end{cases}.$$

Marin Chirciu,

Soluție.Condiții de existență $x, y > 0$.

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{2n(n+1)} \\ y^{x+y} = x^{\frac{1}{2}n(n+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x^{x+y} = \lg y^{2n(n+1)} \\ \lg y^{x+y} = \lg x^{\frac{1}{2}n(n+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)\lg x = 2n(n+1)\lg y \\ (x+y)\lg y = \frac{1}{2}n(n+1)\lg x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{(x+y)\lg x}{(x+y)\lg y} = \frac{4\lg y}{\lg x} \\ (x+y)\lg y = \frac{1}{2}n(n+1)\lg x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lg x)^2 = 4(\lg y)^2 \\ (x+y)\lg y = \frac{1}{2}n(n+1)\lg x \end{cases}.$$

$$1). \begin{cases} \lg x = 2\lg y \\ (x+y)\lg y = \frac{1}{2}n(n+1)\lg x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = 2\lg y \\ (x+y)\lg y = \frac{1}{2}n(n+1) \cdot 2\lg y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lg x = 2\lg y \\ (x+y-n(n+1))\lg y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = 0 \\ \lg y = 0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} \lg x = 2\lg y \\ x+y-n(n+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x=y^2 \\ x+y-n(n+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} y^2+y-(n+1)(n+2)=0 \\ x=n(n+1)-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{ sau}$$

$$\begin{cases} (y-n)(y+n+1)=0 \\ x=n(n+1)-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} y=n \\ x=n^2 \end{cases}.$$

$$2). \begin{cases} \lg x = -2\lg y \\ (x+y)\lg y = \frac{1}{2}n(n+1)\lg x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = -2\lg y \\ (x+y)\lg y = -\frac{1}{2}n(n+1) \cdot 2\lg y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lg x = -2\lg y \\ (x+y+n(n+1))\lg y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = 0 \\ \lg y = 0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} \lg x = -2\lg y \\ x+y+n(n+1)=0 \end{cases}, \text{fals.}$$

Mulțimea soluțiilor sistemului este $S = \{(1,1), (n, n^2)\}$.

Problema 1506.

If $(2x)^{\log_5 2} - (3x)^{\log_5 3} = 0$ then find $x + \frac{1}{x}$.

MathLinks-2022

Soluție.

$$(2x)^{\log_5 2} - (3x)^{\log_5 3} = 0 \Leftrightarrow (2x)^{\log_5 2} = (3x)^{\log_5 3} \Leftrightarrow \lg(2x)^{\log_5 2} = \lg(3x)^{\log_5 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_5 2 \cdot \lg(2x) = \log_5 3 \cdot \lg(3x) \Leftrightarrow \frac{\lg 2}{\lg 5} \cdot \lg(2x) = \frac{\lg 3}{\lg 5} \cdot \lg(3x) \Leftrightarrow \lg 2 \cdot \lg(2x) = \lg 3 \cdot \lg(3x)$$

$$\Leftrightarrow \lg 2 \cdot (\lg 2 + \lg x) = \lg 3 \cdot (\lg 3 + \lg x) \Leftrightarrow \lg^2 2 + \lg 2 \lg x = \lg^2 3 + \lg 3 \lg x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg x = -(\lg 2 + \lg 3) \Leftrightarrow \lg x = -\lg 6 \Leftrightarrow \lg x = \lg \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Obținem } x + \frac{1}{x} = \frac{1}{6} + 6 = \frac{37}{6}.$$

$$\text{Deducem că } x + \frac{1}{x} = \frac{37}{6}.$$

Remarcă.

Let be $a, b, c > 1$ fixed. Solve in reals.

$$(ax)^{\log_c a} - (bx)^{\log_c b} = 0$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$(ax)^{\log_c a} - (bx)^{\log_c b} = 0 \Leftrightarrow (ax)^{\log_c a} = (bx)^{\log_c b} \Leftrightarrow \lg(ax)^{\log_c a} = \lg(bx)^{\log_c b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_c a \cdot \lg(ax) = \log_c b \cdot \lg(bx) \Leftrightarrow \frac{\lg a}{\lg c} \cdot \lg(ax) = \frac{\lg b}{\lg c} \cdot \lg(bx) \Leftrightarrow \lg a \cdot \lg(ax) = \lg b \cdot \lg(bx)$$

$$\Leftrightarrow \lg a \cdot (\lg a + \lg x) = \lg b \cdot (\lg b + \lg x) \Leftrightarrow \lg^2 a + \lg a \lg x = \lg^2 b + \lg b \lg x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg x = -(\lg a + \lg b) \Leftrightarrow \lg x = -\lg(ab) \Leftrightarrow \lg x = \lg \frac{1}{ab} \Leftrightarrow x = \frac{1}{ab}.$$

Deducem că $x = \frac{1}{ab}$ este soluția unică a ecuației..

Problema 1507.

If $a, b, c > 0$, $\sum a^2 = 3$ then

$$\sum \frac{a^2}{1+2bc} \geq \frac{3}{5}.$$

Bosnia and Herzegovina, 2002

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{a^2}{1+2bc} = \sum \frac{a^4}{a^2+2a^2bc} \stackrel{CS}{\geq} \frac{(\sum a^2)^2}{\sum (a^2+2a^2bc)} = \frac{(\sum a^2)^2}{\sum a^2+2abc \sum a} = \\ &= \frac{1}{1+2abc \sum a} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{3}{5} = RHS, \end{aligned}$$

$$\text{unde } \frac{1}{1+2abc \sum a} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{3}{5} \Leftrightarrow 5 \geq 3+6abc \sum a \Leftrightarrow 1 \geq 3abc \sum a \Leftrightarrow (\sum a^2)^2 \geq 3abc \sum a,$$

$$\text{vezi } (\sum a^2)^2 \geq (\sum ab)^2 \geq 3 \sum ab \cdot bc = 3abc \sum a.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Remarcă.

1). If $a, b, c > 0$, $\sum a^2 = 3$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{a^2}{\lambda+2bc} \geq \frac{3}{3\lambda+2}.$$

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{a^2}{\lambda+2bc} = \sum \frac{a^4}{\lambda a^2+2a^2bc} \stackrel{CS}{\geq} \frac{(\sum a^2)^2}{\sum (\lambda a^2+2a^2bc)} = \frac{(\sum a^2)^2}{\lambda \sum a^2+2abc \sum a} = \\ &= \frac{1}{\lambda+2abc \sum a} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{3}{3\lambda+2} = RHS, \end{aligned}$$

$$\text{unde } \frac{1}{\lambda+2abc \sum a} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{3}{3\lambda+2} \Leftrightarrow 3\lambda+2 \geq 3\lambda+6abc \sum a \Leftrightarrow 1 \geq 3abc \sum a \Leftrightarrow$$

$$(\sum a^2)^2 \geq 3abc \sum a,$$

$$\text{vezi } (\sum a^2)^2 \geq (\sum ab)^2 \geq 3 \sum ab \cdot bc = 3abc \sum a.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2). If $a, b, c > 0$, $\sum a^2 = 3$ then

$$\sum \frac{a^2}{bc} \geq 3.$$

Dezvoltări , Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a^2}{bc} = \sum \frac{a^4}{a^2 bc} \stackrel{CS}{\geq} \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a^2 bc} = \frac{1}{abc \sum a} \stackrel{(1)}{\geq} 3 = RHS$$

$$\text{unde } \frac{1}{abc \sum a} \geq 3 \Leftrightarrow 1 \geq 3abc \sum a \Leftrightarrow \left(\sum a^2\right)^2 \geq 3abc \sum a,$$

$$\text{vezi } \left(\sum a^2\right)^2 \geq \left(\sum ab\right)^2 \geq 3 \sum ab \cdot bc = 3abc \sum a.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Problema 1508.

If $0 < a \leq b$ then

$$\int_a^b \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+2)(2x^2+1)}} \geq \frac{1}{3} \ln \frac{b^2+1}{a^2+1}.$$

Mihaly Bencze, Braşov, Octogon, PP 41413

Soluție.

Lema.

If $x \in \mathbf{R}$ then

$$\sqrt{(x^2+2)(2x^2+1)} \leq \frac{3}{2}(x^2+1).$$

Demonstrație.

$$\sqrt{(x^2+2)(2x^2+1)} \stackrel{AG}{\leq} \frac{(x^2+2)+(2x^2+1)}{2} = \frac{3}{2}(x^2+1),$$

cu egal pentru $x^2+2=2x^2+1 \Leftrightarrow x^2=1$.

Folosind **Lema** obținem:

$$LHS = \int_a^b \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+2)(2x^2+1)}} \geq \int_a^b \frac{xdx}{\frac{3}{2}(x^2+1)} = \frac{2}{3} \int_a^b \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{3} \ln(x^2+1) \Big|_a^b = \frac{1}{3} \ln \frac{b^2+1}{a^2+1} = RHS.$$

Remarcă.

If $0 < a \leq b$ and $\lambda \geq 1$ then

$$\int_a^b \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+\lambda)(\lambda x^2+1)}} \geq \frac{1}{\lambda+1} \ln \frac{b^2+1}{a^2+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x \in \mathbf{R}$ and $\lambda \geq 1$ then

$$\sqrt{(x^2+\lambda)(\lambda x^2+1)} \leq \frac{3}{2}(x^2+1).$$

Demonstrație.

$$\sqrt{(x^2+\lambda)(\lambda x^2+1)} \stackrel{AG}{\leq} \frac{(x^2+\lambda) + (\lambda x^2+1)}{2} = \frac{\lambda+1}{2}(x^2+1),$$

cu egal pentru $x^2 + \lambda = \lambda x^2 + 1 \Leftrightarrow (\lambda - 1)x^2 = \lambda - 1 \Leftrightarrow x^2 = 1$ sau $\lambda = 1$.

Folosind **Lema** obținem:

$$\begin{aligned} LHS &= \int_a^b \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+\lambda)(\lambda x^2+1)}} \geq \int_a^b \frac{xdx}{\frac{\lambda+1}{2}(x^2+1)} = \frac{1}{\lambda+1} \int_a^b \frac{2xdx}{x^2+1} = \frac{1}{\lambda+1} \ln(x^2+1) \Big|_a^b = \\ &= \frac{1}{\lambda+1} \ln \frac{b^2+1}{a^2+1} = RHS. \end{aligned}$$

Problema1509.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$108r^2(R-r) \leq \sum a^2 r_a \leq 27R^2(R-r).$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum a^2 r_a = 4p^2 (R - r).$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum a^2 r_a = 4p^2 (R - r) \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\leq} 4 \cdot \frac{27R^2}{4} (R - r) = 27R^2 (R - r).$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum a^2 r_a = 4p^2 (R - r) \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\geq} 4 \cdot 27r^2 (R - r) = 108r^2 (R - r).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$108r^3 \leq \sum a^2 h_a \leq 27R^2 r.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum a^2 h_a = 4p^2 r.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum a^2 h_a = 4p^2 r \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\leq} 4 \cdot \frac{27R^2}{4} r = 27R^2 r.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum a^2 h_a = 4p^2 r \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\geq} 4 \cdot 27r^2 \cdot r = 108r^3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum a^2 h_a \leq \sum a^2 r_a.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

$$\sum a^2 h_a = 4p^2 r.$$

Lema2.

$$\sum a^2 r_a = 4p^2 (R - r).$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$4p^2 r \leq 4p^2 (R - r) \Leftrightarrow R \geq 2r, \text{ (Euler).}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1510.

If $x, y, z > 0$ then

$$\sum \frac{1}{xy} + \frac{3}{\sum x^2} \geq \frac{12}{\sum xy}.$$

Dorinel Anca, Târgoviște, Mathematical Inequalities 8/2026

Soluție.

Folosim pqr -Method.

$$\text{Notăm } p = \sum x, q = \sum xy, r = xyz.$$

$$\text{Avem } \sum \frac{1}{xy} = \frac{p}{r} \text{ și } \sum x^2 = p^2 - 2q.$$

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p}{r} + \frac{3}{p^2 - 2q} \geq \frac{12}{q}, \text{ care rezultă din } \frac{p}{r} \geq \frac{3p^2}{q^2} \Leftrightarrow q^2 \geq 3pr, \text{ vezi}$$

$$q^2 = (xy + yz + zx)^2 \geq 3xyz(x + y + z) = 3pr.$$

Este suficient să arătăm că:

$$\frac{3p^2}{q^2} + \frac{3}{p^2 - 2q} \geq \frac{12}{q} \Leftrightarrow p^4 - 6p^2q + 9q^2 \geq 0 \Leftrightarrow (p^2 - 3q)^2 \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z$.

Remarcă.

1). If $x, y, z > 0$ and $\lambda \leq 3$ then

$$\sum \frac{1}{xy} + \frac{\lambda}{\sum x^2} \geq \frac{\lambda+9}{\sum xy}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = \sum x, q = \sum xy, r = xyz$.

Avem $\sum \frac{1}{xy} = \frac{p}{r}$ și $\sum x^2 = p^2 - 2q$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p}{r} + \frac{\lambda}{p^2 - 2q} \geq \frac{\lambda+9}{q}, \text{ care rezultă din } \frac{p}{r} \geq \frac{3p^2}{q^2} \Leftrightarrow q^2 \geq 3pr, \text{ vezi}$$

$$q^2 = (xy + yz + zx)^2 \geq 3xyz(x + y + z) = 3pr.$$

Este suficient să arătăm că:

$$\frac{3p^2}{q^2} + \frac{\lambda}{p^2 - 2q} \geq \frac{\lambda+9}{q} \Leftrightarrow 3p^4 - (\lambda+15)p^2q + 3(\lambda+6)q^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{p^4}{q^2} - (\lambda+15)\frac{p^2}{q} + 3(\lambda+6) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{p^2}{q} - 3\right)\left(\frac{p^2}{q} - \frac{\lambda+6}{3}\right) \geq 0, \text{ vezi } \frac{p^2}{q} \geq 3 \geq \frac{\lambda+6}{3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z$.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} + \frac{3}{\sum \tan^2 \frac{A}{2}} \geq 12.$$

Soluție.

Lemă.

If $x, y, z > 0$, $\sum xy = 1$ then

$$\sum \frac{1}{xy} + \frac{3}{\sum x^2} \geq 12.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\tan \frac{A}{2}, \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2} \right)$ obținem:

$$\sum \frac{1}{\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}} + \frac{3}{\sum \tan^2 \frac{A}{2}} \geq 12 \Leftrightarrow \sum \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} + \frac{3}{\sum \tan^2 \frac{A}{2}} \geq 12.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In acute $\triangle ABC$ holds

$$\sum \tan A \tan B + \frac{3}{\sum \cot^2 A} \geq 12.$$

Dezvoltări , Marin Chirciu

Soluție.

Lemă.

If $x, y, z > 0$, $\sum xy = 1$ then

$$\sum \frac{1}{xy} + \frac{3}{\sum x^2} \geq 12.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \cot A \cot B = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = (\cot A, \cot B, \cot C)$ obținem:

$$\sum \frac{1}{\cot A \cot B} + \frac{3}{\sum \cot^2 A} \geq 12 \Leftrightarrow \sum \tan A \tan B + \frac{3}{\sum \cot^2 A} \geq 12.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1511.

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = 1, x_2 = 0, x_{n+2} = x_{n+1} - x_n, \forall n \geq 1$.

Calculați x_{2013} .

Cangurul-2014

Soluție.

Obținem $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1, x_4 = -1, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = 1, x_8 = 0, x_9 = -1, x_{10} = -1, x_{11} = 0, \dots$

Deducem că șirul este periodic cu perioada principală $T = 6 \Rightarrow x_{2013} = x_3 = -1$.

Deducem că $x_{2013} = -1$.

Remarcă.

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = 1, x_2 = 0, x_{n+2} = x_{n+1} - x_n, \forall n \geq 1$.

Calculați x_{2027} .

Marin Chirciu

Soluție.

Obținem $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1, x_4 = -1, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = 1, x_8 = 0, x_9 = -1, x_{10} = -1, x_{11} = 0, \dots$

Deducem că șirul este periodic cu perioada principală $T = 6 \Rightarrow x_{2027} = x_{6 \cdot 337 + 5} = x_5 = 0$.

Deducem că $x_{2027} = 0$.

Problema 1512.

Solve for reals,
$$\begin{cases} a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = 3 \\ a\sqrt{b} + b\sqrt{a} = 4 \end{cases}$$

MathLinks-2012

Soluție.

Scad ecuațiile $\Rightarrow (a-b)(\sqrt{b}-\sqrt{a}) = 1$, imposibil, deoarece factorii $(a-b)$ și $(\sqrt{b}-\sqrt{a})$ au semne contrare.

Deducem că sistemul nu are soluții reale.

Remarcă.

Solve for reals,
$$\begin{cases} a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = \lambda \\ a\sqrt{b} + b\sqrt{a} = \lambda + 1 \end{cases}$$

Marin Chirciu

Soluție.

Scad ecuațiile $\Rightarrow (a-b)(\sqrt{b}-\sqrt{a})=1$, imposibil, deoarece factorii $(a-b)$ și $(\sqrt{b}-\sqrt{a})$ au semne contrare.

Deducem că sistemul nu are soluții reale.

Problema1513.

Fie $ABCD$ un patrulater, $A = D = 90^\circ$ și M este mijlocul laturii DC .

Dacă $AC \perp BM$, $AB = 9$ și $DC = 12$, calculați AD .

Turkey-2007

Soluție.

Folosind teorema lui Pitagora obținem:

$$AM^2 = AD^2 + 6^2 \text{ și } BC^2 = AD^2 + 3^2 \Rightarrow AM^2 + BC^2 = 2AD^2 + 6^2 + 3^2, (1).$$

Notând $AC \cap BM = \{P\}$, $AP = x$, $MP = y$, $CP = z$, $BP = t \Rightarrow$

$$\Rightarrow AM^2 + BC^2 = (x^2 + y^2) + (y^2 + z^2) = 9^2 + 6^2, (2).$$

$$\text{Din(1) și (2)} \Rightarrow 2AD^2 = 9^2 - 3^2 \Leftrightarrow 2AD^2 = 72 \Leftrightarrow AD = 6.$$

Remarcă.

Fie $ABCD$ un patrulater, $A = D = 90^\circ$ și M este mijlocul laturii DC .

Dacă $AC \perp BM$, $AB = 3a$ și $DC = 4a$, calculați AD .

