

COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ȘI SUSȚINĂTOR PERMANENȚI AI REVISTEI
NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ȘI NELA CICEU

1. Activitate metodică la centrul de excelență în matematică din municipiul București,
cls. aVII a...pag. 2
Nicoleta Agenna Ionescu-Mazilu
2. Asupra unei probleme date la Olimpiada Națională de Matematică 2015 ... pag. 7
George Florin Șerban
3. Probleme date la concursuri în județul Olt...pag. 10
Pirlog Elena
4. Soluția problemei 304 din La Gaceta ... pag. 16
Titu Zvonaru, Neculai Stanciu
5. Soluții - Problema lunii IUNIE 2016 ... pag. 17
Propusa de Gheorghe Rotariu
6. CONCURS - Problema lunii IULIE 2016 ... pag. 30
George Florin Șerban
7. MODEL BAC Matematică – profil mate-info 2016 ... pag. 31

1. ACTIVITATE METODICĂ LA CENTRUL DE EXCELENȚĂ ÎN MATEMATICĂ DIN MUNICIPIUL BUCUREȘTI - CLASA A VII-A

prof. Nicoleta Agenna Ionescu-Mazilu

Colegiul Național de Arte „Dinu Lipatti”, București

Pentru aprofundarea unor teme din cadrul programei pentru olimpiada de matematică, elevilor de clasa a VII-a de la Centrul de Excelență în Matematică din București li s-a propus o secvență de instruire de tipul problem-solving. În cadrul activității, șase elevi au pregătit și au susținut în fața colegilor lor câte o temă de sinteză, având la dispoziție 20 de minute. Fără titlu de obligativitate (elevii putând propune chiar ei alte subiecte) li s-au propus de către profesorul coordonator, Nicoleta Agenna Ionescu-Mazilu, următoarele teme:

- Probleme cu arii. Aplicații ale teoremei lui Gergonne, prezentată de Mihnea Iancu;
- Asupra unei inegalități date la baraj II 2015, prezentată de George Picu;
- Inegalitatea lui C-B-S și aplicațiile ei; studiul cazului de egalitate, prezentată de Ilinca Georgescu;
- Punctul lui Torricelli, proprietăți, prezentată de Diana Cațaroș;
- Probleme de teoria numerelor date la baraj, prezentată de Denis Chiriță;
- Problemă de combinatorică enumerativă, prezentată de Antonio Teodorescu.

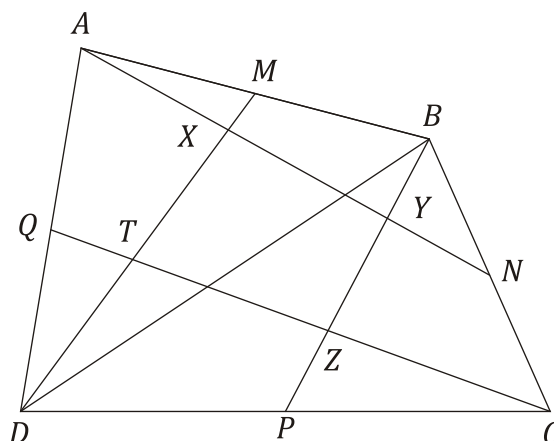
Elevii și-au pregătit cu seriozitate prezentările, au selectat probleme interesante, și-au provocat colegii la dialog fervent pe marginea soluțiilor, au lansat teme de reflecție și teme de lucru pentru acasă, atingând cu succes obiectivele propuse pentru această activitate. Exemplific o secvență din cadrul activității printr-un material-suport care a stat la baza prezentării elevului Iancu Mihnea despre arii.

Arii

I. Probleme propuse

1. Fie $ABCD$ un patrulater convex și M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD , respectiv DA . Segmentele AN, BP, CQ și DM determină prin intersecție punctele X, Y, Z și T . Să se arate că $[XYZT] = [AMX] + [BNY] + [CPZ] + [DQT]$.

Soluție:



$$\left. \begin{array}{l} \Delta ABD \\ DM \text{ mediană} \end{array} \right\} \Rightarrow [AMD] = [BMD] \quad \left. \begin{array}{l} \Delta BCD \\ BP \text{ mediană} \end{array} \right\} \Rightarrow [BPC] = [BPD] \quad \left. \begin{array}{l} [AMD] + [BPC] = [MBPD] \\ [AMD] + [BPC] + [MBPD] = [ABCD] \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} [MBPD] = \frac{[ABCD]}{2} \\ \text{Analog } [ANCQ] = \frac{[ABCD]}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow [MBPD] + [ANCQ] = [ABCD]$$

$$\left. \begin{array}{l} 2[XYZT] + [AXTQ] + [MBYX] + [NYZC] + [TZPD] = [ABCD] \\ [XYZT] + [AXTQ] + [MBYZ] + [NYZC] + [TZPD] + [AXM] + [BYN] + [PZC] + [DQT] = [ABCD] \end{array} \right\} \Rightarrow [XYZT] = [AXM] + [BYN] + [PZC] + [DQT]$$

2. Fie ΔABC , în care $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ și $C' \in (AB)$.

$$AA' \cap BB' = \{E\}$$

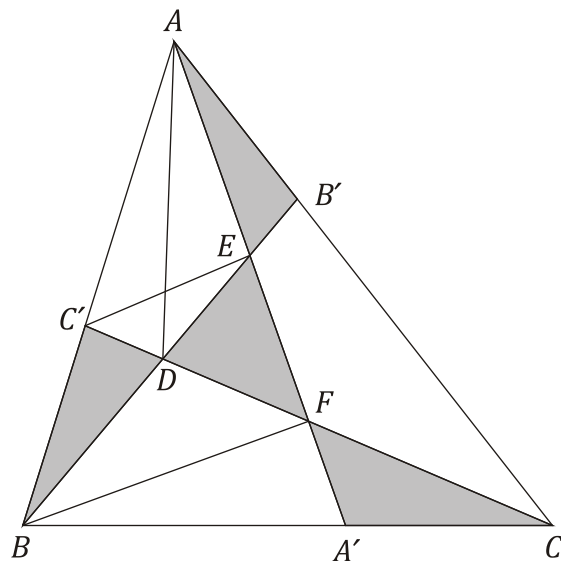
$$BB' \cap CC' = \{D\}$$

$$AA' \cap CC' = \{F\}$$

$$[C'DB] = [AEB'] = [FCA'] = [DEF]$$

Să se arate că $[AEDC'] = [B'EFC] = [BDFA']$.

Soluție:



$$[C'DB] = [DEF] \Rightarrow C'EFB = \text{trapez (de ce?)}$$

$$\Rightarrow AD \text{ trece prin mijlocul } [EC'] \Rightarrow d(C', AD) = d(E, AD)$$

$$\left. \begin{array}{l} [AC'D] = [AED] \\ [C'DB] = [AEB'] \end{array} \right\} \Rightarrow [DFA'B] = [B'EFC]. \text{ Analog } [DFA'B] = [AEDC']$$

$$\Rightarrow [DFA'B] = [B'EFC] = [AEDC']$$

II. Aplicație

1. Teorema lui Gergonne

Ipoteză:

$$\triangle ABC, A' \in (BC), B' \in (AC), C' \in (AB)$$

$$AA' \cap BB' \cap CC' = \{M\}$$

Concluzie:

$$\frac{MA'}{AA'} + \frac{MB'}{BB'} + \frac{MC'}{CC'} = 1$$

Soluție:

$$\frac{MA'}{AA'} = \frac{[MAB]}{[MBA']} = \frac{[MAC]}{[MCA']} = \frac{[MAB] + [MAC]}{[MBA'] + [MCA']} = \frac{[MAB] + [MAC]}{[MBC]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{MA + MA'}{MA'} = \frac{[MAB] + [MAC] + [MBC]}{[MBC]} = \frac{AA'}{MA'} = \frac{[ABC]}{[MBC]}$$

$$\Rightarrow \frac{MA'}{AA'} = \frac{[MBC]}{[ABC]}$$

Analog:

$$\frac{MB'}{BB'} = \frac{[AMC]}{[ABC]}$$

$$\frac{MC'}{CC'} = \frac{[AMB]}{[ABC]}$$

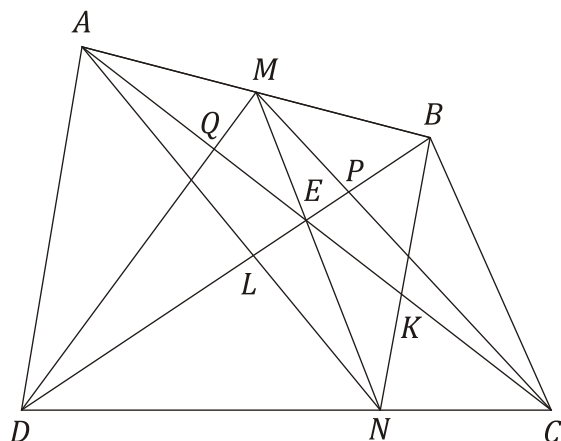
$$\Rightarrow \frac{MA'}{AA'} + \frac{MB'}{BB'} + \frac{MC'}{CC'} = 1$$

2. Aplicație pe baza Teoremei lui Gergonne

Se consideră un patrulater convex $ABCD$ ale cărei diagonale se intersectează în E . Prin E se duce o dreaptă arbitrară care intersectează laturile AB și CD în M respectiv N . Dreptele NA , NB , MC , MD intersectează diagonalele BD și AC în punctele L , K , P , Q .

