REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO ISSN 2065-6432

AUGUST 2017

REVISTĂ LUNARĂ DIN FEBRUARIE 2009

revista@mateinfo.ro

MATEINFO.RO

COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ŞI SUSŢINĂTOR PERMANENŢI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ŞI NELA CICEU

ARTICOLE REVISTĂ:

1. PROBLEMA LUNII AUGUST 2017

Prove that in any triangle ABC is true the following inequality

$$\frac{3}{64}\left(1+ctg^2\frac{A}{2}\right)\left(1+ctg^2\frac{B}{2}\right)\left(1+ctg^2\frac{C}{2}\right)+3\geq\frac{\sec\frac{A}{2}+tg\frac{A}{2}}{\sin A}+\frac{\sec\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}}{\sin B}+\frac{\sec\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}}{\sin C}.$$

Proposed by Kevin Soto Palacios, Huarmey, Peru

If you solve the problem, you can post your solution sending it by email to revista@mateinfo.ro .

Deadline 01.09.2017.

2. SOLUȚII - PROBLEMA LUNII IULIE 2017

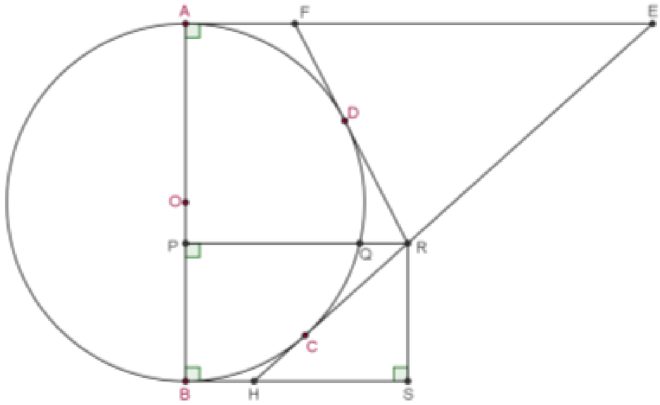
Prof. Biro Istvan

“Fie P un punct oarecare pe diametrul (AB) al cercului C(O,r) și R un punct exterior cercului astfel ca $PR \perp AB$ *și PR = BQ. Tangentele la cerc din punctele A, B, R determină punctele E, F, H, D, C conform figurii alăturate și notăm cu S proiecția lui R pe BH. Arătați că:*

a) AC, BD, FH și PR sunt concurente în punctul G ;

b) patrulaterul DGCS este inscriptibil ;

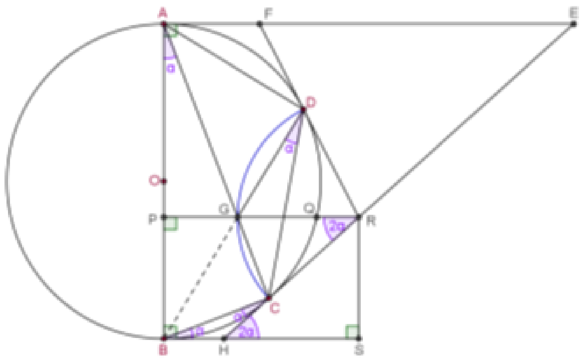
c) EF = 2r . ”

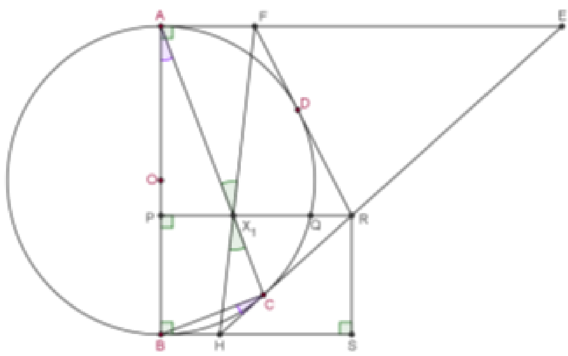


Soluție:

a)**1.**este un caz particular al teoremei lui Newton (Revista Electronică Mateinfo.ro – Ianuarie 2010, pag.21-22)

2.Notăm $\{G\} = PR \cap AC$ și din ΔACE isoscel avem evident $DR = GR = CR \overset{not}{=} k$, adică *R* este centrul cercului *C(R,k)*, circumscris triunghiului *DGC.*





Din $m\left(GC\right)=2\alpha$, unghi la centru în $C(R,k)$, rezultă că $m\left(GDC\right)=\dfrac{m\left(GC\right)}{2}=\alpha$, dar pe de altă parte $\alpha=\dfrac{m\left(BC\right)}{2}=m\left(BDC\right)$, unghi înscris în cercul $C(O,r)$, ceea ce arată că $G\in BD$.

Pentru a arăta că F, G, H sunt colineare notăm $\{X_1\}=FH\cap AC,\ \{X_2\}=FH\cap BD$ și avem:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} m\left(AX_1F\right)=m\left(HX_1C\right) \\ m\left(FAX_1\right)+m\left(HCX_1\right)=180^\circ \end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{X_1F}{X_1H}=\dfrac{AF}{HC} \\ \left.\begin{array}{l} m\left(DX_2F\right)=m\left(HX_2B\right) \\ m\left(FDX_2\right)+m\left(HBX_2\right)=180^\circ \end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{X_2F}{X_2H}=\dfrac{DF}{HB} \\ AF=DF \\ HC=HB \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{X_1F}{X_1H}=\frac{X_2F}{X_2H}\Rightarrow X_1\equiv X_2\equiv G$$

.

b)Este suficient să arătăm că $RS=k$, ceea ce rezultă din:

$$\left.\begin{array}{l} BQ^2=PR^2=2r\cdot BP=2r\left(r\pm OD\right)\ (teorema\ \ catetei) \\ OR^2=r^2+k^2=OD^2+PR^2 \\ r^2+k^2=OD^2+2r\left(r\pm OD\right) \\ k^2=OD^2\pm 2rOD+r^2=\left(r\pm OD\right)^2=BP^2 \end{array}\right\}\Rightarrow RS=BP=k.$$

c)Din $PR\parallel AE$ avem:

$$\frac{EF}{GR}=\frac{FH}{GH}=\frac{AB}{BP}=\frac{2r}{GR}\Rightarrow EF=2r.$$

ALTE SOLUȚII:

1) Prof. Constantin Telteu

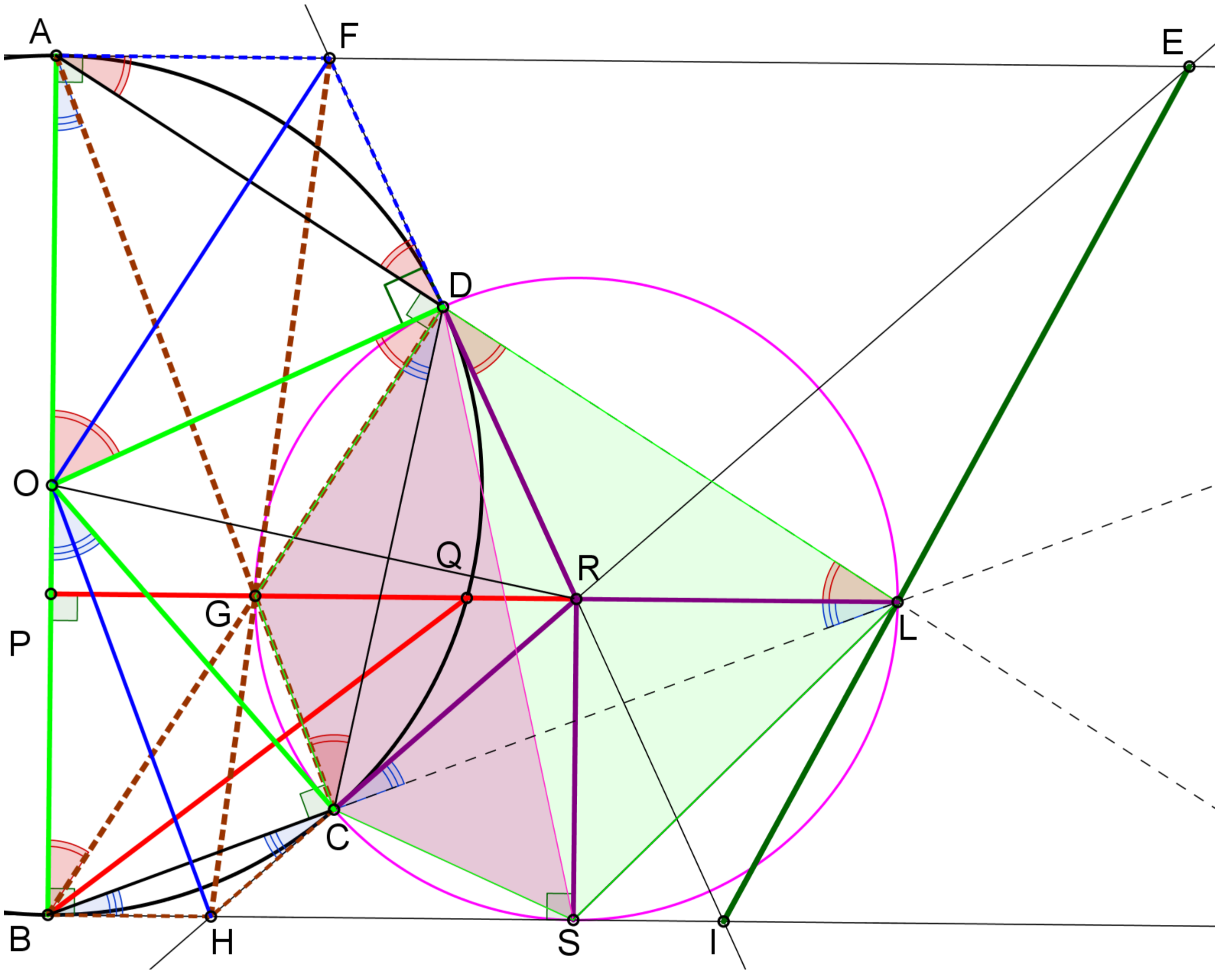
a) Notăm $OP = p$ și avem:

$PQ=\sqrt{r^2-p^2}$ (cu t. lui Pitagora în ΔOPQ);

$BQ=\sqrt{PQ^2+PB^2}=\sqrt{r^2-p^2+(r-p)^2}=\sqrt{2r(r-p)}=PR$;

$RD^2=RO^2-OD^2=RP^2+OP^2-OD^2=2r(r-p)+p^2-r^2=(r-p)^2 \Rightarrow RD=r-p$;

$RD=PB=RS=RC=r-p.$



Fie $\{G\}=AC\cap BD$ și $\{L\}=AD\cap PR$. ΔDRL este isoscel (are două unghiuri congruente), deci $RL=RD=RC=r-p$.

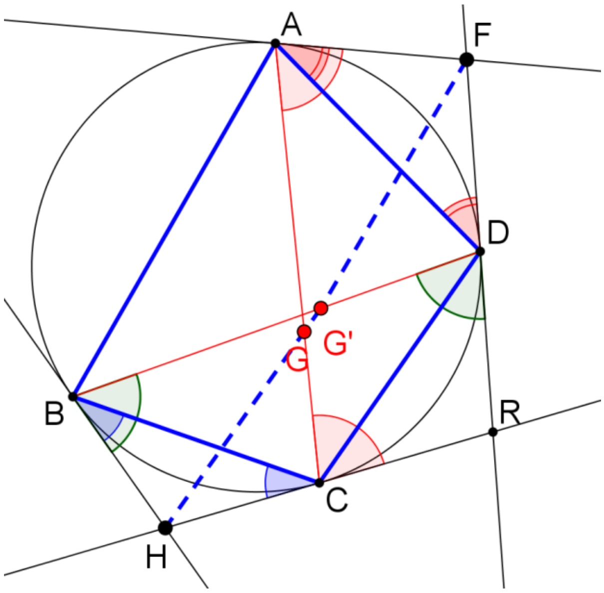
Demonstrăm acum că $L\in BC$.

Fie $\{L'\}=PR\cap BC \Rightarrow SBL'\equiv PL'C\equiv RCL'\Rightarrow \Delta RCL'$ *isoscel* $\Rightarrow RC=RL'$. Deoarece avem și $RC=RL\Rightarrow RL=RL'\Rightarrow L\equiv L'\Rightarrow AD\cap BC\cap PR=\{L\}$.

Deoarece AC, BD, PL sunt înălțimi în ΔABL, ele sunt concurente, și deci, $\{G\} = AC \cap BD \cap PR$.

Mai trebuie arătat că $G \in FH$.(*Demonstrația după ideea domnului profesor Gigel Marga*)

Pentru aceasta considerăm cazul mai general al patrulaterului *ABCD* înscris într-un cerc și tangentele duse la cerc prin vârfurile patrulaterului. Ele formează un alt patrulater (circumscris cercului). Arătăm că diagonalele patrulaterului circumscris conțin punctul de intersecție al diagonalelor patrulaterului *ABCD* (vezi figura următoare).



Fie $\{G\} = HF \cap AC$ și $\{G'\} = HF \cap BD$.

Avem:

$$m(HBG') = m(RDG') = 180^\circ - m(FDG') \Rightarrow \sin HBG' = \sin FDG'$$

$$m(GAF) = m(GCR) = 180^\circ - m(HCG) \Rightarrow \sin GAF = \sin HCG$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A_{BHG'}}{A_{FDG'}} = \dfrac{BG' \cdot HB \cdot \sin HBG'}{DG' \cdot FD \cdot \sin FDG'} = \dfrac{BG' \cdot HB}{DG' \cdot FD} \\[2ex] \dfrac{A_{BHG'}}{A_{FDG'}} = \dfrac{BG' \cdot HG' \cdot \sin BG'H}{FG' \cdot DG' \cdot \sin FG'D} = \dfrac{BG' \cdot HG'}{FG' \cdot DG'} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{HB}{FD} = \frac{HG'}{FG'} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A_{HCG}}{A_{GAF}} = \dfrac{HC \cdot CG \cdot \sin HCG}{AG \cdot AF \cdot \sin GAF} = \dfrac{HC \cdot CG}{AG \cdot AF} \\[2ex] \dfrac{A_{HCG}}{A_{GAF}} = \dfrac{HG \cdot CG \cdot \sin HGC}{AG \cdot GF \cdot \sin AGF} = \dfrac{HG \cdot CG}{AG \cdot GF} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{HC}{AF} = \frac{HG}{GF} \qquad (2)$$

Din (1) și (2), ținând cont că $\dfrac{HB}{FD} = \dfrac{HC}{AF}$ obținem: $\dfrac{HG'}{FG'} = \dfrac{HG}{FG} \Rightarrow G \equiv G' \Rightarrow G \in FH$.

Deci: $\{G\} = AC \cap BD \cap PR \cap FH$.

Bonus: Punctele L, I, E sunt coliniare.

Dreptele AB, FH și DC sunt concurente.

Demonstrație: Deoarece

$$\left.\begin{array}{l} AD \cap CB = \{L\} \\ DF \cap BH = \{I\} \\ AF \cap CH = \{E\} \\ \{G\} = AC \cap BD \cap FH \end{array}\right\} \Rightarrow (\text{cu teorema lui Desarques pentru triunghiurile AFD si CHB})\ \textit{că}$$

punctele L, I, E sunt coliniare.

Deoarece:

$$\left.\begin{array}{l} AD \cap BC = \{L\} \\ FD \cap HC = \{R\} \\ AF \cap BH = \{P_\infty\} \text{punctul de la infinit al directiei dreptei LR} \\ L, R, P_\infty \textit{ coliniare} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(cu reciproca teoremei lui}$$

Desarques pentru triunghiurile *ADF* și *BCH*) că *dreptele AB, FH, DC sunt concurente*.

b) $m(GDL) = m(GCL) = 90^\circ \Rightarrow GCLD$ este inscriptibil, centrul cercului circumscris

lui este *R*, deoarece este egal depărtat de trei vârfuri ale patrulaterului și, în plus, $GR = RL = r - p$.

Deoarece $RS = RC \Rightarrow S$ aparține cercului circumscris patrulaterului *DGCL*, deci și patrulaterul *DGCS* este înscris în același cerc.

c) $\Delta HGR \sim \Delta HFE \Rightarrow \frac{GR}{FE} = \frac{BP}{BA} \Rightarrow \frac{r-p}{FE} = \frac{r-p}{2r} \Rightarrow FE = 2r.$

2) Prof. Păcurar Cosmin

Am considerat cercul $\mathcal{C}(0, r)$ în sistemul cartezian xOy cu A$(0, r)$,B$(0, -r)$,O$(0,0)$,P$(0, -\alpha)$ unde $\alpha>0$, cu R în cadranul 4. $\mathcal{C}(0, r)$: $x^2 + y^2 = r^2$

a)$QP^2 = r^2 - \alpha^2 \Rightarrow QP = \sqrt{r^2 - \alpha^2} \Rightarrow Q\left(\sqrt{r^2 - \alpha^2}, -\alpha\right)$.

$BQ^2 =$
$(r-\alpha)^2 + r^2 - \alpha^2 = 2r(r-\alpha) \Rightarrow BQ = \sqrt{2r(r-\alpha)} = PR \Rightarrow R\left(\sqrt{2r(r-\alpha)}, -\alpha\right), S\left(\sqrt{2r(r-\alpha)}, -r\right)$.

