REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO IANUARIE 2018

ISSN 2065-6432

www.mateinfo.ro

REVISTĂ LUNARĂ DIN FEBRUARIE 2009

revista@mateinfo.ro

ARTICOLE REVISTĂ:

1. PROBLEMA LUNII IANUARIE 2018

Fie $ABCD$ *un patrulater convex, iar* E *şi* F *mijloacele diagonalelor* $[AC]$, *respectiv* $[BD]$.

Arătaţi că: $AB \cdot CD + BC \cdot AD + 2EF^2 = \dfrac{AC^2 + BD^2}{2} \Leftrightarrow ABCD$ *este paralelogram.* $(*)$

Prof. Stănescu Florin

Așteptăm rezolvările pe adresa de e-mail revista@mateinfo.ro

2. SOLUȚII PROBLEMA LUNII DECEMBRIE 2017

a) Sa se arate ca pentru orice $x \in \mathbb{R}$ exista un triunghi ABC avand lungimile laturilor: $c = \text{AB} = \sqrt{2x^2 - 2x + 3}$, $\text{b=AC=}\sqrt{2x^2 + 2x + 3}$, $\text{a=BC=}\sqrt{8x^2 + 10}$.

b) Aria triunghiului ABC este un numar irational care nu depinde de x.

Propusa de : Prof. Iuliana Trasca

Solutie autor:

a) Avem inegalitatile evidente:
$\sqrt{8x^2+10} \geq \sqrt{2x^2+2x+3} \geq \sqrt{2x^2-2x+3}$, adica $BC \geq AC \geq AB$. Pentru a demonstra ca cele trei laturi pot reprezenta lungimile laturilor unui triunghi e suficient sa aratam inegalitatea:
$\sqrt{2x^2-2x+3} + \sqrt{2x^2+2x+3} > \sqrt{8x^2+10}$ (1) sau AB+AC>BC - celelalte doua inegalitati fiind evidente. (AB+BC>AC, AC+BC>AB)

Ridicand ambii membri la patrat ai inegalitatii (1) avem:

$$4x^2+6+2\sqrt{\left(2x^2+3\right)^2-\left(2x\right)^2} > 8x^2+10 \Leftrightarrow \sqrt{4x^4+8x^2+9} > 2x^2+2$$

sau 9>4 evident.

b) Cu teorema cosinusului avem :

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{4x^2+6-8x^2-10}{2\sqrt{2x^2+2x+3}\cdot\sqrt{2x^2-2x+3}} \Leftrightarrow \cos \text{A} = -\frac{2\left(\text{x}^2+1\right)}{\sqrt{4x^4+8x^2+9}}$$

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A},\ \sin A = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4x^4+8x^2+9}}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{bc\sin A}{2}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{2x^2-2x+3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4x^4+8x^2+9}}}{2} \Leftrightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Alte soluții

1. Prof. Mihai Miculița-ORADEA:

***a*).** Observăm de la început că:

$$\sqrt{2x^2 \pm 2x + 3} = \sqrt{x^2 + \left(x^2 \pm 2x + 1\right) + 1} = \sqrt{x^2 + (x \pm 1)^2 + 1} \in \mathbb{R}; (\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b, c \in \mathbb{R}; (\forall) x \in \mathbb{R}} \text{ şi } \boxed{a = \sqrt{8x^2+10} \in \mathbb{R}}.$$

Pe de altă parte, avem: $a > b$ şi $a > c$. Într-adevăr: $a > b, c \Leftrightarrow \sqrt{8x^2+10} > \sqrt{2x^2 \pm 2x + 3} \Big| (\ )^2 \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow 8x^2+10>2x^2\pm 2x+3 \Leftrightarrow 4x^2\mp 2x+7>0 \Leftrightarrow 3x^2+\left(x^2\mp 2x+1\right)+6>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{3x^2+(x\mp 1)^2+6>0;(\forall)x\in\mathbb{R}}.\blacksquare$$

Ţinând acum seama de faptul ca: $a>b,c;$ pentru a demonstra că numerele a,b şi $c-$ sunt lungimile laturilor unui triunghi $ABC,$ este suficient să arătăm doar faptul că: $\boxed{b+c>a}$!

Avem, însă: $b+c>a \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{2x^2-2x+3}>\sqrt{8x^2+10}\,\Big|\,(\ )^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x^2+\cancel{2x}+3+2\cdot\sqrt{2x^2+2x+3}\cdot\sqrt{2x^2-2x+3}+2x^2-\cancel{2x}+3>8x^2+10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\sqrt{\left(2x^2+2x+3\right)\left(2x^2-2x+3\right)}>4x^2+4\,\Big|:2 \Leftrightarrow \sqrt{\left(2x^2+3\right)^2-4x^2}>2x^2+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(2x^2+3\right)^2-4x^2}>2x^2+2 \Leftrightarrow 4x^4+8x^2+9>4x^4+8x^2+4 \Leftrightarrow \boxed{5>0}.\blacksquare$$

b). Avem: $a^2=8x^2+10=\boxed{2\left[2\left(2x^2+3\right)-1\right]}, b^2=2x^2+2x+3=\boxed{\left(2x^2+3\right)+2x}$ şi

$c^2=2x^2-2x+3=\boxed{\left(2x^2+3\right)-2x} \Rightarrow b^2+c^2=\boxed{2\left(2x^2+3\right)}$ şi $\boxed{b^2c^2=\left(2x^2+3\right)^2-4x^2}.$

Aşa că: $16S^2=2\cdot\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)=2a^2\cdot\left(b^2+c^2\right)+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4=$

$$=8\left[2\left(2x^2+3\right)-1\right]\left(2x^2+3\right)+2\left[\left(2x^2+3\right)^2-4x^2\right]-4\left[2\left(2x^2+3\right)-1\right]^2-\left[\left(2x^2+3\right)+2x\right]^2-$$

$$-\left[\left(2x^2+3\right)-2x\right]^2=\underline{16\left(2x^2+3\right)^2}-\underline{\underline{8\left(2x^2+3\right)}}+\underline{2\left(2x^2+3\right)^2}-8x^2-\underline{16\left(2x^2+3\right)^2}+\underline{\underline{16\left(2x^2+3\right)}}-4-$$

$$-\underline{\left(2x^2+3\right)^2}+\underline{\underline{4x\left(2x^2+3\right)}}-4x^2-\underline{\left(2x^2+3\right)^2}-\underline{\underline{4x\left(2x^2+3\right)}}-4x^2=8\left(\cancel{2x^2}+3\right)-\cancel{16x^2}-4=20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16S^2=20\,\Big|:16 \Rightarrow S^2=\frac{5}{4} \Rightarrow \boxed{S=\frac{\sqrt{5}}{2}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}.\blacksquare$$

2) Prof. Constantin Telteu

Rezolvare:

a) Observăm că toate expresiile de sub radicali sunt >0, pentru orice număr real.
Arătăm că fiecare latură este mai mică decât suma celorlalte două:

$a<b+c \Leftrightarrow \sqrt{8x^2+10}<\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{2x^2-2x+3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x^2+10<2x^2+2x+3+2\cdot\sqrt{2x^2+2x+3}\cdot\sqrt{2x^2-2x+3}+2x^2-2x+3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left(x^2+1\right)<\sqrt{2x^2+2x+3}\cdot\sqrt{2x^2-2x+3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\left(x^2+1\right)^2<\left(2x^2+3\right)^2-4x^2 \Leftrightarrow 12x^2+5>0$ inegalitate adevarata $\forall x\in\mathbb{R}.$

$b<a+c \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+2x+3}<\sqrt{8x^2+10}+\sqrt{2x^2-2x+3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x+3<8x^2+10+2\cdot\sqrt{8x^2+10}\cdot\sqrt{2x^2-2x+3}+2x^2-2x+3 \Leftrightarrow$

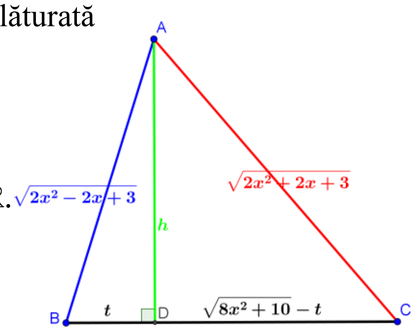
$\Leftrightarrow -8x^2+4x-10<2\cdot\sqrt{8x^2+10}\cdot\sqrt{2x^2-2x+3}$ inegalitate adevarata $\forall x\in\mathbb{R}$,
(Deoarece membrul stâng este <0, iar cel drept >0).

$c<a+b \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x+3}<\sqrt{8x^2+10}+\sqrt{2x^2+2x+3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-2x+3<8x^2+10+2\cdot\sqrt{8x^2+10}\cdot\sqrt{2x^2+2x+3}+2x^2+2x+3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8x^2-4x-10<2\cdot\sqrt{8x^2+10}\cdot\sqrt{2x^2+2x+3}$, adevarata pentru $\forall x\in\mathbb{R}$.
(Deoarece membrul stâng este <0, iar cel drept >0).

b) Cu teorema lui Pitagora din triunghiurile mici din figura alăturată obținem:



$$h^2=2x^2-2x+3-t^2=2x^2+2x+3-\left(\sqrt{8x^2+10}-t\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2t\sqrt{8x^2+10}=8x^2-4x+10 \Rightarrow t=\frac{4x^2-2x+5}{\sqrt{8x^2+10}}>0, \forall x\in\mathbb{R}.$$

$$h^2=2x^2-2x+3-\frac{\left(4x^2-2x+5\right)^2}{8x^2+10}=\ldots=\frac{5}{8x^2+10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8x^2+10}} \Rightarrow A_{ABC}=\frac{BC\cdot h}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.$$

3) George-Florin Serban, profesor Braila

a)Exista ΔABC daca $AB+AC>BC, AB+BC>AC, \mathrm{AC}+\mathrm{BC}>\mathrm{AB}$.

$AB+AC>BC$, $\sqrt{2x^2-2x+3}+\sqrt{2x^2+2x+3}>\sqrt{8x^2+10}$, $(\sqrt{2x^2-2x+3}+\sqrt{2x^2+2x+3})^2>\sqrt{8x^2+10}^2$,

$4x^2+6+2\sqrt{(2x^2+3)^2-4x^2}>8x^2+10$, $\sqrt{4x^4+8x^2+9}>2x^2+2$, $\sqrt{4x^4+8x^2+9}^2>(2x^2+2)^2$,

$4x^4+8x^2+9>4x^4+8x^2+4$, (A). Arat ca $AB+BC>AC$, $\sqrt{2x^2-2x+3}+\sqrt{8x^2+10}>\sqrt{2x^2+2x+3}$,

$(\sqrt{2x^2-2x+3}+\sqrt{8x^2+10})^2>\sqrt{2x^2+2x+3}^2$, $10x^2-2x+13+2\sqrt{(2x^2-2x+3)(8x^2+10)}>2x^2+2x+3$,

$4x^2-2x+5+\sqrt{(2x^2-2x+3)(8x^2+10)}>0$, $4(x-\frac{1}{4})^2+\frac{19}{4}+\sqrt{(2x^2-2x+3)(8x^2+10)}>0$, (A).

Arat ca

$\mathrm{AC}+\mathrm{BC}>\mathrm{AB}$, $\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{8x^2+10}>\sqrt{2x^2-2x+3}$, $(\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{8x^2+10})^2>\sqrt{2x^2-2x+3}^2$,

$10x^2+2x+13+2\sqrt{(2x^2+2x+3)(8x^2+10)}>2x^2-2x+3$,

$4x^2+2x+5+\sqrt{(2x^2+2x+3)(8x^2+10)}>0$, $4(x+\frac{1}{4})^2+\frac{19}{4}+\sqrt{(2x^2+2x+3)(8x^2+10)}>0$, (A).

b)Aplic formula lui Heron, $A_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\dfrac{\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2-a^4-b^4-c^4}}{4}$,

$a^4+b^4+c^4=(2x^2-2x+3)^2+(2x^2+2x+3)^2+(8x^2+10)^2$,

$a^4+b^4+c^4=4x^4+4x^2+9-8x^3-12x+12x^2+4x^4+4x^2+9+8x^3+12x+12x^2+64x^4+160x^2+100$,

$a^4+b^4+c^4=72x^4+192x^2+118$,

$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2=(2x^2-2x+3)(2x^2+2x+3)+(2x^2-2x+3)(8x^2+10)+(2x^2+2x+3)(8x^2+10)$,

$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2=4x^4+8x^2+9+(2x^2-2x+3+2x^2+2x+3)(8x^2+10)=4x^4+8x^2+9+(4x^2+6)(8x^2+10)$,

$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2=4x^4+8x^2+9+32x^4+88x^2+60=36x^4+96x^2+69$,

$2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2=72x^4+192x^2+138$,

$2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2-a^4-b^4-c^4=72x^4+192x^2+138-72x^4-192x^2-118=20$,

$$A_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2-a^4-b^4-c^4}}{4}=\frac{\sqrt{20}}{4}=\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

4) Prof. Gabriela Neguțescu, Școala Gimnazială Comuna Talea

a) Expresiile $2x^2-2x+3$, $2x^2+2x+3$

și $8x^2+10$ sunt strict pozitive pentru orice x real.

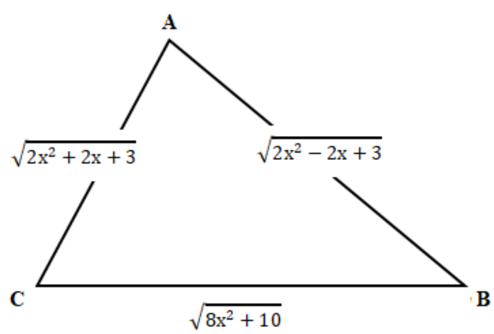
În plus, $2x^2-2x+3<8x^2+10$ și

$2x^2+2x+3<8x^2+10$

deci AB < BC și AC < BC.

Deducem că AB + BC > AC și AC + BC > AB.

Rămâne să demonstrăm că AB + AC > BC.



AB + AC > BC $\Leftrightarrow (AB+AC)^2>BC^2 \Leftrightarrow 4x^2+6+2\sqrt{4x^4+8x^2+9}>8x^2+10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{4x^4+8x^2+9}>2x^2+2 \Leftrightarrow 4x^4+8x^2+9>4x^4+8x^2+4 \Leftrightarrow 9>4$ adevărat.

Cum AB + BC > AC, AC + BC > AB și AB + AC > BC obținem că există triunghiul ABC având lungimile laturilor

$AB=\sqrt{2x^2-2x+3}$, $AC=\sqrt{2x^2+2x+3}$ și $BC=\sqrt{8x^2+10}$

b) Aplicăm teorema cosinusului :

$$\cos(\widehat{A})=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}=-\frac{2x^2+2}{\sqrt{4x^4+8x^2+9}}$$

Din formula fundamentală a trigonometriei obținem

$$\sin^2(\hat{A}) + \cos^2(\hat{A}) = 1 \Rightarrow \sin^2(\hat{A}) = \frac{5}{4x^4+8x^2+9} \Rightarrow$$

$$\sin(\hat{A}) = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4x^4+8x^2+9}}$$

$$\text{Cum } 0^0 < m(\hat{A}) < 180^0 \Rightarrow \sin(\hat{A}) > 0 \Rightarrow \sin(\hat{A}) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4x^4+8x^2+9}}$$

$$A(ABC) = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot \sin(\hat{A}) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2x^2-2x+3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4x^4+8x^2+9}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Deci aria triunghiului ABC este număr irațional care nu depinde de x.

5) Prof. Marin Chirciu, Pitești

a)Pentru orice $x\in\boldsymbol{R}$ radicalii au sens. Arătăm că $b+c>a, c+a>b, a+b>c$.
Inegalitatea $b+c>a$ se transformă echivalent prin ridicări succesive la pătrat:

$$\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{2x^2-2x+3}>\sqrt{8x^2+10} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+2x+3}\cdot\sqrt{2x^2-2x+3}>2x^2+2 \Leftrightarrow$$

$\left(2x^2+2x+3\right)\cdot\left(2x^2-2x+3\right)>\left(2x^2+2\right)^2 \Leftrightarrow 9>4$, evident.

Analog $c+a>b \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x+3}+\sqrt{8x^2+10}>\sqrt{2x^2+2x+3} \Leftrightarrow$

$4x^2-2x+5+\sqrt{2x^2-2x+3}\cdot\sqrt{8x^2+10}>0$, evident, deoarece $4x^2-2x+5>0$, ($\Delta<0$).

Analog $a+b>c \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{8x^2+10}>\sqrt{2x^2-2x+3} \Leftrightarrow$

$4x^2+2x+5+\sqrt{2x^2+2x+3}\cdot\sqrt{8x^2+10}>0$, evident, deoarece $4x^2+2x+5>0$, ($\Delta<0$).

b)Calculăm

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\left(2x^2+2x+3\right)+\left(2x^2-2x+3\right)-\left(8x^2+10\right)}{2bc}=\frac{-4x^2-4}{2bc}=\frac{-2x^2-2}{bc}.$$

Rezultă $\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\left(\frac{-2x^2-2}{bc}\right)^2=\frac{\left(2x^2+2x+3\right)\left(2x^2-2x+3\right)-4\left(x^2+1\right)^2}{b^2c^2}=\frac{5}{b^2c^2}$,

de unde $\sin A=\frac{\sqrt{5}}{bc}$.

Obținem $Aria\left(ABC\right)=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{\sqrt{5}}{bc}=\frac{\sqrt{5}}{2}$, de unde concluzia.