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind teorema lui Pitagora obținem:

$$AM^2 = AD^2 + (2a)^2 \text{ și } BC^2 = AD^2 + a^2 \Rightarrow AM^2 + BC^2 = 2AD^2 + (2a)^2 + a^2, (1).$$

Notând $AC \cap BM = \{P\}$, $AP = x$, $MP = y$, $CP = z$, $BP = t \Rightarrow$

$$\Rightarrow AM^2 + BC^2 = (x^2 + y^2) + (y^2 + z^2) = (3a)^2 + (2a)^2, (2).$$

$$\text{Din(1) și (2)} \Rightarrow 2AD^2 = (3a)^2 - a^2 \Leftrightarrow 2AD^2 = 8a^2 \Leftrightarrow AD = 2a.$$

Problema1516.

If $x, y, z > 0$,
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y^2 + z^2 = 48 \\ y^2 - zx = 0 \end{cases}$$
 then find $xy + yz$.

Math, 8/2026

Soluție.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y^2 + z^2 = 48 \\ y^2 - zx = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + zx = 16 \\ zx + z^2 = 48 \\ y^2 = zx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2 - 3zx = -48 \\ zx + z^2 = 48 \\ y^2 = zx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2 - 2zx + z^2 = 0 \\ zx + z^2 = 48 \\ y^2 = zx \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3\left(\frac{x}{z}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{z}\right) + 1 = 0 \\ zx + z^2 = 48 \\ y^2 = zx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{z} = \frac{1}{3} \\ zx + z^2 = 48 \\ y^2 = zx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3x \\ zx + z^2 = 48 \\ y^2 = zx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3x \\ 3x \cdot x + (3x)^2 = 48 \\ y^2 = zx \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = 3x \\ 12x^2 = 48 \\ y^2 = zx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3x \\ x^2 = 4 \\ y^2 = zx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3x \\ x = 2 \\ y^2 = zx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 6 \\ x = 2 \\ y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 6 \\ x = 2 \\ y = 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow xy + yz = 16\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Deducem că $xy + yz = 16\sqrt{3}$.**Remarcă.**

If $x, y, z > 0$,
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y^2 + z^2 = 48 \\ y^2 - zx = 0 \end{cases}$$
 then find $xy + yz + zx$.

Marin Chirciu

Soluție.

Obținem $(x, y, z) = (6, 2, 2\sqrt{3}) \Rightarrow xy + yz + zx = 4(3 + 4\sqrt{3})$.

Deducem că $xy + yz + zx = 4(3 + 4\sqrt{3})$.

Remarcă.

If $x, y, z > 0$,
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y^2 + z^2 = 48 \\ y^2 - zx = 0 \end{cases}$$
 then find $x^3 + y^3 + z^3$.

Marin Chirciu

Soluție.

$$\text{Obținem } (x, y, z) = (6, 2, 2\sqrt{3}) \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 224 + 24\sqrt{3}.$$

$$\text{Deducem că } x^3 + y^3 + z^3 = 224 + 24\sqrt{3}.$$

Problema 1517.

Solve for integers

$$2x^2 + 6y^2 + 7xy - x - y = 6.$$

Math, 8/2026

Soluție.

$$2x^2 + 6y^2 + 7xy - x - y = 6 \Leftrightarrow 2x^2 + 3xy + x + 4xy + 6y^2 + 2y - 2x - 3y - 1 = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(2x + 3y + 1) + 2y(2x + 3y + 1) - (2x + 3y + 1) = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x + 3y + 1)(x + 2y - 1) = 5.$$

$$1). \begin{cases} 2x + 3y + 1 = 1 \\ x + 2y - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -18 \\ y = 12 \end{cases}.$$

$$2). \begin{cases} 2x + 3y + 1 = 5 \\ x + 2y - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}.$$

$$3). \begin{cases} 2x + 3y + 1 = -1 \\ x + 2y - 1 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ x + 2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -6 \end{cases}.$$

$$4). \begin{cases} 2x + 3y + 1 = -5 \\ x + 2y - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -6 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12 \\ y = 6 \end{cases}.$$

În final mulțimea soluțiilor este $S = \{(-18, 12), (2, 0), (8, -6), (-12, 6)\}.$

Remarcă.

1). Solve for integers

$$2x^2 + 6y^2 + 7xy - x - y = 4.$$

Soluție.

$$2x^2 + 6y^2 + 7xy - x - y = 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 3xy + x + 4xy + 6y^2 + 2y - 2x - 3y - 1 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(2x + 3y + 1) + 2y(2x + 3y + 1) - (2x + 3y + 1) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x + 3y + 1)(x + 2y - 1) = 3.$$

În final mulțimea soluțiilor este $S = \{(-12, 8), (-2, 2), (2, -2), (-8, 4)\}$.

2). Solve for integers

$$2x^2 + 6y^2 + 7xy - x - y = 2.$$

Soluție.

$$2x^2 + 6y^2 + 7xy - x - y = 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 3xy + x + 4xy + 6y^2 + 2y - 2x - 3y - 1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(2x + 3y + 1) + 2y(2x + 3y + 1) - (2x + 3y + 1) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x + 3y + 1)(x + 2y - 1) = 1.$$

În final mulțimea soluțiilor este $S = \{(-6, 4), (-4, 2)\}$.

3). Let be p is a prime number. Solve for integers

$$2x^2 + 6y^2 + 7xy - x - y = p + 1.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$2x^2 + 6y^2 + 7xy - x - y = p + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 3xy + x + 4xy + 6y^2 + 2y - 2x - 3y - 1 = p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(2x + 3y + 1) + 2y(2x + 3y + 1) - (2x + 3y + 1) = p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x + 3y + 1)(x + 2y - 1) = p.$$

În final mulțimea soluțiilor este:

$$S = \{(-3p - 3, 2p + 2), (2p - 8, 5 - p), (3p - 7, -2p + 7), (-2p - 2, p + 1)\}.$$

Problema 1518.

If $x + y = a + b$ then $x^2 + y^2 + a^2 + b^2$ se scrie ca sumă de trei pătrate.

Math 8/2026

Soluție.

$$x^2 + y^2 + a^2 + b^2 = (x-b)^2 + (y-b)^2 + (a+b)^2.$$

Remarcă.

If $x, y, a, b \in \mathbf{R}$, $x + y = a + b$ then $x^2 + y^2 + a^2 + b^2 \geq (a+b)^2$.

Marin Chirciu

Soluție.

$$x^2 + y^2 + a^2 + b^2 = (x-b)^2 + (y-b)^2 + (a+b)^2 \geq (a+b)^2, \text{ cu egal pentru } x = y = b.$$

Problema 1519.

Solve for integers

$$x(x+2)(2x+1)(2x+5) = y^2.$$

Math 8/2026

Soluție.

$$x(x+2)(2x+1)(2x+5) = y^2 \Leftrightarrow 2x(2x+4)(2x+1)(2x+5) = 4y^2.$$

Cu substituția $(2x, 2y) = (a, b)$ ecuația se scrie:

$$a(a+4)(a+1)(a+5) = b^2 \Leftrightarrow (a^2 + 5a)(a^2 + 5a + 4) = b^2 \stackrel{a^2 + 5a = k}{\Leftrightarrow} k(k+4) = b^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 4k = b^2 \Leftrightarrow (k+2)^2 - 4 = b^2 \Leftrightarrow (k+2)^2 - b^2 = 4 \Leftrightarrow (k+2-b)(k+2+b) = 4.$$

$$1) \begin{cases} k+2-b=1 \\ k+2+b=4 \end{cases} \stackrel{+}{\Rightarrow} 2k+4=5, \text{ fals.}$$

$$2) \begin{cases} k+2-b=4 \\ k+2+b=1 \end{cases} \stackrel{+}{\Rightarrow} 2k+4=5, \text{ fals.}$$

$$3) \begin{cases} k+2-b=2 \\ k+2+b=2 \end{cases} \stackrel{+}{\Rightarrow} \begin{cases} 2k+4=4 \\ k+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+5a=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a=-5 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} 2x=-5 \\ 2y=0 \end{cases}, \text{ fals.}$$

Deducem că $(x, y) = (0, 0)$ este soluție pentru ecuație.

$$4) \begin{cases} k+2-b=-1 \\ k+2+b=-4 \end{cases} \xrightarrow{+} 2k+4=-5, \text{fals.}$$

$$5) \begin{cases} k+2-b=-4 \\ k+2+b=-1 \end{cases} \xrightarrow{+} 2k+4=-5, \text{fals.}$$

$$6) \begin{cases} k+2-b=-2 \\ k+2+b=-2 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} 2k+4=-4 \\ k+b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-4 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+5a=-4 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+5a+4=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=-4 \\ 2y=0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} 2x=-1 \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} 2x=-1 \\ 2y=0 \end{cases}, \text{fals.}$$

Deducem că $(x, y) = (-2, 0)$ este soluție pentru ecuație.

În final mulțimea soluțiilor este $S = \{(-2, 0), (0, 0)\}$.

Remarcă.

Solve for integers

$$x(x+1)(2x+1)(2x+3) = y^2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$x(x+1)(2x+1)(2x+3) = y^2 \Leftrightarrow 2x(2x+2)(2x+1)(2x+3) = 4y^2.$$

Cu substituția $(2x, 2y) = (a, b)$ ecuația se scrie:

$$a(a+2)(a+1)(a+3) = b^2 \Leftrightarrow (a^2+3a)(a^2+3a+2) = b^2 \xrightarrow{a^2+3a=k} k(k+2) = b^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2+2k = b^2 \Leftrightarrow (k+1)^2 - 1 = b^2 \Leftrightarrow (k+1)^2 - b^2 = 1 \Leftrightarrow (k+1-b)(k+1+b) = 1.$$

Deducem că $(x, y) = (-1, 0)$ este soluție pentru ecuație.

În final mulțimea soluțiilor este $S = \{(-1, 0), (0, 0)\}$.

Problema 1520.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r_a^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} \geq 9R^2.$$

Marian Cucoaneș, Mărășești, Vrancea

Soluție.

Lemă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r_a^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{(4R+r)}{p^2} \left[p^2(r-12R) + (4R+r)^3 \right].$$

Folosind **Lema** obținem:

$$\begin{aligned} \sum \frac{r_a^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} &= \frac{(4R+r)}{p^2} \left[p^2(r-12R) + (4R+r)^3 \right] = (4R+r) \left[(r-12R) + \frac{(4R+r)^3}{p^2} \right] \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \\ &\stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} (4R+r) \left[(r-12R) + \frac{(4R+r)^3}{\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}} \right] = (4R+r) \left[(r-12R) + \frac{2(2R-r)(4R+r)}{R} \right] = \\ &= (4R+r) \left[(r-12R) + \frac{2(2R-r)(4R+r)}{R} \right] = \frac{(4R+r)(4R^2-3Rr-2r^2)}{R} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} 9R^2. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$9R^2 \leq \sum \frac{r_a^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} \leq \frac{9R}{r} (2R^2 - 6r^2).$$

Soluție.

Lemă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r_a^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{(4R+r)}{p^2} \left[p^2(r-12R) + (4R+r)^3 \right].$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum \frac{r_a^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} &= \frac{(4R+r)}{p^2} \left[p^2(r-12R) + (4R+r)^3 \right] = (4R+r) \left[(r-12R) + \frac{(4R+r)^3}{p^2} \right] \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \\ &\stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} (4R+r) \left[(r-12R) + \frac{(4R+r)^3}{\frac{r(4R+r)^2}{R+r}} \right] = (4R+r) \left[(r-12R) + \frac{(4R+r)(R+r)}{r} \right] = \\ &= \frac{(4R+r)(4R^2 - 7Rr + 2r^2)}{r} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{9R(4R^2 - 12r^2)}{r} = \frac{9R}{r} (2R^2 - 6r^2). \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} \sum \frac{r_a^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} &= \frac{(4R+r)}{p^2} \left[p^2(r-12R) + (4R+r)^3 \right] = (4R+r) \left[(r-12R) + \frac{(4R+r)^3}{p^2} \right] \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \\ &\stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} (4R+r) \left[(r-12R) + \frac{(4R+r)^3}{\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}} \right] = (4R+r) \left[(r-12R) + \frac{2(2R-r)(4R+r)}{R} \right] = \\ &= (4R+r) \left[(r-12R) + \frac{2(2R-r)(4R+r)}{R} \right] = \frac{(4R+r)(4R^2 - 3Rr - 2r^2)}{R} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} 9R^2. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$54Rr \leq \sum \frac{r_a^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} \leq 27R^2.$$

Soluție.

Lemă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r_a^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} = p^2 + (4R+r)^2.$$

Folosind **Lema** obținem:

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned}\sum \frac{r_a^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} &= p^2 + (4R + r)^2 \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} 4R^2 + 4Rr + 3r^2 + 16R^2 + 8Rr + r^2 = 20R^2 + 12Rr + 4r^2 = \\ &= 4(5R^2 + 3Rr + r^2) \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} 27R^2.\end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned}\sum \frac{r_a^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} &= p^2 + (4R + r)^2 \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} 16Rr - 5r^2 + 16R^2 + 8Rr + r^2 = 16R^2 + 24Rr - 4r^2 = \\ &= 4(4R^2 + 6Rr - r^2) \stackrel{\text{Euler}}{\geq} 54Rr.\end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$3 \sum \frac{r_a^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} \geq \sum \frac{r_a^2}{\sin^2 \frac{A}{2}}.$$

Soluție.

Lema1.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r_a^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{(4R + r)}{p^2} \left[p^2 (r - 12R) + (4R + r)^3 \right].$$

Lema2

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r_a^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} = p^2 + (4R + r)^2.$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$3 \cdot \frac{(4R+r)}{p^2} \left[p^2(r-12R) + (4R+r)^3 \right] \geq p^2 + (4R+r)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(4R+r) \left[p^2(r-12R) + (4R+r)^3 \right] \geq p^4 + p^2(4R+r)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^4 + p^2(4R+r)(40R-2r) \leq 3(4R+r)^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2 \left(p^2 + (4R+r)(40R-2r) \right) \leq 3(4R+r)^4,$$

$$\text{vezi inegalitatea lui Gerretsen } p^2 \leq \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)} \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2.$$

Rămâne să arătăm că:

$$\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)} (4R^2 + 4Rr + 3r^2 + (4R+r)(40R-2r)) \leq 3(4R+r)^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R(4R^2 + 4Rr + 3r^2 + (4R+r)(40R-2r)) \leq 6(4R+r)^2(2R-r) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 28R^3 - 36R^2r - 37Rr^2 - 6r^3 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(28R^2 + 20Rr + 3r^2) \geq 0, \text{ vezi } R \geq 2r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

4). In $\triangle ABC$ holds

$$36r^2 \leq \sum \frac{h_a^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} \leq 9R^2.$$

Soluție.

Lemă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_a^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{p^6 + p^4(3r^2 - 8Rr) + p^2r^2(3r^2 + 8Rr - 16R^2) + r^2(4R+r)^4}{4R^2p^2}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{h_a^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} \stackrel{\text{Chebishev}}{\leq} \frac{1}{3} \sum h_a^2 \sum \frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{1}{3} \cdot p^2 \cdot \frac{p^2 + (4R+r)^2}{p^2} = \frac{p^2 + (4R+r)^2}{3} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq}$$

$$\stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{4R^2 + 4Rr + 3r^2 + 16R^2 + 8Rr + r^2}{3} = \frac{20R^2 + 12Rr + 4r^2}{3} = \frac{4(5R^2 + 3Rr + r^2)}{3} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq}$$

$$\stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{27R^2}{3} = 9R^2.$$

Am folosit mai sus: $\sum h_a^2 = \frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2}{4R^2} \leq p^2.$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} \sum \frac{h_a^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} &\stackrel{AG}{\geq} 3 \sqrt[3]{\prod \frac{h_a^2}{\cos^2 \frac{A}{2}}} = 3 \sqrt[3]{\frac{\prod h_a^2}{\prod \cos^2 \frac{A}{2}}} = 3 \sqrt[3]{\left(\frac{\frac{2r^2 p^2}{R}}{\frac{p}{4R}} \right)^2} = 3 \sqrt[3]{(8r^2 p)^2} = 3 \sqrt[3]{64r^4 p^2} = \\ &= 3 \cdot 4 \cdot r \sqrt[3]{rp^2} \stackrel{AG}{\geq} 12r \sqrt[3]{r \cdot 27r^2} = 12r \cdot 3r = 36r^2. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

5). In $\triangle ABC$ holds

$$108r^2 \leq \sum \frac{h_a^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} \leq 27R^2.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lemă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_a^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{p^6 + p^4(3r^2 - 16Rr) + p^2 r^2(32R^2 - 8Rr + 3r^2) + r^4(4R + r)^2}{R^2 r^2}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{h_a^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{p^6 + p^4(3r^2 - 16Rr) + p^2 r^2(32R^2 - 8Rr + 3r^2) + r^4(4R + r)^2}{R^2 r^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} 27R^2.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{h_a^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} \stackrel{\text{Chebyshev}}{\geq} \frac{1}{3} \sum h_a^2 \sum \frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} \geq \frac{1}{3} \cdot 27r^2 \cdot 12 = 108r^2.$$

Am folosit mai sus: $\sum h_a^2 = \frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2}{4R^2} \geq 27r^2.$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1521.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum r_a^3 \geq p^2(4R - 5r).$$

Adil Abdullayev, Azerbaijan, RMM 4/2017

Soluție.

Folosind $\sum r_a^3 = (4R + r)^3 - 12Rp^2$ inegalitatea se scrie:

$$(4R + r)^3 - 12Rp^2 \geq p^2(4R - 5r) \Leftrightarrow (4R + r)^3 \geq p^2(16R - 5r), \text{ vezi inegalitatea lui Gerretsen}$$

$$p^2 \leq \frac{R(4R + r)^2}{2(2R - r)}.$$

Este suficient să arătăm că:

$$(4R + r)^3 \geq \frac{R(4R + r)^2}{2(2R - r)}(16R - 5r) \Leftrightarrow 2(2R - r)(4R + r) \geq R(16R - 5r) \Leftrightarrow R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{81R^3}{8} \leq \sum r_a^3 \leq 82R^3 - 575r^3.$$

Soluție.

Folosind $\sum r_a^3 = (4R + r)^3 - 12Rp^2$ obținem:

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned}\sum r_a^3 &= (4R+r)^3 - 12Rp^2 \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} (4R+r)^3 - 12R(16Rr-5r^2) = \\ &= 16R^3 - 24Rr^2 + r^3 \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{81R^3}{8}.\end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned}\sum r_a^3 &= (4R+r)^3 - 12Rp^2 \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} (4R+r)^3 - 12R(4R^2+4Rr+3r^2) = \\ &= 64R^3 - 144R^2r + 72Rr^2 + r^3 \stackrel{\text{Euler}}{\leq} 82R^3 - 575r^3.\end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$81r^3 \leq \sum h_a^3 \leq \frac{81R^3}{8}.$$

Soluție.

