REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

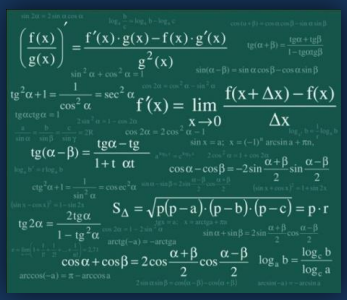
ISSN 2065-6432 - MARTIE 2016

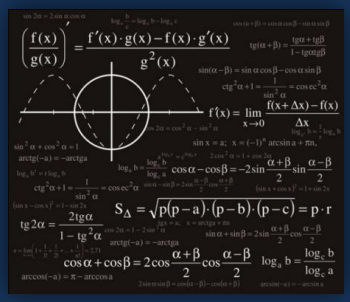
www.mateinfo.ro

REVISTĂ LUNARĂ

DIN FEBRUARIE 2009

revista@mateinfo.ro





COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ŞI SUSŢINĂTOR PERMANENŢI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ŞI NELA CICEU

1. **Soluții comentate ale unor proleme din Gazeta Matematică ...pag. 2**
George Florin Șerban

2. **Matematica,o lume a contrastelor (II) ... pag.4**
Mihaela Molodeț

3. **Inducția matematică...pag. 5**
Mihaela Molodeț

4. **Cubul și sfera ... pag. 14**
Rusu Maria

5. **Soluții - Problema lunii ianuarie FEBRUARIE 2016 ... pag. 14**
Propusa de Constantin Telteu

6. **CONCURS - Problema lunii MARTIE 2016 ... pag. 24**
Georghe Florin Șerban

7. **Simulare Evaluare Națională Matematică – MARTIE 2016 ... pag. 25**

8. **Simulare BAC Matematică – profil mate-info MARTIE 2016 ... pag. 30**

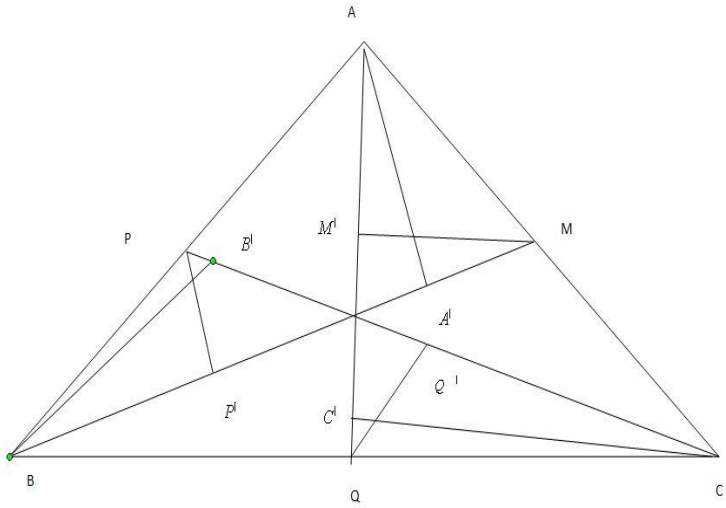
1. SOLUŢII COMENTATE ALE UNOR PROBLEME DIN GAZETA MATEMATICĂ

George-Florin Şerban , Liceul Pedagogic "D.P.Perpessicius", Brăila

O soluţie a problemei S:L15.250

Voi prezenta o soluţie ale unei probleme de geometrie din Suplimentul Gazetei Matematice , seria B,care folosesc teoremele lui Menelaos , Ceva şi Thales.
În suplimentul Gazetei Matematice , seria B , din octombrie 2015 profesorii Daniela Stanică şi Nicolae Stanică propun spre rezolvare următoarea problema :
S:L15.250 Fie un punct O în interiorul triunghiului ascuţitunghic ABC şi $AO \cap BC = \{Q\}$, $BO \cap AC = \{M\}$, $CO \cap AB = \{P\}$. Dacă triunghiurile AOM , COQ , BOP sunt echivalente , atunci O este centrul de greutate al triunghiului ABC .
Soluţie: Voi arăta că punctele M,P şi Q sunt mijloacele laturilor [AC] ,[AB] respectiv [BC], folosind concurenţa medianelor va rezulta că punctul O=G este centrul de greutate al triunghiului ABC .
Considerăm notaţiile uzuale : AB=c , BC=a şi AC=b . Dacă $A_{AOM} = A_{QOC}$,

$A_{AOM} = \frac{AO \cdot MM'}{2} = A_{QOC} = \frac{QO \cdot CC'}{2}$, $MM' \perp AQ$, $CC' \perp AQ$ deci $MM' \| CC'$.



În triunghiul ACC', aplic teorema lui Thales $\frac{OQ}{AO} = x = \frac{MM'}{CC'} = \frac{AM}{AC}$,rezultă $AM = bx$,

$MC = b - bx = b(1-x)$. Dacă $A_{BOP} = A_{QOC}$, $A_{BOP} = \frac{PO \cdot BB'}{2} = A_{QOC} = \frac{CO \cdot QQ'}{2}$, $BB' \perp PC$, $QQ' \perp PC$ deci $BB' \| QQ'$.

În triunghiul BCB', aplic teorema lui Thales $\frac{OP}{CO} = y = \frac{QQ'}{BB'} = \frac{QC}{BC}$, rezultă

$QC = ay$, $BQ = a - ay = a(1-y)$. Dacă $A_{BOP} = A_{AOM}$, $A_{AOM} = \frac{MO \cdot AA'}{2} = A_{BOP} = \frac{BO \cdot PP'}{2}$, $AA' \perp BM$, $PP' \perp BM$ deci $AA' \| PP'$. În

triunghiul $BAA^{|}$ aplic teorema lui Thales $\frac{OM}{BO}=z=\frac{PP^{|}}{AA^{|}}=\frac{BP}{AB}$, rezultă $BP=cz$, $AP=c-cz=c(1-z)$.

Voi demonstra că $x=y=z=\frac{1}{2}$. Pentru a obţine relaţii între x,y şi z trebuie să aplicăm teremele lui Menelaos şi Ceva .

În triunghiul ABQ , aplic Teorema lui Menelaos ,cu transversala P-O-C , $\frac{AP}{BP}\cdot\frac{BC}{QC}\cdot\frac{QO}{AO}=1$,

$\frac{(1-z)c}{cz}\cdot\frac{a}{ay}\cdot\frac{x}{1}=1$, $x(1-z)=yz$, $x=yz+zx=z(x+y)$, deci $x=z(x+y)$.

În triunghiul BMC ,aplic Teorema lui Menelaos, cu transversala A-O-Q , $\frac{BO}{MO}\cdot\frac{MA}{CA}\cdot\frac{CQ}{BQ}=1$,

$\frac{1}{z}\cdot\frac{bx}{b}\cdot\frac{ay}{a(1-y)}=1$, $z(1-y)=xy$, $z=yz+xy=y(x+z)$, deci $z=y(x+z)$.

În triunghiul APC , aplic Teorema lui Menelaos ,cu transversala B-O-M , $\frac{AB}{PB}\cdot\frac{PO}{CO}\cdot\frac{CM}{AM}=1$,

$\frac{c}{cz}\cdot\frac{y}{1}\cdot\frac{b(1-x)}{bx}=1$, $y(1-x)=xz$, $y=xy+zx=x(z+y)$, deci $y=x(y+z)$.

În triunghiul ABC , aplic Teorema lui Ceva , $\frac{AP}{BP}\cdot\frac{BQ}{CQ}\cdot\frac{CM}{AM}=1$, $\frac{c(1-z)}{cz}\cdot\frac{a(1-y)}{ay}\cdot\frac{b(1-x)}{bx}=1$,

$(1-x)(1-y)(1-z)=xyz$. Trebuie să găsesc numerele pozitive x , y şi z care verifică simultan relaţiile $x=z(x+y)$, $y=x(y+z)$ şi $z=y(x+z)$.

$\begin{cases}xy+xz=z\\xy+yz=x\\xz+yz=y\end{cases}$ Le scad două cate două $\begin{cases}xz-yz=z-x\\xy-xz=x-y\\xy-yz=z-y\end{cases}$ $\begin{cases}z(x-y)=z-x\\x(y-z)=x-y\\y(x-z)=z-y\end{cases}$ Le înmulţesc şi obţin

$xyz(x-y)(y-z)(x-z)=(z-x)(x-y)(z-y)$, $xyz(x-y)(y-z)(x-z)=(x-z)(x-y)(y-z)$

$(x-y)(y-z)(x-z)(xyz-1)=0$. Dacă x=y rezultă din prima ecuaţie că z=x , deci x=y=z , $2x^2=x$,

$x=y=z=\frac{1}{2}$ rezultă $AM=\frac{b}{2}$, $BP=\frac{c}{2}$, $QC=\frac{a}{2}$, deci M,P,Q sunt mijloacele laturilor [AC] ,[AB] , [BC], deci O=G centrul de greutate al triunghiului ABC .

Dacă xyz-1=0 atunci xyz=1 , dar $(1-x)(1-y)(1-z)=xyz=1$, $(1-x)(1-y-z+yz)=1$,

$1-y-z+yz-x+xy+xz-xyz=1$, (i) $-x-y-z+xy+xz+yz=1$ si $x=z(x+y)$,

$y=x(y+z)$, $z=y(x+z)$, le adun şi obţin (ii) $x+y+z=2(xy+yz+xz)$

Apoi adun ecuaţiile (i) şi (ii) şi obţin $xy+yz+xz=-1$ şi $x+y+z=-2$ fals deoarece $x,y,z>0$.