Remarcă - Problema se poate dezvolta.

a) Să se arate că pentru orice $x\in\boldsymbol{R}$ există un triunghi ABC având lungimile laturilor

$c = AB = \sqrt{\alpha x^2 - \alpha x + \beta}$, $b = AC = \sqrt{\alpha x^2 + \alpha x + \beta}$, $a = BC = \sqrt{4\alpha x^2 + \gamma}$,
unde $\alpha, \beta, \gamma > 0$, $\alpha + \gamma = 4\beta$ și $\alpha < 4\gamma$.

b) Aria triunghiului ABC nu depinde de x.

Soluție.

a)Pentru orice $x \in \boldsymbol{R}$ radicalii au sens:

$\alpha x^2 - \alpha x + \beta > 0$ ($\alpha > 0, \Delta < 0$), $\Delta = \alpha^2 - 4\alpha\beta = \alpha(\alpha - 4\beta) = \alpha \cdot (-\gamma) < 0$.

$\alpha x^2 + \alpha x + \beta > 0$ ($\alpha > 0, \Delta < 0$), $\Delta = \alpha^2 - 4\alpha\beta = \alpha(\alpha - 4\beta) = \alpha \cdot (-\gamma) < 0$.

$4\alpha x^2 + \gamma > 0$ ($\alpha > 0, \gamma > 0$)

Arătăm că $b + c > a, c + a > b, a + b > c$.

Inegalitatea $b + c > a$ se transformă echivalent prin ridicări succesive la pătrat:

$\sqrt{\alpha x^2 + \alpha x + \beta} + \sqrt{\alpha x^2 - \alpha x + \beta} > \sqrt{4\alpha x^2 + \gamma} \Leftrightarrow$

$2\sqrt{\alpha x^2 + \alpha x + \beta} \cdot \sqrt{\alpha x^2 - \alpha x + \beta} > 2\alpha x^2 + \gamma - 2\beta \Leftrightarrow$ (pentru $2\alpha x^2 + \gamma - 2\beta \geq 0$, în caz contrar inegalitatea este evidentă) $\Leftrightarrow$

$4(\alpha x^2 + \alpha x + \beta) \cdot (\alpha x^2 - \alpha x + \beta) > (2\alpha x^2 + \gamma - 2\beta)^2 \Leftrightarrow 4\alpha x^2 (4\beta - \alpha - \gamma) > \gamma^2 - 4\beta\gamma \Leftrightarrow$

$0 > \gamma(\gamma - 4\beta) \Leftrightarrow 0 > \gamma(-\alpha)$, evident.

Analog $c + a > b \Leftrightarrow \sqrt{\alpha x^2 - \alpha x + \beta} + \sqrt{4\alpha x^2 + \gamma} > \sqrt{\alpha x^2 + \alpha x + \beta} \Leftrightarrow$

$4\alpha x^2 - 2\alpha x + \gamma + 2\sqrt{\alpha x^2 - \alpha x + \beta} \cdot \sqrt{4\alpha x^2 + \gamma} > 0$, evident, deoarece $4\alpha x^2 - 2\alpha x + \gamma > 0$,

($\Delta < 0$), $\Delta = 4\alpha^2 - 16\alpha\gamma = 4\alpha(\alpha - 4\gamma) < 0$.

Analog $a + b > c \Leftrightarrow \sqrt{\alpha x^2 + \alpha x + \beta} + \sqrt{4\alpha x^2 + \gamma} > \sqrt{\alpha x^2 - \alpha x + \beta} \Leftrightarrow$

$4\alpha x^2 + 2\alpha x + \gamma + 2\sqrt{\alpha x^2 + \alpha x + \beta} \cdot \sqrt{4\alpha x^2 + \gamma} > 0$, evident, deoarece $4\alpha x^2 + \alpha x + \gamma > 0$,

($\Delta < 0$), $\Delta = 4\alpha^2 - 16\alpha\gamma = 4\alpha(\alpha - 4\gamma) < 0$.

b)Calculăm

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(\alpha x^2 + \alpha x + \beta) + (\alpha x^2 - \alpha x + \beta) - (4\alpha x^2 + \gamma)}{2bc} = \frac{-2\alpha x^2 + 2\beta - \gamma}{2bc}.$$

Rezultă

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{-2\alpha x^2 + 2\beta - \gamma}{2bc}\right)^2 = \frac{4(\alpha x^2 + \alpha x + \beta)(\alpha x^2 - \alpha x + \beta) - (-2\alpha x^2 + 2\beta - \gamma)^2}{b^2 c^2} =$$

$$= \frac{4\alpha x^2 (4\beta - \alpha - \gamma) + 4\beta\gamma - \gamma^2}{4b^2 c^2} = \frac{\gamma(4\beta - \gamma)}{4b^2 c^2} = \frac{\gamma\alpha}{4b^2 c^2}$$, de unde $\sin A = \dfrac{\sqrt{\alpha\gamma}}{2bc}$.

Obținem $Aria(ABC) = \dfrac{1}{2} bc \sin A = \dfrac{1}{2} bc \cdot \dfrac{\sqrt{\alpha\gamma}}{2bc} = \dfrac{\sqrt{\alpha\gamma}}{4}$, de unde concluzia.

Notă.

Pentru $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 10$ se obține Problema Lunii Decembrie 2017.

6) Prof. Biro Istvan

Rezolvare 1:

a) Din formula lui Heron rezultă că $a,b,c \in \mathbb{R}_+$ sunt laturile unui triunghi dacă și numai dacă $p(p-a)(p-b)(p-c)>0$. Având în vedere lungimile laturilor din enunț obținem

$$16p(p-a)(p-b)(p-c)=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-2\left(a^4+b^4+c^4\right)=20>0$$, deci a,b,c pot forma un triunghi.

b) $A_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{\frac{20}{16}}=\frac{\sqrt{5}}{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.$.

Rezolvare 2:

a) Pentru orice $x\in R$ notăm $a=\sqrt{8x^2+10}=\sqrt{(2x-\sqrt{5})^2+(2x+\sqrt{5})^2}$, $b=\sqrt{2x^2+2x+3}=$ $=\sqrt{\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}$ și c$=\sqrt{2x^2-2x+3}=\sqrt{\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}$.

Dacă considerăm punctele $A\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2};x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $B\left(2x;-\sqrt{5}\right)$ și $C\left(\sqrt{5};2x\right)$ atunci observăm că $d(A;B)=c=AB, d(A;C)=b=AC$ și $d(B;C)=a=BC$, adică există trei segmente cu lungimea din enunț. Pentru a demonstra că cele trei puncte formează un triunghi este necesar și suficient să arătăm că nu sunt coliniare, adică

$$D=\begin{vmatrix} x+\frac{1+\sqrt{5}}{2} & x-\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 2x & -\sqrt{5} & 1 \\ \sqrt{5} & 2x & 1 \end{vmatrix}=-\sqrt{5}\neq 0.$$

b)Aria triunghiului $ABC=\frac{|D|}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$, număr irațional care nu depinde de x.

7) Prof. Nela Ciceu, prof. Roşiori, Bacău şi prof. Roxana Mihaela Stanciu, Buzău

Numerele pozitive a, b, c sunt laturile unui triunghi dacă și numai dacă expresia $2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$ este pozitivă. În acest caz, conform formulei lui Heron, expresia reprezintă $16S^2$.

Fie E expresia de mai sus. Avem

$E = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$ e $= (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)$ (1)

Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghi, evident că $E > 0$. Dacă $E > 0$, să presupunem că exact două dintre parantezele din relația (1) sunt negative, fie acestea $a + b - c < 0$, $a - b + c < 0$. Atunci $(a + b - c) + (a - b + c) = 2a < 0$, contradicție. Rezulta că toate parantezele sunt pozitive, deci a, b, c sunt laturile unui triunghi.

În cazul nostru obținem

$$E = 2(8x^2 + 10)(2x^2 + 2x + 3) + 2(2x^2 + 2x + 3)(2x^2 - 2x + 3) +$$
$$+ 2(2x^2 - 2x + 3)(8x^2 + 10) - (8x^2 + 10)^2 - (2x^2 + 2x + 3)^2 - (2x^2 - 2x + 3)^2 =$$
$$= 32x^4 + 32x^3 + 88x^2 + 40x + 60 + 8x^4 + 24x^2 + 18 - 8x^2 + 32x^4 - 32x^3 + 88x^2 -$$
$$- 40x + 60 - 64x^4 - 160x^2 - 100 - 4x^4 - 4x^2 - 9 - 8x^3 - 12x^2 - 12x - 4x^4 - 4x^2 - 9 + 8x^3 -$$
$$-12x^2 + 12x = 20.$$

Deci, $16S^2 = 20 \Rightarrow S = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

8) Profesor: Chetreanu George Daniel (Școala Gimnazială Bod, jud. Brașov)

a) Se știe că lungimile laturilor unui triunghi sunt numere reale strict pozitive, așadar trebuie să verificăm dacă sunt corect definite în enunț.

Condiția de existență a unui radical de ordinul doi este ca numărul de sub radical să fie pozitiv, așadar obținem: $\begin{cases} 2x^2 - 2x + 3 > 0 \\ 2x^2 + 2x + 3 > 0 \\ 8x^2 + 10 > 0 \end{cases}$.

- $2x^2 - 2x + 3 > 0$

$2x^2 - 2x + 3 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow \Delta = 4 - 24 = -20 < 0$, rezultă că expresia își păstrează semnul, adică semnul lui a, ceea ce înseamnă că e pozitivă, oricare ar fi x real.

- $2x^2 + 2x + 3 > 0$

$2x^2 + 2x + 3 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow \Delta = 4 - 24 = -20 < 0$. Așadar și a doua expresie este tot pozitivă, oricare ar fi x număr real.

- $8x^2+10>0 \Rightarrow 8x^2>-10$, ceea ce este adevărat pentru orice x număr real deoarece orice număr ridicat la puterea a doua este pozitiv, iar un număr pozitiv e clar mai mare decât -10.

Existența unui triunghi cu lungimile date se verifică dacă este îndeplinită inegalitatea triunghiului, adică: $\begin{cases} a+b>c \\ a+c>b \\ b+c>a \end{cases}$.

Se observă că a=BC ar fi latura cea mai mare, însă pentru a fi siguri demonstrăm acest lucru:

$a>b \Rightarrow \sqrt{8x^2+10}>\sqrt{2x^2+2x+3}$

$8x^2+10>2x^2+2x+3$

$6x^2-2x+7>0$

$6x^2-2x+7=0$

$\Delta=4-4\cdot 6\cdot 7$

$\Delta=4-168=-164<0,$

ceea ce înseamnă că expresia e pozitivă oricare ar fi x real, așadar inegalitatea $a>b$ este dovedită.

$a>c \Rightarrow \sqrt{8x^2+10}>\sqrt{2x^2-2x+3}$

$8x^2+10>2x^2-2x+3$

$6x^2+2x+7>0$

$6x^2+2x+7=0$

$\Delta=4-4\cdot 6\cdot 7$

$\Delta=4-168=-164<0,$

ceea ce înseamnă că expresia e pozitivă oricare ar fi x real, așadar și inegalitatea $a>c$ este dovedită.

Pentru existența triunghiului ABC trebuie să avem: $\begin{cases} a+b>c \\ a+c>b \\ b+c>a \end{cases}$

Cum latura $a=BC$ este cea mai mare latură, este evident că $a+b>c$ și că $a+c>b$.
Ne rămâne de demonstrat că $b+c>a$, adică trebuie să demonstrăm că:

$\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{2x^2-2x+3}>\sqrt{8x^2+10}$

Pentru aceasta, ridicăm la puterea a doua deoarece toți termenii sunt pozitivi.
Obținem astfel:

$$2x^2+2x+3+2\sqrt{2x^2+2x+3}\sqrt{2x^2-2x+3}+2x^2-2x+3>8x^2+10$$

$$4x^2+6+2\sqrt{(2x^2+3)^2-(2x)^2}>8x^2+10$$

$$2\sqrt{4x^4+12x^2+9-4x^2}>8x^2+10-4x^2-6$$

$$2\sqrt{4x^4+8x^2+9}>4x^2+4$$

$$\sqrt{4x^4+8x^2+9}>2x^2+2$$

Ridicăm din nou la puterea a doua și avem:

$$4x^4+8x^2+9>4x^4+8x^2+4$$

$$9>4$$

Ceea ce este adevărat.

Așadar inegalitatea dorită a fost demonstrată.

În consecință, există un triunghi ale cărui laturi sunt cele definite în enunț.

b) Aria triunghiului ABC se poate calcula cu ajutorul formulei:

$$A_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot \sin A}{2}$$

Lungimile laturilor le știm, însă valoarea sinusului unghiului A trebuie determinată. Pentru aceasta folosim teorema cosinusului pentru unghiul A și obținem:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$ sau direct $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

Înlocuind lungimile laturilor în formulă obținem:

$$\cos A=\frac{2x^2+2x+3+2x^2-2x+3-(8x^2+10)}{2\sqrt{2x^2-2x+3}\sqrt{2x^2+2x+3}}$$

$$\cos A=\frac{4x^2+6-8x^2-10}{2\sqrt{4x^4+8x^2+9}}$$

$$\cos A=\frac{-4x^2-4}{2\sqrt{4x^4+8x^2+9}}$$

$$\cos A=\frac{-2x^2-2}{\sqrt{4x^4+8x^2+9}}$$

Observație: Cosinusul unghiului A este negativ, așadar unghiul A este unghi obtuz.

Dar nouă ne trebuie sinA, pe care îl scoatem din formula fundamentală a trigonometriei:

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1$$

$$\sin^2 A+\frac{(-2x^2-2)^2}{4x^4+8x^2+9}=1$$

$$\sin^2 A+\frac{4x^4+8x^2+4}{4x^4+8x^2+9}=1$$

$$\sin^2 A = 1 - \frac{4x^4 + 8x^2 + 4}{4x^4 + 8x^2 + 9}$$

$$\sin^2 A = \frac{5}{4x^4 + 8x^2 + 9}$$

Unghiul A este obtuz, deci sinusul unghiului A va fi pozitiv. Alegem dintre cele două valori pentru sinA doar pe cea pozitivă.

Deci, $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4x^4 + 8x^2 + 9}}$.

Revenim la formula ariei și avem:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 3}\sqrt{2x^2 + 2x + 3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4x^4 + 8x^2 + 9}}}{2}$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{4x^4 + 8x^2 + 9} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4x^4 + 8x^2 + 9}}}{2}$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Astfel, am demonstrat că aria triunghiului ABC este un număr irațional, deoarece $\sqrt{5}$ este un număr irațional (nu poate fi scos de sub radical) și în plus, aria triunghiului nu conține nimic legat de x, deci nu depinde de x.

<u>Observație</u>:

De fiecare dată când am întâlnit calculul $\sqrt{2x^2 - 2x + 3}\sqrt{2x^2 + 2x + 3} = \sqrt{4x^4 + 8x^2 + 9}$ am scris direct deoarece am considerat că este suficient că am calculat la subpunctul a).

9) Prof. Buzea Gabriela , Școala Gimnazială Nr 56, București

a) Demonstrăm că există triunghiul:

- AB+BC>AC

$$\sqrt{2x^2 - 2x + 3} + \sqrt{8a^2 + 10} > \sqrt{2x^2 + 2x + 3}$$
$$2x^2 - 2x + 3 + 2\sqrt{(2x^2 - 2x + 3)(8x^2 + 10)} + 8x^2 + 10 > 2x^2 + 2x + 3$$
$$8x^2 - 4x + 10 + 2\sqrt{(2x^2 - 2x + 3)(8x^2 + 10)} > 0$$
$\left(2\sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{19}{2} + 2\sqrt{(2x^2 - 2x + 3)(8x^2 + 10)} > 0$, adevărat.

- BC+AC>AB

$$\sqrt{8x^2 + 10} + \sqrt{2x^2 + 2x + 3} > \sqrt{2x^2 - 2x + 3}$$
$$8x^2 + 10 + 2\sqrt{(8x^2 + 10)(2x^2 + 2x + 3)} + 2x^2 + 2x + 3 > 2x^2 - 2x + 3$$
$$8x^2 + 4x + 10 + 2\sqrt{(8x^2 + 10)(2x^2 + 2x + 3)} > 0$$

$\left(2\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{19}{2}+2\sqrt{(8x^2+10)(2x^2+2x+3)}>0$, adevărat.

- AC+AB>BC

$\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{2x^2-2x+3}>\sqrt{8x^2+10}$
$2x^2+2x+3+2\sqrt{(2x^2+2x+3)(2x^2-2x+3)}+2x^2-2x+3>8x^2+10$
$2\sqrt{(2x^2+2x+3)(2x^2-2x+3)}>4x^2+4$
$(2x^2+2x+3)(2x^2-2x+3)>(2x^2+2)^2$
$4x^4+12x^2+9-4x^2>4x^4+8x^2+4$
$4x^4+8x^2+9>4x^4+8x^2+4$, adevărat.

b) Construiesc AD⊥BC, D∈BC.
Notez AD=h, BD=y, iar DC=$\sqrt{8x^2+10}-y$.
În triunghiul ABD, m(∢D)=$90^0 \overset{T.P.}{\Longrightarrow} h^2+y^2=2x^2-2x+3$, (1).
În triunghiul ADC, m(∢D)=$90^0 \overset{T.P.}{\Longrightarrow} h^2+\left(\sqrt{8x^2+10}-y\right)^2=2x^2+2x+3$
$h^2+8x^2+10-2y\sqrt{8x^2+10}+y^2=2x^2+2x+3$,(2).
Din (1) si (2) rezultă că $2x^2-2x+3+8x^2+10-2y\sqrt{8x^2+10}=2x^2+2x+3$
$4x^2-2x+5=y\sqrt{8x^2+10}$
$y=\frac{4x^2-2x+5}{\sqrt{8x^2+10}}$, (3).