Folosind $\sum h_a^3 = \frac{p^6 + p^4(3r^2 - 12Rr) + 3p^2r^4 + r^3(4R+r)^3}{8R^3}$ obținem:

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum h_a^3 = \frac{p^6 + p^4(3r^2 - 12Rr) + 3p^2r^4 + r^3(4R+r)^3}{8R^3} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{81R^3}{8}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

$$\sum h_a^3 = \frac{p^6 + p^4(3r^2 - 12Rr) + 3p^2r^4 + r^3(4R+r)^3}{8R^3} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} 81r^3$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum h_a^3 \geq \left(\frac{2r}{R}\right)^4 \sum r_a^3.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.**Lema1.**

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum h_a^3 = \frac{p^6 + p^4(3r^2 - 12Rr) + 3p^2r^4 + r^3(4R + r)^3}{8R^3}.$$

Lema2.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum r_a^3 = (4R + r)^3 - 12Rp^2.$$

Folosind **Lemele** de mai sus inegalitatea se scrie:

$$\Leftrightarrow \frac{p^6 + p^4(3r^2 - 12Rr) + 3p^2r^4 + r^3(4R + r)^3}{8R^3} \geq \frac{16r^4}{R^4} \cdot ((4R + r)^3 - 12Rp^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Rp^6 + Rp^4(3r^2 - 12Rr) + 3Rp^2r^4 + Rr^3(4R + r)^3 \geq 128r^4((4R + r)^3 - 12Rp^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Rp^6 + Rp^4(3r^2 - 12Rr) + p^2 \cdot 1539Rr^4 \geq r^3(4R + r)^3(128r - R) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2(Rp^2(p^2 + 3r^2 - 12Rr) + 1539Rr^4) \geq r^3(4R + r)^3(128r - R),$$

$$\text{vezi inegalitatea lui Gerretsen } p^2 \geq 16Rr - 5r^2 \geq \frac{r(4R + r)^2}{R + r}.$$

Rămâne să arătăm că:

$$\frac{r(4R + r)^2}{R + r} (R(16Rr - 5r^2)(16Rr - 5r^2 + 3r^2 - 12Rr) + 1539Rr^4) \geq r^3(4R + r)^3(128r - R)$$

$$\Leftrightarrow R(16R - 5r)(4R - 2r) + 1539Rr^2 \geq (R + r)(4R + r)(128r - R) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 68R^3 - 559R^2r + 910Rr^2 - 128r^3 \geq 0 \Leftrightarrow (R - 2r)(68R^2 - 423Rr + 64r^2) \geq 0, \text{ vezi } R \geq 2r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1522.

1).Solve in naturals

$$C_x^2 + xy + C_y^2 = \frac{3}{2}(x + y).$$

Soluție.

Condiții de existență $x, y \in \mathbf{N}, x, y \geq 2$.

$$C_x^2 + xy + C_y^2 = \frac{3}{2}(x+y) \Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{2} + xy + \frac{y(y-1)}{2} = \frac{3}{2}(x+y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 - 4(x+y) = 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 4(x+y) = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x+y-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = y = 2, \text{ vezi } x, y \in \mathbf{N}, x, y \geq 2.$$

Deducem că $(x, y) = (2, 2)$ este soluția unică a ecuației.

2). Solve in naturals

$$C_x^3 + xy + C_y^3 = \frac{11}{6}(x+y).$$

Marin Chirciu, Math 8/2026

Soluție.

Condiții de existență $x, y \in \mathbf{N}, x, y \geq 3$.

$$C_x^3 + xy + C_y^3 = \frac{11}{6}(x+y) \Leftrightarrow \frac{x(x-1)(x-2)}{6} + xy + \frac{y(y-1)(y-2)}{6} = \frac{11}{6}(x+y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 6xy - 9(x+y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-3) + y^2(y-3) + 3x(y-3) + 3y(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = y = 3, \text{ vezi } x, y \in \mathbf{N}, x, y \geq 3.$$

Deducem că $(x, y) = (3, 3)$ este soluția unică a ecuației.

Problema1523.

If $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 = 0$ then find x^{10} .

Bahadur Heydarov, Math 8/2026

Soluție.

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 = 0 \stackrel{x \neq 2}{\Rightarrow} (x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16) = 0 \Leftrightarrow x^5 - 32 = 0 \Leftrightarrow x^5 = 32$$

$$\Leftrightarrow x^{10} = 32^2 = 1024.$$

Deducem că $x^{10} = 1024$.

Remarcă.

If $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 = 0$ then find x^{5n} , $n \in \mathbb{N}^*$.

Marin Chirciu

Soluție.

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 = 0 \stackrel{x \neq 2}{\Rightarrow} (x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16) = 0 \Leftrightarrow x^5 - 32 = 0 \Leftrightarrow x^5 = 32$$

$$\Leftrightarrow x^{5n} = 32^n = 2^{5n}.$$

Deducem că $x^{5n} = 2^{5n}$.

Problema 1524

Solve in naturals

$$x! = x^3 - x.$$

Math Olympiads 3/2026

Soluție.

$$x! = x^3 - x \Leftrightarrow (x-1)!x = x(x^2 - 1) \Leftrightarrow (x-1)! = x^2 - 1 \Leftrightarrow (x-2)!(x-1) = (x-1)(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)! = x+1 \Leftrightarrow (x-3)!(x-2) = (x-2)+3 \Leftrightarrow (x-2)((x-3)!-1) = 3 \cdot 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2) = 3 \text{ și } (x-3)! - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 5.$$

Deducem că $x = 5$ este soluția unică a ecuației.

Remarcă.

Solve in naturals

$$(x+1)! = x^3 + 3x^2 + 2x.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$(x+1)! = x^3 + 3x^2 + 2x \Leftrightarrow (x+1)! = x(x+1)(x+2) \Leftrightarrow x!(x+1) = x(x+1)(x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x! = x(x+2) \Leftrightarrow (x-1)!x = x(x+2) \Leftrightarrow (x-2)!(x-1) = (x-1)+3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)!(x-1) = (x-1)+3 \Leftrightarrow (x-1)((x-2)!-1) = 3 \cdot 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1) = 3 \text{ și } (x-2)! - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 4.$$

Deducem că $x = 4$ este soluția unică a ecuației.

Problema 1525.

If $0 \leq x, y, z \leq 1$ then

$$\sum \frac{x}{7+y^3+z^3} \leq \frac{1}{3}.$$

Elsen Kerimov, Mathematical Inequalities 8/2026

Soluție.

Folosind $0 \leq x, y, z \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^3, y^3, z^3 \leq 1 \Rightarrow 7+y^3+z^3 \geq x^3+y^3+z^3+6$.

$$LHS = \sum \frac{x}{7+y^3+z^3} \leq \sum \frac{x}{x^3+y^3+z^3+6} = \frac{x+y+z}{x^3+y^3+z^3+6} \stackrel{(1)}{\leq} \frac{1}{3} = RHS,$$

unde $\frac{x+y+z}{x^3+y^3+z^3+6} \stackrel{(1)}{\leq} \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(x+y+z) \leq x^3+y^3+z^3+6$, vezi $x^3+2 \geq 3x \Leftrightarrow$

$$(x-1)^2(x+2) \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Remarcă.

If $0 \leq x, y, z \leq 1$ then

$$\sum \sqrt{\frac{x}{7+y^3+z^3}} \leq 1.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \sqrt{\frac{x}{7+y^3+z^3}} \stackrel{CBS}{\leq} \sqrt{3 \sum \frac{x}{7+y^3+z^3}} \stackrel{Lema}{\leq} \sqrt{3 \cdot \frac{1}{3}} = 1 = RHS.$$

Lemă.

If $0 \leq x, y, z \leq 1$ then

$$\sum \frac{x}{7+y^3+z^3} \leq \frac{1}{3}.$$

Problema 1526.

If $a, b, c > 0$ then

$$\frac{\sum a^{-1}}{\sum (a+b)^{-1}} \geq 2.$$

George Apostolopoulos, Greece, Mathematical Inequalities 3/2018

Soluție.

Folosind $(a+b)^{-1} \leq \frac{1}{4}(a^{-1} + b^{-1}) \Leftrightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ obținem:

$$LHS = \frac{\sum a^{-1}}{\sum (a+b)^{-1}} \geq \frac{\sum a^{-1}}{\sum \frac{1}{4}(a^{-1} + b^{-1})} = \frac{\sum a^{-1}}{\frac{1}{2} \sum a^{-1}} = 2 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.

Remarcă.

If $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ then

$$\frac{\sum a_1^{-1}}{\sum (a_1 + a_2)^{-1}} \geq 2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $(a_1 + a_2)^{-1} \leq \frac{1}{4}(a_1^{-1} + a_2^{-1}) \Leftrightarrow \frac{1}{a_1 + a_2} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) \Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 \geq 0$ obținem:

$$LHS = \frac{\sum a_1^{-1}}{\sum (a_1 + a_2)^{-1}} \geq \frac{\sum a_1^{-1}}{\sum \frac{1}{4}(a_1^{-1} + a_2^{-1})} = \frac{\sum a_1^{-1}}{\frac{1}{2} \sum a_1^{-1}} = 2 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Problema 1527.

If $a, b, c \geq 0$, $\sum a^4 = 3$ then

$$\sum \frac{1}{4-ab} \leq 1.$$

Moldova -TST-2005

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{1}{4-ab} \leq \sum \frac{1}{4-a^2} \leq \sum \frac{a^4+5}{18} = 1 = RHS, \text{ vezi:}$$

$$1). \sum \frac{1}{4-ab} \leq \sum \frac{1}{4-a^2}, \text{ vezi } \frac{2}{4-ab} \leq \frac{1}{4-a^2} + \frac{1}{4-b^2}, \text{ din}$$

$$\frac{1}{4-a^2} + \frac{1}{4-b^2} \stackrel{CS}{\geq} \frac{(1+1)^2}{(4-a^2)+(4-b^2)} = \frac{4}{8-a^2-b^2} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{2}{4-ab},$$

$$\text{unde } \frac{4}{8-a^2-b^2} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{2}{4-ab} \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$$

$$\text{Din } \frac{2}{4-ab} \leq \frac{1}{4-a^2} + \frac{1}{4-b^2} \Rightarrow \sum \frac{2}{4-ab} \leq \sum \left(\frac{1}{4-a^2} + \frac{1}{4-b^2} \right) \Leftrightarrow \sum \frac{1}{4-ab} \leq \sum \frac{1}{4-a^2}.$$

$$2). \sum \frac{1}{4-a^2} \leq \sum \frac{a^4+5}{18}, \text{ vezi } \frac{1}{4-a^2} \leq \frac{a^4+5}{18} \Leftrightarrow (a^2-1)^2(2-a^2) \geq 0, \text{ vezi } a^2 < 2,$$

$$\text{din } b^4 + c^4 = 3 - a^4 \geq 0 \Rightarrow a^4 \leq 3 \Rightarrow a^2 \leq \sqrt{3} < 2.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Remarcă.

1). If $a, b, c \geq 0, \sum a^4 = 3$ then

$$\sum \sqrt{\frac{1}{4-ab}} \leq \sqrt{3}.$$

Soluție.

$$LHS = \sum \sqrt{\frac{1}{4-ab}} \stackrel{CBS}{\leq} \sqrt{3 \sum \frac{1}{4-ab}} \stackrel{Lema}{\leq} \sqrt{3 \cdot 1} = \sqrt{3} = RHS.$$

Lema.

If $a, b, c \geq 0, \sum a^4 = 3$ then

$$\sum \frac{1}{4-ab} \leq 1.$$

2). If $a, b, c, d \geq 0, \sum a^4 = 4$ then

$$\sum \frac{1}{5-ab} \leq 1.$$

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{1}{5-ab} \leq \sum \frac{1}{5-a^2} \leq \sum \frac{a^4+7}{32} = 1 = RHS, \text{ vezi:}$$

$$1). \sum \frac{1}{5-ab} \leq \sum \frac{1}{5-a^2}, \text{ vezi } \frac{2}{5-ab} \leq \frac{1}{5-a^2} + \frac{1}{5-b^2}, \text{ din}$$

$$\frac{1}{5-a^2} + \frac{1}{5-b^2} \stackrel{CS}{\geq} \frac{(1+1)^2}{(5-a^2)+(5-b^2)} = \frac{4}{10-a^2-b^2} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{2}{5-ab},$$

$$\text{unde } \frac{4}{5-a^2-b^2} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{2}{5-ab} \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$$

$$\text{Din } \frac{2}{5-ab} \leq \frac{1}{5-a^2} + \frac{1}{5-b^2} \Rightarrow \sum \frac{2}{5-ab} \leq \sum \left(\frac{1}{5-a^2} + \frac{1}{5-b^2} \right) \Leftrightarrow \sum \frac{1}{5-ab} \leq \sum \frac{1}{5-a^2}.$$

$$2). \sum \frac{1}{5-a^2} \leq \sum \frac{a^4+7}{32}, \text{ vezi } \frac{1}{5-a^2} \leq \frac{a^4+7}{32} \Leftrightarrow (a^2-1)^2(3-a^2) \geq 0, \text{ vezi } a^2 < 3,$$

$$\text{din } b^4 + c^4 + d^4 = 4 - a^4 \geq 0 \Rightarrow a^4 \leq 4 \Rightarrow a^2 \leq 2 < 3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

3). If $a, b, c, d \geq 0, \sum a^4 = 4$ then

$$\sum \sqrt{\frac{1}{5-ab}} \leq 2.$$

Soluție.

$$LHS = \sum \sqrt{\frac{1}{5-ab}} \stackrel{CBS}{\leq} \sqrt{4 \sum \frac{1}{5-ab}} \stackrel{\text{Lema}}{\leq} \sqrt{4 \cdot 1} = 2 = RHS.$$

Lema.

If $a, b, c, d \geq 0, \sum a^4 = 4$ then

$$\sum \frac{1}{5-ab} \leq 1.$$

4). If $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0, a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4 = n, n \geq 3$ then

$$\sum \frac{1}{n+1-a_1 a_2} \leq 1.$$

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{1}{n+1-a_1a_2} \leq \sum \frac{1}{n+1-a_1^2} \leq \sum \frac{a_1^4+2n-1}{2n^2} = 1 = RHS, \text{ vezi:}$$

$$1). \sum \frac{1}{n+1-a_1a_2} \leq \sum \frac{1}{n+1-a_1^2}, \text{ vezi } \frac{2}{n+1-a_1a_2} \leq \frac{1}{n+1-a_1^2} + \frac{1}{n+1-a_2^2}, \text{ din}$$

$$\frac{1}{n+1-a_1^2} + \frac{1}{n+1-a_2^2} \stackrel{CS}{\geq} \frac{(1+1)^2}{(n+1-a_1^2)+(n+1-a_2^2)} = \frac{4}{2n+2-a_1^2-a_2^2} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{2}{n+1-a_1a_2},$$

$$\text{unde } \frac{4}{2n+2-a_1^2-a_2^2} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{2}{n+1-a_1a_2} \Leftrightarrow (a_1-a_2)^2 \geq 0.$$

$$\text{Din } \frac{2}{n+1-a_1a_2} \leq \frac{1}{n+1-a_1^2} + \frac{1}{n+1-a_2^2} \Rightarrow \sum \frac{2}{n+1-a_1a_2} \leq \sum \left(\frac{1}{n+1-a_1^2} + \frac{1}{n+1-a_2^2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{1}{n+1-a_1a_2} \leq \sum \frac{1}{n+1-a_1^2}.$$

$$2). \sum \frac{1}{n+1-a_1^2} \leq \sum \frac{a_1^4+2n-1}{2n^2}, \text{ vezi } \frac{1}{n+1-a_1^2} \leq \frac{a_1^4+2n-1}{2n^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -a_1^6 + (n+1)a_1^4 + (1-2n)a_1^2 + n-1 \geq 0 \quad (a_1^2-1)^2(n-1-a_1^2) \geq 0, \text{ vezi } a_1^2 < n-1,$$

$$\text{din } a_2^4 + \dots + a_n^4 = n - a_1^4 \geq 0 \Rightarrow a_1^4 \leq n \Rightarrow a_1^2 \leq \sqrt{n} < n-1, n \geq 3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$.

5). If $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0, a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4 = n, n \geq 3$ then

$$\sum \sqrt{\frac{1}{n+1-a_1a_2}} \leq \sqrt{n}.$$

Soluție.

$$LHS = \sum \sqrt{\frac{1}{n+1-a_1a_2}} \stackrel{CBS}{\leq} \sqrt{n \sum \frac{1}{n+1-a_1a_2}} \stackrel{Lema}{\leq} \sqrt{n \cdot 1} = \sqrt{n} = RHS.$$

Lema.

If $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0, a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4 = n, n \geq 3$ then

$$\sum \frac{1}{n+1-a_1a_2} \leq 1.$$

Remarcă.

6). If $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0, a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4 = n, n \geq 3$ then

$$\sum \sqrt{\frac{1}{n+1-a_1 a_2}} \leq \sqrt{n}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \sqrt{\frac{1}{n+1-a_1 a_2}} \stackrel{CBS}{\leq} \sqrt{n \sum \frac{1}{n+1-a_1 a_2}} \stackrel{Lema}{\leq} \sqrt{n \cdot 1} = \sqrt{n} = RHS.$$

Lema.

If $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0, a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4 = n, n \geq 3$ then

$$\sum \frac{1}{n+1-a_1 a_2} \leq 1.$$

Problema1528.

VIII.316. If $a, b, c \geq 1$ then

$$\sum \frac{a^3 + 3a}{b} \geq 2 \sum a + 6.$$

Cătălin Cristea, Craiova, Recreații Matematice 1/2026

Soluție.

$$\text{Din } a \geq 1 \Rightarrow (a-1)^3 \geq 0 \Leftrightarrow a^3 - 3a^2 + 3a - 1 \geq 0 \Leftrightarrow a^3 + 3a \geq 3a^2 + 1.$$

$$LHS = \sum \frac{a^3 + 3a}{b} \geq \sum \frac{3a^2 + 1}{b} = 3 \sum \frac{a^2}{b} + \sum \frac{1}{b} \stackrel{CS}{\geq} 3 \cdot \frac{(\sum a)^2}{\sum b} + \frac{9}{\sum b} =$$

$$= 3 \cdot \sum a + \frac{9}{\sum a} \stackrel{(1)}{\geq} 2 \sum a + 6 = RHS,$$

$$\text{unde } 3 \cdot \sum a + \frac{9}{\sum a} \stackrel{(1)}{\geq} 2 \sum a + 6 \Leftrightarrow 3 \cdot p + \frac{9}{p} \geq 2p + 6 \Leftrightarrow p + \frac{9}{p} \geq 6 \Leftrightarrow (p-3)^2 \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Remarcă.