$\mathcal{C}(0, r)$: $x^2 + y^2 = r^2$

Fie $M(x_t, y_t) \in \mathcal{C}(0, r) \Rightarrow x_t = \pm\sqrt{r^2 - y_t^2}, y_t = \pm\sqrt{r^2 - x_t^2}$.

Tangenta în M la $\mathcal{C}(0, r)$ are ecuația t:$x_t x + y_t y = r^2$.

Considerăm M în cadranul 1 sau 4 sau pe (Ox ,ne interesează tangentele în C şi D,deci M este unul dintre aceste puncte.

t:$x\sqrt{r^2-y_t^2}+y_t y=r^2$,t: $x_t x+\pm\sqrt{r^2-x_t^2}y=r^2$.

Tangenta în C la $\mathcal{C}(O,r)$ are ecuaţia t_C:$x_C x+y_C y=r^2 \Leftrightarrow t_C$:$x_C x-\sqrt{r^2-x_C^2}y=r^2$

$R\left(\sqrt{2r(r-\alpha)},-\alpha\right)\in t_C \Rightarrow \sqrt{2r(r-\alpha)}\cdot\sqrt{r^2-y_C^2}-y_C\alpha=r^2 \Rightarrow \sqrt{2r(r-\alpha)}\cdot\sqrt{r^2-y_C^2}=r^2+y_C\alpha \Rightarrow$

$y_C^2\left(\alpha^2+2r(r-\alpha)\right)+2r^2y_C\alpha+r^2(2r\alpha-r^2)=0$

$\Delta'=2r^3(r-\alpha)^3 \Rightarrow y_C=\frac{-r^2\alpha-r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}$,analog $y_D=\frac{-r^2\alpha+r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}$ şi

$x_C=\frac{r^2\sqrt{2r(r-\alpha)}-r\alpha(r-\alpha)}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}$,

$x_D=\frac{r^2\sqrt{2r(r-\alpha)}+r\alpha(r-\alpha)}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}$

AC:$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ 0 & r & 1\\ \frac{r^2\sqrt{2r(r-\alpha)}-r\alpha(r-\alpha)}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2} & \frac{-r^2\alpha+r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2} & 1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$

$\begin{vmatrix} x & y-r & 0\\ 0 & r & 1\\ \frac{r^2\sqrt{2r(r-\alpha)}-r\alpha(r-\alpha)}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2} & \frac{-r^2\alpha+r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}-r & 0\end{vmatrix}=0$

PR:y=−α

Fie AC∩PR={G}⇒$\begin{vmatrix} x_G & -\alpha-r & 0\\ 0 & r & 1\\ \frac{r^2\sqrt{2r(r-\alpha)}-r\alpha(r-\alpha)}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2} & \frac{-r^2\alpha+r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}-r & 0\end{vmatrix}=0 \Rightarrow$

$x_G=\frac{\left(r\sqrt{2r(r-\alpha)}-\alpha(r-\alpha)\right)(\alpha+r)}{(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}+\alpha^2+2r^2-r\alpha}$,$y_G=-\alpha$

B,D,G coliniare ⇔$\begin{vmatrix} 0 & -r & 1\\ \frac{r^2\sqrt{2r(r-\alpha)}+r\alpha(r-\alpha)}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2} & \frac{-r^2\alpha+r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2} & 1\\ \frac{\left(r\sqrt{2r(r-\alpha)}-\alpha(r-\alpha)\right)(\alpha+r)}{(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}+\alpha^2+2r^2-r\alpha} & -\alpha & 1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$

$\begin{vmatrix} 0 & -r & 1\\ \frac{r^2\sqrt{2r(r-\alpha)}+r\alpha(r-\alpha)}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2} & \frac{-r^2\alpha+r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}+r\alpha^2-2r^2\alpha+2r^3}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2} & 0\\ \frac{\left(r\sqrt{2r(r-\alpha)}-\alpha(r-\alpha)\right)(\alpha+r)}{(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}+\alpha^2+2r^2-r\alpha} & -\alpha+r & 0\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$

$(r-\alpha)\left(r^2\sqrt{2r(r-\alpha)}+r\alpha(r-\alpha)\right)=\frac{r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}+r\alpha^2-3r^2\alpha+2r^3}{(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}+\alpha^2+2r^2-r\alpha}\cdot\left(r\sqrt{2r(r-\alpha)}-\alpha(r-\alpha)\right)(\alpha+r)$

$\Leftrightarrow r\sqrt{2r(r-\alpha)}+\alpha(r-\alpha)=\frac{\sqrt{2r(r-\alpha)}-\alpha+2r}{(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}+\alpha^2+2r^2-r\alpha}\cdot\left(r\sqrt{2r(r-\alpha)}-\alpha(r-\alpha)\right)(\alpha+r)\Leftrightarrow$

$\left(r\sqrt{2r(r-\alpha)}+\alpha(r-\alpha)\right)\left((r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}+\alpha^2+2r^2-r\alpha\right)==\left(\sqrt{2r(r-\alpha)}-\alpha+2r\right)\left(r\sqrt{2r(r-\alpha)}-\alpha(r-\alpha)\right)(\alpha+r)\Leftrightarrow$

$2r^2(r-\alpha)^2+r(\alpha^2+2r^2-r\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}+\alpha(r-\alpha)^2\sqrt{2r(r-\alpha)}+\alpha(r-\alpha)(\alpha^2+2r^2-r\alpha)=$

$=2r^2(r^2-\alpha^2)-\alpha(r^2-\alpha^2)\sqrt{2r(r-\alpha)}+r(\alpha+r)(2r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}-\alpha(r^2-\alpha^2)(2r-\alpha)\Leftrightarrow$

$(r-\alpha)\,(2r^3-2r^2\alpha+\alpha^3+2r^2\alpha-r\alpha^2)+\left(r(\alpha^2+2r^2-r\alpha)+\alpha(r-\alpha)^2\right)\sqrt{2r(r-\alpha)}=$

$=(r-\alpha)(r+\alpha)(2r^2-2r\alpha+\alpha^2)+\left(r(\alpha+r)(2r-\alpha)-\alpha(r^2-\alpha^2)\right)\sqrt{2r(r-\alpha)}\Leftrightarrow$

$(r-\alpha)\,(2r^3+\alpha^3-r\alpha^2)+(2r^3+\alpha^3-r\alpha^2)\sqrt{2r(r-\alpha)}=$

$=(r-\alpha)\,(2r^3+\alpha^3-r\alpha^2)+(2r^3+\alpha^3-r\alpha^2)\sqrt{2r(r-\alpha)}$,care este adevărată $\Rightarrow G\epsilon BD$

RC:$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_R & y_R & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}=0$,BS:y=−r,RC∩BS={H}$\Rightarrow y_H=-r$,

$$\begin{vmatrix} x_H & -r & 1\\ \sqrt{2r(r-\alpha)} & -\alpha & 1\\ \frac{r^2\sqrt{2r(r-\alpha)}-r\alpha(r-\alpha)}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2} & \frac{-r^2\alpha+r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2} & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x_H-\sqrt{2r(r-\alpha)} & \alpha-r & 0\\ \sqrt{2r(r-\alpha)} & -\alpha & 1\\ \frac{r^2\sqrt{2r(r-\alpha)}-r\alpha(r-\alpha)}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}-\sqrt{2r(r-\alpha)} & \frac{-r^2\alpha+r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}+\alpha & 0\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$$

$$\left(x_H-\sqrt{2r(r-\alpha)}\right)\cdot\left(\frac{-r^2\alpha+r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}+\alpha\right)=\left(\frac{r^2\sqrt{2r(r-\alpha)}-r\alpha(r-\alpha)}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}-\sqrt{2r(r-\alpha)}\right)\cdot(\alpha-r)\Leftrightarrow$$

$$\left(x_H-\sqrt{2r(r-\alpha)}\right)\cdot\left(\alpha(r-\alpha)-r\sqrt{2r(r-\alpha)}\right)=(r-\alpha)\left(r\alpha+(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}\right)\Leftrightarrow$$

$$x_H=\frac{(r-\alpha)\left(r\alpha+(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}\right)}{\alpha(r-\alpha)-r\sqrt{2r(r-\alpha)}}+\sqrt{2r(r-\alpha)}\Leftrightarrow x_H=\frac{r(r-\alpha)\left(\alpha-2r+\sqrt{2r(r-\alpha)}\right)}{\alpha(r-\alpha)-r\sqrt{2r(r-\alpha)}}.$$

RD:$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_R & y_R & 1\\ x_D & y_D & 1\end{vmatrix}=0$,AE:y=r,RD∩AE={F}$\Rightarrow y_F=r$,

$$\begin{vmatrix} x_F & r & 1\\ \sqrt{2r(r-\alpha)} & -\alpha & 1\\ \frac{r^2\sqrt{2r(r-\alpha)}+r\alpha(r-\alpha)}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2} & \frac{-r^2\alpha+r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2} & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x_F-\sqrt{2r(r-\alpha)} & r+\alpha & 0\\ \sqrt{2r(r-\alpha)} & -\alpha & 1\\ \frac{r^2\sqrt{2r(r-\alpha)}+r\alpha(r-\alpha)}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}-\sqrt{2r(r-\alpha)} & \frac{-r^2\alpha+r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}+\alpha & 0\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$$

$$\left(x_F-\sqrt{2r(r-\alpha)}\right)\cdot\left(\frac{-r^2\alpha+r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}+\alpha\right)=\left(\frac{r^2\sqrt{2r(r-\alpha)}+r\alpha(r-\alpha)}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}-\sqrt{2r(r-\alpha)}\right)\cdot(r+\alpha)\Leftrightarrow$$

$\left(x_F-\sqrt{2r(r-\alpha)}\right)\cdot\left(\alpha^3-2r\alpha^2+r^2\alpha+r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}\right)=\left(-(r-\alpha)^2\sqrt{2r(r-\alpha)}+r\alpha(r-\alpha)\right)\cdot\cdot(r+\alpha)\Leftrightarrow x_F=\frac{r\left(\alpha^2+2r^2-r\alpha-(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}\right)}{\alpha(r-\alpha)+r\sqrt{2r(r-\alpha)}}$.

F,G,H coliniare$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\frac{r\left(\alpha^2+2r^2-r\alpha-(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}\right)}{\alpha(r-\alpha)+r\sqrt{2r(r-\alpha)}} & r & 1\\ \frac{\left(r\sqrt{2r(r-\alpha)}-\alpha(r-\alpha)\right)(\alpha+r)}{(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}+\alpha^2+2r^2-r\alpha} & -\alpha & 1\\ \frac{r(r-\alpha)\left(\alpha-2r+\sqrt{2r(r-\alpha)}\right)}{\alpha(r-\alpha)-r\sqrt{2r(r-\alpha)}} & -r & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$

$\frac{r(r-\alpha)\left(\alpha^2+2r^2-r\alpha-(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}\right)}{\alpha(r-\alpha)+r\sqrt{2r(r-\alpha)}}-\frac{2r\left(r\sqrt{2r(r-\alpha)}-\alpha(r-\alpha)\right)(\alpha+r)}{(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}+\alpha^2+2r^2-r\alpha}+\frac{r(r-\alpha)(r+\alpha)\left(\alpha-2r+\sqrt{2r(r-\alpha)}\right)}{\alpha(r-\alpha)-r\sqrt{2r(r-\alpha)}}\Leftrightarrow$

$r(r-\alpha)\left(\frac{\left(\alpha^2+2r^2-r\alpha-(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}\right)}{\alpha(r-\alpha)+r\sqrt{2r(r-\alpha)}}+\frac{(r+\alpha)\left(\alpha-2r+\sqrt{2r(r-\alpha)}\right)}{\alpha(r-\alpha)-r\sqrt{2r(r-\alpha)}}\right)=\frac{2r\left(r\sqrt{2r(r-\alpha)}-\alpha(r-\alpha)\right)(\alpha+r)}{(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}+\alpha^2+2r^2-r\alpha}\Leftrightarrow$

$r(r-\alpha)\left(\frac{\alpha^2+2r^2-r\alpha-(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha(r-\alpha)+r\sqrt{2r(r-\alpha)}}+\frac{\alpha^2-2r^2-r\alpha+(r+\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha(r-\alpha)-r\sqrt{2r(r-\alpha)}}\right)=\frac{2r\left(r\sqrt{2r(r-\alpha)}-\alpha(r-\alpha)\right)(\alpha+r)}{(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}+\alpha^2+2r^2-r\alpha}\Leftrightarrow$

$\frac{-2\alpha^2(r-\alpha)^2+2\alpha^2(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}-4r^3\sqrt{2r(r-\alpha)}+4r^3(r-\alpha)}{(r+\alpha)(2r\alpha-\alpha^2-2r^2)}=\frac{2(r+\alpha)\left(r\sqrt{2r(r-\alpha)}-\alpha(r-\alpha)\right)}{(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}+\alpha^2+2r^2-r\alpha}\Leftrightarrow$

$(\alpha^2r-\alpha^3-2r^3)\left(\alpha-r+\sqrt{2r(r-\alpha)}\right)\left((r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}+\alpha^2+2r^2-r\alpha\right)=$

$=(r+\alpha)^2(2r\alpha-\alpha^2-2r^2)\left(r\sqrt{2r(r-\alpha)}-\alpha(r-\alpha)\right)\Leftrightarrow$

$\left(\alpha-r+\sqrt{2r(r-\alpha)}\right)\left((r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}+\alpha^2+2r^2-r\alpha\right)=(r+\alpha)\left(r\sqrt{2r(r-\alpha)}-\alpha(r-\alpha)\right)\Leftrightarrow$

$-\alpha(r-\alpha)(r+\alpha)+(r^2+r\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}=-\alpha(r-\alpha)(r+\alpha)+r(r+\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}$,care este adevărată$\Rightarrow G\epsilon FH$

Din $AC\cap PR=\{G\}$, $G\epsilon BD$, $G\epsilon FH\Rightarrow AC,BD,FH,PR$ sunt concurente în punctul G.

b)Cu formula distanţei obţinem

$$GD=\sqrt{\left(\frac{r^2\sqrt{2r(r-\alpha)}+r\alpha(r-\alpha)}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}-\frac{\left(r\sqrt{2r(r-\alpha)}-\alpha(r-\alpha)\right)(\alpha+r)}{(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}+\alpha^2+2r^2-r\alpha}\right)^2+\left(\frac{-r^2\alpha+r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}+\alpha\right)^2}$$

$$CD=\sqrt{\left(\frac{r^2\sqrt{2r(r-\alpha)}+r\alpha(r-\alpha)}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}-\frac{r^2\sqrt{2r(r-\alpha)}-r\alpha(r-\alpha)}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}\right)^2+\left(\frac{-r^2\alpha+r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}-\frac{-r^2\alpha-r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{2r(r-\alpha)}{\sqrt{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}}$$

$$GC=\sqrt{\left(\frac{r^2\sqrt{2r(r-\alpha)}-r\alpha(r-\alpha)}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}-\frac{\left(r\sqrt{2r(r-\alpha)}-\alpha(r-\alpha)\right)(\alpha+r)}{(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}+\alpha^2+2r^2-r\alpha}\right)^2+\left(\frac{-r^2\alpha-r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}+\alpha\right)^2}$$

$$GS=\sqrt{\left(\sqrt{2r(r-\alpha)}-\frac{\left(r\sqrt{2r(r-\alpha)}-\alpha(r-\alpha)\right)(\alpha+r)}{(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}+\alpha^2+2r^2-r\alpha}\right)^2+(-r+\alpha)^2}$$

$$CS=\sqrt{\left(\sqrt{2r(r-\alpha)}-\frac{r^2\sqrt{2r(r-\alpha)}-r\alpha(r-\alpha)}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}\right)^2+\left(-r-\frac{-r^2\alpha-r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}\right)^2}=$$

$$=(r-\alpha)\cdot\sqrt{\frac{2r\left(2r-\alpha-\sqrt{2r(r-\alpha)}\right)}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}}=(r-\alpha)\cdot\sqrt{\frac{2r}{2r-\alpha+\sqrt{2r(r-\alpha)}}}.$$

Cu teorema cosinusului obţinem $\cos(\sphericalangle GDS)=\frac{GD^2+CD^2-GC^2}{2GD\cdot CD}$ şi $\cos(\sphericalangle GSC)=\frac{GS^2+CS^2-GC^2}{2GS\cdot CS}$.

