REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

FEBRUARIE 2018

ISSN 2065-6432

www.mateinfo.ro

REVISTĂ LUNARĂ DIN FEBRUARIE 2009

revista@mateinfo.ro

COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

ARTICOLE REVISTĂ:

1. PROBLEMA LUNII FEBRUARIE 2018

Să se arate că dacă aria S a unui poligon inscriptibil şi circumscriptibil cu $2n$ laturi de lungimi a_1, a_2, ..., a_{2n} se exprimă prin formula $S = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_{2n}}$, atunci $n = 2$.

Propusă de Corneliu Mănescu-Avram

"Problema saptămânii" 28.06.2010-04.07.2010 pe www.mateinfo.ro

Așteptăm rezolvări cât mai interesante pe revista@mateinfo.ro

2. METODE DE REZOLVARE – PROBLEMA LUNII IANUARIE 2018

Fie $ABCD$ un patrulater convex, iar E şi F mijloacele diagonalelor $[AC]$, respectiv $[BD]$. Arătaţi că:

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD+2EF^2=\frac{AC^2+BD^2}{2}\Leftrightarrow ABCD \text{ este paralelogram.} \qquad (*)$$

Prof. Stănescu Florin,

"Problema saptămânii" 9.05.2011 - 15.05.2011 pe www.mateinfo.ro

Soluţie autor:

Folosim urmatoarele rezultate:

(*)Daca $ABCD$ este un patrulater convex si M,N mijloacele laturilor $[BC]$, respectiv $[AD]$, atunci avem $2MN\le AB+CD$. Egalitatea are loc daca si numai daca $AB\parallel CD$.

(**) Fie patrulaterul convex $ABCD$ si M,N,P,Q mijloacele laturilor $[AB],[BC],[CD],[DA]$. Atunci avem: $2(MP^2+NQ^2)=AC^2+BD^2$.

(***)Teorema lui Euler:Intr-un patrulater ABCD cu E si F mijloacele diagonalelor AC si BD are loc relatia: $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4EF^2$.

,$\Rightarrow$'Fie M,N,P,Q mijloacele laturilor $[AB],[BC],[CD],[DA]$

Din (*) rezulta $2MP\le AD+BC$ si $2NQ\le AB+CD$. Rezulta:

$4MP^2\le AD^2+BC^2+2AD\cdot BC$ si $4NQ^2\le AB^2+CD^2+2\cdot AB\cdot CD\Rightarrow 4(MP^2+NQ^2)\le$
$AD^2+BC^2+2AD\cdot BC+AB^2+CD^2+2\cdot AB\cdot CD$ si folosind (***) si (**) avem :
$4(MP^2+NQ^2)\le 4EF^2+AC^2+BD^2+2AD\cdot BC+2AB\cdot CD\Rightarrow 4(MP^2+NQ^2)\le$
$4EF^2+2(MP^2+NQ^2)+2AD\cdot BC+2AB\cdot CD\Rightarrow MP^2+NQ^2\le 2EF^2+AD\cdot BC+AB\cdot CD$ (1),

egalitatea avand loc daca $2MP=AD+BC$ si $2NQ=AB+CD$.

„$\Rightarrow$'', Folosind (**) si (1) obtinem :

$$2EF^2+AB\cdot CD+BC\cdot AD=\frac{AC^2+BD^2}{2}=MP^2+NQ^2\le 2EF^2+AD\cdot BC+AB\cdot CD\Rightarrow$$

$$MP^2+NQ^2=2EF^2+AD\cdot BC+AB\cdot CD\Rightarrow 2MP=AD+BC \text{ si } 2NQ=AB+CD.$$

Astfel,folosind (*) avem $AD\parallel BC$ si $AB\parallel CD\Rightarrow ABCD$ paralelogram.

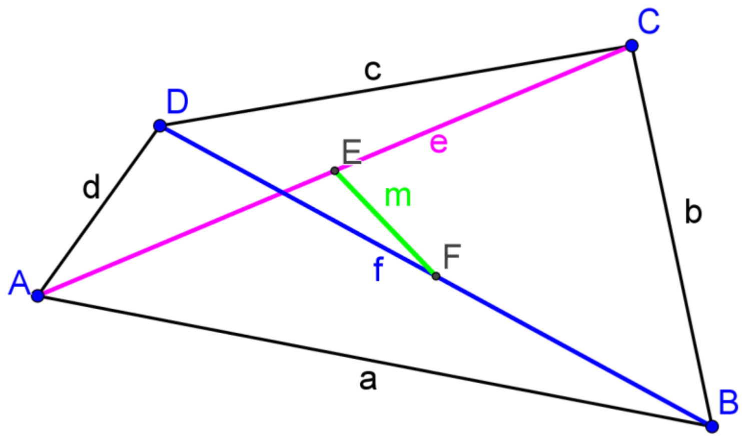
,$\Leftarrow$' Daca $ABCD$ este paralelogram atunci $E=F$ si ramane de aratat ca $AB^2+BC^2=\frac{AC^2+BD^2}{2}$. Deoarece $ABCD$ este paralelogram avem $\cos A=-\cos B$, iar din teorema cosinusului aplicata in triunghiurile ABD si CBD obtinem:

$$\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}=-\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}\Rightarrow AB^2+BC^2=\frac{AC^2+BD^2}{2},$$ ceea ce trebuia aratat.

Alte soluţii:

1. Prof. Constantin Telteu

Rezolvare:



Folosim notațiile: $AB = a;\ BC = b;\ CD = c;\ DA = d;\ AC = e;\ BD = f;\ EF = m.$
Cu aceste notații, relația din enunț se scrie:

$$ac + bd + 2m^2 = \frac{e^2 + f^2}{2} \quad (1)$$

Relația lui Euler pentru un patrulater oarecare este:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 4m^2 = e^2 + f^2 \quad (2)$$

Aceasta, pentru un paralelogram devine:

$$2\left(a^2 + b^2\right) = e^2 + f^2 \quad (3)$$

Din $(2) \Rightarrow 4m^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2$

Din $(1) \Rightarrow 4m^2 = e^2 + f^2 - 2ac - 2bd$

Scădem ultimele două relații și obținem:

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ac + 2bd = 2\left(e^2 + f^2\right) \Leftrightarrow (a+c)^2 + (b+d)^2 = 2\left(e^2 + f^2\right)$ (4) . *Demonstrăm că această relație este valabilă doar în paralelogram*.

Notăm $\alpha = m\left(AB, CD\right)$ și ridicăm la pătrat relația vectorială: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$. Obținem:

$$BC^2 = BA^2 + AD^2 + DC^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b^2 = a^2 + d^2 + c^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC} - 2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}$$

Cu definiția produsului scalar și teorema cosinusului în triunghiurile *BAD* și *ADC*, din ultima relație obținem:

$$b^2 = a^2 + d^2 + c^2 - 2ad \cdot \frac{a^2 + d^2 - f^2}{2ad} - 2ac\cos\alpha - 2dc \cdot \frac{d^2 + c^2 - e^2}{2dc} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{e^2 + f^2 - b^2 - d^2}{2ac} .$$

$\cos\alpha \le 1 \Rightarrow e^2 + f^2 \le b^2 + d^2 + 2ac$, cu egalitate dacă $AB \parallel CD$

Analog : $e^2 + f^2 \le a^2 + c^2 + 2bd$, cu egalitate dacă $BC \parallel AD$.

Adunăm ultimele două relații obținute și obținem:

$2\left(e^2 + f^2\right) \le (a+c)^2 + (b+d)^2$, egalitatea, adică relația (4), având loc dacă $ABCD$ este paralelogram.

Reciproc, dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci $m=0;\ a=c;\ b=d$ și relația din enunț devine (3), deci este adevărată.

2. George-Florin Serban, profesor Braila

"$\Leftarrow$" $AC \cap BD = \{O\},\ O=E=F,\ \ \Delta ABC$ aplic T. medianei, $BO^2 = \dfrac{2(AB^2+BC^2)-AC^2}{4}$,

$4BO^2 = 2(AB^2+BC^2)-AC^2,\ BD^2+AC^2 = 2(AB^2+BC^2)$, relatia

$AB\cdot CD + BC\cdot AD + 2EF^2 = \dfrac{AC^2+BD^2}{2}$ devine $AB^2+BC^2+0 = \dfrac{AC^2+BD^2}{2}, \Rightarrow$

$BD^2+AC^2 = 2(AB^2+BC^2)$, adevarat.

"$\Rightarrow$"Fie punctele G,H,I,J mijloacele segmentelor [AD],[DC],[BC],[AB]. Aplic relatia lui Euler intr-un patrulater, $AB^2+BC^2+CD^2+AD^2 = AC^2+BD^2+4EF^2$. In ΔABD, [GJ] linie mijlocie rezulta $GJ \parallel BD,\ GJ = \dfrac{BD}{2}$. In ΔBCD, [HI] linie mijlocie rezulta

$HI \parallel BD,\ HI = \dfrac{BD}{2}$. Din $GJ \parallel HI$ si $GJ = HI$ rezulta GHIJ paralelogram rezulta

$GI^2 + HJ^2 = 2(GJ^2 + IJ^2)$, am demonstrat mai sus.

In ΔABC, [IJ] linie mijlocie, $IJ = \dfrac{AC}{2}$. Demonstrez ca $\overrightarrow{GI} = \dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}}{2}$,

$\overrightarrow{GI} = \vec{r}_I - \vec{r}_G = \dfrac{\vec{r}_B+\vec{r}_C}{2} - \dfrac{\vec{r}_A+\vec{r}_D}{2} = \dfrac{\vec{r}_B+\vec{r}_C-\vec{r}_A-\vec{r}_D}{2} = \dfrac{\vec{r}_B-\vec{r}_A+\vec{r}_C-\vec{r}_D}{2} = \dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}}{2}$. Deci

$\overrightarrow{HJ} = \dfrac{\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CB}}{2}$. Rezulta $\overrightarrow{GI}^2 = \dfrac{\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{DC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}}{4}$, $\overrightarrow{GI}^2 = \dfrac{\overrightarrow{DA}^2+\overrightarrow{CB}^2+2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CB}}{4}$.

Din

$GI^2+HJ^2 = 2(GJ^2+IJ^2), \Rightarrow \dfrac{\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{DC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}^2+\overrightarrow{CB}^2+2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CB}}{4} = 2\left(\dfrac{BD^2}{4}+\dfrac{AC^2}{4}\right)$,

$AB^2+DC^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+AD^2+BC^2+2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CB} = 2(AC^2+BD^2)$. Din relatia lui Euler rezulta

$2EF^2 = \dfrac{AB^2+BC^2+CD^2+AD^2-AC^2-BD^2}{2}$. Inlocuiesc in relatia din ipoteza pe $2EF^2$.

$AB\cdot CD + BC\cdot AD + 2EF^2 = \dfrac{AC^2+BD^2}{2} \Rightarrow$

$AB\cdot CD+BC\cdot AD+\dfrac{AB^2+BC^2+CD^2+AD^2-AC^2-BD^2}{2}=\dfrac{AC^2+BD^2}{2}$,

$AB^2+BC^2+CD^2+AD^2+2AB\cdot CD+2BC\cdot AD=2(AC^2+BD^2)$, dar

$AB^2+DC^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+AD^2+BC^2+2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CB}=2(AC^2+BD^2)$. Scad ultimile doua egalitati si obtin $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CB}=2AB\cdot CD+2BC\cdot AD$,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CB}=AB\cdot CD+BC\cdot AD$, trec la modul, $|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CB}|=AB\cdot CD+BC\cdot AD$,

$AB\cdot CD+BC\cdot AD=|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CB}|\le|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}|+|\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CB}|\le|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{DC}|+|\overrightarrow{DA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|$,

$AB\cdot CD+BC\cdot AD=|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CB}|\le|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}|+|\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CB}|\le AB\cdot CD+BC\cdot AD$, egalitatea are loc daca vectorii $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}$ sunt coliniari si vectorii $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{CB}$ sunt coliniari rezulta $AB\parallel CD$, $BC\parallel AD$ adica ABCD este paralelogram.

3. Prof. Octavian Stroe și prof. Marin Chirciu

Dacă A,B,C,D sunt patru puncte arbitrare în plan și E,F sunt mijloacele segmentelor $(AC),(BD)$ atunci are loc egalitatea:

$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4EF^2$, (1) (Relația lui Euler).

În particular dacă $ABCD$ este paralelogram, avem $E=F$, $AB=CD$, $BC=AD$, de unde:

$2\left(AB^2+BC^2\right)=AC^2+BD^2 \Leftrightarrow AB\cdot CD+BC\cdot AD+2EF^2=\dfrac{AC^2+BD^2}{2}$.

Reciproc, fie $ABCD$ un patrulater convex, iar E și F mijloacele diagonalelor $[AC]$, respectiv $[BD]$, care verifică egalitatea $AB\cdot CD+BC\cdot AD+2EF^2=\dfrac{AC^2+BD^2}{2}$, (*).

Din (1) și (*) rezultă $2\left(AC^2+BD^2\right)=\left(AB+CD\right)^2+\left(BC+AD\right)^2$, (3).

Notăm cu M,N,P,Q respectiv mijloacele laturilor $[AB],[BC],[CD],[DA]$.

Cum $MNPQ$ este paralelogramrezultă relația $MP^2+NQ^2=2\left(MN^2+NP^2\right)$.

Din proprietatea liniei mijlocii rezultă $MN=\dfrac{AC}{2}$ și $NP=\dfrac{BD}{2}$, de unde

$\dfrac{AC^2+BD^2}{2}=MP^2+NQ^2$, (4).

Se stabilesc ușor relațiile vectoriale $\overrightarrow{MP}=\dfrac{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}}{2}$ și $\overrightarrow{NQ}=\dfrac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}}{2}$.

Deducem $MP\le\dfrac{BC+AD}{2}$ și $NQ\le\dfrac{AB+CD}{2}$, cu egalitate numai dacă vectorii $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD}$ și respectiv $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ sunt coliniari, adică $ABCD$ este paralelogram.

Din (4) rezultă:

$$\frac{AC^2+BD^2}{2}\le\left(\frac{BC+AD}{2}\right)^2+\left(\frac{AB+CD}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2\left(AC^2+BD^2\right)\le\left(AB+CD\right)^2+\left(BC+AD\right)^2.$$

Cum această inegalitate se verifică din (3), cu egalitate , rezultă că se impun:

$MP=\dfrac{BC+AD}{2}$ şi $NQ=\dfrac{AB+CD}{2}$, adică $ABCD$ este paralelogram.

Cu aceasta problema este rezolvată.

4. Prof. Gheorghe ROTARIU, Dorohoi, Botoşani

$(\Rightarrow)$

Vom demonstra implicaţia directă din echivalenţa dată în 3 paşi.

Pasul 1. *Vom prelucra egalitatea din membrul stâng cu ajutorul* ***Relaţiei lui Euler***.