If $a, b, c > 0$ then

$$\sum \frac{a^4 + 6a^2 + 1}{b} \geq 4(ab + bc + ca + 3).$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\text{Avem } (a-1)^4 \geq 0 \Leftrightarrow a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow a^4 + 6a^2 + 1 \geq 4a^3 + 4a.$$

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{a^4 + 6a^2 + 1}{b} \geq \sum \frac{4a^3 + 4a}{b} = 4 \sum \frac{a^3}{b} + 4 \sum \frac{a}{b} \stackrel{\text{Holder}}{\geq} 4 \frac{(\sum a)^3}{3 \sum b} + 4 \cdot 3 \sqrt[3]{\prod \frac{a}{b}} = \\ &= 4 \frac{(\sum a)^2}{3} + 4 \cdot 3 \sqrt[3]{1} = \frac{4}{3} p^2 + 12 \geq \frac{4}{3} \cdot 3q + 12 = 4q + 12 = 4(q + 3) = RHS. \end{aligned}$$

$$\text{Am folosit mai sus } p^2 \geq 3q, \text{ vezi } p^2 = (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) = 3q.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Problema 1529.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 3$ then

$$xyz + 2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) \geq 7.$$

Chheang Chantria, Mathematical Inequalities 8/2026

Soluție.

Lema.

If $x, y, z > 0$ then

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{x + y + z}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Demonstrație.

$$\frac{x}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} \stackrel{AG}{\geq} 3 \sqrt[3]{\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z}} = \frac{3x}{\sqrt[3]{xyz}} \text{ și celelalte două inegalități analoage și se adună.}$$

Să trecem la rezolvarea problemei principale.

$$\begin{aligned}
LHS &= xyz + 2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) \stackrel{\text{Lema}}{\geq} xyz + 2 \cdot \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}} = xyz + 2 \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} = xyz + \frac{6}{\sqrt[3]{xyz}} = \\
&= \left(xyz + \frac{1}{\sqrt[3]{xyz}} + \frac{1}{\sqrt[3]{xyz}} + \frac{1}{\sqrt[3]{xyz}} \right) + \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} \stackrel{AG}{\geq} 4 \sqrt[4]{xyz \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{xyz}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{xyz}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}} + \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} = \\
&= 4 + \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} \stackrel{xyz \leq 1}{\geq} 4 + \frac{3}{\sqrt[3]{1}} = 4 + 3 = 7 = RHS.
\end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Remarcă.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{27r^3}{r_a r_b r_c} + 2 \left(\frac{r_b}{r_a} + \frac{r_c}{r_b} + \frac{r_a}{r_c} \right) \geq 7.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 3$ then

$$xyz + 2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) \geq 7.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a} = 1 \Leftrightarrow \sum \frac{3r}{r_a} = 3$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{3r}{r_a}, \frac{3r}{r_b}, \frac{3r}{r_c} \right)$ obținem:

$$\frac{3r}{r_a} \cdot \frac{3r}{r_b} \cdot \frac{3r}{r_c} + 2 \left(\frac{\frac{3r}{r_a}}{\frac{3r}{r_b}} + \frac{\frac{3r}{r_b}}{\frac{3r}{r_c}} + \frac{\frac{3r}{r_c}}{\frac{3r}{r_a}} \right) \geq 7 \Leftrightarrow \frac{27r^3}{r_a r_b r_c} + 2 \left(\frac{r_b}{r_a} + \frac{r_c}{r_b} + \frac{r_a}{r_c} \right) \geq 7.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{27r^3}{h_a h_b h_c} + 2 \left(\frac{h_b}{h_a} + \frac{h_c}{h_b} + \frac{h_a}{h_c} \right) \geq 7.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.**Lema.**If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 3$ then

$$xyz + 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) \geq 7.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{h_a} = 1 \Leftrightarrow \sum \frac{3r}{h_a} = 3$.Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{3r}{h_a}, \frac{3r}{h_b}, \frac{3r}{h_c}\right)$ obținem:

$$\frac{3r}{h_a} \cdot \frac{3r}{h_b} \cdot \frac{3r}{h_c} + 2\left(\frac{\frac{3r}{h_a}}{\frac{3r}{h_b}} + \frac{\frac{3r}{h_b}}{\frac{3r}{h_c}} + \frac{\frac{3r}{h_c}}{\frac{3r}{h_a}}\right) \geq 7 \Leftrightarrow \frac{27r^3}{h_a h_b h_c} + 2\left(\frac{h_b}{h_a} + \frac{h_c}{h_b} + \frac{h_a}{h_c}\right) \geq 7.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1530.If $a, b, c > 1$ then find max of

$$P = \sum \frac{\sqrt{b-1}}{a+b}.$$

Kieu Dinh Minh, Vietnam, Mathematical Inequalities 8/2026

Soluție.

$$P = \sum \frac{\sqrt{b-1}}{a+b} \stackrel{AG}{\leq} \sum \frac{\sqrt{b-1}}{2\sqrt{ab}} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{1-\frac{1}{b}} \stackrel{AG}{\leq} \frac{1}{2} \sum \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + 1 - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Rezultă $P \leq \frac{3}{4}$, cu egal pentru $a = b = c$, $\frac{1}{a} = 1 - \frac{1}{b}$ și analogele.Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 2$.Deducem că $\max P = \frac{3}{4}$ pentru $a = b = c = 2$.**Remarcă.**

If $a, b, c > \lambda > 0$, λ fixed then find max of

$$P = \sum \frac{\sqrt{b-\lambda}}{a+b}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$P = \sum \frac{\sqrt{b-\lambda}}{a+b} \stackrel{AG}{\leq} \sum \frac{\sqrt{b-\lambda}}{2\sqrt{ab}} = \frac{1}{2\lambda} \sum \frac{\lambda}{\sqrt{a}} \sqrt{1-\frac{\lambda}{b}} \stackrel{AG}{\leq} \frac{1}{2\lambda} \sum \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{a} + 1 - \frac{\lambda}{b} \right) = \frac{1}{2\lambda} \sum \frac{1}{2} = \frac{3}{4\lambda}.$$

Rezultă $P \leq \frac{3}{4\lambda}$, cu egal pentru $a = b = c$, $\frac{\lambda}{a} = 1 - \frac{\lambda}{b}$ și analogele.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 2\lambda$.

Deducem că $\max P = \frac{3}{4\lambda}$ pentru $a = b = c = 2\lambda$.

Problema 1531.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{\tan \frac{A}{4}}{\tan \frac{B}{4} \tan \frac{C}{4}} \geq 6 + 3\sqrt{3}.$$

Cao Hai Van, Vietnam, Mathematical Inequalities 8/2026

Soluție.

Folosind substituția $(x, y, z) = \left(\tan \frac{A}{4}, \tan \frac{B}{4}, \tan \frac{C}{4} \right)$, $0 < x, y, z < 1 \Rightarrow \sum \frac{x}{yz} \geq 6 + 3\sqrt{3}$.

$$\text{Avem } 1 = \tan \left(\frac{A}{4} + \frac{B}{4} + \frac{C}{4} \right) = \frac{x + y + z - xyz}{1 - xy - yz - zx} \Rightarrow \frac{x + y + z - xyz}{1 - xy - yz - zx} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + y + z - xyz = 1 - xy - yz - zx \Rightarrow 1 + xyz = \sum x + \sum xy \stackrel{AG}{\geq} 3\sqrt[3]{xyz} + 3\sqrt[3]{(xyz)^2} \stackrel{\sqrt[3]{xyz}=t}{\Rightarrow}$$

$$\stackrel{\sqrt[3]{xyz}=t}{\Rightarrow} 1 + t^3 \geq 3t + 3t^2 \Leftrightarrow (1+t)(1-t+t^2) \geq 3t(1+t) \Leftrightarrow 1-t+t^2 \geq 3t \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \in (-\infty, 2 - \sqrt{3}] \cup [2 + \sqrt{3}, \infty), t < 1 \Rightarrow t \leq 2 - \sqrt{3}.$$

$$LHS = \sum \frac{x}{yz} \stackrel{AG}{\geq} 3 \sqrt[3]{\prod \frac{x}{yz}} = \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} = \frac{3}{t} \geq \frac{3}{2-\sqrt{3}} = 3(2+\sqrt{3}) = 6+3\sqrt{3} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \left(\frac{\tan \frac{A}{4}}{\tan \frac{B}{4} \tan \frac{C}{4}} \right)^n \geq 3(2+\sqrt{3})^n, n \in \mathbb{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n = 0$ se obține egalitatea $3 = 3$.

Pentru $n = 1$ vezi Lema.

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$\sum \left(\frac{\tan \frac{A}{4}}{\tan \frac{B}{4} \tan \frac{C}{4}} \right)^n \stackrel{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{\tan \frac{A}{4}}{\tan \frac{B}{4} \tan \frac{C}{4}} \right)^n}{3^{n-1}} \stackrel{Lema}{\geq} \frac{(6+3\sqrt{3})^n}{3^{n-1}} = 3 \left(\frac{6+3\sqrt{3}}{3} \right)^n = 3(2+\sqrt{3})^n.$$

Lema.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{\tan \frac{A}{4}}{\tan \frac{B}{4} \tan \frac{C}{4}} \geq 6+3\sqrt{3}.$$

Problema1532.

In acute $\triangle ABC$ holds

$$\sum HA \leq \sqrt{\sum a^2}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/2026

Soluție.

Folosind $HA = 2R \cos A$, $\sum \cos A = 1 + \frac{r}{R}$ și $\sum a^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$ inegalitatea se scrie:

$$\sum 2R \cos A \leq \sqrt{2(p^2 - r^2 - 4Rr)} \Leftrightarrow 2R \left(1 + \frac{r}{R}\right) \leq \sqrt{2(p^2 - r^2 - 4Rr)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(R+r)^2 \leq 2(p^2 - r^2 - 4Rr) \Leftrightarrow p^2 \geq 2R^2 + 8Rr + 3r^2, (\text{Walker, acute}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In acute $\triangle ABC$ holds

$$\sum \sqrt{HA} \leq \sqrt[4]{9 \sum a^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \sqrt{HA} \stackrel{CBS}{\leq} \sqrt{3 \sum HA} \stackrel{Lema}{\leq} \sqrt{3 \sqrt{\sum a^2}} = \sqrt[4]{9 \sum a^2} = RHS.$$

Lema.

In acute $\triangle ABC$ holds

$$\sum HA \leq \sqrt{\sum a^2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1533.

Solve for reals

$$\sqrt[3]{x+14} - \sqrt[3]{x-13} = 3.$$

Math 7/2026

Soluție.

Cu substituția $(\sqrt[3]{x+14}, \sqrt[3]{x-13}) = (a, b)$ obținem:

$$\begin{cases} a-b=3 \\ a^3-b^3=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=3 \\ (a-b)(a^2+ab+b^2)=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=3 \\ 3(a^2+ab+b^2)=27 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=3 \\ a^2+ab+b^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=3 \\ (a-b)^2+3ab=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=3 \\ 3^2+3ab=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=3 \\ 3ab=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ab=0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+14} \cdot \sqrt[3]{x-13}=0 \Leftrightarrow x \in \{-14, 13\}.$$

Mușimea soluțiilor ecuației este $S = \{-14, 13\}$.

Remarcă.

1). Let be $\lambda, n \in \mathbf{R}$ fixed. Solve for reals

$$\sqrt[3]{x+\lambda^3-n}-\sqrt[3]{x-n}=\lambda.$$

Soluție.

Cu substituția $(\sqrt[3]{x+\lambda^3-n}, \sqrt[3]{x-n}) = (a, b)$ obținem:

$$\begin{cases} a-b=\lambda \\ a^3-b^3=\lambda^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=\lambda \\ (a-b)(a^2+ab+b^2)=\lambda^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=\lambda \\ \lambda(a^2+ab+b^2)=\lambda^3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=\lambda \\ a^2+ab+b^2=\lambda^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=\lambda \\ (a-b)^2+3ab=\lambda^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=\lambda \\ \lambda^2+3ab=\lambda^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=\lambda \\ 3ab=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ab=0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+\lambda^3-n} \cdot \sqrt[3]{x-n}=0 \Leftrightarrow x \in \{n-\lambda^3, n\}.$$

Mușimea soluțiilor ecuației este $S = \{n-\lambda^3, n\}$.

2). Solve for reals

$$\sqrt[3]{x+\lambda^3-2026}-\sqrt[3]{x-2026}=\lambda.$$

Soluție.

Cu substituția $(\sqrt[3]{x+\lambda^3-2026}, \sqrt[3]{x-2026}) = (a, b)$ obținem:

$$\begin{cases} a-b=\lambda \\ a^3-b^3=\lambda^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=\lambda \\ (a-b)(a^2+ab+b^2)=\lambda^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=\lambda \\ \lambda(a^2+ab+b^2)=\lambda^3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=\lambda \\ a^2+ab+b^2=\lambda^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=\lambda \\ (a-b)^2+3ab=\lambda^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=\lambda \\ \lambda^2+3ab=\lambda^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=\lambda \\ 3ab=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ab = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x + \lambda^3 - 2026} \cdot \sqrt[3]{x - 2026} = 0 \Leftrightarrow x \in \{2026 - \lambda^3, 2026\}.$$

Mușimea soluțiilor ecuației este $S = \{2026 - \lambda^3, 2026\}$.

3). Solve for reals

$$\sqrt[3]{x - 2026} - \sqrt[3]{x - 2027} = 1.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Cu substituția $(\sqrt[3]{x - 2026}, \sqrt[3]{x - 2027}) = (a, b)$ obținem:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a - b = 1 \\ a^3 - b^3 = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ 1(a^2 + ab + b^2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 + ab + b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ (a - b)^2 + 3ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ 1 + 3ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ 3ab = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow ab = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x - 2026} \cdot \sqrt[3]{x - 2027} = 0 \Leftrightarrow x \in \{2026, 2027\}. \end{aligned}$$

Mușimea soluțiilor ecuației este $S = \{2026, 2027\}$.

Problema 1534.

$$\text{If } x, y, z > 0, \begin{cases} x + \frac{1}{y} = 4 \\ y + \frac{1}{z} = 1 \\ z + \frac{1}{x} = \frac{7}{3} \end{cases} \text{ then find } xyz.$$

Math-7/2026

Soluție.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + \frac{1}{y} = 4 \\ y + \frac{1}{z} = 1 \\ z + \frac{1}{x} = \frac{7}{3} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - \frac{1}{y} \\ \frac{1}{z} = 1 - y \\ z + \frac{1}{x} = \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{y}{4y - 1} \\ z = \frac{1}{1 - y} \\ z + \frac{1}{x} = \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{y}{4y - 1} \\ z = \frac{1}{1 - y} \\ \frac{1}{1 - y} + \frac{y}{4y - 1} = \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{y}{4y - 1} \\ z = \frac{1}{1 - y} \\ 25y^2 - 20y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{y}{4y-1} \\ z = \frac{1}{1-y} \\ (5y-2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{y}{4y-1} \\ z = \frac{1}{1-y} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ z = \frac{5}{3} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}\right) \Rightarrow xyz = 1.$$

Deducem că $xyz = 1$.

Remarcă.

$$1). \text{ If } x, y, z, \lambda > 0, \begin{cases} x + \frac{1}{y} = \frac{3\lambda + 2}{\lambda} \\ y + \frac{1}{z} = 1 \\ z + \frac{1}{x} = \frac{3\lambda + 1}{\lambda + 1} \end{cases} \text{ then find } xyz.$$

Soluție.

Deducem că $xyz = 1$.

$$2). \text{ If } x, y, z, \lambda > 0, \begin{cases} x + \frac{1}{y} = 5 \\ y + \frac{1}{z} = 1 \\ z + \frac{1}{x} = 2 \end{cases} \text{ then find } xyz.$$

Dezvoltări , Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că $xyz = 1$.

Problema1535.

In acute $\triangle ABC$ holds

$$\prod \cos(B-C) \leq \frac{h_a^2}{w_a^2}.$$

Adil Abdullayev, Azerbaijan, RMM 8/2026

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\prod \cos(B-C) \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{R}\right)^3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \prod \cos(B-C) \stackrel{AG}{\leq} \left(\frac{\sum \cos(B-C)}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{R^2 + 3Rr + 2r^2}{3R^2}\right)^3 \stackrel{Euler}{\leq} \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{R}\right)^3 = RHS.$$

Am folosit mai sus:

$$\begin{aligned} \sum \cos(B-C) &= \frac{p^2 + r^2 + 2Rr - 2R^2}{2R^2} \stackrel{Gerretsen}{\leq} \frac{4R^2 + 4Rr + 3r^2 + r^2 + 2Rr - 2R^2}{2R^2} = \\ &= \frac{2R^2 + 6Rr + 4r^2}{2R^2} = \frac{R^2 + 3Rr + 2r^2}{R^2}. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1536.

In $\triangle ABC$ holds

$$w_a w_b w_c \leq abc \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/2026

Soluție.

$$\text{Folosind } w_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}, \prod (b+c) = 2p(p^2 + r^2 + 2Rr) \text{ și } \prod \cos \frac{A}{2} = \frac{p}{4R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_a w_b w_c = \frac{16Rr^2 p^2}{p^2 + r^2 + 2Rr}.$$

$$LHS = w_a w_b w_c = \frac{16Rr^2 p^2}{p^2 + r^2 + 2Rr} \stackrel{(1)}{\leq} 4Rrp \cdot \frac{p}{4R} = RHS,$$

$$\text{unde } \frac{16Rr^2 p^2}{p^2 + r^2 + 2Rr} \stackrel{(1)}{\leq} 4Rrp \cdot \frac{p}{4R} \Leftrightarrow 16Rr \leq p^2 + r^2 + 2Rr \Leftrightarrow p^2 \geq 14Rr - r^2, \text{ vezi inegalitatea lui}$$

$$\text{Gerretsen } p^2 \geq 16Rr - 5r^2.$$

Rămâne să arătăm că:

$$16Rr - 5r^2 \geq 14Rr - r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1537.

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, $x_0 = \lambda \in (0, 1)$ și $x_{n+1} = x_n - x_n^2$, $\forall n \in \mathbf{N}$ și $y_n = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}$, $\forall n \geq 1$. Calculați:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Marin Chirciu, MathBac 8/2026

Soluție.