$\cos(\sphericalangle GDS)=\cos(\sphericalangle GSC)\Leftrightarrow\frac{GD^2+CD^2-GC^2}{2GD\cdot CD}=\frac{GS^2+CS^2-GC^2}{2GS\cdot CS}\Leftrightarrow\frac{GD^2+CD^2-GC^2}{GD\cdot CD}=\frac{GS^2+CS^2-GC^2}{GS\cdot CS}\Leftrightarrow.......\Leftrightarrow...$
care este adevărată

$\Rightarrow\cos(\sphericalangle GDS)=\cos(\sphericalangle GSC)$şi ţinând cont că funcţia cosinus este injectivă pe $(0,\pi)\Rightarrow$

$m(\sphericalangle GDS)=m(\sphericalangle GSC)\Rightarrow$DGCS inscriptibil.

c) RC:$\begin{vmatrix}x & y & 1\\ x_R & y_R & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}=0$,AF:y=r,CR∩AF={E}$\Rightarrow y_E=r$,

$$\begin{vmatrix}x_E & r & 1\\ \sqrt{2r(r-\alpha)} & -\alpha & 1\\ \frac{r^2\sqrt{2r(r-\alpha)}-r\alpha(r-\alpha)}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2} & \frac{-r^2\alpha+r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2} & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix}x_E-\sqrt{2r(r-\alpha)} & r+\alpha & 0\\ \sqrt{2r(r-\alpha)} & -\alpha & 1\\ \frac{r^2\sqrt{2r(r-\alpha)}-r\alpha(r-\alpha)}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}-\sqrt{2r(r-\alpha)} & \frac{-r^2\alpha+r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}+\alpha & 0\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$$

$$\left(x_E-\sqrt{2r(r-\alpha)}\right)\cdot\left(\frac{-r^2\alpha+r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}+\alpha\right)=\left(\frac{r^2\sqrt{2r(r-\alpha)}-r\alpha(r-\alpha)}{\alpha^2-2r\alpha+2r^2}-\sqrt{2r(r-\alpha)}\right)\cdot(r+\alpha)\Leftrightarrow$$

$$x_E=\frac{(r+\alpha)(r-\alpha)\left(-r\alpha-(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}\right)}{\alpha(r-\alpha)^2-r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}+\sqrt{2r(r-\alpha)}\Leftrightarrow x_E=\frac{(r+\alpha)\left(-r\alpha-(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}\right)}{\alpha(r-\alpha)-r\sqrt{2r(r-\alpha)}}+\sqrt{2r(r-\alpha)}\Leftrightarrow$$

$$x_E=\frac{-r(\alpha^2+2r^2-r\alpha)-r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha(r-\alpha)-r\sqrt{2r(r-\alpha)}}$$

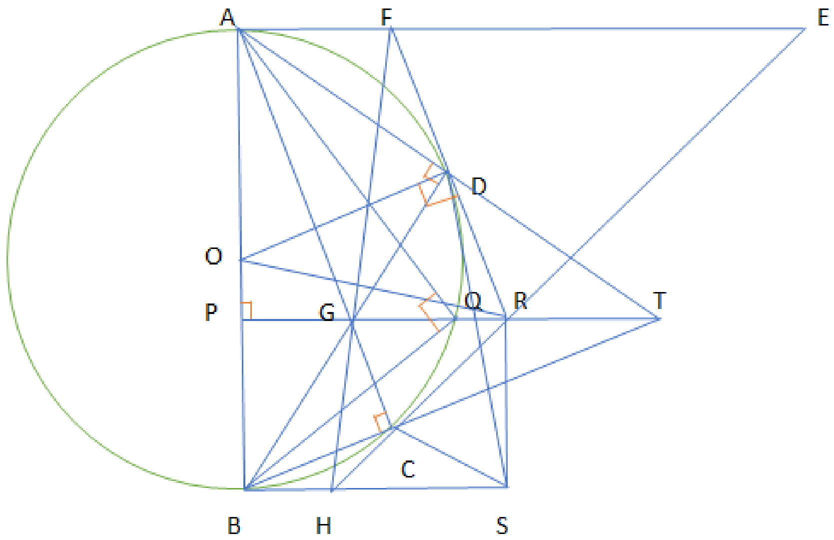
$$EF=|x_E-x_F|=\left|\frac{-r(\alpha^2+2r^2-r\alpha)-r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha(r-\alpha)-r\sqrt{2r(r-\alpha)}}-\frac{r(\alpha^2+2r^2-r\alpha)-r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha(r-\alpha)+r\sqrt{2r(r-\alpha)}}\right|=$$

$$=r\left|\frac{-(\alpha^2+2r^2-r\alpha)-r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha(r-\alpha)-r\sqrt{2r(r-\alpha)}}-\frac{(\alpha^2+2r^2-r\alpha)-r(r-\alpha)\sqrt{2r(r-\alpha)}}{\alpha(r-\alpha)+r\sqrt{2r(r-\alpha)}}\right|=r\left|\frac{-2\alpha(r-\alpha)(\alpha^2+2r^2-r\alpha)-4r^2(r-\alpha)^2}{(r-\alpha)(r+\alpha)(2r\alpha-\alpha^2-2r^2)}\right|=$$

$$=2r\left|\frac{-\alpha(r-\alpha)(\alpha^2+2r^2-r\alpha)-2r^2(r-\alpha)^2}{(r-\alpha)(r+\alpha)(2r\alpha-\alpha^2-2r^2)}\right|=\left|\frac{-\alpha(\alpha^2+2r^2-r\alpha)-2r^2(r-\alpha)}{(r+\alpha)(2r\alpha-\alpha^2-2r^2)}\right|=2r\left|\frac{-\alpha^3-2r^2\alpha+r\alpha^2-2r^3+2r^2\alpha}{2r^2\alpha-r\alpha^2-2r^3+2r\alpha^2-\alpha^3-2r^2\alpha}\right|=$$

$$=2r\left|\frac{r\alpha^2-\alpha^3-2r^3}{r\alpha^2-\alpha^3-2r^3}\right|=2r.$$

3) Prof. Buzea Gabriela, Şcoala Gimnazială Nr. 56, Bucureşti



Fie G punctul de intersectie al dreptelor AC şi FH.

Notăm $m(\sphericalangle FAC) = \frac{m(ADC)}{2} = u$,

$m(\sphericalangle ACR) = \frac{m(ADC)}{2} = u$,

$m(\sphericalangle GCH) = 180^0 - u$,

$m(\sphericalangle AGF) = m(\sphericalangle HGC) = t.$

Aplicând teorema sinusurilor obținem următoarele relații :

-în triunghiul AFG, $\frac{FG}{\sin(\sphericalangle FAG)} = \frac{AF}{\sin(\sphericalangle AGF)} \Rightarrow \frac{FG}{AF} = \frac{\sin u}{\sin t}$, (1).

-în triunghiul GCH, $\frac{GH}{\sin(\sphericalangle GCH)} = \frac{HC}{\sin(\sphericalangle HGC)} \Rightarrow \frac{GH}{\sin(180^0-u)} = \frac{HC}{\sin t} \Rightarrow \frac{GH}{HC} = \frac{\sin u}{\sin t}$, (2).

Din relațiile (1) şi (2) obținem $\frac{FG}{GH} = \frac{AF}{HC}$, (3).

Fie G' punctul de intersecție dintre dreptele FH şi BD.

$m(\sphericalangle DBH) = \frac{m(BCD)}{2} = v \Rightarrow m(\sphericalangle G'BH) = v,$

$m(\sphericalangle FDB) = 180^0 - \frac{m(BCD)}{2} = 180^0 - v,$

$m(\sphericalangle FG'D) = m(\sphericalangle BG'H) = w,$

Aplicând teorema sinusurilor obținem următoarele relații:

-în triunghiul BG'H, $\frac{G'H}{\sin(\sphericalangle G'BH)} = \frac{BH}{\sin(\sphericalangle BG'H)} \Rightarrow \frac{G'H}{BH} = \frac{\sin v}{\sin w}$, (4).

-în triunghiul FG'D, $\frac{FG'}{\sin(\sphericalangle FDG')} = \frac{FD}{\sin(\sphericalangle FG'D)} \Rightarrow \frac{FG'}{\sin(180^0-v)} = \frac{FD}{\sin w} \Rightarrow \frac{FG'}{FD} = \frac{\sin v}{\sin w}$, (5).

Din relațiile (4) și (5) obținem $\frac{FG'}{G'H} = \frac{FD}{BH}$, (6).

Cum AF=FD și BH=HC,din relațiile (3) și (6) obținem $\frac{FG}{GH} = \frac{FG'}{G'H} \Rightarrow G = G' \Rightarrow$ $AC \cap FH \cap BD = \{G\}$, (7).

Fie T punctul de intersecție a dreptelor AD și BC.

Atunci avem egalitățile $m(\sphericalangle ATB) = 90^0 - m(\sphericalangle DAC)$ și

$$m(\sphericalangle DRC) = 180^0 - 2m(\sphericalangle RDC) = 180^0 - 2m(\sphericalangle DAC) = 2m(\sphericalangle ATB).$$

Cum avem și DR=RC, rezultă că R este centrul cercului circumscris al triunghiului TDC.

Dar, avem și că $m(\sphericalangle GDT) = m(\sphericalangle GCT) = 90^0$, deci TG este diametru în cercul circumscris triunghiului TDC, de unde rezultă că punctele T, R și G sunt coliniare.

Dar G este ortocentrul triunghiului TAB, deci RG⊥AB, dar și RP⊥AB, de unde rezultă că R, G și P sunt coliniare, (8).

Din relaăiile (7) și (8) obținem că $AC \cap FH \cap BD \cap RP = \{G\}$ (q.e.d. (a)).

b) Conform demonstrației de la subpunctul a, R este centrul, iar TG diametrul cercului circumscris triunghiului TDC, de unde avem că RT=RD=RG=RC=a (raza cercului circumscris triunghiuui TDC), (9).

În triunghiul dreptunghic QAB aplicând teorema înălțimii obținem

$QP^2=AP\cdot PB \Rightarrow QP^2=r^2-OP^2$, (10).

În triunghiul dreptunghic QPB aplicând teorema lui Pitagora obținem $QP^2=QB^2-PB^2$, (11).

Din relațiile (10) și (11) obținem $r^2+PB^2=QB^2+OP^2$, și folosind din ipoteză că QB=RP rezultă că

$r^2+PB^2=RP^2+OP^2$,(12).

În triunghiul dreptunghic RPO, aplicând teorema lui Pitagora obținem $RP^2+OP^2=RO^2$, (13).

Din (12) și (13) obținem $r^2+PB^2=RO^2$, (14).

Din DO⊥RF rezultă că triunghiul RDO este dreptunghic, și aplicând teorema lui Pitagora obținem că $r^2+a^2=RO^2$, (15).

Din (14) și (15) rezultă că PB=a, dar RPBS este dreptunghi, deci și RS=a, (16).

Folosind (9) și (16) obținem că RT=RD=RG=RC=RS=a, deci punctele T, D, G,C și S sunt conciclice, de unde rezultă că patrulaterul DGCS este inscriptibil,(q.e.d.(b)).

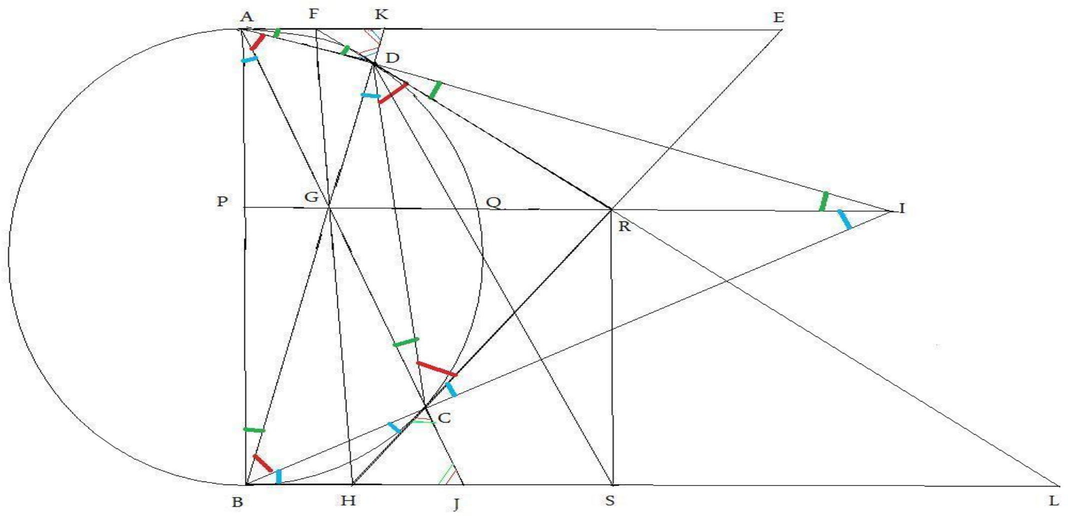
c) În trapezul dreptunghic $ABHF,\ BH \parallel PG \parallel AF \Rightarrow \frac{HG}{GF} = \frac{BP}{PA} \Rightarrow \frac{HG}{HF} = \frac{BP}{AB}$, (17).

Din GR‖FE, obtinem cf. T.F.A. că ΔHGR~ΔHFE ⇒$\frac{HG}{HF} = \frac{GR}{FE}$, (18).

Din (17) și (18) obținem că $\frac{BP}{AB} = \frac{GR}{FE}$, și cum BP=GR=a, obținem că AB=FE.

Dar AB =2r, deci și EF=2r, (q.e.d. (c)).

4) Prof. Cojocaru Petru, Români - Neamț



a) AC, BD, FH și PR sunt concurente în punctul G ;

Fie I, AD∩BC={I}. În ΔABI, G este ortocentru, de aici avem concurența dreptelor AC,BD și PR. Rămâne de arătat G∈ FH. Să urmărim demonstrația. FA=FD și HB=HC (tangente dintr-un punct exterior la cerc) dar și <DAF≡<ADF≡<ABD≡<ACD≡<RDI≡<DIG precum și <CBH≡<HCB≡<BAC≡<BDC≡<RCI≡<CIG (au ca măsură jumătatea arcului AD respectiv BC opuse la vârf, patrulaterul DGCI este inscriptibil) dar și <DAC≡<DBC≡ <DCR≡<CDR.

ΔFDK este isoscel pentru că <FDK≡<FKD (au complemente congruente în ΔGDI respectiv în ΔABK) de aici AF = FK = FD. (1)

La fel pentru ΔHCJ de unde BH = HJ = HC. (2)

Cum AE‖PR‖BH (toate perpendiculare pe AB) și secantele AB, BK, AJ, EH și FL, avem $\frac{PA}{PB} = \frac{GK}{GB} = \frac{GA}{GJ} = \frac{RE}{RH} = \frac{RF}{RL}$ (3)

Din asemănarea ΔAGK ~ ΔBGJ (< GAK ≡ <GJB și <AGK ≡ <JGB) notăm:

< GAK ≡ <GJB , $\frac{GA}{GJ} = \frac{AK}{BJ}$. Raportul $\frac{AK}{BJ}$ simplificat cu 2 devine(urmărim desenul) $\frac{HJ}{AF}$ de aici ΔAGF≡ ΔJGH (cazul II de asemănare a triunghiurilor)de unde <AGF ≡ <JGH, mai mult, unghiurile respective sunt opuse la vârf și G ∈ FH. (q.e.d.)

b) Patrulaterul GDIC este inscriptibil (<GDI ≡ <GCI unghiuri drepte și opuse în patrulater) unde întâlnim <RDI ≡ <RID și < RIC ≡ <RCI de unde rezultă ΔRDI ≡ ΔRID isoscel precum și ΔRCI isoscel și foarte important R este centrul cercului circumscris patrulaterului GDIC.

Consemnăm RG=RD=RI=RC (4) raze ale acestui cerc.

Mai trebuie arătat că și $S \in C_{(R,RC)}$. Pentru aceasta să acceptăm următoarea ;

Propoziție. Într-un triunghi bisectoarea unui unghi și mediatoarea laturii opuse se intersectează pe cercul circumscris triunghiului. (Reciprocele propoziției sunt adevărate).

Fie ΔADK și mediatoarea FM a laturii AK, unde M este intersecția acestei mediatoare cu cercul circumscris triunghiului ADK (intuim doar) de unde rezultă (DM bisectoarea unghiului ADK. Unghiul ADK este opus la vârf cu unghiul GDI și DM conține bisectoarea unghiului GDI, mai concret (DS este bisectoarea <GDI

Cum GR = RI din (4) și SR⊥BH⊥GI $\Longrightarrow S \in C_{(R,RC)}$ (conform propoziției de mai sus).

Punctele C, G, D, I, S fiind conciclice, cerința b) este stabilită.

c) Din ΔFRE ~ ΔLRH și (3) avem $\frac{PA}{PB} = \frac{GK}{GB} = \frac{GA}{GJ} = \frac{RE}{RH} = \frac{RF}{RL} = \frac{EF}{HL} = \frac{GF}{GH}$

reținem EF = $\frac{HL \cdot GF}{GH}$ (5)

În ΔFHL cu GR∥HL (teorema lui Thales) avem $\frac{GR}{HL} = \frac{FG}{FH} = \frac{FR}{FL}$ de aici HL = $\frac{GR \cdot FH}{FG}$ și introducem în (5), astfel EF = $\frac{GR \cdot FH \cdot FG}{HG \cdot FG}$ iar după simplificare EF = $\frac{GR \cdot FH}{HG}$ (6)

La (3) atașăm și raportul $\frac{GF}{GH}$ (FH fiind acum secanta paralelelor)

$\frac{GF}{GH} = \frac{PA}{PB} = \frac{GK}{GB} = \frac{GA}{GJ} = \frac{RE}{RH} = \frac{RF}{RL}$

Cum $\frac{GF}{GH} = \frac{PA}{PB} \Leftrightarrow \frac{FH}{GH} = \frac{AB}{PB}$ iar AB = $\frac{PB \cdot FH}{HG}$ (7). În final PB = RS (laturi opuse în dreptunghiul BSRP) atunci și AB = EF (din (6) și (7)) AB = 2r deci EF = 2r.

Pentru frumusețea problemei; Punctele E, I, L sunt coliniare?

5) Prof. Mihai Miculița-Oradea

SOLUŢIA subpunctului a) al problemei:

Acesta este un caz limită a următoarei teoreme a lui Newton (v.Fig.1):

Fiind dat un patrulaterul circumscriptibil $FSHR$ dacă notăm cu A, B, C şi D – punctele de tangenţă ale laturilor $[FS], [SH], [HR]$ şi respectiv $[RF]$, cu cercul său înscris $(O; r)$ şi circumscris patrulaterului înscris ABCD, aunci punctele de intersecţie ale diagonalelor celor două patrulatere coincid, adică: $\boxed{(\exists)G; \{G\} = AC \cap BD \cap FH \cap SR}$ [1]).