2.MATEMATICA, O LUME A CONTRASTELOR (II)

Prof. Mihaela Molodeț

Fără echivoc, lumea matematicii, este o lume a contrastelor și a culorii, a nuanțelor și a artificiilor de lumină, dar și una dintre esențele cele mai rafinate ale omenirii; cum fără indoială, între abstract și absolut, infinitatea raționamentelor matematicii este însăși calea infinitații de la un început numit "origine ", către o rațiune finită numită "calcul ". Asemeni competenței de a prevedea viitorul, rezultatul unui calcul, este transpunerea într-un limbaj al cifrelor și precizia unei realități, pe cât de probabilă, pe atât de posibilă de împlinit. Cu toate acestea, exactitatea calculului nu înseamnă și precizia rezultatului, referința rațiunii unui rezultat, nu neapărat este și relevanța logicii unui răspuns. Iată cât de improbabilă poate fi matematica, dar și cât de relevante sunt raționamentele sale în lumea în care trăim zi de zi.

Între stabilitate și relativitate stă întreg "mirajul" magiei numerelor din caruselul matematicii. Iar singurele relaționări fundamentale ale acesteia, sunt aranjamentele, combinările și permutările probabile ori posibile ale sensului operațiilor: adunarea, scăderea, înmultirea, împartirea, reale pe tot cuprinsul globului pământesc, fie chiar și din perspective diferite decât ale matematicii: economie, inginerie, comerț, industrie, sociologie, aviație și exemple ar fi multe.

Întreagă această lume de științe, profesiuni și meserii în mintea celor mai mici căutători ai cunoașterii, gimnaziștii, poate începe asemeni unei povești cu " a fost odată ca niciodată", un tărâm al magiei numerelor, un castel al înțelepciunii minții prin care să descopere o apartenență la o comunitate a lor, "catedra matematică" și veleități de matematicieni, iar aceasta la pachet cu fițe de vedetă, magician al numerelor, maestru al logicii, sfetnic al castelului și nu în ultimul rând, rangul de castelan al cetății Matematicii, în jurul unui dascăl și sub umbrela infinită a unei științe, fie chiar și în ceea mai micuța catedră de matematică dintr-o scoală de la munte.

"Generațiile catedrei de matematică", sunt de-a pururea, rațiunea profesiei de dascăl și firescul meseriei de profesor. Iar toate astea prin lumina cuvintelor lui Galileo Galilei
" Matematica este limba cu care Dumnezeu a scris Universul", iar lumea l-a moștenit, aș adăuga eu.

3.INDUCȚIA MATEMATICĂ

"Matematica este limba cu care Dumnezeu a scris Universul!" Galileo Galilei

Prof. Mihaela Molodeț

Ca orice metodă, cu avantaje și dezavantaje, Inducția Matematică ne stă la dispoziție de la rezolvarea unor simple exerciții, până la soluționarea unor probleme complexe sau generalizări interesante. Este folosită pentru obținerea rezultatului final sau ca o componentă a unei demonstrații laborioase.

Acceptată ca raționament, intuitiv la grupele de performanță, în clasele mici, studiată la începutul anilor de liceu și utilizată mai departe, de câte ori ne este utilă, inducția matematică este, în esență, o metodă de a demonstra că unele predicate sunt adevărate (în anumite condiții date de enunț).

Dezavantajul metodei este că relația care se dorește a se demonstra, trebuie să fie cunoscută. Din raționamente logice, cu o inventivitate uneori cultivată prin exersare, pornind de la analiza cazurilor particulare, se poate intui relația pe care dorim s-o demonstrăm. Metoda se numește "Inducție incompletă". Rămâne doar să facem "pasul" către "Inducția completă", utilizând una din cele trei variante prezentate în continuare.

- VARIANTA I: Fie P(n), $n \geq a$, un predicat, Dacă:
  - P(a) este adevărat și
  - P(n) $\rightarrow$ P(n+1) este adevărat $\forall\, n \geq a$,

  atunci P(n) adevărat
- VARIANTA a II-a: Fie P(n), $n \geq a$, un predicat. Dacă:
  - P(a) este adevărat și
  - $\forall k \in N$, a. î. $a \leq k \leq n$, P(n) $\rightarrow$ P(n+1) este adevărat $\forall n \geq a$,

  atunci P(n) adevărat
- VARIANTA a III-a: Fie a, $k \in N$, fixate. Dacă:
  - P(a), P(a+1),…, P(a+k) sunt adevărate și
  - P(n) $\rightarrow$ P(n+k) este adevărat $\forall n \geq a$,

  atunci P(n) adevărat $\forall n \geq a$

A, EGALITĂȚI

1. Arătați că $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p + 2 \cdot 3 \cdot (p+1) + \ldots + (n+1)(n+2) \cdot \ldots \cdot (n+p) = \frac{(n+1)(n+2) \cdot \ldots \cdot (n+p+1)}{p+1}$

unde $n,p \in N$, $p \geq 1$.

G.M. 5/1959

Soluție:

Notăm P(n): $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p + 2 \cdot 3 \cdot (p+1) + \ldots + (n+1)(n+2) \cdot \ldots \cdot (n+p) = \frac{(n+1)(n+2) \cdot \ldots \cdot (n+p+1)}{p+1}$

Pasul 1. Pentru n=0 avem $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p+1)}{p+1}$, egalitate adevarată.

Pasul 2. Arătăm $P(n) \rightarrow P(n+1)\ \forall\, n \geq 0$

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p + 2 \cdot 3 \cdot (p+1) + \ldots + (n+1)(n+2) \cdot \ldots \cdot (n+p) + (n+2)(n+3) \cdot \ldots \cdot (n+p+1) =$

$\frac{(n+1)(n+2) \cdot \ldots \cdot (n+p+1)}{p+1} + (n+2)(n+3) \cdot \ldots \cdot (n+p+1) =$

$(n+2)(n+3)\cdot\ldots\cdot(n+p+1)(\frac{n+1}{p+1}+1)=\frac{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+p+2)}{p+1}$, adică P(n+1) adevărat.

Conform principiului inducției matematice complete (Varianta I)

$\Rightarrow 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot p+2\cdot 3\cdot(p+1)+\ldots+(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+p)=\frac{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+p+1)}{p+1}$, $\forall$ n$\geq$0.

2. Fie $f_n:R\to R$ ($n\geq 1|$), un șir de funcții definit astfel: $f_1(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\forall x\in R$ si $f_n=f_1\circ f_{n-1}$, $\forall$ n$\geq$2.

Calculați $f_n(x)$.

GH. SIREȚCHI

Soluție:

$f_2(x)=(f_1\circ f_1)(x)=\frac{f_1(x)}{\sqrt{1+f_1(x)^2}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$ $\forall x\in R$

$f_3(x)=(f_1\circ f_2)(x)=\frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2(x)^2}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+2x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$ $\forall x\in R$

Demonstrăm P(n): $f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ $\forall x\in R$, $\forall$ n$\geq$2.

Pasul 1. Evident, din relațiile anterioare, P(2) și P(3) adevărate.

Pasul 2. Arătăm P(n)$\to$P(n+1) $\forall$ n$\geq$2

$f_{n+1}(x)=(f_1\circ f_n)(x)=\frac{f_n(x)}{\sqrt{1+f_n(x)^2}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+nx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}$ $\forall x\in R$ adică P(n+1) adevărat.

Conform principiului inducției matematice complete(Varianta I) $\Rightarrow$ $f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ $\forall x\in R$, $\forall$ n$\geq$2.

OBS. Folosind această relație, este evidentă afirmația $f_n\overset{n}{\to}0$

3. Determinați șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, pentru care $x_1=1$ și oricare ar fi n$\geq$1:

$4(x_1x_n+2x_2x_{n-1}+3x_3x_{n-2}+\ldots+nx_nx_1)=(n+1)(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_nx_{n+1})$

ONM RÂMNICU VÂLCEA 2002

Soluție:

Pentru n=1 avem: $4x_1x_1=2x_1x_2\Rightarrow 4=2x_2\Rightarrow x_2=2$

Pentru n=2 avem $4(x_1x_2+2x_2x_1)=3(x_1x_2+x_2x_3)\Rightarrow 24=3(2+2x_3)\Rightarrow x_3=3$

Fie P(n): $x_n=n$

Pasul 1. P(1): $x_1=1$ adevărat. P(2): $x_2=2$ adevărat

Pasul 2. Arătăm P(n)$\to$P(n+1) $\forall$ n$\geq$2

Din relația dată, folosind P(n) adevărat, $\Rightarrow$

$4[1\cdot n+2\cdot 2\cdot(n-1)+3\cdot 3\cdot(n-2)+\ldots+n\cdot n\cdot 1]=(n+1)(1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)\cdot n+n\,x_{n+1})\Rightarrow$

$\Rightarrow nx_{n+1}=\dfrac{4S_1}{n+1}-S_2$, (1)

unde $S_1=1\cdot n+2\cdot 2\cdot(n-1)+3\cdot 3\cdot(n-2)+\ldots+n\cdot n\cdot 1$

$S_2=1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)\cdot n$

$S_1=\sum_{k=1}^{n}k^2(n-k+1)=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k^3=(n+1)\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}=$

$\dfrac{n(n+1)^2}{12}(4n+2-3n)=\dfrac{n(n+1)^2(n+2)}{12}\Rightarrow 4S_1=\dfrac{n(n+1)^2(n+2)}{3}$ (2)

$S_2=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)-n(n+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k-n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{n(n+1)}{2}-n(n+1)=$

$=\dfrac{n(n+1)}{6}(2n+1-3)=\dfrac{n(n+1)(n-1)}{3}$ (3)

Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow nx_{n+1}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}-\dfrac{n(n+1)(n-1)}{3}=n(n+1)\Rightarrow x_n=n+1$ adică P(n+1) adevărat.