1). Obținem $x_n \geq x_{n+1}$ și $x_n \in (0, 1)$, $\forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow (x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

2). Rezultă $y_n = \frac{1}{1 - x_{n-1}}$, $\forall n \geq 1$.

$$\text{Din 1) și 2)} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - x_{n-1}} = \frac{1}{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \frac{1}{1 - 0} = 1.$$

Deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$.

Problema1538.

Fie șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^{n+2}} dx$ și $J_n = \int_0^1 \ln(1+x^{n+2}) dx$. Calculați:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n.$$

Marin Chirciu, MathBac 8/2026

Soluție.

1). Obținem $(n+2)I_n = \ln 2 - J_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

2). Din $0 \leq \ln(1+x^{n+2}) \leq x^{n+2}$, $\forall x \in [0, 1] \Rightarrow 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+2}$, $\forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 0$.

$$\text{Din 1) și 2)} \Rightarrow nI_n = \frac{n}{n+2} \ln 2 - \frac{n}{n+2} J_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2} \ln 2 - \frac{n}{n+2} J_n \right) = \ln 2.$$

Deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \ln 2$.

Problema1539.

Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \lambda^x + x^3 + x + 1, \lambda > 1$. Calculați:

$$(f^{-1})'(\lambda + 3).$$

Marin Chirciu, MathBac 8/2026

Soluție.

1). $f'(x) = \lambda^x \ln \lambda + 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow f \uparrow \Rightarrow f$ este injectivă.

2). $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, f \uparrow$ și f continuă $\Rightarrow \text{Im } f = \mathbf{R} \Rightarrow f$ este surjectivă.

Din 1) și 2) $\Rightarrow f$ este bijectivă. $\Rightarrow f$ este inversabilă și $(f^{-1})'(\lambda + 3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\lambda \ln \lambda + 4}$.

Deducem că $(f^{-1})'(\lambda + 3) = \frac{1}{\lambda \ln \lambda + 4}$.

Remarcă.

Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \lambda^x + x^n + x + 1, \lambda > 1, n \in \mathbf{N}, n \geq 3, n$ este impar. Calculați:

$$(f^{-1})'(\lambda + 3).$$

Marin Chirciu

Soluție.

1). $f'(x) = \lambda^x \ln \lambda + nx^{n-1} + 1 > 0 \Rightarrow f \uparrow \Rightarrow f$ este injectivă.

2). $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, f \uparrow$ și f continuă $\Rightarrow \text{Im } f = \mathbf{R} \Rightarrow f$ este surjectivă.

Din 1) și 2) $\Rightarrow f$ este bijectivă. $\Rightarrow f$ este inversabilă și $(f^{-1})'(\lambda + 3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\lambda \ln \lambda + n + 1}$.

Deducem că $(f^{-1})'(\lambda + 3) = \frac{1}{\lambda \ln \lambda + n + 1}$.

Problema 1540.

If $x, y, z > 0$ then

$$\left(\sum \frac{x}{y} \right)^2 \geq \sum x \sum \frac{1}{x}.$$

Mihaly Bencze, Braşov, Zhao Changjian, China, Octogon-April 2007

Soluție.

$$\left(\sum \frac{x}{y}\right)^2 \geq \sum x \sum \frac{1}{x} \Leftrightarrow \sum \frac{x^2}{y^2} + 2 \sum \frac{x}{z} \geq 3 + \sum \frac{x}{y} + \sum \frac{x}{z} \Leftrightarrow \sum \frac{x^2}{y^2} + \sum \frac{x}{z} \geq 3 + \sum \frac{x}{y}, \text{ vezi:}$$

$$1). \sum \frac{x^2}{y^2} \geq \sum \frac{x}{y}, \text{ vezi } \sum a^2 \geq \sum a, abc = 1, (a, b, c) = \left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right).$$

$$2). \sum \frac{x}{z} \geq 3, \text{ vezi AM-GM.}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z$.

Remarcă.

In acute $\triangle ABC$ holds

$$\left(\sum \frac{\cot A}{\cot C}\right)^2 \geq 3\left(\frac{2R}{r} - 1\right).$$

Marin Chirciu

Soluție.**Lema.**

If $x, y, z > 0$ then

$$\left(\sum \frac{x}{y}\right)^2 \geq \sum x \sum \frac{1}{x}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \cot A \cot B = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = (\cot A \cot B, \cot B \cot C, \cot C \cot A)$ obținem:

$$\left(\sum \frac{\cot A \cot B}{\cot B \cot C}\right)^2 \geq \sum \cot A \cot B \sum \frac{1}{\cot A \cot B} \Leftrightarrow \left(\sum \frac{\cot A}{\cot C}\right)^2 \geq \sum \tan A \tan B.$$

$$\text{Folosind } \sum \tan A \tan B = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{p^2 - (2R + r)^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{16Rr - 5r^2 - r^2 - 4Rr}{4R^2 + 4Rr + 3r^2 - (2R + r)^2} = 3\left(\frac{2R}{r} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sum \frac{\cot A}{\cot C}\right)^2 \geq \sum \tan A \tan B \geq 3\left(\frac{2R}{r} - 1\right) \Rightarrow \left(\sum \frac{\cot A}{\cot C}\right)^2 \geq 3\left(\frac{2R}{r} - 1\right).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1542.

If $x, y, z > 0$, $\sum x = 2026$ then find max of

$$P = \sum \sqrt{3x+95}.$$

Olympiad Practice Problems 8/2026

Soluție.

$$P = \sum \sqrt{3x+95} \stackrel{CBS}{\leq} \sqrt{3 \sum (3x+95)} = \sqrt{3(3 \sum x + 3 \cdot 95)} = \sqrt{9(\sum x + 95)} =$$

$$3\sqrt{2026+95} = 3\sqrt{2121}, \text{ cu egal pentru } x = y = z = \frac{2026}{3}.$$

Deducem că $\max P = 3\sqrt{2121}$ pentru $x = y = z = \frac{2026}{3}$.

Remarcă.

1). If $x, y, z > 0$, $\sum x = \lambda$, $\lambda > 0$, $a > 0$, $b \geq 0$ then find max of

$$P = \sum \sqrt{ax+b}.$$

Soluție.

$$P = \sum \sqrt{ax+b} \stackrel{CBS}{\leq} \sqrt{3 \sum (ax+b)} = \sqrt{3(a \sum x + 3 \cdot b)} = \sqrt{3(a \cdot \lambda + 3 \cdot b)},$$

cu egal pentru $x = y = z = \frac{\lambda}{3}$.

Deducem că $\max P = \sqrt{3(a \cdot \lambda + 3 \cdot b)}$ pentru $x = y = z = \frac{\lambda}{3}$.

Remarcă.

2). If $x, y, z > 0$, $\sum x = 1$ then find max of

$$P = \sum \sqrt{3x+8}.$$

Soluție.

$$P = \sum \sqrt{3x+8} \stackrel{CBS}{\leq} \sqrt{3 \sum (3x+8)} = \sqrt{3(3 \sum x + 3 \cdot 8)} = \sqrt{9(1+8)} = \sqrt{9 \cdot 9} = 9,$$

cu egal pentru $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Deducem că $\max P = 9$ pentru $x = y = z = \frac{1}{3}$.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \sqrt{3 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + 8} \leq 9.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x, y, z > 0$, $\sum x = 1$ then

$$\sum \sqrt{3x + 8} \leq 9.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}, \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} \right)$ obținem:

$$\sum \sqrt{3 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + 8} \leq 9.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In acute $\triangle ABC$ holds

$$\sum \sqrt{3 \cot A \cot B + 8} \leq 9.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x, y, z > 0$, $\sum x = 1$ then

$$\sum \sqrt{3x + 8} \leq 9.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \cot A \cot B = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = (\cot A \cot B, \cot B \cot C, \cot C \cot A)$ obținem:

$$\sum \sqrt{3 \cot A \cot B + 8} \leq 9.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1543.

S743. If $a \geq 1 \geq b \geq c > 0$, $\sum a = 3$ then

$$\sum \frac{1}{a+b} + \frac{abc}{\sum ab} \geq \frac{11}{6}.$$

Mircea Lascu, Zalău, România, Mathematical Reflections4/2026

Solution.

Since $a \geq 1 \geq b \geq c > 0$ we have $(a-1)(b-1)(c-1) \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow abc + \sum a - \sum ab - 1 \leq 0, \sum a = 3 \Leftrightarrow abc + 3 - \sum ab - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + abc \leq \sum ab \Leftrightarrow 2 + r \leq q.$$

We use pqr -Method: $p = \sum a = 3, q = \sum ab, r = abc$.

$$\sum \frac{1}{a+b} = \frac{p^2+q}{pq-r}, p=3 \Leftrightarrow \sum \frac{1}{a+b} = \frac{9+q}{3q-r}.$$

We need to show that $\frac{9+q}{3q-r} + \frac{r}{q} \geq \frac{11}{6} \Leftrightarrow q(29r+54) \geq 27q^2 + 6r^2$, see $q \geq 2+r$.

It is enough to show that $(2+r)\left(\frac{1}{r}+2\right) \geq 9 \Leftrightarrow 2r^2 - 4r + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(r-1)^2 \geq 0$.

Equality occurs if and only if $a = b = c = 1$.

Problema1544.

S741. If $a, b, c > 0$ then

$$\sum \frac{a}{b+c} \leq 1 + \frac{\sum \frac{a^4}{b+c}}{\sum a^3}.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Reflections 4/2026

Solution.

$$\begin{aligned}
 \text{We have: } \sum \frac{a}{b+c} &\leq 1 + \frac{\sum \frac{a^4}{b+c}}{\sum a^3} \Leftrightarrow \sum a^3 \sum \frac{a}{b+c} \leq \sum a^3 + \sum \frac{a^4}{b+c} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sum \frac{a^4}{b+c} + \sum \frac{a(b^3+c^3)}{b+c} \leq \sum a^3 + \sum \frac{a^4}{b+c} \Leftrightarrow \sum \frac{a(b^3+c^3)}{b+c} \leq \sum a^3 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sum \frac{a(b+c)(b^2-bc+c^2)}{b+c} \leq \sum a^3 \Leftrightarrow \sum a(b^2-bc+c^2) \leq \sum a^3 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sum a(b^2+c^2) - 3abc \leq \sum a^3 \Leftrightarrow \sum ab(a+b) - 3abc \leq \sum a^3 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sum a^3 + 3abc \geq \sum ab(a+b), \text{ see Schur Inequality.}
 \end{aligned}$$

Equality occurs if and only if $a = b = c$.

Problema1545.

J740. If $a, b, c > 0$, $\sum a^2 \geq 3$ then

$$\sum \sqrt{\frac{2ab}{a^2+b^2}} \leq \sum a.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Reflections 4/2026

Solution.

Because $\frac{2ab}{a^2+b^2} \leq \frac{2ab+c^2}{a^2+b^2+c^2} \Leftrightarrow c^2(a-b)^2 \geq 0$ we have:

$$\begin{aligned}
 \sum \sqrt{\frac{2ab}{a^2+b^2}} &\leq \sum \sqrt{\frac{2ab+c^2}{a^2+b^2+c^2}} \stackrel{CBS}{\leq} \sqrt{3 \sum \frac{2ab+c^2}{a^2+b^2+c^2}} \stackrel{\sum a^2 \geq 3}{\leq} \sqrt{3 \sum \frac{2ab+c^2}{3}} = \\
 &= \sqrt{\sum (2ab+c^2)} = \sqrt{(a+b+c)^2} = \sum a = RHS.
 \end{aligned}$$

Equality occurs if and only if $a = b = c = 1$.

Problema1546.

If $x, y, z > 0$, $\sum x = 3$ then

$$\sum \frac{x^3}{\sqrt{x+3}} \geq \frac{3}{2}.$$

Panagiotis Danousis, Greece, MathAtelier 8/20126

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{x^3}{\sqrt{x+3}} = \sum \frac{x^4}{x\sqrt{x+3}} \stackrel{CS}{\geq} \frac{(\sum x^2)^2}{\sum x\sqrt{x+3}} = \frac{(\sum x^2)^2}{\sum \sqrt{x}\sqrt{x^2+3x}} \stackrel{CBS}{\geq} \frac{(\sum x^2)^2}{\sqrt{\sum x \sum (x^2+3x)}} = \\ &= \frac{(\sum x^2)^2}{\sqrt{3(\sum x^2+3\sum x)}} = \frac{(\sum x^2)^2}{\sqrt{3(\sum x^2+3\cdot 3)}} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{3}{2} = RHS, \end{aligned}$$

$$\text{unde } \frac{(\sum x^2)^2}{\sqrt{3(\sum x^2+3\cdot 3)}} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{3}{2} \stackrel{\sum x^2=t}{\Leftrightarrow} \frac{t^2}{\sqrt{3(t+9)}} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2t^2 \geq 3\sqrt{3(t+9)} \Leftrightarrow 4t^4 \geq 27(t+9) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4t^4 - 27t - 243 \geq 0 \Leftrightarrow (t-3)(4t^3 + 12t^2 + 36t + 81) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 3, \text{ vezi } t = \sum x^2 \geq 3,$$

$$\text{din } \sum x^2 \stackrel{CS}{\geq} \frac{(\sum x)^2}{3} = \frac{3^2}{3} = 3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Remarcă.

1). If $x, y, z > 0$, $\sum x = 3$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{x^3}{\sqrt{x+\lambda}} \geq \frac{3}{\sqrt{\lambda+1}}.$$

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{x^3}{\sqrt{x+\lambda}} = \sum \frac{x^4}{x\sqrt{x+\lambda}} \stackrel{CS}{\geq} \frac{(\sum x^2)^2}{\sum x\sqrt{x+\lambda}} = \frac{(\sum x^2)^2}{\sum \sqrt{x}\sqrt{x^2+\lambda x}} \stackrel{CBS}{\geq} \frac{(\sum x^2)^2}{\sqrt{\sum x \sum (x^2+\lambda x)}} = \\ &= \frac{(\sum x^2)^2}{\sqrt{3(\sum x^2+\lambda \sum x)}} = \frac{(\sum x^2)^2}{\sqrt{3(\sum x^2+\lambda \cdot 3)}} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{3}{\sqrt{\lambda+1}} = RHS, \end{aligned}$$

$$\text{unde } \frac{(\sum x^2)^2}{\sqrt{3(\sum x^2+\lambda \cdot 3)}} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{3}{\sqrt{\lambda+1}} \stackrel{\sum x^2=t}{\Leftrightarrow} \frac{t^2}{\sqrt{3(t+\lambda \cdot 3)}} \geq \frac{3}{\sqrt{\lambda+1}} \Leftrightarrow (\lambda+1)t^4 \geq 27(t+\lambda \cdot 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+1)t^4 - 27t - 81\lambda \geq 0 \Leftrightarrow (t-3)((\lambda+1)t^3 + 3(\lambda+1)t^2 + 9(\lambda+1)t + 27\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 3,$$

vezi $t = \sum x^2 \geq 3,$

$$\text{din } \sum x^2 \stackrel{CS}{\geq} \frac{(\sum x)^2}{3} = \frac{3^2}{3} = 3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{r_a^3 \sqrt{\frac{3r}{r_a} + 3}} \geq \frac{1}{18r^3}.$$

Soluție.

Lemă.

If $x, y, z > 0$, $\sum x = 3$ then

$$\sum \frac{x^3}{\sqrt{x+3}} \geq \frac{3}{2}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a} = 1 \Leftrightarrow \sum \frac{3r}{r_a} = 3$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{3r}{r_a}, \frac{3r}{r_b}, \frac{3r}{r_c}\right)$ obținem:

$$\sum \frac{\frac{27r^3}{r_a^3}}{\sqrt{\frac{3r}{r_a} + 3}} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{r_a^3 \sqrt{\frac{3r}{r_a} + 3}} \geq \frac{1}{18r^3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{h_a^3 \sqrt{\frac{3r}{h_a} + 3}} \geq \frac{1}{18r^3}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lemă.

If $x, y, z > 0$, $\sum x = 3$ then

$$\sum \frac{x^3}{\sqrt{x+3}} \geq \frac{3}{2}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{h_a} = 1 \Leftrightarrow \sum \frac{3r}{h_a} = 3$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{3r}{h_a}, \frac{3r}{h_b}, \frac{3r}{h_c}\right)$ obținem:

$$\sum \frac{\frac{27r^3}{h_a^3}}{\sqrt{\frac{3r}{h_a} + 3}} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{h_a^3 \sqrt{\frac{3r}{h_a} + 3}} \geq \frac{1}{18r^3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1547.

If $x, y, z > 0$ then

$$\sum xy^3 \geq \sum x^2yz.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities 8/2026

Soluție.

Avem: $2xy^3 + yz^3 + 4zx^3 \stackrel{AG}{\geq} 7\sqrt[7]{(xy^3)^2 yz^3 (zx^3)^4} = 7x^2yz$ și analoagele.

Se sumează cele trei inegalități și se obține concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z$.

Remarcă.

If $x, y, z > 0$ and $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ then

$$\sum x^{n+2}y \geq xyz \sum x^n.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Muirhead pentru tripletele $(n+2, 1, 0) \succ (n+1, 1, 1)$,

$$(\text{vezi } n+2 > n+1, (n+2)+1 > (n+1)+1, (n+2)+1+0 = (n+1)+1+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum x^{n+2} y^1 z^0 \geq \sum x^n y^1 z^1 \Leftrightarrow \sum x^{n+2} y \geq xyz \sum x^n.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z$.

Problema 1548.

UP.613. Let be $A(1, 2, 0); B(2, 0, 1); C(3, 3, 3)$. Find the area of $\triangle ABC$.

Daniel Sitaru, Romania, RMM-Number-41/2026

Soluție.

$$\text{Folosim: } S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|.$$

În cazul nostru:

$$\vec{AB} = (2-1)\vec{i} + (0-2)\vec{j} + (1-0)\vec{k} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \|\vec{AB}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

$$\vec{AC} = (3-1)\vec{i} + (3-2)\vec{j} + (3-0)\vec{k} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow \|\vec{AC}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

$$\|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cdot \sin \angle(\vec{AB}, \vec{AC}) = \sqrt{6} \cdot \sqrt{14} \cdot \frac{5}{2\sqrt{7}} = 5\sqrt{3}, \text{ vezi:}$$

$$\cos \angle(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|} = \frac{(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) \cdot (2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k})}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = \frac{1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 3}{2 \cdot \sqrt{21}} =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{21}} \Rightarrow \sin \angle(\vec{AB}, \vec{AC}) = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{2\sqrt{21}}\right)^2} = \frac{5}{2\sqrt{7}}.$$

$$\text{Deducem } S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

Problema 1549

Solve for reals

$$\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x} = 1.$$

Math-7/2026

Soluție.

$$\text{Pentru } x \geq 0 \text{ notăm } (\sqrt[3]{x+7}, \sqrt{x}) = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ a^3-b^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ (b+1)^3-b^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ b^3+2b^2+3b-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ (b-1)(b^2+3b+6)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Deducem că $x=1$ este soluția unică a ecuației.