[1] In acest enunt al teoremei lui Newton, am păstrat notaţiile din enunţul problemei lunii iulie-2017.

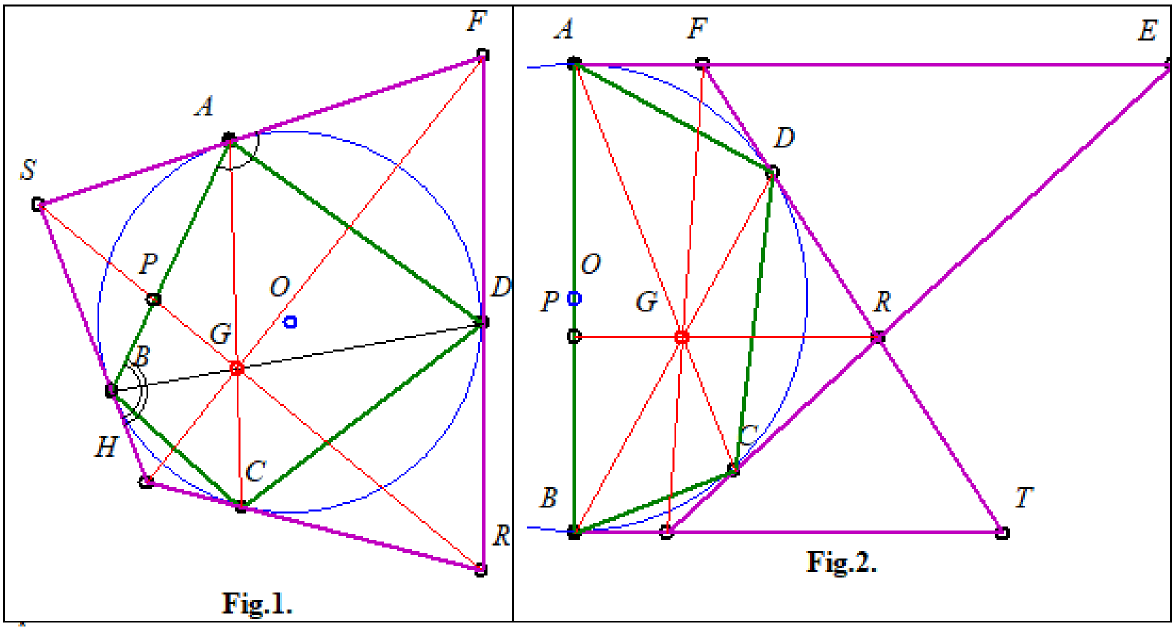


Fig.1. Fig.2.

În cazul în care latura $[AB]$ a patrulaterului inscriptibil $ABCD$ este un diametru al cercului $(O;r)$ cercului circumscris lui, iar tangentele în capetele sale, la cercul $(O;r)$ sunt fiind paralele, punctul lor comun S – este "aruncat la infinit " şi atunci avem: $AF \parallel HR \parallel PR(\perp AB)$ $(v.Fig.2)$; iar dreptele AC, BD, FH și PR sunt concurente în punctul G.

3. I.IONESCU-R. WEITZENBÖCK, E. JUST-N. SCHAUMBERGER AND ISOPERIMETRIC INEQUALITIES

by Neculai Stanciu, Buzău

"It is possible for several researchers to obtain the same results almost at the same time or for someone to rediscover what had been discovered by others before."

Ion Ionescu (1870-1946)

Romanian Mathematician and Engineer in his article "Errare humanum est" published in Gazeta Matematică vol. XLVII, 1941, p.393

Let S be the area of a plane figure with given perimeter P.

- **Isoperimetric inequality for triangle**:

$$S \le \frac{P^2}{12\sqrt{3}} \text{ (where } P \text{ is fixed).}$$

Proof. $P = a + b + c = constant.$

$$16S^2 = P(P-2a)(P-2b)(P-2c) \overset{AM-GM}{\le} P\left(\frac{P-2a+P-2b+P-2c}{3}\right)^3 = \frac{P^4}{27} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S \le \frac{P^2}{12\sqrt{3}}.$$

- **Isoperimetyric inequality for rectangle**:

$$S \le \frac{P^2}{16} \text{ (where } P \text{ is fixed).}$$

Proof. $P = 2(a+b) = constant.$

$$S = ab \overset{AM-GM}{\le} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{P^2}{16}.$$

- **Generalization: Isoperimetric inequalities for a n-sided polygon**:

$$S \le \frac{P^2}{4n \tan\frac{\pi}{n}}.$$

- **Ionescu-Weitzenböck' inequality**: for any triangle with sides a, b, c and area S we have

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge 4\sqrt{3}S.$$

Proof. $P^2 \ge 12S\sqrt{3}$.

$$a^2 + b^2 + c^2 \overset{Bergstrom}{\ge} \frac{(a+b+c)^2}{1+1+1} = \frac{P^2}{3} \ge \frac{12S\sqrt{3}}{3} = 4S\sqrt{3}.$$

- **Just-Schaumberger's inequality, i.e generalizations of Ionescu-Weitzenböck' inequality**: for any polygon with n- sides $a_1, a_2, ..., a_n$ and area S we have

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \ge 4S \tan\frac{\pi}{n}.$$

Proof. $P^2 \ge 4nS \tan\frac{\pi}{n}$.

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \overset{Bergstrom}{\ge} \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{1+1+...+1} = \frac{P^2}{n} \ge \frac{1}{n} \cdot 4nS \tan\frac{\pi}{n} = 4S \tan\frac{\pi}{n}.$$

Remark. In all inequalities presented above – equality holds if and only if the polygon is regular.

4. JI CHEN FROM CRUX 1994

VS.

JI CHEN FROM IRAN TST 1996

(Collected from the internet)

by Neculai Stanciu, Buzău

"It is possible for several researchers to obtain the same results almost at the same time or for someone to rediscover what had been discovered by others before."

Ion Ionescu (1870-1946)

Romanian Mathematician and Engineer in his article "Errare humanum est"

published in Gazeta Matematică vol. XLVII, 1941, p.393

1940. *Proposed by Ji Chen, Ningbo University, China.*
Show that if $x, y, z > 0$,

$$(xy + yz + zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right) \geq \frac{9}{4}\,.$$

1994

Crux v20n4, p. 108

1940. [1994: 108] *Proposed by Ji Chen, Ningbo University, China.*
Show that if $x, y, z > 0$,

$$(xy + yz + zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right) \geq \frac{9}{4}.$$

Solution by Marcin E. Kuczma, Warszawa, Poland.
Writing $y + z = a$, $z + x = b$ and $x + y = c$, we have

$$x = \frac{b+c-a}{2}, \quad \text{etc.,}$$

thus

$$yz = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4} = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{4}, \quad \text{etc.,}$$

and hence, in cyclic sum notation,

$$\sum yz = \frac{1}{4}\sum(2bc - a^2).$$

Now assume $a \geq b \geq c$ without loss of generality; then

$$2bc - a^2 \leq 2ca - b^2 \leq 2ab - c^2$$

and therefore, by Chebyshev's inequality and the A.M.-G.M. inequality,

$$\begin{aligned}
\frac{4}{9}\left(\sum yz\right)\left(\sum \frac{1}{(y+z)^2}\right) &= \frac{1}{3}\sum(2bc - a^2)\cdot\frac{1}{3}\sum\frac{1}{a^2} \\
&\geq \frac{1}{3}\sum\left((2bc - a^2)\cdot\frac{1}{a^2}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\sum\frac{2bc}{a^2}\right) - 1 \\
&\geq \left(\prod\frac{2bc}{a^2}\right)^{1/3} - 1 = 2 - 1 = 1.
\end{aligned}$$

The inequality follows.

Also solved (but not as neatly!) by CHRISTOPHER J. BRADLEY, Clifton College, Bristol, U. K.; WALTHER JANOUS, Ursulinengymnasium, Innsbruck, Austria; KEE-WAI LAU, Hong Kong; BEATRIZ MARGOLIS, Paris, France; VEDULA N. MURTY, Maharanipeta, India; PANOS E. TSAOUSSOGLOU, Athens, Greece; and the proposer. There were two incorrect solutions sent in.

Both Janous and the proposer note that the given inequality implies that

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{9}{4r(4R+r)}, \tag{1}$$

where a, b, c *are the sides of a triangle of inradius* r *and circumradius* R. *They put* $x = s - a$, *etc., where* s *is the semiperimeter of the triangle, which is the same as Kuczma's substitution! Then* $y + z = a$, *etc., and also*

$$\sum yz = 4Rr + r^2$$

(e.g. item 15, *page* 54 *of Mitrinović, Pečarić and Volenec,* Recent Advances in Geometric Inequalities*), and* (1) *follows. This is an improvement of part of item* 5.9, *page* 173 *of* Recent Advances. *Actually,* (1) *was the proposer's original problem, which also included the inequality*

$$\frac{r_a^2}{a^2} + \frac{r_b^2}{b^2} + \frac{r_c^2}{c^2} \geq \frac{9}{4}, \tag{2}$$

where r_a, r_b, r_c *are the exradii of the triangle; this follows immediately from the inequality of the problem via the known relation*

$$a = \frac{r_a(r_b + r_c)}{\sqrt{r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b}}, \quad \textit{etc.}$$

(2) *improves the case* $p = -2$ *of an inequality of Janous given on page* 195 *of* Recent Advances.

* * * * *

1995

Crux v21n3, pp. 107-108

1940. [1994: 108; 1995: 107] *Proposed by Ji Chen, Ningbo University, China.*

Show that if $x, y, z > 0$,

$$(xy + yz + zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right) \geq \frac{9}{4}.$$

II. *Red-faced retraction by the editor.*

Well, it doesn't happen too often, but the editor was really asleep at the switch this time! Šefket Arslanagić, Berlin, Germany, has pointed out that the published proof by Marcin Kuczma [1995: 107] is fatally flawed. In particular, the application of Chebyshev's inequality is incorrect because the inequality is the wrong way around. Below is what the editor hopes is a correct proof, taken from the ones originally sent in. These may not have been done "as neatly" as Marcin's, as the editor unwisely noted on [1995: 107], but they were certainly done "more correctly"! My apologies.

Marcin also apologizes, and has sent the editor two correct solutions of this problem. Surprisingly, in the two months elapsed since the original solution appeared, no other readers seem to have noticed the error, probably because they have grown to take Marcin's usual accurate and elegant solutions for granted.

And, by the way, if anyone finds a "nice" solution of this problem, the editor would be interested to see it!

III. *Solution by Kee-Wai Lau, Hong Kong.*

Without loss of generality suppose that $\min(x, y) \geq z > 0$. Let

$$s = \frac{x+y}{2z} \quad \text{and} \quad t = \frac{xy}{z^2}.$$

It suffices to show that

$$(2s+t)\left(\frac{1}{4s^2} + \frac{4s^2 - 2t + 2 + 4s}{(1+2s+t)^2}\right) \geq \frac{9}{4} \tag{1}$$

whenever $1 \leq t \leq s^2$. [*Editor's note.* The calculations are:

$$2s + t = \frac{x+y}{z} + \frac{xy}{z^2} = \frac{xy + yz + zx}{z^2}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{4s^2 - 2t + 2 + 4s}{(1+2s+t)^2} &= \frac{z^2[(x+y)^2 - 2xy + 2z^2 + 2z(x+y)]}{(z^2 + xy + yz + zx)^2} \\ &= \frac{z^2[(y+z)^2 + (z+x)^2]}{[(y+z)(z+x)]^2} = z^2\left(\frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right),\end{aligned}$$

and thus (1) is just the original inequality; furthermore

$$(x-y)^2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 4xy \leq (x+y)^2 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{xy}{z^2} \leq \frac{(x+y)^2}{4z^2} = s^2,$$

and $\min(x, y, z) = z$ implies that $t \geq 1$.]

For fixed s and $1 \leq t \leq s^2$ let

$$\begin{aligned}f(t) = t^3 - (17s^2 - 6s - 2)t^2 + (16s^4 - 36s^3 + 2s^2 + 8s + 1)t \\ +32s^5 - 4s^4 - 12s^3 - s^2 + 2s.\end{aligned}$$

It is easy to check that (1) is equivalent to $f(t) \geq 0$. [*Editor's note.* (1) is equivalent to

$$(2s+t)[(1+2s+t)^2 + 4s^2(4s^2 - 2t + 2 + 4s)] \geq 9s^2(1+2s+t)^2,$$

which simplifies to $f(t) \geq 0$.] Now

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{dt^2} &= 6t - 2(17s^2 - 6s - 2) \\ &\leq 6s^2 - 2(17s^2 - 6s - 2) = -4(7s^2 - 3s - 1) < 0\end{aligned}$$

for $s \geq 1$ [and thus f is concave down for $s \geq 1$]. Also

$$\begin{aligned} f(1) &= 32s^5 + 12s^4 - 48s^3 - 16s^2 + 16s + 4 \\ &= 4(s-1)(8s^4 + 11s^3 - s^2 - 5s - 1) \geq 0 \end{aligned}$$

and

$$f(s^2) = 2s^5 - 4s^3 + 2s = 2s(s^2-1)^2 \geq 0,$$

since $s \geq 1$. Hence for any $s \geq 1$, $f(t) \geq 0$ for all $1 \leq t \leq s^2$, and this completes the solution of the problem.

* * * * *

1995

Crux v21n6, pp. 205-207

SOLUTIONS

No problem is ever permanently closed. The editor is always pleased to consider for publication new solutions or new insights on past problems.

1940. [1994: 108; 1995: 107; 1995: 205; 1996: 321] *Proposed by Ji Chen, Ningbo University, China.*

Show that if $x, y, z > 0$,

$$(xy + yz + zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right) \geq \frac{9}{4}\,.$$

Solution by Marcin E. Kuczma, Warszawa, Poland.

Let F be the expression on the left side of the proposed inequality. Assume without loss of generality $x \geq y \geq z \geq 0$, with $y > 0$ (not excluding $z = 0$), and define:

$$\begin{aligned}
A &= (2x + 2y - z)(x - z)(y - z) + z(x + y)^2, \\
B &= (1/4)z(x + y - 2z)(11x + 11y + 2z), \\
C &= (x + y)(x + z)(y + z), \\
D &= (x + y + z)(x + y - 2z) + x(y - z) + y(x - z) + (x - y)^2, \\
E &= (1/4)(x + y)z(x + y + 2z)^2(x + y - 2z)^2.
\end{aligned}$$

It can be verified that

$$C^2(4F - 9) = (x - y)^2((x + y)(A + B + C) + (x + z)(y + z)D/2) + E.$$

This proves the inequality and shows that it becomes an equality only for $x = y = z$ and for $x = y > 0$, $z = 0$.

Comment.

The problem is memorable for me! It was my "solution" [1995: 107] that appeared first. According to someone's polite opinion it was elegant, but according to the impolite truth, it was wrong. I noticed the fatal error when it was too late to do anything; the issue was in print already.

In [1995: 205] a (correct) solution by Kee-Wai Lau appeared. Meanwhile I found two other proofs, hopefully correct, and sent them to the editor. Like Kee-Wai Lau's, they required the use of calculus and were lacking "lightness", so to say, so the editor asked [1995:206] for a "nice" solution. I became rather sceptical about the possibility of proving the result by those techniques usually considered as "nice", such as convexity/majorization arguments — just because the inequality turns into equality not only for $x = y = z$, but also for certain boundary configurations.

In response to the editor's prompt, Vedula Murty [1996: 321] proposed a short proof avoiding hard calculations. But I must frankly confess that I do not understand its final argument: I do not see why the sum of the first two terms in [1996: 321(3)] must be non-negative. While trying to clarify that, I arrived at the proof which I present here.

This proof can be called anything but "nice"! Decomposition into sums and products of several expressions, obviously nonnegative, and equally ugly, has the advantage that it provides a proof immediately understood and verified if one uses some symbolic calculation software (with some effort, the formula can be checked even by hand). But the striking disadvantage of such formulas is that they carefully hide from the reader all the ideas that must have led to them; they take the "background mathematics" of the reasoning away. In the case at hand I only wish to say that the equality I propose here has been inspired by Murty's brilliant idea to isolate the polynomial that appears as the third term in [1996: 321(3)] and to deal with the expression that remains.

I once overheard a mathematician problemist claiming lack of sympathy to inequality problems. In the ultimate end, he said, they all reduce to the only one fundamental inequality, which is $x^2 \geq 0$!

1997

Crux v23n3, pp. 170-171

Remark. At Iran TST, 1996, the author is the same, i.e. Ji Chen, but, in the statement instead of $x, y, z > 0$ we have $xy + yz + zx > 0$.

So, $x, y, z > 0$ becomes $x, y, z \geq 0$, with at most one equal to zero.