Conform principiului inducției matematice complete (Varianta I) $\Rightarrow x_n=n,\ \forall\, n\geq 1$.

OBS. S_1 și S_2 sunt sume cunoscute, demonstrate folosind tot principiul inducției matematice complete.

4. Dacă $x_1=\sqrt{2+2\cos a}$, $a\in(0,\pi)$ si $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$, $\forall\, n\in N^*\setminus\{1\}$, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n}x_k$

D.M.BATINEȚU- GIURGIU

Soluție:

$a\in(0,\pi)\Rightarrow\cos\dfrac{a}{2^n}>0.\ \forall n\geq 1$ (1)

Avem $\cos\dfrac{x}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}\ \forall x\in(0,\pi)$ (1) $\Rightarrow x_1=2\cos\dfrac{a}{2}$ (2)

$x_2=\sqrt{2+2\cos\dfrac{a}{2}}=2\cos\dfrac{a}{2^2}$ (3)

Fie P(n): $x_n=2\cos\dfrac{a}{2^n}$

Pasul 1. P(1) adevărat datorită enunțului și P(2) adevărat conform (3).

Pasul 2. Arătăm P(n)$\to$P(n+1) $\forall\, n\geq 1$

$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}=\sqrt{2\left(1+\cos\dfrac{a}{2^n}\right)}=\sqrt{2}\sqrt{2}\cos\dfrac{a}{2^{n+1}}=2\cos\dfrac{a}{2^{n+1}}$, adică P(n+1) adevărat.

Conform principiului inducției matematice complete (Varianta I) $\Rightarrow x_n=2\cos\dfrac{a}{2^n}\ \forall\, n\in N^*$

Folosind egalitatea evidentă: $\cos\dfrac{a}{2}\cdot\cos\dfrac{a}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\dfrac{a}{2^n}=\dfrac{1}{2^n}\dfrac{\sin a}{\sin\dfrac{a}{2^n}}$, vom avea:

$$\prod_{k=1}^{n} x_k = \prod_{k=1}^{n} 2\cos\frac{a}{2^n} = \frac{\sin a}{\sin\frac{a}{2^n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n} x_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\sin a}{\sin\frac{a}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{2^n}}{\sin\frac{a}{2^n}}\frac{\sin a}{a} = \frac{\sin a}{a}$$

5. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Calculați A^n.

Soluție:

$$A^2 = A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\ A^3 = A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\ A^4 = A^3\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 6\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Observăm că $1=\frac{1\cdot 2}{2}$, $3=\frac{2\cdot 3}{2}$, $6=\frac{3\cdot 4}{2}$

Notăm P(n): $A^n=\begin{pmatrix}1 & n & \frac{(n-1)n}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\forall\, n\geq 1$

Pasul 1. Evident, din definiția matricei și din calculele anterioare avem adevărate P(1), P(2), P)3).

Pasul 2. Arătăm $P(n)\to P(n+1)$ $\forall\, n\geq 2$

$$A^{n+1} = A^n\cdot A = A^n=\begin{pmatrix}1 & n & \frac{(n-1)n}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & n+1 & \frac{n(n+1)}{2}\\ 0 & 1 & n+1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$ P(n+1) adevărat.

Conform principiului inducției matematice complete (Varianta I) $\Rightarrow A^n=\begin{pmatrix}1 & n & \frac{(n-1)n}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\forall\, n\geq 1$

6. Arătați că $V_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leq i\leq j\leq n}(x_j-x_i)$, $\forall\, n\geq 2$

(Determinantul Vandermonde de ordin n)

Soluție:

Notăm P(n) egalitatea din enunț.

Pasul 1: $V_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1\Rightarrow$ P(2) adevărat.

Pasul 2. Arătăm $P(n)\to P(n+1)\ \forall\ n\geq 2$

$$V_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_{n+1}^2 \\ \dots & \dots & .. & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$ (Din L_k scadem $x_{n+1}L_{k-1}$,)

Atunci determinantul anterior va fi $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1-x_{n+1} & x_2-x_{n+1} & \dots & x_n-x_{n+1} & 0 \\ x_1(x_1-x_{n+1}) & x_2(x_2-x_{n+1}) & \dots & x_{n-1}(x_n-x_{n+1}) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}(x_1-x_{n+1}) & x_2^{n-1}(x_2-x_{n+1}) & \dots & x_n^{n-1}(x_n-x_{n+1}) & 0 \end{vmatrix}=$

$$=1(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_{n+1}-x_n)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=$$

$$=(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_{n+1}-x_n)\ V_n$$

$$=(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_{n+1}-x_n)\prod_{1\leq i\leq j\leq n}(x_j-x_i)=\prod_{1\leq i\leq j\leq n+1}(x_j-x_i)$$

$\Rightarrow$P(n+1) adevărat.

Conform principiului inducției matematice complete (Varianta I)$\Rightarrow$

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leq i\leq j\leq n}(x_j-x_i),\ \forall\ n\geq 2$$

B. INEGALITĂȚI

7. Fie $f:R\to R$, $f(x)=2^x+10^x-4^x-5^x$. Arătați ca $f^{(n)}(0)>0,\ \forall\ n\geq 2$.

VARIANTE BAC (enunț modificat)

Soluție:

Evident, f derivabilă de n ori pe R,

Determinăm $f^{(n)}(x)$:

$f'(x)=2^x\ln 2+10^x\ln 10-4^x\ln 4-5^x\ln 5\Rightarrow f''(x)=2^x\ln^2 2+10^x\ln^2 10-4^x\ln^2 4-5^x\ln^2 5$

Presupunem $P_1(n)$: $f^{(n)}(x)=2^x\ln^n 2+10^x\ln^n 10-4^x\ln^n 4-5^x\ln^n 5\ \ \forall\ n\geq 2$.

Pasul 1: $P_1(2)$: $f''(x)=2^x\ln^2 2+10^x\ln^2 10-4^x\ln^2 4-5^x\ln^2 5$ adevărat.

Pasul 2. . Arătăm $P_1(n)\to P_1(n+1)\ \forall\ n\geq 2$

$f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}(x)\right)'=2^x\ln^{n+1}2+10^x\ln^{n+1}10-4^x\ln^{n+1}4-5^x\ln^{n+1}5\Rightarrow$ $P_1(n+1)$ adevărat.

Conform principiului inductiei matematice complete (Varianta I) $\Rightarrow$

$f^{(n)}(x)=2^x\ln^n 2+10^x\ln^n 10-4^x\ln^n 4-5^x\ln^n 5\Rightarrow f^{(n)}(0)=\ln^n 2+\ln^n 10-\ln^n 4-\ln^n 5$

Presupunem $P_2(n)$: $f^{(n)}(0)>0$, $\forall\, n\geq 2$

Pasul 1. $P_2(2)$: $f''(0)>0$

$\ln^2 2+\ln^2 10-\ln^2 4-\ln^2 5=\ln^2 2+(\ln 2+\ln 5)^2-(2\ln 2)^2-\ln^2 5=2\ln 2\ln 5-2\ln^2 2=2\ln 2(\ln 5-\ln 2)$

Cum funcția ln este strict crescătoare pe $(0,\infty)$ $\Rightarrow$ ln5-ln2>0 si ln2>ln1=0 $\Rightarrow$

$f''(0)>0$, adică $P_2(2)$ adevărat

Pasul 2. . Arătăm $P_2(n)\rightarrow P_2(n+1)$ $\forall\, n\geq 2$

$\ln^{n+1}2+\ln^{n+1}10-\ln^{n+1}4-\ln^{n+1}5=\ln 2\ln^n 2+\ln 10\ln^n 10-\ln 4\ln^n 4-\ln 5\ln^n 5=$

$=\ln 2\ln^n 2+(\ln 2+\ln 5)\ln^n 10-2\ln 2\ln^n 4-\ln 5\ln^n 5=$

$=\ln 2\left[\ln^n 2+\ln^n 10-\ln^n 4-\ln^n 5\right]-\ln 2\ln^n 4+\ln 2\ln^n 5+\ln 5\ln^n 10-\ln 5\ln^n 5=$

$=\ln 2\left[\ln^n 2+\ln^n 10-\ln^n 4-\ln^n 5\right]+\ln 2\left[\ln^n 5-\ln^n 4\right]+\ln 5\left[\ln^n 10-\ln^n 5\right]$

Ținând cont de monotonia funcției ln și a funcției exponențiale cu baza supraunitară, avem:

$\ln 10>\ln 5>\ln e=1\Rightarrow \ln^n 10>\ln^n 5$ $(n\geq 2)$

$\ln 5>\ln 4>\ln e=1\Rightarrow \ln^n 5>\ln^n 4$ $(n\geq 2)$

$\ln 2>\ln 1=0$

$\ln 5>\ln 1=0$

$\Rightarrow$

(folosind $P_2(n)$ adevărat) $\Rightarrow \ln^{n+1}2+\ln^{n+1}10-\ln^{n+1}4-\ln^{n+1}5>0$, adică $P_2(n+1)$ adevărat.

Conform principiului inducției matematice complete (Varianta I) $\Rightarrow$ $f^{(n)}(0)>0$, $\forall\, n\geq 2$.

8. Arătați că $\sum_{k=1}^{n} tgx_k \geq ntg\dfrac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{n}$, unde $x_i\in(0,\dfrac{\pi}{2}), i=\overline{1,n}$, $\forall\, n\geq 2$

MARTIN DINCĂ

Soluție(autor):

Fie P(n) relația din enunț.