Relaţia lui Euler:

În patrulaterul convex $ABCD$, cu E respectiv F mijloacele diagonalelor $[AC]$ respectiv $[BD]$, are loc:

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4EF^2 \qquad (1)$$

Membrul stâng din echivalenţa dată poate fi scris:

$$2AB\cdot CD+2BC\cdot AD+4EF^2=AC^2+BD^2 \qquad (2)$$

Relaţia lui Euler (1) se poate pune sub forma:

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2-4EF^2=AC^2+BD^2 \qquad (1')$$

Adunăm relaţiile (2) şi $(1')$. Vom avea:

$$(AB+CD)^2+(BC+AD)^2=2\left(AC^2+BD^2\right) \qquad (3)$$

Pasul 2. *Vom enunţa/demonstra următoarea teoremă*:

Teoremă. *Fie patrulaterul convex $ABCD$ şi E, F, G, H mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA. Au loc:*

a) $EG^2+FH^2=\dfrac{1}{2}\left(AC^2+BD^2\right)$

b) $2\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$; $2\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}$

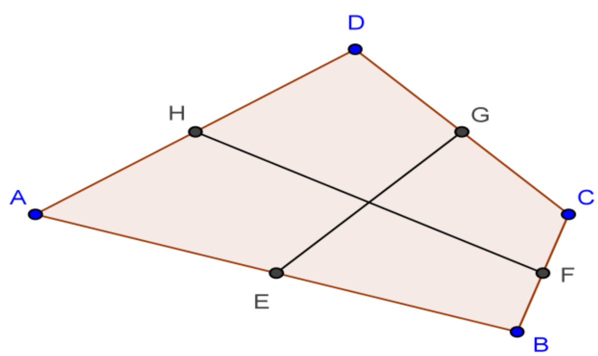
c) $EG \le \frac{1}{2}\left(BC + AD \right)$; $HF \le \frac{1}{2}\left(DC + AB \right)$

d) $BC \parallel AD \Leftrightarrow 2EG = BC + AD$; $DC \parallel AB \Leftrightarrow 2HF = DC + AB$

Demonstraţie.

a) Relaţia este demonstrată (analitic) şi de către I. Steinberg în *Gazeta Matematică nr.11/1914* în articolul „*O proprietate a medianelor unui patrulater*” dar ea poate fi demonstrată facil pe cale sintetică utilizând, de exemplu, teorema medianei unuia din triunghiurile formate cu trei din mijloacele laturilor patrulaterului, ca atare, nu insistăm.

b) Cu ajutorul regulii poligonului, vom avea:



$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$$

$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG}$$

$$2\,\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} + \left(\underbrace{\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EA}}_{\vec{0}} \right) + \left(\underbrace{\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GD}}_{\vec{0}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\,\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \qquad \square$$

Analog pentru relaţia $2\,\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB}$

c) Din b) $\Rightarrow \overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \right) \Rightarrow \left| \overrightarrow{EG} \right| = \left| \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \right) \right| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| \overrightarrow{EG} \right| \le \frac{1}{2}\left(\left| \overrightarrow{BC} \right| + \left| \overrightarrow{AD} \right| \right) \Rightarrow EG \le \frac{1}{2}\left(BC + AD \right). \qquad \square$$

Analog pentru inegalitatea $HF \le \frac{1}{2}(DC + AB)$.

d) Inegalitatea precedentă devine egalitate dacă vectorii:

$$\overrightarrow{EG}\ ,\ \overrightarrow{BC}\ ,\ \overrightarrow{AD}$$

sunt coliniari $\Leftrightarrow AD \parallel BC$ □

Pasul 3. *Raţionăm prin reducere la absurd*.

Presupunem că $ABCD$ nu este paralelogram. Rezultă atunci că există măcar două laturi (de exemplu AD şi BC) care nu sunt paralele între ele. Din punctele c) şi d) din teorema anterioară rezultă

$$2EG < BC + AD \Rightarrow 4EG^2 < (BC + AD)^2 .$$

Apoi $2HF \le AB + DC \Rightarrow 4HF^2 \le (AB + DC)^2$ care adunate ne conduc la:

$$4(EG^2 + HF^2) < (BC + AD)^2 + (AB + DC)^2 \overset{(3)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(3)}{\Rightarrow} 4(EG^2 + HF^2) < 2(AC^2 + BD^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2(EG^2 + HF^2) < AC^2 + BD^2 \Rightarrow EG^2 + HF^2 < \frac{1}{2}(AC^2 + BD^2)$$

contradicţie cu punctul a) din teoremă. Rezultă de aici că presupunerea făcută este falsă, deci $ABCD$ este paralelogram. □

$(\Leftarrow)$

Demonstraţia este imediată. În cazul paralelogramului, punctele E şi F coincid, astfel că:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD + 2EF^2 = AB^2 + BC^2 \qquad (4)$$

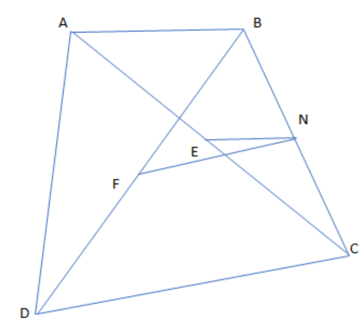
$$\frac{AC^2 + BD^2}{2} \overset{T.\cos}{=} \frac{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B + AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos(\pi - B)}{2} =$$
$$= \frac{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B + AB^2 + AD^2 + 2AB \cdot AD \cdot \cos B}{2} =$$
$$= \frac{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B + AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot \cos B}{2} =$$
$$= AB^2 + BC^2 \qquad (5)$$

Din (4) şi (5) rezultă concluzia.

5. Prof. Buzea Gabriela, Școala Gimnazială Nr. 56, București

Soluția 1

$AB \cdot CD + BC \cdot AD + 2 \cdot EF^2 = \dfrac{AC^2 + BD^2}{2} \Leftrightarrow$
$2 \cdot AB \cdot CD + 2 \cdot BC \cdot AD + 4 \cdot EF^2 = AC^2 + BD^2 \Leftrightarrow$
$2 \cdot AB \cdot CD + 2 \cdot BC \cdot AD + 8 \cdot EF^2 = AC^2 + BD^2 + 4 \cdot EF^2.$
Dar, $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4 \cdot EF^2, conform\ lui\ Euler.$
Deci, $2 \cdot AB \cdot CD + 2 \cdot BC \cdot AD + 8 \cdot EF^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 \Leftrightarrow$
$AB^2 - 2 \cdot AB \cdot CD + CD^2 - 4 \cdot EF^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot AD + AD^2 - 4 \cdot EF^2 = 0 \Leftrightarrow$
$(AB - CD)^2 - 4 \cdot EF^2 + (BC - AD)^2 - 4 \cdot EF^2 = 0, (1).$



Fie N mijlocul laturii BC.
În triunghiul ABC, NE linie mijlocie, deci $NE \parallel AB,\ NE = \frac{AB}{2}$.
În triunghiul BCD, NF linie mijlocie, deci $NF \parallel DC, NF = \frac{DC}{2}$.
Dacă N nu apartine dreptei EF, atunci în triunghiul NEF,$|NE - NF| < EF \Rightarrow \left|\frac{AB}{2} - \frac{CD}{2}\right| < EF \Rightarrow |AB - CD| < 2EF.$
Dacă N aparține dreptei EF,atunci N nu aparține segmentului EF$\Rightarrow EF = |NE - NF| \Rightarrow |AB - CD| = 2EF$.
Deci, $|AB - CD| \le 2EF, (2).$
Analog $|BC - AD| \le 2EF, (3).$

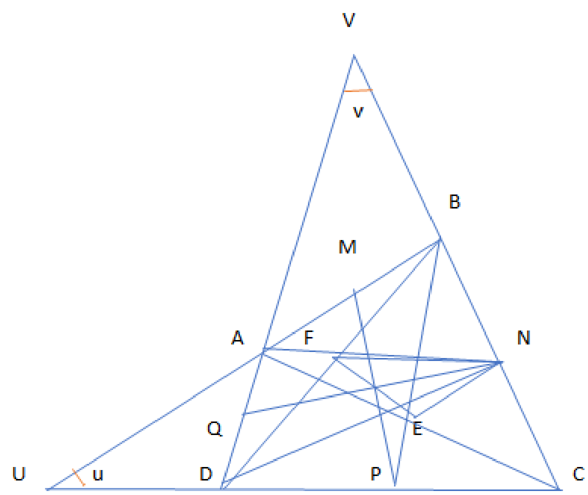
Din relațiile (1),(2) şi (3) rezultă că
$\left.\begin{array}{l} |AB - CD| = 2EF \Leftrightarrow AB \parallel CD, (4) \\ |BC - AD| = 2EF \Leftrightarrow BC \parallel AD, (5) \end{array}\right\} \Leftrightarrow ABCD\ paralelogram.$
Demonstrez relația (4).
Dacă AB=CD atunci EF=0, deci E=F, ceea ce implică ABCD paralelogram.
Dacă AB≠CD, fie AB>CD, deci
$AB - CD = 2EF \Rightarrow NE - NF = EF \Rightarrow NE = NF + EF \Rightarrow N, E\ și\ F\ coliniare. Dar\ NE \parallel AB, NF \parallel DC\ de\ unde\ rezultă\ că\ AB \parallel CD.$
Analog pentru relația (5).
Deci $AB \cdot CD + BC \cdot AD + 2EF^2 = \frac{AC^2+BD^2}{2} \Leftrightarrow ABCD$ paralelogram.

Soluția 2

$AB \cdot CD + BC \cdot AD + 2 \cdot EF^2 = \dfrac{AC^2 + BD^2}{2}, (1) \Leftrightarrow$
$2 \cdot AB \cdot CD + 2 \cdot BC \cdot AD + 4 \cdot EF^2 = AC^2 + BD^2, (2).$
Dar, $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4 \cdot EF^2, (3), conform\ \ lui\ Euler.$

Din (2) și (3) rezultă că
$2\cdot AB\cdot CD+2\cdot BC\cdot AD+AB^2+BC^2+CD^2+AD^2-AC^2-BD^2=AC^2+BD^2 \Leftrightarrow$
$(AB+CD)^2+(BC+AD)^2=2\cdot(AC^2+BD^2),(4).$

Fie M,N,P și Q mijloacele laturilor [AB],[BC], [CD] respectiv [AD], E mijlocul diagonalei [AC] iar F mijlocul diagonalei [BD].
Notăm $m(\widehat{AB,CD})=u$ și $m(\widehat{AD,BC})=v$.



Conform teoremei medianei,

$$\left.\begin{array}{l}\text{În triunghiul } NAD\\ NQ \text{ mediană}\end{array}\right\} \Rightarrow NQ^2=\frac{2(NA^2+ND^2)-AD^2}{4},(5).$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{În triunghiul } ABC\\ AN \text{ mediană}\end{array}\right\} \Rightarrow NA^2=\frac{2(AB^2+AC^2)-BC^2}{4},(6).$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{În triunghiul } BCD\\ DN \text{ mediană}\end{array}\right\} \Rightarrow DN^2=\frac{2(BD^2+DC^2)-BC^2}{4},(7).$$

Din (5),(6) și(7) rezultă că

$$4NQ^2=2\left(\frac{2(AB^2+AC^2)-BC^2}{4}+\frac{2(BD^2+DC^2)-BC^2}{4}\right)-AD^2$$

$4NQ^2=AB^2+AC^2+DC^2+BD^2-BC^2-AD^2$
$4NQ^2=AC^2+BD^2+AB^2-BC^2+CD^2-AD^2,(8).$
Analog, $4MP^2=AC^2+BD^2-AB^2+BC^2-CD^2+AD^2,(9).$
Din (8) și(9) obținem $4(PM^2+NQ^2)=2(AC^2+BD^2),(10).$
În triunghiul ABC, NE linie mijlocie, deci $NE \parallel AB, NE=\frac{AB}{2}$.
În triunghiul BCD, NF linie mijlocie, deci $NF \parallel DC, NF=\frac{DC}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l}Deci\ m(\widehat{AB,CD})=m(\widehat{NE,NF})\\ m(\widehat{AB,CD})=u\end{array}\right\} \Rightarrow m(\widehat{NE,NF})=u.$$

În triunghiul NEF aplicăm teorema cosinusului și obținem

$EF^2 = NE^2 + NF^2 - 2 \cdot NE \cdot NF \cdot \cos u$

$EF^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{DC}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{AB}{2} \cdot \frac{DC}{2} \cdot \cos u$

$4EF^2 = AB^2 + DC^2 - 2 \cdot AB \cdot DC \cdot \cos u$,(11).

Din (3) şi(11) obţinem

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 - AC^2 - BD^2 = AB^2 + CD^2 - 2 \cdot AB \cdot CD \cdot \cos u$

$AB^2 + CD^2 + 2 \cdot AB \cdot CD \cdot \cos u = AC^2 + BD^2 + AB^2 - BC^2 + CD^2 - AD^2$, (12).

Din (8) şi (12) obţinem relaţia $AB^2 + 2 \cdot AB \cdot CD \cdot \cos u + CD^2 = 4NQ^2$, (13).

Analog $4MP^2 = BC^2 + 2 \cdot BC \cdot AD \cdot \cos v + AD^2$, (14).

Din (10),(13) şi (14) obţinem relaţia

$AB^2 + 2 \cdot AB \cdot CD \cdot \cos u + CD^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot AD \cdot \cos v + AD^2 = 2(AC^2 + BD^2)$, (15).

Din(4) şi (15) rezultă că

$$(AB + CD)^2 + (BC + AD)^2 =$$
$$= AB^2 + 2 \cdot AB \cdot CD \cdot \cos u + CD^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot AD \cdot \cos v + AD^2 \Leftrightarrow$$

$AB \cdot CD \cdot (1 - \cos u) + BC \cdot AD \cdot (1 - \cos v) = 0 \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 1 - \cos u = 0 \Leftrightarrow \cos u = 1 \Leftrightarrow AB \parallel CD \\ 1 - \cos v = 0 \Leftrightarrow \cos v = 1 \Leftrightarrow BC \parallel AD \end{array}\right\} \Leftrightarrow ABCD\ paralelogram.$$

Deci $AB \cdot CD + BC \cdot AD + 2EF^2 = \frac{AC^2 + BD^2}{2} \Leftrightarrow ABCD$ paralelogram.