- About Iran TST 1996 see the links:

https://nguyenhuyenag.wordpress.com/2017/01/06/iran-tst-1996/

http://web.evanchen.cc/handouts/SOS_Dumbass/SOS_Dumbass.pdf

https://gbas2010.wordpress.com/2010/01/11/inequality-23iran-1996-tst/

5. GENERALIZAREA UNEI PROBLEME DATE LA OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ 2017

Profesor : George-Florin Şerban, Liceul Pedagogic"D.P.Perpessicius", Braila

La faza naţionala a olimpiadei de matematică 2017, la clasa a 8-a , a fost propusă urmatoarea problemă:**Fie** $a,b,c,d\in[0,1]$. **Demonstraţi inegalitatea:**

$$\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+c}+\frac{c}{1+d}+\frac{d}{1+a}+abcd\le 3.$$

În continuare vom generaliza această inegalitate. Fie $a_1,a_2,...a_n\in[0,1]$. **Să se demonstreze inegalitatea:** $\frac{a_1}{1+a_2}+\frac{a_2}{1+a_3}+\frac{a_3}{1+a_4}+...+\frac{a_{n-1}}{1+a_n}+\frac{a_n}{1+a_1}+a_1a_2...a_n\le\frac{n+2}{2}$.

Soluţie: $a\le 1, b\le 1\Rightarrow a-1\le 0, b-1\le 0,\Rightarrow (a-1)(b-1)\ge 0, \mathrm{ab}-\mathrm{a}-\mathrm{b}+1\ge 0,\Rightarrow \mathrm{ab}\ge \mathrm{a}+\mathrm{b}-1, (\mathrm{i})$.

$$\frac{a_1}{1+a_2}+\frac{a_2}{1+a_3}+\frac{a_3}{1+a_4}+...+\frac{a_{n-1}}{1+a_n}+\frac{a_n}{1+a_1}=(a_1-\frac{a_1a_2}{1+a_2})+(a_2-\frac{a_2a_3}{1+a_3})+...+(a_n-\frac{a_1a_n}{1+a_1}),$$

$$a_1-\frac{a_1a_2}{1+a_2}+a_2-\frac{a_2a_3}{1+a_3}+...+a_n-\frac{a_1a_n}{1+a_1}\le a_1-\frac{a_1a_2}{2}+a_2-\frac{a_2a_3}{2}+...+a_n-\frac{a_1a_n}{2},$$ deoarece

$a_k\in[0,1]\Rightarrow 0\le a_k\le 1\Rightarrow 1+a_k\le 2$.

$$a_1-\frac{a_1a_2}{2}+a_2-\frac{a_2a_3}{2}+...+a_n-\frac{a_1a_n}{2}\le a_1-\frac{a_1+a_2-1}{2}+a_2-\frac{a_2+a_3-1}{2}+...+a_n-\frac{a_1+a_n-1}{2},$$

Am aplicat inegalitatea (i) şi am înmulţit-o cu -1.

$$a_1-\frac{a_1+a_2-1}{2}+a_2-\frac{a_2+a_3-1}{2}+...+a_n-\frac{a_1+a_n-1}{2}=\frac{2a_1-a_1-a_2+1+2a_2-a_2-a_3+1+..+2a_n-a_1-a_n+1}{2}$$

Dar $\frac{2a_1-a_1-a_2+1+2a_2-a_2-a_3+1+..+2a_n-a_1-a_n+1}{2}=\frac{n}{2}$,

Am arătat că $\frac{a_1}{1+a_2}+\frac{a_2}{1+a_3}+\frac{a_3}{1+a_4}+...+\frac{a_{n-1}}{1+a_n}+\frac{a_n}{1+a_1}\le\frac{n}{2}.(\mathrm{ii})$

Dar $a_1,a_2,...a_n\in[0,1]$, **rezultă** $a_1a_2...a_n\le 1, (\mathrm{iii})$. Adunăm inegalitaţile (ii) şi (iii) şi obţinem inegalitatea cerută

$$\frac{a_1}{1+a_2}+\frac{a_2}{1+a_3}+\frac{a_3}{1+a_4}+...+\frac{a_{n-1}}{1+a_n}+\frac{a_n}{1+a_1}+a_1a_2...a_n\le\frac{n}{2}+1=\frac{n+2}{2}.$$

Egalitatea are loc pentru $a_1=a_2=...=\mathrm{a}_n=1$.

6. REZOLVARE SUBIECT GRAD II, BUCURESTI 2016

Profesori : Gheorghe Alexe , George-Florin Serban , Liceul Pedagogic , Braila

1) Se considera urmatoarea problema:

Daca $A=\{a+bi \mid a,b\in N^*\}$, atunci pentru orice $z\in A$, exista $n\in N^*$ cu $z^n\notin A$.

a)Verificati pe doua cazuri particulare daca problema este adevarata .

b)Ce rol ar avea, in rezolvarea la clasa a problemei , studiul unor cazuri particulare?

c)Rezolvati problema data.

d)Anticipati doua dificultati pe care le-ar avea elevii in rezolvarea problemei.

e)Reformulati enuntul problemei, astfel ca noua problema sa poata fi rezolvata folosind acelasi argument.

2)a)Sa se arate ca ecuatia $x+\ln|x|=0$ are o solutie reala unica $x_0\in(0,1)$. Comentati din punct de vedere metodic , dificultatile pe care le-ar putea intimpina elevii in rezolvarea problemei .

b)Fie functia $f:R\setminus\{x_0\}\to R$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+\ln|x|}, daca, x\neq 0 si (x\neq x_0)\\ 0, daca, x=0\end{cases}$. Sa se studieze continuitatea si derivabilitatea functiei f in punctul $x=0$. Sa se determine punctele de extem local ale functiei f.Precizati, in legatura cu Teorema lui Fermat , ce greseala ar putea face elevii la determinarea punctelor de extrem ale functiei anterioare .

c)Sa se calculeze $I=\int_1^e \frac{x+1}{x^2+x\ln x}dx$. Dati un alt exemplu de integral definita care sa contina expresia $\frac{1}{x+\ln x}$ si care poate fi calculata prin metoda substitutiei (schimbarii de variabila).

3)Se considera urmatorul enunt :

Fie ABC un triunghi si P un punct situat pe cercul circumscris triunghiului.Fie L,M si N picioarele perpendicularelor duse din punctul P pe dreptele AC, BC, respective AB.Atunci punctele L , M si N sunt coliniare.

a)Identificati cel putin trei notiuni geometrice ce apar in acest enunt si descrieti modul cum le puteti introduce la clasa.

b)Demonstrati acest enunt folosind (eventual) mai multe metode .

c)Enuntati o (posibila) reciproca a acestui enunt.

d)Decideti , cu justificare, daca urmatorul enunt este adevarat:

Printr-un punct P al unui cerc se construiesc coardele $[PA],[PB]$ si $[PC]$. Pe fiecare coarda ca diametru se constuieste cate un cerc .Atunci aceste cercuri se intersecteaza doua cate doua in trei puncte (diferite de P) coliniare .

1)a) $z = 1+2i, \quad z^2 = (1+2i)^2 = 1+4i+4i^2 = 1+4i-4 = -3+4i \notin A,$ deoarece $a = -3 \notin N^*.$

$z = 1+i, \quad z^2 = (1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i \notin A,$ deoarece $a = 0 \notin N^*.$

Analiza unor cazuri particulare ne spune daca problema este adevarata.

b) $z = 3+2i, \; z^2 = (3+2i)^2 = 5+12i, \quad z^4 = (5+12i)^2 = -119+120i \notin A,$ deoarece $a = -119 \notin N^*$. Am studiat prin cazuri particulare cele trei cazuri posibile: $a < b, a = b, a > b.$

c)Daca $a = b,$ atunci $z = a(1+i), \quad z^2 = a^2(1+i)^2 = a^2(1+2i+i^2) = a^2(1+2i-1) = 2a^2 i \notin A,$ deoarece partea reala a numarului este 0 , fals , deoarece trebuie sa fie natural nenul . Exista $n = 2.$

Daca $a < b,$ atunci $z^2 = (a+ib)^2 = a^2 + 2abi + b^2 i^2 = (a^2 - b^2) + 2abi \notin A,$ deoarece $(a^2 - b^2) < 0,$ deci $(a^2 - b^2) \notin N^*,$ rezuta $z^2 \notin A,$ exista $n = 2.$

Daca $a > b,$ scriem z sub forma trigonometrica $r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = r\cos t, b = r\sin t,$ $tgt = \frac{b}{a},$

$t = arctg(\frac{b}{a}), \quad z = r(\cos t + i\sin t), \quad z^n = r^n(\cos nt + i\sin nt),$ (formula lui Moivre).

Cosinusul este negativ in cadranele 2 si 3 . Vom arata ca exista un numar natural nenul n pentru care $\cos nt < 0.$ Dar $0 < \frac{b}{a} < 1,$ dar functia arctangenta este strict crescatoare , deci $arctg 0 < arctg\frac{b}{a} < arctg 1, \quad 0 < t < \frac{\pi}{4}, \quad 0 < nt < \frac{n\pi}{4},$ arat ca exista un numar natural n nenul cu $nt \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}),$ (din cadranul 2), $\frac{\pi}{2} < nt < \frac{3\pi}{4},$

$\frac{\pi}{2t} < n < \frac{3\pi}{4t},$ rezulta $\frac{3\pi}{4t} - \frac{\pi}{2t} > 1,$

$\frac{\pi}{4t} > 1, \quad t < \frac{\pi}{4},$ adevarat deoarece $0 < t < \frac{\pi}{4},$ deci $z^n = r^n \cos nt + r^n i \sin nt \notin A,$ deoarece

$\cos nt < 0, r^n > 0, \quad r^n \cos nt < 0, \quad r^n \cos nt \notin N^*.$

Alta metoda: Arat ca exista $n \in N^*, z \in A, z^n \notin A, a > b,$

$z^n = a_n + ib_n = (\sqrt{a^2+b^2})^n(\cos(\mathrm{n}\cdot \mathrm{arctg}\frac{b}{a}) + \mathrm{i}\cdot\sin(\mathrm{n}\cdot\mathrm{arctg}\frac{b}{a})),\quad a_n < 0,\ \cos(\mathrm{n}\cdot\mathrm{arctg}\frac{b}{a}) < 0,$

$\frac{\pi}{2} < \mathrm{n}\cdot\mathrm{arctg}\frac{b}{a} < \pi,$ Dar $0 < \frac{b}{a} < 1,$ dar functia arctangenta este strict crescatoare , deci

$arctg 0 < arctg\frac{b}{a} < arctg 1,\ 0 < arctg\frac{b}{a} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2n} < \mathrm{arctg}\frac{b}{a} < \frac{\pi}{n},$ aleg $n = 4,$

$\frac{\pi}{8} < \mathrm{arctg}\frac{b}{a} < \frac{\pi}{4},$

$arctg\frac{b}{a} \in (\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4}) \subset (0,\frac{\pi}{4}),$ deci $\frac{\pi}{2} < 4arctg\frac{b}{a} < \pi,\ \cos(4arctg\frac{b}{a}) < 0,\ a_4 < 0, z^4 \notin A.$

d)Unii elevi ajung sa afirme ca problema este adevarata doar prin analiza unor cazuri particulare. Alta dificultate ar fi analiza cazului $a > b,$ folosind forma algebrica a numerelor complexe , nu forma trigonometrica.Dificultati pot aparea in scrierea numarului $z^n = a_n + ib_n.$

Alta dificultate ar fi sa gseasca un n naturl nenul cu $z^n \notin A.$ sau sa arate ca exista n in cazul $a > b.$

-Semnele lui sin si cos pe cadrane .Monotonia lui tg si arctg .

e)Putem reformula astfel :”Fie multimea $A = \{a + bi \mid a, b \in N^*\} \subset \mathrm{C}.$ Aratati ca multimea $(A,\cdot) \subset (C,\cdot),$ nu este parte stabila a lui $(C,\cdot),$ in raport cu operatia de inmultire”.

Se foloseste rezolvarea problemei de mai sus , pentru orice $z \in A,$ exista $n \in N^*$ cu $z^n \notin A.$.

Alta reformulare: Sa se dermine cel mai mic numar natural nenul astfel incat pentru orice $z \in A,\ z^n \notin A,$ in toate cazurile , $a = b, a < b, a > b,$ unde $A = \{a + bi \mid a, b \in N^*\},$ Cazul 3) e mai greu si comporta dificultati.

2)a) $x + \ln|x| = 0,\ g: R^* \to R,\ g(x) = x + \ln|x|,\ g(x) = \begin{cases} x + \ln(-x), x \in (-\infty, 0) \\ x + \ln x, x \in (0,\infty), \end{cases}$

$$g^{|}(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x+1}{x}, x \in (0,\infty), \end{cases} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty, \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty, \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x + \ln(-x)) = \lim_{x\to-\infty} x(1 + \frac{\ln(-x)}{x}) = -\infty \lim_{x\to-\infty}(1 + \frac{\frac{-1}{-x}}{1}) = -\infty,$$

x	$-\infty$	-1

	0
$\frac{x+1}{x}$	1 +++++++++++ 0--------------- ------------------------------------ --

x	$-\infty$ -1 0	x_0 1 ∞
$g^{\mid}(x)$	++ 0------------ -----	+++++++++++++++
g(x)	$-\infty$ cresc -1 descr $-\infty$	$-\infty$ cresc 0 cresc 1 cresc ∞

$x \in (0,\infty), g^{\mid}(x) = \frac{x+1}{x} \geq 0,\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty, \mathrm{g}:(0,\infty) \to \mathrm{R}$, g continua, rezulta ca exista $x_0 \in (0,\infty), \mathrm{g}(x_0) = 0$, dar $g(1) = 1, x_0 \in (0,1), \mathrm{g}(1) > 0, \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty < 0$, deci $x_0 \in (0,1)$ este unic deoarece g este strict crescatoare pe $(0,\infty)$ si deci este injectiva.

Dificultati:- explicitarea functiei g, -limita functiei in 0 si ∞. -Aplicarea teoremei pentru functii continue pe un interval deschis si nemarginit.

b) $\mathrm{f}: R\setminus\{x_0\} \to R,\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+\ln(-x)}, x \in (-\infty,0) \\ \frac{1}{x+\ln x}, x \in (0,\infty)\setminus\{x_0\}, x_0 \in (0,1) \\ 0, x = 0 \end{cases}$, continuitatea lui f in $x = 0$,

$l_s(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x+\ln(-x)} = \frac{1}{-\infty} = 0, l_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x+\ln(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0, \mathrm{f}(0) = 0,\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, deci f este continua in $x = 0$. Studiem derivabilitatea lui f in $x = 0$.

$$f^{\mid}(x) = \begin{cases} \frac{-\frac{x+1}{x}}{(x+\ln(-x))^2}, x \in (-\infty,0) \\ \frac{\infty}{-\infty}, x = 0 \\ \frac{-\frac{x+1}{x}}{(x+\ln(x))^2}, x \in (0,\infty)\setminus\{x_0\}, x_0 \in (0,1), \end{cases}$$

x	$-\infty$ -1 0	x_0 1 ∞
$f^{\vert}(x)$	--------- 0++++++∞ | $-\infty$ --- ---------	-- ------
f(x)	0 descr -1 cresc 0 descr $-\infty$	∞ descr 1 descr 0

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\ln x}=\frac{1}{\infty}=0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\ln(-x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x[1+\frac{\ln(-x)}{x}]}=\frac{1}{-\infty[1+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}]}=\frac{1}{-\infty}=0,$$

$$x\in(-\infty,0),\ \frac{-x-1}{x}=0, x=-1, f(-1)=-1,\ \ x\in(0,\infty), \frac{-x-1}{x}=0, x=-1\notin(0,\infty),$$

x	$-\infty$ 0 -1
$\frac{-x-1}{x}$	-------------------------- 0 +++++++++++++++++++++++++++

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}\frac{1}{x+\ln x}=\frac{1}{-0}=-\infty, \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\frac{1}{x+\ln x}=\frac{1}{+0}=\infty,$$

$$f_s^{\vert}(0)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{-1-\frac{1}{x}}{(x+\ln(-x))^2}=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{\frac{1}{x^2}}{2(x+\ln(-x))\cdot\frac{x+1}{x}}=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{\frac{1}{x(x+1)}}{2(x+\ln(-x))}=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{2(x+\ln(-x))},$$

$$f_s^{\vert}(0)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{2(x+1)}{x}}=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2}\cdot\frac{x}{2(x+1)}=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{-2x-1}{2x(x+1)^3}=\frac{-1}{-0}=\infty,$$

$$f_d^{\vert}(0)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{-1-\frac{1}{x}}{(x+\ln(x))^2}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\frac{1}{x^2}}{2(x+\ln(x))\cdot\frac{x+1}{x}}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\frac{1}{x(x+1)}}{2(x+\ln(x))}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{2(x+\ln(x))},$$

$$f_d^{\vert}(0)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{2(x+1)}{x}}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2}\cdot\frac{x}{2(x+1)}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{-2x-1}{2x(x+1)^3}=\frac{-1}{+0}=-\infty,$$

$f_s^{\vert}(0)=\infty,\ f_d^{\vert}(0)=-\infty$, deci f nu este derivabila in $x=0$, $O(0,0)$ punct de intoarcere pentru f.