Remarcă.

1). Let be $n \geq 1$ fixed. Solve for reals

$$\sqrt[3]{x+n^3-1}-\sqrt{x}=n-1.$$

Soluție.

$$\text{Pentru } x \geq 0 \text{ notăm } (\sqrt[3]{x+n^3-1}, \sqrt{x}) = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} a-b=n-1 \\ a^3-b^2=n^3-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+n-1 \\ (b+n-1)^3-b^2=n^3-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b+n-1 \\ b^3+(3n-4)b^2+3(n-1)^2b-3n(n-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+n-1 \\ (b-1)(b^2+3(n-1)b+3n(n-1))=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a=n \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Deducem că $x=1$ este soluția unică a ecuației.

2). Let be $\lambda \geq 1$ fixed. Solve for reals

$$\sqrt[3]{x+\lambda^3-1}-\sqrt{x}=\lambda-1.$$

Soluție.

$$\text{Pentru } x \geq 0 \text{ notăm } (\sqrt[3]{x+\lambda^3-1}, \sqrt{x}) = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} a-b=\lambda-1 \\ a^3-b^2=\lambda^3-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+\lambda-1 \\ (b+\lambda-1)^3-b^2=\lambda^3-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b+\lambda-1 \\ b^3+(3\lambda-4)b^2+3(\lambda-1)^2b-3\lambda(\lambda-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+\lambda-1 \\ (b-1)(b^2+3(\lambda-1)b+3\lambda(\lambda-1))=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\lambda \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Deducem că $x=1$ este soluția unică a ecuației.

3). Solve for reals

$$\sqrt[3]{x + \left(\frac{3}{2}\right)^3} - 1 - \sqrt{x} = \frac{1}{2}.$$

Soluție.

$$\begin{aligned} \text{Pentru } x \geq 0 \text{ notăm } \left(\sqrt[3]{x + \left(\frac{3}{2}\right)^3} - 1, \sqrt{x} \right) &= (a, b) \Rightarrow \begin{cases} a - b = \frac{1}{2} \\ a^3 - b^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} a = b + \frac{1}{2} \\ \left(b - \frac{1}{2}\right)^3 - b^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + \frac{1}{2} \\ b^3 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{3}{4}b - \frac{9}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + \frac{1}{2} \\ (b-1)\left(b^2 + \frac{3}{2}b + \frac{9}{4}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Deducem că $x = 1$ este soluția unică a ecuației.

4). Solve for reals

$$\sqrt[3]{x + \frac{19}{8}} - \sqrt{x} = \frac{1}{2}.$$

Soluție.

$$\begin{aligned} \text{Pentru } x \geq 0 \text{ notăm } \left(\sqrt[3]{x + \frac{19}{8}}, \sqrt{x} \right) &= (a, b) \Rightarrow \begin{cases} a - b = \frac{1}{2} \\ a^3 - b^2 = \frac{19}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + \frac{1}{2} \\ \left(b - \frac{1}{2}\right)^3 - b^2 = \frac{19}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} a = b + \frac{1}{2} \\ b^3 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{3}{4}b - \frac{9}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + \frac{1}{2} \\ (b-1)\left(b^2 + \frac{3}{2}b + \frac{9}{4}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Deducem că $x = 1$ este soluția unică a ecuației.

5). Solve for reals

$$\sqrt[3]{x+26} - \sqrt{x} = 2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\begin{aligned} \text{Pentru } x \geq 0 \text{ notăm } (\sqrt[3]{x+26}, \sqrt{x}) &= (a, b) \Rightarrow \begin{cases} a - b = 2 \\ a^3 - b^2 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2 \\ (b+2)^3 - b^2 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2 \\ b^3 + 5b^2 + 12b - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2 \\ (b-1)(b^2 + 6b + 18) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Deducem că $x = 1$ este soluția unică a ecuației.

6). Solve for reals

$$\sqrt[3]{x+63} - \sqrt{x} = 3.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$\begin{aligned} \text{Pentru } x \geq 0 \text{ notăm } (\sqrt[3]{x+63}, \sqrt{x}) &= (a, b) \Rightarrow \begin{cases} a - b = 3 \\ a^3 - b^2 = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 3 \\ (b+3)^3 - b^2 = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 3 \\ b^3 + 8b^2 + 27b - 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 3 \\ (b-1)(b^2 + 9b + 36) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Deducem că $x = 1$ este soluția unică a ecuației.**Problema 1550.**

$$\text{Fie } I_n = \int_0^{2n+2} \frac{x^{2n}}{x^{2n} + (2n+2-x)^{2n}} dx \text{ și } J_n = \int_0^{2n+2} \frac{(2n+2-x)^{2n}}{x^{2n} + (2n+2-x)^{2n}} dx, n \in \mathbf{N}^*. \text{ Calculați:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{I_n}{n} \right)^n.$$

Marin Chirciu, MathBac-2026

Soluție.

$$1). \text{Calculăm } I_n + J_n = \int_0^{2n+2} dx = 2n+2.$$

2). Cu schimbarea de variabilă $t = 2n + 2 - x$ obținem $I_n = J_n, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

3). Din $I_n + J_n = 2n + 2$ și $I_n = J_n \Rightarrow I_n = n + 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{I_n}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = e$

Deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{I_n}{n} \right)^n = e$.

Problema 1551.

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Calculați $\det(A^n + B^n), n \in \mathbf{N}^*$.

Marin Chirciu, MathBac-2026

Soluție.

1). Calculăm $AB = BA = O_3$.

2). Arătăm că $(A + B)^n = A^n + B^n, \forall n \in \mathbf{N}^*$, inducție matematică.

3). Obținem $\det(A^n + B^n) = \det(A + B)^n = (16)^n = 2^{4n}$.

Deducem că $\det(A^n + B^n) = 2^{4n}$.

Problema 1552.

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați $\det(A^{2n} + B^{2n}), n \in \mathbf{N}^*$.

Marin Chirciu, MathBac-2026

Soluție.

1). Calculăm $AB = BA = O_3$.

2). Arătăm că $(A + B)^n = A^n + B^n, \forall n \in \mathbf{N}^*$, inducție matematică.

3). Obținem $\det(A^{2n} + B^{2n}) = \det(A + B)^{2n} = (-36)^{2n} = 36^{2n} = 6^{4n}$.

Deducem că $\det(A^{2n} + B^{2n}) = 6^{4n}$.

Problema 1553.

If $a, b, c \geq 0$, $\sum a = 2$ then

$$\sum a^2 b^2 \leq 1.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, RMM 8/2026

Remarcă.

1). If $a, b, c > 0$, $\sum a = 1$, $\frac{5}{4} \leq \lambda \leq 2$ then

$$\sum a^2 b^2 + \lambda abc \leq \frac{\lambda + 1}{27}.$$

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = \sum a = 1$, $q = \sum ab$, $r = abc$.

Avem $\sum a^2 b^2 = q^2 - 2pr$, $p = 1 \Leftrightarrow \sum a^2 b^2 = q^2 - 2r$.

Inegalitatea se scrie $q^2 - 2r + nr \leq \frac{n+1}{27}$, vezi inegalitatea lui Schur $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$, $p = 1 \Leftrightarrow$

$$r \geq \frac{4q-1}{9}.$$

Este suficient să arătăm că:

$$q^2 + (\lambda - 2) \frac{4q-1}{9} \leq \frac{\lambda+1}{27} \Leftrightarrow 27q^2 + 12(\lambda-2)q + 5 - 4\lambda \leq 0 \Leftrightarrow \left(q - \frac{1}{3}\right)(q + 4\lambda - 5) \leq 0,$$

vezi $\frac{5}{4} \leq \lambda \leq 2$ și $q \leq \frac{1}{3}$, adevărat din $1 = p^2 \geq 3q$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \frac{1}{3}$.

2). If $a, b, c > 0$, $\sum a = 1$ then

$$\sum a^2 b^2 + 2abc \leq \frac{1}{9}.$$

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = \sum a = 1, q = \sum ab, r = abc$.

Avem $\sum a^2 b^2 = q^2 - 2pr, p = 1 \Leftrightarrow \sum a^2 b^2 = q^2 - 2r$.

Inegalitatea se scrie $q^2 - 2r + nr \leq \frac{n+1}{27}$, vezi inegalitatea lui Schur $p^3 - 4pq + 9r \geq 0, p = 1 \Leftrightarrow$

$$r \geq \frac{4q-1}{9}.$$

Este suficient să arătăm că:

$$q^2 \leq \frac{1}{9} \Leftrightarrow q \leq \frac{1}{3} \text{ vezi: } 1 = p^2 \geq 3q.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \frac{1}{3}$.

3). If $a, b, c > 0, \sum a = 1$ then

$$\sum a^2 b^2 + \frac{5}{4} abc \leq \frac{1}{12}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = \sum a = 1, q = \sum ab, r = abc$.

Avem $\sum a^2 b^2 = q^2 - 2pr, p = 1 \Leftrightarrow \sum a^2 b^2 = q^2 - 2r$.

Inegalitatea se scrie $q^2 - 2r + \frac{5}{4}r \leq \frac{1}{12} \Leftrightarrow q^2 - \frac{3}{4}r \leq \frac{1}{12}$, vezi inegalitatea lui Schur

$$p^3 - 4pq + 9r \geq 0, p = 1 \Leftrightarrow r \geq \frac{4q-1}{9}.$$

Este suficient să arătăm că:

$$q^2 - \frac{3}{4} \cdot \frac{4q-1}{9} \leq \frac{1}{12} \Leftrightarrow 12q^2 - 4q \leq 0 \Leftrightarrow q \leq \frac{1}{3}, \text{ vezi: } 1 = p^2 \geq 3q.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \frac{1}{3}$.

4). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r^2}{r_a^2 r_b^2} + \frac{5}{4p^2} \leq \frac{1}{12r^2}.$$

Soluție.

Lemă.

If $x, y, z > 0$, $\sum x = 1$ then

$$\sum x^2 y^2 + \frac{5}{4}xyz \leq \frac{1}{12}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a} = 1$

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{r_a}, \frac{r}{r_b}, \frac{r}{r_c}\right)$ obținem:

$$\begin{aligned} \sum \frac{r^2}{r_a^2} \cdot \frac{r^2}{r_b^2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{r}{r_a} \cdot \frac{r}{r_b} \cdot \frac{r}{r_c} &\leq \frac{1}{12} \Leftrightarrow \sum \frac{r^4}{r_a^2 r_b^2} + \frac{5r^3}{4r_a r_b r_c} \leq \frac{1}{12} \Leftrightarrow \sum \frac{r^4}{r_a^2 r_b^2} + \frac{5r^3}{4 \cdot rp^2} \leq \frac{1}{12} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum \frac{r^4}{r_a^2 r_b^2} + \frac{5r^2}{4p^2} &\leq \frac{1}{12} \Leftrightarrow \sum \frac{r^2}{r_a^2 r_b^2} + \frac{5}{4p^2} \leq \frac{1}{12r^2}. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

5). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r^4}{h_a^2 h_b^2} + \frac{5Rr}{8p^2} \leq \frac{1}{12}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lemă.

If $x, y, z > 0$, $\sum x = 1$ then

$$\sum x^2 y^2 + \frac{5}{4}xyz \leq \frac{1}{12}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{h_a} = 1$

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{h_a}, \frac{r}{h_b}, \frac{r}{h_c}\right)$ obținem:

$$\begin{aligned} \sum \frac{r^2}{h_a^2} \cdot \frac{r^2}{h_b^2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{r}{h_a} \cdot \frac{r}{h_b} \cdot \frac{r}{h_c} &\leq \frac{1}{12} \Leftrightarrow \sum \frac{r^4}{h_a^2 h_b^2} + \frac{5r^3}{4h_a h_b h_c} \leq \frac{1}{12} \Leftrightarrow \sum \frac{r^4}{h_a^2 h_b^2} + \frac{5r^3}{4 \cdot \frac{2r^2 p^2}{R}} \leq \frac{1}{12} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum \frac{r^4}{h_a^2 h_b^2} + \frac{5Rr}{8p^2} \leq \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1554.

Let be $\lambda > 0$ and $f : (0, \lambda) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln \frac{x}{\lambda - x}$. Arătați că funcția f este inversabilă și calculați $(f^{-1})'(0)$.

Marin Chirciu, MathBac-2026

Soluție.

Avem $f'(x) = \frac{\lambda}{x(\lambda - x)} > 0 \Rightarrow f \uparrow \Rightarrow f$ este injectivă, (1).

Din $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = -\infty$ și $\lim_{x \rightarrow \lambda, x < \lambda} f(x) = +\infty \Rightarrow \text{Im } f = \mathbf{R} \Rightarrow f$ este surjectivă, (2).

Din (1) și (2) $\Rightarrow f$ este bijectivă $\Rightarrow f$ este inversabilă.

$$\text{Obținem } (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'\left(\frac{\lambda}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{\lambda}{\lambda}} = \frac{\lambda}{4}.$$

$$\text{Deducem că } (f^{-1})'(0) = \frac{\lambda}{4}.$$

Problema1556.

Solve for reals

$$\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5.$$

Math-1995

Soluție.

$$\text{Pentru } 0 \leq x \leq 97 \text{ notăm } (\sqrt[4]{97-x}, \sqrt[4]{x}) = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ a^4+b^4=97 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ (a^2+b^2)^2-2a^2b^2=97 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ ((a+b)^2-2ab)^2-2a^2b^2=97 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ (5^2-2ab)^2-2a^2b^2=97 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ (ab)^2-50ab+264=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ (ab-6)(ab-44)=0 \end{cases}$$

$$1). \begin{cases} a+b=5 \\ ab=6 \end{cases} \Leftrightarrow (a, b) \in \{(2, 3), (3, 2)\} \Rightarrow (\sqrt[4]{97-x}, \sqrt[4]{x}) \in \{(2, 3), (3, 2)\} \Leftrightarrow x \in \{16, 81\}.$$

$$2). \begin{cases} a+b=5 \\ ab=44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=5 \\ P=44 \end{cases} \Rightarrow t^2-St+P=0 \Leftrightarrow t^2-5t+44=0, \Delta < 0 \Rightarrow t \notin \mathbf{R}.$$

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{16, 81\}$.

Remarcă.

Let be $\lambda, k \in \mathbf{R}, \lambda = k^4 + (k+1)^4$ fixed. Solve for reals

$$\sqrt[4]{\lambda-x} + \sqrt[4]{x} = 2k+1.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\text{Pentru } 0 \leq x \leq \lambda \text{ notăm } (\sqrt[4]{\lambda-x}, \sqrt[4]{x}) = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} a+b=2k+1 \\ a^4+b^4=\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2k+1 \\ (a^2+b^2)^2-2a^2b^2=\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2k+1 \\ ((a+b)^2-2ab)^2-2a^2b^2=\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=2k+1 \\ 2P^2-4(2k+1)^2P+(2k+1)^4-(k+1)^4-k^4=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S=2k+1 \\ P^2-2(2k+1)^2P+7k^4+14k^3+9k^2+2k=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2k+1 \\ (P-k^2-k)(P-7k^2-7k-2)=0 \end{cases}$$

$$1). \begin{cases} S=2k+1 \\ P=k^2+k \end{cases} \Leftrightarrow (a, b) \in \{(k, k+1), (k+1, k)\} \Rightarrow (\sqrt[4]{\lambda-x}, \sqrt[4]{x}) \in \{(k, k+1), (k+1, k)\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \{k^4, (k+1)^4\}.$$

$$2). \begin{cases} S = 2k + 1 \\ P = 7k^2 + 7k + 2 \end{cases} \Rightarrow t^2 - (2k+1)t + 7k^2 + 7k + 2 = 0, \Delta = -24k^2 - 14k - 7 < 0 \Rightarrow t \notin \mathbf{R}.$$

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{k^4, (k+1)^4\}$.

Problema1557.

Fie $L_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n - \arccos x \cdot \arccos 2x \cdot \dots \cdot \arccos nx}{\arcsin x}, n \in \mathbf{N}^*$. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi L_n}{n^2}\right)^n$.

Marin Chirciu, Math 8/2026

Soluție.

$$\text{Obținem } L_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n - \arccos x \cdot \arccos 2x \cdot \dots \cdot \arccos nx}{\arcsin x} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} + \dots + \frac{2n}{\pi} = \frac{n(n+1)}{\pi},$$

(inducție matematică).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi L_n}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi \cdot \frac{n(n+1)}{\pi}}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e.$$

Problema1558.

Fie mulțimea $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} x & \lambda(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbf{R}^* \right\}$, unde $\lambda \in \mathbf{R}$ fixed. Calculați $A^n(x), n \in \mathbf{N}^*$.

Marin Chirciu, Math 8/2026

Soluție.

Avem $A(x) \cdot A(y) = A(xy)$ și deducem că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

Funcția $f: \mathbf{R}^* \rightarrow G, f(x) = A(x)$ este un izomorfism de la grupul $(\mathbf{R}^*, \cdot)$ la grupul $(G, \cdot)$.

$$\text{Deducem că } A^n(x) = A(x^n) = \begin{pmatrix} x^n & \lambda(x^n - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema1559.