Să se demonstreze relația:

Soluție:

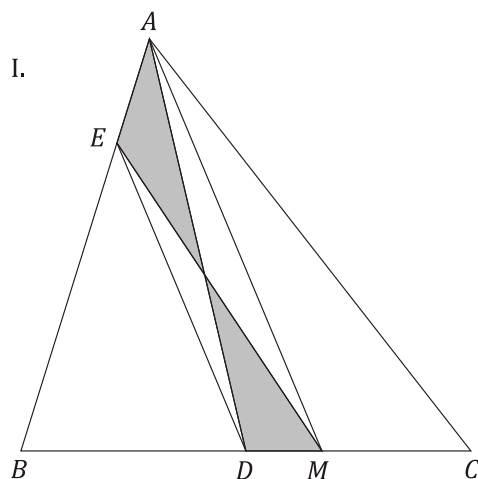


$$\stackrel{(-)}{\Rightarrow} \frac{EP}{DP} + \frac{EQ}{CO} + \frac{EL}{BL} + \frac{EK}{AK} = 1, \text{ c.c.t.d.}$$

III. Temă

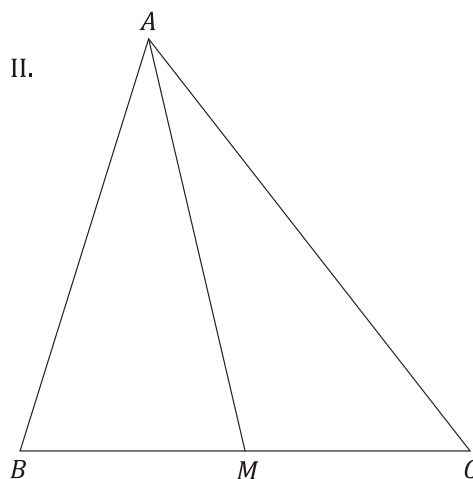
Indicație de rezolvare:

Se va trata problema în două cazuri:



I. $BM \neq MC$

căutată



II. $BM = MC \Rightarrow [ABM] = [AMC] \Rightarrow AM$ este dreapta

IV. Bibliografie

1. Enescu, B. – *Arii*, Editura Gil, 2006
2. Bălăucă, A. – *1350 de probleme semnificative. Olimpiade, concursuri și centre de excelență, clasa a VII-a*, Editura Taida, 2012
3. Boskoff, V. – *Probleme practice de geometrie*, Editura Tehnică, București, 1990
4. www.gogeometry.com
5. Colecția revistei *Gazeta Matematică*
6. Dăncilă, I. – *Geometria de care ai nevoie*, Editura Teora, București, 1997

2. ASUPRA UNEI PROBLEME DATE LA OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ 2015

Profesor: George-Florin Șerban

Liceul Pedagogic “D.P.Perpessicius”, Brăila

La Olimpiada Națională de Matematică 2015, la clasa a 6-a a fost propusă următoarea problemă:

“Arătați că dacă x, y și n sunt numere naturale astfel încât $n = \frac{x^2 - 1}{2} = \frac{y^2 - 1}{3}$, atunci

a) $n = y^2 - x^2$ b) n este multiplu de 20. (Neculai Stanciu, Buzău)

În cele ce urmează voi prezenta două metode de rezolvare diferite de cea din barem.

Metoda 1: a) $x^2 = 2n + 1$, $y^2 = 3n + 1$, $x^2 y^2 = (2n + 1) \cdot (3n + 1) = 6n^2 + 5n + 1$,

$4x^2 y^2 = 24n^2 + 20n + 4 = (5n + 2)^2 - n^2 = (2xy)^2$, $(5n + 2)^2 = (2xy)^2 + n^2$, deci $2xy$, n și $5n + 2$ sunt numere pitagorice. Deci $n = y^2 - x^2$ și $5n + 2 = y^2 + x^2$, $5(y^2 - x^2) + 2 = y^2 + x^2$,

$6x^2 - 4y^2 = 2$, $3x^2 - 2y^2 = 1$, $3 \cdot (2n + 1) - 2 \cdot (3n + 1) = 6n + 3 - 6n - 2 = 1$.

b) $3x^2 - 2y^2 = 1$. În $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $x^2 \in \{0, 1, 4\}$, $3x^2 \in \{0, 3, 2\}$, $2y^2 \in \{0, 3, 2\}$,

$3x^2 - 2y^2 = \hat{1}$, singura posibilitate $3x^2 = \hat{3}$ și $2y^2 = 2$, $x^2 = \hat{1}$ și $y^2 = \hat{1}$,

$n = y^2 - x^2 = \hat{1} - \hat{1} = \hat{0}$, $n = \hat{0}$ deci $n : 5$. În $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, $3x^2 - 2y^2 = \hat{1}$, $x^2 \in \{0, 1\}$,

$3x^2 \in \{0, 3\}$, $2y^2 \in \{0, 2\}$, deci $3x^2 = \hat{3}$ și $2y^2 = 2$, $x^2 = \hat{1}$ și $y^2 = \hat{1}$

Din a) rezultă $n = y^2 - x^2 = \hat{1} - \hat{1} = \hat{0}$ în $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, $n = \hat{0}$, deci $n : 4$. Din $n : 4$ și $n : 5$ rezultă $n : [5, 4] = 20$, n este multiplu de 20.

Observație: $3x^2 - 2y^2 = \hat{1}$ în $Z_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $x^2 \in \{0, 1, 4\}$, $3x^2 \in \{0, 3, 4\}$,

$2y^2 \in \{0, 2\}$,

$3x^2 = \hat{3}$ și $2y^2 = 2$, $x^2 = \hat{1}$ și $y^2 = \hat{1}$. Din a) rezulta $n = y^2 - x^2 = \hat{1} - \hat{1} = \hat{0}$, $n = \hat{0}$ în

$Z_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, rezultă $n : 8$, dar $n : 5$, rezultă $n : [5, 8] = 40$. Enunțul poate fi întărit cu concluzia că n este multiplu de 40.

Metoda 2 : În metoda a doua imi propun să îl găsesc pe n , rezolvând diverse ecuații diofantice de gradul al doilea. Voi rezolva ecuația diofantică (1) $3x^2 - 2y^2 = 1$ ecuație

de tipul $ax^2 - by^2 = 1$, $x, y \in \mathbb{N}$, are soluția particulară $(A, B) = (1, 1)$. Rezolvanta Pell este ecuația $u^2 - abv^2 = 1$, adică $u^2 - 6v^2 = 1$, cu soluția particulară $(u_0, v_0) = (5, 2)$.

Ecuația Pell are soluțiile $u_k = \frac{1}{2} \cdot [(u_0 + v_0 \sqrt{d})^{k+1} + (u_0 - v_0 \sqrt{d})^{k+1}]$ și

$v_k = \frac{1}{2\sqrt{d}} \cdot [(u_0 + v_0\sqrt{d})^{k+1} - (u_0 - v_0\sqrt{d})^{k+1}]$, unde $k \in N$. Deci ecuația noastră are soluțiile

$$u_k = \frac{1}{2} \cdot [(5+2\sqrt{6})^{k+1} + (5-2\sqrt{6})^{k+1}] \quad \text{și} \quad v_k = \frac{1}{2\sqrt{6}} \cdot [(5+2\sqrt{6})^{k+1} - (5-2\sqrt{6})^{k+1}].$$

Soluțiile ecuației $ax^2 - by^2 = 1$ sunt $x_k = A \cdot u_k + B \cdot b \cdot v_k$ și $y_k = B \cdot u_k + A \cdot a \cdot v_k$. Deci ecuația (1) are soluțiile: $x_k = u_k + 2 \cdot v_k$, $y_k = u_k + 3 \cdot v_k$.

$$x_k = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cdot (5+2\sqrt{6})^{k+1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cdot (5-2\sqrt{6})^{k+1} = \frac{3+\sqrt{6}}{6} \cdot (5+2\sqrt{6})^{k+1} + \frac{3-\sqrt{6}}{6} \cdot (5-2\sqrt{6})^{k+1}$$

$$(3+\sqrt{6})^2 = 15+6\sqrt{6} = 3 \cdot (5+2\sqrt{6}), \quad (3-\sqrt{6})^2 = 15-6\sqrt{6} = 3 \cdot (5-2\sqrt{6})$$

$$x_k^2 = \frac{3 \cdot (5+2\sqrt{6})^{2k+3}}{36} + \frac{3 \cdot (5-2\sqrt{6})^{2k+3}}{36} + 2 \cdot \frac{(3+\sqrt{6}) \cdot (3-\sqrt{6})}{36} \cdot [(5+2\sqrt{6}) \cdot (5-2\sqrt{6})]^{k+1}$$

$$x_k^2 = \frac{(5+2\sqrt{6})^{2k+3} + (5-2\sqrt{6})^{2k+3} + 2}{12}, \quad n = \frac{x_k^2 - 1}{2} = \frac{(5+2\sqrt{6})^{2k+3} + (5-2\sqrt{6})^{2k+3} - 10}{24},$$

$$3x^2 - 2y^2 = 1, \quad 1 \text{ impar}, \quad 2y^2 \text{ par}, \text{ rezultă } 3x^2 \text{ impar}, \text{ deci } x \text{ impar}, \quad \frac{x^2 - 1}{2} = n \in N$$

Arăt că $n \div 5$. Deci

$$n = \frac{(5+2\sqrt{6} + 5-2\sqrt{6}) \cdot [(5+2\sqrt{6})^{2k+2} - (5+2\sqrt{6})^{2k+1} \cdot (5-2\sqrt{6}) + \dots + (5-2\sqrt{6})^{2k+2}] - 10}{24}$$

$$n = \frac{2 \cdot 5 \cdot [(5+2\sqrt{6})^{2k+2} - (5+2\sqrt{6})^{2k+1} \cdot (5-2\sqrt{6}) + \dots + (5-2\sqrt{6})^{2k+2} - 1]}{24}, \quad \text{dar } 5 \text{ nu divide}$$

$n \div 5$. Voi arata că $n \div 8$. Fie ecuația $y^2 - 10y + 1 = 0$, cu soluțiile $y_1 = 5+2\sqrt{6}$,

$$y_2 = 5-2\sqrt{6}. \text{ Notez cu } S_p = y_1^p + y_2^p, \quad n = \frac{S_{2k+3} - 10}{24}.$$

$$S_{2k+3} = y_1^{2k+3} + y_2^{2k+3} = (y_1 + y_2) \cdot (y_1^{2k+2} - y_1^{2k+1}y_2 + \dots + y_1^{k+1}y_2^{k+1} + \dots - y_1y_2^{2k+1} + y_2^{2k+2})$$

$$S_{2k+3} = y_1^{2k+3} + y_2^{2k+3} = (y_1 + y_2) \cdot (y_1^{2k+2} - y_1^{2k}y_2 + \dots + (y_1y_2)^{k+1} + \dots - y_1y_2^{2k} + y_2^{2k+2})$$

$$S_{2k+3} = y_1^{2k+3} + y_2^{2k+3} = 10 \cdot (y_1^{2k+2} - y_1^{2k} + \dots + 1 + \dots - y_2^{2k} + y_2^{2k+2}) = 10 \cdot (S_{2k+2} - S_{2k} + \dots + S_4 - S_2 + 1)$$

$$n = \frac{S_{2k+3} - 10}{24} = \frac{10 \cdot (S_{2k+2} - S_{2k} + \dots + S_4 - S_2 + 1) - 10}{24} = \frac{10 \cdot (S_{2k+2} - S_{2k} + \dots + S_4 - S_2)}{24}$$

$$n = \frac{5 \cdot (S_{2k+2} - S_{2k} + \dots + S_4 - S_2)}{12}. \quad \text{Fie propoziția } P(k): S_{2k} \in M_{96} + 2. \quad \text{Verificare } n=0,$$

$$S_0 = 2 \in M_{96} + 2 \quad S_2 = y_1^2 + y_2^2 = (y_1 + y_2)^2 - 2y_1y_2 = 100 - 2 = 98 \in M_{96} + 2$$