Din relațiile (1) si (3) obținem $h^2+\left(\frac{4x^2-2x+5}{\sqrt{8x^2+10}}\right)^2=2x^2-2x+3$

$$h^2=2x^2-2x+3-\frac{(4x^2-2x+5)^2}{8x^2+10}$$

$$h^2=\frac{(8x^2+10)(2x^2-2x+3)-(4x^2-2x+5)^2}{8x^2+10}$$

$$h^2=\frac{16x^4-16x^3+24x^2+20x^2-20x+30-(16x^4+4x^2+25-16x^3-20x+40x^2)}{8x^2+10}$$

$$h=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8x^2+10}}$$

Aria triunghiului ABC este

$$A_{\Delta ABC}=\frac{BC\cdot AD}{2}=\frac{\sqrt{8x^2+10}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8x^2+10}}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Deci, aria triunghiului ABC este un număr irațional care nu depinde de x.

10) Prof. Gheorghe ROTARIU, Dorohoi, Botoșani

Fie $x \in \mathbb{R}$, arbitrar. În planul raportat la reperul cartezian XOY, considerăm punctele $A(0,0)=O,\ B\left(\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ și $C\left(-\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$. Evident,

$$AB=\sqrt{2x^2-2x+3},\ AC=\sqrt{2x^2+2x+3} \text{ și } BC=\sqrt{8x^2+10}.$$

Calculând determinantul $\Delta=\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{10}}{2} & 1 \\ -\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{10}}{2} & 1 \end{vmatrix}$, obținem $\Delta=-\sqrt{5}\neq 0$, adică punctele A, B, C nu sunt coliniare, deci ele formează un triunghi.

Aria acestuia,

$$[ABC]=\frac{|\Delta|}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\notin \mathbb{Q}.$$

11) Prof. Păcurar Cornel Cosmin

a) Evident că $2x^2-2x+3\geq 0, \forall x\epsilon\mathbb{R}, 2x^2+2x+3\geq 0, \forall x\epsilon\mathbb{R}, 8x^2+10\geq 0, \forall x\epsilon\mathbb{R}$,toate cele trei expresii au $\Delta<0$ şi $a>0$.

Evident a>0,b>0,c>0 ,fiind date ca radicali din numere pozitive.
O să arătăm că c+b>a,c+a>b,b+a>c.
c+b>a$\Leftrightarrow\sqrt{2x^2-2x+3}+\sqrt{2x^2+2x+3}>\sqrt{8x^2+10}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4x^2+6+2\sqrt{(2x^2-2x+3)(2x^2+2x+3)}>8x^2+10\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{(2x^2-2x+3)(2x^2+2x+3)}>4x^2+4\Leftrightarrow\sqrt{(2x^2-2x+3)(2x^2+2x+3)}>2x^2+2$
$\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4x^4+4x^3+6x^2-4x^3-4x^2-6x+6x^2+6x+9>4x^4+8x^2+4\Leftrightarrow 9>4$,care este evident,$\Rightarrow$
$\Rightarrow$c+b>a.
c+a>b$\Leftrightarrow\sqrt{2x^2-2x+3}+\sqrt{8x^2+10}>\sqrt{2x^2+2x+3}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x^2-2x+3+8x^2+10+2\sqrt{(2x^2-2x+3)(8x^2+10)}>2x^2+2x+3\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 8x^2-4x+10+2\sqrt{(2x^2-2x+3)(8x^2+10)}>0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4x^2+9+(2x-1)^2+2\sqrt{(2x^2-2x+3)(8x^2+10)}>0$,care este evident,$\Rightarrow$c+a>b.
b+a>c$\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{8x^2+10}>\sqrt{2x^2-2x+3}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x^2+2x+3+8x^2+10+2\sqrt{(2x^2+2x+3)(8x^2+10)}>2x^2-2x+3\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 8x^2+4x+10+2\sqrt{(2x^2+2x+3)(8x^2+10)}>0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4x^2+9+(2x+1)^2+2\sqrt{(2x^2+2x+3)(8x^2+10)}>0$,care este evident,$\Rightarrow$b+a>c.
Din a>0,b>0,c>0, c+b>a, c+b>a, b+a>c$\Rightarrow$pentru orice x$\epsilon\mathbb{R}$,există un triunghi ABC având lungimile laturilor:
a=BC=$\sqrt{8x^2+10}$,b=AC=$\sqrt{2x^2+2x+3}$,c=AB=$\sqrt{2x^2-2x+3}$.

b) $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{\sqrt{8x^2+10}+\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{2x^2-2x+3}}{2}$.

$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}}=$

$=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{[(b+c)^2-a^2]\cdot[a^2-(b-c)^2]}=$

$=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\left(2\sqrt{(2x^2+2x+3)(2x^2-2x+3)}-4x^2-4\right)\left(2\sqrt{(2x^2+2x+3)(2x^2-2x+3)}+4x^2+4\right)}=$

$=\frac{2}{4}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{(2x^2+2x+3)(2x^2-2x+3)}-2x^2-2\right)\left(\sqrt{(2x^2+2x+3)(2x^2-2x+3)}+2x^2+2\right)}=$

$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(2x^2+3)^2-4x^2-(2x^2+2)^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(2x^2+3-2x^2-2)(2x^2+3+2x^2+2)-4x^2}=$

$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4x^2+5-4x^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ şi nu depinde de x.

Presupunem $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\in\mathbb{Q}$,evident $2\in\mathbb{Q}\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot 2\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{5}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\exists m,n\in\mathbb{N},n\neq 0,(m,n)=1$,astfel ca $\sqrt{5}=\frac{m}{n}\Rightarrow n\sqrt{5}=m\Rightarrow 5n^2=m^2\Rightarrow 5|m^2$,cum 5 e prim$\Rightarrow 5|m\Rightarrow m=5k$,unde $k\in\mathbb{N}$ şi înlocuind în $5n^2=m^2\Rightarrow$

$\Rightarrow 5n^2=25k^2\Rightarrow n^2=5k^2\Rightarrow 5|n^2$,cum 5 e prim$\Rightarrow 5|n$.

Din $5|m$ şi $5|n\Rightarrow 5|(m,n)\Rightarrow 5|1$,care este fals⇒presupunerea făcută e falsă $\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

12) Cojocaru Petru, Români – Neamț

a) Expresiile $2x^2-2x+3$, $2x^2+2x+3$ și $8x^2+10$ sunt pozitive prntru orice $x\in\mathbb{R}$. (Trinom de gradul II cu $\Delta<0$) Pentru a fi laturile unui triunghi dovedim:

1) $a<b+c$ și 2) $a>b-c$

1) $\sqrt{8x^2+10}<\sqrt{(2x^2+2x+3)}+\sqrt{2x^2-2x+3}$, ridic la pătrat fiecare membru și obțin; $8x^2+10<2x^2+2x+3+2x^2-2x+3+2\sqrt{(2x^2+2x+3)(2x^2-2x+3)}$, aduc la forma simplă $2x^2+2<\sqrt{4x^4+8x^2+9}$, ridic din nou fiecare membru la pătrat și obțin: $4x^4+8x^2+4<4x^4+8x^2+10$ de unde $4<9$ adevărat.

2) $\sqrt{8x^2+10}>\sqrt{2x^2+2x+3}-\sqrt{2x^2-2x+3}$,folosesc același procedeu ca la 1) și obțin $2x^2+2>-\sqrt{4x^4+8x^2+9}$adevărat (membrul I este pozitiv și membrul II negativ). Expresiile pot fi laturile unui triunghi.

b) Pentru a determina aria triunghiului ABC folosesc formula lui Heron.

$\mathcal{A}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, cum $p=\frac{a+b+c}{2}$ obțin;

$\mathcal{A}=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$, calculez sub radical și obțin:

$\mathcal{A} = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4)}$ înlocuesc cu valorile din ipoteză și

$\mathcal{A} = \frac{1}{4}\sqrt{\{2(2x^2 +2x +3)(2x^2 -2x +3)+2(2x^2 +2x+3)(8x^2 +10)+(2x^2 -2x +3)(8x^2 + +10) - [(2x^2 - 2x +3)^2 + (2x^2 + 2x + 3)^2 + (8x^2 + 10)^2]\}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathcal{A} = \frac{1}{4}\sqrt{(8x^4 + 16x^2 +18 + 32x^4 - 32x^3 + 88x^2 - 40x + 60 + 32x^4 + 32x^3 + 88x^2 + 40x + 60 - 4x^4 + 8x^3 - 16x^2 + 12x - 9 - 4x^4 - 8x^3 - 16x^2 - 12x - 9 - 64x^4 - 160x^2 -100)}$

$\Rightarrow \quad \mathcal{A} = \frac{1}{4}\sqrt{20} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Aria nu depinde depinde de x. (q.e.d.)

13) Prof. Nica Nicolae

a) Consideram punctele $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right), B\left(x\sqrt{2},\sqrt{\frac{5}{2}}\right), C\left(-x,-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

Se observa ca, calculand distantele dintre punctele A si B, A si C, respective B si C obtinem $AB = \sqrt{2x^2 - 2x + 3}, AC = \sqrt{2x^2 + 2x + 3}, BC = \sqrt{8x^2 + 10}$.

Ecuatia dreptei *BC* este: $\frac{x - x_0}{-2x_0} = \frac{y - \sqrt{\frac{5}{2}}}{-2\sqrt{\frac{5}{2}}}$.

Inlocuind in aceasta ecuatie $x = \sqrt{\frac{5}{2}}, y = 0$ rezulta ca $\sqrt{\frac{2}{2}} = 0$ ceea ce este fals , deci punctual *A* nu se afla pe dreapta determinate de punctele *B* si *C*, si deci punctele *A*, *B* si *C* determina un triunghi.

b) $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ x_0 & \sqrt{\frac{5}{2}} & 1 \\ -x_0 & -\sqrt{\frac{5}{2}} & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{\sqrt{10}}{4} \in R \setminus Q$

14) Prof. Silvia Musatoiu

a) Problema revine la a demonstra cerința pentru x $\geq$ 0, pentru cazul contrar, trecand x in –x, AB și AC se schimba intre ele.

Pentru x ≥ 0, avem c ≤ b ≤ a (se demonstreaza usor prin compararea cu 0 a unor trinoame de gradul doi), asadar c < a + b si b < a + c. Ramane sa demonstram ca a < b + c.

Presupunem contrariul, adica a ≥ b + c. Inlocuind lungimile laturilor, si ridicand la patrat obtinem:

$$\left(\sqrt{8x^2+10}\right)^2 \geq \left(\sqrt{2x^2-2x+3}+\sqrt{2x^2+2x+3}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$8x^2+10 \geq 4x^2+6+2\sqrt{(2x^2-2x+3)(2x^2+2x+3)} \Leftrightarrow$$

$$2x^2+2 \geq \sqrt{(2x^2-2x+3)(2x^2+2x+3)}\,.$$

Printr-o noua ridicare la patrat, obtinem: $4x^4+8x^2+4 \geq 4x^4+8x^2+9$, ceea ce este fals. Asadar presupunerea a fost falsa, deci a < b + c.

b) Conform teoremei cosinusului: cos A $=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{-2x^2-2}{\sqrt{(2x^2-2x+3)(2x^2+2x+3)}}$, de unde

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\frac{4x^4+8x^2+4}{(2x^2-2x+3)(2x^2+2x+3)}}.$$

Efectuand calculele sub radical, gasim sin A= $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{(2x^2-2x+3)(2x^2+2x+3)}}$.

$A_{\Delta ABC}=\frac{bc\sin A}{2}=\frac{\sqrt{(2x^2-2x+3)}\sqrt{(2x^2+2x+3)}}{2}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{(2x^2-2x+3)(2x^2+2x+3)}}=\frac{\sqrt{5}}{2}\in$R-Q și este independent de x.

15) Prof. Olah Csaba

a). se pot verifica usor urmatoarele - daca $x<0$ - $a>c>b$, si $x>0$ - $a>b>c$) (expresiile de sub radical find pozitive pentru orice x). In ambele cazuri putem scrie $a+c>b$ si $a+b>c$.

Verificam inegalitatea $b+c>a$ - $\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{2x^2-2x+3}>\sqrt{8x^2+10}$ (*). Ridicam la patrat ambele parti –

$$(*)\Leftrightarrow 2x^2+2x+3+2x^2-2x+3+2\sqrt{\left(2x^2+3\right)^2-4x^2}>8x^2+10 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(2x^2+3\right)-4x^2}>2x^2+2$, radicand la patrat din nou, obtinem inegalitatea $9>4$, care este, evident, adevarata. Am demonstrat, ca putem scrie inegalitatea lui Minkowski pentru a,b,c in toate felurile, deci exista triunghiul ABC cu laturile a,b,c.

b).Se cunoaste egalitatea adevarata in orice triunghi:

$$16S^2=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4=2a^2b^2+2c^2a^2-a^4-\left(b^4-2b^2c^2+c^4\right)=$$

$$=a^2\left(2b^2+2c^2-a^2\right)-\left(b^2-c^2\right)^2.$$

Putem scrie:

$$16S^2=a^2\left(2b^2+2c^2-a^2\right)-\left(b^2-c^2\right)^2=\left(8x^2+10\right)\left(4x^2+4x+6+4x^2-4x+6-8x^2-10\right)-$$

$-\left(2x^2+2x+3-2x^2+2x-3\right)^2=2\left(8x^2+10\right)-\left(4x\right)^2=20$.

De aici $S^2=\frac{20}{16}\Rightarrow S=\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2}\in R_+^*\setminus Q$ -aria este un numar irational si nu depinde de x.

16) Prof. Florin Paraschiv

a) Folosim proprietatea conform careia intr-un triunghi suma lungimilor a doua laturi este mai mare decat lungimea celei de-a treia.

$$\sqrt{2x^2-2x+3}+\sqrt{2x^2+2x+3}>\sqrt{8x^2+10}\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x^2-2x+3}+\sqrt{2x^2+2x+3}\right)^2>\left(\sqrt{8x^2+10}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-2x+3+2x^2+2x+3+2\sqrt{(2x^2+3)^2-(2x)^2}>8x^2+10\Leftrightarrow 4x^2+6+2\sqrt{4x^4+12x^2+9-4x^2}>$$

$$>8x^2+10\Leftrightarrow 2\sqrt{4x^4+8x^2+9}>4x^2+4\Leftrightarrow\left(2\sqrt{4x^4+8x^2+9}\right)^2>\left(4x^2+4\right)^2\Leftrightarrow 4(4x^4+8x^2+9)>$$

$$>16x^4+32x^2+16\Leftrightarrow 16x^4+32x^2+36>16x^4+32x^2+16\Leftrightarrow 20>16(\text{Adevarat})\Rightarrow AB+AC>BC$$

$$\sqrt{2x^2-2x+3}+\sqrt{8x^2+10}>\sqrt{2x^2+2x+3}\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x^2-2x+3}+\sqrt{8x^2+10}\right)^2>\left(\sqrt{2x^2+2x+3}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-2x+3+8x^2+10+2\sqrt{16x^4+20x^2-16x^3-20x+24x^2+30}>2x^2+2x+3\Leftrightarrow 10x^2-2x+13+$$

$$+2\sqrt{16x^4-16x^3+44x^2-20x+30}>2x^2+2x+3\Leftrightarrow 2\sqrt{16x^4-16x^3+44x^2-20x+30}>-8x^2+4x-10\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(2\sqrt{16x^4-16x^3+44x^2-20x+30}\right)^2>\left(-8x^2+4x-10\right)^2\Leftrightarrow 4(16x^4-16x^3+44x^2-20x+30)>64x^4+16x^2+100-$$

$$-64x^3+160x^2-80x\Leftrightarrow 64x^4-64x^3+176x^2-80x+120>64x^4-64x^3+176x^2-80x+100\Leftrightarrow 120>100(\text{Adevarat})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB+BC>AC$$

$$\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{8x^2+10}>\sqrt{2x^2-2x+3}\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{8x^2+10}\right)^2>\left(\sqrt{2x^2-2x+3}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2x+3+8x^2+10+2\sqrt{16x^4+20x^2+16x^3+20x+24x^2+30}>2x^2-2x+3\Leftrightarrow 10x^2+2x+13+$$

$$+2\sqrt{16x^4+16x^3+44x^2+20x+30}>2x^2-2x+3\Leftrightarrow 2\sqrt{16x^4+16x^3+44x^2+20x+30}>-8x^2-4x-10\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(2\sqrt{16x^4+16x^3+44x^2+20x+30}\right)^2>\left(-8x^2-4x-10\right)^2\Leftrightarrow 4(16x^4+16x^3+44x^2+20x+30)>64x^4+16x^2+100+$$

$$+64x^3+160x^2+80x\Leftrightarrow 64x^4+64x^3+176x^2+80x+120>64x^4+64x^3+176x^2+80x+100\Leftrightarrow 120>100(Adevarat)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC+BC>AB$$

Am aratat ca suma lungimilor a doua laturi este mai mare decat a treia latura.

b)Folosim formula lui Heron : $\text{Aria}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde $p=\frac{a+b+c}{2}$

$$Aria=\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{(b+c)^2-a^2}{4}\right)\left(\frac{a^2-(b-c)^2}{4}\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{-(b^2-c^2)^2-a^4+a^2[(b+c)^2+(b-c)^2]}{16}}=\sqrt{\frac{-(b^2-c^2)^2-a^4+2a^2(b^2+c^2)}{16}}=$$

$$=\sqrt{\frac{-(2x^2-2x+3-2x^2-2x-3)^2-(8x^2+10)^2+2(8x^2+10)(2x^2-2x+3+2x^2+2x+3)}{16}}=$$

$$=\sqrt{\frac{-(-4x)^2-(64x^4+160x^2+100)+2(8x^2+10)(4x^2+6)}{16}}=$$

$$=\sqrt{\frac{-16x^2-64x^4-160x^2-100+64x^4+96x^2+80x^2+120}{16}}=\sqrt{\frac{20}{16}}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}\in R\setminus Q$$

Am aratat ca aria este egala cucare este un nr irational care nu depinde de x

17) Prof. Cantemir Iliescu, Pitesti

Sa observam ca:

$$AB=\sqrt{\left(x\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{10}}{2}-0\right)^2},\ AC=\sqrt{\left(-x\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}-0\right)^2}$$

$$BC=\sqrt{\left(x\sqrt{2}-\left(-x\sqrt{2}\right)\right)^2+\left(\frac{\sqrt{10}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\right)^2}.$$

Deci

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right),\ B\left(x\sqrt{2},\frac{\sqrt{10}}{2}\right),\ C\left(-x\sqrt{2},-\frac{\sqrt{10}}{2}\right).$$

Construim

$$\Delta=\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1\\ x\sqrt{2} & \frac{\sqrt{10}}{2} & 1\\ -x\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{10}}{2} & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1\\ x\sqrt{2} & \frac{\sqrt{10}}{2} & 1\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=\sqrt{5},$$

oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$, ceea ce ne asigura ca punctele A, B, C sunt necoliniare, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

Aria triunghiului ABC este data de formula: $S=\frac{1}{2}|\Delta|=\frac{\sqrt{5}}{2}$ si reprezinta un numar irational.