Puncte de extrem: Punctul $A(-1,-1)$, punct de minim pentru f. Pentru $x=-1\in(-\infty,0)$, f derivabila in $x=-1$, punct de minim, avem $f^{|}(-1)=0$. Punctele de extrem se gasesc printer radacinile derivatei intai. $x=0$, este un punct de maxim local , dar f nu este derivabila in $x=0$,

$f_s^{|}(0)=\infty,\ f_d^{|}(0)=-\infty$, deci derivate nu exista in $x=0$. Elevii cauta punctele de extrem printre radacinile derivatei intai, dar sunt si puncte de extrem in care functia nu este derivabila, dar este continua, $x=0$, nu este radacina pentru functia $f^{|}$.

c)

$$I=\int_1^e \frac{x+1}{x^2+x\ln x}dx=\int_1^e \frac{\frac{x+1}{x}}{x+\ln x}dx=\int_1^e \frac{(x+\ln x)^{|}}{x+\ln x}dx=\ln|x+\ln x|\Big|_1^e=\ln|e+\ln e|-\ln|1+\ln 1|=\ln(e+1),$$

Fie $J=\int_1^e \frac{x^2\cdot(\ln x-1)}{(x+\ln x)^3}dx=\int_0^1 \frac{e^t\cdot e^t(t-1)}{(e^t+t)(e^t+t)^2}dt=\int_0^1 \left(\frac{e^t}{e^t+t}\right)\cdot\frac{e^t(t-1)}{(e^t+t)^2}dt=\int_0^1 \left(\frac{e^t}{e^t+t}\right)\cdot\left(\frac{e^t}{e^t+t}\right)^{|}dt,$

facem schimbarea de variabila $\ln x=t, x=e^t, dx=e^t dt$,

$$J=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{e^t}{e^t+t}\right)^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{e^2}{(e+1)^2}-\frac{1}{1}\right]=\frac{-2e-1}{2(e+1)^2}.$$

3)a)-Perpendiculara dusa printr-un punct pe o dreapta.

-Patrulater inscriptibil si prprietatile lui. (Un patrulater este inscriptibil daca suma masurilor a doua unghiuri opuse este 180^0.)-Intr-un patrulater inscriptibil unghiul format de o diagonala cu o latura este congruent cu unghiul format de cealalta diagonala cu latura opusa a patrulaterului.

-Moduri de a demonstra ca un patrulater este inscriptibil.

-Unghi inscris , unghi la centru, unghi cu varful in interiorul cercului , unghi cu varful in exteriorul cercului.

-Moduri de a demonstra ca trei puncte sunt coliniare .(sintetic , analitic, vectorial, $AC=AB+BC$, folosind unghiuri opuse la varf.

-Se recapituleaza aceste notiuni, se scriu la table formulele si profesorul explica impreuna cu elevii aceste notiuni.

b)Acest enunt remarcabil reprezinta Teorema lui Simson (Dreapta lui Simson).

$P\in C(ABC), PN\perp AB, PL\perp AC, PM\perp BC$, atunci N,L,M sunt coliniare.

$ALPN$ patrulater inscriptibil deci $m(ALP)+m(PNA)=180^0$,

$ABCP$ patrulater inscriptibil deci $m(ABC)+m(APC)=180^0$,

$PLMC$ patrulater inscriptibil deoarece $m(PLC)=m(PMC)=90^0$,

$BMPN$ patrulater inscriptibil deoarece $m(\text{BMP})+m(\text{BNP})=90^0+90^0=180^0$,

$m(\mathrm{A}\,LN) = m(\mathrm{APN}) = 90^0 - m(\mathrm{NAP}) = 90^0 - m(\mathrm{MCP}),$

$m(\mathrm{MLC}) = m(\mathrm{MPC}) = 90^0 - m(\mathrm{MCP}),$

Rezulta $m(\mathrm{ALN}) = m(\mathrm{MLC}),$ rezulta ca punctele N, L, M sunt coliniare.

Sau alta metoda : Arat ca $m(\mathrm{NLM}) = 180^0.$ Calculez

$m(\mathrm{NLM}) = m(\mathrm{NLP}) + m(\mathrm{PLC}) + m(\mathrm{MLC}) = m(\mathrm{NAP}) + 90^0 + m(\mathrm{MPC}) = m(\mathrm{PCM}) + 90^0 + 90^0 - m(\mathrm{PCM}) = 180^0.$
rezulta ca punctele N, L, M sunt coliniare.

Metoda II (metoda pantelor) Fie cercul unitate $C(\mathrm{O},1),$
$A(\cos\alpha, \sin\alpha), B(\cos\beta, \sin\beta), C(\cos\gamma, \sin\gamma), \mathrm{P}(\mathrm{cost}, \mathrm{sint}),$
$\mu(ox, OP) = t, \mu(ox, OA) = \alpha, \mu(ox, OB) = \beta, \mu(ox, OC) = \gamma,$

$0 < t < \alpha < \frac{\pi}{2} < \pi < \beta < \frac{3\pi}{2} < \gamma < 2\pi,$

$AB : (\sin\alpha - \sin\beta)x - (\cos\alpha - \cos\beta)\,\mathrm{y} - \sin(\alpha - \beta) = 0, \quad PN \perp AB, \; m_{PN} \cdot m_{AB} = -1,$

$\mathrm{MP} : (\cos\alpha - \cos\beta)\,\mathrm{x} + (\sin\alpha - \sin\beta)\,\mathrm{y} - \cos(\mathrm{t} - \alpha) + \cos(\mathrm{t} - \beta) = 0, \quad AB \cap PN = \{N\}.$

$$\begin{cases} x_N = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{2t-\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \\ y_N = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\frac{2t-\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_L = \cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} - \sin\frac{2t-\alpha-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} \\ y_L = \cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} + \sin\frac{2t-\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_M = \cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \sin\frac{2t-\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2} \\ y_M = \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2} + \sin\frac{2t-\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2} \end{cases}$$

$$m_{NL} = \frac{y_N - y_L}{x_N - x_L} = \frac{-2\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{t-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma-t}{2}}{-2\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{t-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma-t}{2}} = tg\frac{\alpha+\beta+\gamma-t}{2},$$

$$m_{NM} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{-2\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\frac{t-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma-t}{2}}{-2\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\frac{t-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma-t}{2}} = tg\frac{\alpha+\beta+\gamma-t}{2},$$

$m_{NL} = m_{NM}$, rezulta ca punctele N, L, M sunt coliniare.

Metoda III (metoda vectoriala) Vectorii $\overrightarrow{NL}$ si $\overrightarrow{NM}$ sunt coliniari .

$\overrightarrow{NL}=(x_L-x_N)\vec{i}+(y_L-y_N)\vec{j},\quad \overrightarrow{NM}=(x_M-x_N)\vec{i}+(y_M-y_N)\vec{j},$ se arata ca exista $\lambda\in R^*$ cu $\overrightarrow{NM}=\lambda\overrightarrow{ML}.$

Metoda iV (analitic) Punctele N,L,M sunt coliniare daca

$$\det\begin{pmatrix} x_N & y_N & 1\\ x_L & y_L & 1\\ x_M & y_M & 1\end{pmatrix}=0.$$

Metoda V (afixe) Punctele N,L,M sunt coliniare daca $\dfrac{z_L-z_N}{z_M-z_N}\in R^*.$

c)Teorema reciproca:Fie triunghiul ABC si P un punct din plan .Daca proiectiile ortogonale ale lui P pe laturile AB,AC si BC sunt coliniare, atunci P se afla pe cercul circumscris triunghiului ABC.

d)Fie $P\in C(ABC), PN\perp AB, PL\perp AC, PM\perp BC,$

(1)Cercul de diametru AP intersecteaza cercul de diametru PC in punctele P si L.

Cercul de diametru AP intersecteaza cercul de diametru PC se intersecteaza pe AC in L, $L\in(AC)$, $m(ALP)=m(ALC)=90^0$, deci L se afla pe cercul de diametru PC si $PL\perp AC.$ Analog se poate arata ca $PN\perp AB, PM\perp BC.$

(2)Cercul de diametru AP intersecteaza cercul de diametru PB in punctele P si N.

Cercul de diametru AP intersecteaza AB in N, $N\in AB$, $m(ANP)=90^0$, deci $PN\perp AB$, rezulta $m(BNP)=90^0$, deci N se afla pe cercul de diametru PB.

(3)Cercul de diametru BP intersecteaza cercul de diametru PC in punctele P si M.

Cercul de diametru CP intersecteaza BC in M, $M\in(BC)$, $m(PMC)=90^0$, deci $PM\perp BC$, rezulta $m(PMB)=90^0$, deci M se afla pe cercul de diametru PB. Aplicam teorema directa, rezulta ca punctele M,L,N sunt coliniare, deci enuntul dat este adevarat.

7. PERSPECTIVE NECLASICE ASPUPRA FRACTALILOR CLASICI STUDIU DE SPECIALITATE

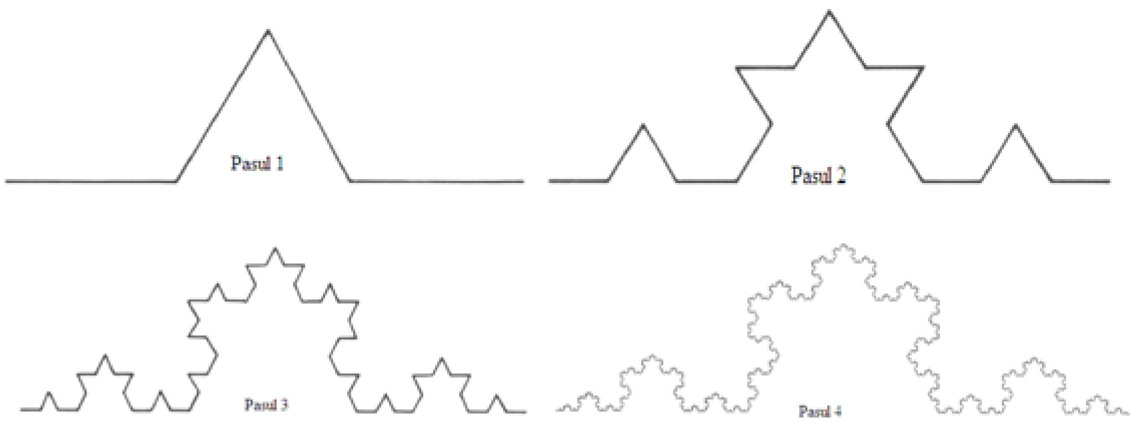
Prof. Stan Ana Gabriela Doina

Fractalii sunt obiecte matematice relativ noi(au doar 150 de ani de studiu).
Poziţia matematicienilor faţă de fractali a evoluat de la nedumerire, neacceptare, repulsie, ignorare până la admiraţie şi încercări de a găsi modele fractalice în orice domeniu!

FRACTALI CLASICI

CURBA LUI KOCH

Initiatorul este un segment de dreaptă.
Legea de constructie impune ca segmentul să fie divizat în trei părţi egale, să fie înlăturată partea centrală şi în locul ei să se pună un triunghi echilateral fără bază.
Procesul de generare - legea de construcţie se aplică în continuare pentru fiecare segment al figurii obţinute.

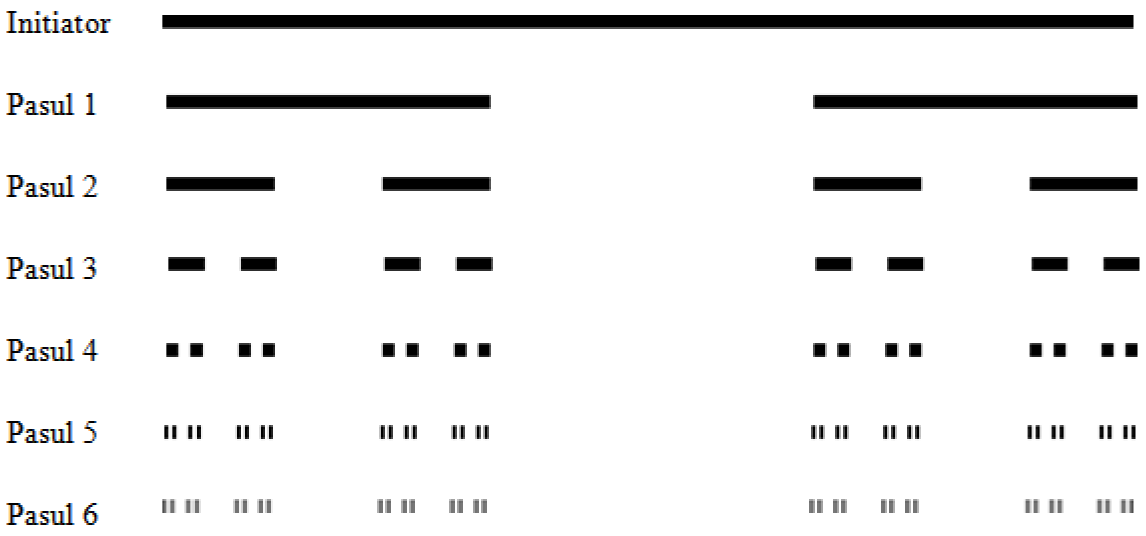


PRAFUL LUI CANTOR

Iniţiatorul este un segment de dreaptă

Legea de construcţie este îndepărtarea treimii din mijloc a segmentului

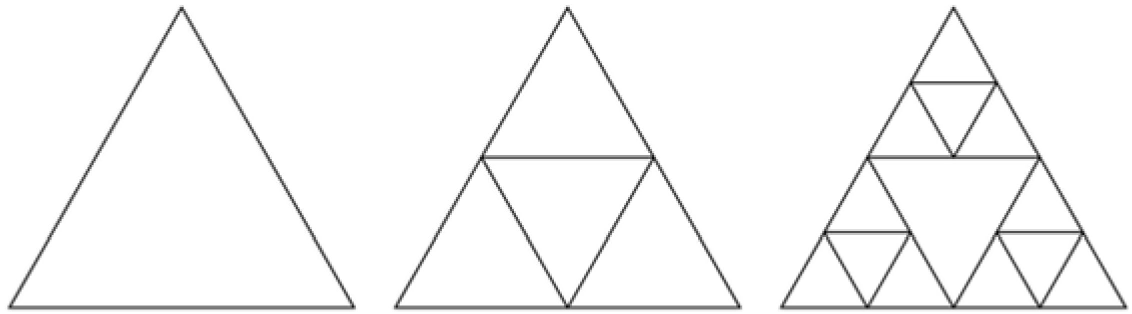
Procesul de generare constă în repetarea la nesfârşit a legii obţinându-se o structură alcătuită dintr-un set de puncte.



TRIUNGHIUL LUI SIERPINSKI

Iniţiatorul este un triunghi.

Legea de construcţie este împărţirea triunghiului în patru triunghiuri congruente folosind liniile mijlocii ale acestuia şi îndepărtarea triunghiului din mijloc.



PERSPECTIVE NECLASICE

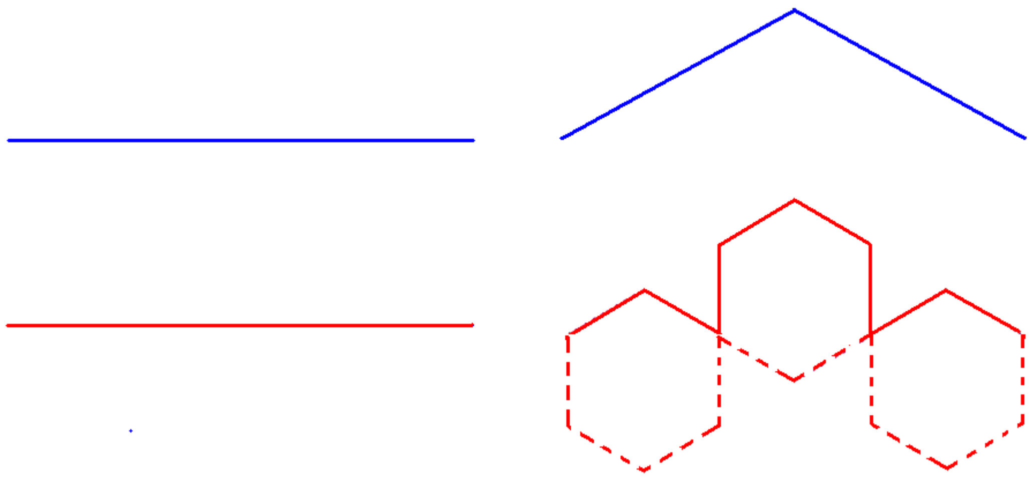
1. Metode alternative de obţinere a Curbei lui Koch

Curba lui Koch se poate obţine nu doar prin construcţia de triunghiuri echilaterale (K_0,$K_{1,}$...)

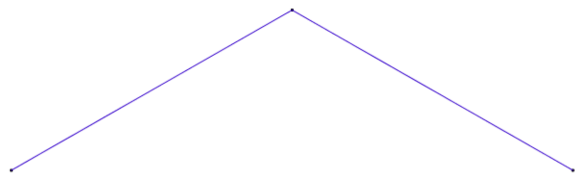
ci şi prin construirea de:

- triunghiuri isoscele 30^0-120^0-30^0 alternativ exterior-interior(T_0,T_1,...)
- hexagoane regulate din care se reţin 2-4-2 laturi alternativ exterior-interior(H_0,H_1,...)

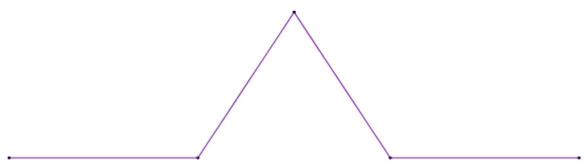
T_0, T_1 respectiv H_0, H_1:



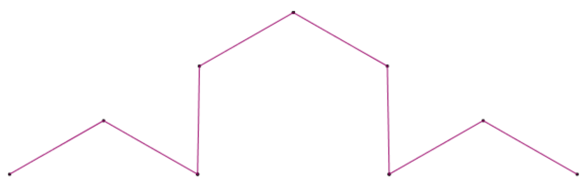
Următoarea succesiune de imagini ilustrează interferenţele metodelor.