6. Prof. Biro Istvan

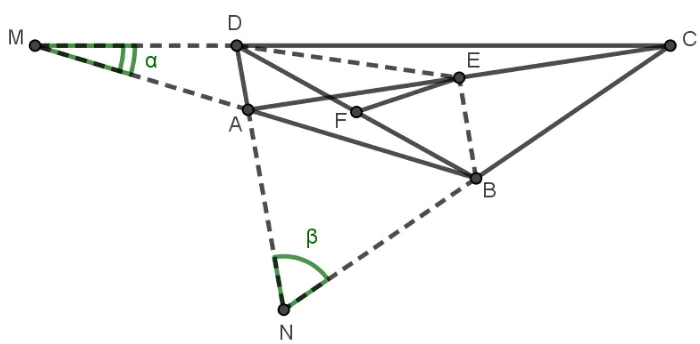
Lema: Dacă în patrulaterul convex *ABCD* notăm cu *E* şi *F* mijloacele diagonalelor *[AC]*, respectiv *[BD]* şi $\alpha = m\sphericalangle(AB;CD)$, $\beta = m\sphericalangle(AD;BC)$, atunci au loc următoarele relaţii:

(1) $$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2 \qquad (relatia\ lui\ Euler)$$

(2) $$\cos\alpha = \frac{AC^2 + BD^2 - AD^2 - BC^2}{2AB \cdot CD}$$

(3) $$\cos\beta = \frac{AC^2 + BD^2 - AB^2 - CD^2}{2BC \cdot AD}$$

Demonstraţie:



(1):Folosim formula lungimii medianei într-un triunghi oarecare şi obţinem:

$$4EF^2 = 2\left(DE^2 + BE^2\right) - BD^2 =$$
$$= 2\left[\frac{2\left(AD^2 + CD^2\right) - AC^2}{4} + \frac{2\left(AB^2 + BC^2\right) - AC^2}{4}\right] - BD^2 =$$
$$= AD^2 + CD^2 - \frac{AC^2}{2} + AB^2 + BC^2 - \frac{AC^2}{2} - BD^2 =$$
$$= AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 - AC^2 - BD^2$$

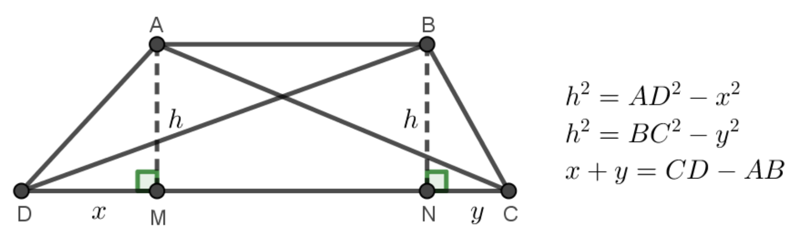
(2) și (3):

Cazul 1. $(\alpha \neq 0; \beta \neq 0)$

Aplicăm teorema cosinusurilor în triunghiurile *ACM, BDM, ADM , BCM* și adunăm relațiile obținute rezultă imediat (2). În mod similar obținem (3) din triunghiurile *ACN, BDN, ABN* și *CDN.*

Cazul 2. $(\alpha = 0;\ \beta \neq 0\ sau\ \ \alpha \neq 0; \beta = 0)$

În acest caz patrulaterul devine trapez (de exemplu $AB \parallel CD$, adică $\alpha = 0$) și avem de arătat relația $AC^2 + BD^2 - AD^2 - BC^2 = 2AB \cdot CD$, ceea ce rezultă din:



$$AC^2 + BD^2 - AD^2 - BC^2 = (CD - x)^2 + h^2 + (CD - y)^2 + h^2 - AD^2 - BC^2 =$$
$$= CD^2 - 2CD \cdot x + \cancel{x^2} + \cancel{AD^2} - \cancel{x^2} + CD^2 - 2CD \cdot y + \cancel{y^2} + \cancel{BC^2} - \cancel{y^2} - \cancel{AD^2} - \cancel{BC^2} =$$
$$= 2CD^2 - 2CD \cdot (x + y) = 2CD^2 - 2CD \cdot (CD - AB) = 2AB \cdot CD$$

Prin urmare relația (2) sau (3) se transformă în $(2')$ sau $(3')$:

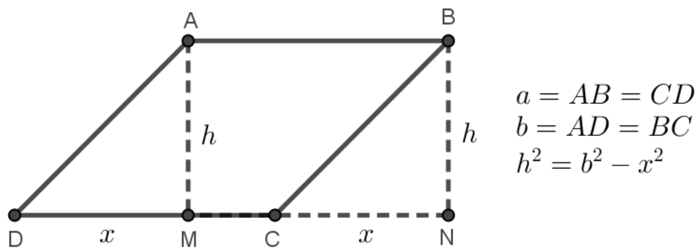
$(2')$ $\qquad AC^2 + BD^2 - AD^2 - BC^2 = 2AB \cdot CD$

$(3')$ $\qquad AC^2 + BD^2 - AB^2 - CD^2 = 2BC \cdot AD$

Cazul 3. $(\alpha = 0; \beta = 0)$

În acest caz patrulaterul devine paralelogram și cu notațiile $a = AB = CD$ și $b = AD = BC$ avem de arătat relația

(4) $\qquad AC^2 + BD^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$, ceea ce rezultă din:



$$AC^2 + BD^2 = (a-x)^2 + h^2 + (a+x)^2 + h^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$$

Prin urmare relația (2) și (3) se transformă în (4).

Rezolvarea problemei:

$(\Rightarrow)$: Având în vedere **Lema**, rezultă că

$$2AB \cdot CD \cdot \cos\alpha + 2BC \cdot AD \cdot \cos\beta \underset{(2),(3)}{=} AC^2 + BD^2 - AD^2 - BC^2 + AC^2 + BD^2 - AB^2 - CD^2 \underset{(1)}{=}$$

$$\underset{(1)}{=} 2\left(AC^2 + BD^2\right) - \left(AC^2 + BD^2 + 4EF^2\right) = AC^2 + BD^2 - 4EF^2 \underset{ipoteză}{=} 2AB \cdot CD + 2BC \cdot AD$$

adică

$$AB \cdot CD \cdot (1 - \cos\alpha) + BC \cdot AD \cdot (1 - \cos\beta) = 0$$

$$\Downarrow (suma\ a\ două\ numere\ pozitive)$$

$$\alpha = \beta = 0$$

$$\Downarrow$$

$$AB \parallel CD,\ \ AD \parallel BC \Rightarrow ABCD\ este\ paralelogram.$$

$(\Leftarrow)$: Dacă *ABCD* este paralelogram avem *EF=0* și din (4) rezultă imediat relația cerută.

7. Prof. Codreanu Ioan-Viorel, Şcoala Cu Cls. I-VIII Satulung Maramureş

Pentru început vom demonstra ca:

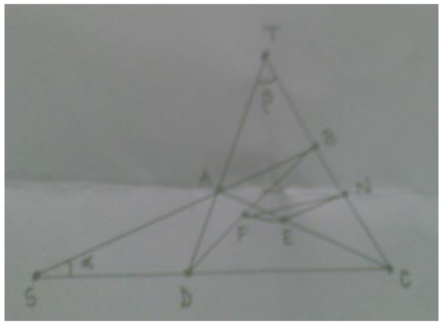
In patratul convex ABCD, unde α,β sunt masurile unghiurilor formate de laturile opuse AB, CD respectiv AD,BC si E, F sunt mijloacele diagonalele AC, BD, se verifica relatiile:

$4EF^2 = a^2 + c^2 – 2ac \cos α = b^2 + d^2 – 2bd \cos β$

unde a = AB , b= BC, c= CD , d = AD

Demonstratie .

Vom demonstra prima relatie (analog se demonstreaza si a doua relatie), luând in consideraţie două cazuri. Fie N mijlocul laturii BC.



Daca AB, CD nu sunt paralele , atunci m($\langle$ ENF) = α (avem NE II AB si NF II DC)
Aplicand teorema cosinusului in Δ ENF avem:

$$EF^2 = NF^2 + NE^2 - 2\,NE\,NF\cos\alpha$$

Cum NE = $\frac{a}{2}$, NF = $\frac{c}{2}$, rezulta.

$$EF^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} - 2\frac{a}{2}\cdot\frac{c}{2}\cos\alpha$$

Sau $4\,EF^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha$

Daca AB II CD , vom arata ca $4\,EF^2 = a^2 + c^2 - 2ac$
Daca AD, BC nu sunt paralele atunci ABCD este trapez si 2EF = $|a - c|$ de unde rezulta

$$4\,EF^2 = a^2 + c^2 - 2ac$$

Daca AD II BC atunci ABCD este paralelogram , deci E = F si a=c iar relatia
$4\,EF^2 = a^2 + c^2 - 2ac$ are loc.

Din egalitatile $4\,EF^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha$ si $4\,EF^2 = b^2 + d^2 - 2bd\cos\beta$

Dupa adunare obtinem

$$8EF^2 = a^2 + c^2 + b^2 + d^2 - 2ac\cos\alpha - 2bd\cos\beta$$

Si folosind relatia lui Euler pentru patrulater : $a^2 + c^2 + b^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4\,EF^2$,
unde e = AC , f= BD, rezulta:

$$4EF^2 = e^2 + f^2 - 2ac\cos\alpha - 2bd\cos\beta$$

Echivalenta cu :

$$ac\cos\alpha + bd\cos\beta + 2EF^2 = \frac{e^2 + f^2}{2} \qquad (*)$$

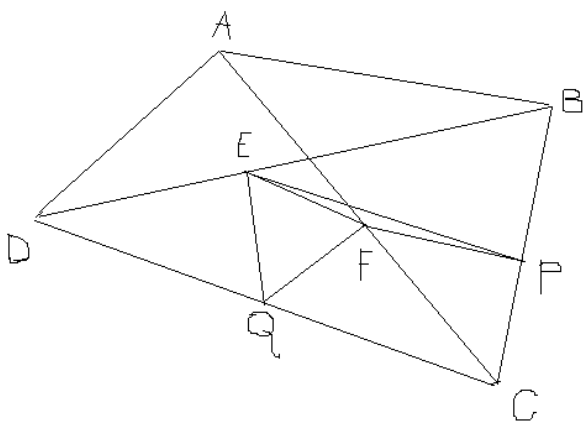
Folosind (*) avem urmatoarea succesiune de echivalente care rezulta problema

$$ac + bd + 2EF^2 = \frac{e^2 + f^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ac(1 - \cos\alpha) + bd(1 - \cos\beta) = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = 1 \text{ si } \cos\beta = 1 \Leftrightarrow AB \text{ II } CD \text{ si } BC \text{ II } AD$$

$\Leftrightarrow$ ABCD este paralelogram.

8. Prof.Oana Cristina Kriszta, Grup Scolar Agricol Scornicesti, Olt



"=>"

Fie P mijlocul lui (BC) si Q mijlocul lui (DC)

EQ si FQ sunt linii mijlocii si EQ=$\frac{AD}{2}$ si FQ=$\frac{BC}{2}$

Aplicam Teorema cosinusului in triunghiurile FEQ si FEP:l

$EF^2 = EQ^2 + FQ^2$-2EQ·FQ·cos Q

$EF^2 = \frac{AD^2}{4} + \frac{BC^2}{4} - \frac{2AD \cdot BC}{4}$·cosQ

4$EF^2 = AD^2 + BC^2$-2AD·BC ·cos Q . Analog , in triunghiul FEP obtinem :

4$EF^2 = AB^2 + DC^2$-2AB·DC ·cos P

Prin insumarea celor doua relatii obtinem:

8 $EF^2 = AD^2 + BC^2 + AB^2 + DC^2$-2AD·BC ·cos Q - 2AB·DC ·cos P (1)

Conform relatiei lui Euler, in orice patrulater convex avem:

$AD^2 + BC^2 + AB^2 + DC^2 = AC^2 + BD^2$+4$EF^2$ (2) dar din enuntul problemei avem:

AB·DC+AD·BC+2$EF^2 = \frac{AC^2 + BD^2}{2}$

2 AB·DC+2 AD·BC+4$EF^2 = AC^2 + BD^2$

2 AB·DC+2 AD·BC+8 $EF^2 = AC^2 + BD^2$+4EF^2 (3)

Din relatiile (2) si (3) avem:

$AD^2 + BC^2 + AB^2 + DC^2$=2 AB·DC+2 AD·BC+8 EF^2

$AD^2 + BC^2$-2 AD·BC+ $AB^2 + DC^2$-2 AB·DC=8 EF^2 (4)

Din relatiile (1) si (4) avem :

AD^2+BC^2 -2 AD·BC+ AB^2+DC^2 -2 AB·DC= $AD^2+BC^2+AB^2+DC^2$ -2AD·BC ·cos Q -2AB·DC ·cos P

Adica : 2 AD·BC+2 AB·DC-2AD·BC ·cos Q-2AB·DC ·cos P=0

2 AD·BC(1- cos Q)+ 2 AB·DC(1- cos P)=0

Cum AD , BC , AB , DC sunt lungimi de laturi si sunt strict pozitive ,iar 1- cos Q si 1- cos P sunt totdeauna pozitive,suma este nula doar daca fiecare termen al sumei este nul.

Adica daca :

1- cos Q =0 si

1- cos P=0

Obtinem : cos Q=1 si cos P=1 => masurile unghiurilor sunt de zero grade (pentru ca este patrulater convex) ceea ce inseamna ca E=F =>diagonalele se injumatatesc=>ABCD paralelogram.

“<=”

Stim ca: AB·DC+AD·BC+2 $EF^2=\frac{AC^2+BD^2}{2}$

Adica: 2 AB·DC+2 AD·BC+4 $EF^2=AC^2+BD^2$

AB·DC+AD·BC+ AB·DC+AD·BC+4 $EF^2=AC^2+BD^2$

Cum ABCD paralelogram (AB=DC,AD=BC, EF=0) , relatia devine :

$AB^2+AD^2+DC^2+BC^2=AC^2+BD^2$ - adevarat pentru ca reprezinta relatia lui EULER in paralelogramul ABCD (EF=0)

3. THE NUMBERS of FIBONACCI and LUCAS - IDENTITIES - PROOFS WITH FEW WORDS – (IV)

By Dumitru M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania
and Neculai Stanciu, Buzău, Romania

Fibonacci

(1175 -1240)

François-Édouard-Anatole Lucas

(1842 – 1891)

$$F_0 = 0, F_1 = 1,$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbf{N} \qquad \text{(F)}$$

$$L_0=2, L_1=1,$$
$$L_{n+2}=L_{n+1}+L_n, \forall n\in\mathbf{N} \qquad \text{(L)}$$
$$r^2-r-1=0,$$
$$r_1=\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, r_2=\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

$(x_n)_{n\geq 0}$, **Fibonacci-Lucas**' s sequence

$$x_n=A\alpha^n+B\beta^n, \ \forall n\in\mathbf{N},$$

If $x_0=0=F_0, x_1=1=F_1$, then $A=\frac{1}{\sqrt{5}}, B=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ so:

$$F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n-\beta^n\right), \ \forall n\in\mathbf{N} \ (\textbf{Binet}, 1843),$$

If $x_0=2=L_0, x_1=1=L_1$, then $A=B=1$, so

$$L_n=\alpha^n+\beta^n, \ \forall n\in\mathbf{N}.$$

Note that:

$$\alpha+\beta=1 \text{ and } \alpha\beta=-1,$$

*

* *

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, \ f(x)=\sum_{k=1}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}-1=\frac{1}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{1-x}-1,$$

$$f'(x)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}, x\in(-\infty,+\infty)-\{1\}\\ \frac{n(n+1)}{2}, x=1\end{cases}$$

$$xf'(x)=\sum_{k=1}^{n}kx^k, \forall x\in\mathbf{R}-\{1\}.$$

1.1 bis. $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1,\ \forall n \in \mathbf{N}^*$ (**Lucas**, 1876).