18) Prof. Marian Teler

a) Se verifica usor ca a, b, c sunt definiti $(\forall)x \in R$
De asemenea sunt usor de demonstrat inegalitatile: $0 < b < a$, $0 < c < a$, $b + c > a$, triunghiul ABC exista pentru orice $x \in R$
b) Avem, succesiv:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{2(x^2 + 1)}{bc}$$

$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{5}{b^2 c^2}$, $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{bc}$, rezulta $Aria_{\Delta ABC} = \frac{bc\sin A}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, aria este un numar irational care nu depinde de $x \in R$

19) Prof. Rosu Vasile

a)Verificam daca lungimile a, b, c sunt numere pozitive pentru orice x $\in$ R
a = $\sqrt{8x^2 + 10}$ > 0 evidenta pentru orice x $\in$ R
b = $\sqrt{2x^2 + 2x + 3}$ > 0 deoarece Δ = b^2 – 4ac = -20 < 0 si trinomul este pozitiv pentru orice x $\in$ R, avand semnul lui a
c= $\sqrt{2x^2 - 2x + 3}$ > 0 analoc pentru orice x $\in$ R
Triunghiul ABC exista daca are loc dubla inegalitate |b – c| < a < b + c
1) $|\sqrt{2x^2 + 2x + 3} - \sqrt{2x^2 - 2x + 3}| < \sqrt{8x^2 + 10}$ ridicam la patrat
$2x^2 + 2x + 3 + 2x^2 - 2x + 3 - 2\sqrt{(2x^2 + 3)^2 - 4x^2} < 8x^2 + 10$ adica
$-2\sqrt{4x^4 + 8x^2 + 9} < 4x^2 + 4$ inegalitate adevarata pentru orice x $\in$ R membrul stang fiind negativ si membrul drept pozitiv
2) $\sqrt{8x^2 + 10} < \sqrt{2x^2 + 2x + 3} + \sqrt{2x^2 - 2x + 3}$ ridicam la patrat
$8x^2 + 10 < 2x^2 + 2x + 3 + 2x^2 - 2x + 3 + 2\sqrt{(2x^2 + 3)^2 - 4x^2}$
$4x^2 + 4 < 2\sqrt{4x^4 + 8x^2 + 9}$ adica
$16x^4 + 32x^2 + 16 < 16x^4 + 32x^2 + 36$ respectiv 16 < 36 inegalitate evidenta pentru orice x $\in$ R

b) Calculam aria cu formula lui Heron
A = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ unde p = $\frac{a+b+c}{2}$; (p-a) = $\frac{b+c-a}{2}$; (p-b) = $\frac{a+c-b}{2}$; (p-c) = $\frac{a+b-c}{2}$;
Asociem produsele

$$p(p-a) = \left(\frac{\sqrt{8x^2+10}+\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{2x^2-2x+3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{2x^2-2x+3}-\sqrt{8x^2+10}}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{\left(\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{2x^2-2x+3}\right)^2-\left(\sqrt{8x^2+10}\right)^2}{4}\right) = \frac{2x^2+2x+3+2x^2-2x+3+2\sqrt{(2x^2+3)^2-4x^2}-8x^2-10}{4} =$$

$$= \frac{-4x^2-4+2\sqrt{4x^4+8x^2+9}}{4}$$

(p-b)(p-c)= $\left(\frac{\sqrt{8x^2+10}+\sqrt{2x^2-2x+3}-\sqrt{2x^2+2x+3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{8x^2+10}+\sqrt{2x^2+2x+3}-\sqrt{2x^2-2x+3}}{2}\right)$ =

$=\frac{1}{4}$
$\left(8x^2+10+\sqrt{8x^2+10}*\sqrt{2x^2+2x+3}-\sqrt{8x^2+10}*\sqrt{2x^2-2x+3}+\sqrt{2x^2-2x+3}*\sqrt{8x^2+10}+\sqrt{2x^2-2x+3}*\sqrt{2x^2+2x+3}-(2x^2-2x+3)-\sqrt{2x^2+2x+3}*\sqrt{8x^2+10}-(2x^2+2x+3)+\sqrt{2x^2+2x+3}*\sqrt{2x^2-2x+3}\right)$ =

$=\frac{1}{4}\left(8x^2+10-2x^2+2x-3-2x^2-2x-3+2\sqrt{2x^2+2x+3}*\sqrt{2x^2-2x+3}\right)=$

$=\frac{4x^2+4+2\sqrt{4x^4+8x^2+9}}{4}$

A= $\sqrt{\frac{2\sqrt{4x^4+8x^2+9}-4(x^2+1)}{4}}*\sqrt{\frac{2\sqrt{4x^4+8x^2+9}+4(x^2+1)}{4}}=\sqrt{\frac{16x^4+32x^2+36-16x^4-32x^2-16}{16}}=\sqrt{\frac{20}{16}}=\frac{1}{2}\sqrt{5}$

Este numar irational si nu depinde de x

20) Prof. Corneliu Manescu – Avram

a) Demonstram mai intai urmatoarea

Lema. Fie $a, b, c \in (0, +\infty)$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente :

1) exista un triunghi cu laturile de lungimi a, b, c ;

2) $2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) > a^4 + b^4 + c^4$;

3) $|a - b| < c < a + b$.

DEMONSTRATIE : 1) $\Rightarrow$ 2) Daca exista un triunghi cu laturile de lungimi a, b, c si aria S, atunci

$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4) = 16S^2 > 0$.

2) $\Rightarrow$ 3) Este adevarata descompunerea

$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$.

Daca membrul drept este pozitiv, atunci si membrul stang este pozitiv, deci doi dintre factori sunt pozitivi, iar ceilalti doi au acelasi semn. Daca, de exemplu, $a - b + c < 0$ si $a + b - c < 0$, atunci prin adunare se obtine $2a < 0$, deci $a < 0$, ceea ce contrazice ipoteza. Se deduce ca toti factorii sunt pozitivi, deci $c < a + b$, $c > a - b$ si $c > b - a$, de unde $c > |a - b|$.

3) $\Rightarrow$ 1) Daca aceste inegalitati sunt adevarate, atunci cercurile de raze a si b, avand distanta dintre centrele lor egala cu c, se intersecteaza in doua puncte. Intr-adevar, daca cercurile sunt exterioare, atunci distanta dintre centrele lor este mai mare decat suma lungimilor razelor, iar daca un cerc se afla in interiorul celuilalt, atunci distanta dintre centrele lor este mai mica decat modulul diferentei lungimilor razelor.

Unul dintre punctele de intersectie si centrele cercurilor sunt varfurile triunghiului cautat.

Revenim la problema si aplicam afirmatia 2) din lema :

$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4) = 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^2 + b^2 + c^2)^2 =$

$= 4[(8x^2 + 10)(2x^2 + 2x + 3) + (2x^2 + 2x + 3)(2x^2 - 2x + 3) + (2x^2 - 2x + 3)(8x^2 + 10) -$
$- (8x^2 + 10 + 2x^2 + 2x + 3 + 2x^2 - 2x + 3)^2 = 20$.

b) Din $16S^2 = 20$, se deduce $S = \frac{\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}$.

Comentarii. Avem $\lim_{x\to\infty} a = \lim_{x\to\infty} b = \lim_{x\to\infty} c = +\infty$, dar si $\lim_{x\to\infty} h_a = \lim_{x\to\infty} h_b = \lim_{x\to\infty} h_c = 0$, ceea ce explica rezultatul. Din $\lim_{x\to\infty} \frac{b+c}{a} = 1$ se deduce ca triunghiul se "aplatizeaza" cand x creste.

Daca $\Delta(x)$ este triunghiul corespunzator lui $x \in \mathbb{R}$, atunci $\Delta(x) \equiv \Delta(-x)$, deoarece se schimba intre ele laturile *AB* si *AC*.

3. THE NUMBERS of FIBONACCI and LUCAS - IDENTITIES - PROOFS WITH FEW WORDS – (III)

By Dumitru M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania
and Neculai Stanciu, Buzău, Romania

Fibonacci

(1175 -1240)

François-Édouard-Anatole Lucas

(1842 – 1891)

$$F_0 = 0, F_1 = 1,$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbf{N} \tag{F}$$
$$L_0 = 2, L_1 = 1,$$
$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \forall n \in \mathbf{N} \tag{L}$$

$$r^2 - r - 1 = 0,$$

$$r_1 = \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, r_2 = \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

$(x_n)_{n\geq 0}$, **Fibonacci-Lucas**' s sequence

$$x_n = A\alpha^n + B\beta^n, \ \forall n \in \mathbf{N},$$

If $x_0 = 0 = F_0, x_1 = 1 = F_1$, then $A = \frac{1}{\sqrt{5}}, B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ so:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right), \ \forall n \in \mathbf{N} \text{ (\textbf{Binet}, 1843)},$$

If $x_0 = 2 = L_0, x_1 = 1 = L_1$, then $A = B = 1$, so

$$L_n = \alpha^n + \beta^n, \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Note that:

$$\alpha + \beta = 1 \text{ and } \alpha\beta = -1,$$

1.73. $F_{4n+2} - 1 = F_{2n}L_{2n+2}, \ \forall n \in \mathbf{N}$.

Proof. $F_{2n}L_{2n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2n} - \beta^{2n})(\alpha^{2n+2} + \beta^{2n=2}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{4n+2} - \alpha^{2n+2}\beta^{2n} +$

$$+\alpha^{2n}\beta^{2n+2} - \beta^{4n+2}) = F_{4n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha\beta)^{2n}(\alpha^2 - \beta^2) = F_{4n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) =$$

$$= F_{4n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha - \beta) = F_{4n+2} - 1.$$

1.74. $F_{4n+3} + 1 = F_{2n+1}L_{2n+2}, \ \forall n \in \mathbf{N}$.

Proof. $F_{2n+1}L_{2n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1})(\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{4n+3} + \alpha^{2n+1}\beta^{2n+2} -$

$$-\alpha^{2n+2}\beta^{2n+1} - \beta^{4n+3}) = F_{4n+3} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha\beta)^{2n+1}(\alpha - \beta) = F_{4n+3} + \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha - \beta) =$$

$$= F_{4n+3} + 1.$$

1.75. $F_{4n+3} - 1 = F_{2n+2}L_{2n+1}, \ \forall n \in \mathbf{N}$.

Proof. $F_{2n+2}L_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2})(\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{4n+3} + \alpha^{2n+2}\beta^{2n+1} -$

$$-\alpha^{2n+1}\beta^{2n+2} - \beta^{4n+3}) = F_{4n+3} + \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha\beta)^{2n+1}(\alpha - \beta) = F_{4n+3} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha - \beta) =$$

$$= F_{4n+3} - 1.$$

1.76. $F_m L_n + F_{m-1}L_{n-1} = L_{m+n-1}$, $\forall m,n \in \mathbf{N}^*$ (**Hansen**, 1972).

Proof. $F_m L_n + F_{m-1}L_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\alpha^m - \beta^m)(\alpha^n + \beta^n) + (\alpha^{m-1} - \beta^{m-1})(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})\right) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{m+n} - \alpha^n\beta^m + \alpha^m\beta^n - \beta^{m+n} + \alpha^{m+n-2} - \alpha^{n-1}\beta^{m-1} + \alpha^{m-1}\beta^{n-1} - \beta^{m+n-2}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{m+n-1}(\alpha + \alpha^{-1}) - \beta^{m+n-1}(\beta + \beta^{-1}) - \alpha^{n-1}\beta^{m-1}(1 + \alpha\beta) + \alpha^{m-1}\beta^{m-1}(1 + \alpha\beta)) =$$

$$= \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{m+n-1} + \beta^{m+n-1}\right) = \alpha^{m+n-1} + \beta^{m+n-1} = L_{m+n-1}.$$

1.77. $F_m F_n + F_{m-1}F_{n-1} = F_{m+n-1}$, $\forall m,n \in \mathbf{N}^*$.

Proof. $F_m F_n + F_{m-1}F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\alpha^m - \beta^m)(\alpha^n - \beta^n) + (\alpha^{m-1} - \beta^{m-1})(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})\right) =$

$$= \frac{1}{5}(\alpha^{m+n} - \alpha^n\beta^m - \alpha^m\beta^n + \beta^{m+n} + \alpha^{m+n-2} - \alpha^{n-1}\beta^{m-1} - \alpha^{m-1}\beta^{n-1} + \beta^{m+n-2}) =$$

$$= \frac{1}{5}(\alpha^{m+n-1}(\alpha + \alpha^{-1}) + \beta^{m+n-1}(\beta + \beta^{-1}) - \alpha^{n-1}\beta^{m-1}(1 + \alpha\beta) - \alpha^{m-1}\beta^{m-1}(1 + \alpha\beta)) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\alpha^{m+n-1}(\alpha - \beta) + \beta^{m+n-1}(\beta - \alpha) = \right)$$

$$= \frac{\alpha - \beta}{5}\left(\alpha^{m+n-1} - \beta^{m+n-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{m+n-1} - \beta^{m+n-1}) = F_{m+n-1}.$$

1.78. $L_m L_n + L_{m-1}L_{n-1} = 5F_{m+n-1}$, $\forall m,n \in \mathbf{N}^*$ (**Hansen**, 1972).

Proof. $L_m L_n + L_{m-1}L_{n-1} = (\alpha^m + \beta^m)(\alpha^n + \beta^n) + (\alpha^{m-1} + \beta^{m-1})(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) =$

$$= \alpha^{m+n} + \alpha^m\beta^n + \alpha^n\beta^m + \beta^{m+n} + \alpha^{m+n-2} + \alpha^{m-1}\beta^{n-1} + \alpha^{n-1}\beta^{m-1} + \beta^{m+n-2} =$$

$$= \alpha^{m+n-1}(\alpha + \alpha^{-1}) + \beta^{m+n-1}(\beta + \beta^{-1}) + \alpha^{m-1}\beta^{n-1}(\alpha\beta + 1) + \alpha^{n-1}\beta^{m-1}(\alpha\beta + 1) =$$

$$= (\alpha - \beta)\alpha^{m+n-1} + (\beta - \alpha)\beta^{m+n-1} = (\alpha - \beta)(\alpha^{m+n-1} - \beta^{m+n-1}) =$$

$$= \sqrt{5}(\alpha^{m+n-1} - \beta^{m+n-1}) = 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{m+n-1} - \beta^{m+n-1}\right) = 5F_{m+n-1}.$$

1.79. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k = F_{2n}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Proof. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha^k - \beta^k) = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta^k =$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}(1+\alpha)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}(1+\beta)^n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2n}-\beta^{2n})=F_{2n}.$$

1.80. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}L_{mk}L_{mn-mk}=2^nL_{mn}+2L_m^n,\ \forall m,n\in\mathbf{N}^*.$

Proof. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}L_{mk}L_{mn-mk}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha^{mk}+\beta^{mk})(\alpha^{mn-mk}+\beta^{mn-mk})=$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha^{mn}+\alpha^{mk}\beta^{mn-mk}+\alpha^{mn-mk}\beta^{mk}+\beta^{mn})=(\alpha^{mn}+\beta^{mn})\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}+$$
$$+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left((\alpha^m)^k(\beta^m)^{n-k}+(\alpha^m)^{n-k}(\beta^m)^k\right)=2^nL_{mn}+2(\alpha^m+\beta^m)^n=$$
$$=2^nL_{mn}+2(\alpha^m+\beta^m)^n=2^nL_{mn}+2L_m^n.$$

1.81. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_{mk}F_{mn-mk}=\frac{1}{5}(2^nL_{mn}-2L_m^n),\ \forall m,n\in\mathbf{N}^*.$

Proof. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_{mk}F_{mn-mk}=\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha^{mk}-\beta^{mk})(\alpha^{mn-mk}-\beta^{mn-mk})=$

$$=\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha^{mn}-\alpha^{mk}\beta^{mn-mk}-\alpha^{mn-mk}\beta^{mk}+\beta^{mn})=$$
$$=\frac{1}{5}\cdot L_{mn}\cdot\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}-\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha^m)^k(\beta^m)^{n-k}-\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha^m)^{n-k}(\beta^m)^k=$$
$$=\frac{2^n}{5}L_{mn}-\frac{2}{5}(\alpha^m+\beta^m)^n=\frac{2^nL_{mn}-2L_m^n}{5}.$$

