REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

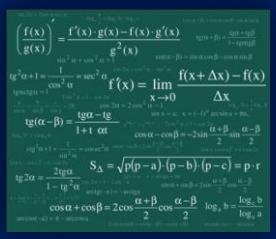
ISSN 2065-6432 – IANUARIE 2017

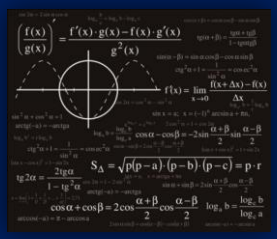
www.mateinfo.ro

REVISTĂ LUNARĂ

DIN FEBRUARIE 2009

revista@mateinfo.ro





COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ŞI SUSŢINĂTOR PERMANENŢI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ŞI NELA CICEU

ARTICOLE REVISTĂ:

1. ALTE SOLUŢII PENTRU UNELE PROBLEME DIN ROMANIAN MATHEMATICAL MAGAZINE, NUMBER 3, WINTER 2016 ... PAG. 2
Neculai Stanciu
2. SOLUTIONS OF SOME PROBLEMS OF CRUX MATHEMATICORUM JOURNAL ...PAG.7
George Florin Şerban
3. ÎN LEGĂTURĂ CU PROBLEMA S.370 DIN MATHEMATICAL REFLECTIONS 2/2016...PAG.10
Marin Chirciu
4. DRUMURI MINIME ÎNTRE DOUĂ DREPTE ŞI UN PUNCT... PAG. 15
Stan Ilie
5. POZIŢIA UNEI DREPTE FAŢĂ DE UN HIPERPLAN. SNOP DE HIPERPLANE ... PAG. 20
Amariei Laura – Georgeta
6. METODE DE DEMONSTRARE A UNEI INEGALITĂŢI... PAG. 27
Ştefănuţ Ciochină
7. TEMĂ EXCELENŢĂ : DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE. ECUAŢII CU SOLUŢII ÎN : $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ ... PAG. 30
Apostol Adelina
8. OBSERVAŢIA ÎN CADRUL OREI DE MATEMATICĂ ... PAG. 33
Florea Maria Luminiţa
9. Soluţii – PROBLEMA LUNII DECEMBRIE 2016... PAG. 35
Mănescu Avram Corneliu
10. PROBLEMA LUNII IANUARIE 2017... PAG. 39
Biro Istvan
11. MODEL EVALUARE NAŢIONALĂ MATEMATICĂ IANUARIE 2017... PAG. 40
12. MODEL BAC MATEMATICĂ IANUARIE 2017... PAG. 42

1. Alte soluţii pentru unele probleme din Romanian Mathematical Magazine, Number 3, Winter 2016

Neculai Stanciu, Buzău, România

Problem UP.036

Let $(a_n)_{n\geq 1}$ be a positive real sequence such that $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=r\in R_+^*$, $u,v\in R$, $u+v=1$. We denote $a_n!=a_1a_2...a_n$, $G_n=(a_n!)^{\frac{1}{n}}$, $\forall n\in N^*$. Compute:

$$\lim_{n\to\infty}\left((n+1)^u\sqrt[n+1]{(G_{n+1}!)^v}-n^u\sqrt[n]{(G_n!)^v}\right).$$

Soluţie. Avem:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{(n+1)-n}=r;$$

$$(2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{G_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a_n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{a_n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{e_n}\right)=\frac{r}{e};\text{unde}$$

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n;$$

$$(3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{G_n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{G_n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{G_{n+1}!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{G_n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{G_{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{e_n}\right)\overset{(2)}{=}\frac{r}{e^2};$$

$$(4)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{G_{n+1}!}}{\sqrt[n]{G_n!}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{G_{n+1}!}}{n+1}\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{G_n!}}\cdot\frac{n+1}{n}\right)\overset{(3)}{=}\frac{r}{e^2}\cdot\frac{e^2}{r}\cdot 1=1;$$

$$(5)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{G_{n+1}!}}{\sqrt[n]{G_n!}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{G_{n+1}!}{G_n!}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{G_{n+1}!}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{G_{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{G_{n+1}!}}\right)\overset{(2)}{\underset{(3)}{=}}\frac{r}{e}\cdot\frac{e^2}{r}=e.$$

$$B_n=\left((n+1)^u\sqrt[n+1]{(G_{n+1}!)^v}-n^u\sqrt[n]{(G_n!)^v}\right)=n^u\sqrt[n]{(G_n!)^v}\,(w_n-1)=\left(\frac{\sqrt[n]{G_n!}}{n}\right)^v\cdot\frac{w_n-1}{\ln w_n}\cdot\ln w_n^n,\forall n\geq 2,\text{un}$$

de $w_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^u\frac{\sqrt[n+1]{(G_{n+1}!)^v}}{\sqrt[n]{(G_n!)^v}}$.

Deci,

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{G_n!}}{n}\right)^v \cdot 1 \cdot \ln\left(\lim_{n\to\infty} w_n^n\right) \overset{(3)}{=} \left(\frac{r}{e^2}\right)^v \cdot \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{un} \cdot \left(\frac{\sqrt[n+1]{G_{n+1}!}}{\sqrt[n]{G_n!}}\right)^{nv}\right) \overset{(5)}{=} \frac{r}{e^2}\cdot\ln\left(e^u e^v\right) =$$

$$= \left(\frac{r}{e^2}\right)^v \cdot \ln\left(e^{u+v}\right) = \left(\frac{r}{e^2}\right)^v.$$

Problem UP.037

Let $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ be positive real sequences such that $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = a \in R_+^*$, $\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_n) = b \in R_+^*$, $u,v \in R$ cu $u+v=1$. Calculate

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^u \sqrt[n+1]{(b_1 b_2 ... b_n b_{n+1})^v} - a_n^u \sqrt[n]{(b_1 b_2 ... b_n)^v}\right).$$

Soluţie. Fie $b_n! = b_1 b_2 ... b_n$ şi $B_n = a_{n+1}^u \sqrt[n+1]{(b_{n+1}!)^v} - a_n^u \sqrt[n]{(b_n!)^v} = a_n^u \sqrt[n]{(b_n!)^v}(w_n - 1) =$

$$= a_n^u \sqrt[n]{(b_n!)^v} \cdot \frac{w_n - 1}{\ln w_n} \cdot \ln w_n = \frac{a_n^u \sqrt[n]{(b_n!)^v}}{n} \cdot \frac{w_n - 1}{\ln w_n} \cdot \ln w_n^n, \forall n \geq 2,$$

unde $w_n = \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^u \frac{\sqrt[n+1]{(b_{n+1}!)^v}}{\sqrt[n]{(b_n!)^v}}, \forall n \in N^*.$

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{(n+1)-n} = a$ şi analog $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n} = b$;

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{b_n!}}{n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{b_n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_{n+1}!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{b_n!}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{e_n}\right) = \frac{b}{e}$; unde $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;

(3) $\lim_{n\to\infty} w_n = 1$ şi atunci $\lim_{n\to\infty}\frac{w_n - 1}{\ln w_n} = 1$;

(4) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{a_{n+1}-a_n}}\right)^{\frac{n}{a_n}\cdot(a_{n+1}-a_n)} = e^{\frac{1}{a}\cdot a} = e$;

(5) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{b_{n+1}!}}{\sqrt[n]{b_n!}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_{n+1}!}{b_n!}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{b_{n+1}!}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{b_{n+1}!}}\right) \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} b\cdot\frac{e}{b} = e$;

(6) $\lim_{n\to\infty} w_n^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{nu} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{b_{n+1}!}}{\sqrt[n]{b_n!}}\right)^{nv} \overset{(4)}{\underset{(5)}{=}} e^u e^v = e^{u+v} = e$.

Prin urmare,

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{a_n}{n}\right)^u\left(\frac{\sqrt[n]{b_n!}}{n}\right)^v\right)\cdot 1\cdot \ln\left(\lim_{n\to\infty} w_n^n\right) = \frac{a^u b^v}{e^v}\cdot \ln e = \frac{a^u b^v}{e^v}.$$

Problem UP.038

Let $(a_n)_{n\geq 1}$ be a positive real sequence such that $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = r \in R_+^*$.

We denote $a_n! = a_1 a_2 ... a_n$, $G_n = (a_n!)^{\frac{1}{n}}$, $\forall n \in N^*$. Evaluate $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{G_{n+1}!}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{G_n!}}\right)$.

Soluţie. Avem:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{(n+1)-n} = r;$$

$$(2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{G_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a_n!}}{n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{a_n!}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{e_n}\right) = \frac{r}{e};\text{unde}$$

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n;$$

$$(3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{G_n!}}{n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{G_n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{G_{n+1}!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{G_n!}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{G_{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{e_n}\right) \overset{(2)}{=} \frac{r}{e^2};$$

$$(4)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{G_{n+1}!}}{\sqrt[n]{G_n!}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{G_{n+1}!}}{n+1}\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{G_n!}}\cdot\frac{n+1}{n}\right) \overset{(3)}{=} \frac{r}{e^2}\cdot\frac{e^2}{r}\cdot 1 = 1;$$

$$(5)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{G_{n+1}!}}{\sqrt[n]{G_n!}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{G_{n+1}!}{G_n!}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{G_{n+1}!}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{G_{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{G_{n+1}!}}\right) \overset{(2)}{\underset{(3)}{=}} \frac{r}{e}\cdot\frac{e^2}{r} = e.$$

$$B_n = \left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{G_{n+1}!}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{G_n!}}\right) = \frac{n^2}{\sqrt[n]{G_n!}}\cdot(u_n - 1) = \frac{n}{\sqrt[n]{G_n!}}\cdot\frac{u_n - 1}{\ln u_n}\cdot \ln u_n^n, \forall n \geq 1 \text{unde}$$

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{\sqrt[n]{(G_n!)}}{\sqrt[n]{(G_{n+1}!)}},\ \lim_{n\to\infty} u_n^n = \lim_{n\to\infty} e_n^2\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{G_n!}}{\sqrt[n+1]{G_{n+1}!}}\right)^n \overset{(5)}{=} e^2\cdot e^{-1} = e.$$

Deci, $\lim_{n\to\infty} B_n = \frac{e^2}{r}\cdot 1\cdot \ln e = \frac{e^2}{r}$.

Problem UP.039

Let $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ be positive real sequences with $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a\in R_+^*$, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_n)=b\in R_+^*$, $P_n=\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}}$, $P_n!=P_1P_2...P_n, \forall n\in N^*$, $u,v\in R$, $u+v=1$.

Find $\lim\limits_{n\to\infty}\left(b_{n+1}^u\sqrt[n+1]{(P_{n+1}!)^v}-b_n^u\sqrt[n]{(P_n!)^v}\right)$.

Soluţie. $B_n=b_{n+1}^u\sqrt[n+1]{(P_{n+1}!)^v}-b_n^u\sqrt[n]{(b_n!)^v}=b_n^u\sqrt[n]{(P_n!)^v}(w_n-1)=$

$=b_n^u\sqrt[n]{(P_n!)^v}\cdot\dfrac{w_n-1}{\ln w_n}\cdot\ln w_n=\dfrac{b_n^u\sqrt[n]{(P_n!)^v}}{n}\cdot\dfrac{w_n-1}{\ln w_n}\cdot\ln w_n^n=\left(\dfrac{b_n}{n}\right)^u\left(\dfrac{\sqrt[n]{P_n!}}{n}\right)^v\cdot\dfrac{w_n-1}{\ln w_n}\cdot\ln w_n^n, \forall n\geq 2,$

unde $w_n=\left(\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right)^u\dfrac{\sqrt[n+1]{(P_{n+1}!)^v}}{\sqrt[n]{(P_n!)^v}}, \forall n\in N^*.(1)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}-b_n}{(n+1)-n}=b;$

$(2)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{P_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n^3}}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}^2}{(n+1)^3-n^3}}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{n}\right)^2\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}}=$

$=\sqrt{\dfrac{a^2}{3}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3};(3)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{P_n!}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{P_n!}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{P_{n+1}!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\dfrac{n^n}{P_n!}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{P_{n+1}}{n+1}\cdot\dfrac{1}{e_n}\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{3e};$

unde $e_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$;

$(4)\lim\limits_{n\to\infty}w_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right)^u\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n+1]{P_{n+1}!}}{\sqrt[n]{P_n!}}\right)^v=1\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\dfrac{\sqrt[n+1]{P_{n+1}!}}{n+1}\cdot\dfrac{n}{\sqrt[n]{P_n!}}\right)^v\cdot\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^v\right)\overset{(3)}{=}1\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{3e}\cdot\dfrac{3e}{a\sqrt{3}}=1$

şi atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{w_n-1}{\ln w_n}=1;(5)\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{b_{n+1}-b_n}{b_n}\right)^{\frac{b_n}{b_{n+1}-b_n}}\right)^{\frac{n}{b_n}\cdot(b_{n+1}-b_n)}=e^{\frac{1}{b}\cdot b}=e$

$(6)\lim\limits_{n\to\infty}w_n^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right)^{nu}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{P_{n+1}!}{P_n!}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[n+1]{P_{n+1}!}}\right)^v\overset{(5)}{=}e^u\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{P_{n+1}}{n+1}\cdot\dfrac{n+1}{\sqrt[n+1]{P_{n+1}!}}\right)^v\underset{(3)}{\overset{(2)}{=}}e^u\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{3e}{a\sqrt{3}}\right)^v=e^{u+v}=e$

Prin urmare,

$\lim\limits_{n\to\infty}B_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\dfrac{b_n}{n}\right)^u\left(\dfrac{\sqrt[n]{P_n!}}{n}\right)^v\right)\cdot 1\cdot\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}w_n^n\right)=b^u\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3e}\right)^v\ln e=\dfrac{a^vb^u}{e^v\left(\sqrt{3}\right)^v}.$

Problem UP.040

Let $(a_n)_{n\geq 1}$ be a positive real sequence such that $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=r\in R_+^*$. For any $x\in R_+^*$ we denote $M_n^{[x]}=\left(\frac{a_1^x+a_2^x+...+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ and $M_n^{[x]}!=M_1^{[x]}M_2^{[x]}...M_n^{[x]},\forall n\in N^*$.