Pasul1. P(2): $tgx_1+tgx_2\geq 2tg\dfrac{x_1+x_2}{2}$ sau $\dfrac{\sin(x_1+x_2)}{\cos x_1\cos x_2}\geq 2\dfrac{\sin\frac{x_1+x_2}{2}}{\cos\frac{x_1+x_2}{2}}$

sau $\dfrac{2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1+x_2}{2}}{\cos x_1}\cdot\dfrac{1}{\cos x_2}\geq\dfrac{2\sin\frac{x_1+x_2}{2}}{\cos\frac{x_1+x_2}{2}}\Big|:2\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}>0$, avem:

$\cos^2\dfrac{x_1+x_2}{2}\geq\cos x_1\cdot\cos x_2$, sau $\dfrac{1+\cos(x_1+x_2)}{2}\geq\cos x_1\cdot\cos x_2\Rightarrow$

$\Rightarrow 1+\cos x_1\cdot\cos x_2-\sin x_1\cdot\sin x_2\geq 2\cos x_1\cdot\cos x_2$ sau

$1\geq\cos(x_1-x_2)$, relație adevărată. $\Rightarrow$ P(2) adevărat.

Pasul 2. Arătăm $P(n-1)\rightarrow P(n)$

Presupunând inegalitatea adevărată pentru (n-1), avem:

$$\sum_{k=1}^{n-1} tgx_k \geq (n-1)tg\frac{\sum_{k=1}^{n-1} x_k}{n-1} \quad (1)$$

Dar avem și $tgx_n + \underbrace{tg\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} + tg\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} + \ldots + tg\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}}_{\text{de(n-2) ori}} \geq (n-1)tg\left(\frac{x_n + (n-2)\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}}{n-1}\right)2)$

Adunând relațiile (1) si (2) $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} tgx_k + (n-2)tg\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \geq (n-1)tg\frac{\sum_{k=1}^{n-1} x_k}{n-1} + (n-1)tg\left(\frac{x_n + (n-2)\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}}{n-1}\right)$

$$\geq (n-1)2tg\left(\frac{\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n-1} + \frac{x_n + (n-2)\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}}{n-1}}{2}\right) = 2(n-1)\ tg\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} tgx_k \geq 2(n-1)\ tg\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} - \ (n-2)tg\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} = = ntg\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \Rightarrow$ P(n) adevărat

Conform principiului inducției matematice complete (Varianta I) $\Rightarrow$

$\sum_{k=1}^{n} tgx_k \geq ntg\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$, unde $x_i \in (0, \frac{\pi}{2}), i = \overline{1,n}$, $\forall$ n$\geq$2

OBS. Pentru n=3 si A, B, C unghiurile unui triunghi, aplicând relația anterioară, vom obține $\sum tg\frac{A}{2} \geq 3tg\frac{A+B+C}{6} = 3tg\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

C. PROBLEME DE DIVIZIBILITATE

9. Să se arate că oricare ar fi numărul natural $n \geq 1$, $9 \mid (4^n + 15n - 1)$

Soluție:

Notăm P(n): $9 \mid (4^n + 15n - 1)$, $\forall\ n \geq 1$

Pasul 1. P(1): $9 \mid (4 + 15 - 1) \Leftrightarrow 9 \mid 18$ adevărat

Pasul 2: Arătăm P(n)$\rightarrow$P(n+1) $\forall$ n$\geq$1

$9 \mid [4^{n+1} + 15(n+1) - 1] \Leftrightarrow 9 \mid (4^{n+1} + 15n + 14)$

Dar P(n) adevărat $\Rightarrow 4^n = 9k - 15n + 1$ cu $k \in N$

$4^{n+1} + 15n + 14 = 4^n 4 + 15n + 14 = 36k - 60n + 4 + 15n + 14 = 36k - 45n + 18 =$

$=9(4k-5n+2) \Rightarrow$ P(n+1) adevărat.

Conform principiului inducției matematice complete (Varianta I) $\Rightarrow 9 \mid (4^n + 15n - 1)$, $\forall\ n \geq 1$

D. ALTE TIPURI DE PROBLEME

10. Să se determine funcțiile $f : N^* \to N^*$ care îndeplinesc condițiile:

a) $f(p) = p$ dacă p este prim

b) $f(mn) = f(m) f(n), \forall m, n \in N^*$

EREMIA GEORGESCU-BUZĂU, EUGEN ONOFRAȘ

Soluție:

Pentru m= n =1, în relatia b), avem $f^2(1) = 1$. Cum $f(1) > 0 \Rightarrow f(1) = 1$

Din a), $f(2) = 2, f(3) = 3$ $f(5) = 5,$

Din b) avem $f(4) = f^2(2) = 4$, $f(6) = f(2) f(3) = 6$

Notăm P(n): $f(n) = n$

Pasul 1. Avem P(1), P)2), P(3), P(4), P(5), P(6) adevărate

Pasul 2. Să presupunem că propoziția P(k) este adevarată, adică $f(k) = k$, $\forall$ k cu $1 \leq k \leq n$

Dacă n+1 este prim, atunci, din a) P(n+1) este adevărat

Daca n+1 nu este prim, n+1= $k_1 k_2$, cu $k_1, k_2 \in (1, n+1) \Rightarrow f(k_1) = k_1$ si $f(k_2) = k_2$

Din b) $\Rightarrow f(n+1) = f(k_1 k_2) = f(k_1) f(k_2) = k_1 k_2 = n + 1 \Rightarrow$ P(n+1) adevărat.

Conform principiului inducției matematice complete (Varianta a II-a) $\Rightarrow \quad f(n) = n.$

11. Demonstrați că, $\forall\ n \in N, n \geq 4$ și $n \neq 3p + 2, p \in N$, un triunghi echilateral poate fi descompus în n triunghiuri echilaterale.

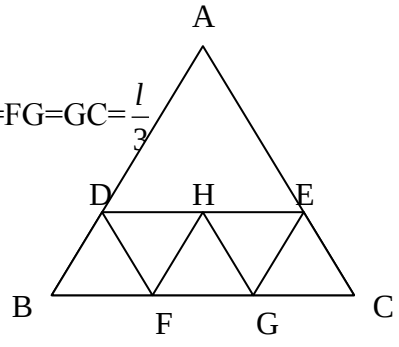
Soluție:

Notăm P(n): un triunghi echilateral poate fi descompus in n triunghiuri echilaterale, $n \neq 3p + 2, p \in N$

Pasul 1: P(4) este adevărat, pentru că orice triunghi echilateral este împarțit de liniile mijlocii în 4 triunghiuri echilaterale.

P(6) este adevărat:

Alegem, ca în figură, punctele D, E, F, G, H astfel încât BD=EC=BF=FG=GC=$\frac{l}{3}$



unde l= latura triunghiului, H este mijlocul lui [DE].

Evident, cele 6 triunghiuri sunt echilaterale.

Pasul 2: P(n) $\to$ P(n+3) $n \geq 4$ si $n \neq 3p + 2, p \in N$

Fie ΔAMN un triunghi echilateral, din cele n in care este impartit triunghiul dat, conform P(n).

Din P(4) $\Rightarrow$ ΔAMN se imparte in 4 triunghiuri echilaterale noi, care, împreună cu cele (n-1) rămase, fac (n+3) triunghiuri echilaterale.

$\Rightarrow$ P(n+1) adevărat.

Conform principiului inducției matematice complete (Varianta a III-a) $\Rightarrow$

$\forall\ n \in N, n \geq 4$ si $n \neq 3p + 2, p \in N$, un triunghi echilateral poate fi descompus în n triunghiuri echilaterale.

12. Să se arate că orice număr natural ≥ 2, poate fi scris sub forma $n=2k_1+3k_2$, cu $k_1,k_2 \in N$.

EREMIA GEORGESCU-BUZĂU, EUGEN ONOFRAŞ

Solutie:

Notăm P(n): orice număr natural ≥ 2, poate fi scris sub forma $n=2k_1+3k_2$, cu $k_1,k_2 \in N$.

Pasul 1:

$2 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0$ Deci $k_1=1$ si $k_2=0 \Rightarrow P(2)$ adevărat

$3 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1$ Deci $k_1=0$ si $k_2=1 \Rightarrow P(3)$ adevărat

$4 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0$ Deci $k_1=2$ si $k_2=0 \Rightarrow P(4)$ adevărat

$5 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1$ Deci $k_1=1$ si $k_2=1 \Rightarrow P(5)$ adevărat

$6 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2$ Deci $k_1=0$ si $k_2=2 \Rightarrow P(6)$ adevărat

Pasul 2: $P(n) \rightarrow P(n+5)$

P(n) adevărat $\Rightarrow n=2k_1+3k_2$, $n+5 =2k_1+3k_2+2 \cdot 1+3 \cdot 1=2(k_1+1)+3(k_2+1) \Rightarrow$ P(n+5) adevărat.

Conform principiului inducției matematice complete (Varianta a III-a) $\Rightarrow$

Orice număr natural ≥ 2, poate fi scris sub forma $n=2k_1+3k_2$, cu $k_1,k_2 \in N$.

4. CUBUL ŞI SFERA

Prof. Rusu Maria, Şcoala Gimnazială Buznea, jud. Iaşi

O categorie de probleme interesante și diferite în același timp o constituie combinațiile de corpuri. În cele ce urmează sunt prezentate câteva puncte de plecare pentru rezolvarea problemelor legate de cub și sferă.

Sfera înscrisă în cub. O sferă înscrisă într-un cub este tangentă centrelor fețelor cubului în șase puncte.

Observaţii:

a) Centrul cubului coincide cu centrul sferei.