1.82. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_{mk}L_{mn-mk}=2^nF_{mn},\ \forall m,n\in\mathbf{N}^*.$

Proof. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_{mk}L_{mn-mk}=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha^{mk}-\beta^{mk})(\alpha^{mn-mk}+\beta^{mn-mk})=$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha^{mn}-\beta^{mn})+\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha^{mk}\beta^{mn-mk}-\alpha^{mn-mk}\beta^{mk})=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(\alpha^{mn}-\beta^{mn})\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}+\frac{1}{\sqrt{5}}\left((\alpha^m+\beta^m)^n-(\alpha^m+\beta^m)^n\right)=2^nF_{mn}.$$

1.83. $\sum_{k-0}^{n}\binom{n}{k}L_k L_{n-k} = 2^n L_n + 2,\ \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Proof. $\sum_{k-0}^{n}\binom{n}{k}L_k L_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha^k + \beta^k)(\alpha^{n-k} + \beta^{n-k}) =$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha^n + \beta^n) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha^k \beta^{n-k} + \alpha^{n-k}\beta^k) = L_n \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + 2(\alpha+\beta)^n =$$

$$= 2^n L_n + 2.$$

1.84. $\sum_{k-0}^{n}\binom{n}{k}F_k F_{n-k} = \frac{1}{5}(2^n L_n - 2),\ \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Proof. $\sum_{k-0}^{n}\binom{n}{k}F_k F_{n-k} = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha^k - \beta^k)(\alpha^{n-k} - \beta^{n-k}) =$

$$= \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha^n + \beta^n) - \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha^k \beta^{n-k} + \alpha^{n-k}\beta^k) = \frac{L_n}{5}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - \frac{2}{5}(\alpha+\beta)^n =$$

$$= \frac{2^n L_n}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2^n L_n - 2}{5}.$$

1.85. $\sum_{k-0}^{n}\binom{n}{k}F_k L_{n-k} = 2^n F_n,\ \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Proof. $\sum_{k-0}^{n}\binom{n}{k}F_k L_{n-k} = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha^k - \beta^k)(\alpha^{n-k} + \beta^{n-k}) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha^n - \beta^n) + \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha^k \beta^{n-k} - \alpha^{n-k}\beta^k) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n F_n.$$

1.86. $\sum_{k-0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}F_k = (-1)^{n-1}F_n,\ \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Proof. $\sum_{k-0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(\alpha^k - \beta^k) =$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\alpha^{k}-\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\beta^{k}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-1+\alpha)^{n}-\frac{1}{\sqrt{5}}(-1+\beta)^{n}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}(-\beta)^{n}-\frac{1}{\sqrt{5}}(-\alpha)^{n}=(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n}-\beta^{n})=(-1)^{n-1}F_{n}.$$

1.87. $\sum_{k-0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}F_{2k}=F_{n},\ \forall n\in\mathbf{N}^{*}.$

Proof. $\sum_{k-0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}F_{2k}=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(\alpha^{2k}-\beta^{2k})=$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\alpha^{2k}-\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\beta^{2k}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-1+\alpha^{2})^{n}-\frac{1}{\sqrt{5}}(-1+\beta^{2})^{n}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n}-\beta^{n})=F_{n}.$$

1.88. $\sum_{k-0}^{n}\binom{n}{k}F_{m+k}=F_{m+2n},\ \forall m\in\mathbf{N},\forall n\in\mathbf{N}^{*}.$

Proof. $\sum_{k-0}^{n}\binom{n}{k}F_{m+k}=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha^{m+k}-\beta^{m+k})=$

$$=\frac{\alpha^{m}}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{k}-\frac{\beta^{m}}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta^{k}=\frac{\alpha^{m}}{\sqrt{5}}(1+\alpha)^{n}-\frac{\beta^{m}}{\sqrt{5}}(1+\beta)^{n}=$$

$$=\frac{\alpha^{m}}{\sqrt{5}}\cdot\alpha^{2n}-\frac{\beta^{m}}{\sqrt{5}}\cdot\beta^{2n}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{m+2n}-\beta^{m+2n})=F_{m+2n}.$$

1.89. $\sum_{k-0}^{n}\binom{n}{k}L_{k}=L_{2n},\ \forall n\in\mathbf{N}^{*}.$

Proof. $\sum_{k-0}^{n}\binom{n}{k}L_{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha^{k}+\beta^{k})=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta^{k}=$

$$=(1+\alpha)^{n}+(1+\beta)^{n}=\alpha^{2n}+\beta^{2n}=L_{2n}.$$

1.90. $\sum_{k-0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}L_{k}=(-1)^{n}L_{n},\ \forall n\in\mathbf{N}^{*}.$

Proof. $\sum_{k-0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}L_{k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(\alpha^{k}+\beta^{k})=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\alpha^{k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\beta^{k}=$

$$=(-1+\alpha)^n+(-1+\beta)^n=(\alpha\beta+\alpha)^n+(\alpha\beta+\beta)^{2n}=\alpha^n(\beta+1)^n+\beta^n(\alpha+1)^n=$$
$$=\alpha^n\beta^{2n}+\beta^n\alpha^{2n}=(\alpha\beta)^n(\alpha^n+\beta^n)=(-1)^n L_n.$$

1.91. $\sum_{k-0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}L_{2k}=L_n,\ \forall n\in\mathbf{N}^*.$

Proof. $\sum_{k-0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}L_{2k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(\alpha^{2k}+\beta^{2k})=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\alpha^{2k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\beta^{2k}=$

$$=(-1+\alpha^2)^n+(-1+\beta^2)^n=\alpha^n+\beta^n=L_n.$$

1.92. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_{4m(k+p)}=L_{2m}^nF_{2m+4mp},\ \forall m,n,p\in\mathbf{N}^*.$

Proof. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_{4m(k+p)}=\frac{1}{\sqrt5}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{4m(k+p)}-\frac{1}{\sqrt5}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta^{4m(k+p)}=$

$$=\frac{\alpha^{4mp}}{\sqrt5}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha^{4m})^k-\frac{\beta^{4mp}}{\sqrt5}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\beta^{4m})^k=$$
$$=\frac{\alpha^{4mp}}{\sqrt5}(1+\alpha^{4m})^n-\frac{\beta^{4mp}}{\sqrt5}(1+\beta^{4m})^n=$$
$$=\frac{\alpha^{4mp}}{\sqrt5}\alpha^{2mn}(\alpha^{-2m}+\alpha^{2m})^n-\frac{\beta^{4mp}}{\sqrt5}\beta^{2mn}(\beta^{-2m}+\beta^{2m})^n=$$
$$=\frac{\alpha^{4mp+2mn}}{\sqrt5}(\alpha^{2m}+\beta^{2m})^n-\frac{\beta^{4mp+2mn}}{\sqrt5}(\alpha^{2m}+\beta^{2m})^n=$$
$$=(\alpha^{2m}+\beta^{2m})\cdot\frac{1}{\sqrt5}\cdot(\alpha^{2mn+4mp}-\beta^{2mn+4mp})=L_{2m}^nF_{2mn+4mp}.$$

1.93. $\sum_{k=1}^{n}kF_k=nF_{n+2}-F_{n+3}+2,\ \forall n\in\mathbf{N}^*.$

Proof. $a_n=\sum_{k=1}^{n}F_k=F_{n+2}-1,\forall n\in\mathbf{N}^*,\ b_n=\sum_{k=1}^{n}kF_k=F_1+2F_2+3F_3+\ldots+$

$$+nF_n=\sum_{k=1}^{n}F_k+\sum_{k=2}^{n}F_k+\sum_{k=3}^{n}F_k+\ldots+\sum_{k=n}^{n}F_k=a_n+(a_n-a_1)+(a_n-a_2)+\ldots+(a_n-a_{n-1})=$$
$$=na_n-\sum_{k=1}^{n-1}a_k=n(F_{n+2}-1)-\sum_{k=1}^{n-1}(F_{k+2}-1)=nF_{n+2}-n-\sum_{k=1}^{n-1}F_{k+2}+(n-1)=$$
$$=nF_{n+2}-1-\sum_{k=1}^{n}F_{k+2}=nF_{n+2}-1-\sum_{k=3}^{n+1}F_k=nF_{n+2}-1-\sum_{k=1}^{n+1}F_k+F_1+F_2=$$
$$=nF_{n+2}-1-(F_{n+3}-1)+2=nF_{n+2}-(F_{n+4}-F_{n+2})+2=(n+1)F_{n+2}-F_{n+4}+2.$$

1.94. $\sum_{k=1}^{n} kL_k = nL_{n+2} - L_{n+3} + 4,\ \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Proof. $c_n = \sum_{k=1}^{n} L_k = L_{n+2} - 3, \forall n \in \mathbf{N}^*$, $d_n = \sum_{k=1}^{n} kL_k = L_1 + 2L_2 + 3L_3 + \ldots +$

$$+ nL_n = c_n + (c_n - c_1) + (c_n - c_2) + \ldots + (c_n - c_{n-1}) =$$

$$= nc_n - \sum_{k=1}^{n-1} c_k = n(L_{n+2} - 3) - \sum_{k=1}^{n-1}(L_{k+2} - 3) = nL_{n+2} - 3n - \sum_{k=1}^{n-1} L_{k+2} + 3(n-1) =$$

$$= nL_{n+2} - \sum_{k=3}^{n+1} L_k + L_1 + L_2 - 3 = nL_{n+2} - L_{n+4} + L_{n+2} + 4 = (n+1)L_{n+2} - L_{n+4} + 4.$$

1.95. $\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)F_k = F_{n+4} - n - 3,\ \ \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Proof. $b_n^* = \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)F_k$, $b_n = \sum_{k=1}^{n} kF_k = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2, \forall n \in \mathbf{N}$,

$$b_n + b_n^* = \sum_{k=1}^{n}(k+n-k+1)F_k = (n+1)\sum_{k=1}^{n} F_k = (n+1)(F_{n+2} - 1),$$

$$b_n^* = (n+1)(F_{n+2} - 1) - b_n = (n+1)F_{n+2} - n - 1 - nF_{n+2} + F_{n+3} - 2 =$$

$$= F_{n+3} + F_{n+2} - n - 3 = F_{n+4} - n - 3.$$

1.96. $\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)L_k = L_{n+4} - 3n - 7,\ \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Proof. $\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)L_k = (n+1)\sum_{k=1}^{n} L_k - \sum_{k=1}^{n} kL_k = (n+1)(L_{n+2} - 3) -$

$$- nL_{n+2} + L_{n+3} - 4 = L_{n+3} + L_{n+2} - 3n - 7.$$

1.97. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)F_{2k-1} = (2n-1)F_{2n} - 2F_{2n-1} + 2,\ \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Proof. $u_n = \sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}, \forall n \in \mathbf{N}^*$ şi $a_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)F_{2k-1} =$

$$= F_1 + 3F_3 + 5F_5 + \ldots + (2n-1)F_{2n-1} = \sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} + 2\sum_{k=2}^{n} F_{2k-1} + 2\sum_{k=3}^{n} F_{2k-1} + \ldots +$$

$$+ 2\sum_{k=n}^{n} F_{2k-1} = u_n + 2(u_n - u_1) + 2(u_n - u_2) + \ldots + 2(u_n - u_{n-1}) =$$

$$=(2n-1)u_n-2\sum_{k=1}^{n-1}u_k=(2n-1)F_{2n}-2\sum_{k=1}^{n-1}F_{2k}=(2n-1)F_{2n}-2(F_{2n-1}-1)=$$
$$=(2n-1)F_{2n}-2F_{2n-1}+2.$$

1.98. $\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1)F_{2k-1}=F_{2n}+2F_{2n-1}-2,\ \forall n\in\mathbf{N}^*.$

Proof. $\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1)F_{2k-1}=2n\sum_{k=1}^{n}F_{2k-1}-\sum_{k=1}^{n}(2k-1)F_{2k-1}=$
$$=2nF_{2n}-(2n-1)F_{2n}+2F_{2n-1}-2=F_{2n}+2F_{2n-1}-2.$$

1.99. $\sum_{k=1}^{n}kF_{2k}=nF_{2n+1}-F_{2n},\ \forall n\in\mathbf{N}^*.$

Proof. $v_n=\sum_{k=1}^{n}F_{2k}=F_{2n+1}-1,\forall n\in\mathbf{N}^*,\ b_n=\sum_{k=1}^{n}kF_{2k}=F_2+2F_4+3F_6+$
$$+\ldots+nF_{2n}=\sum_{k=1}^{n}F_{2k}+\sum_{k=2}^{n}F_{2k}+\ldots+\sum_{k=n}^{n}F_k=v_n+(v_n-v_1)+(v_n-v_2)+\ldots+(v_n-v_{n-1})=$$
$$=nv_n-\sum_{k=1}^{n-1}v_k=n(F_{n+1}-1)-\sum_{k=1}^{n-1}(F_{k+1}-1)=nF_{2n+1}-n-\sum_{k=1}^{n-1}F_{2k+1}+(n-1)=$$
$$=nF_{2n+1}-1-\sum_{k=2}^{n}F_{2k-1}=nF_{2n+1}-\sum_{k=1}^{n}F_{2k-1}=nF_{2n+1}-F_{2n}.$$

1.100. $\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)F_{2k}=F_{2n+2}-n-1,\ \forall n\in\mathbf{N}^*.$

Proof. $\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)F_{2k}=(n+1)\sum_{k=1}^{n}F_{2k}-\sum_{k=1}^{n}kF_{2k}=(n+1)(F_{2n+1}-1)-$
$$-nF_{2n+1}+F_{2n}=F_{2n+1}+F_{2n}-n-1=F_{2n+2}-n-1.$$

1.101. $\sum_{k=1}^{n}(a-c+ck)F_k=(a-c+nc)F_{n+2}-cF_{n+3}+2c,\forall a,c\in\mathbf{R},\ \forall n\in\mathbf{N}^*$

Proof. $\sum_{k=1}^{n}(a-c+ck)F_k=(a-c)\sum_{k=1}^{n}F_k+c\sum_{k=1}^{n}kF_k=(a-c)(F_{n+2}-1)+$
$$+c(nF_{n+2}-F_{n+3}+2)=(a-c+nc)F_{n+2}-cF_{n+3}+2c.$$

1.102. $\sum_{k=1}^{n}(a-d+dk)L_k=(a-d+nd)L_{n+2}-dL_{n+3}+7d-3a,\forall a,d\in\mathbf{R},\ \forall n\in\mathbf{N}^*.$

Proof. $\sum_{k=1}^{n}(a-d+dk)L_k = (a-d)\sum_{k=1}^{n}L_k + d\sum_{k=1}^{n}kL_k = (a-d)(L_{n+2}-3)+$

$$+d(nL_{n+2}-L_{n+3}+4) = (a-d+nd)L_{n+2} - dL_{n+3} + 4d - 3(a-d) =$$

$$= (a-d+nd)L_{n+2} - dL_{n+3} + 7d - 3a\,.$$

1.103. $\sum_{k=1}^{n}(a+(n-k)c)F_k = aF_{n+2} + cF_{n+3} - a - (n+2)c, \forall a, c \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Proof. $\sum_{k=1}^{n}(a+(n-k)c)F_k = (a+nc)\sum_{k=1}^{n}F_k - c\sum_{k=1}^{n}kF_k = (a+nc)(F_{n+2}-1)-$

$$-c(nF_{n+2}-F_{n+3}+2) = (a+nc-nc)F_{n+2} + cF_{n+3} - a - nc - 2c =$$

$$= aF_{n+2} + cF_{n+3} - a - (n+2)c\,.$$

1.104. $\sum_{k=1}^{n}(a+(n-k)c)L_k = aL_{n+2} + cL_{n+3} - 3a - 3nc + 4c, \forall a, c \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Proof. $\sum_{k=1}^{n}(a+(n-k)c)L_k = (a+nc)\sum_{k=1}^{n}L_k - c\sum_{k=1}^{n}kL_k = (a+nc)(L_{n+2}-3)-$

$$-c(nL_{n+2}-L_{n+3}+4) = aL_{n+2} + cL_{n+3} - 3a - 3nc + 4c\,.$$

1.105. $\sum_{k=1}^{n}kL_{2k} = nL_{2n+1} - L_{2n} + 2,\ \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Proof. $w_n = \sum_{k=1}^{n}L_{2k} = L_{2n+1} - 1,\ \forall n \in \mathbf{N}^*$, :

$$\sum_{k=1}^{n}kL_{2k} = L_2 + 2L_4 + 3L_6 + \ldots + nL_{2k} = \sum_{k=1}^{n}L_{2k} + \sum_{k=2}^{n}L_{2k} + \sum_{k=3}^{n}L_{2k} + \ldots + \sum_{k=n}^{n}L_{2k} =$$

$$= w_n + (w_n - w_1) + (w_n - w_2) + \ldots + (w_n - w_{n-1}) = nw_n - \sum_{k=1}^{n-1}w_k =$$

$$= n(L_{2n+1}-1) - \sum_{k=1}^{n-1}(L_{2k+1}-1) = nL_{2n+1} - n + (n-1) - \sum_{k=1}^{n-1}L_{2k+1} =$$

$$= nL_{2n+1} - 1 - \sum_{k=1}^{n}L_{2k-1} + L_1 = nL_{2n+1} - L_{2n} + 2\,.$$

1.106. $\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)L_{2k} = L_{2n+2} - n - 3,\ \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Proof. $\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)L_{2k}=(n+1)\sum_{k=1}^{n}L_{2k}-\sum_{k=1}^{n}kL_{2k}=$

$=(n+1)(L_{2n+1}-1)-nL_{2n+1}+L_{2n}-2=nL_{2n+1}-n+L_{2n+1}-1-nL_{2n+1}+L_{2n}-2=$

$=L_{2n+2}-n-3$.