Find $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{M_{n+1}^{[x]}!}}-\frac{n^2}{\sqrt[n]{M_n^{[x]}!}}\right)$.

Soluţie. Avem:

Notăm $B_n=\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{M_{n+1}^{[x]}!}}-\frac{n^2}{\sqrt[n]{M_n^{[x]}!}}$ şi $u_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\frac{\sqrt[n]{M_n^{[x]}!}}{\sqrt[n+1]{M_{n+1}^{[x]}}},\forall n\geq 2,\forall x>0$.

Deci, $B_n=\frac{n^2}{\sqrt[n]{M_n^{[x]}!}}(u_n-1)=\frac{n}{\sqrt[n]{M_n^{[x]}!}}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n,\forall n\geq 2,\forall x\in R_+^*$

$(1)\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{(n+1)-n}=r;$

$(2)\lim_{n\to\infty}\frac{M_n^{[x]}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a_1^x+a_2^x+...+a_n^x\right)^{\frac{1}{x}}}{n\cdot n^{\frac{1}{x}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+...+a_n^x}{n^{x+1}}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^x}{(n+1)^{x+1}-n^{x+1}}\right)^{\frac{1}{x}}=$

$=\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{n+1}\right)^x\cdot\frac{n^x}{(n+1)^{x+1}-n^{x+1}}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^x\right)^{\frac{1}{x}}=\left(r^x\cdot\frac{1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=r(1+x)^{-\frac{1}{x}}$

$(3)\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{M_n^{[x]}!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{M_n^{[x]}!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{M_{n+1}^{[x]}!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{M_n^{[x]}!}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{M_{n+1}^{[x]}}{n+1}\cdot\frac{1}{e_n}\right)\overset{(2)}{=}\frac{r}{e}(1+x)^{-\frac{1}{x}}$;unde

$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;$(4)$ $\lim_{n\to\infty}u_n=1$, deci $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n}=1;$

$(5)\lim_{n\to\infty}u_n^n=\lim_{n\to\infty}e_n^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{M_n^{[x]}!}{M_{n+1}^{[x]}!}\cdot\sqrt[n+1]{M_{n+1}^{[x]}!}=e^2\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{M_{n+1}^{[x]}}\cdot\frac{\sqrt[n+1]{M_{n+1}^{[x]}!}}{n+1}\overset{(2)}{\underset{(3)}{=}}e.$

Prin urmare, $\lim_{n\to\infty}B_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{M_n^{[x]}!}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln\left(\lim_{n\to\infty}u_n^n\right)\overset{(3)}{\underset{(5)}{=}}1\cdot\ln e\cdot\frac{e}{r}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{e}{r}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

2. Solutions of some problems of Crux Mathematicorum Journal

By George-Florin Șerban , Pedagogical High School ''D.P.Perpessicius'' , Brăila , România

In Crux Mathematicorum, Volume 42, no. 3, 2016, was appeared the following problems:

4127 .Proposed by D.M.Batinetu-Giurgiu and Neculai Stanciu

Calculate $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\sqrt[n]{n!}}^{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} f(\frac{x}{n})dx$ **, where** $f:R^*_+\to R^*_+$, **is a continuous function.**

Journal Crux Mathematicorum VOLUME 42 , NO.3 , March/ Mars 2016

Solved by Professor : George-Florin Serban , Braila , Romania.

Considering $\frac{x}{n}=y, x=ny, dx=ndy,\ \lim\limits_{n\to\infty} n\int\limits_{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}^{\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n}} f(y)dx,$ I applied the mean value theorem ,

$$n\cdot\int\limits_{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}^{\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n}} f(y)dx = n\cdot(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n}-\frac{\sqrt[n]{n!}}{n})f(c_n),\ \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\le c_n\le\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)n^n}{n!(n+1)(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}}\cdot\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(n+2)n^{n+1}}{(n+1)!(n+1)(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}=\frac{1}{e},$$

thus $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n)=\frac{1}{e},\quad \lim\limits_{n\to\infty} f(c_n)=f(\frac{1}{e}).$

$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!})=\frac{1}{e}$, (Traian Lalescu).

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\int\limits_{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}^{\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n}} f(y)dx=\lim_{n\to\infty} n\cdot(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n}-\frac{\sqrt[n]{n!}}{n})f(c_n)=\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!})f(c_n)=\frac{1}{e}f(\frac{1}{e}),$$

4126. Proposed by Mihaela Berindeanu.

Let ABC be an acute-angled triangle. Prove that $\sum \frac{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{\sqrt{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}} \geq \sqrt{\frac{3}{2}}.$

Journal Crux Mathematicorum VOLUME 42 , NO.3 , March/ Mars 2016

Solved by Professor : George-Florin Serban , Braila , Romania.

I rate $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = x = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} = \frac{p-c}{p},$

$\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = y = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} = \frac{p-a}{p},$

$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} = z = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} = \frac{p-b}{p},$

$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} = x + y + z = \frac{p-a+p-b+p-c}{p} = \frac{3p-2p}{p} = \frac{p}{p} = 1,$ Func

tion $f:(0,1)\to R,\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}},\ \ f^{|}(x) = \frac{2-x}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}},\ \ f^{||}(x) = \frac{4-x}{4(1-x)^{\frac{5}{2}}} > 0, (\forall)x \in (0,1),$ function

convex , $\sum \frac{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{\sqrt{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}} = \sum \frac{x}{\sqrt{1-x}} = \sum f(x),$ inequality Jensen ,

$f(\frac{x+y+z}{3}) \leq \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3},$

$f(\frac{x+y+z}{3}) = f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}},\ f(x)+f(y)+f(z) \geq 3\cdot\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}},$

Then $\sum \frac{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{\sqrt{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}} = \sum \frac{x}{\sqrt{1-x}} = \sum f(x) = f(x)+f(y)+f(z) \geq \sqrt{\frac{3}{2}}.$

Crux Mathematicorum
VOLUME 42, NO. 4

4133. Propose par D. M. B_atinetu-Giurgiu et Neculai Stanciu.
Soit la suite (an) definie de facon recursive par $a_1=1$ **et** $a_{n+1}=(2n+1)!!a_n$ **pour tous entiers n positifs.Calculer** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[2n]{(2n-1)!!}}{\sqrt[n^2]{a_n}}$.

Solved by Professor : George-Florin Serban , Braila , Romania.

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[2n]{(2n-1)!!}}{\sqrt[n^2]{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n^2]{\frac{((2n-1)!!)^n}{a^2{}_n}},\qquad \frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{(2n+1)!!},\quad \text{Cesaro-Stolz,}$$

$$\ln l=\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[2n^2]{\frac{((2n-1)!!)^n}{a^2{}_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{((2n-1)!!)^n}{a^2{}_n}}{2n^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{((2n+1)!!)^{n+1}}{a^2{}_{n+1}}-\ln\frac{((2n-1)!!)^n}{a^2{}_n}}{(n+1)^2-n^2},$$

$$\ln l=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{((2n+1)!!)^{n+1}a^2{}_n}{((2n-1)!!)^n a^2{}_{n+1}}}{2n+1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{((2n+1)!!)^n(2n+1)!!}{((2n-1)!!)^n\cdot((2n+1)!!)^2}}{2n+1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{(2n+1)^n}{(2n+1)!!}}{2n+1},$$

$$\ln l=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{(2n+1)^n}{(2n+1)!!}}{2n+1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{(2n+3)^{n+1}}{(2n+3)!!}-\ln\frac{(2n+1)^n}{(2n+1)!!}}{(2n+3)-(2n+1)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{(2n+3)^n(2n+3)(2\,n+1)!!}{(2n+3)!!(2n+1)^n}}{2}$$

$$\ln l=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\ln\frac{(2n+3)^n(2\,n+3)!!}{(2n+3)!!(2n+1)^n}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\ln\frac{(2n+3)^n}{(2n+1)^n}=\frac{1}{4}\ln\lim_{n\to\infty}(\frac{2n+3}{2n+1})^n=\frac{1}{4}\ln\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{2n+1})^n,$$

$$\ln l=\frac{1}{4}\ln\lim_{n\to\infty}\{(1+\frac{2}{2n+1})^{\frac{2n+1}{2}}\}^{\frac{2n}{2n+1}}=\frac{1}{4}\ln e^1=\ln\sqrt[4]{e},\qquad l=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[2n]{(2n-1)!!}}{\sqrt[n^2]{a_n}}=\sqrt[4]{e}.$$

3. În legătură cu problema S.370 din Mathematical Reflections 2/2016

Marin Chirciu[1]

Articolul propune dezvoltări ale inegalității S.370 apărută în revista *Mathematical Reflections 2/2016,* autor Titu Andreescu**.**

1. „Prove that in any triangle: $\sum \left| 3a^2-2b^2 \right| \cdot m_a \geq \frac{8S^2}{R}$".

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas,USA

2. $\sum \left| 2a^2-b^2 \right| \cdot m_a \geq \frac{8S^2}{R}$.

3. $\sum \left| (n+1)a^2-nb^2 \right| \cdot m_a \geq \frac{8S^2}{R}$, unde $n \in \boldsymbol{R}$.

4. $\sum \left| xa^2-yb^2 \right| \cdot m_a \geq \left| x-y \right| \cdot \frac{8S^2}{R}$, unde $x, y \in \boldsymbol{R}$.

Dezvoltări, M.Chirciu

Soluție: Folosind inegalitatea cunoscută în triunghi $m_a \geq \frac{b^2+c^2}{4R}$, notând cu M_s și M_d membrul stâng, respectiv membrul drept al inegalității de demonstrat și ținând seama de inegalitatea modulului obținem:

$$M_s=\sum \left| xa^2-yb^2 \right| \cdot \frac{b^2+c^2}{4R} \geq \left| \sum \left(xa^2-yb^2 \right) \cdot \frac{b^2+c^2}{4R} \right| = \frac{1}{4R} \left| \sum \left(xa^2-yb^2 \right)\left(b^2+c^2 \right) \right| =$$

$$= \frac{1}{4R} \left| \sum \left(xa^2b^2+xa^2c^2-yb^4-yb^2c^2 \right) \right| = \frac{1}{4R} \left| \sum (2x-y)b^2c^2-\sum ya^4 \right| =$$

$$= \frac{1}{4R} \left| (2x-y)\sum b^2c^2-y\sum a^4 \right|.$$

Folosim $\sum a^4 \geq \sum b^2c^2 \geq 16S^2$, care rezultă din $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ și $\sum b^2c^2 \geq 16S^2$, în baza itemului 4.11 din c.d.p. O.Bottema ș.a. , autor F.Goldner, Problem 69, Elemente der Mathematik, 4/ 1949 , studiind cazurile:

i) Dacă $y \geq 0$ obținem:

$$\left| (2x-y)\sum b^2c^2-y\sum a^4 \right| = \left| y\sum a^4+(y-2x)\sum b^2c^2 \right| \geq \left| y\sum b^2c^2+(y-2x)\sum b^2c^2 \right| =$$

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu", Pitești*

$=\left|(2y-2x)\sum b^2c^2\right|=2|x-y|\sum b^2c^2\geq 2|x-y|\cdot 16S^2=32|x-y|S^2$.

ii) Dacă $y<0$ obținem:

$\left|\ (2x-y)\sum b^2c^2-y\sum a^4\ \right|=\left|\ -y\sum a^4+(2x-y)\sum b^2c^2\ \right|\geq\left|\ -y\sum b^2c^2+(2x-y)\sum b^2c^2\ \right|=$

$=\left|(2x-2y)\sum b^2c^2\right|=2|x-y|\sum b^2c^2\geq 2|x-y|\cdot 16S^2=32|x-y|S^2$.

$M_s\geq\frac{1}{4R}\cdot 32|x-y|S^2=\left|\ x-y\ \right|\frac{8S^2}{R}=M_d$.

Obs. Pentru $x=3,\ y=2$ obținem inegalitatea 1.

Pentru $x=2,\ y=1$ obținem inegalitatea 2.

Pentru $x=n+1,\ y=n$ obținem inegalitatea 3.

5. $\sum\left|\ 3a^2-2b^2\right|\cdot(m_b+m_c)\geq\frac{16S^2}{R}$.

6. $\sum\left|\ 2a^2-b^2\right|\cdot(m_b+m_c)\geq\frac{16S^2}{R}$.

7. $\sum\left|\ (n+1)a^2-nb^2\right|\cdot(m_b+m_c)\geq\frac{16S^2}{R}$, unde $n\in\boldsymbol{R}$.