Proof. $\frac{1}{\sqrt{5}} f(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{5}} f(\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{n} \alpha^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{n} \beta^k = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{n} (\alpha^k - \beta^k) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} - 1 - \frac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta} + 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{\beta} - \frac{1-\beta^{n+1}}{\alpha} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\alpha - \alpha^{n+2} - \beta + \beta^{n+2}}{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}) - \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha - \beta) = F_{n+2} - F_1 = F_{n+2} - 1.$$

1.2 bis. $\sum_{k=1}^{n} L_k = L_{n+2} - 3,\ \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Proof. $f(\alpha) + f(\beta) = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k + \sum_{k=1}^{n} \beta^k = \sum_{k=1}^{n} L_k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} - 1 + \frac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta} - 1 =$

$$= \frac{1-\alpha^{n+1}}{\beta} + \frac{1-\beta^{n+1}}{\alpha} - 2 = \frac{\alpha + \beta - \alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha\beta} - 2 = L_{n+2} - 3.$$

1.93 bis. $\sum_{k=1}^{n} kF_k = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2,\ \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Proof. $xf'(x) - yf'(y) = x\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} - y\sum_{k=1}^{n} ky^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} kx^k - \sum_{k=1}^{n} ky^k =$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(x^k - y^k),\ \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{n} k(x^k - y^k) = \frac{x}{\sqrt{5}} f'(x) - \frac{y}{\sqrt{5}} f'(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} kF_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \alpha f'(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{5}} \beta f'(\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\alpha - (n+1)\alpha^{n+1} + n\alpha^{n+2}}{(1-\alpha)^2} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\beta - (n+1)\beta^{n+1} + n\beta^{n+2}}{(1-\beta)^2} = \frac{\alpha - (n+1)\alpha^{n+1} + n\alpha^{n+2}}{\sqrt{5}\beta^2} - \frac{\beta - (n+1)\beta^{n+1} + n\beta^{n+2}}{\sqrt{5}\alpha^2} =$$

$$= \frac{\alpha^3 - (n+1)\alpha^{n+3} + n\alpha^{n+4} - \beta^3 + (n+1)\beta^{n+3} - n\beta^{n+4}}{\sqrt{5}(\alpha\beta)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^3 - \beta^3) - \frac{n+1}{\sqrt{5}} (\alpha^{n+3} - \beta^{n+3}) + \frac{n}{\sqrt{5}} (\alpha^{n+4} - \beta^{n+4}) =$$

$$= F_3 - (n+1)F_{n+3} + nF_{n+4} = n(F_{n+4} - F_{n+3}) - F_{n+3} + F_3 =$$

$$= nF_{n+2} - F_{n+3} + 2 = nF_{n+2} - (F_{n+4} - F_{n+2}) + 2 = (n+1)F_{n+2} - F_{n+4} + 2.$$

1.94 bis. $\sum_{k=1}^{n} kL_k = nL_{n+2} - L_{n+3} + 4,\ \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Proof. $xf'(x)+yf'(y)=x\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}+y\sum_{k=1}^{n}ky^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}kx^{k}+\sum_{k=1}^{n}ky^{k}=$

$$=\sum_{k=1}^{n}k(x^k+y^k),\ \alpha f'(\alpha)+\beta f'(\beta)=\sum_{k=1}^{n}k(\alpha^k+\beta^k)=\sum_{k=1}^{n}kL_k\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}kL_k=\alpha f'(\alpha)+\beta f'(\beta)=\alpha\cdot\frac{1-(n+1)\alpha^n+n\alpha^{n+1}}{(1-\alpha)^2}+$$

$$+\beta\cdot\frac{1-(n+1)\beta^n+n\beta^{n+1}}{(1-\beta)^2}=\frac{\alpha}{\beta^2}\left(1-(n+1)\alpha^n+n\alpha^{n+1}\right)+\frac{\beta}{\alpha^2}\left(1-(n+1)\beta^n+n\beta^{n+1}\right)=$$

$$=\frac{\alpha^3-(n+1)\alpha^{n+3}+n\alpha^{n+4}+\beta^3-(n+1)\beta^{n+3}+n\beta^{n+4}}{(\alpha\beta)^2}=$$

$$=\alpha^3+\beta^3-(n+1)(\alpha^{n+3}+\beta^{n+3})+n(\alpha^{n+4}+\beta^{n+4})=$$

$$=L_3-(n+1)L_{n+3}+nL_{n+4}=4-L_{n+3}+n(L_{n+4}-L_{n+3})=nL_{n+2}-L_{n+3}+4.$$

* *

*

*

* *

$$Q=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},Q^2=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix},Q^3=\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix},Q^4=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}.$$

Theorem. $Q^n=\begin{pmatrix}F_{n+1}&F_n\\F_n&F_{n-1}\end{pmatrix},\ \forall n\in\mathbf{N}^*$.

Proof. Yields by mathematical induction

$$Q^{n+1}=Q^n\cdot Q=\begin{pmatrix}F_{n+1}&F_n\\F_n&F_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_{n+1}+F_n&F_{n+1}\\F_{n+1}&F_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_{n+2}&F_{n+1}\\F_{n+1}&F_n\end{pmatrix},$$

Theorem. $F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n,\ \forall n\in\mathbf{N}^*$.

Proof. $\det Q = -1 \Rightarrow \det Q^n = (-1)^n$, but:

$\det Q^n = \det\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} = F_{n+1}F_n - F_n^2$, yields the conclusion.

Theorem. $F_{m+n+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n, \ \forall m,n \in \mathbf{N}^*$ (i)

$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}, \ \forall m,n \in \mathbf{N}^*$ (ii)

$F_{m+n} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n, \forall m,n \in \mathbf{N}^*$ (j)

$F_{m+n-1} = F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1}, \forall m,n \in \mathbf{N}^*$ (jj)

Proof.

$$Q^{m+n} = Q^m \cdot Q^n = \begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n & F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1} \\ F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n & F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{pmatrix}.$$

- If in (i) we take $m = n$, then:

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2, \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

- If in (ii) and (j) we take $m = n$, then:

$$F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}), \ \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

- If in (jj) we take $m = n$, then:

$$F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2, \ \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

1.109. $F_{m+1}L_{n+1} + F_mL_n = L_{m+n+1}, \forall m,n \in \mathbf{N}^*$.

Proof. In (i) we take $n+1$ instead of n:

$$F_{m+n+2} = F_{m+1}F_{n+2} + F_mF_{n+1}, \ \forall m,n \in \mathbf{N}^* \quad (1)$$

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}, \ \forall m,n \in \mathbf{N}^* \quad (ii)$$

Adding (1) with (ii) yields:

$F_{m+n} + F_{m+n+2} = F_{m+1}(F_n + F_{n+2}) + F_m(F_{n+1} + F_{n-1}), \ \forall m,n \in \mathbf{N}^*$, so by **1.15** we get:

$$L_{m+n+1} = F_{m+1}L_{n+1} + F_mL_n, \ \forall m,n \in \mathbf{N}^*.$$

1.110. $F_{m+1}L_n + F_mL_{n-1} = L_{m+n}, \forall m,n \in \mathbf{N}^*$.

Proof. In **1.109** we take $n-1$ instead of n.

1.111. $F_mL_n + F_nL_m = 2F_{m+n}, \forall m,n \in \mathbf{N}^*$.

Proof. Adding (ii) with (j) we obtain:

$2F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1} + F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n = F_m(F_{n-1} + F_{n+1}) + F_n(F_{m+1} + F_{m-1})$, then taking account by **1.15**.

1.112. $L_mL_n + 5F_mF_n = 2L_{m+n}$, $\forall m,n \in \mathbf{N}^*$.

Proof. $L_mL_n + 5F_mF_n = (\alpha^m + \beta^m)(\alpha^n + \beta^n) + (\alpha^m - \beta^m)(\alpha^n - \beta^n) =$

$$= \alpha^{m+n} + \alpha^m\beta^n + \alpha^n\beta^m + \beta^{m+n} + \alpha^{m+n} - \alpha^m\beta^n - \alpha^n\beta^m + \beta^{m+n} =$$

$$= 2(\alpha^{m+n} + \beta^{m+n}) = 2L_{m+n}.$$

$$\det(Q^n - xI_2) = \begin{vmatrix} F_{n+1} - x & F_n \\ F_n & F_{n-1} - x \end{vmatrix} = (F_{n+1} - x)(F_{n-1} - x) - F_n^2 =$$

$$= x^2 - (F_{n+1} + F_{n-1})x + F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = x^2 - \frac{1}{5}(\alpha^{n+1} + \alpha^{n-1} - \beta^{n+1} - \beta^{n-1})x +$$

$$+ F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = x^2 - L_nx + (-1)^n = 0,$$ with the roots:

$$x_1 = \frac{L_n + \sqrt{L_n^2 - 4(-1)^n}}{2},\ x_2 = \frac{L_n - \sqrt{L_n^2 - 4(-1)^n}}{2},\ x_1 = \frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2} = \alpha^n,\ \ x_2 = \frac{L_n - \sqrt{5}F_n}{2} = \beta^n.$$

So:

$x^2 - L_1x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ and then $Q^2 - Q - I_2 = 0 \Leftrightarrow Q(Q - I_2) = I_2$.

So $(Q - I_2)^{-1} = Q$.

We have:

$$(I_2 + Q + Q^2 + ... + Q^n)(Q - I_2) =$$

$$= Q + Q^2 + Q^3 + ... + Q^n + Q^{n+1} - I_2 - Q - Q^2 - ... - Q^n = Q^{n+1} - I_2$$

$$(I_2 + Q + Q^2 + ... + Q^n)(Q - I_2)Q = (Q^{n+1} - I_2)Q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I_2 + Q + Q^2 + ... + Q^n = Q^{n+2} - Q.$$

Therefore:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+3} & F_{n+2} \\ F_{n+2} & F_{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 + F_2 + F_3 + ... + F_{n+1} & F_1 + F_2 + ... + F_n \\ F_1 + F_2 + ... + F_n & 1 + F_1 + F_2 + ... + F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+3} - 1 & F_{n+2} - 1 \\ F_{n+2} - 1 & F_{n+1} \end{pmatrix},$$ so:

$F_1 + F_2 + ... + F_{n+1} = F_{n+3} - 1,\ F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1,\ F_1 + F_2 + ... + F_{n-1} = F_{n+1} - 1,$

$$\frac{1}{F_{n-1}}Q^n = \begin{pmatrix} \frac{F_{n+1}}{F_{n-1}} & \frac{F_n}{F_{n-1}} \\ \frac{F_n}{F_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_{n+1}}{F_n} \cdot \frac{F_n}{F_{n-1}} & \frac{F_n}{F_{n-1}} \\ \frac{F_n}{F_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{F_{n-1}}Q^n\right) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} \cdot \frac{F_n}{F_{n-1}} & \lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}} \\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

1.113. $F_n^2 = 2F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - F_{n-3}^2, \forall n \geq 3$.

Proof. $F_n^2 = (F_{n-1} + F_{n-2})^2 = F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2 + 2F_{n-1}F_{n-2} =$

$$= 2F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - (F_{n-1} - F_{n-2})^2 = 2F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - F_{n-3}^2.$$

*

* *

CATALAN – FIBONACCI POLINOAMYALS

$$f_{n+2}(x) = xf_{n+1}(x) + f_n(x), \forall x \in \mathbf{R}, \ \forall n \in \mathbf{N}, f_0(x) = 0,$$
$$f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2 + 1, f_4(x) = x^3 + 2x, f_5(x) = x^4 + 3x^2 + 1, f_0(x) = 0.$$

$$t^2 - xt - 1 = 0,$$
$$t_1 = \alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}, t_2 = \beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2} \text{ , so } f_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}.$$

Theorem. $x\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_{n+1}(x) + f_n(x) - 1, \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}.$

Proof. $f_{n+2}(x) = xf_{n+1}(x) + f_n(x), \forall x \in \mathbf{R}, \ \forall n \in \mathbf{N}$ so:

$$\sum_{k=0}^{n} f_{k+2}(x) = x\sum_{k=0}^{n} f_{k+1}(x) + \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} f_{k+2}(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = x\sum_{k=0}^{n} f_{k+1}(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} xf_{k+1}(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) - f_1(x) - f_0(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\sum_{k=0}^{n} f_{k+1}(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) - 1, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Let $Q(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2(x) & f_1(x) \\ f_1(x) & f_0(x) \end{pmatrix}$. By mathematical induction easily yields that:

$$Q^n(x)=\begin{pmatrix} f_{n+1}(x) & f_n(x) \\ f_n(x) & f_{n-1}(x)\end{pmatrix},\ \forall n\in\mathbf{N}^*.$$

$$\det Q(x)=\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1 \text{ so } \det Q^n(x)=(\det Q(x))^n=(-1)^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} f_{n+1}(x) & f_n(x) \\ f_n(x) & f_{n-1}(x)\end{vmatrix}=(-1)^n \Leftrightarrow f_{n+1}f_{n-1}-f_n^2(x)=(-1)^n,\ \forall n\in\mathbf{N}^*.$$

For $x=1$ we obtain $F_{n+1}F_{n-1}=F_n^2+(-1)^n,\ \forall n\in\mathbf{N}^*$.

$$Q^{m+n}(x)=Q^m(x)Q^n(x),\ \forall m,n\in\mathbf{N}^*,\forall x\in\mathbf{R}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} f_{m+n+1}(x) & f_{m+n}(x) \\ f_{m+n}(x) & f_{m+n-1}(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_{m+1}(x) & f_m(x) \\ f_m(x) & f_{m-1}(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{n+1}(x) & f_n(x) \\ f_n(x) & f_{n-1}(x)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} f_{m+1}(x)f_{n+1}(x)+f_m(x)f_n(x) & f_{m+1}(x)f_n(x)+f_m(x)f_{n-1}(x) \\ f_m(x)f_{n+1}(x)+f_{m-1}(x)f_n(x) & f_m(x)f_n(x)+f_{m-1}(x)f_{n-1}(x)\end{pmatrix},$$

so:

$$f_{m+n+1}(x)=f_{m+1}(x)f_{n+1}(x)+f_m(x)f_n(x),\ \forall m,n\in\mathbf{N},\forall x\in\mathbf{R} \qquad (*)$$

$$f_{m+n}(x)=f_{m+1}(x)f_n(x)+f_m(x)f_{n-1}(x),\ \forall m,n\in\mathbf{N}^*,\forall x\in\mathbf{R} \qquad (**)$$

$$f_{m+n}(x)=f_m(x)f_{n+1}(x)+f_{m-1}(x)f_n(x),\ \forall m,n\in\mathbf{N}^*,\forall x\in\mathbf{R} \qquad (***)$$

$$f_{m+n-1}(x)=f_m(x)f_n(x)+f_{m-1}(x)f_{n-1}(x),\ \forall m,n\in\mathbf{N}^*,\forall x\in\mathbf{R} \qquad (****)$$

Theorem. $f_{m+n+1}(x)=f_{m+1}(x)f_{n+1}(x)+f_m(x)f_n(x),\ \forall m,n\in\mathbf{N}^*,\forall x\in\mathbf{R}$.

Proof. $f_n(x)=\dfrac{\alpha^n(x)-\beta^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}$, where $\alpha(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2},\ \beta(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$.