1.107. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)L_{2k-1}=(2n-1)L_{2n}-2L_{2n-1},\ \forall n\in\mathbf{N}^{*}$.

Proof. $u_n=\sum_{k=1}^{n}L_{2k-1}=L_{2n}-2,,\ \forall n\in\mathbf{N}^{*}$,

$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)L_{2k-1}=L_1+3L_3+5L_5+\ldots+(2n-1)L_{2n-1}=$

$=\sum_{k=1}^{n}L_{2k-1}+2\sum_{k=2}^{n}L_{2k-1}+2\sum_{k=3}^{n}L_{2k-1}+\ldots+2\sum_{k=n}^{n}L_{2k-1}=$

$=u_n+2(u_n-u_1)+2(u_n-u_2)+\ldots+2(u_n-u_{n-1})=(2n-1)u_n-2\sum_{k=1}^{n-1}u_k=$

$=(2n-1)(L_{2n}-2)-2\sum_{k=1}^{n-1}(L_k-2)=(2n-1)L_{2n}-4n+2-2\sum_{k=1}^{n-1}L_{2k}+4(n-1)=$

$=(2n-1)L_{2n}-2\sum_{k=1}^{n-1}L_{2k}-2=(2n-1)L_{2n}-2(L_{2n-1}-1)-2=2nL_{2n}-L_{2n}-2L_{2n-1}=$

$=(2n-1)L_{2n}-2L_{2n-1}$.

1.108. $\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1)L_{2k-1}=L_{2n+1}+L_{2n-1}-4n,\ \forall n\in\mathbf{N}^{*}$.

Proof. $\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1)L_{2k-1}=2n\sum_{k=1}^{n}L_{2k-1}-\sum_{k=1}^{n}(2k-1)L_{2k-1}=$

$=2n(L_{2n}-2)-(2n-1)L_{2n}+2L_{2n-1}=2nL_{2n}-4n-2nL_{2n}+L_{2n}+2L_{2n-1}=$

$=L_{2n}+L_{2n-1}+L_{2n-1}-4n=L_{2n+1}+L_{2n-1}-4n$.

* *

*

Art.218

3) ASUPRA PROBLEMELOR 5346 SSMA 2015 ȘI 582 RMM 2017

Marin Chirciu[1]

Notă.
School Science and Mathematics Association, Founded in 1901
Jurnalul SSMA este un jurnal internațional care este publicat lunar între octombrie și mai, punând accentul pe cercetarea problemelor, preocupărilor și lecțiilor din cadrul și între disciplinele științelor și matematicii în clasă.

Articolul pornește de la **Problemele 5346** din **SSMA** mai **2015** și **582 Inequality in triangle RMM octombrie 2017**, **Romanian Mathematical Magazine**, ambele probleme având aceiași autori D.M.Bătinețu-Giurgiu și Neculai Stanciu, Romania.
În cadrul materialului se urmărește o modalitate unitară de prezentare a soluțiilor, dezvoltând și extinzând sume cu înălțimi în triunghi și razele cercurilor exînscrise.
Problema 5346 din **SSMA**

1) In ΔABC

$$\sum \frac{h_b+h_c}{h_a}\cdot r_a^2 \ge 2p^2 .$$

SSMA 5/2015, D.M.Bătinețu-Giurgiu , Neculai Stanciu, Romania

Soluție.
Demonstrăm rezultatul ajutător:
Lema 1.

2) In ΔABC

$$\sum \frac{h_b+h_c}{h_a}\cdot r_a^2 = \frac{p^2\left(8R^2+2Rr-r^2-p^2\right)}{2Rr}.$$

Demonstrație.

Avem $\sum \frac{h_b+h_c}{h_a}\cdot r_a^2 = \sum \frac{\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}}{\frac{2S}{a}}\cdot \frac{S^2}{(p-a)^2} = S^2\sum \frac{a(b+c)}{bc(p-a)^2} = r^2p^2\cdot \frac{8R^2+2Rr-r^2-p^2}{2Rr^3} =$

$= \frac{p^2\left(8R^2+2Rr-r^2-p^2\right)}{2Rr}$.

Să trecem la rezolvarea inegalității **1)**.

Folosind **Lema 1** inegalitatea se scrie $\frac{p^2\left(8R^2+2Rr-r^2-p^2\right)}{2Rr} \ge 2p^2 \Leftrightarrow p^2 \le 8R^2-2Rr-r^2$

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \le 4R^2+4Rr+3r^2$ .Rămâne să arătăm că:

$4R^2+4Rr+3r^2 \le 8R^2-2Rr-r^2 \Leftrightarrow 2R^2-3Rr-2r^2 \ge 0 \Leftrightarrow (R-2r)(2R+r)\ge 0$, evident din inegalitatea lui Euler $R \ge 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești*

Inegalitatea **1)** poate fi întărită:

3) In ΔABC

$$\sum \frac{h_b + h_c}{h_a} \cdot r_a^2 \geq \frac{27R^2}{2}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema 1** inegalitatea se scrie

$\dfrac{p^2\left(8R^2+2Rr-r^2-p^2\right)}{2Rr} \geq \dfrac{27R^2}{2} \Leftrightarrow p^2\left(8R^2+2Rr-r^2-p^2\right) \geq 27R^2r$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2 \leq p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$ .Rămâne să arătăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)\left(8R^2+2Rr-r^2-4R^2-4Rr-3r^2\right) \geq 27R^2r \Leftrightarrow 37R^3-52R^2r-54Rr^2+20r^3 \geq 0$

$\Leftrightarrow (R-2r)\left(37R^2+22Rr-10r^2\right) \geq 0$,evident din inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

Inegalitatea **3)** este mai tare decât inegalitatea **1):**

4) In ΔABC

$$\sum \frac{h_b + h_c}{h_a} \cdot r_a^2 \geq \frac{27R^2}{2} \geq 2p^2.$$

Soluție.

Vezi inegalitatea **3)** și $27R^2 \geq 4p^2$,evidentă din inegalitatea lui Mitrinović: $p \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}R$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

Schimbând rolurile între h_a și r_a se pot obține alte inegalități.

5) In ΔABC

$$\sum \frac{r_b + r_c}{r_a} \cdot h_a^2 \geq 2p^2.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lema 2.

6) In ΔABC

$$\sum \frac{r_b + r_c}{r_a} \cdot h_a^2 = \frac{p^2\left(p^2+r^2-12Rr\right)}{Rr}.$$

Demonstrație.

Avem $\displaystyle\sum \frac{r_b + r_c}{r_a} \cdot h_a^2 = \sum \frac{\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-c}}{\frac{S}{p-a}} \cdot \frac{4S^2}{a^2} = 4S^2 \sum \frac{p-a}{a(p-b)(p-c)} = 4r^2p^2 \cdot \frac{p^2+r^2-12Rr}{4Rr^3} =$

$$=\frac{p^2\left(p^2+r^2-12Rr\right)}{Rr}.$$

Să trecem la rezolvarea inegalității **5)**.

Folosind **Lema 2** inegalitatea se scrie $\frac{p^2\left(p^2+r^2-12Rr\right)}{Rr}\geq 2p^2 \Leftrightarrow p^2\geq 14Rr-r^2$

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ .Rămâne să arătăm că:

$16Rr-5r^2\geq 14Rr-r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$ (inegalitatea lui Euler).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

Se poate scrie inegalitatea:

7) In ΔABC

$$\sum\frac{r_b+r_c}{r_a}\cdot h_a^2\geq 27Rr.$$

Soluție.

Folosind **Lema 2** inegalitatea se scrie $\frac{p^2\left(p^2+r^2-12Rr\right)}{Rr}\geq 27Rr \Leftrightarrow p^2\left(p^2+r^2-12Rr\right)\geq 27R^2r^2$

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ .Rămâne să arătăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)\left(16Rr-5r^2+r^2-12Rr\right)\geq 27R^2r^2 \Leftrightarrow$

$37R^2-84Rr+20r^2\geq 0 \Leftrightarrow \left(R-2r\right)\left(37R-10r\right)\geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

Inegalitatea **5)** este mai tare decât inegalitatea **7):**

8) In ΔABC

$$\sum\frac{r_b+r_c}{r_a}\cdot h_a^2\geq 2p^2\geq 27Rr.$$

Soluție.

Vezi inegalitatea **5)** și $2p^2\geq 27Rr$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$

Rămâne să arătăm că: $2\left(16Rr-5r^2\right)\geq 27Rr \Leftrightarrow R\geq 2r$ (inegalitatea lui Euler).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

În legătură cu sumele de la **Lema 1** și **Lema 2** se poate stabili inegalitatea:

9) In ΔABC

$$\frac{R}{2r}\cdot\sum\frac{h_b+h_c}{h_a}\cdot r_a^2\geq\sum\frac{r_b+r_c}{r_a}\cdot h_a^2.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema 1** și **Lema 2** inegalitatea se scrie:

$$\frac{R}{2r}\cdot\frac{p^2\left(8R^2+2Rr-r^2-p^2\right)}{2Rr}\geq\frac{p^2\left(p^2+r^2-12Rr\right)}{Rr}\Leftrightarrow 2R^3-9Rr^2-14Rr^2-8r^3\geq 0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (R-2r)(2R^2-5Rr+4r^2)\geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$ și observația că $2R^2-5Rr+4r^2>0$, deoarece $\Delta<0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

Dacă înlocuim r_a^2 cu r_a obținem noi relații în triunghi.

10) In ΔABC

$$9R\leq \sum \frac{h_b+h_c}{h_a}\cdot r_a\leq \frac{9R^3}{4r^2}.$$

Soluție.

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lema 3.

11) In ΔABC

$$\sum \frac{h_b+h_c}{h_a}\cdot r_a=\frac{p^2(2R-r)-r^2(4R+r)}{2Rr}.$$

Demonstrație.

Avem $\sum \frac{h_b+h_c}{h_a}\cdot r_a=\sum \frac{\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}}{\frac{2S}{a}}\cdot \frac{S}{p-a}=S\sum \frac{a(b+c)}{bc(p-a)}=rp\cdot \frac{p^2(2R-r)-r^2(4R+r)}{2pRr^2}=$

$=\frac{p^2(2R-r)-r^2(4R+r)}{2Rr}$.

Să trecem la rezolvarea primei inegalități din **10)**.

Folosind **Lema 3** inegalitatea se scrie $\frac{p^2(2R-r)-r^2(4R+r)}{2Rr}\geq 9R$

$\Leftrightarrow p^2(2R-r)\geq 18R^2r+r^2(4R+r)$ care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ .Rămâne să arătăm că:

$(16Rr-5r^2)(2R-r)\geq 18R^2r+r^2(4R+r)\Leftrightarrow 7R^2-15Rr+2r^2\geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(7R-r)\geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Pentru a doua inegalitate folosind **Lema 3** obținem:

$\frac{p^2(2R-r)-r^2(4R+r)}{2Rr}\leq \frac{9R^3}{4r^2}\Leftrightarrow 2p^2(2Rr-r^2)-2r^2(4Rr+r^2)\leq 9R^4$ folosim inegalitatea lui Gerretsen $p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$ .Rămâne să arătăm că:

$2(4R^2+4Rr+3r^2)(2Rr-r^2)-2r^2(4Rr+r^2)\leq 9R^4\Leftrightarrow 9R^4-16R^3r-8R^2r^2+4Rr^3+8r^4\geq 0\Leftrightarrow$

$(R-2r)(9R^3+2R^2r-4Rr^2-4r^3)\geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

12) In ΔABC

$$\frac{16R^2-15Rr+2r^2}{R}\leq \sum \frac{h_b+h_c}{h_a}\cdot r_a\leq \frac{4R^3+2R^2r-Rr^2-2r^3}{Rr}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Se folosește **Lema 3** și inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2 \le p^2 \le 4R^2+4Rr+3r^2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

Dubla inegalitate **12)** este mai tare decât **10):**

13) In ΔABC

$$9R \le \frac{16R^2-15Rr+2r^2}{R} \le \sum \frac{h_b+h_c}{h_a}\cdot r_a \le \frac{4R^3+2R^2r-Rr^2-2r^3}{Rr} \le \frac{9R^3}{4r^2}.$$

Soluție.

Vezi dubla inegalitate **12)** și inegalitatea lui Euler $R \ge 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

Dacă înlocuim h_a^2 cu h_a obținem noi relații în triunghi.

14) In ΔABC

$$2(8R-7r) \le \sum \frac{r_b+r_c}{r_a}\cdot h_a \le \frac{2(2R-r)^2}{r}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lema 4.

15) In ΔABC

$$\sum \frac{r_b+r_c}{r_a}\cdot h_a = \frac{2\left(p^2-2r^2-8Rr\right)}{r}.$$

Demonstrație.

Avem $\sum \frac{r_b+r_c}{r_a}\cdot h_a = \sum \frac{\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-c}}{\frac{S}{p-a}}\cdot \frac{2S}{a} = 2S\sum \frac{p-a}{(p-b)(p-c)} = 2rp\cdot \frac{p^2-2r^2-8Rr}{r^2p} =$

$$= \frac{2\left(p^2-2r^2-8Rr\right)}{r}.$$

Să trecem la rezolvarea dublei inegalități **14)**:

Se folosește **Lema 4** și inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2 \le p^2 \le 4R^2+4Rr+3r^2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

În legătură cu sumele de la **Lema 3** și **Lema 4** se poate stabili inegalitatea:

16) In ΔABC

$$\sum \frac{r_b+r_c}{r_a}\cdot h_a \ge \sum \frac{h_b+h_c}{h_a}\cdot r_a.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema 3** și **Lema 4** inegalitatea se scrie:
$\frac{2\left(p^2-2r^2-8Rr\right)}{r} \geq \frac{p^2(2R-r)-r^2(4R+r)}{2Rr} \Leftrightarrow p^2(2R+r) \geq 32R^2r+4Rr^2-r^3$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr-5r^2$ .Rămâne să arătăm că:
$\left(16Rr-5r^2\right)(2R+r) \geq 32R^2r+4Rr^2-r^3 \Leftrightarrow R \geq 2r$ (inegalitatea lui Euler).
Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

În **RMM 2017**, **Romanian Mathematical Magazine**, sub semnătura acelorași autori ca la **1)** a apărut următoarea inegalitate în triunghi **582 Inequality in triangle**:

17) In ΔABC

$$\sum \frac{r_b+r_c}{r_a} \cdot \left(r_b^2+r_c^2\right) \geq 4p^2 .$$

RMM 10/2017, D.M.Bătinețu-Giurgiu , Neculai Stanciu, Romania

Soluție.

Folosind inegalitatea $x^2+y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$ obținem:

$$\sum \frac{r_b+r_c}{r_a} \cdot \left(r_b^2+r_c^2\right)=\sum \frac{r_b+r_c}{r_a} \cdot \frac{\left(r_b+r_c\right)^2}{2}=\frac{1}{2} \sum \frac{\left(r_b+r_c\right)^3}{r_a} \overset{Holder}{\geq} \frac{1}{2} \frac{\left[\sum\left(r_b+r_c\right)\right]^3}{3 \sum r_a}=\frac{4}{3}\left(\sum r_a\right)^2=$$

$=\frac{4}{3}(4R+r)^2 \geq 4p^2$,unde ultima inegalitate rezultă din inegalitatea lui Doucet $4R+r \geq p\sqrt{3}$.
Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

Inegalitatea **17)** se poate dezvolta:

18) In ΔABC

$$\sum \frac{r_b+r_c}{r_a} \cdot \left(r_b^n+r_c^n\right) \geq 12\left(\frac{p}{\sqrt{3}}\right)^n, \text{ unde } n \in \boldsymbol{N}^* .$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Hölder $x^n+y^n \geq \frac{(x+y)^n}{2^{n-1}}$, unde $n \in \boldsymbol{N}^*$ obținem:

$$\sum \frac{r_b+r_c}{r_a} \cdot \left(r_b^n+r_c^n\right)=\sum \frac{r_b+r_c}{r_a} \cdot \frac{\left(r_b+r_c\right)^n}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}} \sum \frac{\left(r_b+r_c\right)^{n+1}}{r_a} \overset{Holder}{\geq} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\left[\sum\left(r_b+r_c\right)\right]^{n+1}}{3^{n-1} \sum r_a}=\frac{12}{3^n}\left(\sum r_a\right)^n=$$

$=\frac{12}{3^n}(4R+r)^n \geq 12\left(\frac{p}{\sqrt{3}}\right)^n$,unde ultima inegalitate rezultă din inegalitatea lui Doucet $4R+r \geq p\sqrt{3}$.
Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

19) In ΔABC

$$\sum \frac{r_b^3+r_c^3}{r_a} \geq 2p^2 .$$

Soluție.