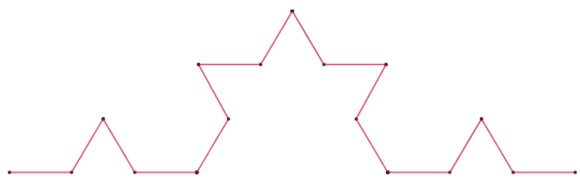
T_1



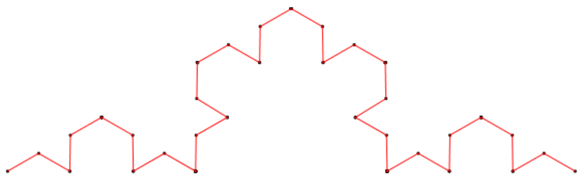
T_2, K_1



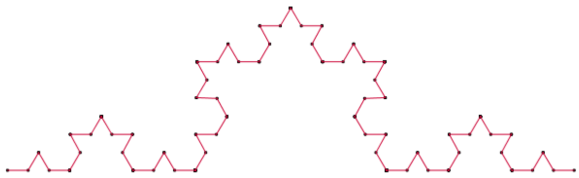
T_3, H_1



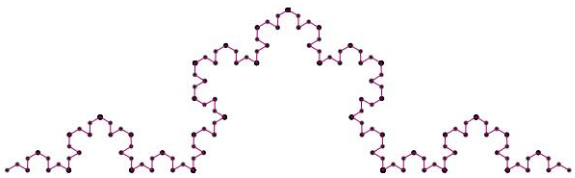
T_4, K_2



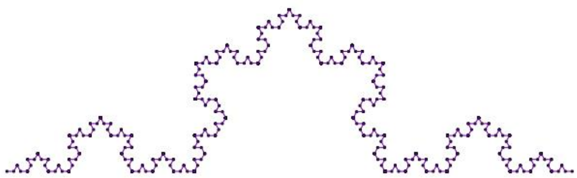
T_5



T_6, K_3, H_2



T_7

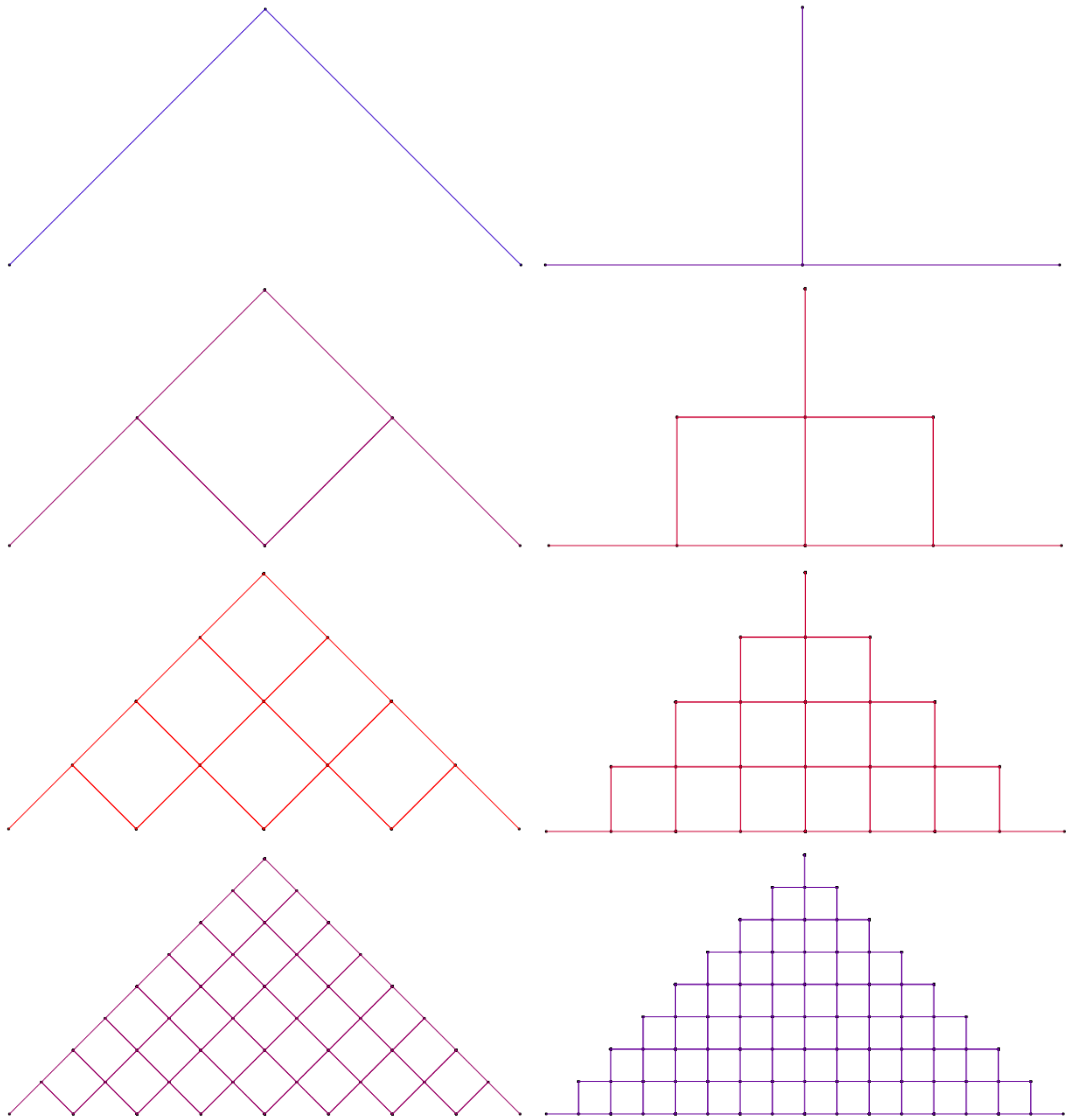


T_8, K_4

Variantă Pas	**Koch cu Triunghi isoscel 120^0**	**Koch clasic**	**Koch cu Hexagoane**
0	T_0	K_0	H_0
1	T_1		
2	T_2	K_1	
3	T_3		H_1
4	T_4	K_2	
5	T_5		
6	T_6	K_3	H_2

Decalajul este explicabil prin numărul laturilor X2, X4 respectiv X8.

Observaţie: Dacă înlocuim triunghiul isoscel 30^0-120^0-30^0 cu triunghiul dreptunghic isoscel obţinem o caroiajele următoare:

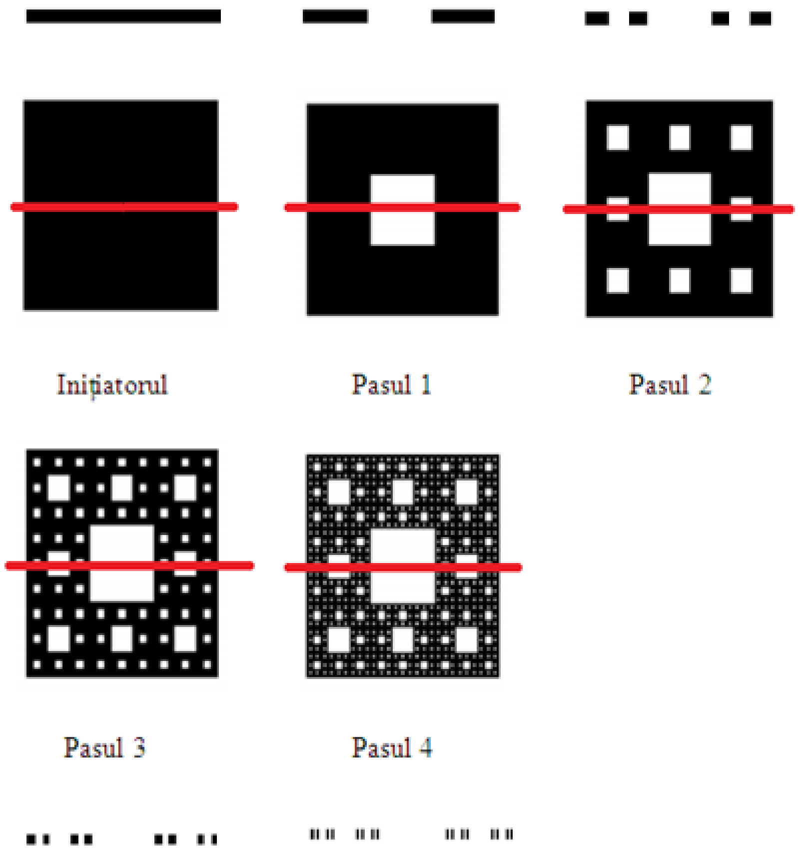


2. Omotetia Triunghiului lui Sierpinski

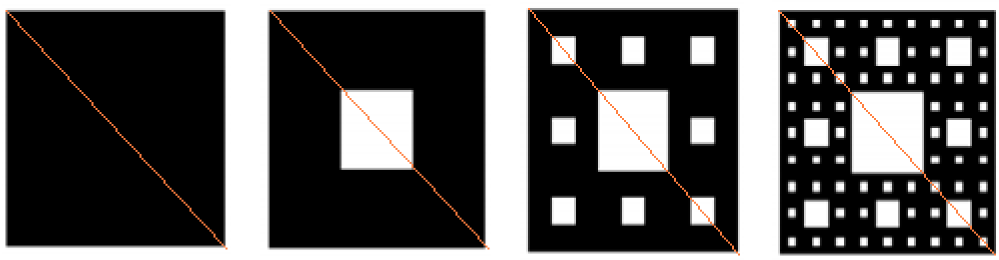
Triunghiul lui Sierpinski se poate construi printr-o succesiune(de succes!) de omotetii de centru G şi raport ½ aplicate triunghiului iniţial şi tuturor triunghiurilor nemediane apărute.

3. Secţiuni în Covorul lui Sierpinski şi Praful lui Cantor

Secţionând Covorul lui Sierpinski cu o paralelă echidistantă de laturile opuse obţinem ... Praful lui Cantor.



Interesant este că ideea funcţionează şi pe diagonală:



4. Secţiuni în Garnitura lui Sierpinski şi Praful lui Cantor

În Garnitura lui Sierpinski

paralelele la bază duse la distanţa 1/2,1/4, 1/8, 1/16,…,$1/2^n$

intersectează triunghiuri ale căror laturi

(sau altfel evidenţiate)

formează ... Praful lui Cantor!

In tabelul următor pe fond gri sunt lungimile laturilor pline.

Pasul	Distanţa faţă de bază	Lungimile laturilor triunghiurilor intersectate	Suma lungimilor
1	1/2	1	1
2	1/4	1/2,1/2,1/2	3x1/2=3/2
3	1/8	1/4,1/4,1/4,1/2,1/4,1/4,1/4	1/2+6x1/4=2
4	1/16	1/8,1/8,1/8,1/4,1/8,1/8,1/8,1/2 1/8,1/8,1/8,1/4,1/8,1/8,1/8	1/2+2x1/4+12x1/8=5/2
n	$1/2^n$		$1/2+2/4+4/8+8/16+...+3x2^{n-2}/2^n$

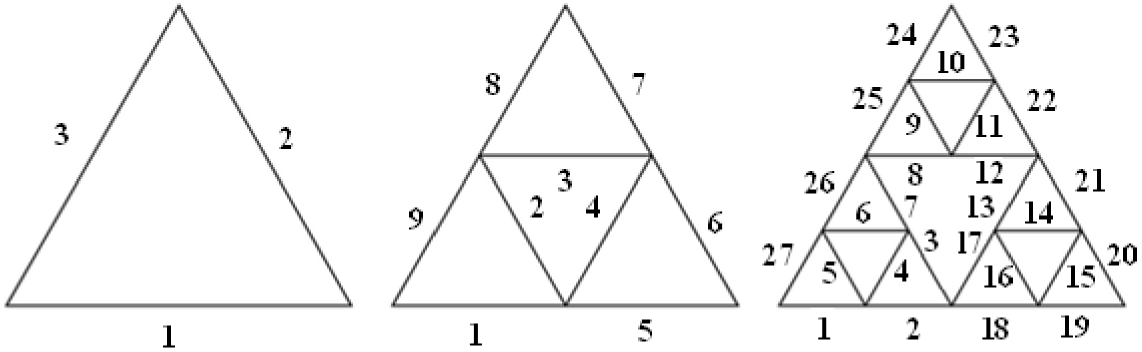
Se observă(şi de pe figură) că la fiecare pas se mai adaugă ½ din lungimea iniţială.

Şirul definit $l_n=l_{n-1}+1/2$ cu $l_1=1$ se identifică cu $l_n=(n+1)/2$.

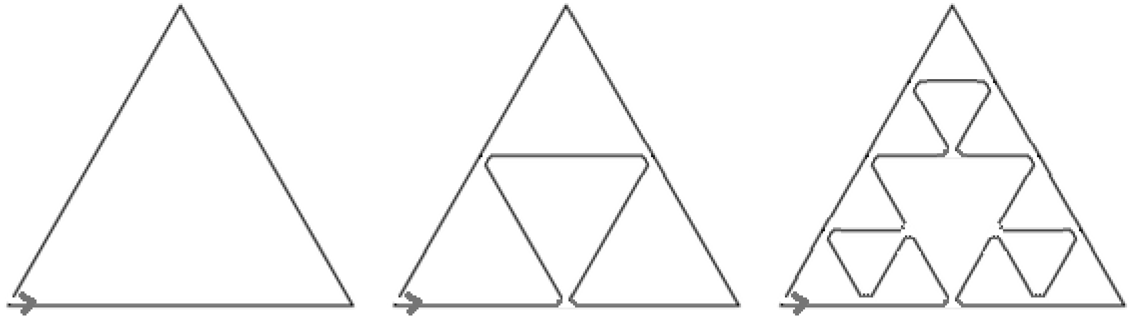
Aşadar, pentru a păstra lungimea 1 factorul de compresie ce trebuie aplicat lungimilor implicate la fiecare pas este $2/(n+1)$.

5. Triunghiul lui Sierpinski- o curbă continuă

Admiţând maxim o singură autointersectare a curbei în fiecare punct putem parcurge Triunghiul lui Sierpinski de exemplu aşa:



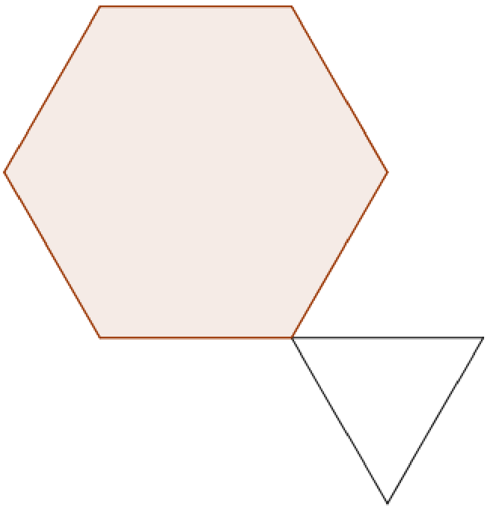
Pentru o mai facilă urmărire a traseului putem admite o fină ocolire a nodurilor:

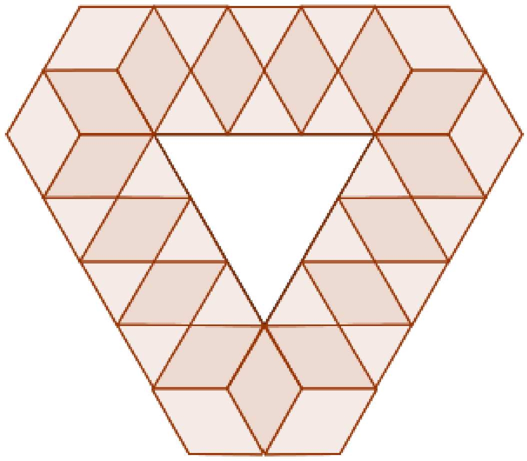


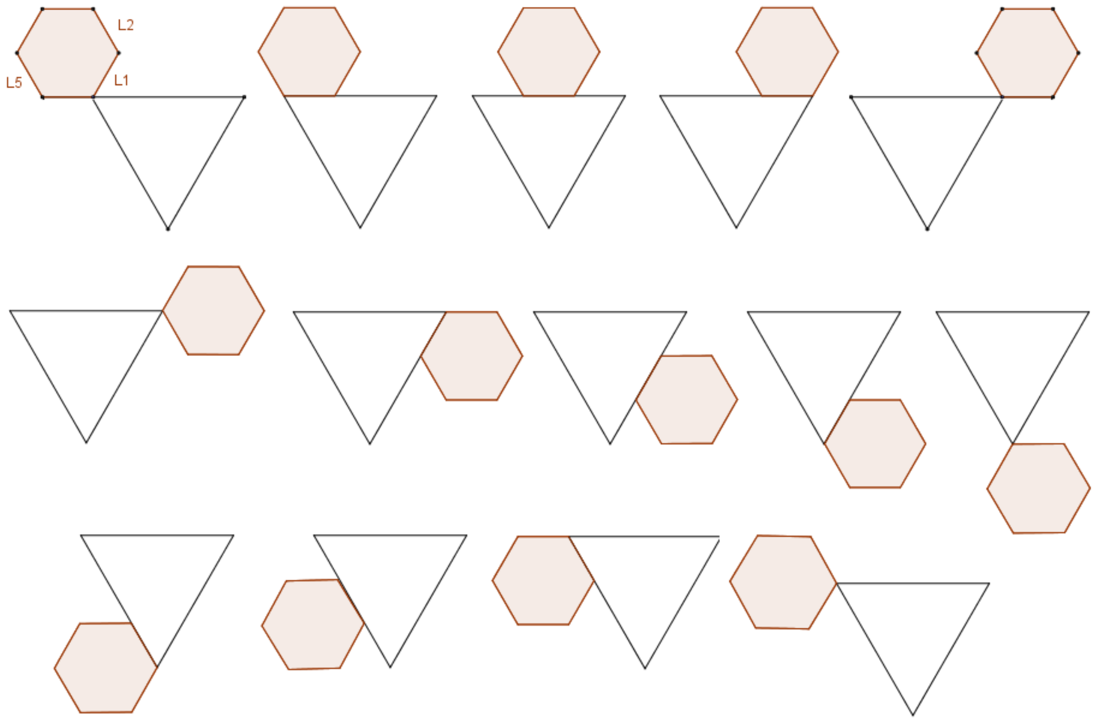
Notând s=stânga, d=dreapta î=înainte, să studiem mişcările necesare pentru triunghiurile T_0, T_1 respectiv T_2.
Obţinem dîsîsî, dîsîdîdîsîsîîsîî respectiv dîîsîsîdîdîsîdîsîdîdîsîdîsîdîdîsîsîîsîîîîsîîîî.
Adică 1d2s3î, 3d4s9î respectiv 9d10s27î
În general vor fi 3^{n-1} rotiri la dreapta, $1+3^{n-1}$ rotiri la stânga şi 3^n mişcări de înaintare.
Şirul 1+2+3, 3+4+9, 9+10+27,… adică 6, 16, 46,... are termenul general $1+5x3^{n-1}$.
Termenul general poate fi dedus sau rezultă din calculul:
$3^{n-1}+1+3^{n-1}+3^n=1+2x3^{n-1}+3^n=1+2x3^{n-1}+3x3^{n-1}=1+5x3^{n-1}$.
Numărul variantelor de parcurgere ce pornesc dintr-un punct:
Pentru T0 avem două(123 respectiv 321); Pentru T1 sunt 32 (123456789, 123654789, 128745639, 128765439, 143256789, 143876529, 146523789, 146528739, 147825639, 147836529, 156324789, 156387429, 156423789, 156428739, 156782439, 156783429 şi respectiv inversatele lor-pentru cazul în care pornirea se face către stânga).