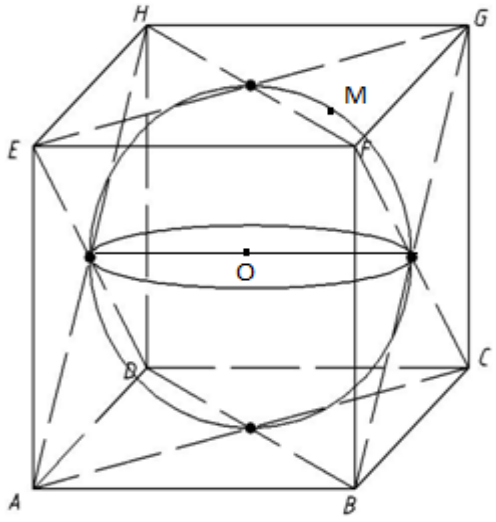
b) Lungimea razei sferei este egală cu jumătate din lungimea laturii cubului.

c) Centrul sferei este la distanţă egală de feţele cubului.

1. Se consideră cubul $ABCDEFGH$ de latură a şi M un punct arbitrar ales pe sfera înscrisă în cub. Să se arate că suma pătratelor distanţelor de la M la toate vârfurile cubului este $8a^2$. (G.M.1985)

   Soluție:

   Aplicăm teorema medianei în triunghiurile $\triangle MHB$, $\triangle MGA$, $\triangle MDF$, $\triangle MEC$ pentru care MO este mediană.



$$\text{În } \triangle MHB \overset{th.medianei}{\Rightarrow} MO^2 = \frac{2\left(MH^2+MB^2\right)-HB^2}{4}$$

$$\text{În } \triangle MGA \overset{th.medianei}{\Rightarrow} MO^2 = \frac{2\left(MG^2+MA^2\right)-GA^2}{4}$$

$$\text{În } \triangle MDF \overset{th.medianei}{\Rightarrow} MO^2 = \frac{2\left(MD^2+MF^2\right)-DF^2}{4}$$

$$\text{În } \triangle MEC \overset{th.medianei}{\Rightarrow} MO^2 = \frac{2\left(ME^2+MC^2\right)-EC^2}{4}$$

Prin însumarea relaţiilor se obţine:

$$2\left(MH^2+MB^2+MG^2+MA^2+MD^2+MF^2+ME^2+MC^2\right)$$

$$=4MO^2+HB^2+GA^2+DF^2+EC^2=4a^2+4\left(a\sqrt{3}\right)^2=4a^2+12a^2=16a^2$$

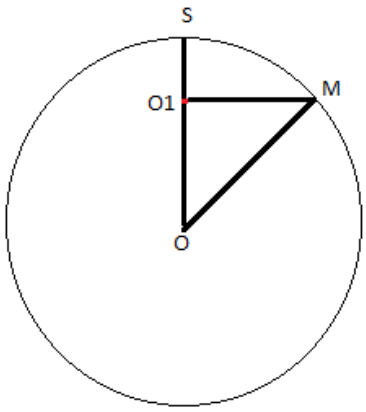
Deci, $MH^2+MB^2+MG^2+MA^2+MD^2+MF^2+ME^2+MC^2=8a^2$.

2. Se consideră în spaţiu un cub de muchie egală cu a şi o sferă tangentă la toate feţele cubului. Să se arate că suma pătratelor de la un punct de pe sferă la toate feţele cubului nu depinde de alegerea punctului pe sferă.

   Soluţie:

   Considerăm x, y, z lungimile distanţelor la trei feţe care au un punct comun A. Atunci distanţele la feţele opuse sunt $a-x, a-y, a-z$. Punctul de pe sferă împreună cu proiecţiile pe feţe şi cu unul din vârfurile cubului determină câte un paralelipiped dreptunghic cu diagonala $AM^2=x^2+y^2+z^2$, respectiv $MG^2=(a-x)^2+(a-y)^2+(a-z)^2$, unde G este punctul diametral opus lui A în cub.

Aplicând teorema medianei în triunghiul format de punctul de pe sferă şi două vârfuri opuse în cub se obține $MO^2 = \frac{2\left(MA^2 + MG^2\right) - AG^2}{4}$, de unde



$$MA^2 + MG^2 = \frac{4MO^2 + AG^2}{2} = \frac{4\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2}{2} = \frac{4a^2}{2} = 2a^2$$, nu depinde de M .

3. Fie un cub de latură a. Determinaţi cât la sută din volumul cubului circumscris sferei reprezintă volumul sferei.

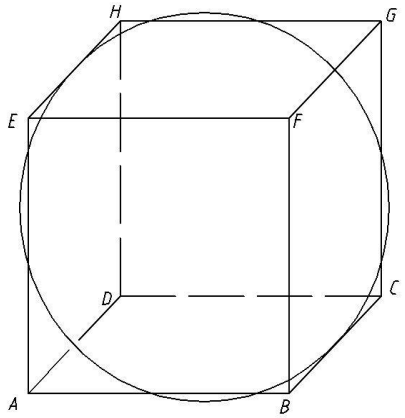
$x\% \cdot V_{cub\ circumscris\ sferei} = V_{sferă}$

$x\% \cdot \frac{4\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3}{3} = a^3$, a fiind lungimea muchiei cubului

$x = \frac{50\pi}{3}$

R: $\frac{50\pi}{3}\% \cong 52{,}3\%$

Intersfera este tangentă muchiilor cubului în mijlocul lor; deci există 12 puncte de tangenţă.



Observaţii.

a) Diametrul intersferei are lungimea cât o diagonală a feţei cubului.
b) O parte din sferă devine internă cubului iar alte şase părţi devin externe şi sunt şase calote sferice identice.
c) Relaţia de legătură între raza sferei înscrise în cub şi raza interferei: $R_{interferă} = R_{sferei\ înscrise} \cdot \sqrt{2}$
d) Pentru calota sferică externă cubului, raza este $\frac{a}{2}$ iar înălţimea $H_{calotă} = R_{intersferă} - OO_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2}$,

$OO_1^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$, de unde $OO_1 = \frac{a}{2}$.

Notă: a reprezintă lungimea muchiei cubului, O centrului cubului iar O_1 centrul bazei de sus a cubului.

Sfera circumscrisă include pe suprafața ei toate vârfurile cubului.

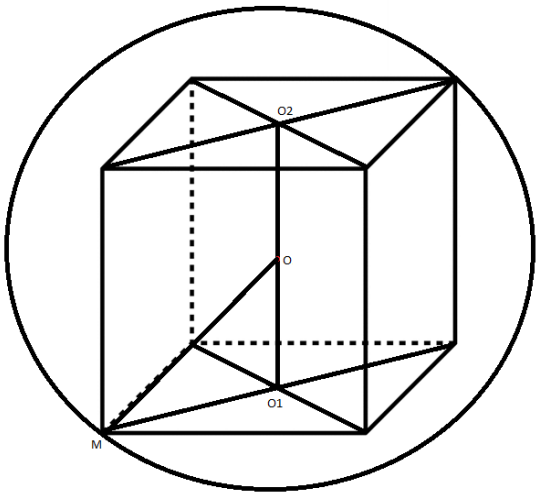
Observații

a) Centrul cubului coincide cu centrul sferei și este centru de simetrie al întregului ansamblu.

b) Vârfurile unei secțiuni diagonale ale cubului se află pe același cerc mare al cubului , evident cu raza cât a sferei , iar vârfurile aceleiași fețe a cubului se află pe un cerc mic cu raza de lungime cât jumătate din lungimea unei diagonale a bazei.

În triunghiul $\triangle OO_1M$, aplicând T. Pitagora se obține $OM^2 = OO_1^2 + O_1M^2$, adică

$R^2_{\text{sferă circumscrisă}} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$, de unde $R_{\text{sferă circumscrisă}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



1. Fie un cub de latură a . Determinați cât la sută din volumul cubului înscris în sferă reprezintă volumul sferei.

$x\% \cdot V_{\text{cub înscris ferei}} = V_{\text{sferă}}$

$x\% \cdot a^3 = \frac{4\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3}{3}$, a fiind lungimea muchiei cubului

$x = 50\pi\sqrt{3}$

R: $50\sqrt{3}\pi \cong 271,61\%$

Bibliografie:

https://mynixworld.files.wordpress.com/2012/01/0solideleplaton_9_stabilitateacubului.pdf

5 . Soluții problema lunii februarie 2016

Enunț:

Un cub gol *ABCDEFGH,* cu muchia de lungime *a* , este intersectat de o sferă care trece prin vârfurile feței EFGH și prin centrul cubului. Se înlătură toate punctele cubului ce aparțin interiorului sferei și sfera, se așează corpul obținut cu fața ABCD pe un plan orizontal și se umple cu apă. Să se determine valoarea minimă a muchiei cubului, pentru ca în acest vas să încapă un litru de apă.

Prof. Constantin Telteu

Rezolvare:

Pentru început, să determinăm raza sferei în funcție de latura cubului.

Admirăm figura de mai jos și, pentru a nu a o mai complica, luăm separat triunghiul NOF, în care mai desenăm și înălțimea din N (N este centrul sferei).