Folosind inegalitatea $x^3+y^3\geq\frac{(x+y)^3}{4}$ obținem:

$\sum\frac{r_b^3+r_c^3}{r_a}\geq\sum\frac{(r_b+r_c)^3}{4r_a}\overset{Holder}{\geq}\frac{1}{4}\frac{\left[\sum(r_b+r_c)\right]^3}{3\sum r_a}=\frac{2}{3}\left(\sum r_a\right)^2=\frac{2}{3}(4R+r)^2\geq 2p^2$,unde ultima inegalitate rezultă din inegalitatea lui Doucet $4R+r\geq p\sqrt{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

Inegalitatea **19)** se poate dezvolta:

20) In ΔABC

$$\sum\frac{r_b^n+r_c^n}{r_a}\geq 6\left(\frac{p}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}, \text{ unde } n\in \boldsymbol{N}^*.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Hölder $x^n+y^n\geq\frac{(x+y)^n}{2^{n-1}}$, unde $n\in\boldsymbol{N}^*$ obținem:

$\sum\frac{r_b^n+r_c^n}{r_a}\geq\sum\frac{(r_b+r_c)^n}{2^{n-1}r_a}\overset{Holder}{\geq}\frac{1}{2^{n-1}}\frac{\left[\sum(r_b+r_c)\right]^n}{3^{n-2}\sum r_a}=\frac{6}{3^{n-1}}\left(\sum r_a\right)^{n-1}=\frac{6}{3^{n-1}}(4R+r)^{n-1}\geq 6\left(\frac{p}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$,unde ultima inegalitate rezultă din inegalitatea lui Doucet $4R+r\geq p\sqrt{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

21) In ΔABC

$$\sum\frac{h_b+h_c}{h_a}\cdot\left(h_b^2+h_c^2\right)\geq\frac{16r^2}{3}\left(5-\frac{r}{R}\right)^2.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind inegalitatea $x^2+y^2\geq\frac{(x+y)^2}{2}$ obținem:

$\sum\frac{h_b+h_c}{h_a}\cdot\left(h_b^2+h_c^2\right)\geq\sum\frac{h_b+h_c}{h_a}\cdot\frac{(h_b+h_c)^2}{2}=\frac{1}{2}\sum\frac{(h_b+h_c)^3}{h_a}\overset{Holder}{\geq}\frac{1}{2}\frac{\left[\sum(h_b+h_c)\right]^3}{3\sum h_a}=\frac{4}{3}\left(\sum h_a\right)^2=$

$\frac{4}{3}\left(\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}\right)^2\geq\frac{4}{3}\left(\frac{16Rr-5r^2+r^2+4Rr}{2R}\right)^2=\frac{16r^2}{3}\left(5-\frac{r}{R}\right)^2$,unde ultima inegalitate rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

Inegalitatea **21)** se poate dezvolta:

22) In ΔABC

$$\sum \frac{h_b+h_c}{h_a}\cdot\left(h_b^n+h_c^n\right)\ge 12\left(\frac{2r}{3}\right)^n\left(5-\frac{r}{R}\right)^n, \text{ unde } n\in \boldsymbol{N}^*.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Hölder $x^n+y^n\ge \frac{(x+y)^n}{2^{n-1}}$, unde $n\in \boldsymbol{N}^*$ obținem:

$$\sum \frac{h_b+h_c}{h_a}\cdot\left(h_b^n+h_c^n\right)\ge \sum \frac{h_b+h_c}{h_a}\cdot\frac{\left(h_b+h_c\right)^n}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}\sum \frac{\left(h_b+h_c\right)^{n+1}}{h_a}\overset{Holder}{\ge}\frac{1}{2^{n-1}}\frac{\left[\sum\left(h_b+h_c\right)\right]^{n+1}}{3^{n-1}\sum h_a}=$$

$$=\frac{4}{3^{n-1}}\left(\sum h_a\right)^n=\frac{4}{3^{n-1}}\left(\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}\right)^n\ge \frac{4}{3^{n-1}}\left(\frac{16Rr-5r^2+r^2+4Rr}{2R}\right)^n=12\left(\frac{2r}{3}\right)^n\left(5-\frac{r}{R}\right)^n,$$

unde ultima inegalitate rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\ge 16Rr-5r^2$.
Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

23) In ΔABC

$$\sum \frac{h_b^3+h_c^3}{h_a}\ge \frac{8r^2}{3}\left(5-\frac{r}{R}\right)^2.$$

Soluție.

Folosind inegalitatea $x^3+y^3\ge \frac{(x+y)^3}{4}$ obținem:

$$\sum \frac{h_b^3+h_c^3}{h_a}\ge \sum \frac{\left(h_b+h_c\right)^3}{4h_a}\overset{Holder}{\ge}\frac{1}{4}\frac{\left[\sum\left(h_b+h_c\right)\right]^3}{3\sum h_a}=\frac{2}{3}\left(\sum h_a\right)^2=\frac{2}{3}\left(\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}\right)^2\ge$$

$$\ge \frac{2}{3}\left(\frac{16Rr-5r^2+r^2+4Rr}{2R}\right)^2=\frac{8r^2}{3}\left(5-\frac{r}{R}\right)^2,$$ unde ultima inegalitate rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\ge 16Rr-5r^2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

Inegalitatea **23)** se poate dezvolta:

24) In ΔABC

$$\sum \frac{h_b^n+h_c^n}{h_a}\ge 6\left(\frac{2r}{3}\right)^{n-1}\left(5-\frac{r}{R}\right)^{n-1}, \text{ unde } n\in \boldsymbol{N}^*.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Hölder $x^n+y^n\ge \frac{(x+y)^n}{2^{n-1}}$, unde $n\in \boldsymbol{N}^*$ obținem:

$$\sum \frac{h_b^n+h_c^n}{h_a}\ge \sum \frac{\left(h_b+h_c\right)^n}{2^{n-1}h_a}\overset{Holder}{\ge}\frac{1}{2^{n-1}}\frac{\left[\sum\left(h_b+h_c\right)\right]^n}{3^{n-2}\sum h_a}=\frac{18}{3^n}\left(\sum h_a\right)^{n-1}=\frac{18}{3^n}\left(\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}\right)^{n-1}\ge$$

$\geq \frac{18}{3^n}\left(\frac{16Rr-5r^2+r^2+4Rr}{2R}\right)^{n-1}=6\left(\frac{2r}{3}\right)^{n-1}\left(5-\frac{r}{R}\right)^{n-1}$, unde ultima inegalitate rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr-5r^2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Bibliografie:

1. O.Bottema, R.Z.Djordjevic, R.R.Janic, D.S.Mitrinovic, P.M.Vasic, Geometric Inequalities, Groningen 1969, The Netherlands.
2. D.M.Bătinețu-Giurgiu, Neculai Stanciu, Problema 5346 SSMA 2015, School Science and Mathematics Association, Founded 1901.
3. D.M.Bătinețu-Giurgiu, Neculai Stanciu, Triangle Inequality-582, Romanian Mathematical Magazine 2017, Founding Editor Daniel Sitaru, Romanian Mathematical Society, Mehedinți Branch.
4. Marin Chirciu, Inegalități algebrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2014.
5. Marin Chirciu, Inegalități geometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2015.
6. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.
7. Marin Chirciu, Inegalități cu laturi și raze în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2017.

5. STUDIU DE SPECIALITATE ASUPRA DESCOMPUNERII TRIUNGHIULUI ÎN POLIGOANE (POLIGONIZAREA TRIUNGHIULUI)

Prof. Stan Ilie
Colegiul Tehnic "Anghel Saligny", Roşiorii de Vede, Teleorman

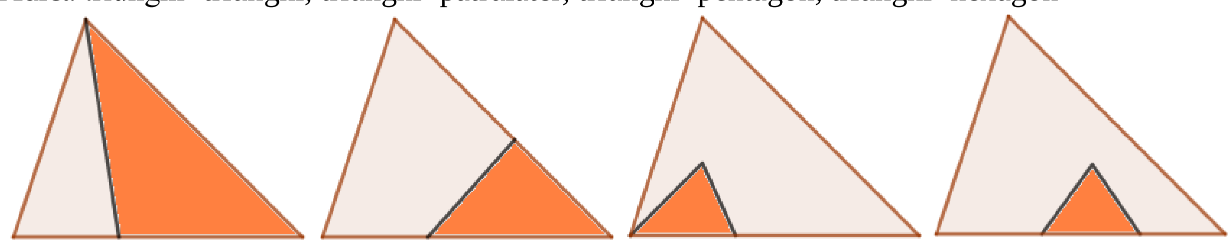
Este cunoscută teoria triangulării ce studiază împărţirea unui n-poligon simplu(poligon cu n laturi ce nu au autointersecţii) în n-2 triunghiuri. Sunt dezvoltaţi diverşi algoritmi de triangulare.

Noi ne propunem să analizăm problema invers: împărţirea triunghiului în poligoane!

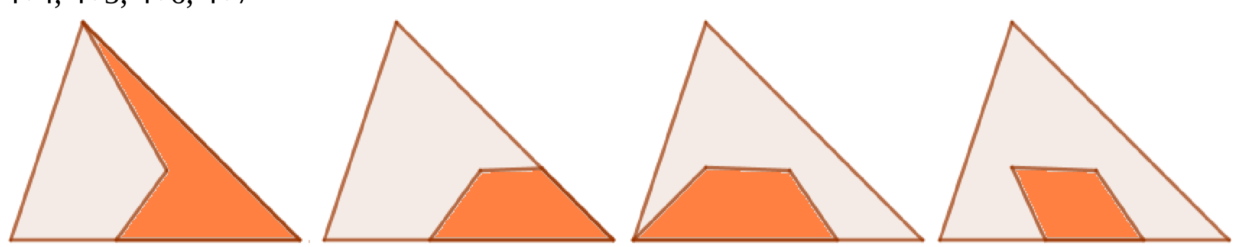
Împărţim şi noi problema în mai multe cazuri(poligoane de acelaşi fel sau nu, două sau mai multe).

Fiind dat un triunghi să se împartă în două poligoane.

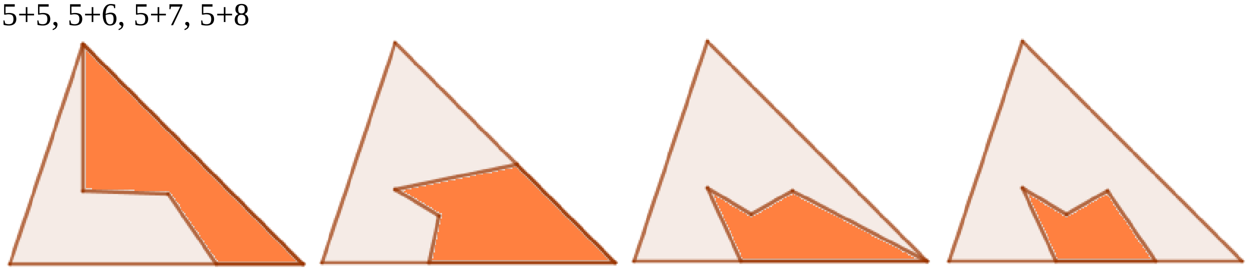
Avem ilustrate cazurile posibile 3+3, 3+4, 3+5, 3+6.
Adică triunghi+triunghi, triunghi+patrulater, triunghi+pentagon, triunghi+hexagon



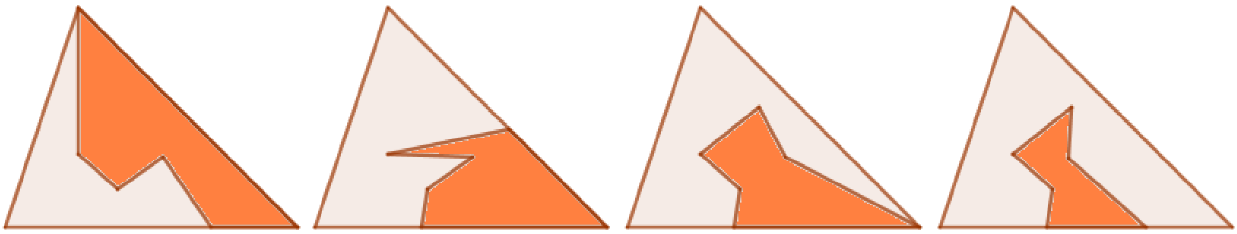
4+4, 4+5, 4+6, 4+7



5+5, 5+6, 5+7, 5+8

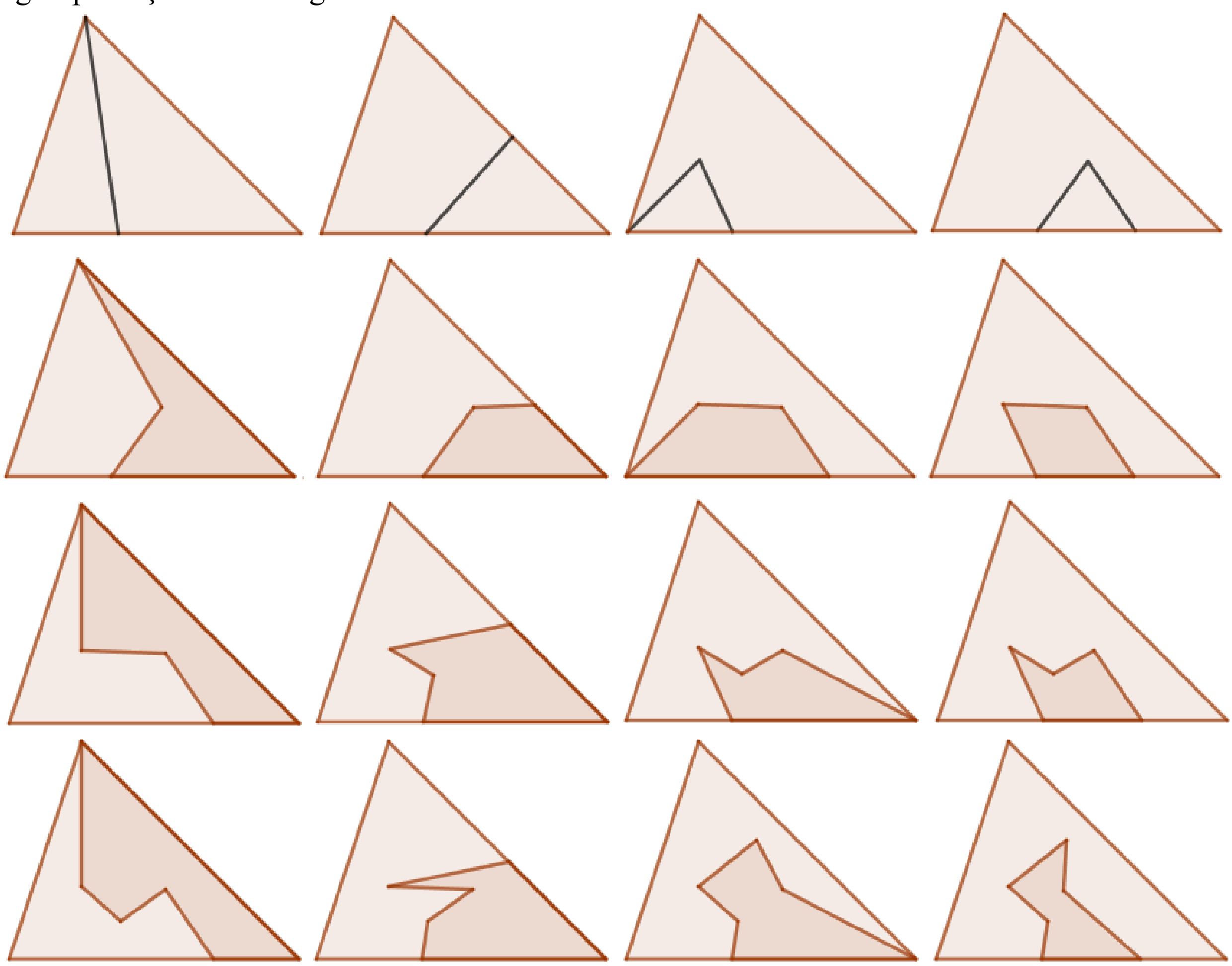


6+6, 6+7, 6+8, 6+9



Şi aşa mai departe...

Există desigur mai multe moduri de construcţie dar am ales modalităţi care să se supună unor reguli permiţând astfel algoritmizarea.



Pentru triunghiul ABC de laturi AB=c, BC=a, CA=b avem:

Număr laturi poligon 1	Număr laturi poligon 2	Element pornire	Număr puncte interioare triunghiului	Element final
n	n	A	n-3	a
n	n+1	a	n-3	b
n	n+2	A	n-2	b
n	n+3	a	n-2	a

	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9							...				

Orice triunghi se descompune în două poligoane cu număr de laturi din mulţimea {n,n+1,n+2,n+3}.

Folosind simetria tabelul devine:

	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12			n	n+1	n+2	n+3
3																
4																
5																
6																
7																
8																
9							...									
10																
n-3																
n-2																
n-1																
n																

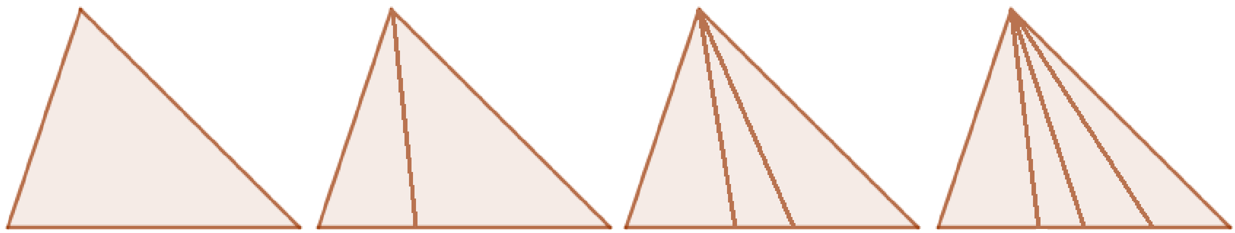
Putem enunţa:

Dacă un triunghi se descompune în două poligoane atunci acestea au numărul de laturi în mulţimea {n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6}.