The result yields by

$$Q^{m+n}(x)=Q^m(x)Q^n(x),\ \forall m,n\in\mathbf{N}^*,\forall x\in\mathbf{R}.$$

Other proof:

$$f_{m+n+1}(x)=f_{m+1}(x)f_{n+1}(x)+f_m(x)f_n(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha^{m+n+1}(x)-\beta^{m+n+1}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}=\frac{\alpha^{m+1}(x)-\beta^{m+1}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\cdot\frac{\alpha^{n+1}(x)-\beta^{n+1}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}+$$

$$+\frac{\alpha^{m}(x)-\beta^{m}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\cdot\frac{\alpha^{n}(x)-\beta^{n}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\Leftrightarrow(\alpha(x)-\beta(x))\left(\alpha^{m+n+1}(x)-\beta^{m+n+1}(x)\right)=$$

$$=\alpha^{m+n+2}(x)-\alpha^{m+1}(x)\beta^{n+1}(x)-\alpha^{n+1}(x)\beta^{m+1}(x)+\beta^{m+n+2}(x)+\alpha^{m+n}(x)-$$

$$-\alpha^m(x)\beta^n(x)-\alpha^n(x)\beta^m(x)+\beta^{m+n}(x)=$$

$$=\alpha^{m+n+1}(x)\left(\alpha(x)+(\alpha(x))^{-1}\right)+\beta^{m+n+1}(x)\left(\beta(x)+(\beta(x))^{-1}\right).$$

Note that:

$$\alpha(x)-\beta(x)=\sqrt{x^2+4},\alpha(x)\beta(x)=-1,\alpha(x)+\beta(x)=x,$$

$$\alpha(x)+(\alpha(x))^{-1}=\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}+\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}=\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}+\frac{2(x-\sqrt{x^2+4})}{x^2-x^2-4}=$$
$$=\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}-\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}=\sqrt{x^2+4},$$
$$\beta(x)+(\beta(x))^{-1}=\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}+\frac{2}{x-\sqrt{x^2+4}}=\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}+\frac{2(x+\sqrt{x^2+4})}{x^2-x^2-4}=$$
$$=\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}-\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}=-\sqrt{x^2+4},\forall x\in\mathbf{R}.$$

So:

$$f_{m+n+1}(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left(\alpha^{m+n+1}(x)(\alpha(x)+(\alpha(x))^{-1})+\beta^{m+n+1}(x)(\beta(x)+(\beta(x))^{-1})\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f_{m+n+1}(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left(\alpha^{m+n+1}(x)\sqrt{x^2+4}-\beta^{m+n+1}(x)\sqrt{x^2+4}\right)=$$
$$=\alpha^{m+n+1}(x)-\beta^{m+n+1}(x)$$, and we are done.

*   *

*

*

*　　　*

LUCAS POLINOAMYALS

$$l_{n+2}(x) = xl_{n+1}(x) + l_n(x),\ \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}$$
$$l_0(x) = 2, l_1(x) = x, l_2(x) = x^2 + 2, l_3(x) = x^3 + 3x, l_4(x) = x^4 + 4x + 2,$$
$$l_5(x) = x^5 + 5x^3 + 5x, l_6(x) = x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2 .$$

$$t^2 - xt - 1 = 0 ,$$
$$\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2},\ \beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2} .$$
$$\alpha(1) = \alpha, \beta(1) = \beta, \alpha(2) = 1 + \sqrt{2}, \beta(2) = 1 - \sqrt{2}$$
$$f_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)},\ l_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x) .$$

1.114. $l_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x),\ \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}.$

Proof. $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = \dfrac{\alpha^{n+1}(x) - \beta^{n+1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} + \dfrac{\alpha^{n-1}(x) - \beta^{n-1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}\left(\alpha^n(x)(\alpha(x) + (\alpha(x))^{-1}) - \beta^n(x)(\beta(x) + (\beta(x))^{-1})\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}(\alpha^n(x)\sqrt{x^2 + 4} + \beta^n(x)\sqrt{x^2 + 4}) = \alpha^n(x) + \beta^n(x) = l_n(x) .$$

1.115. $l_n(x) = xf_n(x) + 2f_{n-1}(x),\ \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}.$

Proof. $xf_n(x) + 2f_{n-1}(x) = x \cdot \dfrac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} + 2 \cdot \dfrac{\alpha^{n-1}(x) - \beta^{n-1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}(x\alpha^n(x) - x\beta^n(x) + 2\alpha^{n-1}(x) - 2\beta^{n-1}(x)) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left(\alpha^n(x)(x + 2(\alpha(x))^{-1}) - \beta^n(x)(x + 2(\beta(x))^{-1})\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left(\alpha^n(x)\left(x + \frac{4}{x+\sqrt{x^2+4}}\right) - \beta^n(x)\left(x + \frac{4}{x-\sqrt{x^2+4}}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left(\alpha^n(x)\left(x + \frac{4(x-\sqrt{x^2+4})}{x^2-x^2-4}\right) - \beta^n(x)\left(x + \frac{4(x+\sqrt{x^2+4})}{x^2-x^2-4}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left(\alpha^n(x)\left(x - x + \sqrt{x^2+4}\right) - \beta^n(x)\left(x - x - \sqrt{x^2+4}\right)\right) =$$
$$= \alpha^n(x) + \beta^n(x) = l_n(x).$$

1.116. $xl_n(x) = f_{n+2}(x) - f_{n-2}(x),\ \forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}, \forall x \in \mathbf{R}.$

Proof. $f_{n+2}(x) - f_{n-2}(x) = \frac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}(\alpha^{n+2}(x) - \beta^{n+2}(x) - \alpha^{n-1}(x) + \beta^{n-1}(x) =$

$$= \frac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}(\alpha^n(x)(\alpha^2(x) - \alpha^{-2}(x)) - \beta^n(x)(\beta^2(x) - \beta^{-2}(x))) =$$
$$= \frac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}(\alpha^n(x)(\alpha^2(x) - \beta^2(x)) - \beta^n(x)(\beta^2(x) - \alpha^2(x))) =$$
$$= \left(\alpha(x) + \beta(x)\right)\left(\alpha^n(x) + \beta^n(x)\right) = xl_n(x).$$

*　　*

*

*

*　　*

OTHER RECURENT POLINOAMYALS

$$g_n(x) = xg_{n-1}(x) - g_{n-2}(x),\ \forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}, \forall x \in \mathbf{R}$$

$$g_0(x) = 0, g_1(x) = 1.$$

$$h_n(x) = xh_{n-1}(x) - h_{n-2}(x),\ \forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}, \forall x \in \mathbf{R}$$

$$h_0(x) = 2, h_1(x) = x.$$

$$t^2 - xt + 1 = 0,$$

$$\gamma(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}, \delta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2},$$

$$\gamma(\sqrt{5}) = \alpha, \delta(\sqrt{5}) = -\beta.$$

$$g_n(x) = \frac{\gamma^n(x) - \delta^n(x)}{\gamma(x) - \delta(x)}, h_n(x) = \gamma^n(x) + \delta^n(x).$$

1.117. $h_n^2(x) - (x^2 - 4)g_n^2(x) = 4,\ \forall n \in \mathbf{N}.$

Proof. $h_n^2(x) - (x^2 - 4)g_n^2(x) = \left(\gamma^n(x) + \delta^n(x)\right)^2 - (x^2 - 4)\dfrac{\left(\gamma^n(x) - \delta^n(x)\right)^2}{\left(\gamma(x) - \delta(x)\right)^2} =$

$$= \gamma^{2n}(x) + \delta^{2n}(x) + 2\left(\gamma(x)\delta(x)\right)^n - (x^2 - 4)\cdot\frac{\gamma^2(x) + \delta^2(x) - 2\left(\gamma(x)\delta(x)\right)^n}{\left(\sqrt{x^2 - 4}\right)^2} =$$

$$= \gamma^{2n}(x) + \delta^{2n}(x) + 2 - \gamma^{2n}(x) - \delta^{2n}(x) + 2 = 4.$$

1.118. $l_n^2(x) - (x^2 + 4)f_n^2(x) = 4(-1)^n,\ \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Proof. $l_n^2(x) - (x^2 + 4)f_n^2(x) = \left(\alpha^n(x) + \beta^n(x)\right)^2 -$

$$-\frac{x^2 + 4}{\left(\alpha(x) - \beta(x)\right)^2}\left(\alpha^n(x) - \beta^n(x)\right)^2 = \alpha^{2n}(x) + \beta^{2n}(x) + 2\left(\alpha(x)\beta(x)\right)^n -$$

$$-\frac{x^2 + 4}{x^2 + 4}\left(\alpha^{2n}(x) + \beta^{2n}(x) - 2(\alpha(x)\beta(x))^n\right) = 4\left(\alpha(x)\beta(x)\right)^n = 4(-1)^n.$$

1.119. $f_n^2(x)+f_{n+1}^2(x)=f_{2n+1}(x),\ \forall n\in\mathbf{N}^*$ (**Koshy**, 1999).

Proof. $f_n^2(x)+f_{n+1}^2(x)=\dfrac{1}{(\alpha(x)-\beta(x))^2}\left(\left(\alpha^n(x)-\beta^n(x)\right)^2+\left(\alpha^{n+1}(x)-\beta^{n+1}(x)\right)^2\right)=$

$$=\frac{1}{x^2+4}\left(\alpha^{2n}(x)+\beta^{2n}(x)-2(\alpha(x)\beta(x))^n+\alpha^{2n+2}(x)+\beta^{2n+2}(x)-2(\alpha(x)\beta(x))^{n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{x^2+4}\left(\alpha^{2n+1}(x)\left((\alpha(x))^{-1}+\alpha(x)\right)+\beta^{2n+1}(x)\left((\beta(x))^{-1}+\beta(x)\right)\right)-$$

$$-\frac{2}{x^2+4}(\alpha(x)\beta(x))^n\left(1+\alpha(x)\beta(x)\right)=\frac{1}{x^2+4}(\alpha^{2n+1}(x)(\alpha(x)-\beta(x))+$$

$$+\beta^{2n+1}(x)(-\alpha(x)+\beta(x)))=\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{x^2+4}(\alpha^{2n+1}(x)-\beta^{2n+1}(x))=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}(\alpha^{2n+1}(x)-\beta^{2n+1}(x))=\frac{\alpha^{2n+1}(x)-\beta^{2n+1}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}=f_{2n+1}(x).$$

1.120. $f_m(x)l_n(x)+f_n(x)l_m(x)=2f_{m+n}(x),\ \forall m,n\in\mathbf{N}$ (**Koshy**, 1999).

Proof. $f_m(x)l_n(x)+f_n(x)l_m(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}(\alpha^m(x)-\beta^m(x))(\alpha^n(x)+\beta^n(x))+$

$$+\frac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}(\alpha^n(x)-\beta^n(x))(\alpha^m(x)+\beta^m(x))=\frac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}(\alpha^{m+n}(x)-$$

$$-\alpha^n(x)\beta^m(x)+\alpha^m(x)\beta^n(x)-\beta^{m+n}(x)+\alpha^{m+n}(x)+\alpha^n(x)\beta^m(x)-\alpha^m(x)\beta^n(x)-$$

$$-\beta^{m+n}(x))=\frac{2}{\alpha(x)-\beta(x)}\left(\alpha^{m+n}(x)-\beta^{m+n}(x)\right)=2f_{m+n}(x).$$

1.121. $l_n(x)+\sqrt{x^2+4}\cdot f_n(x)=2\alpha^n(x),\ \forall n\in\mathbf{N}$.

Proof. $l_n(x)+\sqrt{x^2+4}f_n(x)=\alpha^n(x)+\beta^n(x)+\sqrt{x^2+4}\cdot\dfrac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}(\alpha^n(x)-\beta^n(x))=$

$=\alpha^n(x)+\beta^n(x)+\alpha^n(x)-\beta^n(x)=2\alpha^n(x)$.

1.122. $l_n(x)-\sqrt{x^2+4}\cdot f_n(x)=2\beta^n(x),\ \forall n\in\mathbf{N}$.

Proof. $l_n(x)-\sqrt{x^2+4}f_n(x)=\alpha^n(x)+\beta^n(x)-\sqrt{x^2+4}\cdot\dfrac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}(\alpha^n(x)-\beta^n(x))=$

$$=\alpha^n(x)+\beta^n(x)-\alpha^n(x)+\beta^n(x)=2\beta^n(x).$$

1.123. $l_{n+1}(x)l_{n-1}(x)-l_n^2(x)=(-1)^{n-1}(x^2+4),\ \forall n\in\mathbf{N}^*$ (**Koshy**, 1999).

Proof. $l_{n+1}(x)l_{n-1}(x)-l_n^2(x)=(\alpha^{n+1}(x)+\beta^{n+1}(x))(\alpha^{n-1}(x)+\beta^{n-1}(x))-$
$-(\alpha^n(x)+\beta^n(x))^2=\alpha^{2n}(x)+\alpha^{n+1}(x)\beta^{n-1}(x)+\alpha^{n-1}(x)\beta^{n+1}(x)+\beta^{2n}(x)-\alpha^{2n}(x)-$
$-\beta^{2n}(x)-2(\alpha(x)\beta(x))^n=(\alpha(x)\beta(x))^{n-1}(\alpha^2(x)+\beta^2(x)-2\alpha(x)\beta(x))=$

$$=(-1)^{n-1}(\alpha^2(x)+\beta^2(x)-2\alpha(x)\beta(x))=(-1)^{n-1}(\alpha(x)-\beta(x))^2=$$

$$=(-1)^{n-1}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}-\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^2=(-1)^{n-1}(x^2+4).$$

1.124. $l_{n+1}^2(x)+l_n^2(x)=(x^2+4)f_{2n+1}(x),\ \forall n\in\mathbf{N}$ (**Koshy**, 1999).

Proof. $l_{n+1}^2(x)+l_n^2(x)=(\alpha^{n+1}(x)+\beta^{n+1}(x))^2+(\alpha^n(x)+\beta^n(x))^2=$

$$=\alpha^{2n+2}(x)+\beta^{2n+2}(x)+2(\alpha(x)\beta(x))^{n+1}+\alpha^{2n}(x)+\beta^{2n}(x)+2(\alpha(x)\beta(x))^n=$$

$$=\alpha^{2n+1}(x)(\alpha(x)+(\alpha(x))^{-1})+\beta^{2n+1}(x)(\beta(x)+(\beta(x))^{-1})=$$

$$=(\alpha(x)-\beta(x))(\alpha^{2n+1}(x)-\beta^{2n+1}(x))=$$

$$=(\alpha(x)-\beta(x))^2\cdot\frac{\alpha^{2n+1}(x)-\beta^{2n+1}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}=(x^2+4)f_{2n+1}(x).$$

1.125. $h_n(x)=g_{n+1}(x)-g_{n-1}(x),\ \forall n\in\mathbf{N}^*$.