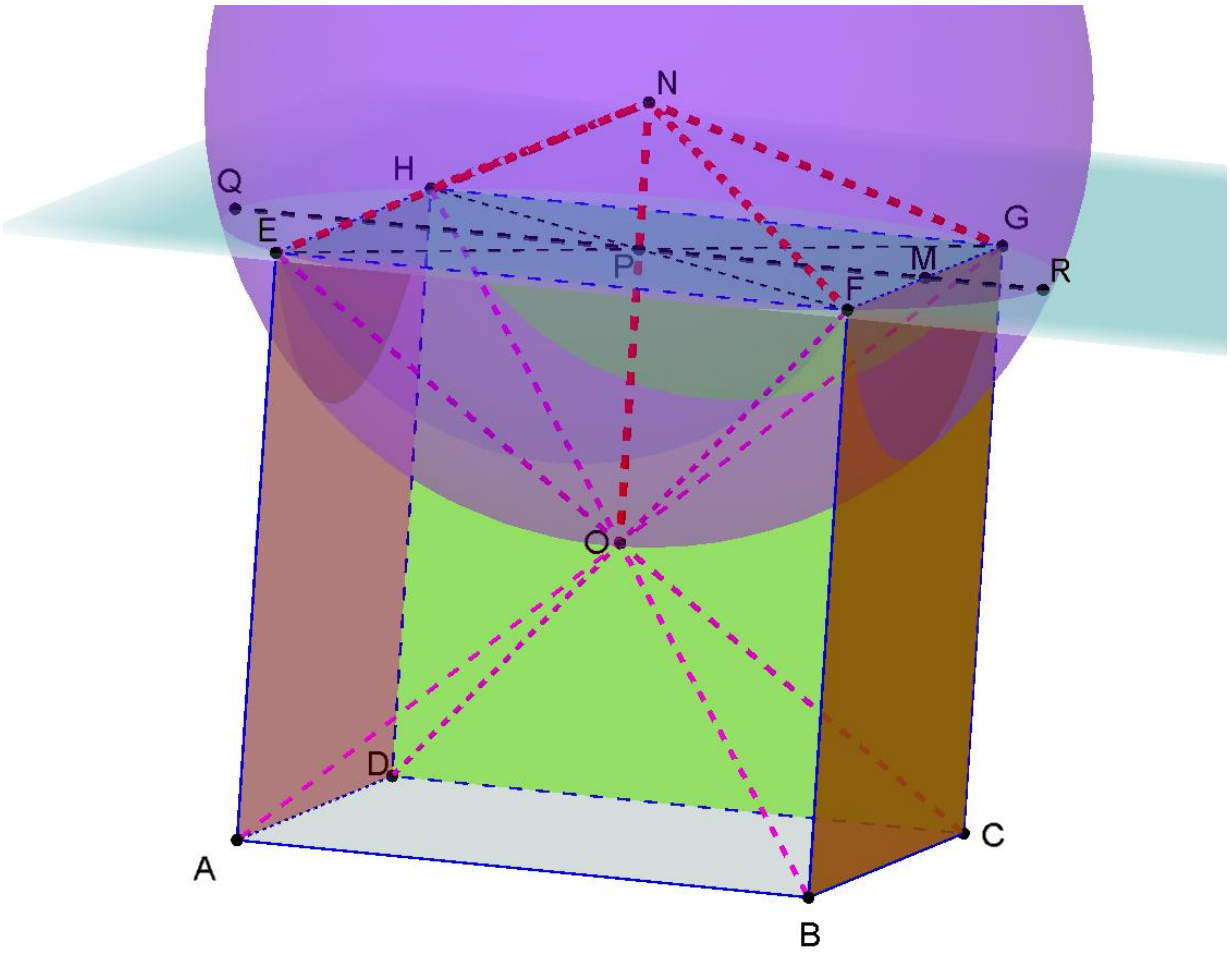
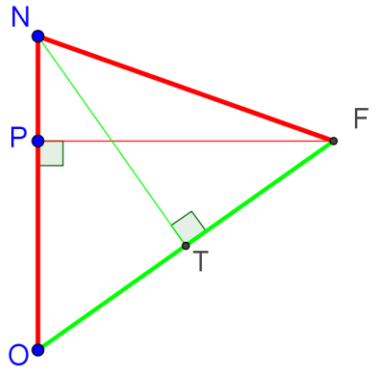


Fig.1

Observăm mai întâi că:

$$PO = PM = \frac{a}{2};\ OF = OG = \frac{a\sqrt{3}}{2};\ PG = PR = PF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$NO = NF = NG = NR = R\ raza\ sferei$$



Din aria $\Delta NOF \Rightarrow OF \cdot NT = NO \cdot PF \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{R^2 - \frac{3a^2}{16}} = R \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3\left(R^2 - \frac{3a^2}{16}\right) = 2R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{9a^2}{16} \Rightarrow R = \frac{3a}{4}\ .$$

Așa cum se vede în fig.1, intersecția sferei cu fiecare față a cubului este un segment circular, a cărui înălțime trebuie aflată, pentru a determina care este înălțimea la care se ridică apa în vasul rezultat după înlăturarea acestor segmente de cerc.

Apelăm pentru aceasta la figura 2, în care cercul albastru este intersecția planului ce conține fața *BCGF* cu sfera, cercul verde este intersecția sferei cu planul ce conține fața *EFGH*, iar intersecția sferei cu fața *BCGF* este segmentul circular delimitat de muchia *FG* a cubului și arcul FHG din cercul albastru. Deci trebuie să determinăm înălțimea segmentului circular, care este *MH*.

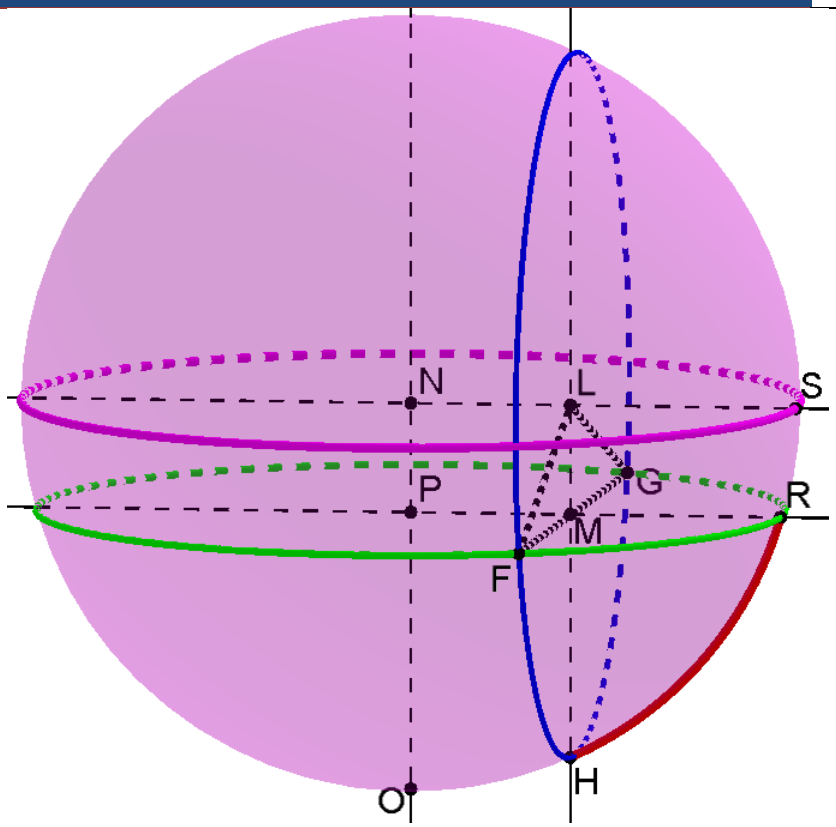


Fig.2

Observăm că $NP=\frac{a}{4}$; $NH=NS=NO=\frac{3a}{4}$; $PM=NL=\frac{a}{2}$ și cu teorema lui Pitagora, avem:

$$LH=\sqrt{NH^2-NL^2}=\sqrt{\frac{9a^2}{16}-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{4}=LF=LG=raza\,cercului\,albastru.$$

$$MH=LH-LM=\frac{a\sqrt{5}}{4}-\frac{a}{4}=\frac{a\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}.$$

Înălțimea până la care se ridică apa în vas este $h_{apă}=a-\frac{a\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}=\frac{a\left(5-\sqrt{5}\right)}{4}$.

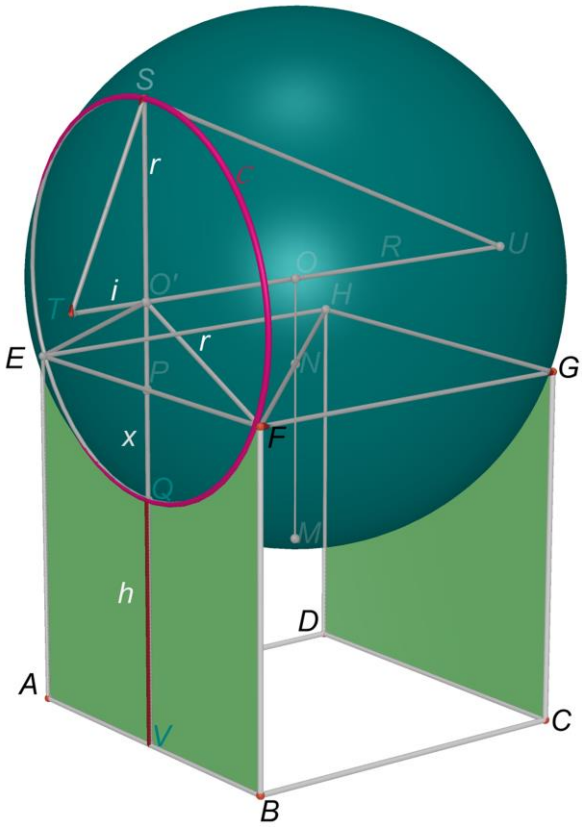
Volumul apei este $V_{apă}=\frac{a^3\left(5-\sqrt{5}\right)}{4}\geq 1000\,cm^3\Rightarrow a^3\geq\frac{4000}{5-\sqrt{5}}=200\cdot\left(5+\sqrt{5}\right)cm^3$.