Presupun că $P(k-1)$, $P(k)$ adevărat și demonstrez că $P(k+1)$ adevărat. Deci

$$P(k+1): S_{2k+2} \in M_{96} + 2$$

$$P(k+1): S_{2k+2} = y_1^{2k+2} + y_2^{2k+2} = (y_1^{2k} + y_2^{2k}) \cdot (y_1^2 + y_2^2) - y_1^{2k}y_2^2 - y_1^2y_2^{2k}$$

$$P(k+1): S_{2k+2} = (y_1^{2k} + y_2^{2k}) \cdot (y_1^2 + y_2^2) - y_1^2 y_2^2 y_1^{2k-2} - y_1^2 y_2^2 y_2^{2k-2} = S_{2k} \cdot S_2 - S_{2k-2}$$

$$P(k+1): S_{2k+2} = S_{2k} \cdot S_2 - S_{2k-2} = (M_{96} + 2) \cdot (M_{96} + 2) - (M_{96} + 2) = (M_{96} + 4) - (M_{96} + 2) = M_{96} + 2$$

Am aplicat principiul II al inducției matematice . Deci $S_{2k+2} - S_{2k} \in M_{96}$, șamd

$$S_4 - S_2 \in M_{96} \quad , \quad n = \frac{5 \cdot 96 \cdot f}{12} = 40 \cdot f : 40$$

, deci n este multiplu de 20 . Acesta a fost cazul cand $k+1=\text{par}$, adica $k=\text{impar}$. Analizez acum cazul când $k=\text{par}$.

$$S_{2k+3} = y_1^{2k+3} + y_2^{2k+3} = (y_1 + y_2) \cdot (y_1^{2k+2} - y_1^{2k+1} y_2 + \dots - y_1^{k+1} y_2^{k+1} + \dots - y_1 y_2^{2k+1} + y_2^{2k+2})$$

$$S_{2k+3} = y_1^{2k+3} + y_2^{2k+3} = (y_1 + y_2) \cdot (y_1^{2k+2} - y_1^{2k} y_1 y_2 + \dots - (y_1 y_2)^{k+1} + \dots - y_1 y_2 y_2^{2k} + y_2^{2k+2})$$

$$S_{2k+3} = y_1^{2k+3} + y_2^{2k+3} = 10 \cdot (y_1^{2k+2} - y_1^{2k} + \dots - 1 + \dots - y_2^{2k} + y_2^{2k+2}) = 10 \cdot (S_{2k+2} - S_{2k} + \dots + S_4 - S_2 - 1)$$

$$n = \frac{S_{2k+3} - 10}{24} = \frac{10 \cdot (S_{2k+2} - S_{2k} + \dots + S_4 - S_2 - 1) - 10}{24} = \frac{10 \cdot (S_{2k+2} - S_{2k} + \dots + S_2 - S_0)}{24}$$

$$n = \frac{5 \cdot (S_{2k+2} - S_{2k} + \dots + S_2 - S_0)}{12} = \frac{5 \cdot 96 \cdot g}{12} = 40 \cdot g \quad , \quad g \in N$$

deoarece este multiplu de 40 .

Bibliografie:

- 1)V.Alexandru , N.M. Gosoniu , Elemente de teoria numerelor , Ed Universității București, 1999.
- 2)A.Gica , L.Panaitopol ,O introducere in aritmetica și teoria numerelor , Ed Universității București 2001.

3. PROBLEME DATE LA CONCURSURILE ȘCOLARE DIN JUD. OLT, PROPUSE DE PROF. PIRNOG ELENA

Profesor: Pirog Elena

1.

a) Să se determine parametrul real m astfel încât:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 7} - mx \right)$ să fie finită și diferită de zero.

b) Fie l_1 și m_1 limita determinată la punctul a) și respectiv valoarea parametrului real m .

Arătați că funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{l_1 x^2 + m_1 x + 8}{(x-1)^2}, & x \neq 1 \\ \frac{41}{3}, & x = 1 \end{cases}$$

Are numai puncte de discontinuitate de speța a doua.

Soluție:

a)

$$\text{Notăm } f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 3} + \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 7} - mx$$

$$\text{Dacă } m \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

Deci se impune $m > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(\sqrt{x^2 + 4x + 3} - x \right) + \left(\sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 7} - x \right) - mx + 2x \right]$$

=

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x + 3 - x^2}{x \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} + x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x^2 + 7 - x^3}{x^2 \sqrt[3]{\left(1 + \frac{5}{x} + \frac{7}{x^3}\right)^2} + x^2 \sqrt[3]{1 + \frac{5}{x} + \frac{7}{x^3}} + x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - mx) \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(4 + \frac{3}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}} + 1\right)} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(5 + \frac{3}{x^2}\right)}{x^2 \left(\sqrt[3]{\left(1 + \frac{5}{x} + \frac{7}{x^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{5}{x} + \frac{7}{x^3}} + 1\right)} + \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - mx) \\
&= \frac{4}{2} + \frac{5}{3} + \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - mx) = \frac{11}{3} + \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - mx)
\end{aligned}$$

Pentru ca

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

să fie finită, trebuie ca $x(2 - m) = 0$, deci $2 - m = 0$ și $\Leftrightarrow m = 2$ și

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{11}{3}$$

b)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\frac{11}{3}x^2 + 2x + 8}{(x-1)^2}, & x \neq 1 \\ \frac{41}{3}, & x = 1 \end{cases}$$

Problema discontinuității se pune în $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{11}{3}x^2 + 2x + 8 \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{41}{3} \cdot \infty = \infty$$

Deci în $X = 1$, f este discontinuă de speța a doua.

Olimpiada de matematică, etapa locală (profil M_1)

– Slatina 2012 –

2.

Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & 5 & \dots & (2n-1) \\ 1^2 & 3^2 & 5^2 & \dots & (2n-1)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 3^{n-1} & 5^{n-1} & \dots & (2n-1)^{n-1} \end{pmatrix}$,

$$n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$$

Care este valoarea de adevăr a propoziției $(\exists m) \left[\det(A) : 2^m \right]$ unde $m \in \mathbb{N}, m > 2$

Soluție:

$$\det(A) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} [(2i-1) - (2j-1)] = \prod_{1 \leq j < i \leq n} 2(i-j)$$

Produsul $\prod_{1 \leq j < i \leq n} (i-j)$ are $1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ factori

Deci $\det(A) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \prod_{1 \leq j < i \leq n} (i-j)$. Deoarece $n(n-1):2$, există $m \in \mathbb{N}, m > 2$ astfel încât

$$\frac{n(n-1)}{2} = m, \text{ deci } \det A: 2^m$$

În concluzie, propoziția din enunț este adevărată.

Olimpiada de matematică, etapa locală (profil M_1)

– Slatina 2012 –

3.

1. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

a. Calculați A^n

b. Cât este a_{23} din A^{2010}

c. Rezolvați ecuația $X \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

2. Calculați valoarea parametrului real m astfel încât punctele $A(1,2); B(0,-1); C(m,1)$ să fie coliniare.

3. Determinați valoarea parametrului real a pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5[x], & x < 3 \\ a^2x^2 - 2, & x \geq 3 \end{cases}, \text{ are limită în punctul } x_0 = 3$$

Soluție

1.

$$a. A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deci $A^n = 0_3$ pentru $n \geq 1$

$$b. A^{2010} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Deci } a_{23} = 0$$

c. Pentru a avea loc înmulțirea avem: $X = (x \ y \ z)$

$$(x \ y \ z) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 3x - z = 2 \\ 9x - 3z = 6 \end{cases}, \text{ acest sistem se reduce la}$$

$$\text{ecuația } 3x - z = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2+z}{3}$$

Notând $y = \alpha, z = \beta$ soluția sistemului este $\left(\frac{2+\beta}{3}, \alpha, \beta\right)$

$$2. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -1 + 2m + m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{2}{3}$$

$$3. \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = 16$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = 9a^2 - 3$$

$$16 = 9a^2 - 2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}$$

*Concursul de matematică aplicată “Adolf Haimovici” etapa locală,
– Slatina 2010 –*

4. Se consideră matricele:

$$A_i = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(z_i) & \operatorname{Im}(z_i) & |z_i| \\ |z_i| & \operatorname{Re}(z_i) & \operatorname{Im}(z_i) \\ \operatorname{Im}(z_i) & |z_i| & \operatorname{Re}(z_i) \end{pmatrix}$$

Unde z_i sunt rădăcinile ecuației $x^2 + x + 1 = 0$

a) Calculați $\left(\sum_i^2 \det(A_i)\right)^{2010}$

b) Care este afixul punctului $M(n, p)$ unde $n = \operatorname{Tr}(A_i)$; $p = \sqrt{3} \operatorname{Re}(z_i)$

c) Calculați următoarea limită:

$$\lim_{x \rightarrow |z|} \left[\cos^{2k+1}(x - |z|) \right]^{\frac{1}{(x-1)^2}}, \text{ unde } z \text{ este afixul punctului } M \text{ de la b), iar } k \in \mathbb{N}^*$$

Soluție:

a)

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}; A_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\det(A_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + 1^3 + \frac{3\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8} + 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\det(A_2) = -\frac{1}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8} + 1 - \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\left(\sum_i^2 \det(A_i)\right)^{2010} = \left(\frac{7}{4}\right)^{2010}$$

$$b) \quad n = -\frac{3}{2}, \quad p = \frac{-\sqrt{3}}{2}, \quad z = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$c) \quad |z| = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} [\cos^{2k+1}(x-1)]^{\frac{1}{(x-1)^2}} &= \left\{ \lim_{x \rightarrow 1} [1 + \cos^{2k+1}(x-1) - 1]^{\frac{1}{\cos^{2k+1}(x-1) - 1}} \right\}^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos^{2k+1}(x-1) - 1}{(x-1)^2}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \sin^2 \frac{x-1}{2}}{(x-1)^2} \cdot (2k+1)} = e^{-\frac{2k+1}{2}} \end{aligned}$$

*Olimpiada de matematică, etapa locală (profil M₁)**– Slatina 2012 –*

4. SOLUȚIA PROBLEMEI 304 DIN LA GACETA**TITU ZVONARU, COMĂNEȘTI ȘI NECULAI STANCIU, BUZĂU****Problema 304 - La Gaceta 2/2016**

Fie D mijlocul medianei AM a triunghiului ABC . Dacă mediatoarea segmentului DM trece prin ortocentrul H , să se demonstreze că $\angle BDC = \pi/2$.