Solve for reals

$$\sqrt{1-x} - \sqrt[3]{x-12} = 7.$$

Math-2026

Soluție.

$$\text{Pentru } x \leq 1 \text{ notăm } (\sqrt{1-x}, \sqrt[3]{x-12}) = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} a-b=7 \\ a^2+b^3=-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+7 \\ (b+7)^2+b^3=-11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b+7 \\ (b+7)^2+b^3=-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+7 \\ b^3+b^2+14b+60=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+7 \\ (b+3)(b^2-2b+20)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow x=-15.$$

Deducem că $x = -15$ este soluția unică a ecuației.**Remarcă.**1). Let be $n, k \in \mathbf{R}$, $n-k = -11$ fixed. Solve for reals

$$\sqrt{n-x} - \sqrt[3]{x-k} = 7.$$

Soluție.

$$\text{Pentru } x \leq n \text{ notăm } (\sqrt{n-x}, \sqrt[3]{x-k}) = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} a-b=7 \\ a^2+b^3=n-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+7 \\ (b+7)^2+b^3=n-k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b+7 \\ (b+7)^2+b^3=-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+7 \\ b^3+b^2+14b+60=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+7 \\ (b+3)(b^2-2b+20)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow x=n-16 \Leftrightarrow x=k-27.$$

Deducem că $x = n-16$ este soluția unică a ecuației.2). Let be $n-\lambda = -11$ fixed. Solve for reals

$$\sqrt{n-x} - \sqrt[3]{x-\lambda} = 7.$$

Soluție.

$$\text{Pentru } x \leq n \text{ notăm } (\sqrt{n-x}, \sqrt[3]{x-\lambda}) = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} a-b=7 \\ a^2+b^3=n-\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+7 \\ (b+7)^2+b^3=n-\lambda \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 7 \\ (b+7)^2 + b^3 = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 7 \\ b^3 + b^2 + 14b + 60 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 7 \\ (b+3)(b^2 - 2b + 20) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = -15.$$

Deducem că $x = n - 16$ este soluția unică a ecuației.

3). Let be $\lambda \in \mathbf{R}$ fixed. Solve for reals

$$\sqrt{\lambda - 11 - x} - \sqrt[3]{x - \lambda} = 7.$$

Soluție.

$$\text{Pentru } x \leq \lambda - 11 \text{ notăm } (\sqrt{\lambda - 11 - x}, \sqrt[3]{x - \lambda}) = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} a - b = 7 \\ a^2 + b^3 = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 7 \\ (b+7)^2 + b^3 = -11 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 7 \\ (b+7)^2 + b^3 = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 7 \\ b^3 + b^2 + 14b + 60 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 7 \\ (b+3)(b^2 - 2b + 20) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \lambda - 27.$$

Deducem că $x = \lambda - 27$ este soluția unică a ecuației.

4). Solve for reals

$$\sqrt{-15 - x} - \sqrt[3]{x + 4} = 7.$$

Soluție.

$$\text{Pentru } x \leq -15 \text{ notăm } (\sqrt{-15 - x}, \sqrt[3]{x + 4}) = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} a - b = 7 \\ a^2 + b^3 = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 7 \\ (b+7)^2 + b^3 = -11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 7 \\ (b+7)^2 + b^3 = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 7 \\ b^3 + b^2 + 14b + 60 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 7 \\ (b+3)(b^2 - 2b + 20) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = -31.$$

Deducem că $x = -31$ este soluția unică a ecuației.

5). Solve for reals

$$\sqrt{16-x} - \sqrt[3]{x-27} = 7.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$\text{Pentru } x \leq 16 \text{ notăm } (\sqrt{16-x}, \sqrt[3]{x-27}) = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} a-b=7 \\ a^2+b^3=-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+7 \\ (b+7)^2+b^3=-11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b+7 \\ (b+7)^2+b^3=-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+7 \\ b^3+b^2+14b+60=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+7 \\ (b+3)(b^2-2b+20)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Deducem că $x=0$ este soluția unică a ecuației.**Problema 1560.**If $x, y, z > 0$, $\sum x = 1$ then

$$2\sum x^3 + 3xyz \leq \sum x^2.$$

Mihaly Bencze, Braşov, Octogon-April 2007

Soluție.

Folosim -Method.

$$\text{Notăm } p = \sum x = 1, q = \sum xy, r = xyz.$$

$$\text{Avem } \sum x^2 = p^2 - 2q = 1 - 2q \text{ și } \sum x^3 = p^3 - 3pq + 3r = 1 - 3q + 3r.$$

Inegalitatea se scrie:

$$2(1-3q+3r)+3r \geq 1-2q \Leftrightarrow 1-4q+9r \geq 0, \text{ vezi inegalitatea lui Schur } p^3-4pq+9r \geq 0, p=1 \\ \Leftrightarrow 1-4q+9r \geq 0.$$

$$\text{Egalitatea are loc dacă și numai dacă } x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Remarcă.1). If $x, y, z > 0$, $\sum x = 1$ and $\lambda \leq \frac{3}{2}$ then

$$\sum x^3 + \lambda xyz \leq \frac{\lambda+3}{9} \sum x^2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim -Method.

Notăm $p = \sum x = 1, q = \sum xy, r = xyz$.Avem $\sum x^2 = p^2 - 2q = 1 - 2q$ și $\sum x^3 = p^3 - 3pq + 3r = 1 - 3q + 3r$.

Inegalitatea se scrie:

$$1 - 3q + 3r + \lambda r \geq \frac{\lambda+3}{9}(1-2q) \Leftrightarrow 6 - \lambda + (2\lambda - 21)q + 9(\lambda+3)r \geq 0, \text{ vezi inegalitatea lui Schur}$$

$$p^3 - 4pq + 9r \geq 0, p = 1 \Leftrightarrow 1 - 4q + 9r \geq 0 \Leftrightarrow 9r \geq 4q - 1.$$

Este suficient să arătăm că:

$$6 - \lambda + (2\lambda - 21)q + (\lambda+3)(4q-1) \geq 0 \Leftrightarrow (9-6\lambda)q \leq 3-2\lambda \Leftrightarrow 3(3-2\lambda)q \leq 3-2\lambda,$$

$$\text{vezi } \lambda \leq \frac{3}{2} \text{ și } q \leq \frac{1}{3}, \text{ adevărat din } 1 = p^2 \geq 3q.$$

$$\text{Egalitatea are loc dacă și numai dacă } x = y = z = \frac{1}{3}.$$

2). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{2r}{r_a^3} + \frac{3}{p^2} \leq \sum \frac{1}{r_a^2}.$$

Lemă.If $x, y, z > 0$, $\sum x = 1$ then

$$2\sum x^3 + 3xyz \leq \sum x^2.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a} = 1$.Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{r_a}, \frac{r}{r_b}, \frac{r}{r_c}\right)$ obținem:

$$\begin{aligned}
2\sum \frac{r^3}{r_a^3} + 3\frac{r}{r_a} \cdot \frac{r}{r_b} \cdot \frac{r}{r_c} &\leq \sum \frac{r^2}{r_a^2} \Leftrightarrow 2\sum \frac{r^3}{r_a^3} + \frac{3r^3}{r_a r_b r_c} \leq \sum \frac{r^2}{r_a^2} \Leftrightarrow \sum \frac{2r}{r_a^3} + \frac{3r}{r_a r_b r_c} \leq \sum \frac{1}{r_a^2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sum \frac{2r}{r_a^3} + \frac{3r}{rp^2} \leq \sum \frac{1}{r_a^2} \Leftrightarrow \sum \frac{2r}{r_a^3} + \frac{3}{p^2} \leq \sum \frac{1}{r_a^2}.
\end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{2r}{h_a^3} + \frac{3R}{2rp^2} \leq \sum \frac{1}{h_a^2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Lemă.

If $x, y, z > 0$, $\sum x = 1$ then

$$2\sum x^3 + 3xyz \leq \sum x^2.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{h_a} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{h_a}, \frac{r}{h_b}, \frac{r}{h_c}\right)$ obținem:

$$\begin{aligned}
2\sum \frac{r^3}{h_a^3} + 3\frac{r}{h_a} \cdot \frac{r}{h_b} \cdot \frac{r}{h_c} &\leq \sum \frac{r^2}{h_a^2} \Leftrightarrow 2\sum \frac{r^3}{h_a^3} + \frac{3r^3}{h_a h_b h_c} \leq \sum \frac{r^2}{h_a^2} \Leftrightarrow \sum \frac{2r}{h_a^3} + \frac{3r}{h_a h_b h_c} \leq \sum \frac{1}{h_a^2} \\
&\Leftrightarrow \sum \frac{2r}{h_a^3} + \frac{3r}{\frac{2r^2 p^2}{R}} \leq \sum \frac{1}{h_a^2} \Leftrightarrow \sum \frac{2r}{h_a^3} + \frac{3R}{2rp^2} \leq \sum \frac{1}{h_a^2}.
\end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1561

Let be $a > b > 0$ and $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \ln(x^2 + a) - \ln(x^2 + b)$. Find $\text{Im } f$.

Marin Chirciu, MathBac-2026

Soluție.

$$\text{Avem } f'(x) = \frac{2x(b-a)}{(x^2+a)(x^2+b)}.$$

$$\text{Pentru } x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow.$$

$$\text{Pentru } x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow.$$

$$f(0) = \ln \frac{a}{b} > 0, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln \frac{x^2+a}{x^2+b} = \ln \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+a}{x^2+b} = \ln 1 = 0.$$

$$\text{Din tabelul de variație a funcției deducem că } 0 < f(x) \leq \ln \frac{a}{b} \Rightarrow \text{Im } f = \left(0, \ln \frac{a}{b}\right].$$

$$\text{Deducem că } \text{Im } f = \left(0, \ln \frac{a}{b}\right].$$

Problema1562.

SP.615. Let be $A(1,2,3)$ and the real plan: $P: 2x + y + z - 5 = 0$. Find the parametrical equations of the perpendicular line from A to the real plan P .

Daniel Sitaru, Romania, RMM-41/2026

Soluție.

Folosim:

Ecuția perpendicularei din punctul $M(x_0, y_0, z_0)$ la planul $P: ax + by + cz + d = 0$ este

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}.$$

În cazul nostru: punctul $A(1,2,3)$ și planul $P: 2x + y + z - 5 = 0$.

The parametrical equations of the perpendicular line from A to the real plan P are:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}.$$

Problema1563.

SP.614. Let be $A(1,3,2); B(3,1,1); C(4,2,0)$. Find the area of the parallelogram builded on $\overline{AB}$ and $\overline{AC}$.

Daniel Sitaru, Romania, RMM-41/2026

Soluție.

$$\text{Folosim: } S[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|.$$

În cazul nostru:

$$\overrightarrow{AB} = (3-1)\vec{i} + (1-3)\vec{j} + (1-2)\vec{k} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

$$\overrightarrow{AC} = (4-1)\vec{i} + (2-3)\vec{j} + (0-2)\vec{k} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}.$$

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \sin \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 3 \cdot \sqrt{14} \cdot \frac{\sqrt{13}}{3\sqrt{7}} = \sqrt{26}, \text{ vezi:}$$

$$\cos \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{(2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}) \cdot (3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k})}{3 \cdot \sqrt{14}} = \frac{2 \cdot 3 + (-2)(-1) + (-1)(-2)}{3 \cdot \sqrt{14}} =$$

$$= \frac{10}{3 \cdot \sqrt{14}} \Rightarrow \sin \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\sqrt{13}}{3\sqrt{7}}.$$

Problema1564.

SP.613. Let be $A(2, 4, 1); B(4, 2, 5)$. Find the mediator plan of the segment $[AB]$.

Daniel Sitaru, Romania, RMM-41/2026

Soluție.

Fie M mijlocul segmentului $AB \Rightarrow$

$$M(x_M, y_M, z_M), x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2}, z_M = \frac{z_A + z_B}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_M = \frac{2+4}{2}, y_M = \frac{4+2}{2}, z_M = \frac{1+5}{2} \Rightarrow x_M = 3, y_M = 3, z_M = 3 \Rightarrow M(3, 3, 3).$$

Vectorul director al segmentului $\overrightarrow{AB}$ devine vectorul normal al planului perpendicular și

ecuația planului mediator al segmentului $[AB]$ este:

$$(x_B - x_A)(x - x_M) + (y_B - y_A)(y - y_M) + (z_B - z_A)(z - z_M) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4-2)(x-3) + (2-4)(y-3) + (5-1)(z-3) = 0 \Leftrightarrow 2(x-3) - 2(y-3) + 4(z-3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x-3) - 2(y-3) + 4(z-3) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z - 6 = 0.$$

Problema1565.

SP.612. Let be $A(1, 2, 3); B(4, 1, 1); C(0, 3, 2); D(2, 1, 3)$. Find the volume of the paralelipiped builded on the vectors $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Daniel Sitaru, Romania, RMM-41/2026

Soluție.

$$\text{Folosim: } V[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = |\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})|.$$

În cazul nostru:

$$\overrightarrow{AB} = (4-1)\vec{i} + (1-2)\vec{j} + (1-3)\vec{k} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}.$$

$$\overrightarrow{AC} = (0-1)\vec{i} + (3-2)\vec{j} + (2-3)\vec{k} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}.$$

$$\overrightarrow{AD} = (2-1)\vec{i} + (1-2)\vec{j} + (3-3)\vec{k} = \vec{i} - \vec{j} \Rightarrow \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

$$\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{AD}\| \cdot \sin \angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}, \text{ vezi:}$$

$$\cos \angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{AD}\|} = \frac{(-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) \cdot (\vec{i} - \vec{j})}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{(-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{6}} = \frac{-2}{\sqrt{6}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$V[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = |\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})| = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\| = \sqrt{14} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}.$$

Problema 1566.

SP.606. Let be $A(2, 1, 0); B(0, 1, 2); C(3, 0, 1); D(4, 4, 4)$. Find the volume of the tetrahedron $ABCD$.

Daniel Sitaru, Romania, RMM-41/2026

Soluție.

$$\text{Folosim: } V[ABCD] = \frac{1}{6} |\Delta|, \text{ unde } \Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_D & y_D & z_D & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\text{În cazul nostru } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -24.$$

$$\text{Obținem } V[ABCD] = \frac{1}{6} |\Delta| = \frac{1}{6} |-24| = 4.$$

Problema1567.

SP.605. Let be $A(1,2,1); B(2,1,3); C(4,4,4)$. Find the distance from the point A to the line BC .

Daniel Sitaru, Romania, RMM-41/2026

Soluție.

Folosim:

The distance from the point $A(x_1, y_1, z_1)$ to the line BC , $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ este:

$$d(A, BC) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}.$$

În cazul nostru the distance from the point $A(1,2,1)$ to the line BC , $B(2,1,3); C(4,4,4)$ este:

$$\begin{aligned} d(A, BC) &= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 2-1 & 1-2 \\ 4-1 & 4-2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1-2 & 3-1 \\ 4-2 & 4-1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 3-1 & 2-1 \\ 4-1 & 4-1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2 + (3-1)^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2 + (3-1)^2}} = \frac{\sqrt{5^2 + (-7)^2 + 3^2}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{83}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{83}{6}}. \end{aligned}$$

Problema1568.

In acute $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{m_b^2 + m_c^2}{\cos A} \geq 27R^2.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/2026

Remarcă.

1).In acute $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{m_b^2 + m_c^2}{\cos A} \geq 4p^2.$$

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{m_b^2 + m_c^2}{\cos A} \stackrel{\text{Cebyshev}}{\geq} \frac{1}{3} \sum (m_b^2 + m_c^2) \sum \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{3} \cdot 2 \sum m_a^2 \sum \frac{1}{\cos A} \geq \frac{2}{3} \cdot p^2 \cdot 6 = \\ &= 4p^2 = RHS. \end{aligned}$$

Am folosit mai sus: $\sum m_a^2 \geq p^2$ și $\sum \frac{1}{\cos A} \geq 6$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2).In acute $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_b^2 + h_c^2}{\cos A} \geq 108r^2.$$

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{h_b^2 + h_c^2}{\cos A} \stackrel{\text{Cebyshev}}{\geq} \frac{1}{3} \sum (h_b^2 + h_c^2) \sum \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{3} \cdot 2 \sum h_a^2 \sum \frac{1}{\cos A} \geq \frac{2}{3} \cdot 27r^2 \cdot 6 = \\ &= 108r^2 = RHS. \end{aligned}$$

Am folosit mai sus: $\sum h_a^2 \geq 27r^2$ și $\sum \frac{1}{\cos A} \geq 6$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3).In acute $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{w_b^2 + w_c^2}{\cos A} \geq 12\sqrt{3}F.$$

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{w_b^2 + w_c^2}{\cos A} \stackrel{\text{Cebyshev}}{\geq} \frac{1}{3} \sum (w_b^2 + w_c^2) \sum \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{3} \cdot 2 \sum w_a^2 \sum \frac{1}{\cos A} \geq \frac{2}{3} \cdot 3F\sqrt{3} \cdot 6 =$$

$$= 12\sqrt{3}F = RHS.$$

Am folosit mai sus: $\sum w_a^2 \geq 3F\sqrt{3}$,(Gordon) și $\sum \frac{1}{\cos A} \geq 6$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

4).In acute $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{s_b^2 + s_c^2}{\cos A} \geq 108r^2.$$

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{s_b^2 + s_c^2}{\cos A} \stackrel{\text{Cebyshev}}{\geq} \frac{1}{3} \sum (s_b^2 + s_c^2) \sum \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{3} \cdot 2 \sum s_a^2 \sum \frac{1}{\cos A} \geq \frac{2}{3} \cdot 27r^2 \cdot 6 = \\ &= 108r^2 = RHS. \end{aligned}$$

Am folosit mai sus: $\sum s_a^2 \geq \sum h_a^2 \geq 27r^2$ și $\sum \frac{1}{\cos A} \geq 6$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

5).In acute $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r_b^2 + r_c^2}{\cos A} \geq 4p^2.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{r_b^2 + r_c^2}{\cos A} \stackrel{\text{Cebyshev}}{\geq} \frac{1}{3} \sum (r_b^2 + r_c^2) \sum \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{3} \cdot 2 \sum r_a^2 \sum \frac{1}{\cos A} \geq \frac{2}{3} \cdot 27r^2 \cdot 6 = \\ &= 108r^2 = RHS. \end{aligned}$$

Am folosit mai sus: $\sum r_a^2 \geq p^2$, (Bokov) și $\sum \frac{1}{\cos A} \geq 6$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1569.

Solve for reals

$$3x^2 + 2\sqrt{x^2 + 3} = 4x + 3.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/2026

Soluție.

$$3x^2 + 2\sqrt{x^2 + 3} = 4x + 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + 3} = -3x^2 + 4x + 3 \stackrel{-3x^2 + 4x + 3 > 0}{\Leftrightarrow} 4(x^2 + 3) = (-3x^2 + 4x + 3)^2$$

$$\Leftrightarrow 9x^4 - 24x^3 - 6x^2 + 24x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(9x^2 - 24x + 3) = 0.$$

Convin soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = \frac{4 - \sqrt{13}}{3}$.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \left\{ 1, \frac{4 - \sqrt{13}}{3} \right\}$.

Remarcă.