Deci valoarea minimă a lui a este $a_{\text{minim}}=\sqrt[3]{\left(5+\sqrt{5}\right)\cdot 200}\approx 11,3112572\,cm.$

Prof. C. Telteu

Alte soluții:

1. Prof. Biro Istvan



Fie O şi R centrul respectiv raza sferei cu proprietatea cerută, M centrul cubului şi N centrul pătratului $EFGH$.

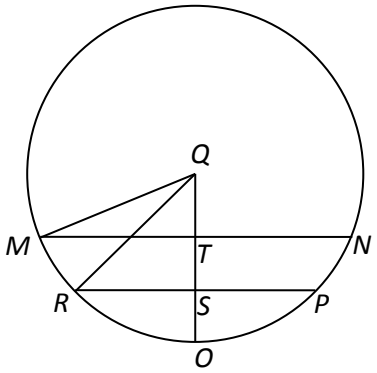
Observăm că $R = OG > NG = \frac{a}{2}\sqrt{2} > \frac{a}{2} = NM$, adică din relaţiile $\begin{cases} R = ON + NM \\ R^2 = ON^2 + NG^2 \end{cases}$ obţinem $ON = \frac{a}{4}$ şi $R = \frac{3a}{4}$.

Intersecţia sferei cu feţele $ABEF$, $BCFG$, $DCGH$ şi $ADEH$ determină patru cercuri identice cu cercul C. În consecinţă vasul rezultat va fi cubul iniţial fără segmentele circulare (EQF) decupate din feţele amintite.

În continuare trebuie să aflăm distanţa $h = QV$ unde V este mediatoarea muchiei AB şi Q intersecţia mediatoarei cu cercul C. Pentru a afla r (raza cercului C) putem folosi două metode, fie din formula volumului calotei sferice determinat de intersecţia planului $ABEF$ cu sfera $V = \frac{\pi i^2}{3}(3R - i) = \frac{\pi i}{6}\left(i^2 + 3r^2\right)$ sau din triunghiul dreptunghic STU folosind teorema înălţimii, obţinând în final relaţia $r^2 = i(2R - i)$, unde $R = \frac{3a}{4}$, $i = R - \frac{a}{2} = \frac{a}{4}$ şi rezultă $r = \frac{a}{4}\sqrt{5}$. În triunghiul dreptunghic SFQ folosind teorema înălţimii avem $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = x(2r - x)$ de unde $x_1 = \frac{a}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right)$ este singura soluţie acceptabilă, deoarece $x_2 = \frac{a}{4}\left(\sqrt{5} + 1\right) > \frac{a}{4}\sqrt{5} = r$.

În concluzie $h = a - x_1 = \frac{a}{4}\left(5 - \sqrt{5}\right)$ şi ca în acest vas să încapă un litru de apă $\left(1dm^3\right)$ trebuie ca volumul paralelipipedului dreptunghic cu baza pătratul $ABCD$ şi de înălţime h să fie mai mare sau egal cu 1, adică $\frac{a^3}{4}\left(5 - \sqrt{5}\right) \geq 1 \Leftrightarrow a \geq \sqrt[3]{\frac{4\left(5 + \sqrt{5}\right)}{20}} = \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{5}}{5}} \approx \sqrt[3]{1.447213595499958} \approx 1.13$ dm .

2. Prof. Antonescu Marius



Imaginea prezintă o secţiune prin cercul mare al sferei în care:

Q – centrul sferei

O – centrul cubului

T – centrul pătratului $EFGH$

MN – diametrul unui cerc de centru T, situat în plan orizontal circumscris pătratului $EFGH$

RP – diametrul cercului de centru S, înscris într-un pătrat cu latura a dm, ce reprezintă un plan se secţiune paralel cu planul $EFGH$

$MN = a\sqrt{2}$ dm $\Rightarrow MT = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ dm

$PR = a$ dm $\Rightarrow$ RS $= \dfrac{a}{2}$ dm

$TO = \dfrac{a}{2}$ dm

$MQ = QO \Rightarrow MQ^2 = QO^2 \Rightarrow MT^2 + QT^2 = (QT + TO)^2 \Rightarrow \dfrac{2a^2}{4} + QT^2 = (QT + \dfrac{a}{2})^2$

$\Rightarrow \dfrac{2a^2}{4} + QT^2 = QT^2 + a \cdot QT + \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow \dfrac{a^2}{4} = a \cdot QT \Rightarrow QT = \dfrac{a}{4}$ dm

$MQ^2 = QO^2 \Rightarrow MT^2 + QT^2 = \dfrac{2a^2}{4} + \dfrac{a^2}{16} = \dfrac{9a^2}{16} \Rightarrow MQ = QO = QR = \dfrac{3a}{4}$ dm (raza sferei)

$QS^2 = RQ^2 + RS^2 = \dfrac{9a^2}{16} + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{16} \Rightarrow QS = \dfrac{a\sqrt{5}}{4}$ dm

$TS = QS - QT = \dfrac{a\sqrt{5}}{4} - \dfrac{a}{4} = \dfrac{a\sqrt{5} - a}{4}$ dm

$h_{apă} = a - TS = a - \dfrac{a\sqrt{5} - a}{4} = \dfrac{a\left(5 - \sqrt{5}\right)}{4}$ dm

$$V_{apă} = a^2 \cdot h_{apă} = a^2 \cdot \frac{a\left(5-\sqrt{5}\right)}{4} = \frac{a^3\left(5-\sqrt{5}\right)}{4}\,\text{dm}^3$$

$$1 = \frac{a^3\left(5-\sqrt{5}\right)}{4} \Rightarrow a^3 = \frac{4}{5-\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{5} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{5+\sqrt{5}}{5}}\ \text{dm}$$

6. CONCURS PROBLEMA LUNII MARTIE 2016

Fie ΔABC **,** $[AA',[BB',[CC'$ **sunt bisectoarele unghiurilor** $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C$, $A' \in [BC]$ **,** $B' \in [AC]$ **,** $C' \in [AB]$ **. Sa se arate ca** $\frac{\sqrt{A'B \cdot A'C}}{AA'} + \frac{\sqrt{B'A \cdot B'C}}{BB'} + \frac{\sqrt{C'B \cdot C'A}}{CC'} \geq \frac{3}{2}$

Prof. George-Florin Serban

Astepteptam solutiile pe adresa de e-mail revista@mateinfo.ro

7. SIMULARE EVALUARE NAȚIONALĂ MATEMATICĂ MARTIE 2016

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru: 2 ore.

SUBIECTUL I – Pe foaia de examen se trec doar rezultatele. (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $(6+3\cdot 2):3-2$ este egal cu:.....

(5p) **2**. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 4, 6 şi 8 este egal cu:.....

(5p) **3**. Aria unui pătrat cu perimetrul de 24 cm este egală cu.....cm^2

(5p) **4**. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ unghiul dintre muchia AB' şi $A'D$ este egal cu:.....

(5p) **5.** Înălţimea unei piramide triunghiulare regulate cu muchia bazei de $3\sqrt{3}$ cm şi muchia laterală de 5 cm este egală cu ……cm.

(5p) **6**. Diagrama de mai jos (*figura1*) reprezintă rezultatele (nr de puncte) obținute de membrii unei echipe la un concurs de matematică. Numărul total de puncte obținute este .....

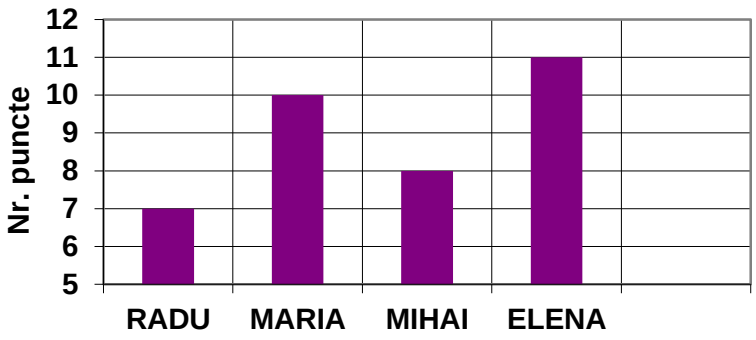


Figura 1

SUBIECTUL II – Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete. (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați pe foaia de examen o prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$.

(5p) **2**. Aflaţi cel mai mic număr natural format din trei cifre care împărţit la 9 sau la 12 dă rest de fiecare dată 5.

(5p) **3**. Se consideră mulţimea $A=\{x\in\mathbf{R} \mid |2x-1|\le 3\}$. Enumeraţi elementele mulţimii $A\cap\mathbf{Z}$.

4. După două scumpiri succesive, una cu 5% și cealaltă cu 4% un obiect costă acum 546 lei

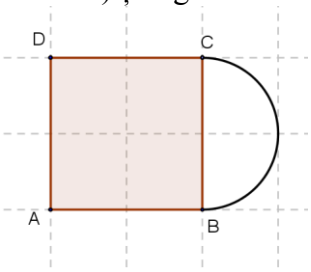
(5p) **a)** Aflați prețul inițial al obiectului.

(5p) **b)** Cu ce procent din prețul inițial s-a mărit prețul obiectului după cele două scumpiri?

(5p) **5**. Descompuneți în factori x^3+2x^2-x-2.

SUBIECTUL III – Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete.(30 de puncte)

1. Grădina din figura 1. este formată dintr-o livadă (pătratul ABCD) și o grădina de zarzavaturi (



semidiscul BC). Latura pătratului ABCD este de 100 m.

(5p) a) Arătați că oriunde am planta doi pomi în livadă distanța dintre ei este mai mare de 140 m.