8. $\sum\left|\ xa^2-yb^2\right|\cdot(m_b+m_c)\geq\left|\ x-y\ \right|\cdot\frac{16S^2}{R}$, unde $x,y\in\boldsymbol{R}$.

Dezvoltări, M.Chirciu

Soluție:

Folosind inegalitatea cunoscută în triunghi $m_a\geq\frac{b^2+c^2}{4R}$, notând cu M_s și M_d membrul stâng, respectiv membrul drept al inegalității de demonstrat și ținând seama de inegalitatea modulului obținem:

$M_s\geq\sum\left|\ xa^2-yb^2\right|\cdot\left(\frac{a^2+c^2}{4R}+\frac{a^2+b^2}{4R}\right)=\frac{1}{4R}\left|\ \sum\left(xa^2-yb^2\right)\left(2a^2+b^2+c^2\right)\ \right|=$

$=\frac{1}{4R}\left|\ (2x-y)\sum a^4+(2x-3y)\sum b^2c^2\ \right|\overset{(1)}{\geq}\frac{16S^2}{R}\left|\ x-y\ \right|=M_d$,

unde (1) rezultă din $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$ și $\sum b^2c^2\geq 16S^2$ și studierea cazurilor :

i) Dacă $2x-y\geq 0$ obținem :

$$\left|\underbrace{(2x-y)}_{\geq 0}\sum a^4+(2x-3y)\sum b^2c^2\right| \geq \left|\underbrace{(2x-y)}_{\geq 0}\sum b^2c^2+(2x-3y)\sum b^2c^2\right| =$$

$$=\left|4(x-y)\sum b^2c^2\right| = 4|x-y|\sum b^2c^2 \geq 4|x-y|\cdot 16S^2 = 64|x-y|S^2 .$$

ii) Dacă $2x-y<0$ obținem :

$$\left|\underbrace{(2x-y)}_{<0}\sum a^4+(2x-3y)\sum b^2c^2\right| = \left|\underbrace{(y-2x)}_{>0}\sum a^4+(3y-2x)\sum b^2c^2\right| \geq$$

$$\geq \left|\underbrace{(y-2x)}_{>0}\sum b^2c^2+(3y-2x)\sum b^2c^2\right| = \left|4(y-x)\sum b^2c^2\right| = 4|y-x|\sum b^2c^2 \geq$$

$$\geq 4|x-y|\cdot 16S^2 = 64|x-y|S^2 .$$

Obs. Pentru $x=3,\ y=2$ obținem inegalitatea 5.

Pentru $x=2,\ y=1$ obținem inegalitatea 6.

Pentru $x=n+1,\ y=n$ obținem inegalitatea 7.

9. $\sum\left|3a^2-2b^2\right|\cdot(m_b+\lambda m_c)\geq|1+\lambda|\frac{8S^2}{R}$, unde $\lambda\in\boldsymbol{R}$.

10. $\sum\left|2a^2-b^2\right|\cdot(m_b+\lambda m_c)\geq|1+\lambda|\frac{8S^2}{R}$, unde $\lambda\in\boldsymbol{R}$.

11. $\sum\left|(n+1)a^2-nb^2\right|\cdot(m_b+\lambda m_c)\geq|1+\lambda|\frac{8S^2}{R}$, unde $n\in\boldsymbol{R}$ și $\lambda\in\boldsymbol{R}$.

12. $\sum\left|xa^2-yb^2\right|\cdot(m_b+\lambda m_c)\geq|x-y|\cdot|1+\lambda|\frac{8S^2}{R}$, unde $x,y\in\boldsymbol{R}$ și $\lambda\in\boldsymbol{R}$.

Dezvoltări, M.Chirciu

Soluție:

Folosind inegalitatea cunoscută în triunghi $m_a\geq\frac{b^2+c^2}{4R}$, notând cu M_s și M_d membrul stâng, respectiv membrul drept al inegalității de demonstrat și ținând seama de inegalitatea modulului obținem:

$$M_s \geq \sum \left| xa^2 - yb^2 \right| \left(\frac{a^2+c^2}{4R} + \lambda \frac{a^2+b^2}{4R} \right) = \frac{1}{4R} \left| \sum \left(xa^2 - yb^2 \right) \left((1+\lambda)a^2 + \lambda b^2 + c^2 \right) \right| =$$

$$= \frac{1}{4R} \left| \left(x(1+\lambda) - y\lambda \right) \sum a^4 + \left(x(1+\lambda) - y(2+\lambda) \right) \sum b^2c^2 \right| \overset{(1)}{\geq} \frac{8S^2}{R} |1+\lambda| \, |x-y| = M_d ,$$

unde (1) rezultă din $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ și $\sum b^2c^2 \geq 16S^2$ și studierea cazurilor :

i) Dacă $x(1+\lambda) - y\lambda \geq 0$ obținem :

$$\left| \underbrace{\left(x(1+\lambda) - y\lambda \right)}_{\geq 0} \sum a^4 + \left(x(1+\lambda) - y(2+\lambda) \right) \sum b^2c^2 \right| \geq$$

$$\geq \left| \underbrace{\left(x(1+\lambda) - y\lambda \right)}_{\geq 0} \sum b^2c^2 + \left(x(1+\lambda) - y(2+\lambda) \right) \sum b^2c^2 \right| =$$

$$= \left| \left[2(x-y) + 2\lambda(x-y) \right] \sum b^2c^2 \right| = 2|1+\lambda||x-y| \sum b^2c^2 \geq$$

$$\geq 2|1+\lambda||x-y| \cdot 16S^2 = 32|1+\lambda||x-y|S^2 .$$

ii) Dacă $x(1+\lambda) - y\lambda < 0$ obținem :

$$\left| \underbrace{\left(x(1+\lambda) - y\lambda \right)}_{<0} \sum a^4 + \left(x(1+\lambda) - y(2+\lambda) \right) \sum b^2c^2 \right| =$$

$$\geq \left| \underbrace{\left(y\lambda - x(1+\lambda) \right)}_{>0} \sum a^4 + \left(y(2+\lambda) - x(1+\lambda) \right) \sum b^2c^2 \right| \geq$$

$$\geq \left| \underbrace{\left(y\lambda - x(1+\lambda) \right)}_{>0} \sum b^2c^2 + \left(y(2+\lambda) - x(1+\lambda) \right) \sum b^2c^2 \right| =$$

$$= \left| \left[2\lambda(y-x) + 2(y-x) \right] \sum b^2c^2 \right| = 2|1+\lambda||y-x| \sum b^2c^2 \geq$$

$$\geq 2|1+\lambda||x-y| \cdot 16S^2 = 32|1+\lambda||x-y|S^2 .$$

Obs. Pentru $x=3,\ y=2$ obținem inegalitatea 9.

Pentru $x=2,\ y=1$ obținem inegalitatea 10.

Pentru $x=n+1,\ y=n$ obținem inegalitatea 11.

Bibliografie:

1. Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA, Mathematical Reflections, nr.2/2016, Problema S.370.
2. O.Bottema,R.Z.Djordjević,R.R.Janić,D.S.Mitrinović,P.M.Vasić,Geometric Inequalities, Groningen 1969, The Netherlands.
3. Marin Chirciu, Inegalități geometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2015.
4. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.

4. Drumuri minime între două drepte şi un punct

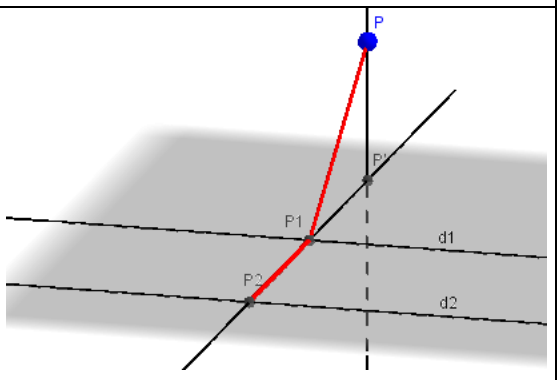
- *Studiu de specialitate* -

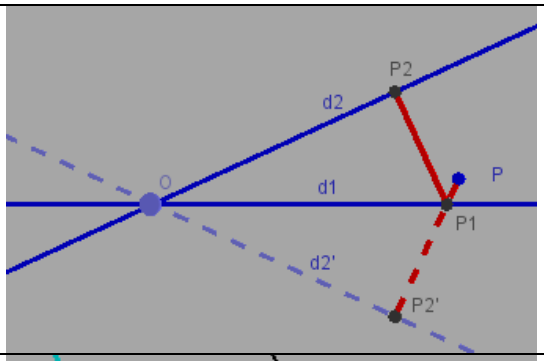
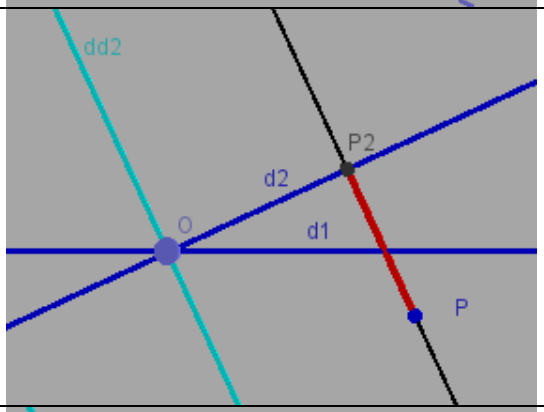
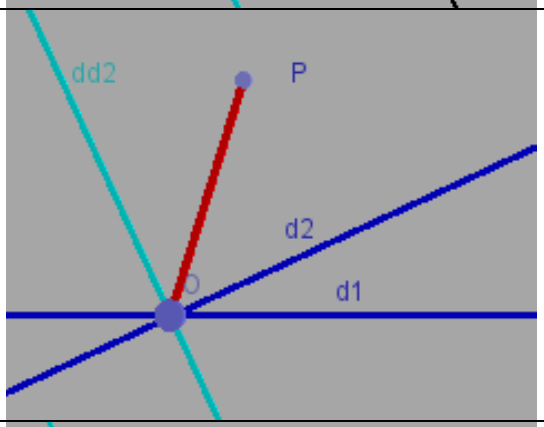
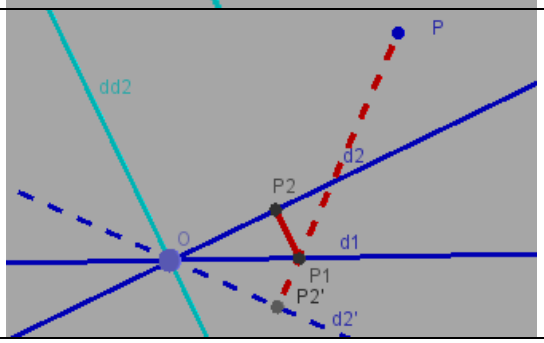
Prof. Stan Ilie
Colegiul Tehnic "Anghel Saligny", Roşiorii de Vede, Teleorman

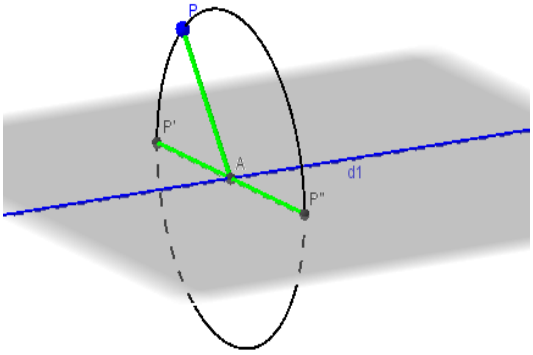
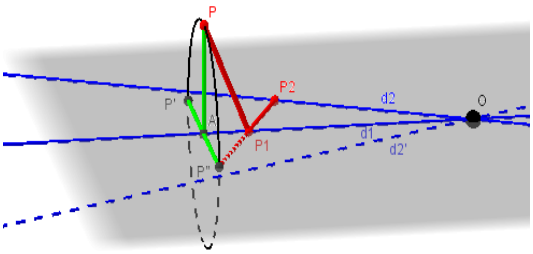
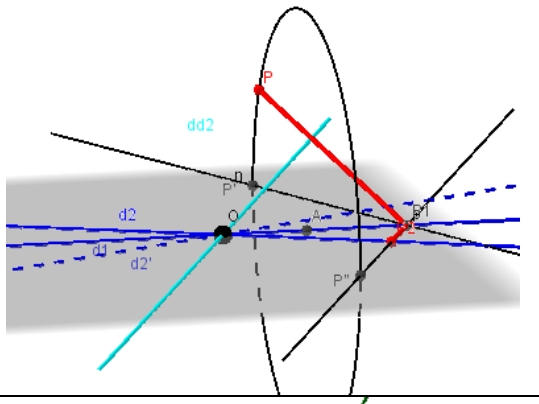
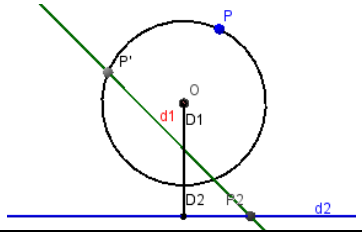
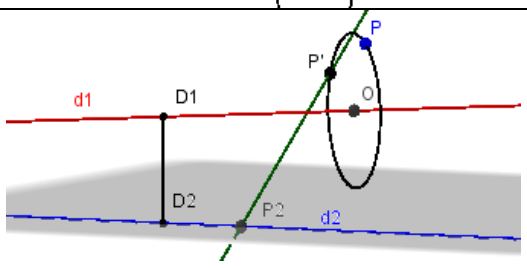
Noţiuni cunoscute:

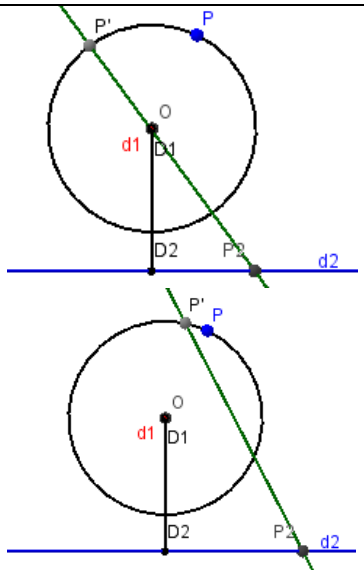
Punct, Dreaptă, Distanţa între două puncte, Distanţa de la un punct la o dreaptă.
PPP, PPd, PdP din studiul anterior REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO DECEMBRIE 2016

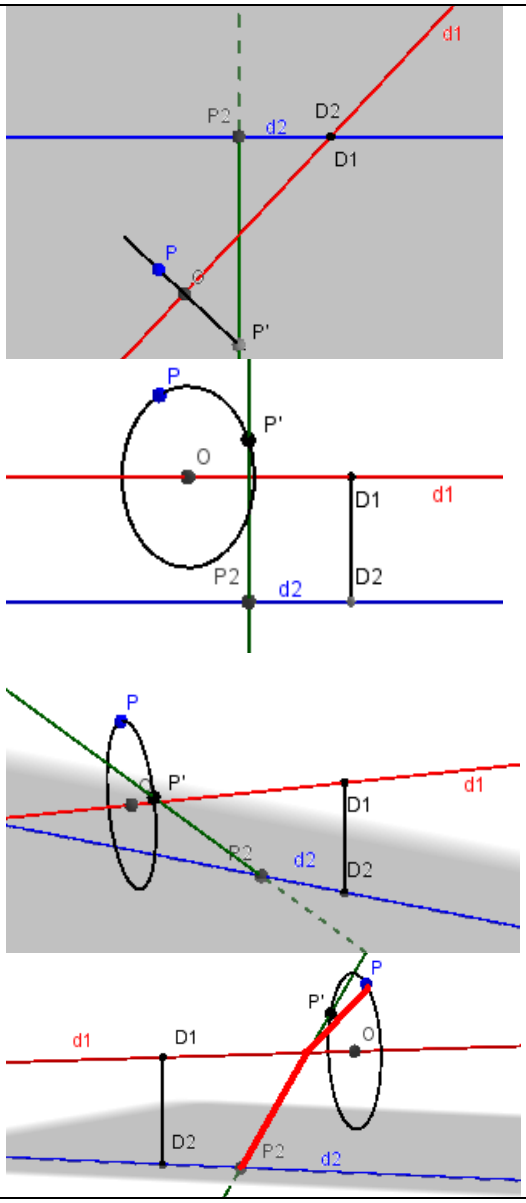
Scop:
Determinarea drumului de lungime minimă dintre două elemente, ce trece printr-un al treilea element.
Elemente:
Puncte, Drepte
Notaţii:
dm=**d**rum **m**inim
X-Y-Z=drumul de la elementul X la elementul Z ce trece prin elementul Y.

III	**1P+2d**	**UN PUNCT şi DOUĂ DREPTE**	
A	P- d_1-d_2		
1.	Drepte paralele $d_1 \parallel d_2$	Fie dreapta d aî $d \perp d_1$ şi $d \perp d_2$. $P_1=d_1 \cap d$, $P_2=d_2 \cap d$ dm=$[PP_1]+[P_1P_2]$	

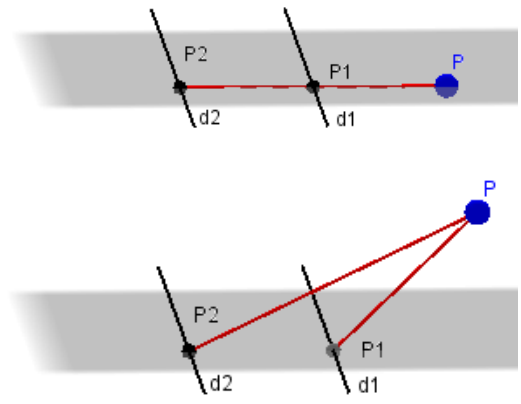
2.	Drepte concurente şi coplanare cu P		
a	P în interiorul unghiului ascuţit format de d_1 şi d_2	Fie d_2' simetrica lui d_2 faţă de d_1. $PP_2' \perp d_2'$, $P_1=d_1 \cap PP_2'$, $P_1P_2 \perp d_2$ ($[P_1P_2]$ simetricul lui $[P_1P_2']$ faţă de d_1) $dm=[PP_1]+[P_1P_2]$	
b	P în interiorul unghiului ascuţit format de d_1 şi dd_2	Fie $dd_2 \perp d_2$, $PP_2 \perp d_2$, $P_2 \in d_2$ $dm=[PP_2]$	
c1	P în cadranul format de d_2 şi dd_2 şi care nu conţine d_1	Caz 1 (nu se permite P-d_2- d_1-d_2) Fie $dd_2 \perp d_2$, $PP_2 \perp d_2$, $P_2 \in d_2$, $dm=[PP_2]$, $O=d_1 \cap d_2$ $dm=[PO]$	
c2	P în cadranul format de d_2 şi dd_2 şi care nu conţine d_1	Caz 2 (se permite P-d_2- d_1-d_2) Fie d_2' simetrica lui d_2 faţă de d_1. $PP_2' \perp d_2'$, $P_1=d_1 \cap PP_2'$, $P_1P_2 \perp d_2$($[P_1P_2]$ simetricul lui $[P_1P_2']$ faţă de d_1) $dm=[PP_1]+[P_1P_2]$ Similar caz III.A.2.a	

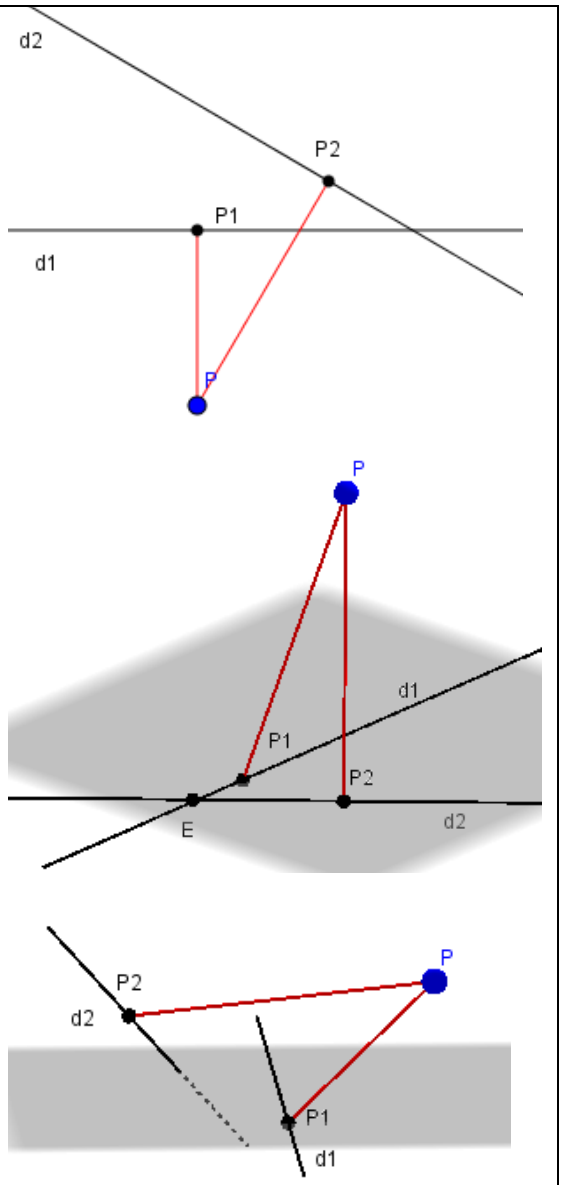
3	Drepte concurente şi necoplanare cu P	Fie $\mathcal{C}$ cercul determinat de rotirea lui P în jurul lui d_1. Fie P'şi P'' intersecţiile lui P cu planul determinat de d_1 şi d_2. P'şi P'' ="Proiecţiile lui P" Fie d_2' simetrica lui d_2 faţă de d_1. Cadranul D=cadranul determinat de d_2 şi dd_2 ce conţine şi dreapta d_1	
a	Cel puţin una dintre "Proiecţiile lui P" este în cadranul D	P''$P_2 \perp d_2$, $P_1 = d_1 \cap$ P''P_2, $P_1P_2 \perp d_2$ dm=[PP_1]+[P_1P_2]	
b	"Proiecţiile lui P" nu sunt în cadranul D	Similar cazului precedent, cu schimbarea de roluri P' cu P'' respectiv d_2' cu d_2 P'$P_1 \perp d'_2$, $P_1 \in d_1$, $P_1P_2 \perp d_2$ dm=[PP_1]+[P_1P_2]	
4	Drepte necoplanare	Se construieşte cercul obţinut prin rotaţia lui P în jurul lui d1. Se găseşte P' aî P'$P_2 \perp d_2$. Există! 	

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>

$P_1=d_1 \cap P'P_2$
$dm=[PP_1]+[P_1P_2]$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>B</td>
<td>d_1-P-d_2</td>
<td>Pentru toate cazurile referitoare la d_1 şi d_2 (paralele, concurente sau necoplanare) respectiv la P (coplanar sau nu cu dreptele) avem răspunsul unic:

Fie $PP_1 \perp d_1$, $P_1 \in d_1$,
$PP_2 \perp d_2$, $P_2 \in d_2$

$dm=dm(d_1\text{-}P\text{-}d_2)$ =
$= dm(d_1\text{-}P) + dm(P\text{-}d_2)$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

		dm=[P_1P]+[PP_2]	

(Va urma)

5. Poziţia unei drepte faţă de un hiperplan. Snop de hiperplane

- *Studiu de specialitate* -

Prof. Amariei Laura – Georgeta

Colegiul Naţional „Al. I. Cuza” Galaţi

POZIŢIA UNEI DREPTE FAŢĂ DE UN HIPERPLAN

În spaţiul afin A se consideră date: o dreaptă A_1 determinată de punctul P_0 şi spaţiul director L_1, deci prin ecuaţia vectorială:

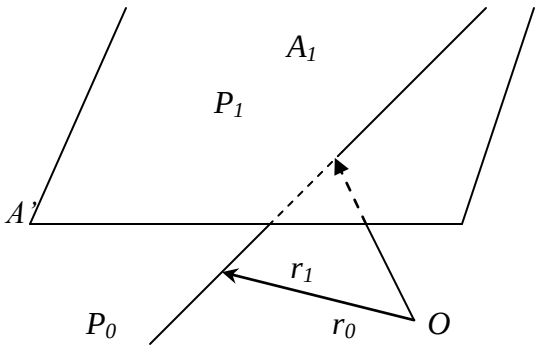
$$(1) \qquad r = r_0 + tv,\ t \in K,\ v \in L_1,\ v \neq 0$$

şi un hiperplan A’ prin ecuaţia generală:

$$(2) \qquad f(r) + b = 0.$$

Poziţia dreptei A_1 faţă de hiperplanul A’ se cercetează studiind mulţimea soluţiilor sistemului de ecuaţii:

$$(3) \qquad \begin{cases} r = r_0 + tv, & t \in K \\ f(r) + b = 0 \end{cases} \quad \text{în necunoscutele } t, r$$



Eliminând pe r din relaţia (3) se obţine ecuaţia de gradul I în t

$$(4) \qquad f(v)\cdot t + f(r_0) + b = 0.$$

În aceste condiţii, avem următoarele situaţii:

Cazul I: $f(v) \neq 0$. Ecuaţia (4) admite soluţia unică

$$(5) \qquad t_1 = -\frac{f(r_0)+b}{f(v)}.$$

Dreapta şi planul au un punct comun P_1, cu vectorul de poziţie $r_1 = r_0 + t_1 v$, unde t_1 este dat de relaţia (5). În acest caz se zice că ***dreapta intersectează hiperplanul*** (situaţie prezentată în figura de mai sus).

Cazul II: $f(v) = 0$. Această condiţie spune că spaţiul director L' al hiperplanului A' conţine spaţiul director L_1 al dreptei A_1, deci ***dreapta este paralelă cu hiperplanul***.

Dacă $f(r_0) + b \neq 0$, atunci nu există nici o valoare a lui $t \in K$ care să verifice ecuaţia (5), adică dreapta şi hiperplanul nu au nici un punct comun. În acest caz, ***dreapta şi hiperplanul sunt strict paralele*** şi vom scrie $A_1 \parallel A'$.

Dacă $f(r_0) + b = 0$, ecuaţia (4) este verificată pentru orice valoare a lui $t \in K$, adică fiecare punct al dreptei aparţine hiperplanului. În acest caz, ***dreapta este conţinută în hiperplan*** şi vom scrie $A_1 \subset A'$.