Marcel Chiriță

Soluție: Vom folosi problema O:936 din G.M.-B nr. 1/2001, propusă de Gheorghe Szollosy:

" Fie ABC un triunghi cu ortocentrul H și BB' , CC' înălțimi. Dacă dreapta $B'C'$ intersectează prelungirea laturii BC în punctul P și M este mijlocul lui BC , să se demonstreze că $PH \perp AM$. "

Presupunem că $b > c$ și notăm $m = AM$. Cu teorema lui Menelaus avem

$$(PB/PC)(B'C/B'A)(C'A/C'B) = 1 \Rightarrow PB = \frac{a \cos B}{(b \cos C - c \cos B)}$$

și atunci

$$PM = PB + a/2 = \frac{a^2}{2(b \cos C - c \cos B)} = \frac{a^3}{2(b^2 - c^2)}.$$

Deoarece $\cos(\angle BMA) = \frac{a^2/4 + m^2 - c^2}{(am)} = \frac{(b^2 - c^2)}{(2am)}$ și $\cos(\angle BMA) = \frac{DM}{(2PM)}$, obținem

$$m(b^2 - c^2)/a^3 = (b^2 - c^2)/(am) \Rightarrow m = a.$$

În triunghiul BDC , mediana BM este jumătate din latura BC , deci triunghiul este dreptunghic cu $\angle BDC = \pi/2$.

Comentariu: Pentru completitudine, iată o demonstrație (diferită de cea cu coordonate din GM-B nr. 11/2001, dată de Gheorghe Andrei).

Fie T simetricul lui H față de M ; se știe că T aparține cercului circumscris. Cum și simetricul lui H față de BC aparține aceluiași cerc deducem că AT este diametru. Atunci proiecția A'' a lui A pe HM aparține cercului circumscris.

- BC este axa radicală a cercurilor $BCB'C'$ și ABC

- $B'C'$ este axa radicală a cercurilor $BCB'C'$ și $AC'HB'$.

Rezultă că punctul P este centrul radical al cercurilor ABC , $BCB'C'$ și $AC'HB'$. Dar axa radicală a cercurilor $AC'HB'$ și ABC este AA'' , deci punctele A , A'' , P sunt coliniare. Cum $MH \perp AP$, deducem că H este ortocentrul triunghiului APM , adică $PH \perp AM$.

5. SOLUȚII PROBLEMA LUNII Iunie 2016**Autor:** Prof. Gheorghe ROTARIU

Fie triunghiul ABC , cu O și R , centrul, respectiv, raza cercului circumscris triunghiului, iar S aria sa.

1. Să se arate că are loc relația:

$$a^2 \cdot \operatorname{ctg} A \cdot \overrightarrow{OA} + b^2 \cdot \operatorname{ctg} B \cdot \overrightarrow{OB} + c^2 \cdot \operatorname{ctg} C \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0} \quad (\alpha)$$

2. Fie $m \in \mathbb{R}$, $m \geq 4R^2 S$. Aflați locul geometric al punctelor N din planul triunghiului ABC , pentru care:

$$a^2 \cdot \operatorname{ctg} A \cdot NA^2 + b^2 \cdot \operatorname{ctg} B \cdot NB^2 + c^2 \cdot \operatorname{ctg} C \cdot NC^2 = m \quad (\beta)$$

3. Arătați că:

$$\sum_{k=1}^n A^k = x_n \cdot A, \quad (x_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}_+^*$$

și calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$

unde $n \in \mathbb{N}^*$ și

$$A = \begin{pmatrix} a^2 \operatorname{ctg} A + b^2 \operatorname{ctg} B + c^2 \operatorname{ctg} C & \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \\ 2R^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

notațiile fiind cele uzuale.

Soluție AUTOR:

Punctul 1.

Cazul I. Dacă triunghiul ABC este dreptunghic cu (să presupunem, fără a restrânge generalitatea) $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, atunci $\operatorname{ctg} A = 0$ și relația de demonstrat devine:

$$b^2 \cdot \operatorname{ctg} B \cdot \overrightarrow{OB} + c^2 \cdot \operatorname{ctg} C \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0} \quad (1)$$

În acest caz, punctul O coincide cu mijlocul ipotenuzei BC , ca atare $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC}$, deci relația de demonstrat (1) devine:

$$(b^2 \cdot \operatorname{ctg} B - c^2 \cdot \operatorname{ctg} C) \cdot \overrightarrow{OB} = \vec{0} \quad (1')$$

echivalentă cu:

$$b^2 \cdot \operatorname{ctg} B - c^2 \cdot \operatorname{ctg} C = 0 \quad (1'')$$

ceea ce este evident adevărată ($b^2 \cdot \operatorname{ctg} B - c^2 \cdot \operatorname{ctg} C = b^2 \cdot \frac{c}{b} - c^2 \cdot \frac{b}{c} = bc - cb = 0$)

Cazul II. Presupunem că triunghiul ABC nu este dreptunghic. Atunci $\operatorname{ctg} A, \operatorname{ctg} B, \operatorname{ctg} C \neq 0$.

Presupunem cunoscute formulele trigonometrice (notațiile fiind cele uzuale), valabile în orice triunghi ABC :

$$(2) \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$(3) \quad R = \frac{abc}{4S}$$

$$(4) \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ (și analoagele).}$$

$$(5) \quad S = \frac{bc \sin A}{2} \text{ (și analoagele),}$$

$$(6) \quad b^2 + c^2 - a^2 = 4S \cdot \operatorname{ctg} A \text{ (și analoagele).}$$

Demonstrație (6):

$$\text{i. } m(\sphericalangle A) = 90^\circ \Rightarrow \operatorname{ctg} A = 0 \Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = 0 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 \text{ (A)}$$

$$\text{ii. } m(\sphericalangle A) \neq 90^\circ \Rightarrow 4S \cdot \operatorname{ctg} A \stackrel{(5)}{=} 2bc \sin A \cdot \frac{\cos A}{\sin A} \stackrel{(4)}{=} 2bc \cdot \cos A = b^2 + c^2 - a^2 \quad \square$$

precum și:

$$(7) \quad \sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Revenim acum la relația de demonstrat (α). Vom exprima, pentru comoditatea scrierii, doar

$a^2 \cdot \operatorname{ctg} A \cdot \overrightarrow{OA}$ obținând expresii similare pentru ceilalți doi termeni.

$$\begin{aligned} a^2 \cdot \operatorname{ctg} A \cdot \overrightarrow{OA} &\stackrel{(6)}{=} a^2 \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} \cdot \overrightarrow{OA} \stackrel{(4)}{=} a^2 \cdot \frac{1}{4S} \cdot 2bc \cos A \cdot \overrightarrow{OA} = \\ &= 2a \cos A \cdot \frac{abc}{4S} \cdot \overrightarrow{OA} \stackrel{(2)}{=} 2 \cdot 2R \sin A \cos A \cdot \frac{abc}{4S} \cdot \overrightarrow{OA} \stackrel{(7)}{=} \sin 2A \cdot 2R \cdot \frac{abc}{4S} \cdot \overrightarrow{OA} \stackrel{(3)}{=} \\ &\stackrel{(3)}{=} \sin 2A \cdot 2R \cdot R \cdot \overrightarrow{OA} = 2R^2 \sin 2A \cdot \overrightarrow{OA}. \end{aligned}$$

Așadar, relația de demonstrat (α) devine:

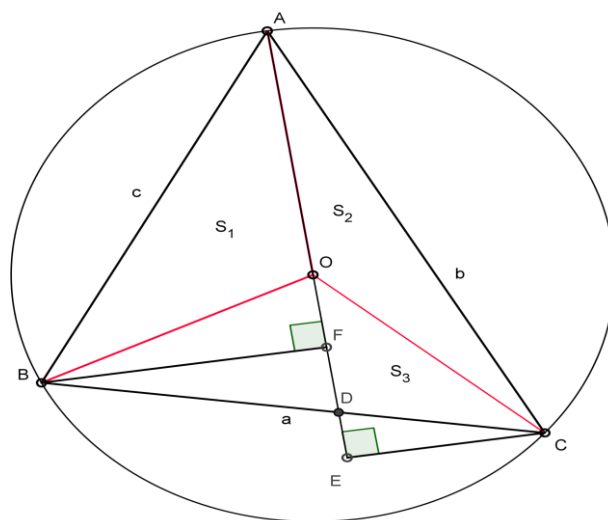
$$2R^2 \left(\sin 2A \cdot \overrightarrow{OA} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{OB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{OC} \right) = \vec{0} \quad (\alpha')$$

adică:

$$\sin 2A \cdot \overrightarrow{OA} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{OB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0} \quad (\alpha'')$$

Vom căuta deci să demonstrăm relația (α'')

Cazul II. a) Triunghiul ABC ascuțitunghic



Avem următoarele notații pe Figura 1: **Figura 1**

S_1 - suprafața triunghiulară AOB ;

S_2 - suprafața triunghiulară AOC ;

S_3 - suprafața triunghiulară OBC ;

S - suprafața triunghiulară ABC ;

$\{D\} = AO \cap BC$, $D \in [BC]$;

$CE, BF \perp AO$, $E, F \in AO$.