6. Generarea Fulgului lui Koch cu hexagon rostogolit

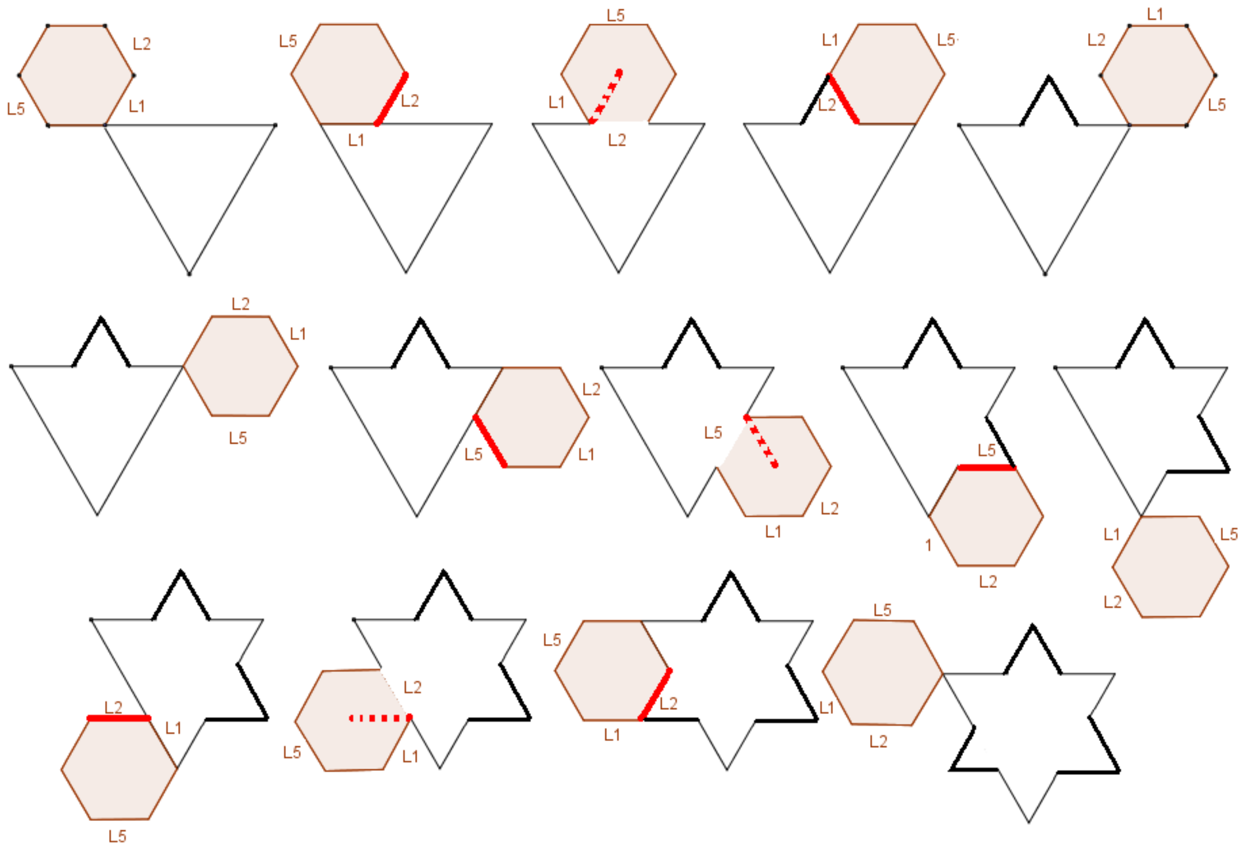
Pornim de la un triunghi echilateral şi un hexagon regulat ce au aceeaşi lungime a laturii. Hexagonul se va rostogoli de-a lungul laturilor triunghiului. Laturile L2 şi L5 vor trasa sau şterge funcţie de situarea lor parţială sau totală pe curbă. În această poziţie hexagonul este înlocuit cu unul de 9 ori mai mic. Reprezentarea din dreapta este reuniunea imaginilor unei ture complete date de hexagon triunghiului.



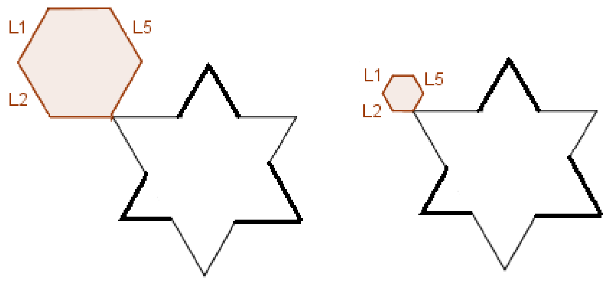




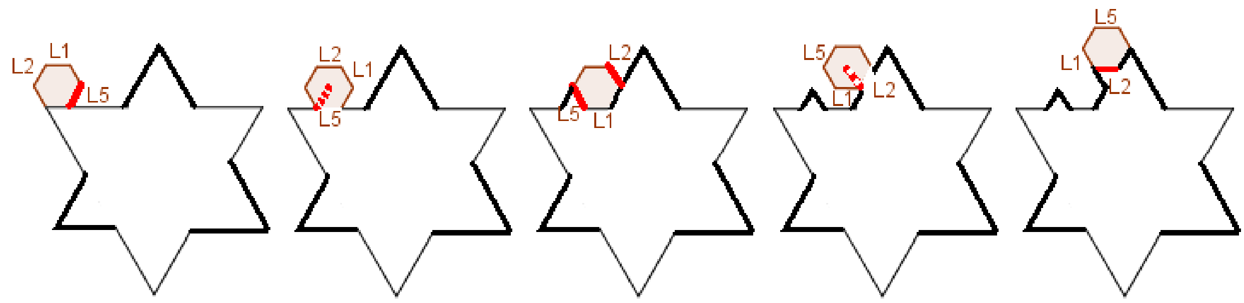
Cu linie roşie continua marcăm poziţia unde va apărea un nou segment, cu roşu intrerupt acelaşi nou segment acoperit de hexagon iar cu negru segmentele noi adăgate curbei.



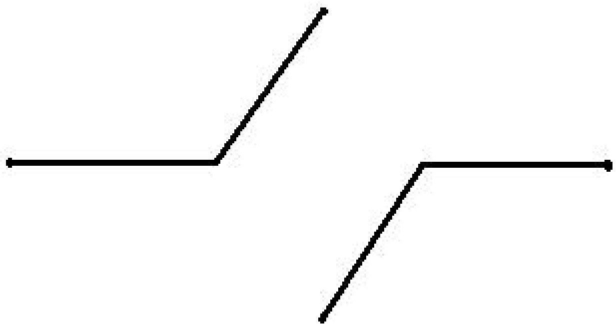
După fiecare tură completă când hexagonul ajunge în poziţia lui iniţială(colţul din stânga) se transformă într-un hexagon regulat cu latura de 3 ori mai mică decât a precedentului.

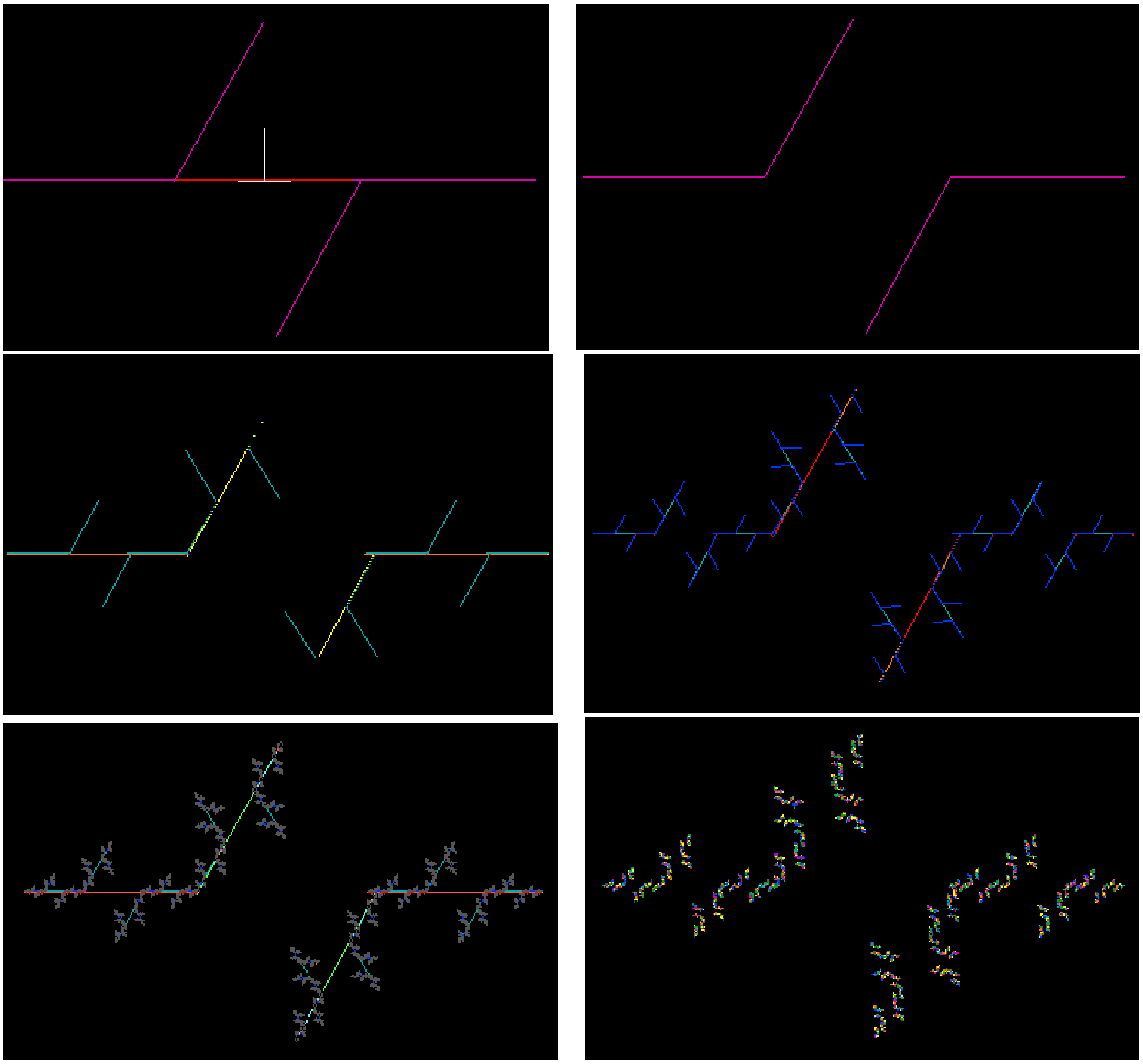


Procedeul se repetă la nesfârşit cu hexagonul rostogolindu-se de-a lungul curbei întâlnite.



7. “Curba” discontinuă a lui Koch





8. PROPRIETATEA LUI DARBOUX - APLICAȚII

Prof. Clipa Daniela Carmen

Şcoala Gimnazială Nr. 17 Botoşani

PROBLEMA 1

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, $x_0 \in I$ iar $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ două funcții continue în x_0 pentru care $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$. Să se demonstreze că $f: I \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} f_1(x), dacă\ x \in I \cap \mathbb{Q} \\ f_2(x), dacă\ x \in I - \mathbb{Q} \end{cases}$ nu are proprietatea lui Darboux.

Soluție :

Această problemă nu permite trasarea graficului funcției f. Să presupunem că $f_1(x_0) < f_2(x_0)$ și alegem un număr λ cuprins între $f_1(x_0)$ și $f_2(x_0)$. Deoarece f_1 și f_2 sunt continue în x_0, există două numere $\delta_1 > 0$ și $\delta_2 > 0$ așa încât $f_1(x) < \lambda, (\forall)\ x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \cap I$ și $\lambda < f_2(x)$, $(\forall)\ x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) \cap I$. Punând δ= min$\{\delta_1, \delta_2\}$, avem: (1) $f_1(x) < \lambda < f_2(x), \forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$.

Mulțimea J = $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$ este un interval nedegenerat inclus în I. Datorită relației (1) avem,pe de o parte:

(2) $f(x) < \lambda, (\forall) x \in J \cap \mathbb{Q}$,

iar,pe de altă parte,

(3) $f(x) > \lambda, (\forall) x \in J - \mathbb{Q}$.

În consecință, $\lambda \notin f(J)$. Mulțimile $J \cap\ \mathbb{Q}$ și $J - \mathbb{Q}$ fiind nevide putem alege $a \in J \cap \mathbb{Q}$ și $b \in J - \mathbb{Q}$. Conform relațiilor (2) și (3), avem $f(a) < \lambda < f(b)$, adică $\lambda \in \big(f(a), f(b)\big)$. Pe de altă parte, avem $\lambda \notin f((a, b))$ deoarece $f((a, b)) \subset f(J)$ și $\lambda \notin f(J)$. Așadar, pentru punctele a, b alese nu este adevărat că $(f(a), f(b)) \subset f((a, b))$. Deci funcția f nu are proprietatea lui Darboux.

PROBLEMA 2

O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ este interval dacă și numai dacă orice funcție continua $f: A \to \{0,1\}$ este constantă.

Soluție:

Necesitatea: Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ interval și $f: A \to \{0,1\}$ o funcție continuă. Conform teoremei lui Bolzano, $f(A)$ este interval și cum $f(A) \subset \{0,1\}$ rezultă că $f(A) = 0$ sau $f(A) = 1$, deci funcția f este constantă.

Suficiența: Presupunem că A satisface proprietatea din enunț, dar nu este interval. Prin urmare, $(\exists) a, b \in A, a < b$ cu $(a, b) \not\subset A$. Fie $c \in (a, b) - A$ fixat și $f: A \to \{0,1\}$ o funcție definită astfel:

$f(x) = \begin{cases} 0\,, dacă\ x \in A, x < c \\ 1\,, dacă\ x \in A, x > c \end{cases}.$

Funcția f este continuă și conform ipotezei trebuie să fie constantă. Dar $f(a) = 0$ și $f(b) = 1$. Contradicția la care am ajuns ne spune că presupunerea că A nu este interval e falsă.

PROBLEMA 3

Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea $f(a) = f(b) \neq f(x), (\forall)x \in (a, b)$. Atunci pentru orice $0 < d < b - a$ există $x_1, x_2 \in [a, b]$ așa încât $x_2 - x_1 = d$ și $f(x_1) = f(x_2)$.

Soluție:

Conform ipotezei, putem presupune $f(x) > f(a), (\forall)x \in (a, b)$. Considerăm funcția

$$g : [a, b - d] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - f(x + d), (\forall)x \in [a, b - d].$$

Atunci avem $g(a) = f(a) - f(a + d) < 0$ și $g(b - d) = f(b - d) - f(b) > 0$. Funcția g are proprietatea lui Darboux și deci $(\exists)x_1 \in (a, b - d)$ așa încât $g(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_1 + d)$. Notând $x_2 = x_1 + d$ rezultă că $x_2 \in [a, b]$ dacă $x_1 \in (a, b - d)$ și am obținut $f(x_1) = f(x_2)$ și $x_2 - x_1 = d$.