Aplicaţie. Fie A_n un spaţiu afin n - dimensional. Să presupunem că o dreaptă $A_1 \subset A_n$ este reprezentată, într-un reper cartezian dat, prin sistemul de ecuaţii

$$(6) \qquad a_i^\alpha x^i + b^\alpha = 0, \quad rang\left(a_i^\alpha\right) = n-1, \quad \alpha = \overline{1, n-1},$$

iar un hiperplan $A'_{n-1} \subset A_n$ prin ecuaţia generală

$$(7) \qquad a_i x^i + b = 0, \quad rang(a_i) = 1.$$

Poziţia dreptei A_1 faţă de hiperplanul A'_{n-1} va rezulta din discuţia sistemului de ecuaţii liniare

$$(8) \qquad \begin{cases} a_i^\alpha x^i + b^\alpha = 0 \\ a_i x^i + b = 0 \end{cases}.$$

Se disting următoarele cazuri:

Cazul I: $rang\begin{pmatrix} a_i^\alpha \\ a_i \end{pmatrix} = n$. În aceste condiţi, sistemul (8) admite o soluţie unică ce se determină cu ajutorul regulii lui Cramer, adică dreapta intersectează hiperplanul într-un punct.

Cazul I: $rang\begin{pmatrix} a_i^\alpha \\ a_i \end{pmatrix} = n-1$. Deoarece avem şi $rang\left(a_i^\alpha\right) = n-1$, rezultă că orice soluţie a sistemului omogen asociat lui (6) este soluţie şi pentru ecuaţia omogenă asociată ecuaţiei (7). În consecinţă, spaţiul director al dreptei A_1 este conţinut în spaţiul director al hiperplanului A'_{n-1}, adică dreapta este paralelă cu hiperplanul.

Dacă $rang\begin{pmatrix} a_i^\alpha & b^\alpha \\ a_i & b \end{pmatrix} = n$, sistemul (8) este incompatibil, deci intersecţia dintre dreaptă şi hiperplan este vidă, adică dreapta este paralelă cu hiperplanul.

Dacă $rang\begin{pmatrix} a_i^\alpha & b^\alpha \\ a_i & b \end{pmatrix} = n-1$, sistemul (8) este compatibil şi orice soluţie a sistemului (6) este soluţie şi pentru sistemul (7), adică dreapta este conţinută în hiperplan.

SNOP DE HIPERPLANE

Fie A un spaţiu afin şi L spaţiul său director.

Prin ***snop de hiperplane de centru subspaţiul*** $A' \subset A$ se înţelege mulţimea hiperplanelor din A ce conţin pe A'.

Prin ***snop de hiperplane de direcţie subspaţiul*** $L' \subset L$ se înţelege mulţimea hiperplanelor din A al căror spaţiu director conţine pe L'.

Pentru spaţiile afine finit dimensionale avem următoarele rezultate matematice care caracterizează snopurile de hiperplane.

Propoziţia 1. Un hiperplan $A''_{n-1} \subset A_n$ de ecuaţie $a_i x^i + b = 0$, aparţine snopului de hiperplane de centru p-planul $A'_p \subset A_n$ dat de sistemul $a_i^\alpha x^i + b^\alpha = 0$, $\alpha = \overline{1,n-p}$, dacă şi numai dacă există $n-p$ scalari λ_α, nu toţi nuli, astfel încât

$$(9) \qquad a_i = \lambda_\alpha a_i^\alpha, \quad b = \lambda_\alpha b^\alpha, \quad \alpha = \overline{1,n-p}.$$

Demonstraţie.

Se consideră sistemul $\begin{cases} a_i x^i + b = 0 \\ a_i^\alpha x^i + b^\alpha = 0 \end{cases}$.

Sistemul este compatibil dacă $rang\begin{pmatrix} a_i^\alpha \\ a_i \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} a_i^\alpha & b^\alpha \\ a_i & b \end{pmatrix} = n-p$ şi deci intersecţia dintre hiperplane este nevidă. Cum A"$_{n-1}$ aparţine snopului de hiperplane de centru p-planul A'$_p \subset A_n$, rezultă că există $n-p$ scalari λ_α, nu toţi nuli, astfel încât $a_i = \lambda_\alpha a_i^\alpha$, $b = \lambda_\alpha b^\alpha$, $\alpha = \overline{1,n-p}$.

Corolar. Dacă un p-plan A'$_p \subset A_n$ este dat prin sistemul de ecuaţii

$$(10) \qquad a_i^\alpha x^i + b^\alpha = 0,\ rang\left(a_i^\alpha\right) = n-p,$$

atunci orice hiperplan ce aparţine snopului de centru A'$_p$ va avea ecuaţia

$$(11) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n-p} \lambda_\alpha \left(a_i^\alpha x^i + b^\alpha\right) = 0,\ \lambda_\alpha \in K.$$

În particular, un snop de plane din A_3 de centru punctul $P_0\left(x_0^i\right)$ se numeşte ***stea de plane*** de centru P_0. Un plan din acest snop va avea ecuaţia de forma

$$(12) \qquad \lambda_1\left(x^1 - x_0^1\right) + \lambda_2\left(x^2 - x_0^2\right) + \lambda_3\left(x^3 - x_0^3\right) = 0.$$

Un snop de plane din A_3 de centru dreapta A_i' dat prin

$$(13) \qquad \begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + a_3^1 x^3 + b^1 = 0 \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + a_3^2 x^3 + b^2 = 0 \end{cases};\ rang\begin{pmatrix} a_1^1 a_2^1 a_3^2 \\ a_1^2 a_2^2 a_3^2 \end{pmatrix} = 2,$$

se numeşte ***fascicul de plane*** de axă A_1'. Un plan din acest fascicul va avea ecuaţia de forma

$$(14) \qquad \lambda_1\left(a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + a_3^1 x^3 + b^1\right) + \lambda_2\left(a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + a_3^2 x^3 + b^2\right) = 0.$$

Propoziţia 2. Un hiperplan A"$_{n-1} \subset A_n$ de ecuaţie $a_i x^i + b = 0$, aparţine snopului de hiperplane paralele de direcţie $L_p \subset L_n$ dat prin sistemul de ecuaţii $a_i^\alpha x^i = 0$, $rang\left(a_i^\alpha\right) = n-p$, dacă şi numai dacă există $n-p$ scalari λ_α astfel încât

$$(15) \qquad a_i = \lambda_\alpha a_i^\alpha,\ \alpha = \overline{1,n-p}.$$

Demonstraţie.

Acest rezultat este un caz particular al propoziţiei 1, pentru $b^\alpha = 0$. Cum $rang\begin{pmatrix} a_i^\alpha \\ a_i \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} a_i^\alpha & b^\alpha \\ a_i & 0 \end{pmatrix} = n-p$ şi $rang\left(a_i^\alpha\right) = n-p$, rezultă că hiperplanul A"$_{n-1}$ aparţine

snopului de hiperplane paralele de direcţie $L_p \subset L_n$ şi deci există $n-p$ scalari λ_α, nu toţi nuli, astfel încât $a_i = \lambda_\alpha a_i^\alpha$, $\alpha = \overline{1,n-p}$.

Corolar. Dacă un p-plan $A'_p \subset A_n$ este dat prin sistemul de ecuaţii (10), atunci orice hiperplan paralel cu A'_p va avea ecuaţia

$$(16) \quad \sum_{\alpha=1}^{n-p} \lambda_\alpha a_i^\alpha x^i + \lambda = 0,\ \lambda \in K,\ rang(\lambda_\alpha) = 1.$$

În particular, un hiperplan paralel cu un hiperplan de ecuaţie (7), va avea o ecuaţie de forma

$$(17) \quad a_i x^i + \lambda = 0,\ \lambda \in K.$$

Observaţie. Un plan din snopul de plane din A_3 paralel cu o dreaptă A_1' dată prin sistemul (13), va avea o ecuaţie de forma

$$(18) \quad \lambda_1\left(a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + a_3^1 x^3 + b^1\right) + \lambda_2\left(a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + a_3^2 x^3 + b^2\right) + \lambda = 0,\ rang(\lambda_1, \lambda_2) = 1.$$

APLICAŢII

A1. *Fie hiperplanele* $(p_1): 4x - y + 3z - 1 = 0$ *şi* $(p_2): x + 5y - z + 2 = 0$. *Să se determine ecuaţia hiperplanului ce trece prin dreapta prin dreapta* $d = p_1 \cap p_2$ *şi prin origine, respectiv ecuaţia hiperplanului ce trece prin* d *şi este perpendicular pe hiperplanul* $7x - y + 5z - 3 = 0$.

Rezolvare: Ecuaţia comună a tuturor hiperplanelor care trec prin $d = p_1 \cap p_2$ (cu excepţia lui p_2) este $p_1 + \lambda p_2 = 0$, cu $\lambda \in \mathbf{R}$, adică

$$4x - y + 3z - 1 + \lambda(x + 5y - z + 2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 4)x + (5\lambda - 1)y + (3 - \lambda)z + 2\lambda - 1 = 0.$$

Dacă originea $O(0,0,0)$ aparţine acestui hiperplan, atunci $2\lambda - 1 = 0$, deci $\lambda = \frac{1}{2}$. În aceste condiţii, ecuaţia hiperplanului ce conţine originea şi dreapta d este

$$4x - y + 3z - 1 + \frac{1}{2}(x + 5y - z + 2) = 0, \text{ adică } 9x + 3y + 5z = 0.$$

Pe de altă parte, două hiperplane $a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$ şi $a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$ sunt perpendiculare dacă şi numai dacă vectorii-nomală ai lor sunt ortogonali, adică $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$.

În acest caz, avem $7(\lambda+4)-1(5\lambda-1)+5(3-\lambda)=0$, adică $3\lambda=44\Leftrightarrow\lambda=\frac{44}{3}$.

Deci ecuaţia hiperplanului ce conţine dreapta d şi este perpendicular pe hiperplanul $7x-y+5z-3=0$ este $56x+27y-35z+85=0$. ■

A2. *Fie un vector nenul* $c=(c_1,c_2,...,c_n)\in\mathbf{R}^n$. *Pentru orice* $\alpha\in\mathbf{R}$ *se consideră hiperplanul* $H_\alpha=\left\{(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbf{R}^n\mid\sum_{i=1}^{n}c_ix_i=\alpha\right\}$. *Să se arate că* $c\perp H_\alpha$, *oricare ar fi* $\alpha\in\mathbf{R}$.

<u>*Rezolvare:*</u> Considerăm punctele $A=(a_1,a_2,...,a_n)$ şi $B=(b_1,b_2,...,b_n)$ din H_α şi vom demonstra că vectorul c este ortogonal pe vectorul $AB=(b_1-a_1,b_2-a_2,...,b_n-a_n)$, adică produsul scalar dintre cei doi vectori este nul $(<c,AB>=0)$.

Dar $\sum_{i=1}^{n}c_ia_i=\alpha$ şi $\sum_{i=1}^{n}c_ib_i=\alpha$, deci $\sum_{i=1}^{n}c_i(b_i-a_i)=0$, adică $<c,AB>=0$.

De altfel, H_α este paralel cu H_0, iar

$$H_0=\left\{(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbf{R}^n\mid\sum_{i=1}^{n}c_ix_i=\alpha\right\}=\left\{x\in\mathbf{R}^n\mid<c,x>=0\right\}.$$ ■

Observaţie. Pentru $n=2$ hiperplanele sunt drepte şi fiind dată o dreaptă $ax+by+c=0$ în $\mathbf{R}^2$, un vector perpendicular pe ea este $N=ai+bj$.

Pentru $n=3$ hiperplanele sunt plane uzuale şi fiind dat un plan $ax+by+cz+d=0$, un vector-normală la acest plan este $N=ai+bj+ck$.

A3. a) *Fie hiperplanul* $(p):2x+y+2z-3=0$. *Să se scrie ecuaţia hiperplanului paralel cu* (p) *ce conţine punctul* $A(2,3,0)$ *şi să se afle măsura unghiului dintre hiperplanul* (p) *şi hiperplanul* $(q):x-2y-2z+5=0$.

b) *Se consideră hiperplanul* $(p):2x_1+x_2+x_3+4x_4+5=0$ *în* $\mathbf{R}^4$. *Să se scrie ecuaţia hiperplanului ce conţine punctul* $A(1,1,3,-1)$ *şi este paralel cu* (p) *şi să se afle măsura unghiului dintre hiperplanul* (p) *şi hiperplanul* $(q):x_1+3x_2-3x_3+2x_4-7=0$.

Rezolvare: **a)** Orice hiperplan paralel cu (p) are ecuaţia de forma $2x+y+2z=\alpha$, cu $\alpha \in \mathbf{R}$. Din condiţia ca punctul A să aparţină hiperplanului rezultă că $2\cdot 2+3+2\cdot 0=\alpha$, adică $\alpha=7$, deci hiperplanul paralel cu (p) ce conţine punctul A va avea ecuaţia $2x+y+2z-7=0$.

Fie $N_1=2i+j+2k$ vectorul-normală la hiperplanul (p) şi $N_2=i-2j-2k$ vectorul-normală la hiperplanul (q). Măsura unghiului dintre cele două hiperplane va fi $\theta=\left(\hat{N_1,N_2}\right)$. Atunci $\cos\theta=\dfrac{N_1\cdot N_2}{\|N_1\|\cdot\|N_2\|}=-\dfrac{4}{9}$.

b) Orice hiperplan paralel cu (p) va avea ecuaţia $2x_1+x_2+x_3+4x_4=\alpha$. Punând condiţia ca acesta să conţină punctul A, rezultă $\alpha=2$, deci hiperplanul paralel cu (p) ce trece prin A va avea ecuaţia $2x_1+x_2+x_3+4x_4-2=0$.