Proof. $g_{n+1}(x)-g_{n-1}(x)=\dfrac{1}{\gamma(x)-\delta(x)}(\gamma^{n+1}(x)-\delta^{n+1}(x)-\gamma^{n-1}(x)+\delta^{n-1}(x))=$

$$=\frac{1}{\gamma(x)-\delta(x)}(\gamma^n(x)(\gamma(x)-(\gamma(x))^{-1})-\delta^n(x)(\delta(x)-(\delta(x))^{-1}))=$$

$$=\frac{1}{\gamma(x)-\delta(x)}(\gamma^n(x)(\gamma(x)-\delta(x))-\delta^n(x)(\delta(x)-\gamma(x)))=$$

$$=\gamma^n(x)+\delta^n(x)=h_n(x).$$

1.126. $\alpha(l_{2n+1}(x))=\dfrac{l_{2n+1}(x)+\sqrt{x^2+4}\cdot f_{2n+1}(x)}{2}=\alpha^{2n+1}(x),\ \forall n\in\mathbf{N}.$

Proof. $\alpha(l_{2n+1}(x))=\dfrac{l_{2n+1}(x)+\sqrt{l_{2n+1}^2(x)+4}}{2}=$

$$=\frac{1}{2}\left(l_{2n+1}(x)+\sqrt{(\alpha^{2n+1}(x)+\beta^{2n+1}(x))^2+4}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\alpha^{2n+1}(x)+\beta^{2n+1}(x)+\sqrt{\alpha^{4n+2}(x)+\beta^{4n+2}(x)+2(\alpha(x)\beta(x))^{2n+1}+4}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\alpha^{2n+1}(x)+\beta^{2n+1}(x)+\sqrt{\alpha^{4n+2}(x)+\beta^{4n+2}(x)-2(\alpha(x)\beta(x))^{2n+1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\alpha^{2n+1}(x)+\beta^{2n+1}(x)+\sqrt{(\alpha^{2n+1}(x)-\beta^{2n+1}(x))^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\alpha^{2n+1}(x)+\beta^{2n+1}(x)+\alpha^{2n+1}(x)-\beta^{2n+1}(x)\right)=\alpha^{2n+1}(x).$$

$$\alpha(l_{2n+1}(x))=\frac{1}{2}(l_{2n+1}(x)+\alpha^{2n+1}(x)-\beta^{2n+1}(x))=$$

$$=\frac{1}{2}\left(l_{2n+1}(x)+(\alpha(x)-\beta(x))\cdot\frac{\alpha^{2n+1}(x)-\beta^{2n+1}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(l_{2n+1}(x)+\sqrt{x^2+4}\,f_{2n+1}(x)\right).$$

1.127. $\beta(l_{2n+1}(x))=\dfrac{l_{2n+1}(x)-\sqrt{x^2+4}\cdot f_{2n+1}(x)}{2}=\beta^{2n+1}(x),\ \forall n\in\mathbf{N}.$

Proof. $\beta(l_{2n+1}(x))=\dfrac{l_{2n+1}(x)-\sqrt{l_{2n+1}^2(x)+4}}{2}=$

$$=\frac{1}{2}\left(l_{2n+1}(x)-\sqrt{(\alpha^{2n+1}(x)-\beta^{2n+1}(x))^2+4}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(l_{2n+1}(x)-\sqrt{\alpha^{4n+2}(x)+\beta^{4n+2}(x)+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(l_{2n+1}(x)-\sqrt{\alpha^{4n+2}(x)+\beta^{4n+2}(x)-2(\alpha(x)\beta(x))^{2n+1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(l_{2n+1}(x)-(\alpha^{2n+1}(x)-\beta^{2n+1}(x))\right)=\beta^{2n+1}(x).$$

$$\beta(l_{2n+1}(x))=\frac{1}{2}(l_{2n+1}(x)-(\alpha^{2n+1}(x)-\beta^{2n+1}(x)))=$$

$$=\frac{1}{2}\left(l_{2n+1}(x)-(\alpha(x)-\beta(x))\cdot\frac{\alpha^{2n+1}(x)-\beta^{2n+1}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(l_{2n+1}(x)-\sqrt{x^2+4}\,f_{2n+1}(x)\right).$$

1.128. $f_n(l_{2m+1}(x))=\dfrac{f_{(2m+1)n}(x)}{f_{2m+1}(x)},\ \forall m\in\mathbf{N},\ \forall n\in\mathbf{N}^*.$

Proof. $f_n(l_{2m+1}(x))=\dfrac{\alpha^n(l_{2m+1}(x))-\beta^n(l_{2m+1}(x))}{\alpha(l_{2m+1}(x))-\beta(l_{2m+1}(x))}=$

$$=\frac{\alpha^{(2m+1)n}(x)-\beta^{(2m+1)n}(x)}{\alpha^{2m+1}(x)-\beta^{2m+1}(x)}=\frac{f_{(2m+1)n}(x)}{f_{2m+1}(x)}.$$

1.129. $l_{2n}^2(x)-4=(x^2+4)f_{2n}^2(x),\ \forall n\in\mathbf{N}^*.$

Proof. $l_{2n}^2(x)-4=\left(\alpha^{2n}(x)+\beta^{2n}(x)\right)^2-4=\alpha^{4n}(x)+\beta^{4n}(x)+2(\alpha(x)\beta(x))^{2n}-4=$

$$= \alpha^{4n}(x) + \beta^{4n}(x) - 2 = \alpha^{4n}(x) + \beta^{4n}(x) - 2(\alpha(x)\beta(x))^{2n} = (\alpha^{2n}(x) - \beta^{2n}(x))^2 =$$
$$= (\alpha(x) - \beta(x))^2 \cdot \left(\frac{\alpha^{2n}(x) - \beta^{2n}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right)^2 = (x^2 + 4) f_{2n}^2(x).$$

1.130. $\gamma(l_{2n}(x)) = \dfrac{l_{2n}(x) + \sqrt{x^2+4} \cdot f_{2n}(x)}{2} = \alpha^{2n}(x), \ \forall n \in \mathbf{N}.$

Proof. $\gamma(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2-4}}{2}$, so $\gamma(l_{2n}(x)) = \dfrac{1}{2}\left(l_{2n}(x) + \sqrt{l_{2n}^2(x) - 4} \right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(l_{2n}(x) + \sqrt{(\alpha^{2n}(x) + \beta^{2n}(x))^2 - 4} \right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(l_{2n}(x) + \sqrt{\alpha^{4n}(x) + \beta^{4n}(x) - 2(\alpha(x)\beta(x))^{2n}} \right) =$$
$$= \frac{1}{2}(\alpha^{2n}(x) + \beta^{2n}(x) + \alpha^{2n}(x) - \beta^{2n}(x)) = \alpha^{2n}(x) =$$
$$= \frac{1}{2}(l_{2n}(x) + \sqrt{(\alpha^{2n}(x) - \beta^{2n}(x))^2}) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(l_{2n}(x) + (\alpha(x) - \beta(x)) \cdot \frac{\alpha^{2n}(x) - \beta^{2n}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(l_{2n}(x) + \sqrt{x^2+4} f_{2n}(x) \right).$$

1.131. $\delta(l_{2n}(x)) = \dfrac{l_{2n}(x) - \sqrt{x^2+4} \cdot f_{2n}(x)}{2} = \beta^{2n}(x), \ \forall n \in \mathbf{N}.$

Proof. $\delta(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2-4}}{2}$, so $\delta(l_{2n}(x)) = \dfrac{1}{2}\left(l_{2n}(x) - \sqrt{l_{2n}^2(x) - 4} \right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(l_{2n}(x) - \sqrt{(\alpha^{2n}(x) + \beta^{2n}(x))^2 - 4} \right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(l_{2n}(x) - \sqrt{\alpha^{4n}(x) + \beta^{4n}(x) - 2(\alpha(x)\beta(x))^{2n}} \right) =$$
$$= \frac{1}{2}(l_{2n}(x) - \sqrt{(\alpha^{2n}(x) - \beta^{2n}(x))^2}) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(l_{2n}(x) - (\alpha(x) - \beta(x)) \cdot \frac{\alpha^{2n}(x) - \beta^{2n}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(l_{2n}(x) - \sqrt{x^2+4} f_{2n}(x) \right) =$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha^{2n}(x)+\beta^{2n}(x)-\alpha^{2n}(x)+\beta^{2n}(x))=\beta^{2n}(x).$$

1.132. $g_n(l_{2m}(x))=\dfrac{f_{2mn}(x)}{f_{2m}(x)}$, $\forall m\in\mathbf{N}^*, \forall n\in\mathbf{N}.$

Proof. $$g_n(l_{2m}(x))=\frac{\gamma^n(l_{2m}(x))-\delta^n(l_{2m}(x))}{\gamma(l_{2m}(x))-\delta(l_{2m}(x))}=\frac{\alpha^{2mn}(x)-\beta^{2mn}(x)}{\alpha^{2m}(x)-\beta^{2m}(x)}=$$
$$=\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha^{2m}(x)-\beta^{2m}(x)}\cdot\frac{\alpha^{2mn}(x)-\beta^{2mn}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}=\frac{f_{2mn}(x)}{f_{2m}(x)}.$$

* *

*

4. INEGALITĂŢI OBŢINUTE PRIN INTEGRARE

Sebastian Petrişor Ilinca

Multe inegalităţi elementare pot fi demonstrate simplu folosind această metodă aşa cum arată exemplele următoare:

1) Fie $a,b \geq 1$. Arătaţi că $\frac{b^n - a^n}{n} \leq \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$.

Soluţie: Prima metodă de demonstrare constă în definirea funcţiei

$f(t) = \frac{t^n - a^n}{n} - \frac{t^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$, $\forall t \in [a,b]$. Calculând derivata funcţiei se obţine

$f'(t) = t^{n-1}(1-t) < 0$ deci funcţia f este strict crescătoare şi $f(a) = 0$, deci $f(b) \leq f(a)$.

Mai simplu: $\int_a^b (x^{n-1} - x^n)dx \leq 0, x \geq 1$.

2) Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale fixate astfel încât $a_k > -1, \forall k = \overline{1,n}$. Dacă

$\frac{a_1}{1+a_1x} + \frac{a_2}{1+a_2x} + ... \frac{a_n}{1+a_nx} \leq 1, \forall x \in [0,1]$ arătaţi că $(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) \leq e$.

Soluţie: Prin integrare se obţine:

$$\int_0^1 \left(\frac{a_1}{1+a_1x} + \frac{a_2}{1+a_2x} + ... \frac{a_n}{1+a_nx} \right) \leq \int_0^1 dx \Leftrightarrow \ln(1+a_1x)\Big|_0^1 + \ln(1+a_2x)\Big|_0^1 + ... + \ln(1+a_nx)\Big|_0^1 \leq x\Big|_0^1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(1+a_1)(1+a_2)...(1+_n) \leq 1 \Leftrightarrow (1+a_1)(1+a_2)...(1+_n) \leq e.$$

3) Fie $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ arătaţi că $\sin x \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) \geq 2x^2$.

(M.Glomb, MM, Q 887)

Soluţie: Observăm că este suficient să demonstrăm inegalitatea pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ din cauza parităţii

$\int_0^x \cos t\, dt = \sin x$, $\int_0^x \frac{1}{\cos t} dt = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$, astfel aplicând inegalitatea lui Cauchy Schwarz

avem: $\int_0^x f(t)g(t)dt \leq \sqrt{\int_0^x f^2(t)dt \int_0^x g^2(t)dt}$.

Punem $f(t)=\sqrt{\cos t},\ g(t)=\dfrac{1}{\sqrt{\cos t}}$ şi se obţine concluzia imediat

4) Folosind inegalitatea lui Cauchy Buniakowski în forma integrală să se arate că $\ln\dfrac{n+1}{n}\le\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

Soluţie:

$$\ln\frac{n+1}{n}=\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx\le\sqrt{\int_n^{n+1}dx\int_n^{n+1}\frac{1}{x^2}dx}\le\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

5) Fie $a_1,\ a_2,\ \dots,a_n$ numere reale. Demonstraţi că $\sum\limits_{i,j=1}^{n}\dfrac{a_ia_j}{i+j}\ge 0$.

Soluţie: Acest exemplu arată avantajele folosirii metodei integrării în demonstraţia unor inegalităţi.

Considerăm funcţia $f(x)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_ia_jx^{i+j}=\dfrac{1}{x}\left(\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_ix^i\right)^2$. Observăm că $f(x)\ge 0,\forall x\ge 0.$ aşadar

$$\int_0^1 f(x)dx\ge 0,\ \int_0^1 f(x)dx=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_ia_j}{i+j}.$$

6) Dacă x şi y sunt numere reale pozitive atunci

$$(n-1)(m-1)\left(x^{n+m}+y^{n+m}\right)+(m+n-1)\left(x^my^n+x^ny^m\right)\ge m\cdot n\left(x^{m+n-1}y+xy^{n+m-1}\right),\ m,n\in N$$

Soluţie: Pentru $x\ge y$ avem

$$mn(x-y)\left(x^{n+m-1}-y^{n+m-1}\right)\ge(m+n-1)\left(x^m-y^n\right)\left(x^n-y^n\right)\Leftrightarrow\frac{x^{m+n-1}-y^{m+n-1}}{(m+n-1)(x-y)}\ge\frac{x^m-y^m}{m(x-y)}\frac{x^n-y^n}{n(x-y)}.$$

Prin integrare avem $(y-x)\int_y^x t^{m+n-2}dt\ge\int_y^x t^{m-1}dt\int_y^x t^{n-1}dt$ relaţie adevărată conform inegalităţii lui Cebîsev.

Bibliografie :

1. Rădulescu V, T.Rădulescu : Problems in Real Analysis: Advanced Calculus on the Real Axis, Springer, New York, 2009
2. Radu E. , Șontea O. : Manual de analiză matematică (clasa a XI a+ a XII a), Editura Bic ALL , 2006

5. ÎN LEGĂTURĂ CU PROBLEMELE JP.103 ȘI JP.105 WINTER EDITION 2017 ROMANIAN MATHEMATICAL MAGAZINE

Marin Chirciu[1]

Pornind de la două probleme din **Romanian Mathematical Magazine, Winter Edition 2017**, articolul prezintă o clasă de inegalități în triunghi , cu sume de forma:

$\frac{x}{y+z}f^2\left(\frac{A}{2}\right)+\frac{y}{z+x}f^2\left(\frac{B}{2}\right)+\frac{z}{x+y}f^2\left(\frac{C}{2}\right)$ și $\frac{x}{y+z}f^2(a)+\frac{y}{z+x}f^2(b)+\frac{z}{x+y}f^2(c)$,

unde $x,y,z>0$ și f este o funcție trigonometrică sau o funcție rațională.

Folosim următorul rezultat ajutător:

Lemă.

Fie $x,y,z>0$ și $f:\mathrm{D}\to \boldsymbol{R}$ o funcție . Are loc relația

$$\sum\frac{x}{y+z}f^2(t)\geq\frac{1}{2}\left(\sum f(t)\right)^2-\sum f^2(t).$$

Demonstrație.

Avem $\sum\frac{x}{y+z}f^2(t)=\sum\left(\frac{x}{y+z}+1-1\right)f^2(t)=\sum\frac{x+y+z}{y+z}f^2(t)-\sum f^2(t)\overset{CS}{\geq}$

$\overset{CS}{\geq}(x+y+z)\frac{\left(\sum f(t)\right)^2}{\sum(y+z)}-\sum f^2(t)=(x+y+z)\frac{\left(\sum f(t)\right)^2}{2(x+y+z)}=\frac{1}{2}\left(\sum f(t)\right)^2-\sum f^2(t)$.

(Simbol:CS=Cauchy-Schwarz=Bergström=Titu Andreescu).

În continuare trecem la prezentarea problemelor care fac obiectul studiului menționat.

1) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}\cot^2\frac{A}{2}+\frac{y}{z+x}\cot^2\frac{B}{2}+\frac{z}{x+y}\cot^2\frac{C}{2}\geq 18-\frac{p^2}{2r^2}\text{, unde } x,y,z>0.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Romania and Martin Lukarevski, Macedonia
RMM, Winter Edition 2017, Problema JP.103

Remarcă.

Inegalitatea poate fi întărită:

2) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}\cot^2\frac{A}{2}+\frac{y}{z+x}\cot^2\frac{B}{2}+\frac{z}{x+y}\cot^2\frac{C}{2}\geq 2\left(1+\frac{4R}{r}\right)-\frac{p^2}{2r^2}\text{, unde } x,y,z>0.$$

Soluție.