(5p) b) Dacă $3,14<\pi<3,15$ arătați că aria grădinii de zarzavaturi este mai mare decât $3925\ m^2$ și mai mică decât $3938\ m^2$.

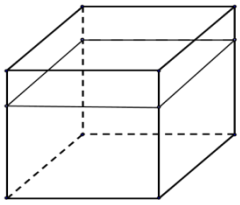
(5p) c) Daca $\pi=3,14$ calculați lungimea gardului care înconjoară grădina.

2. Într-un vas în formă de cub se află 384 litri de apă. Vasul este plin pâna la $\frac{3}{4}$ din înălțime .

(5p) a) Determinați în cm^3 volumul cubului.

(5p) b) Determinați lungimea muchiei cubului.

(5p) c) Cele cinci fete ale vasului sunt confecționate din material al cărui preț este de 1,5 lei pentru 1 dm^2. Calculați prețul materialului necesar pentru confecționarea vasului.



Prof: Dima Paraschiva

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
SIMULARE EVALUARE NAȚIONALĂ MATEMATICĂ
MARTIE 2016

SUBIECTUL I		(30 de puncte)
1.	2	5p
2.	24	5p
3.	$36\ cm^2$	5p
4.	60^0	5p
5.	4 cm	5p
6.	36 puncte	5p
SUBIECTUL II		(30 de puncte)
1.	Desen Notație	4p 1p
2.	Fie n numărul căutat, n=9 c_1+ 5, n=12 c_2+5 n-5=9 c_1, n-5=12 c_2 n-5=[9;12](cel mi mic multiplu comun al lui 9 și 12), n-5 =36, dar cum trebuie să fie format din trei cifre, n-5=108, n=113	2p 1p 1p 1p
3.	$-3 \le 2x-1 \le 3$ $-3+1 \le 2x \le 3+1$ $-2 \le 2x \le 4$ $-1 \le x \le 2, x \in Z$	1p 1p 1p 1p 1p

	$x \in \{-1,0,1,2\}$	
4.	a) fie x prețul inițial $x+\frac{5}{100}x+\frac{4}{100}(x+\frac{5}{100}x)=546$ Rezolvarea ecuației și aflarea lui x=500 lei	2p 3p
	b)546-500=46(diferența dintre prețul final și cel inițial) $\frac{p}{100}\cdot 500=46$ $p=\frac{46}{5}, p=9,2\%$	1p 2p 2p
5	$x^2(x+2)-(x+2)=$ $(x+2)(x^2-1)=$ $(x+2)(x+1)(x-1)$	2p 1p 2p
	SUBIECTUL III	(30 de puncte)
1.	a) cea mai mare distanță este diagonala pătratului $AC=100\sqrt{2}m$ $100\sqrt{2}>140$	3p 2p
	b) aria grădinii de zarzavat este aria semidiscului cu raza r=50 m $Aria=\frac{\pi r^2}{2}=1250\pi \text{ m}^2$ $3925<1250\pi<3938$	3p 2p
	c) lungimea gardului=3AB+lungimea arcului BC $lungimeagardului=300+50\pi$	1p 2p

	=300=157+457m	2p
2.	a) $\frac{3}{4}\bullet V_{cub} = 384$ $V_{cub} = 512$ litri $V_{cub} = 512$ dm^3=51200 cm^3	2p 2p 1p
	b) $V_{cub} = l^3$ $l^3 = 512$ $l = 8$ dm	1p 2p 2p
	c) aria unei fețe=8^2=64 dm^2 aria celor cinci fețe=320 dm^2 prețul materialului= 480 lei	2p 2p 1p

6. SIMULARE BAC MATEMATICĂ MATE-INFO
MARTIE 2016

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Sa se calculeze partea intreaga a numarului $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$.

(5p) 2. Daca intr-o progresie aritmetica $a_1+a_5=8$, sa se calculeze a_3.

(5p) 3. Sa se determine solutiile intregi ale inecuatiei $x^2+2x\le 0$

(5p) 4. Sa se calculeze modulul numarului complex $z=(3+4i)^2$

(5p) 5. Sa se rezolve in multimea numerelor naturale ecuatia $C_n^2-3C_n^1=-3$.

(5p) 6. Sa se determine raza cercului circumscris unui triunghi cu laturile de lungime7, 5 si $2\sqrt{6}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se considera sistemul $\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ x+y+2z=4 \\ 3x-y-z=1 \end{cases}$, si matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & m \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ cu $m\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Sa se calculeze determinantul matricei A pentru m=2.
(5p) b) Sa se determine valorile lui m pentru care determinantul matricei A este nul.
(5p) c) Sa se rezolve sistemul.

2. Pe multimea numerelor reale se considera legea de compozitie $x\circ y=xy+\frac{x}{3}+\frac{y}{3}-\frac{2}{9}$.

(5p) a) Sa se arate ca legea se poate scrie $x\circ y=\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(y+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}$, $\forall\ x,y\in\mathbb{R}$.

(5p) b) Sa se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel incat $a\circ x=a$, pentru $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

(5p) c) Sa se calculeze $\left(-\frac{2012}{3}\right)\circ\left(-\frac{2011}{3}\right)\circ\left(-\frac{2010}{3}\right)\circ\ldots\circ\left(-\frac{1}{3}\right)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se considera functia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-x\ln x$.

(5p) a) Sa se calculeze $f'(1)$.

(5p) b) Sa se scrie ecuatia tangentei la graficul lui f in punctul de abscisa $x_0=e$.

(5p) c) Determina punctele de extrem local ale functiei f.

2. Se considera $I_n=\int_0^1 x^n\cos x dx$, $n\in\mathbb{N}$.

(5p) a) Sa se calculeze I_0.

(5p) b) Sa se calculeze I_1.(5p)

c) Sa se demonstreze ca $I_{2012} \le \frac{1}{2013}$.

Prof. Lică Roxana

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
SIMULARE BAC MATEMATICĂ MATE-INFO
MARTIE 2016

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\frac{\sqrt{5}+2}{5-4}=2+\sqrt{5}\simeq 4,2$ Pratea intreaga a numarului este 4.	3p 2p
2.	$a_5=a_1+4r$ $a_1+a_1+4r=8 \Rightarrow a_1+2r=4$ $a_3=a_1+2r=4$	1p 2p 2p
3.	$x_1=0,\ x_2=-2$ Solutiile in $\mathbb{R}$ sunt $x\in[-2,0]$ Solutiile intregi $\{-2,-1,0\}$	1p 2p 2p
4.	$\lvert z\rvert=\lvert(3+4i)^2\rvert=\lvert 3+4i\rvert^2$ $=\left(\sqrt{3^2+4^2}\right)^2=\sqrt{25}^2=25$	2p 3p
5.	$\frac{n(n-1)}{2}-3n=-3$ $n^2-7n+6=0,\ n=6$	2p 3p

6.	$7^2=5^2+\left(2\sqrt{6}\right)^2$, deci triunghiul este dreptunghic. Ipotenuza triunghiului are lungimea 7. Raza cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este egala cu jumatate din ipotenuza, deci R=3,5.	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\text{Det}A=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -1\end{vmatrix}=$ $-2-6+1+3+4-1=$ -1	2p 2p 1p
b)	Det A=$-2-3m+1+3+2m-1$ Det A=0 $\Rightarrow -m+1=0\Rightarrow m=1$	3p 2p
c)	Scazand ecuatiile 3 si 1 obtinem $x=1$ $\begin{cases} y+z=2\\ y+2z=3\end{cases}$ $z=1, y=1$	1p 2p 2p
2. a)	Fie $x,y\in\mathbb{R}$ $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(y+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}=xy+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}=xy+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{9}=x\circ y$	1p 4p
b)	Fie $x\in\mathbb{R}$. $a\circ x=a\Rightarrow\left(a+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}=a\Rightarrow\left(a+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)-\left(a+\frac{1}{3}\right)=0$ $\left(a+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}-1\right)=0\Rightarrow a=-\frac{1}{3}$	3p 2p
c)	$\alpha\circ\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$	3p 2p

	$\left(-\frac{2012}{3}\right)\circ\left(-\frac{2011}{3}\right)\circ\left(-\frac{2010}{3}\right)\circ\ldots\circ\left(-\frac{1}{3}\right)=\alpha\circ\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$	

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=1-\ln x-x\frac{1}{x}=-\ln x$ $f'(1)=-\ln 1=0$	3p 2p
b)	$f'(e)=-\ln e=-1$ Ecuatia tangentei la grafic in punctul de abscisa α este $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$ Asadar ecuatia tangentei la graficul functiei este $y-0=-1(x-e)$ adica $x+y-e=0$	1p 1p 2p 1p
c)	$f'(x)=0\Rightarrow-\ln x=0\Rightarrow x=1$ Tabel: x: 0 (∞), 1; $f'(x)$: $+\ +\ +\ +\ 0\ -\ -\ -\ -\ -$; $f(x)$: ↗ 1 ↘ Un singur punct de extrem, $A(1,1)$	2p 2p 1p
2. a)	$I_0=\int_0^1\cos x dx=$ $=\sin x\Big\vert_0^1=\sin 1.$	3p 2p
b)	$I_1=\int_0^1 x\cos x dx=x\sin x\Big\vert_0^1-\int_0^1\sin x dx$ $=\sin 1+\cos x\Big\vert_0^1=\sin 1+\cos 1-1$	3p 2p

c)	$x \in [0,1] \Rightarrow \cos x \leq 1 \Rightarrow$	1p
	$x^{2012} \cos x \leq x^{2012} \Rightarrow$	2p
	$\int_0^1 x^{2012} \cos x dx \leq \int_0^1 x^{2012} dx = \frac{1}{2013}$	2p