Ideea este să exprimăm vectorul $\overrightarrow{OD}$ în două moduri, o dată în funcție de vectorii $\overrightarrow{OB}$ și $\overrightarrow{OC}$ și a doua oară în funcție de vectorul $\overrightarrow{OA}$, apoi vom egala expresiile.

Notăm $\frac{CD}{DB} = k$, adică D este punctul care împarte segmentul CB în raportul k . Rezultă de aici:

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{1+k} \overrightarrow{OC} + \frac{k}{1+k} \overrightarrow{OB} \quad (8)$$

Pe de altă parte,

$$k = \frac{\mathcal{A}_{[S_2]}}{\mathcal{A}_{[S_1]}} \quad (9)$$

unde prin $\mathcal{A}_{[S_2]}$ am notat aria suprafeței S_2 (analog pentru celelalte suprafețe).

Demonstrație.

$$\frac{\mathcal{A}_{[s_2]}}{\mathcal{A}_{[s_1]}} = \frac{\frac{AO \cdot CE}{2}}{\frac{AO \cdot BF}{2}} = \frac{CE}{BF} = \frac{CD}{BD} = k \text{ (din asemănarea triunghiurilor } CED \text{ și } BFD \text{)}$$

Prin urmare, înlocuind (9) în (8), vom avea:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \frac{1}{1 + \frac{\mathcal{A}_{[s_2]}}{\mathcal{A}_{[s_1]}}} \cdot \overrightarrow{OC} + \frac{\frac{\mathcal{A}_{[s_2]}}{\mathcal{A}_{[s_1]}}}{1 + \frac{\mathcal{A}_{[s_2]}}{\mathcal{A}_{[s_1]}}} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{\mathcal{A}_{[s_1]}}{\mathcal{A}_{[s_1]} + \mathcal{A}_{[s_2]}} \cdot \overrightarrow{OC} + \\ &+ \frac{\mathcal{A}_{[s_2]}}{\mathcal{A}_{[s_1]} + \mathcal{A}_{[s_2]}} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{\mathcal{A}_{[s]} - \mathcal{A}_{[s_3]}} \left(\mathcal{A}_{[s_1]} \cdot \overrightarrow{OC} + \mathcal{A}_{[s_2]} \cdot \overrightarrow{OB} \right) \quad (10) \end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$\frac{\mathcal{A}_{[s]}}{\mathcal{A}_{[s_3]}} = \frac{\frac{AD}{2} \cdot (BF + CE)}{\frac{OD}{2} \cdot (BF + CE)} = \frac{AD}{OD} \quad (11)$$

Atunci:

$$\frac{AO}{OD} = \frac{AD - OD}{OD} = \frac{AD}{OD} - 1 \stackrel{(11)}{=} \frac{\mathcal{A}_{[s]}}{\mathcal{A}_{[s_3]}} - 1 = \frac{\mathcal{A}_{[s]} - \mathcal{A}_{[s_3]}}{\mathcal{A}_{[s_3]}} \quad (12)$$

Din (12) rezultă că

$$\overrightarrow{OD} = -\frac{\mathcal{A}_{[s_3]}}{\mathcal{A}_{[s]} - \mathcal{A}_{[s_3]}} \cdot \overrightarrow{OA} \quad (13)$$

Din (10) și (13) rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{A}_{[s]} - \mathcal{A}_{[s_3]}} \left(\mathcal{A}_{[s_1]} \cdot \overrightarrow{OC} + \mathcal{A}_{[s_2]} \cdot \overrightarrow{OB} \right) &= -\frac{\mathcal{A}_{[s_3]}}{\mathcal{A}_{[s]} - \mathcal{A}_{[s_3]}} \cdot \overrightarrow{OA} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{\mathcal{A}_{[s]} - \mathcal{A}_{[s_3]}} \left(\mathcal{A}_{[s_1]} \cdot \overrightarrow{OC} + \mathcal{A}_{[s_2]} \cdot \overrightarrow{OB} + \mathcal{A}_{[s_3]} \cdot \overrightarrow{OA} \right) &= \vec{0} \Rightarrow \\ \mathcal{A}_{[s_3]} \cdot \overrightarrow{OA} + \mathcal{A}_{[s_1]} \cdot \overrightarrow{OC} + \mathcal{A}_{[s_2]} \cdot \overrightarrow{OB} &= \vec{0} \quad (14) \end{aligned}$$

$$\text{Dar, } \mathcal{A}_{[s_3]} = \frac{OB \cdot OC \cdot \sin(\sphericalangle BOC)}{2} = \frac{R \cdot R \cdot \sin 2A}{2} = \frac{R^2}{2} \cdot \sin 2A \quad (15)$$

(deoarece $m(\sphericalangle BOC) = m(\sphericalangle BC) = 2m(\sphericalangle A)$). Au loc și analoagele. În acest fel, relația (14) devine:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A}_{[s_3]} \cdot \overrightarrow{OA} + \mathcal{A}_{[s_1]} \cdot \overrightarrow{OC} + \mathcal{A}_{[s_2]} \cdot \overrightarrow{OB} = \vec{0} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{R^2}{2} \left(\sin 2A \cdot \overrightarrow{OA} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{OB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{OC} \right) = \vec{0} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \sin 2A \cdot \overrightarrow{OA} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{OB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0} \quad \square
\end{aligned}$$

Comentariu. În articolul „O relație vectorială” de *Cristina și Laurențiu Hometcovschi* din Gazeta Matematică nr. 11/2007, este prezentată o altă demonstrație a relației (14), valabilă pentru orice punct M , **interior triunghiului**, nu numai pentru centrul cercului circumscris, iar egalitatea $\sin 2A \cdot \overrightarrow{OA} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{OB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ este demonstrată ca o aplicație imediată a relației (14). De fapt, unul din rezultatele articolului din gazetă este sursa acestei probleme.

Cazul II. b) Triunghiul ABC obtuzunghic, cu $m(\sphericalangle A) > 90^\circ$

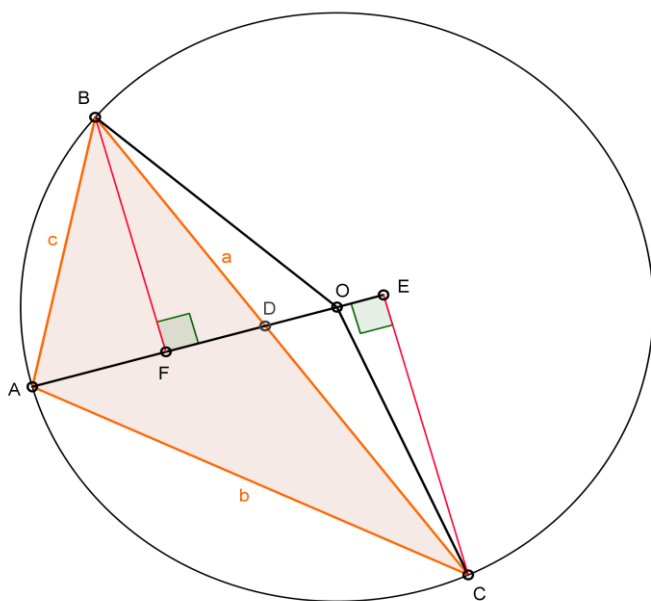


Figura 2

La fel ca în cazul anterior, notăm $\frac{CD}{DB} = k$, adică D este punctul care împarte segmentul CB în raportul k . Rezultă de aici:

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{1+k} \overrightarrow{OC} + \frac{k}{1+k} \overrightarrow{OB} \quad (15)$$

Pe de altă parte,

$$k = \frac{\mathcal{A}_{[OCA]}}{\mathcal{A}_{[OBA]}} \quad (16)$$

Demonstrație.

$$\frac{\mathcal{A}_{[OCA]}}{\mathcal{A}_{[OBA]}} = \frac{\frac{AO \cdot CE}{2}}{\frac{AO \cdot BF}{2}} = \frac{CE}{BF} = \frac{CD}{DB} = k \quad (\text{din asemănarea triunghiurilor } CED \text{ și } BFD)$$

Prin urmare, înlocuind (16) în (15), vom avea:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \frac{1}{1 + \frac{\mathcal{A}_{[OCA]}}{\mathcal{A}_{[OAB]}}} \cdot \overrightarrow{OC} + \frac{\frac{\mathcal{A}_{[OCA]}}{\mathcal{A}_{[OAB]}}}{1 + \frac{\mathcal{A}_{[OCA]}}{\mathcal{A}_{[OAB]}}} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{\mathcal{A}_{[OAB]}}{\mathcal{A}_{[OAB]} + \mathcal{A}_{[OCA]}} \cdot \overrightarrow{OC} + \\ &+ \frac{\mathcal{A}_{[OCA]}}{\mathcal{A}_{[OAB]} + \mathcal{A}_{[OCA]}} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{\mathcal{A}_{[OBAC]}} \left(\mathcal{A}_{[OAB]} \cdot \overrightarrow{OC} + \mathcal{A}_{[OCA]} \cdot \overrightarrow{OB} \right) \quad (17) \end{aligned}$$

Dar,

$$\frac{\mathcal{A}_{[OBAC]}}{\mathcal{A}_{[OBC]}} = \frac{\frac{AO}{2} (BF + CE)}{\frac{OD}{2} (BF + CE)} = \frac{AO}{OD} \Rightarrow \overrightarrow{OD} = \frac{\mathcal{A}_{[OBC]}}{\mathcal{A}_{[OBAC]}} \cdot \overrightarrow{OA} \quad (18)$$

Din (17) și (18) rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}_{[OBC]}}{\mathcal{A}_{[OBAC]}} \cdot \overrightarrow{OA} &= \frac{1}{\mathcal{A}_{[OBAC]}} \left(\mathcal{A}_{[OAB]} \cdot \overrightarrow{OC} + \mathcal{A}_{[OCA]} \cdot \overrightarrow{OB} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{A}_{[OBC]} \cdot \overrightarrow{OA} &= \mathcal{A}_{[OAB]} \cdot \overrightarrow{OC} + \mathcal{A}_{[OCA]} \cdot \overrightarrow{OB} \Rightarrow \\ \text{Observație} \Rightarrow -\frac{1}{2} R^2 \sin 2A \cdot \overrightarrow{OA} &= \frac{1}{2} R^2 \sin 2C \cdot \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} R^2 \sin 2B \cdot \overrightarrow{OB} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin 2A \cdot \overrightarrow{OA} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{OB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{OC} &= \vec{0} \quad \square \end{aligned}$$

Observație.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{[OBC]} &= \frac{OB \cdot OC \cdot \sin(\sphericalangle COB)}{2} = \frac{R^2}{2} \sin(\sphericalangle BOD + \sphericalangle COD) = \frac{R^2}{2} \sin(2C + 2B) = \\ &= \frac{R^2}{2} \sin(2(\pi - A)) = \frac{R^2}{2} \sin(2\pi - 2A) = \frac{R^2}{2} \sin(-2A) = -\frac{R^2}{2} \sin 2A \end{aligned}$$

Punctul 2.