Conform aplicaţiei anterioare, vectorii $c_1=(2,1,1,4)$ şi $c_2=(1,3,-3,2)$ vor fi normali-ortogonali la (p) şi respectiv (q) şi deci

$$\cos\left(\hat{p,q}\right)=\cos\left(\hat{c_1,c_2}\right)=\frac{<c_1,c_2>}{\|c_1\|\cdot\|c_2\|}=\frac{10}{\sqrt{22}\cdot\sqrt{23}}. \quad \blacksquare$$

BIBLIOGRAFIE

1. **Ornea L., Turtoi A.** – *O introducere în geometrie* – Editura Theta, Bucureşti – 2000
2. **Niţă A., Stănăşilă T.** – 1000 de probleme rezolvate şi exerciţii fundamentale pentru studenţi şi elevi – Editura ALL, Bucureşti – 1997.

6. Metode de demonstrare a unei inegalități

Ștefănuț Ciochină

Școala Gimnazială "I. L. Caragiale", Brăila

În acestă notă sunt prezentate o serie de metode distincte de rezolvare a unei inegalitați întâlnite în Gazeta Matematică nr. 10/2015 (S.L.15.246). Scopul acestei note îl constituie crearea unor exemple de abordare a unei inegalități în concursurile școlare.

Fie x, y, z numere reale pozitive cu proprietatea $xy+yz+zx=2$. Să se arate că $xyz\left(9xyz+x+y+z\right)\le 4$ [1].

Soluția1

Utilizăm inegalitatea lui Schur:

$$x^t\left(x-y\right)\left(x-z\right)+y^t\left(y-z\right)\left(y-x\right)+z^t\left(z-x\right)\left(z-y\right)\ge 0.$$

Astfel pentru $t=0$ obținem

$$\left(x-y\right)\left(x-z\right)+\left(y-z\right)\left(y-x\right)+\left(z-y\right)\left(z-x\right)\ge 0$$

Prin calcul direct rezultă $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx \Rightarrow \left(x+y+z\right)^2\ge 3\left(xy+yz+zx\right)$ (1)

Din (1) rezultă $\left(xy+yz+zx\right)^2\ge 3\left(xyyz+yzzx+zxxy\right)=3xyz\left(x+y+z\right)$ (2)

Înmulțind (1) cu pătratul (2) rezultă

$$\left(xy+yz+zx\right)^3\ge 27x^2y^2z^2 \quad (3)$$

Adunând (2) și (3) obținem

$$\left(xy+yz+zx\right)^2+\left(xy+yz+zx\right)^3\ge 3xyz\left(x+y+z\right)+27x^2y^2z^2$$

$$\Rightarrow xyz\left(9xyz+x+y+z\right)\le 4$$

Soluția 2 (*George Florin Șerban*)

Utilizând inegalitatea mediilor: $\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \le \sqrt[3]{xyz} \Rightarrow \frac{3xyz}{xy+yz+xz} \le \sqrt[3]{xyz}$

$\Rightarrow 3xyz \le 2\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow 27x^3y^3z^3 \le 8xyz \Rightarrow x^2y^2z^2 \le \frac{8}{27} \Rightarrow 9x^2y^2z^2 \le \frac{8}{3}$

Dar $xyz\left(9xyz+x+y+z\right)=9x^2y^2z^2+xyz\left(x+y+z\right)$

Rezultă că pentru a demonstra inegalitatea este suficient să demonstram că $xyz\left(x+y+z\right)\le\frac{4}{3}$.

Dar această inegalitate este echivalentă cu

$xyz\left(x+y+z\right)\le\frac{\left(xy+yz+xz\right)^2}{3} \Leftrightarrow x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2 \ge x^2yz+xy^2z+xyz^2$

Pentru demonstrarea ultimei inegalitați aplicăm inegalitatea C.B.S.

$\left(x^2yz+xy^2z+xyz^2\right)^2 \le \left(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2\right)\left(x^2z^2+x^2y^2+y^2z^2\right)$

$\left(x^2yz+xy^2z+xyz^2\right)^2 \le \left(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2\right)^2$

$\left(x^2yz+xy^2z+xyz^2\right) \le \left(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2\right)$

În concluzie, $xyz\left(9xyz+x+y+z\right)=9x^2y^2z^2+xyz\left(x+y+z\right)\le\frac{8}{3}+\frac{4}{3}=4$

Soluția 3 (*Gheorghe Alexe*)

Inegalitatea este echivalentă cu $xyz\left(9xyz+x+y+z\right)\le\left(xy+yz+zx\right)^2$

$9x^2y^2z^2+xyz\left(x+y+z\right)\le x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz\left(x+y+z\right)$

$\Rightarrow 9x^2y^2z^2 \le x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+xyz\left(x+y+z\right)$

$\Rightarrow 9 \le \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}$

Avem $\left(xy+yz+zx\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)\ge 9 \Rightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\ge\frac{9}{2}$

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)\geq 9\Rightarrow \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\geq\frac{9}{2}$$

Rezultă $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\geq\frac{9}{2}+\frac{9}{2}=9$

Soluția 4 [2]

$$xyz(9xyz+x+y+z)=xyz\left[\frac{1}{2}(xy+yz+zx)(x+y+z)+9xyz\right]$$

Și $4=\frac{(xy+yz+zx)^3}{2}$

$$\Rightarrow xyz\left[\frac{1}{2}(xy+yz+zx)(x+y+z)+9xyz\right]\leq\frac{(xy+yz+zx)^3}{2}$$

$$\Rightarrow xyz\left[(xy+yz+zx)(x+y+z)+18xyz\right]\leq(xy+yz+zx)^3$$

$$\Rightarrow \sum x^3y^3+3\sum x^3y^2z+6x^2y^2z^2\geq 18x^2y^2z^2+\sum x^3y^2z+3x^2y^2z^2$$

$$\Rightarrow \sum x^3y^3+2\sum x^3y^2z\geq 15x^2y^2z^2$$

Aplicând inegalitatea mediilor obținem:

$$\frac{x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3+2\sum x^3y^2z}{15}\geq\sqrt[15]{x^{30}y^{30}z^{30}}=x^2y^2z^2$$

$$\Rightarrow \sum x^3y^3+2\sum x^3y^2z\geq 15x^2y^2z^2$$

Bibliografie

1. Gazeta Matematică, seria B, nr. 10/2015

2. http://www.artofproblemsolving.com

7. Temă excelenţă : divizibilitatea numerelor naturale. Ecuaţii cu soluţii în : $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$

CLASA a-VI-a

Profesor: Apostol Adelina Monica

1.Arătaţi că nu există pătrate perfecte de forma :
a)3k+2 ; b) 4k+2 ; c) 4k+3 ; d)5k+2 ; e) 5k+3.

2.Arătaţi că produsul a două numere naturale nenule consecutive nu este pătrat perfect.

3.Arătaţi că : $1+3+5+7+\ldots+(2n-1) = n^2$

4.Arătaţi că produsul a trei numere naturale nenule consecutive nu este cub perfect.

5.Arătaţi că numărul $a = 2^{12}\cdot 24^{16}$ nu este cub perfect.

6.Fie a număr natural şi $b = a^4 + (a +1)^4 + (a + 2)^4 + (a + 3)^4 + (a + 4)^4$.Aflaţi restul împărţirii numărului b la 5.

7.Demonstraţi că pentru orice număr natural a ,există un număr natural b,astfel încât numărul: $n = 4\cdot 49^a + 3\cdot 7^b$ să fie pătrat perfect.

8.Fie a;b şi c numere naturale astfel încât : a = b+1 = c + 2.
a) Arătaţi că produsul a·b·c este divizibil cu 6
b)Dacă (a + 7)·(b + 8)·(c + 9) = 1331 ,arătaţi că numărul a·b·c + 1 este pătrat perfect.

9.Dacă a;b;c şi d sunt numere naturale astfel încât : 8a -7b -28c +14d =0 , arătaţi că 14| a·b

10.Determinaţi numărul natural a astfel încât : a+7 | 2012 şi 2013| (8a +58)

11.Aflaţi numerele prime a ;b ;c şi d care verifică egalitatea :
3·a + 5·(3·b + 7·c) = 330 - 45·d

12.Arătaţi că numărul : $n = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31 + 2^{37} + 1$ este compus.

13.Arătaţi că numărul $n = 10^{2013} - 2^{3012}$ nu poate fi pătrat perfect.

14.Aflaţi cel mai mare număr natural de două cifre cu proprietatea că suma dintre pătratul şi cubul lui este un pătrat perfect.

15.Găsiţi numerele naturale prime : a; b; $\overline{ab}$; $\overline{cc}$; $\overline{cb}$; $\overline{cd}$ ştiind că :

ab· (a + b) · (b + $\overline{ab}$ + $\overline{cc}$ + $\overline{cb}$ + $\overline{cd}$) = 2010.

16.Se consideră numărul : x = $25\cdot 2^{n+3}\cdot 5^{n+1} + 2^{n+1}\cdot 5^{n} - 1$; n∈ IN
a) Aflaţi suma cifrelor numărului x
b)Verificaţi dacă x este divizibil cu 11.

17.Fie n∈IN ; n ≥ 2. Aflaţi restul împărţirii numărului n·(n + 1)·(n + 2) la (n- 1).

18.Fie numărul x = $\overline{abcde5}$ divizibil cu a·b·c·d·e.Arătaţi că cel puţin două dintre numerele a;b;c;d;e;5 sunt egale.

19.a) Calculaţi S = $10^n + 10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots\ldots + 10 + 1$;
b)Fie p = $\underbrace{111\ldots1}_{\text{2010 cifre}}$ şi q = $\underbrace{444\ldots\ldots4}_{\text{1005 cifre}}$ .Arătaţi că p + q + 1 este pătrat perfect.

20.Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia : $9x^2 - 4xy - y = 1$.

21.Rezolvaţi în IN ecuaţia : $a^2 + 4b^2 = 14 - 9c^2$.

22.Determinaţi numerele naturale a şi b , ştiind că b este număr prim şi $a + a^2 + b^3 = 98$.

23.Rezolvaţi în IN^* ecuaţia : $x^2 + y^2 - 33z^2 = 8xyz$,ştiind că x este număr prim.

24. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia : $x^3 + y^3 = (x + y)^2$.

25. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia :xy + 7x -5y = 214.

26.Determinaţi numerele naturale a şi b ştiind că: $2^{3a} - 2^{3b} = \overline{xyz}$ şi $\overline{xyz}$ este număr impar.

27.Determinaţi numărul x care verifică egalitatea :

$\frac{a}{x} = \frac{4^{1004} + 8^{669}}{0,25}$; unde a = $2^{2013} - 2^{2011} - 2^{2009}$.

28.Rezolvaţi în mulţimea numerelor raţionale ecuaţia:

$\frac{1}{x-2008} - \frac{1}{x-2009} = \frac{1}{x-2010} - \frac{1}{x-2011}$.

29. Rezolvaţi în IN ecuaţia: $\frac{2xy}{2x+1} = y^2 - 7$

30.Aflaţi numerele prime distincte a;b;c şi d astfel încât :

a + b + c + d = 77 şi 4b +c + 9d = 620.

31. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia :
2·(x + 2)·(y+3)-(x+1)·(y+7) = 9.

32.Determinaţi numerele raţionale x şi y astfel încât x·(x+1) + y·(y +1) = xy -1.

33. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia :$xy^2 + 2008y^2 = 2009$.

34. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia :xy + x + y =4.

35.Fie un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a;b;c numere naturale.Aflaţi volumul paralelipipedului dacă (a -10)·(b -3)·(c +65) =73.

36.Să se rezolve în IN ecuaţia : 4072 + 1·2·3·4·……· x = y^{2z}.

37. Să se rezolve în IN ecuaţiile:

a) $x + \frac{1}{y+\frac{1}{z}} = \frac{37}{16}$;

b) $x + \frac{1}{y+\frac{1}{z+\frac{1}{n}}} = \frac{43}{30}$.

8. Observaţia în cadrul orei de matematică

Florea Maria Luminița- Școala Gimnazială „Sf. Andrei" Tăcuta, Vaslui

Observaţia este definită ca „acţiunea de a privi cu atenţie fiinţele, lucrurile, fenomenele, pentru a le studia, supraveghea şi a trage concluzii asupra acestora "(Petit Larousse ,1998).

A observa nu înseamnă „a vedea", ci mai degrabă a înţelege, a analiza şi organiza realitatea care intră sub incidenţa simţurilor noastre. Atunci când „vedem", obiectele se impun privirii noastre; când observăm, dezvoltăm o atitudine activă, căutăm, selectăm (Dafinoiu, I., 2002, p. 65).

În perspectivă epistemologică şi metodologică se impun câteva precizări. Unii autori susţin că procesul psihic pe care se bazează observaţia pune în acţiune memoria, inteligenţa, atenţia, imaginaţia, receptivitatea emoţională. Rezultă de aici implicarea subiectului cunoscător în actul observaţiei. Astfel, personalitatea şi factorii socio-culturali (valori sociale, influenţa grupului, contextul spaţial şi istoric etc) intervin în observaţie, astfel că pretinsa obiectivitate, caracterul de cunoaştere imediată, senzorială şi neutralitatea acesteia nu se justifică.