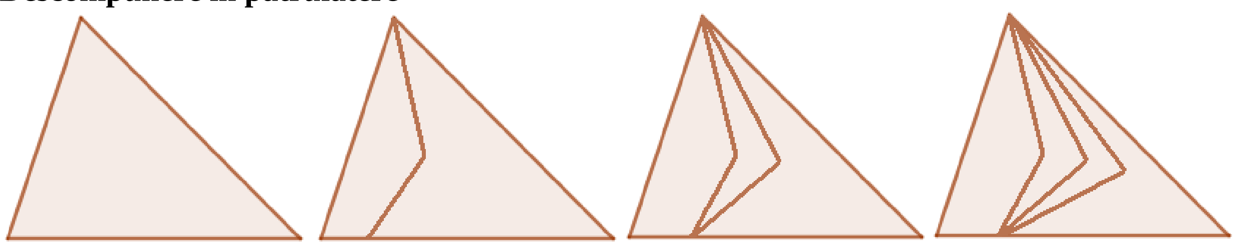
Orice triunghi se poate descompune în două triunghiuri cu diferenţa numărului de laturi maxim 3.

Fiind dat un triunghi să se împartă în poligoane cu acelaşi număr de laturi.

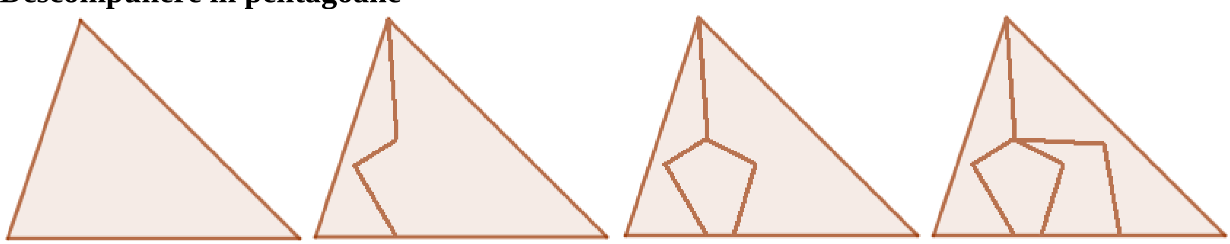
Descompunere în triunghiuri



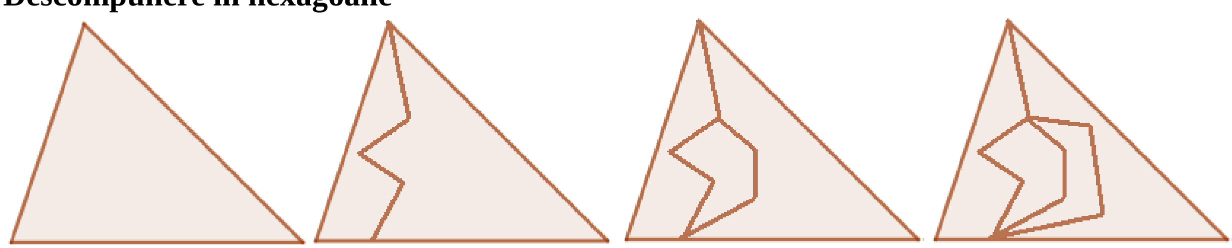
Descompunere în patrulatere



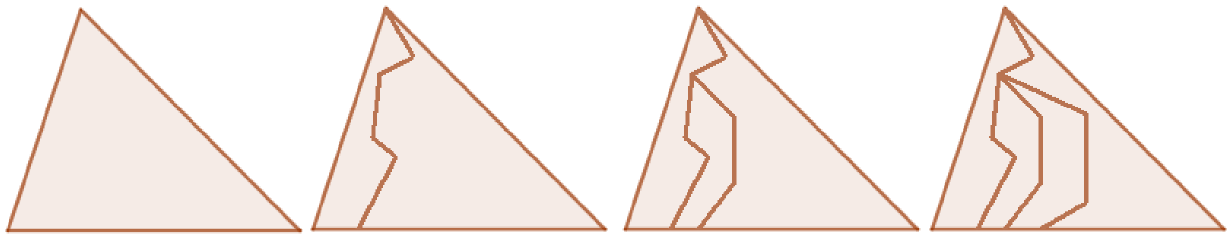
Descompunere în pentagoane



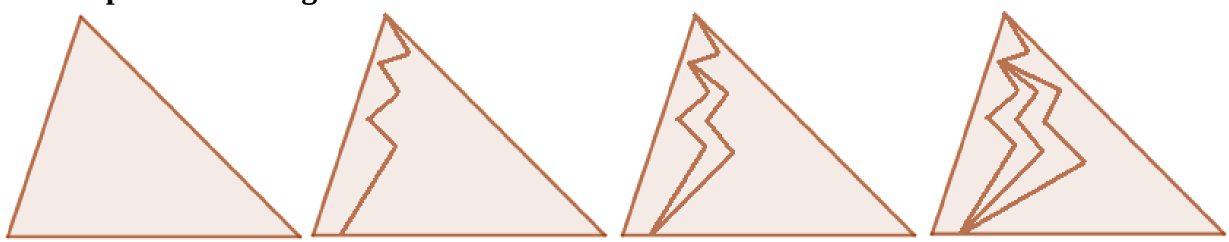
Descompunere în hexagoane



Descompunere în heptagoane



Descompunere în octogoane



Triunghiul poate fi împărţit în oricâte poligoane cu oricâte laturi.

Număr laturi	Număr poligoane	Descrierea Liniei poligonale generatoare			
m	**n**	**Număr segmente**	**Element Start**	**Element Finiş**	**Număr segmente comune**
3	**2**	**1**	**A**	**a**	**0**
	3	**1**	**A**	**a**	**0**
	4	**1**	**A**	**a**	**0**
	...				
	n	**1**	**A**	**a**	**0**
4	**2**	**2**	**A**	**D**	**0**
	n	**2**	**A**	**D**	**0**
5	**n**	**3**	**A**	**a**	**1**
6	**n**	**4**	**A**	**D**	**1**
7	**n**	**5**	**A**	**a**	**2**
8	**n**	**6**	**A**	**D**	**2**
...	**...**	**...**	**...**	**...**	**...**
m	**n**	**m-2**	**A**	**D(1+(-1)^m)/2+ a(1-(-1)^m)/2**	**[(m-3)/2]**

Expresia de la Element Finiş indică a pentru m impar, respectiv D(D∈a) pentru poligoane cu număr par de laturi.

Procedeul descompunerii triunghiului în n m-poligoane este următorul:

1) se uneşte vârful A cu punctul D de pe latura opusă a printr-o (m-2) linie poligonală deschisă
(linia poligonală formată din m-2 segmente va împărţi triunghiul în două poligoane cu câte (m-2)+1+1=m laturi)

2) dacă este cazul(pentru n>2) se uneşte A cu elementul opus lui(D sau a în funcţie de paritatea lui m) printr-o (m-2) poligonală ce are primele [(m-3)/2] segmente comune cu poligonala iniţială. Pasul 2 se execută de n-2 ori.

Concluzii:
Triunghiul poate fi descompus în n poligoane cu m laturi, $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$, n>1, m>2.
Triunghiul poate fi descompus în 2 poligoane cu m_1, respectiv m_2 laturi, $\forall\, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, cu m_1>2, m_2>2,| m_1-m_2|<4
Studiul continuă.

5. OTHER SOLUTIONS FOR SOME PROBLEMS FROM SSM

By Nela Ciceu and Roxana Mihaela Stanciu, Romania

- **5401:** *Proposed by José Luis Díaz-Barrero, Barcelona Tech, Barcelona, Spain*

  Let a, b, c be three positive real numbers such that $a^2+b^2+c^2=3$. Prove that

$$\frac{b^{-1}}{(4\sqrt{a}+3\sqrt{b})^2}+\frac{c^{-1}}{(4\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2}+\frac{a^{-1}}{(4\sqrt{c}+3\sqrt{a})^2}\geq\frac{3}{49}.$$

Solution:
By AM-GM inequality we have

$$(4\sqrt{a}+3\sqrt{b})^2=16a+9b+24\sqrt{ab}\overset{AM-GM}{\leq}16a+9b+12(a+b)=7(4a+3b), \qquad (1).$$

By Bergström's inequality yields that

$$\frac{1}{b(4a+3b)}+\frac{1}{c(4b+3c)}+\frac{1}{a(4c+3a)}\geq\frac{9}{4(ab+bc+ca)+3(a^2+b^2+c^2)}, \qquad (2).$$

So, by above and the hypothesis it remains to prove that

$$\frac{9}{4(ab+bc+ca)+9}\geq\frac{3}{7}\Leftrightarrow 3\geq ab+bc+ca\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$$, which is true.

- **5397:** *Proposed by Kenneth Korbin, New York, NY*

  Solve the equation $\sqrt[3]{x+9}=\sqrt{3}+\sqrt[3]{x-9}$ with $x>9$.

Solution:

We have the identity

$$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b), \forall a,b\in R, \qquad (1).$$

If we take $a=\sqrt[3]{x+9}, b=\sqrt[3]{x-9}, x>9$, then by hypothesis we have

$$a-b=\sqrt{3},\ a^3-b^3=18 \text{ and } ab=\sqrt[3]{x^2-81}, \qquad (2).$$

By (1) and (2) we obtain

$$18=(\sqrt{3})^3+3\cdot\sqrt[3]{x^2-81}\cdot\sqrt{3}\Leftrightarrow 2\sqrt{3}-1=\sqrt[3]{x^2-81}\Leftrightarrow x^2-81=(2\sqrt{3}-1)^3\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2=30\sqrt{3}+44.$$

Hence, $x=\sqrt{30\sqrt{3}+44}$.

- **5407:** *Proposed by José Luis Díaz-Barrero, Barcelona Tech, Barcelona, Spain*

Find all triples (a, b, c) of positive reals such that

$$\begin{aligned} a+b+c &= 1, \\ \frac{1}{(a+bc)^2}+\frac{1}{(b+ca)^2}+\frac{1}{(c+ab)^2} &= \frac{243}{16}. \end{aligned}$$

Solution:

Since $a+b+c=1$, then $a+bc=a(a+b+c)+bc=(a+b)(a+c)$.

We denote $a+b=x, b+c=y, c+a=z$; then $x+y+z=2$.

Using well-known inequalities we have

$$\frac{243}{16}=\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{y^2z^2}+\frac{1}{z^2x^2}\geqslant\frac{1}{xy}\cdot\frac{1}{yz}+\frac{1}{yz}\cdot\frac{1}{zx}+\frac{1}{zx}\cdot\frac{1}{xy}=$$

$$=\frac{1}{xyz}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geqslant\frac{1}{\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3}\cdot\frac{9}{x+y+z}=\frac{27}{8}\cdot\frac{9}{2}=\frac{243}{16}.$$

Hence, $x=y=z\Rightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

- **5423:** *Proposed by Oleh Faynshteyn, Leipzig, Germany*

Let a, b, c be the side-lengths, r_a, r_b, r_c be the radii of the ex-circles and R, r the radii of the circumcircle and incircle respectively, and s the semiperimeter of $\triangle ABC$. Show that

$$\frac{(r_a-r)^2+r_br_c}{(s-b)(s-c)}+\frac{(r_b-r)^2+r_cr_a}{(s-c)(s-a)}+\frac{(r_c-r)^2+r_ar_b}{(s-a)(s-b)}\geq 13.$$

Solutio:

We denote by S the area of triangle. We have

$$\frac{(r_a-r)^2+r_br_c}{(s-b)(s-c)}=\frac{S^2\left[a^2(s-b)(s-c)+s^2(s-a)^2\right]}{s^2(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2}=\frac{a^2(bc+as-s^2)+s^2(s-a)^2}{S^2}.$$

Using the formula

$$16S^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4,$$

after some algebra the inequality to prove becomes

$$20\sum a^4+4\sum a^2bc+4\sum a^3b+4\sum ab^3\geqslant 32\sum a^2b^2.$$

The last inequality yields by Schur, i.e.

$$4\sum a^4+4\sum a^2bc\geqslant 4\sum a^3b+4\sum ab^3$$

and AM-GM inequality!

- **5421:** *Proposed by Kenneth Korbin, New York, NY*

  An equilateral triangle is inscribed in a circle with diameter d. Find the perimeter of the triangle if a chord with length $1-d$ bisects two of its sides.

Solution:
We denote with a the lenghth of the side of equilateral triangle. Let PQ be the chord with length $1-d$ which passed through M,N the midpoints of two sides (with order $P-M-N$).
We denote $x=PM$. By the power of the point with respect to circle we have

$$PM\cdot MQ = MA\cdot MB \Leftrightarrow x\left(x+\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}.$$

We obtain

$$x=\frac{a(\sqrt{5}-1)}{4},\ PQ=2\cdot\frac{a(\sqrt{5}-1)}{4}+\frac{a}{2}=\frac{a\sqrt{5}}{2},\ 1-d=\frac{a\sqrt{5}}{2}\Rightarrow 1-\frac{2a\sqrt{3}}{3}=\frac{a\sqrt{5}}{2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a=\frac{6}{4\sqrt{3}+3\sqrt{5}}=2(4\sqrt{3}-3\sqrt{5}).$$

Hence, the perimeter of triangle is $6(4\sqrt{3}-3\sqrt{5})$.

- **5430:** *Proposed by Oleh Faynshteyn, Leipzig, Germany*

  Let a,b,c be the side-lengths, α,β,γ the angles, and R,r the radii respectively of the circumcircle and incircle of a triangle. Show that

$$\frac{a^3\cdot\cos(\beta-\gamma)+b^3\cdot\cos(\gamma-\alpha)+c^3\cdot\cos(\alpha-\beta)}{(b+c)\cos\alpha+(c+a)\cos\beta+(a+b)\cos\gamma}=6Rr.$$

Solution:
We have

$$a^3\cos(\beta-\gamma)=2Ra^2\sin\alpha\cos(\beta-\gamma)=a^2R(\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\alpha-\beta+\gamma))=$$
$$=a^2R(\sin 2\gamma+\sin 2\beta)=a^2(b\cos\beta+c\cos\gamma)=$$
$$=a^2(a^2b^2+b^2c^2-b^4+a^2c^2+b^2c^2-c^4)/(2abc)=$$
$$=(a^4b^2+a^4c^2-a^2b^4-a^2c^4+2a^2b^2c^2)/(2abc),$$

so the numerator of the fraction from the statement is

$$3abc=12Rrp.$$

We have

$$(b+c)\cos\alpha+(c+a)\cos\beta+(a+b)\cos\gamma=$$
$$=2R(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\beta+\sin\alpha\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha)=$$
$$=2R(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha))=a+b+c=2p,$$

hence, the fraction from the statement is

$$\frac{12Rrp}{2p} = 6Rr$$

and we are done!

- **5439:** *Proposed by Kenneth Korbin, New York, NY*

  Express the roots of the equation $\frac{(x+1)^4}{(x-1)^2} = 20x$ in closed form.
  "Closed form" means that the roots cannot be expressed in their approximate decimal equivalents.

Solution:
The equation can be written as $x^4 - 16x^3 + 46x^2 - 16x + 1 = 0$.
We denote

$$t = x + \frac{1}{x}\text{ , (1),}$$

and we obtain the equation

$$t^2 - 16t + 44 = 0\text{, (2) ,}$$

with solutions:

$$t_{1,2} = 8 \pm \sqrt{5}\text{, (3).}$$

By (1) and (3) we obtain $x_{1,2,3,4}$.

- **5441:** *Proposed by Larry G. Meyer, Fremont, OH*

  In triangle ABC draw a line through the ex-center corresponding to side c so that it is parallel to side c. Extend the angle bisectors of A and B to meet the constructed lines at points A' and B' respectively. Find the length of $\overline{A'B'}$ if given either

  (1) Angles A, B, C and the circumradius R

  (2) Sides a, b, c

  (3) The semiperimeter s, the inradius r and the exradius r_c

  (4) Semiperimeter s and side c.

Solution:
With usual notations we have

$$II_c = CI_c - CI = \frac{s}{\cos\frac{C}{2}} - \frac{s-c}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{c}{\cos\frac{C}{2}},\ IC' = \frac{abc\cos\frac{C}{2}}{s(a+b)},$$

$$\frac{IC'}{II_c} = \frac{AB}{A'B'} \Rightarrow A'B' = \frac{c(a+b)}{s-c} = \frac{2c(a+b)}{a+b-c} = \frac{c(2s-c)}{s-c}.$$

$$\frac{r}{r_c}=\frac{s-c}{s}\Rightarrow c=s-\frac{sr}{r_c},\quad a+b=2s-c=s+\frac{sr}{r_c},$$
$$A'B'=\frac{s(r_c-r)}{r_c}\cdot\frac{s(r_c+r)}{r_c}\cdot\frac{r_c}{sr}=\frac{s(r_c^2-r^2)}{rr_c}.$$

From above yields the conclusion!

- **5445:** *Proposed by Kenneth Korbin, New York, NY*

  Find the sides of a triangle with exradii $(3,4,5)$.

Solution:
We denote by s, the perimeter of triangle and by F area of given triangle. Using the formulas $r_a=\frac{F}{s-a}$ and other three analogously from the statement we get

$3(s-a)=4(s-b)$, $3(s-a)=5(s-c)$, so we obtain that

$7a-7b=-c$, $4a+b=4c$, therefore

$$a=\frac{27c}{35},b=\frac{32c}{35},s=\frac{47c}{35},s-a=\frac{4c}{7},s-b=\frac{3c}{7},s-c=\frac{12c}{35}.$$

Since $F=3(s-a)$, yields that

$$c=\frac{35}{\sqrt{47}},a=\frac{27}{\sqrt{47}},b=\frac{32}{\sqrt{47}}.$$