Presupunem cunoscute următoarele formule trigonometrice:

- I. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$
 II. $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$, cu notațiile uzuale.

Avem, de asemenea, următoarele rezultate referitoare la produsul scalar a doi vectori:

Propoziție. Pentru orice vectori $\vec{u}, \vec{v}$ au loc:

- 1) $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$
 2) $\vec{u} \cdot \vec{0} = 0$

Vom căuta să exprimăm pe NA^2 , rezultate similare având loc și pentru NB^2 și NC^2 .

$$NA^2 = \left| \overrightarrow{NA} \right|^2 = \left| \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OA} \right|^2 = \left| \overrightarrow{NO} \right|^2 + \left| \overrightarrow{OA} \right|^2 + 2 \cdot \overrightarrow{NO} \cdot \overrightarrow{OA} = NO^2 + R^2 + 2 \cdot \overrightarrow{NO} \cdot \overrightarrow{OA}$$

Cu această exprimare, la care se adaugă analoagele, vom avea:

$$\begin{aligned} & a^2 \cdot \operatorname{ctg} A \cdot NA^2 + b^2 \cdot \operatorname{ctg} B \cdot NB^2 + c^2 \cdot \operatorname{ctg} C \cdot NC^2 = \\ & = (NO^2 + R^2) (a^2 \cdot \operatorname{ctg} A + b^2 \cdot \operatorname{ctg} B + c^2 \cdot \operatorname{ctg} C) + \\ & + 2 \cdot \overrightarrow{NO} \cdot \left(a^2 \cdot \operatorname{ctg} A \cdot \overrightarrow{OA} + b^2 \cdot \operatorname{ctg} B \cdot \overrightarrow{OB} + c^2 \cdot \operatorname{ctg} C \cdot \overrightarrow{OC} \right) = \\ & = (NO^2 + R^2) (a^2 \cdot \operatorname{ctg} A + b^2 \cdot \operatorname{ctg} B + c^2 \cdot \operatorname{ctg} C) + 2 \cdot \overrightarrow{NO} \cdot \vec{0} = \\ & = (NO^2 + R^2) (a^2 \cdot \operatorname{ctg} A + b^2 \cdot \operatorname{ctg} B + c^2 \cdot \operatorname{ctg} C) = \\ & = (NO^2 + R^2) \cdot 2R^2 (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = \\ & = (NO^2 + R^2) \cdot 2R^2 \cdot 4 \sin A \sin B \sin C = \\ & = (NO^2 + R^2) \cdot 2R^2 \cdot \frac{2S}{R^2} = (NO^2 + R^2) \cdot 4S \end{aligned}$$

Așadar, vom avea:

$$(NO^2 + R^2) \cdot 4S = m \Rightarrow NO^2 \cdot 4S = m - 4R^2S \Rightarrow NO^2 = \frac{m - 4R^2S}{4S} \quad (19)$$

Relația (19) ne permite să stabilim locul geometric al punctelor N și anume:

- a) Dacă $m = 4R^2S$, atunci locul geometric este punctul O ;
 b) Dacă $m > 4R^2S$, atunci locul geometric este un cerc concentric cu cercul circumscris triunghiului ABC $\square$

Punctul 3.

Avem relația lui *Hamilton-Chaley*:

„Oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, are loc: $A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2$.”

Calculăm $\det(A)$.

$$\begin{vmatrix} \sum_{a,A} a^2 \text{ctg} A & \sum_A \sin 2A \\ 2R^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 \text{ctg} A + b^2 \text{ctg} B + c^2 \text{ctg} C & \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \\ 2R^2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= a^2 \text{ctg} A + b^2 \text{ctg} B + c^2 \text{ctg} C - 2R^2 (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 0$$

(conform punctelor precedente). Rezultă atunci din Relația lui *Hamilton-Chaley* că:

$$A^2 = \text{tr}(A) \cdot A. \quad (20)$$

Se demonstrează ușor prin inducție matematică că are loc:

$$A^n = [\text{tr}(A)]^{n-1} A, n \geq 2. \quad (21)$$

adică, pentru matricea noastră și, ținând cont de rezultatele demonstrate la punctele anterioare, vom avea:

$$A^n = (4S+1)^{n-1} A, \forall n \geq 2. \quad (22)$$

Cu aceasta,

$$\sum_{k=1}^n A^k = A^1 + A^2 + A^3 + \dots + A^n = A + (4S+1)A + (4S+1)^2 A + \dots + (4S+1)^{n-1} A =$$

$$= \left[1 + (4S+1) + (4S+1)^2 + \dots + (4S+1)^{n-1} \right] \cdot A = \frac{(4S+1)^n - 1}{4S} \cdot A \quad (23)$$

Considerăm:

$$x_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(4S+1)^n - 1}{4S}, n \geq 1.$$

Se observă că $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ $\forall n \geq 1$.

Pentru calculul $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$ vom utiliza *Criteriul Cauchy-d'Alembert* (criteriul radicalului, care este, de fapt, o consecință a lemei lui Stolz).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4S+1)^{n+1} - 1}{(4S+1)^n - 1} \stackrel{\infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4S+1)^n \cdot (4S+1) - 1}{(4S+1)^n - 1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4S+1)^n \left[4S+1 - \frac{1}{(4S+1)^n} \right]}{(4S+1)^n \left[1 - \frac{1}{(4S+1)^n} \right]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4S+1 - \frac{1}{(4S+1)^n}}{1 - \frac{1}{(4S+1)^n}} = 4S+1$$

Conform criteriului radicalului $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = 4S+1 \quad \square$

Alte soluții:**1. Profesor Biro Istvan,**

La rezolvarea problemei vom folosi următoarelor rezultate și relații cunoscute:

(1) Pentru orice punct M din interiorul triunghiului ABC are loc relația:

$$S_{MBC} \cdot \overrightarrow{MA} + S_{MAC} \cdot \overrightarrow{MB} + S_{MAB} \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

(2) În orice triunghi ABC au loc relațiile:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \frac{S}{2R^2} \quad (2.1)$$

$$a^2 \operatorname{ctg} A = 2R^2 \sin 2A, b^2 \operatorname{ctg} B = 2R^2 \sin 2B, c^2 \operatorname{ctg} C = 2R^2 \sin 2C \quad (2.2)$$

(3) Dacă $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de numere pozitive și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, atunci există $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ și este egală cu l .

1. În enunțul problemei nu este specificat dacă triunghiul ABC este ascuțitunghic sau obtuzunghic, deci trebuie să studiem două cazuri:

- Dacă triunghiul este ascuțitunghic atunci O se află în interiorul triunghiului și conform (1) are loc relația $S_{OBC} \cdot \overrightarrow{OA} + S_{OAC} \cdot \overrightarrow{OB} + S_{OAB} \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, unde

$$S_{OBC} = \frac{R^2 \sin 2A}{2} \text{ și analoagele. Având în vedere și (2.2) rezultă ușor relația:}$$

$$a^2 \cdot \operatorname{ctg} A \cdot \overrightarrow{OA} + b^2 \cdot \operatorname{ctg} B \cdot \overrightarrow{OB} + c^2 \cdot \operatorname{ctg} C \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}; \quad (\alpha)$$

- Dacă triunghiul este obtuzunghic (de exemplu în B) atunci O se află în exteriorul triunghiului și putem aplica (1) în triunghiul $AB'C$ unde BB' este diametru în cercul circumscris triunghiului ABC și avem:

$$S_{OB'C} \cdot \overrightarrow{OA} + S_{OAC} \cdot \overrightarrow{OB'} + S_{OAB'} \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}, \text{ unde } \overrightarrow{OB'} = -\overrightarrow{OB},$$

$$S_{OB'C} = S_{OBC} = \frac{R^2 \sin 2A}{2}, S_{OAB'} = S_{OAB} = \frac{R^2 \sin 2C}{2},$$

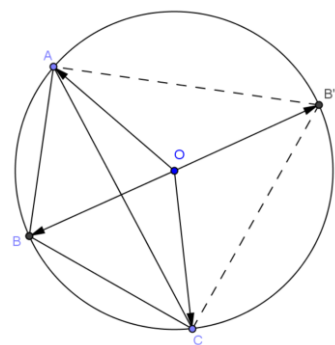
$$S_{OAC} = \frac{R^2 \sin(2A + 2C)}{2} = \frac{R^2 \sin(2\pi - 2B)}{2} = -\frac{R^2 \sin 2B}{2},$$

deci obținem

$$\sin 2A \cdot \overrightarrow{OA} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{OB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}, \quad (\alpha')$$

relație echivalentă cu (α) .

2. Avem $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OA}$, ridicând la pătrat rezultă $NA^2 = NO^2 + OA^2 + 2 \cdot \overrightarrow{NO} \cdot \overrightarrow{OA}$; procedăm la fel pentru NB^2 , NC^2 , având în vedere (2.1) și (α') obținem:



$$\sin 2A.NA^2 + \sin 2B.NB^2 + \sin 2C.NC^2 = \frac{2S}{R^2}NO^2 + R^2 \frac{2S}{R^2} + 2.\overrightarrow{NO}.(\sin 2A.\overrightarrow{OA} + \sin 2B.\overrightarrow{OB} + \sin 2C.\overrightarrow{OC})$$

$$\text{adică } \frac{m}{2R^2} = \frac{2S}{R^2}NO^2 + 2S \Leftrightarrow m - 4R^2S = 4S.NO^2 \Leftrightarrow NO^2 = \frac{m - 4R^2S}{4S} \geq 0.$$

În concluzie NO este constantă și N se află pe cercul cu centrul în O și de rază $\sqrt{\frac{m - 4R^2S}{4S}}$.