Observaţia este o tehnică superioară anchetei sau studiului documentelor când se studiază comportamentul non-verbal, pentru că întregeşte comportamentele individuale şi colective în timpul desfăşurării lor. Deasemenea, este superioară experimentului prin faptul că înregistrează comportamentele în condiţiile naturale de desfăşurare a lor. Spre deosebire de anchetă sau experiment, permite înregistrarea comportamentului timp mai îndelungat (luni sau ani de zile), dacă ne referim la observaţia participativă.

Observaţia prezintă însă şi o serie de dezavantaje, ca oricare dintre metodele ştiinţelor socioumane (Bailey, K. D., 1982 , p. 250):

- un control redus asupra variabilelor externe care pot afecta datele cercetării;
- dificultatea de a studia comportamente intime;

„In sens larg observaţia sociologică este definită ca cercetare concretă, de teren, empirică, iar în sens restrâns ca metodă ştiinţifică de colectare a informaţiilor cu ajutorul simţurilor (văz, auz, miros etc) pentru a verifica ipotezele sau pentru a descrie sistematic şi obiectiv mediul înconjurător, oamenii şi relaţiile interpersonale, comportamentele verbale şi non-verbale, obiectele şi grupurile umane" (Chelcea, S., Mărginean, I., Cauc, I., 1998, p.409).

Dificultăţile cele mai mari apar atunci când vrem să delimităm formele principale de observaţie. Se pot distinge trei specii principale nonexperimentale de culegere a informaţiei:

- observaţia propriu-zisă a unor fenomene prezente;
- observaţia unor fenomene trecute, folosind „urmele" lăsate de acestea, care indiferent de natura lor, reprezintă „documente";
- metode interactive, bazate pe comunicare, pe schimb de informaţii (prin limbaj oral sau scris), între cercetător şi persoanele care participă la viaţa socială studiată (Rotaru, T., Iluţ, P., 2001, p.47).

Există o multitudine de *tipuri de observaţie* şi de *criterii de clasificare* a acestora, care variază de la autor la autor, chiar dacă fondul problematicii rămâne acelaşi (Chelcea, S., Mărginean, I., Cauc, I., 1998, p. 410).

Astfel, William J. Goode distinge:

a) observaţia controlată;

b) observaţia necontrolată, care poate fi observaţia participativă şi observaţia nonparticipativă;

Rène König distinge următoarele tipuri de observaţii:

a) observaţia ştiinţifică, care include observaţia controlată şi observaţia necontrolată;

b) după poziţia faţă de realitate a materialului observat, există observaţia directă şi observaţia indirectă;

c) după poziţia faţă de realitate a observatorului:

-observaţia participativă, care poate fi pasivă şi activă;

-observaţia nonparticipativă (externă), care poate fi extensivă şi intensivă;

Observaţia spontană (empirică) se realizează la nivel cotidian fără a avea o intenţie specifică. Ca actori şi constructori ai socioumanului, oamenii observă tot timpul, fiind „condamnaţi" la a observa ce se întâmplă în jurul lor.

Observaţia ştiinţifică (sistematică). Spre deosebire de observaţia empirică, spontană, observaţia ştiinţifică are la bază anumite ipoteze şi întrebări, iar cercetătorul îşi va limita observaţia la variabilele care intră în formularea ipotezelor sau întrebărilor sale. Acest fapt asigură caracterul organizat şi sistematic al observaţiei ştiinţifice, dar prezintă şi anumite riscuri: nu găsim decât ceea ce căutăm şi nu căutăm decât ceea ce corespunde credinţelor, aşteptărilor şi convingerilor noastre (fundamentate ştiinţific sau nu). Observaţia ştiinţifică se realizează cu mijloace specifice de către persoane cu pregătire specială, cu scopul explicit de a culege date cu caracter ştiinţific.

Observaţia ştiinţifică se deosebeşte de observaţia spontană prin aceea că urmăreşte să dea o semnificaţie lucrurilor şi proceselor percepute, să verifice ipotezele spre a stabili o lege de producere a lor. Observaţia ştiinţifică presupune scopul cunoaşterii şi se desfăşoară după reguli bine stabilite şi îndelung verificate, pentru a confirma sau infirma o teză anterioară.

Observaţia structurată (cantitativă) constă în clasarea materialului empiric vizat într-o grilă de categorii comportamentale dinainte stabilită. Pentru acest tip de observaţie, caracteristic este faptul că face apel la un sistem de categorii în raport cu care se face observaţia.

Observaţia nestructurată (calitativă) „constă în studierea *„din interior"* a unei comunităţi, prin participarea o perioadă mai lungă de timp la activităţile ei, fără a avea o grilă de categorii sau ipoteze specifice prestabilită, aceasta urmând a fi elaborată pe parcursul cercetării sau la sfârşitul acesteia (Iluţ, P., 1997, p. 77). În acest mod se poate alege ceea ce este relevant pentru viaţa de ansamblu a colectivităţii sau pentru conturarea fenomenului cercetat.

Observaţia nonparticipativă (externă) este caracteristică studiilor de laborator şi semnifică situarea observatorului în afara stimulului observat, fiind recomandată în cazul în care încadrarea cercetătorului în sistemul rol-status al grupului ţintă este dificilă (*exemplu*: instituţiile militare, politice, religioase, etc). În cadrul observaţiei nonparticipative, observatorul nu se implică în derularea fenomenului, procesului studiat, nu participă la el. El intră în sistem, dar are o atitudine neutră.

Observaţia participativă presupune „a lua parte pe cât permite situaţia – conştient şi sistematic - la viaţa activă, ca şi la interesele şi sentimentele grupului studiat", a lua parte la viaţa de zi cu zi a grupului (Kluckhohn, F., 1956, p. 414).

9. Soluții – PROBLEMA LUNII DECEMBRIE 2016

Fie *ABCD* un patrulater circumscriptibil, *O* centrul cercului înscris, *P*, *Q*, *R*, *S* punctele de contact ale cercului cu *AB*, *BC*, *CD*, *DA* respectiv, *AP* = 6, *BQ* = 7, *CR* = 8. Să se determine *DS* = *d* şi *OP* = *r*, ştiind că aceste lungimi sunt numere naturale.

Prof. Mănescu Avram Corneliu

Soluţie autor:

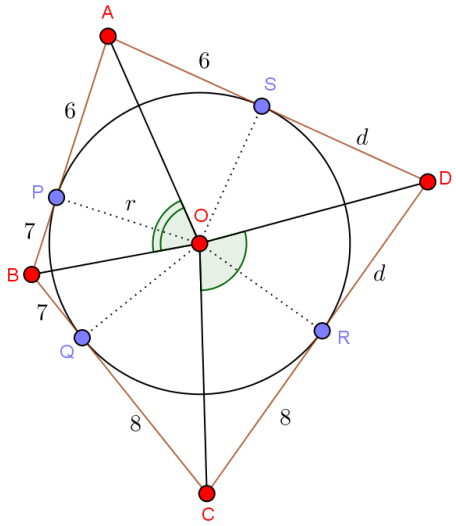
Notăm $m(\angle AOP) = \alpha$, $m(\angle BOQ) = \beta$, $m(\angle COR) = \gamma$, $m(\angle DOS) = \delta$ şi avem

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{r},\ \operatorname{tg}\beta = \frac{7}{r},\ \operatorname{tg}\gamma = \frac{8}{r},\ \operatorname{tg}\delta = \frac{d}{r}.$$

Dar $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$, deci $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -\operatorname{tg}(\gamma+\delta)$, de unde $\frac{13r}{r^2-42} + \frac{(d+8)r}{r^2-8d} = 0$. Se obţine $d = \frac{21r^2-336}{146-r^2}$. Condiţia $d > 0$ impune $16 < r^2 < 146$, deci $5 \le r \le 12$. Prin încercări găsim soluţiile $r = 9$, $d = 21$ şi $r = 12$, $d = 1344$.

Alte soluții:

1. Prof. Biro Istvan



Din $m(AOB)+m(COD)=180^\circ$ rezultă următoarele relații:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{OA\cdot OB}{OC\cdot OD};\ \frac{AD}{BC}=\frac{OA\cdot OD}{OB\cdot OC};$$

$$\frac{AB\cdot AD}{CD\cdot BC}=\frac{OA^2}{OC^2};\ \frac{AB\cdot BC}{CD\cdot AD}=\frac{OB^2}{OD^2},$$

de unde

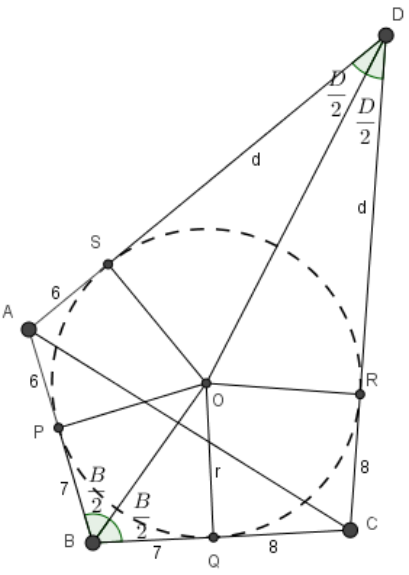
$$\begin{cases} 13(d+6)(r^2+64)=15(d+8)(r^2+36) & (1)\\ (d+6)(d+8)(r^2+49)=195(r^2+d^2) & (2). \end{cases}$$

Pentru a determina numerele naturale *d* și *r* este suficient dacă observăm că din ecuația (1) avem $d=\frac{21(4-r)(4+r)}{r^2-146}$; astfel obținem soluțiile ***r = 9, d = 21*** și ***r = 12, d = 1344*** care verifică și ecuația (2).

2. Prof. Hriţcu Cristian, Liceul „Regina Maria” Dorohoi

Vom calcula aria patrulaterului ABCD în două moduri:

1. $A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ACD}$ folosind formula $A_{ABC} = \frac{l_1 l_2 \sin(\bar{l_1}, \bar{l_2})}{2}$;
2. $A_{ABCD} = A_{ABO} + A_{BCO} + A_{CDO} + A_{DAO}$ folosind formula $A_{ABC} = \frac{bh}{2}$.



1. $A_{ABCD} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin B}{2} + \frac{AD \cdot DC \cdot \sin D}{2} \Rightarrow A_{ABCD} = \frac{13 \cdot 15 \cdot \sin B}{2} + \frac{(6+d)\cdot(8}{}$

.

Dar $\sin B = \frac{2 \cdot tg\frac{B}{2}}{1+tg^2\frac{B}{2}}$, $\sin D = \frac{2 \cdot tg\frac{D}{2}}{1+tg^2\frac{D}{2}}$. Cum ABCD circumscriptibil şi O este centrul cercului înscris atunci (OB, (OD sunt bisectoarele unghiurilor B, respectiv D. Deoarece orice rază este perpendiculară pe tangenta la cerc în punctul de tangenţă, atunci:

- ✓ În ΔPOB $(m(\sphericalangle P) = 90^0)$ vom avea $tg\frac{B}{2} = \frac{OP}{PB} \Rightarrow tg\frac{B}{2} = \frac{r}{7}$;
- ✓ În ΔSOD $(m(\sphericalangle S) = 90^0)$ vom avea $tg\frac{D}{2} = \frac{OS}{PS} \Rightarrow tg\frac{D}{2} = \frac{r}{d}$.

Astfel $\sin B = \frac{2\cdot\frac{r}{7}}{1+(\frac{r}{7})^2} = \frac{14r}{49+r^2}$, $\sin D = \frac{2\cdot\frac{r}{d}}{1+(\frac{r}{d})^2} = \frac{2rd}{d^2+r^2}$.

$$A_{ABCD} = \frac{13\cdot15\cdot\frac{14r}{49+r^2}}{2} + \frac{(6+d)\cdot(8+d)\cdot\frac{2rd}{d^2+r^2}}{2} \Rightarrow A_{ABCD} = r\left(\frac{13\cdot15\cdot7}{49+r^2} + \frac{(6+d)\cdot(8+d)\cdot d}{d^2+r^2}\right).$$

2. $A_{ABCD} = \frac{r\cdot AB}{2} + \frac{r\cdot BC}{2} + \frac{r\cdot CD}{2} + \frac{r\cdot DA}{2} = \frac{r(13+15+d+8+d+6)}{2} \Rightarrow A_{ABCD} = r(21+d).$

Din (1), (2) obţinem ecuaţia $\frac{13\cdot15\cdot7}{49+r^2} + \frac{(6+d)\cdot(8+d)\cdot d}{d^2+r^2} = 21 + d, unde\ d, r \in \mathbb{N}$ cu rădăcinile convenabile r=9 şi d=21.