Solve for reals

$$3x^2 + 2\sqrt{x^2 + 3} = -4x + 3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$3x^2 + 2\sqrt{x^2 + 3} = -4x + 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + 3} = -3x^2 - 4x + 3 \stackrel{-3x^2 - 4x + 3 > 0}{\Leftrightarrow} 4(x^2 + 3) = (-3x^2 - 4x + 3)^2$$

$$\Leftrightarrow 9x^4 + 24x^3 - 6x^2 - 24x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(9x^2 + 24x + 3) = 0.$$

Convin soluțiile $x_1 = -1$ și $x_2 = \frac{-4 + \sqrt{13}}{3}$.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \left\{ -1, \frac{-4 + \sqrt{13}}{3} \right\}$.

Problema1570.

SP.623. Compute the following limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{2k^2 + 3n^2}{3k^2 + 2n^2} \right).$$

Jose Luis Diaz-Barrero, Spain, RMM-42/2026

Soluție.

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{2k^2 + 3n^2}{3k^2 + 2n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \left(\frac{2 \frac{k^2}{n^2} + 3}{3 \frac{k^2}{n^2} + 2} \right) = \int_0^1 x \frac{2x^2 + 3}{3x^2 + 2} dx = \int_0^1 \frac{2x^3 + 3x}{3x^2 + 2} dx = \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{6x^3 + 9x}{3x^2 + 2} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \left(2x + \frac{5x}{3x^2 + 2} \right) dx = \frac{1}{3} \left(\int_0^1 2x dx + \int_0^1 \frac{5x}{3x^2 + 2} dx \right) = \\
&= \frac{1}{3} \left(\int_0^1 2x dx + \frac{5}{6} \int_0^1 \frac{6x}{3x^2 + 2} dx \right) = \frac{1}{3} \left(x^2 \Big|_0^1 + \frac{5}{6} \ln(3x^2 + 2) \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{5}{6} \ln \frac{5}{2} \right).
\end{aligned}$$

Deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{2k^2 + 3n^2}{3k^2 + 2n^2} \right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{5}{6} \ln \frac{5}{2} \right).$

Remarcă.

Compute the following limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{\lambda k^2 + (\lambda + 1)n^2}{(\lambda + 1)k^2 + \lambda n^2} \right), \lambda > 0.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{\lambda k^2 + (\lambda + 1)n^2}{(\lambda + 1)k^2 + \lambda n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \left(\frac{\lambda \frac{k^2}{n^2} + \lambda + 1}{(\lambda + 1) \frac{k^2}{n^2} + \lambda} \right) = \int_0^1 x \frac{\lambda x^2 + \lambda + 1}{(\lambda + 1)x^2 + \lambda} dx = \\
&= \int_0^1 \frac{\lambda x^3 + (\lambda + 1)x}{(\lambda + 1)x^2 + \lambda} dx = \frac{1}{\lambda + 1} \int_0^1 \frac{\lambda(\lambda + 1)x^3 + (\lambda + 1)^2 x}{(\lambda + 1)x^2 + \lambda} dx = \frac{1}{\lambda + 1} \int_0^1 \left(\lambda x + \frac{(2\lambda + 1)x}{(\lambda + 1)x^2 + \lambda} \right) dx = \\
&= \frac{1}{\lambda + 1} \left(\int_0^1 \lambda x dx + \int_0^1 \frac{(2\lambda + 1)x}{(\lambda + 1)x^2 + \lambda} dx \right) = \frac{1}{\lambda + 1} \left(\int_0^1 \lambda x dx + \frac{2\lambda + 1}{2(\lambda + 1)} \int_0^1 \frac{2(\lambda + 1)x}{(\lambda + 1)x^2 + \lambda} dx \right) = \\
&= \frac{1}{\lambda + 1} \left(\frac{\lambda x^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{2\lambda + 1}{2(\lambda + 1)} \ln((\lambda + 1)x^2 + \lambda) \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{\lambda + 1} \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{2\lambda + 1}{2(\lambda + 1)} \ln \frac{2\lambda + 1}{\lambda} \right).
\end{aligned}$$

Deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{\lambda k^2 + (\lambda + 1)n^2}{(\lambda + 1)k^2 + \lambda n^2} \right) = \frac{1}{\lambda + 1} \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{2\lambda + 1}{2(\lambda + 1)} \ln \frac{2\lambda + 1}{\lambda} \right).$

Problema 1571.

JP.619. If $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$, $\sum_{k=1}^n a_k = 1$ then find min of

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k^3}{a_k^2 + a_k a_{k+1} + a_{k+1}^2}.$$

Jose Luis Diaz-Barrero, Spain, RMM-42/2026

Soluție.

Folosind $\frac{x^3}{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{2x-y}{3} \Leftrightarrow (x-y)^2(x+y) \geq 0$ obținem:

$$P = \sum_{k=1}^n \frac{a_k^3}{a_k^2 + a_k a_{k+1} + a_{k+1}^2} = \sum_{k=1}^n \frac{2a_k - a_{k+1}}{3} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$.

Deducem că $\min P = \frac{1}{3}$ pentru $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$.

Remarcă.

. If $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$, $\sum_{k=1}^n a_k = 1$ and $\lambda \geq 0$ then find min of

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k^3}{a_k^2 + \lambda a_k a_{k+1} + a_{k+1}^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $\frac{x^3}{x^2 + \lambda xy + y^2} \geq \frac{2x-y}{\lambda+2} \Leftrightarrow (x-y)^2(\lambda x+y) \geq 0$ obținem:

$$P = \sum_{k=1}^n \frac{a_k^3}{a_k^2 + \lambda a_k a_{k+1} + a_{k+1}^2} = \sum_{k=1}^n \frac{2a_k - a_{k+1}}{\lambda+2} = \frac{1}{\lambda+2} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{\lambda+2} \cdot 1 = \frac{1}{\lambda+2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$.

Deducem că $\min P = \frac{1}{\lambda+2}$ pentru $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$.

Problema1572.

If $a, b, c > 0$, $\sum \frac{1}{a^2 + 2} = 1$ then

$$\sum ab \leq 3.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, MathOlymp 8/2026

Soluție.

$$\sum \frac{1}{a^2 + 2} = 1 \Leftrightarrow \sum a^2 b^2 + a^2 b^2 c^2 = 4, (ab, bc, ca) = (x, y, z) \Rightarrow \sum x^2 + xyz = 4.$$

Problema se reformulează:

If $x, y, z > 0$, $\sum x^2 + xyz = 4$ then

$$\sum x \leq 3.$$

Demonstratie.

Cu substitutia $(x, y, z) = (2 \cos A, 2 \cos B, 2 \cos C) \Rightarrow \sum x = \sum 2 \cos A = 2 \left(1 + \frac{r}{R} \right) \stackrel{Euler}{\leq} 3$,

cu egal dacă $\triangle ABC$ este echilateral $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Egalitatea are loc daca si numai daca $a = b = c = 1$.

Remarcă.

If $a, b, c > 0$, $\sum \frac{1}{a^2 + 2} = 1$ then

$$\sum \sqrt{ab} \leq 3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \sqrt{ab} \stackrel{CBS}{\leq} \sqrt{3 \sum ab} \stackrel{Lema}{\leq} \sqrt{3 \cdot 3} = 3 = RHS.$$

Lemă.

If $a, b, c > 0$, $\sum \frac{1}{a^2 + 2} = 1$ then

$$\sum ab \leq 3.$$

Egalitatea are loc daca si numai daca $a = b = c = 1$.

Problema 1573.

SP.624. In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{\sin^2 A} \sum \sin^2 \frac{A}{2} \geq 3.$$

Jose Luis Diaz-Barrero, Spain, RMM-42/2026

Soluție.

$$1). \sum \frac{1}{\sin^2 A} = \frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2}{4p^2r^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} 4.$$

$$2). \sum \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{r}{2R} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{3}{4}.$$

$$LHS = \sum \frac{1}{\sin^2 A} \sum \sin^2 \frac{A}{2} \geq 4 \cdot \frac{3}{4} = 3 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

Problema se poate dezvolta și întări.

In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{3R}{2r} \leq \sum \frac{1}{\sin^2 A} \sum \sin^2 \frac{A}{2} \leq \frac{R}{r} \left(\frac{R}{r} - \frac{1}{2} \right).$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$1). \frac{2R}{r} \leq \sum \frac{1}{\sin^2 A} \leq \frac{R^2}{r^2}, \text{ vezi } \sum \frac{1}{\sin^2 A} = \frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2}{4p^2r^2} \text{ și}$$

$$\text{inegalitatea lui Gerretsen } 16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2.$$

$$2). \sum \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{r}{2R} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{3}{4}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{1}{\sin^2 A} \sum \sin^2 \frac{A}{2} \leq \frac{R^2}{r^2} \left(1 - \frac{r}{2R} \right) = \frac{R}{r} \left(\frac{R}{r} - \frac{1}{2} \right).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{1}{\sin^2 A} \sum \sin^2 \frac{A}{2} \geq \frac{2R}{r} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3R}{2r}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1574.

SP.630. In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^2}{h_b^3} \geq \frac{8}{3R}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM-42/2026

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{a^2}{h_b^3} \stackrel{AM-GM}{\geq} 3 \sqrt[3]{\prod \frac{a^2}{h_b^3}} = 3 \sqrt[3]{\frac{a^2 b^2 c^2}{h_a^3 h_b^3 h_c^3}} = 3 \sqrt[3]{\frac{16R^2 r^2 p^2}{\left(\frac{2r^2 p^2}{R}\right)^3}} = 3 \sqrt[3]{\frac{2R^5}{r^4 p^4}} \stackrel{Mitrinovic}{\geq} 3 \sqrt[3]{\frac{2R^5}{r^4 \left(\frac{27R^2}{4}\right)^2}} = \\ &= \frac{2}{3r} \sqrt[3]{\frac{4R}{r}} \stackrel{Euler}{\geq} \frac{8}{3R} = RHS. \end{aligned}$$

Am folosit mai sus $\frac{2}{3r} \sqrt[3]{\frac{4R}{r}} \geq \frac{8}{3R} \Leftrightarrow R^4 \geq 16r^4$, vezi $R \geq 2r$, (Euler).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^n}{h_b^{n+1}} \geq \frac{2^{n+1}}{3^{\frac{n}{2}} R}, n \in \mathbb{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a^n}{h_b^{n+1}} \stackrel{AM-GM}{\geq} 3 \sqrt[3]{\prod \frac{a^n}{h_b^{n+1}}} = 3 \sqrt[3]{\frac{a^n b^n c^n}{h_a^{n+1} h_b^{n+1} h_c^{n+1}}} = 3 \sqrt[3]{\frac{4^n R^n r^n p^n}{\left(\frac{2r^2 p^2}{R}\right)^{n+1}}} =$$

$$= 3 \sqrt[3]{\frac{2^{n-1} R^{2n+1}}{r^{n+2} p^{n+2}}} \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\geq} 3 \sqrt[3]{\frac{2^{n-1} R^{2n+1}}{r^{n+2} \left(\frac{3R\sqrt{3}}{2}\right)^{n+2}}} = \frac{1}{3^{\frac{n}{2}}} \sqrt[3]{\frac{2^{2n+1} R^{n-1}}{r^{n+2}}} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{2^{n+1}}{3^{\frac{n}{2}} R} = RHS.$$

Am folosit mai sus $\frac{1}{3^{\frac{n}{2}}} \sqrt[3]{\frac{2^{2n+1} R^{n-1}}{r^{n+2}}} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{2^{n+1}}{3^{\frac{n}{2}} R} \Leftrightarrow R^{n+2} \geq (2r)^{n+2}$, vezi $R \geq 2r$, (Euler).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1575.

JP.622. If $a, b, c > 0$, $\sum a = 3$ then find min of

$$\sum \frac{a^2 - ab + b^2}{b + c}.$$

Jose Luis Diaz-Barrero, Spain, RMM-42/2026

Soluție.

$$P = \sum \frac{a^2 - ab + b^2}{b + c} \stackrel{\text{SOS}}{\geq} \sum \frac{a^2 + b^2}{2(b + c)} \stackrel{\text{CS}}{\geq} \frac{1}{2} \frac{(\sum a)^2 + (\sum b)^2}{\sum (b + c)} = \frac{1}{2} \frac{2(\sum a)^2}{2\sum a} = \frac{1}{2} \sum a = \frac{3}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Deducem că $\min P = \frac{3}{2}$ pentru $(a, b, c) = (1, 1, 1)$.

Remarcă.

If $a, b, c > 0$, $\sum a = 3$ and $\lambda \leq 2$ then find min of

$$\sum \frac{a^2 - \lambda ab + b^2}{b + c}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\begin{aligned} P &= \sum \frac{a^2 - \lambda ab + b^2}{b + c} \stackrel{\text{SOS}}{\geq} \sum \frac{(2 - \lambda)(a^2 + b^2)}{2(b + c)} \stackrel{\text{CS}}{\geq} \frac{2 - \lambda}{2} \cdot \frac{(\sum a)^2 + (\sum b)^2}{\sum (b + c)} = \\ &= \frac{2 - \lambda}{2} \cdot \frac{2(\sum a)^2}{2\sum a} = \frac{2 - \lambda}{2} \cdot \sum a = \frac{3}{2}(2 - \lambda). \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Deducem că $\min P = \frac{3}{2}(2 - \lambda)$ pentru $(a, b, c) = (1, 1, 1)$.

Problema 1576.

SP.622. Compute the value of the integral

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{1 + \pi^{\frac{1}{t}}} dt.$$

Jose Luis Diaz-Barrero, Spain, RMM-42/2026

Soluție.

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{1 + \pi^{\frac{1}{t}}} dt \stackrel{t \rightarrow -t}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(-t)}{1 + \pi^{\frac{1}{-t}}} (-dt) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{1 + \pi^{-\frac{1}{t}}} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{1 + \frac{1}{\pi^{\frac{1}{t}}}} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\pi^{\frac{1}{t}} \cos t}{1 + \pi^{\frac{1}{t}}} dt.$$

$$\text{Obținem: } I + I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{1 + \pi^{\frac{1}{t}}} dt + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\pi^{\frac{1}{t}} \cos t}{1 + \pi^{\frac{1}{t}}} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(1 + \pi^{\frac{1}{t}}\right) \cos t}{1 + \pi^{\frac{1}{t}}} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt = \sin t \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{-\pi}{4} = 2 \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Din } 2I = \sqrt{2} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Deducem că } I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{1 + \pi^{\frac{1}{t}}} dt = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Remarcă.

Let be $\lambda > 0$ fixed. Compute the value of the integral

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{1 + \lambda^{\frac{1}{t}}} dt.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{1 + \lambda^{\frac{1}{t}}} dt \stackrel{t \rightarrow -t}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(-t)}{1 + \lambda^{\frac{1}{-t}}} (-dt) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{1 + \lambda^{\frac{1}{t}}} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{1 + \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{t}}}} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\lambda^{\frac{1}{t}} \cos t}{1 + \lambda^{\frac{1}{t}}} dt .$$

$$\text{Obținem: } I + I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{1 + \lambda^{\frac{1}{t}}} dt + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\lambda^{\frac{1}{t}} \cos t}{1 + \lambda^{\frac{1}{t}}} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(1 + \lambda^{\frac{1}{t}}\right) \cos t}{1 + \lambda^{\frac{1}{t}}} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt = \sin t \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{-\pi}{4} = 2 \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} .$$

$$\text{Din } 2I = \sqrt{2} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

$$\text{Deducem că } I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{1 + \lambda^{\frac{1}{t}}} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

Art10600

August 31, 2026

Bibliografie:

1. C.Năstăsescu, C.Niță, M.Brandiburu, D. Joița , Exerciții de algebră, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1992.
2. O. Bottema, R. Z. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrović și P. M. Vasić, „Geometric Inequalities”, Groningen 1969, Olanda .
3. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.
4. Marin Chirciu, Inegalități cu linii importante în triunghi ,de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2018.
5. Marin Chirciu, Inegalități cu laturi și cu raze în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2017.
6. George Apostolopoulos, Greece , Mathematical Inequalities 8/2025.
7. Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 8/2026.
8. Jose Luis Diaz-Barrero, Spain, RMM Number 42, Autumn 2026.
9. Elsen Kerimov, Mathematical Inequalities 8/2026.
10. Crăciun Gheorghe, Ploiești, Mathematical Inequalities 8/2026.
11. Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/2026.
12. Mircea Lascu, Zalău, România Mathematical Reflections 4/2026.
13. Adil Abdullayev, Azerbaijan, RMM 8/2026.
14. Panagiotis Danousis, Greece, Math Atelier 8/2026.
15. Zaza Mzhavanadze, Georgia, RMM 8/2026.
16. Mihaly Bencze, Brașov, Octogon- April 2007.
17. Sanong Huayrerai, Math 8/2026.
18. Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Inequalities 8/2026.
19. Daniel Sitaru, Romania, RMM Number 42, Autumn 2026.

20. Elton Papanikolla, MathOlymp, 8/2026.
21. Rahim Shahbazov, Azerbaijan, RMM 8/2026.
22. Mihai Miculița, Oradea, Math 8/2026.
23. Kunihiko Chikaya, Japan, Mathematical Inequalities 8/2026.
24. Jihad Z, Mathematical Inequalities 8/2026.
25. Marian Cucoaneș, Mărașești, Vrancea, Mathematical Inequalities 8/2026.
26. Dorinel Anca, Târgoviște, RMM 8/2026.
27. Dan Seclăman, Craiova, RMM 8/2026.
28. Turkey, 2007.
29. IMO-2004-SHL.
30. Russia, 2002.
31. Moldova-TST-2005.
32. Bahadur Heydarov, Math 8/2026.
33. Cătălin Cristea, Craiova, Recreații Matematice, 1/2026.
34. Concursul Kangourou, 2014.
35. Kieu Dinh Minh, Vietnam, Mathematical Inequalities 8/2026.
36. Cheang Chantria, Vietnam, Mathematical Inequalities 8/2026.
37. Cao Hai Vai, Vietnam, Mathematical Inequalities 8/2026.
38. Zhao Changjian, China, Octogon- April 2007.
39. Mathematical Reflections, 4/2026.
40. Recreații Matematice, 1/2026.
41. Romanian Mathematical Magazine, Number 42, Autumn 2026.
42. Octogon Mathematical Magazine, April 2007.
43. Marin Chirciu, Inegalități algebrice 2, de inițiere la perf, Ed. Paralela 45, Pitești, 2021.
44. Marin Chirciu, Inegalități geometrice 2, inițiere și perf, Ed. Paralela 45, Pitești, 2021.
45. Marin Chirciu, Inegalități algebrice, de la inițiere la perf, Ed. Comper, Băbana, 2025.

Art 10500

1 iunie 2026