3. Din relațiile (2) rezultă că matricea A poate fi scrisă sub forma $A = \begin{pmatrix} 4S & \frac{2S}{R^2} \\ 2R^2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & y \\ x & 1 \end{pmatrix}$,

unde am notat $x = 2R^2$, $y = \frac{2S}{R^2}$. Observăm că $A^2 = (xy + 1)A$ de unde obținem ușor formula

$$A^n = (xy + 1)^{n-1}A \text{ pentru orice } n \geq 1, \text{ deci } \sum_{k=1}^n A^k = \sum_{k=1}^n (xy + 1)^{k-1}A = \frac{(xy + 1)^n - 1}{xy}A = x_n A.$$

Deoarece $\frac{(4S + 1)^n - 1}{4S} = x_n > 0, n \geq 1$, conform (3) avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4S + 1)^{n+1} - 1}{(4S + 1)^n - 1} = 4S + 1$,
deci există și $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = 4S + 1$.

2. Profesor Serban George-Florin

$\triangle ABC$, H ortocentrul $\triangle ABC$, $[AD]$ înălțime. În $\triangle AOD$, $\overrightarrow{OH} = \frac{\overrightarrow{OA} + k_1 \overrightarrow{OD}}{1 + k_1}$,

$$k_1 = \frac{AH}{DH},$$

$$AH = 2R \cos A, \triangle BHD, \sin(90^\circ - C) = \frac{DH}{BH} = \cos C = \frac{DH}{2R \cos B}, \quad DH = 2R \cos B \cos C,$$

$$BH = 2R \cos B, CH = 2R \cos C, k_1 = \frac{AH}{DH} = \frac{2R \cos A}{2R \cos B \cos C} = \frac{\cos A}{\cos B \cos C}, \quad \triangle BHD,$$

$$\cos(90^\circ - C) = \frac{BD}{BH} = \sin C = \frac{BD}{2R \cos B}, BD = 2R \sin C \cos B,$$

$$\triangle CHD, \cos(90^\circ - B) = \frac{CD}{CH} = \sin B = \frac{CD}{2R \cos C}, DC = 2R \sin B \cos C,$$

$$k = \frac{BD}{DC} = \frac{2R \sin C \cos B}{2R \sin B \cos C} = \frac{\sin C \cos B}{\sin B \cos C},$$

$$\overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{OB} + k \overrightarrow{OD}}{1 + k} = \frac{\overrightarrow{OB} + \frac{\sin C \cos B}{\sin B \cos C} \overrightarrow{OD}}{1 + \frac{\sin C \cos B}{\sin B \cos C}} = \frac{(\sin B \cos C) \overrightarrow{OB} + (\sin C \cos B) \overrightarrow{OD}}{\sin B \cos C + \sin C \cos B}$$

$$\overrightarrow{OD} = \frac{(\sin B \cos C)\overrightarrow{OB} + (\sin C \cos B)\overrightarrow{OD}}{\sin(B+C)} = \frac{(\sin B \cos C)\overrightarrow{OB} + (\sin C \cos B)\overrightarrow{OD}}{\sin(A)},$$

$$\sin(B+C) = \sin(180^\circ - A) = \sin A$$

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\overrightarrow{OA} + k_1 \overrightarrow{OD}}{1+k_1} = \frac{\overrightarrow{OA} + \frac{\cos A}{\cos B \cos C} \overrightarrow{OD}}{1 + \frac{\cos A}{\cos B \cos C}} = \frac{(\cos B \cos C)\overrightarrow{OA} + (\cos A)\overrightarrow{OD}}{\cos B \cos C + \cos A} = \frac{(\cos B \cos C)\overrightarrow{OA} + (\cos A)\overrightarrow{OD}}{\sin B \sin C}$$

$$\cos B \cos C + \cos A = \cos B \cos C + \cos((180^\circ - (B+C))) = \cos B \cos C - \cos(B+C) = \sin B \sin C$$

,

$$\overrightarrow{OH} = \left(\frac{\cos B \cos C}{\sin B \sin C}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{\cos A}{\sin B \sin C} \cdot \frac{\sin B \cos C}{\sin A}\right)\overrightarrow{OB} + \left(\frac{\cos A}{\sin B \sin C} \cdot \frac{\sin C \cos B}{\sin A}\right)\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OH} = \left(\frac{\cos B \cos C}{\sin B \sin C}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{\cos A \cos C}{\sin A \sin C}\right)\overrightarrow{OB} + \left(\frac{\cos A \cos B}{\sin A \sin B}\right)\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \quad (\text{Relatia lui$$

Sylvester).

$$\left(1 - \frac{\cos B \cos C}{\sin B \sin C}\right)\overrightarrow{OA} + \left(1 - \frac{\cos A \cos C}{\sin A \sin C}\right)\overrightarrow{OB} + \left(1 - \frac{\cos A \cos B}{\sin A \sin B}\right)\overrightarrow{OC} = \vec{0},$$

$$\left(\frac{\sin B \sin C - \cos B \cos C}{\sin B \sin C}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{\sin A \sin C - \cos A \cos C}{\sin A \sin C}\right)\overrightarrow{OB} + \left(\frac{\sin A \sin B - \cos A \cos B}{\sin A \sin B}\right)\overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$$\left(\frac{-\cos(B+C)}{\sin B \sin C}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{-\cos(A+C)}{\sin A \sin C}\right)\overrightarrow{OB} + \left(\frac{-\cos(A+B)}{\sin A \sin B}\right)\overrightarrow{OC} = \vec{0},$$

$$\left(\frac{\cos(A)}{\sin B \sin C}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{\cos(B)}{\sin A \sin C}\right)\overrightarrow{OB} + \left(\frac{\cos(C)}{\sin A \sin B}\right)\overrightarrow{OC} = \vec{0},$$

$$-\cos(B+C) = -\cos(180^\circ - A) = \cos A,$$

$$(\sin A \cos A)\overrightarrow{OA} + (\sin B \cos B)\overrightarrow{OB} + (\sin C \cos C)\overrightarrow{OC} = \vec{0},$$

$$(4R^2 \sin A \cos A)\overrightarrow{OA} + (4R^2 \sin B \cos B)\overrightarrow{OB} + (4R^2 \sin C \cos C)\overrightarrow{OC} = \vec{0},$$

$$\left(\frac{a^2}{\sin^2 A} \sin A \cos A\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{b^2}{\sin^2 B} \sin B \cos B\right)\overrightarrow{OB} + \left(\frac{c^2}{\sin^2 C} \sin C \cos C\right)\overrightarrow{OC} = \vec{0}, \text{ am aplicat}$$

$$\text{teorema sinusurilor, } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

$$(a^2 \operatorname{ctg} A)\overrightarrow{OA} + (b^2 \operatorname{ctg} B)\overrightarrow{OB} + (c^2 \operatorname{ctg} C)\overrightarrow{OC} = \vec{0}, (A).$$

$$2) (a^2 \operatorname{ctg} A) NA^2 + (b^2 \operatorname{ctg} B) NB^2 + (c^2 \operatorname{ctg} C) NC^2 = m, \quad m \geq 4R^2 S,$$

$$\text{Daca } N = O, (a^2 \operatorname{ctg} A) OA^2 + (b^2 \operatorname{ctg} B) OB^2 + (c^2 \operatorname{ctg} C) OC^2 = m,$$

$$R^2 (a^2 \operatorname{ctg} A + b^2 \operatorname{ctg} B + c^2 \operatorname{ctg} C) = R^2 [4R^2 \sin^2 A \operatorname{ctg} A + 4R^2 \sin^2 B \operatorname{ctg} B + 4R^2 \sin^2 C \operatorname{ctg} C] = m,$$

$$\text{Am aplicat teorema sinusurilor, } a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C,$$

$$R^2 \cdot [4R^2 \sin^2 A \operatorname{ctg} A + 4R^2 \sin^2 B \operatorname{ctg} B + 4R^2 \sin^2 C \operatorname{ctg} C] = 4R^4 (\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C)$$

$$4R^4 (\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C) = 2R^4 (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = m,$$

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2 \sin\left(\frac{2A+2B}{2}\right) \cos\left(\frac{2A-2B}{2}\right) + 2 \sin C \cos C = 2 \sin(A+B) \cos(A-B) + \sin 2C$$

$$2 \sin(A+B) \cos(A-B) + \sin 2C = 2 \sin(180^\circ - C) \cos(A-B) + \sin 2C = 2 \sin(C) \cos(A-B) + 2 \sin C \cos C$$

$$2 \sin(C) \cos(A-B) + 2 \sin C \cos C = 2 \sin C (\cos(A-B) + \cos C) = 2 \sin C \cdot (\cos(A-B) + \cos((180^\circ - (A+B)))$$

$$2 \sin C \cdot (\cos(A-B) + \cos((180^\circ - (A+B))) = 2 \sin C \cdot (\cos(A-B) - \cos(A+B))$$

$$2 \sin C \cdot (\cos(A-B) - \cos(A+B)) = 2 \sin C \cdot 2 \sin \frac{A-B+A+B}{2} \sin \frac{A+B-A+B}{2} = 4 \sin A \sin B \sin C$$

$$2R^4 (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = m = 2R^4 \cdot 4 \sin A \sin B \sin C = 8R^4 \sin A \sin B \sin C$$

$$8R^4 \sin A \sin B \sin C = 8R^4 \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} = Rabc = R \cdot 4RS = 4R^2S = m \geq 4R^2S, \quad R = \frac{abc}{4S},$$

Deci punctul O aparține locului geometric.