3. Conf. dr. mat. Gh. Procopiuc, Universitatea Tehnică Iaşi

Soluţie: Dacă $AP = a$, $BQ = b$, $CR = c$, se găseşte imediat că:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{a}, \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{b}, \quad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{c}, \quad \operatorname{tg}\frac{D}{2} = \frac{r}{d}. \tag{1}$$

Dar $A + B + C + D = 2\pi$, adică $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} + \frac{D}{2} = \pi$, de unde

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{D}{2} -$$

$$- \left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\right) \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{D}{2} - \left(\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{D}{2}\right) \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = 0.$$

Ţinând aici seama de (1), obţinem

$$(ab + bc + ca)\, d + abc - (a + b + c + d)\, r^2 = 0.$$

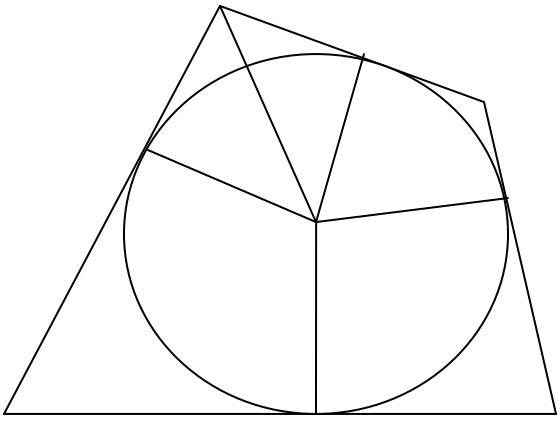
Pentru $a = 6$, $b = 7$, $c = 8$ aceasta devine $146d + 336 = (d + 21)\, r^2$ şi deci

$$d = \frac{21\,(r^2 - 16)}{146 - r^2}.$$

Cum r şi d sunt numere naturale, rezultă $16 < r^2 < 146$, de unde:

$$r = 9, \ d = 21 \quad \text{sau} \quad r = 12, \ d = 1344.$$

4. Prof. Codreanu Ioan – Viorel



Aratam ca are loc relatia $r^2 = \dfrac{abc+bcd+cda+dab}{a+b+c+d}$, unde AP = a , BQ =b , DS =d si OP = r .

Din Δ AOP rezulta $\text{tg}\ \frac{A}{2} = \frac{r}{a}$. Analog obtinem $\text{tg}\ \frac{B}{2} = \frac{r}{b}$, $\text{tg}\ \frac{C}{2} = \frac{r}{c}$, $\text{tg}\ \frac{D}{2} = \frac{r}{d}$ (1) .

Utilizand relatiile $\text{tg}\ (\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}+\frac{D}{2}) = \frac{tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}-tg\frac{A}{2}.tg\frac{B}{2}.tg\frac{C}{2}}{1-tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}-tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}-tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}}$ si

$\frac{A+B+C}{2} = 180^0 - \frac{D}{2}$ obtinem:

$-\text{tg}\ \frac{D}{2} = \frac{tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}-tg\frac{A}{2}.tg\frac{B}{2}.tg\frac{C}{2}}{1-tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}-tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}-tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}}$ dupa care $\Sigma\ \text{tg}\frac{A}{2} = \Sigma\ \text{tg}\frac{A}{2}\ \ \text{tg}\frac{B}{2}\ \text{tg}\frac{C}{2}$ (2)

Din (1) si (2) rezulta $r(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}) = r^3(\frac{1}{abc}+\frac{1}{bcd}+\frac{1}{cda}+\frac{1}{dab})$ si $r^2 = \frac{abc+bcd+cda+dab}{a+b+c+d}$ (3)

Inlocuim in (3) a = 6, b= 7 , c= 8 , si obtinem $r^2 = \frac{6X8X8+7X8Xd+8XdX6+dX6X7}{6+7+8+d}$

Dupa care $r^2 = \frac{336+146d}{21+d}$, $r \in N$ si $d \in N$

Rezulta 21+d / 336+146d si 21 +d / 146(21+d)

21+d / 3066 + 146d dupa care 21 +d / 2730 (4)

Descompunerea in produs de numere prime a numarului 2730 este 2730 = 2X3X5X7X13 de unde rezulta ca 2730 are $2^5 = 32$ divizori naturali.

Divizorii lui 2730 sunt : 1, 2730, 2, 1365, 3, 910,5, 546, 6, 455, 7, 390, 10, 273, 13,210,14,195, 15, 182, 21,130, 26, 105, 30, 91, 35, 78, 39, 70, 42 si 65 (5)

Din (4) , (5) si 21 +d >21 obtinem ca valori posibile pentru d :
2709, 1344,889, 525, 434, 369 , 252 , 189, 174, 161, 109, 5, 84, 9, 70, 14, 57, 18, 49,21,44.

Folosind egalitatea $r^2 = \frac{336+146d}{21+d}$ obtinem ca valori posibile pentru r^2 :
145,144,143,141,140,139,136,133,132,131,125,41,120,55,116,68,111,76,107,81,105 si pentru ca r^2 este patrat perfect retinem doar 144 si 81 dupa care r este 12 sau 9.
Obtinem solutiile d = 1344, r = 12 sau d = 21, r = 9.

10. PROBLEMA LUNII IANUARIE 2017

"În triunghiul ABC fie D mijlocul lui AC, E mijlocul lui BC, F mijlocul lui BE și G mijlocul lui EC. Să se calculeze valoarea raportului $\frac{MN}{NP}$*, unde M, N, P sunt punctele de intersecție al lui BD cu AF, AE respectiv AG."*

Autor : Prof. Biro Istvan

Așteptăm soluții cât mai interesante până pe data de 3.02.2017 pe adresa de e-mail revista@mateinfo.ro



11. MODEL PENTRU LUNA IANUARIE 2017
EVALUARE NAȚIONALĂ LA MATEMATICĂ

Prof: Dorneanu Bogdan

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru: 2 ore.

SUBIECTUL I – Pe foaia de examen se trec doar rezultatele. (30 de puncte)

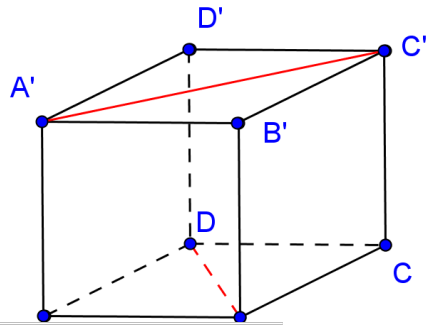
(5p) **1.** Rezultatul calculului 1054 + 1054 : 2 este … .

(5p) **2.** Mulţimea $A=\{x\in\mathbb{R}/-2\le x-1<3\}$ scrisă ca interval este …

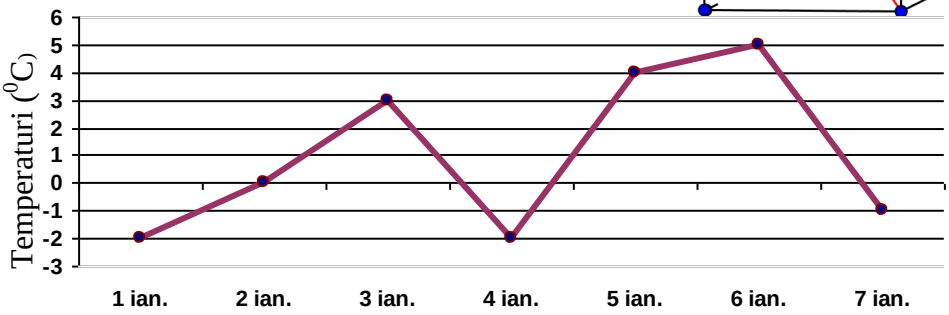
(5p) **3.** Dacă un caiet şi trei creioane costă 12 lei, atunci trei caiete şi nouă creioane costă …lei

(5p) **4.** Într-un triunghi dreptunghic un unghi ascuţit are măsura de 30^0, iar ipotenuza are lungimea de 12 cm. Lungimea catetei care se opune unghiului cu măsura de 30^0 este … cm

(5p) **5.** În figura alăturată este reprezentat un cub $ABCDA'B'C'D'$. Unghiului format de dreptele BD şi $A'C'$ are măsura de … ^{0}.



(5p) **6.** Graficul alăturat prezintă evoluţia temperaturilor din prima săptămâna a lunii ianuarie a anului 2012. Temperatura media înregistrată în această perioadă este de …… ^0C.



SUBIECTUL II – Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete. (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenaţi pe foia de examen o piramidă triunghiulară regulată punând în evidenţă înălţimea şi apotema piramidei.

(5p) **2.** Bunicul plăteşte la piaţă suma de 12 lei cumpărând 2 kg de castraveţi şi 3 kg de

morcov. Ionel, nepotul cel mai mare, plăteşte suma de 16 lei cumpărând 4kg de castraveţi şi 2 kg de morcov. Cât costă un kg de castraveţi? Dar un kg de morcov?

(5p) **3**. Să se afle trei numere naturale a căror sumă este 170, ştiind că acestea sunt direct proporţionale cu 4, 6, respectiv, 7.

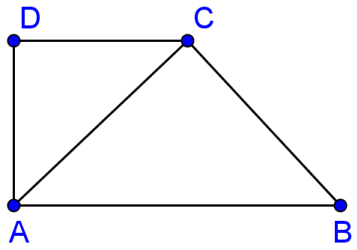
4. Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x+1}+\frac{x}{x^2-1}\right):\frac{5}{x^2-2x+1}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

(5p) **a)**Arătaţi că $E(x)=\frac{x-1}{x+1}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

(5p) **b)**Determinaţi valorile naturale ale lui x pentru care $E(x)\in\mathbb{Z}$.

(5p) **5**. Determinaţi valorile întregi ale lui x şi y astfel încât propoziţia $\sqrt{x^2-4x+3}+\left|y^2+10y+21\right|\le 0$ să fie adevărată.

SUBIECTUL III – Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete.(30 de puncte)



1.Un salon are forma trapezului dreptunghic ABCD din figura alăturată. Se ştie că triunghiurile ABC şi ADC sunt isoscele şi că AB = 10m.

(5p) **a)** Determinaţi suprafaţa salonului.

(5p) **b)** Calculaţi raportul dintre aria triunghiului ADC şi a triunghiului ABC.

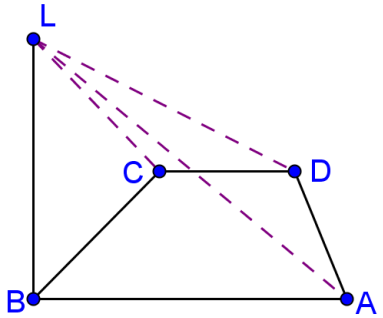
(5p) **c)** Pe suprafaţa ABC se pune parchet care costă 27 lei/ m^2 , iar că pe suprafaţa ADC se pune parchet a cărui preţ este 2 ori mai mare. Ştiind că pierderile sunt de 10% să se afle care este costul parchetării.

2. Un teren de joacă are forma unui trapez dreptunghic ABCD, AB || CD, $m(\sphericalangle A)=90^o$. Pentru iluminatul terenului, în punctul B se pune un stâlp vertical cu înălţimea 5m, ancorat cu trei cabluri în punctele A, C, respectiv D. Se cunosc AB = $8\sqrt{3}$ m, AD = 11m şi BC = 13m.

(5p) **a)** Determinaţi DC.

(5p) **b)** Determinaţi lungimea gardului care înconjoară terenul de joacă.

(5p) **c)** Calculaţi lungimea minimă a cablurilor care ancorează stâlpul.



12. MODEL PENTRU LUNA IANUARIE 2017
BAC MATEMATICĂ
ȘTIINȚELE NATURII ȘI MATE-INFO

Prof: Brabeceanu Silvia

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se arate că $a=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ este număr natural.

(5p) 2. Să se determine x astfel încât să existe intervalul $I=\left[\frac{x^2+1}{2},\frac{3x+4}{4}\right]$.

(5p) 3. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3ax+2b, & x<0\\ (a-b)x+b, & x\geq 0\end{cases}$.Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ ştiind că $A(-1,1)$şi $B\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$sunt pe graficul funcţiei.

(5p) 4. După o reducere a preţului cu 18% un produs costă 820 lei. Să se calculeze preţul iniţial al produsului.

(5p) 5. Se consideră vectorii $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ şi $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$. Să se scrie sub o formă mai simplă expresia $\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{BA}+2\vec{u}-3\vec{v}$.

(5p) 6. În triunghiul ABC, $m(A)=90^0$, $m(C)=30^0$ şi $AB=20\sqrt{3}$. Să se calculeze lungimea înălţimii AD, $D\in BC$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}$ şi $X(a)=I_2+aA$, unde $a\in\mathbb{Z}$.

(5p) a) Calculaţi A^2-2A.

(5p) b) Demonstraţi că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+4ab)$, $\forall a,b\in\mathbb{Z}$.

(5p) c) Arătaţi că $X(a)$este matrice inversabilă, $\forall a\in\mathbb{Z}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ seconsideră legea de compoziţie $x\perp y=\frac{1}{2}(xy-x-y+3)$

(5p) a) Să se demonstreze că $x\perp y=\frac{1}{2}(x-1)(y-1)+1$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

(5p) b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $5^x\perp 3^{x-3}=1$.

(5p) c) Să se calculeze $x\perp x\perp x\perp x\perp x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x+3}$.

(5p) a) Să se scrie ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ a graficului funcţiei f.

(5p) b) Să se determine punctele de extrem pentru funcţia f.

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^x$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{6}{9+x^2}$.

(5p) a) Să se arate că $f(x)\le\dfrac{1}{x}$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

(5p) b) Să se calculeze $\int\limits_1^{\sqrt{3}} f(x)\,dx$.

(5p) c) Să se arate că $arctge\le\dfrac{1}{2}+arctg\dfrac{1}{3}$.

Baremele de notare vor apărea pe www.mateinfo.ro până pe 15 ianuarie 2017.
Modelele sunt subiecte selectate din culegerile www.mateinfo.ro