$$\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{ON}, \quad \overrightarrow{NA}^2 = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{ON}^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{ON},$$

$$\overrightarrow{NB}^2 = \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{ON}^2 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{ON}, \quad \overrightarrow{NC}^2 = \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{ON}^2 - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{ON}, \quad \text{inlocuim in relatia data}$$

$$(a^2 \operatorname{ctg} A)(\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{ON}^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{ON}) + (b^2 \operatorname{ctg} B)(\overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{ON}^2 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{ON}) + (c^2 \operatorname{ctg} C)(\overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{ON}^2 - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{ON}) = m$$

$$(a^2 \operatorname{ctg} A + b^2 \operatorname{ctg} B + c^2 \operatorname{ctg} C)(R^2 + ON^2) - 2\overrightarrow{ON}((a^2 \operatorname{ctg} A)\overrightarrow{OA} + (b^2 \operatorname{ctg} B)\overrightarrow{OB} + (c^2 \operatorname{ctg} C)\overrightarrow{OC}) = m,$$

$$(a^2 \operatorname{ctg} A + b^2 \operatorname{ctg} B + c^2 \operatorname{ctg} C)(R^2 + ON^2) - 2\overrightarrow{ON}((a^2 \operatorname{ctg} A)\overrightarrow{OA} + (b^2 \operatorname{ctg} B)\overrightarrow{OB} + (c^2 \operatorname{ctg} C)\overrightarrow{OC}) = m, \quad \text{folosim}$$

$$(a^2 \operatorname{ctg} A + b^2 \operatorname{ctg} B + c^2 \operatorname{ctg} C)(R^2 + ON^2) - 2\overrightarrow{ON} \cdot \vec{O} = m = (a^2 \operatorname{ctg} A + b^2 \operatorname{ctg} B + c^2 \operatorname{ctg} C)(R^2 + ON^2)$$

$$(a^2 \operatorname{ctg} A + b^2 \operatorname{ctg} B + c^2 \operatorname{ctg} C)(R^2 + ON^2) = (8R^2 \sin A \sin B \sin C)(R^2 + ON^2), \quad (\text{am calculat mai sus})$$

$$(8R^2 \sin A \sin B \sin C)(R^2 + ON^2) = 8R^2 \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} (R^2 + ON^2) = \frac{abc}{R} (R^2 + ON^2) = \frac{4RS}{R} (R^2 + ON^2)$$

$$\frac{4RS}{R} (R^2 + ON^2) = 4S(R^2 + ON^2) = 4R^2S + 4S \cdot ON^2 = m, \quad 4S \cdot ON^2 = m - 4R^2S,$$

$$ON^2 = \frac{m - 4R^2S}{4S}, \quad ON = \sqrt{\frac{m - 4R^2S}{4S}} = R_1, \quad \text{deci cercul de centru O si raza } R_1$$

aparține locului geometric. In concluzie locul geometric este $C(O, R_1) \cup \{O\}$.

$$3) A = \begin{pmatrix} a^2 \operatorname{ctg} A + b^2 \operatorname{ctg} B + c^2 \operatorname{ctg} C & \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \\ 2R^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det A = a^2 \operatorname{ctg} A + b^2 \operatorname{ctg} B + c^2 \operatorname{ctg} C - 2R^2 (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 0$, am demonstrat mai sus ca $a^2 \operatorname{ctg} A + b^2 \operatorname{ctg} B + c^2 \operatorname{ctg} C = 2R^2 (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$. Aplic relatia lui Cayley-Hamilton

$$A^2 - (\operatorname{Tr} A)A + (\det A) \cdot I_2 = O_2, \quad A^2 = (\operatorname{Tr} A)A,$$

$A^3 = A^2 \cdot A = (\operatorname{Tr} A)A \cdot A = (\operatorname{Tr} A)A^2 = (\operatorname{Tr} A)(\operatorname{Tr} A)A = (\operatorname{Tr} A)^2 A$, vom demonstra prin metoda inductiei matematice propozitia $P(n): A^n = (\operatorname{Tr} A)^{n-1} A$, $(\forall) n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

I Verificare $P(2): A^2 = (\operatorname{Tr} A)A$ adevarat.

II Demonstratie Presupun ca $P(n)$ este adevarata si demonstrez ca $P(n+1)$ este adevarata .

$$P(n+1): A^{n+1} = (TrA)^n A ,$$

$$P(n+1): A^{n+1} = A^n \cdot A = (TrA)^{n-1} A \cdot A = (TrA)^{n-1} A^2 = (TrA)^{n-1} \cdot (TrA) \cdot A = (TrA)^n A , \text{ adevarat}$$

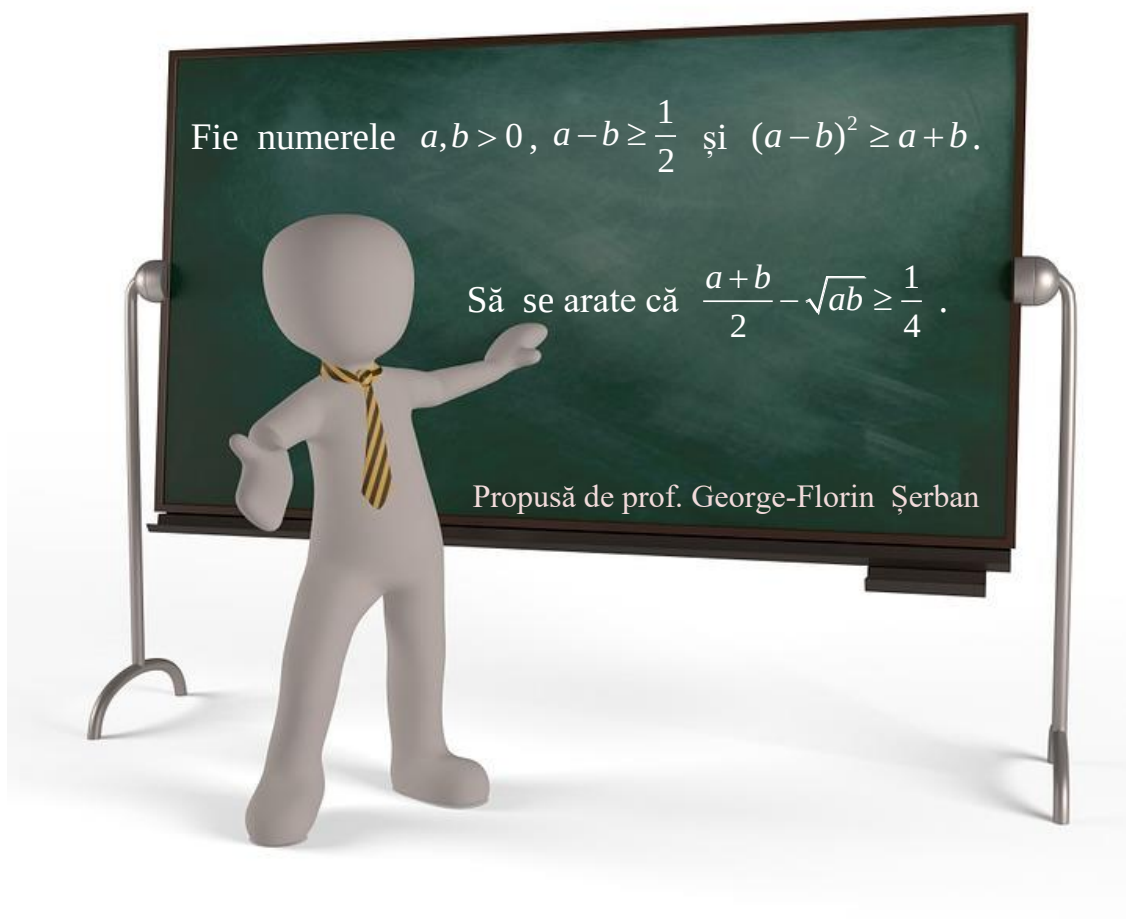
.

$$A + A^2 + \dots + A^n = A + (TrA)A + \dots + (TrA)^{n-1}A = A(1 + (TrA) + \dots + (TrA)^{n-1}) = x_n \cdot A ,$$

$$x_n = (1 + (TrA) + \dots + (TrA)^{n-1}) = \frac{(TrA)^n - 1}{TrA - 1} , \quad TrA = a^2 \operatorname{ctg} A + b^2 \operatorname{ctg} B + c^2 \operatorname{ctg} C + 1 = 4S + 1 > 1 ,$$

am aratat mai sus ca $a^2 \operatorname{ctg} A + b^2 \operatorname{ctg} B + c^2 \operatorname{ctg} C = 4S$. Calculez $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4S+1)^{n+1} - 1}{(4S+1)^n - 1} = 4S + 1 .$$

6. CONCURS - PROBLEMA LUNII IULIE 2016

Așteptăm soluțiile problemei până pe data de 1 august 2016, pe adresa de e-mail revista@mateinfo.ro.

7. MODEL BAC MATEMATICĂ MATE-INFO 2016

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se rezolve ecuația $1+3+5+..+x=100$.

(5p) 2. Determinați funcția de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax + b$ știind că punctul $A(0,3) \in G_f$ și axa de simetrie este dreapta $d: x-1=0$.

(5p) 3. Să se rezolve ecuația $\log_3(x^2 - 2x) = 1$.

(5p) 4. În câte moduri, din 10 elevi poate fi ales un comitet format din 3 elevi?

(5p) 5. Fie ΔABC și punctele M, N astfel încât $\overrightarrow{2MB} = -\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{NC}$.

Demonstrați că $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

(5p) 6. Calculați $\cos \alpha$ știind că $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\sin \alpha = \frac{12}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $S: \begin{cases} 3x + y - 2z = 0 \\ x + y - az = 0 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}.$

Notăm cu A matricea sistemului.

(5p) a) Să se determine rangul matricei A în funcție de a.

(5p) b) Să se rezolve sistemul pentru $a=1$.

(5p) c) Să se găsească o soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului cu proprietatea $x_0^3 + y_0^2 - z_0 = 0$.

2. Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX - 1 \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 .

(5p) a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f: (X-1)$ și restul împărțirii lui f la $X+1$ este -4.

(5p) b) Pentru $b=1$ aflați valorile lui a astfel încât $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$;

(5p) c) Dacă $a=-1, b=1$ aflați valoarea determinantului $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 3}$.

(5p) a) Să se scrie ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ a graficului funcției f .

(5p) b) Să se determine punctele de extrem pentru funcția f .

(5p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)^x$.

2. Se consideră șirul $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$, $n \in \mathbb{N}$.

(5p) a) Să se calculeze I_0 și I_1 .

(5p) b) Să se arate că $I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

(5p) c) Să se studieze monotonia șirului $(I_n)_{n \geq 0}$.

BAREMUL ÎN GĂSIȚI AICI:

<http://mateinfo.ro/bacalaureat-matematica/bac-matematica-mate-info/modele-bac-matematica-mate-info/94-model-3-bac-matematica-mate-info-iulie-2016>