Avem $\sum\frac{x}{y+z}\cot^2\frac{A}{2}=\sum\left(\frac{x}{y+z}+1-1\right)\cot^2\frac{A}{2}=\sum\frac{x+y+z}{y+z}\cot^2\frac{A}{2}-\sum\cot^2\frac{A}{2}\overset{Bergstrom}{\geq}$

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești*

$$\geq (x+y+z)\frac{\left(\sum \cot\frac{A}{2}\right)^2}{\sum (y+z)} - \sum \cot^2\frac{A}{2} = (x+y+z)\frac{\left(\frac{p}{r}\right)^2}{2(x+y+z)} - \frac{p^2-2r^2-8Rr}{r^2} =$$

$$= \frac{p^2}{2r^2} - \frac{p^2-2r^2-8Rr}{r^2} = \frac{16Rr+4r^2-p^2}{2r^2} = 2 + \frac{8R}{r} - \frac{p^2}{2r^2}.$$

Mai sus am folosit identitățile cunoscute în triunghi:

$\sum \cot\frac{A}{2} = \frac{p}{r}$ și $\sum \cot^2\frac{A}{2} = \frac{p^2-2r^2-8Rr}{r^2}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă

Inegalitatea **2)** este mai tare decât inegalitatea **1):**

3) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}\cot^2\frac{A}{2} + \frac{y}{z+x}\cot^2\frac{B}{2} + \frac{z}{x+y}\cot^2\frac{C}{2} \geq 2\left(1+\frac{4R}{r}\right) - \frac{p^2}{2r^2} \geq 18 - \frac{p^2}{2r^2}, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Soluție.

Vezi inegalitatea **2)** și $2 + \frac{8R}{r} - \frac{p^2}{2r^2} \geq 18 - \frac{p^2}{2r^2} \Leftrightarrow R \geq 2r$ (Inegalitatea lui Euler).

Remarcă

Inegalitatea **2)** se poate dezvolta:

4) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}\cot^2\frac{A}{2} + \frac{y}{z+x}\cot^2\frac{B}{2} + \frac{z}{x+y}\cot^2\frac{C}{2} \geq n\left(1+\frac{4R}{r}\right) - \frac{2n-1}{6}\cdot\frac{p^2}{r^2}, \text{ unde } x, y, z > 0 \text{ și } n \geq 2.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi inegalitatea **2)** și $2\left(1+\frac{4R}{r}\right) - \frac{p^2}{2r^2} \geq n\left(1+\frac{4R}{r}\right) - \frac{2n-1}{6}\cdot\frac{p^2}{r^2} \Leftrightarrow (2-n)\left(1+\frac{4R}{r} - \frac{p^2}{3r^2}\right) \geq 0$,

vident din $2-n \leq 0$ și $1+\frac{4R}{r} - \frac{p^2}{3r^2} \leq 0 \Leftrightarrow 3r^2+12Rr-p^2 \leq 0 \Leftrightarrow p^2 \geq 3r^2+12Rr$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Notă.

Pentru $n=2$ în **4)** se obține **2).**

Din demonstrația de mai sus deducem că cea mai bună inegalitate de forma **4)** se realizează pentru $n=2$.

Remarcă

În același registru se pot propune:

5) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} + \frac{y}{z+x}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2} + \frac{z}{x+y}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2} \geq 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Soluție.

Avem $\sum\frac{x}{y+z}\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}=\sum\left(\frac{x}{y+z}+1-1\right)\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}=\sum\frac{x+y+z}{y+z}\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}-\sum\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\overset{Bergstrom}{\geq}$

$$\geq(x+y+z)\frac{\left(\sum\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)^2}{\sum(y+z)}-\sum\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}=(x+y+z)\frac{\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2}{2(x+y+z)}-\left[\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2-2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2-\left[\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2-2\right]=2-\frac{1}{2}\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2.$$

Mai sus am folosit identitățile cunoscute în triunghi:

$\sum\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{p}$ și $\sum\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}=\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2-2$.

Remarcă

Inegalitatea **5)** se poate dezvolta:

6) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\frac{y}{z+x}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\frac{z}{x+y}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\geq n-\frac{2n-1}{6}\cdot\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2,$$ unde $x,y,z>0$ și $n\geq 2$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi inegalitatea **5)** și $2-\frac{1}{2}\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\geq n-\frac{2n-1}{6}\cdot\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2 \Leftrightarrow (2-n)\left(1-\frac{1}{3}\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right)\geq 0$,

vident din $2-n\leq 0$ și $1-\frac{1}{3}\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\leq 0 \Leftrightarrow (4R+r)^2\geq 3p^2$, care rezultă din inegalitatea lui Doucet $4R+r\geq p\sqrt{3}$.

Notă.

Pentru $n=2$ în **6)** se obține **5).**

Din demonstrația de mai sus deducem că cea mai bună inegalitate de forma **6)** se realizează pentru $n=2$.

7) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}+\frac{y}{z+x}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\frac{z}{x+y}\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\geq\frac{2r(4R+r)}{p^2}-\frac{1}{2},$$ unde $x,y,z>0$.

Soluție.

Avem

$$\sum\frac{x}{y+z}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}=\sum\left(\frac{x}{y+z}+1-1\right)\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}=\sum\frac{x+y+z}{y+z}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}-\sum\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\overset{Bergstrom}{\geq}$$

$$\geq(x+y+z)\frac{\left(\sum\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^2}{\sum(y+z)}-\sum\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\sum\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}=(x+y+z)\frac{1^2}{2(x+y+z)}-\frac{p^2-2r^2-8Rr}{p^2}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{p^2-2r^2-8Rr}{p^2}=\frac{2r(4R+r)}{p^2}-\frac{1}{2}.$$

Mai sus am folosit identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1 \text{ și } \sum \operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{p^2-2r^2-8Rr}{p^2}.$$

Remarcă

Inegalitatea **7)** se poate dezvolta:

8) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}+\frac{y}{z+x}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\frac{z}{x+y}\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\geq n\cdot\frac{r(4R+r)}{p^2}-\frac{2n-1}{6},$$

unde $x,y,z>0$ și $n\geq 2$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **7)** și $\frac{2r(4R+r)}{p^2}-\frac{1}{2}\geq n\cdot\frac{r(4R+r)}{p^2}-\frac{2n-1}{6}\Leftrightarrow (n-2)\left[\frac{1}{3}-\frac{r(4R+r)}{p^2}\right]\geq 0$, evident din $n-2\geq 0$ și $\frac{1}{3}-\frac{r(4R+r)}{p^2}\geq 0\Leftrightarrow p^2\geq 3r(4R+r)$, adevărată din care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Notă.

Pentru $n=2$ în **8)** se obține **7).**

Din demonstrația de mai sus deducem că cea mai bună inegalitate de forma **8)** se realizează pentru $n=2$.

9) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}\cot^2\frac{B}{2}\cot^2\frac{C}{2}+\frac{y}{z+x}\cot^2\frac{C}{2}\cot^2\frac{A}{2}+\frac{z}{x+y}\cot^2\frac{A}{2}\cot^2\frac{B}{2}\geq 2\left(\frac{p}{r}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{4R}{r}+1\right)^2,$$

unde $x,y,z>0$.

Soluție.

Avem

$$\sum\frac{x}{y+z}\cot^2\frac{B}{2}\cot^2\frac{C}{2}=\sum\left(\frac{x}{y+z}+1-1\right)\cot^2\frac{B}{2}\cot^2\frac{C}{2}=\sum\frac{x+y+z}{y+z}\cot^2\frac{B}{2}\cot^2\frac{C}{2}-\sum\cot^2\frac{B}{2}\cot^2\frac{C}{2}\overset{Bergstrom}{\geq}$$

$$\geq(x+y+z)\frac{\left(\sum\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\right)^2}{\sum(y+z)}-\sum\cot^2\frac{B}{2}\sum\cot^2\frac{C}{2}=(x+y+z)\frac{\left(\frac{4R}{r}+1\right)^2}{2(x+y+z)}-\frac{(4R+r)^2-2p^2}{r^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4R}{r}+1\right)^2-\frac{(4R+r)^2-2p^2}{r^2}=2\left(\frac{p}{r}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{4R}{r}+1\right)^2.$$

Mai sus am folosit identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}=\frac{4R}{r}+1 \text{ și } \sum\cot^2\frac{B}{2}\cot^2\frac{C}{2}=\frac{(4R+r)^2-2p^2}{r^2}.$$

Remarcă

Inegalitatea **9)** se poate dezvolta:

10) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}\cot^2\frac{B}{2}\cot^2\frac{C}{2}+\frac{y}{z+x}\cot^2\frac{C}{2}\cot^2\frac{A}{2}+\frac{z}{x+y}\cot^2\frac{A}{2}\cot^2\frac{B}{2}\geq n\left(\frac{p}{r}\right)^2-\frac{2n-1}{6}\left(\frac{4R}{r}+1\right)^2,$$

unde $x,y,z>0$ și $n\geq 2$.

Soluție.

Vezi **9)** și $2\left(\frac{p}{r}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{4R}{r}+1\right)^2\geq n\left(\frac{p}{r}\right)^2-\frac{2n-1}{6}\left(\frac{4R}{r}+1\right)^2\Leftrightarrow(n-2)\left[\frac{1}{3}\left(\frac{4R}{r}+1\right)^2-\left(\frac{p}{r}\right)^2\right]\geq 0$,

evident din

$n-2\geq 0$ și $\frac{1}{3}\left(\frac{4R}{r}+1\right)^2-\left(\frac{p}{r}\right)^2\geq 0\Leftrightarrow(4R+r)^2\geq 3p^2$, adevărată din care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Notă.

Pentru $n=2$ în **10)** se obține **9).**

Din demonstrația de mai sus deducem că cea mai bună inegalitate de forma **10)** se realizează pentru $n=2$.

11) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}\sin^4\frac{A}{2}+\frac{y}{z+x}\sin^4\frac{B}{2}+\frac{z}{x+y}\sin^4\frac{C}{2}\geq\frac{p^2}{8R^2}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{r}{R}\right),$$ unde $x,y,z>0$.

Soluție.

Avem $\sum\frac{x}{y+z}\sin^4\frac{A}{2}=\sum\left(\frac{x}{y+z}+1-1\right)\sin^4\frac{A}{2}=\sum\frac{x+y+z}{y+z}\sin^4\frac{A}{2}-\sum\sin^4\frac{A}{2}\overset{Bergstrom}{\geq}$

$$\geq(x+y+z)\frac{\left(\sum\sin^2\frac{A}{2}\right)^2}{\sum(y+z)}-\sum\sin^4\frac{A}{2}=(x+y+z)\frac{\left(1-\frac{r}{2R}\right)^2}{2(x+y+z)}-\frac{8R^2+r^2-p^2}{8R^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{r}{2R}\right)^2-\frac{8R^2+r^2-p^2}{8R^2}=\frac{p^2-4Rr-4R^2}{8R^2}=\frac{p^2}{8R^2}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{r}{R}\right).$$

Mai sus am folosit identitățile cunoscute în triunghi:

$\sum\sin^2\frac{A}{2}=1-\frac{r}{2R}$ și $\sum\sin^4\frac{A}{2}=\frac{8R^2+r^2-p^2}{8R^2}$.

Remarcă

Inegalitatea **11)** se poate dezvolta:

12) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}\sin^4\frac{A}{2}+\frac{y}{z+x}\sin^4\frac{B}{2}+\frac{z}{x+y}\sin^4\frac{C}{2}\geq n\cdot\frac{p^2}{R^2}-\frac{72n-1}{16}\left(1+\frac{r}{R}\right),$$ unde $x,y,z>0$ și $n\geq\frac{1}{8}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi inegalitatea **11)** și

$$\frac{p^2}{8R^2}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{r}{R}\right)\geq n\cdot\frac{p^2}{R^2}-\frac{72n-1}{16}\left(1+\frac{r}{R}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{8}-n\right)\left(\frac{p^2}{R^2}-\frac{9}{2}\left(1+\frac{r}{R}\right)\right)\geq 0,$$

vident din $\frac{1}{8}-n\leq 0$ și $\frac{p^2}{R^2}-\frac{9}{2}\left(1+\frac{r}{R}\right)\leq 0\Leftrightarrow 2p^2\leq 9R(R+r)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Notă.

Pentru $n=\frac{1}{8}$ în **12)** se obține **11).**

Din demonstrația de mai sus deducem că cea mai bună inegalitate de forma **12)** se realizează pentru $n=\frac{1}{8}$.

13) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}\cos^4\frac{A}{2}+\frac{y}{z+x}\cos^4\frac{B}{2}+\frac{z}{x+y}\cos^4\frac{C}{2}\geq\frac{p^2}{8R^2}\text{, unde } x,y,z>0.$$

Soluție.

Avem $\sum\frac{x}{y+z}\cos^4\frac{A}{2}=\sum\left(\frac{x}{y+z}+1-1\right)\cos^4\frac{A}{2}=\sum\frac{x+y+z}{y+z}\cos^4\frac{A}{2}-\sum\cos^4\frac{A}{2}\overset{Bergstrom}{\geq}$

$$\geq(x+y+z)\frac{\left(\sum\cos^2\frac{A}{2}\right)^2}{\sum(y+z)}-\sum\cos^4\frac{A}{2}=(x+y+z)\frac{\left(2+\frac{r}{2R}\right)^2}{2(x+y+z)}-\frac{(4R+r)^2-p^2}{8R^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2+\frac{r}{2R}\right)^2-\frac{(4R+r)^2-p^2}{8R^2}=\frac{p^2}{8R^2}.$$

Mai sus am folosit identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum\cos^2\frac{A}{2}=2+\frac{r}{2R}\ \text{ și }\ \sum\cos^4\frac{A}{2}=\frac{(4R+r)^2-p^2}{8R^2}.$$

Remarcă

Se poate scrie inegalitatea:

14) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}\cos^4\frac{A}{2}+\frac{y}{z+x}\cos^4\frac{B}{2}+\frac{z}{x+y}\cos^4\frac{C}{2}\geq 2\cdot\frac{r}{R}-\frac{5}{8}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^2\text{, unde } x,y,z>0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi inegalitatea **13)** și inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$.

15) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}\csc^4\frac{A}{2}+\frac{y}{z+x}\csc^4\frac{B}{2}+\frac{z}{x+y}\csc^4\frac{C}{2}\geq\frac{p^2\left(16Rr-2r^2-p^2\right)-r^2\left(16Rr+2r^2\right)}{2r^4},$$

unde $x,y,z>0$.

Soluție.

Avem $\sum\frac{x}{y+z}\csc^4\frac{A}{2}=\sum\left(\frac{x}{y+z}+1-1\right)\csc^4\frac{A}{2}=\sum\frac{x+y+z}{y+z}\csc^4\frac{A}{2}-\sum\csc^4\frac{A}{2}\overset{Bergstrom}{\geq}$

$$\geq(x+y+z)\frac{\left(\sum csc^2\frac{A}{2}\right)^2}{\sum(y+z)}-\sum\csc^4\frac{A}{2}=(x+y+z)\frac{\left(\frac{p^2+r^2-8Rr}{r^2}\right)^2}{2(x+y+z)}-\frac{p^4+2p^2\left(r^2-8Rr\right)+r^2\left(r^2+32R^2\right)}{r^4}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{p^2+r^2-8Rr}{r^2}\right)^2-\frac{p^4+2p^2\left(r^2-8Rr\right)+r^2\left(r^2+32R^2\right)}{r^4}=\frac{p^2\left(16Rr-2r^2-p^2\right)-r^2\left(16Rr+2r^2\right)}{2r^4}$$

Mai sus am folosit identitățile cunoscute în triunghi:

$\sum\csc^2\frac{A}{2}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{r^2}$ și $\sum\csc^4\frac{A}{2}=\frac{p^4+2p^2\left(r^2-8Rr\right)+r^2\left(r^2+32R^2\right)}{r^4}$.

16) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}\sec^4\frac{A}{2}+\frac{y}{z+x}\sec^4\frac{B}{2}+\frac{z}{x+y}\sec^4\frac{C}{2}\geq 23\left(\frac{3r}{p}\right)^2-\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^4\right],\text{ unde } x,y,z>0.$$

Soluție.

Avem $\sum\frac{x}{y+z}\sec^4\frac{A}{2}=\sum\left(\frac{x}{y+z}+1-1\right)\sec^4\frac{A}{2}=\sum\frac{x+y+z}{y+z}\sec^4\frac{A}{2}-\sum\sec^4\frac{A}{2}\overset{Bergstrom}{\geq}$

$$\geq(x+y+z)\frac{\left(\sum\sec^2\frac{A}{2}\right)^2}{\sum(y+z)}-\sum\sec^4\frac{A}{2}=(x+y+z)\frac{\left(1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right)^2}{2(x+y+z)}-\frac{p^4+p^2\left(2r^2-32Rr\right)+(4R+r)^4}{p^4}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right)^2-\frac{p^4+p^2\left(2r^2-32Rr\right)+(4R+r)^4}{p^4}=23\left(\frac{3r}{p}\right)^2-\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^4\right]$$

Mai sus am folosit identitățile cunoscute în triunghi:

$\sum\sec^2\frac{A}{2}=1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2$ și $\sum\sec^4\frac{A}{2}=\frac{p^4+p^2\left(2r^2-32Rr\right)+(4R+r)^4}{p^4}$.

17) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}\sin^2 A+\frac{y}{z+x}\sin^2 B+\frac{z}{x+y}\sin^2 C\geq 2\frac{r}{R}+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2,\text{ unde } x,y,z>0.$$

Soluție.

Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$\sum\sin A=\frac{p}{R}$ și $\sum\sin^2 A=\frac{p^2-r^2-4Rr}{2R^2}$.

Remarcă

Inegalitatea **17)** se poate dezvolta:

18) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}\sin^2 A+\frac{y}{z+x}\sin^2 B+\frac{z}{x+y}\sin^2 C\geq n\frac{r}{R}+\frac{9-4n}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2,$$ unde $x,y,z>0$ și $n\leq 2$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **17)** și $2\frac{r}{R}+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2\geq n\frac{r}{R}+\frac{9-4n}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \Leftrightarrow (2-n)\left(\frac{r}{R}-\frac{2r^2}{R^2}\right)\geq 0$, evident din

$2-n\geq 0$ și $\frac{r}{R}-\frac{2r^2}{R^2}\geq 0 \Leftrightarrow R\geq 2r$ (inegalitatea lui Euler) .

Notă.

Pentru $n=2$ în **18)** se obține **17).**

Din demonstrația de mai sus deducem că cea mai bună inegalitate de forma **18)** se realizează pentru $n=2$.

19) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}\cos^2 A+\frac{y}{z+x}\cos^2 B+\frac{z}{x+y}\cos^2 C\geq \frac{1}{2}\left(\frac{p}{R}\right)^2-\frac{r}{R}-\frac{5}{2},$$ unde $x,y,z>0$.

Soluție.

Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$\sum\cos A=1+\frac{r}{R}$ și $\sum\cos^2 A=\frac{6R^2+4Rr+r^2-p^2}{2R^2}$.

20) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}a^2+\frac{y}{z+x}b^2+\frac{z}{x+y}c^2\geq 2\sqrt{3}S,$$ unde $x,y,z>0$.

G.Tsintsifas

Soluție.

Avem $\sum\frac{x}{y+z}a^2=\sum\left(\frac{x}{y+z}+1-1\right)a^2=\sum\frac{x+y+z}{y+z}a^2-\sum a^2 \overset{Bergstrom}{\geq}$

$\geq (x+y+z)\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum(y+z)}-\sum a^2=(x+y+z)\frac{(2p)^2}{2(x+y+z)}-2\left(p^2-r^2-4Rr\right)=$

$=2p^2-2\left(p^2-r^2-4Rr\right)=2\left(r^2+4Rr\right)$.

Mai sus am folosit identitățile cunoscute în triunghi:

$\sum a=2p$ și $\sum a^2=2\left(p^2-r^2-4Rr\right)$.

Rămâne să arătăm că $2\left(r^2+4Rr\right)\geq 2\sqrt{3}S \Leftrightarrow r^2+4Rr\geq\sqrt{3}rp \Leftrightarrow 4R+r\geq p\sqrt{3}$,care este inegalitatea lui Doucet.

21) In ΔABC

$$\frac{a^{m+2}}{b^m+c^m}+\frac{b^{m+2}}{c^m+a^m}+\frac{c^{m+2}}{a^m+b^m}\geq 2\sqrt{3}S,$$ unde $m>0$.

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Romania and Martin Lukarevski, Macedonia
RMM, Winter Edition 2017,Problema JP.105

Soluție.

Folosim **20)**, luînd $x=\frac{a^m}{b^m+c^m}, y=\frac{b^m}{c^m+a^m}, z=\frac{c^m}{a^m+b^m}$.

22) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}a^4+\frac{y}{z+x}b^4+\frac{z}{x+y}c^4\ge 8S^2, \text{ unde } x,y,z>0.$$

Crux Mathematicorum, 11/1986,George Tsintsifas, Grecia

Soluție.

Avem $\sum\frac{x}{y+z}a^4=\sum\left(\frac{x}{y+z}+1-1\right)a^4=\sum\frac{x+y+z}{y+z}a^4-\sum a^4 \overset{Bergstrom}{\ge}$

$$\ge(x+y+z)\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum(y+z)}-\sum a^4=(x+y+z)\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{2(x+y+z)}-\sum a^4==\frac{1}{2}\left(\sum a^2\right)^2-\sum a^4=\frac{2\sum b^2c^2-\sum a^4}{2}=$$

$$=\frac{2\left[p^4+p^2\left(2r^2-8Rr\right)+r^2(4R+r)^2\right]-2\left[p^4-p^2\left(8Rr+6r^2\right)+r^2(4R+r)^2\right]}{2}=8r^2p^2=8S^2.$$

Mai sus am folosit identitățile cunoscute în triunghi:

$\sum b^2c^2=p^4+p^2\left(2r^2-8Rr\right)+r^2(4R+r)^2$ și $\sum a^4=2\left[p^4-p^2\left(8Rr+6r^2\right)+r^2(4R+r)^2\right]$.

23) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}(p-a)^2+\frac{y}{z+x}(p-b)^2+\frac{z}{x+y}(p-c)^2\ge 2r(4R+r)-\frac{1}{2}p^2, \text{ unde } x,y,z>0.$$

Soluție.

Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$\sum(p-a)=p$ și $\sum(p-a)^2=p^2-2r^2-8Rr$.

24) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}a^2(p-a)^2+\frac{y}{z+x}b^2(p-b)^2+\frac{z}{x+y}c^2(p-c)^2\ge 2S^2, \text{ unde } x,y,z>0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$\sum a(p-a)=2r(4R+r)$ și $\sum a^2(p-a)^2=2r^2\left[(4R+r)^2-p^2\right]$.

25) In ΔABC

$$\sum\frac{x}{y+z}\cdot\frac{(p-a)^2}{a^2}\ge\frac{p^2\left(16Rr-2r^2-p^2\right)-r^2\left(16Rr+r^2\right)}{32R^2r^2}, \text{ unde } x,y,z>0.$$

Soluție.

Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$\sum\frac{p-a}{a}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{4Rr}$ și $\sum\frac{(p-a)^2}{a^2}=\frac{p^4+p^2\left(2r^2-16Rr\right)+r^2\left(32R^2+r^2\right)}{16R^2r^2}$.

26) In ΔABC

$$\sum \frac{x}{y+z}\cdot\frac{a^2}{(p-a)^2} \geq \frac{2\left(p^2-4Rr-4R^2\right)}{r^2}\text{, unde } x,y,z>0.$$

Soluție.
Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$\sum \frac{a}{p-a} = \frac{2(2R-r)}{r}$ și $\sum \frac{a^2}{(p-a)^2} = \frac{2\left(8R^2+r^2-p^2\right)}{r^2}$.

27) In ΔABC

$$\sum \frac{x}{y+z}\cdot\frac{(p-a)^2}{b^2c^2} \geq \frac{1}{8R^2}\text{, unde } x,y,z>0.$$

Soluție.
Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$\sum \frac{p-a}{bc} = \frac{4R+r}{2Rp}$ și $\sum \frac{(p-a)^2}{b^2c^2} = \frac{(4R+r)^2-p^2}{8R^2p^2}$.

28) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}a^2(b+c)^2 + \frac{y}{z+x}b^2(c+a)^2 + \frac{z}{x+y}c^2(a+b)^2 \geq 32S^2\text{, unde } x,y,z>0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.
Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$\sum a(b+c) = 2\sum bc = 2\left(p^2+r^2+4Rr\right)$ și $\sum a^2(b+c)^2 = 2\left[p^4+2p^2r^2+r^2(4R+r)^2\right]$.

29) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}r_a^2 + \frac{y}{z+x}r_b^2 + \frac{z}{x+y}r_c^2 \geq 2p^2 - \frac{1}{2}(4R+r)^2\text{, unde } x,y,z>0.$$

Soluție.
Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$\sum r_a = 4R+r$ și $\sum r_a^2 = (4R+r)^2 - 2p^2$.

Remarcă
Inegalitatea **29)** se poate dezvolta:

30) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}r_a^2 + \frac{y}{z+x}r_b^2 + \frac{z}{x+y}r_c^2 \geq np^2 - \frac{2n-1}{6}(4R+r)^2\text{, unde } x,y,z>0 \text{ și } n\geq 2.$$

Soluție.
Vezi **29)** și $2p^2 - \frac{1}{2}(4R+r)^2 \geq np^2 - \frac{2n-1}{6}(4R+r)^2 \Leftrightarrow (n-2)\left[(4R+r)^2-3p^2\right] \geq 0$, evident din $n-2\geq 0$ și $(4R+r)^2 - 3p^2 \geq 0$ care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Notă.
Pentru $n=2$ în **30)** se obține **29).**

Din demonstrația de mai sus deducem că cea mai bună inegalitate de forma **30)** se realizează pentru $n=2$.

31) In ΔABC

$$\sum \frac{x}{y+z} a^2 r_a^2 \geq 2p^2\left(8R^2+r^2-p^2\right), \text{ unde } x,y,z>0.$$

Soluție.

Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$\sum a r_a = 2p(2R-r)$ și $\sum a^2 r_a^2 = 2p^2\left(8R^2+r^2-p^2\right)$.

32) In ΔABC

$$\sum \frac{x}{y+z}(p-a)^2 r_a^2 \geq \frac{3}{2}S^2, \text{ unde } x,y,z>0.$$

Soluție.

Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$\sum (p-a) r_a = 3rp$ și $\sum (p-a)^2 r_a^2 = 3r^2p^2$.

33) In ΔABC

$$\sum \frac{x}{y+z}\cdot\frac{(p-a)^2}{r_a^2} \geq \frac{4r(4R-r)-p^2}{2r^2}, \text{ unde } x,y,z>0.$$

Soluție.

Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum \frac{p-a}{r_a} = \frac{p^2-2r(4R+r)}{rp} \text{ și } \sum \frac{(p-a)^2}{r_a^2} = \frac{p^4-16p^2Rr+2r^2(4R+r)^2}{r^2p^2}.$$

34) In ΔABC

$$\sum \frac{x}{y+z}\cdot\frac{(r_b+r_c)^2}{(p-a)^2} \geq 2\left(1+\frac{4R}{r}\right), \text{ unde } x,y,z>0.$$

Soluție.

Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum \frac{r_b+r_c}{p-a} = \frac{2p}{r} \text{ și } \sum \frac{(r_b+r_c)^2}{(p-a)^2} = \frac{2\left(p^2-r^2-4Rr\right)}{r^2}.$$

35) In ΔABC

$$\sum \frac{x}{y+z}\cdot\frac{(p-a)^2}{(r_b+r_c)^2} \geq \frac{r^2}{2}\left(2\sum\frac{1}{bc}-\sum\frac{1}{a^2}\right), \text{ unde } x,y,z>0.$$

Soluție.

Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum \frac{p-a}{r_b+r_c} = r\sum\frac{1}{a} \text{ și } \sum \frac{(p-a)^2}{(r_b+r_c)^2} = r^2\sum\frac{1}{a^2}.$$

36) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}h_a^2+\frac{y}{z+x}h_b^2+\frac{z}{x+y}h_c^2 \geq p^2\cdot\frac{4r}{R}-\frac{1}{2}\left(\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}\right)^2, \text{ unde } x,y,z>0.$$

Soluție.

Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum h_a = \frac{p^2+r^2+4Rr}{2R} \text{ și } \sum h_a^2 = \left(\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}\right)^2 - 2\cdot\frac{2p^2r}{R}.$$

37) In ΔABC

$$\sum \frac{x}{y+z}(p-a)^2 h_a^2 \geq \frac{p^2}{8R^2}\left[p^2\left(16Rr-2r^2-p^2\right)-r^2\left(16Rr+r^2\right)\right], \text{ unde } x,y,z>0.$$

Soluție.

Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum (p-a)h_a = \frac{p\left(p^2+r^2-8Rr\right)}{2R} \text{ și}$$

$$\sum (p-a)^2 h_a^2 = \frac{p^2}{4R^2}\left[p^4+p^2\left(2r^2-16Rr\right)+r^2\left(32R^2+r^2\right)\right].$$

38) In ΔABC

$$\sum \frac{x}{y+z}\cdot\frac{(p-a)^2}{h_a^2} \geq \frac{1}{2}, \text{ unde } x,y,z>0.$$

Soluție.

Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum \frac{p-a}{h_a} = \frac{4R+r}{p} \text{ și } \sum \frac{(p-a)^2}{h_a^2} = \frac{(4R+r)^2-p^2}{2p^2}.$$

39) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}\cdot\frac{a^2}{r_a^2}+\frac{y}{z+x}\cdot\frac{b^2}{r_b^2}+\frac{z}{x+y}\cdot\frac{c^2}{r_c^2} \geq 2, \text{ unde } x,y,z>0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum \frac{a}{r_a} = \frac{2(4R+r)}{p} \text{ și } \sum \frac{a^2}{r_a^2} = \left(\frac{4r+r}{p}\right)^2 - 1.$$

40) In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}\cdot\frac{a^2}{h_a^2}+\frac{y}{z+x}\cdot\frac{b^2}{h_b^2}+\frac{z}{x+y}\cdot\frac{c^2}{h_c^2} \geq 2, \text{ unde } x,y,z>0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum \frac{a}{h_a} = \frac{p^2-r^2-4Rr}{rp} \text{ și } \sum \frac{a^2}{h_a^2} = \frac{p^4-p^2\left(8Rr+6r^2\right)+r^2(4R+r)^2}{2r^2p^2}.$$

41) In ΔABC

$$\sum \frac{x}{y+z}(r_a-r)^2 \geq 2\left(p^2-4R^2-4Rr\right), \text{ unde } x,y,z>0.$$

Soluție.
Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum(r_a-r)=2(2R-r) \text{ și } \sum(r_a-r)^2=2\left(8R^2+r^2-p^2\right).$$

42) In ΔABC

$$\sum\frac{x}{y+z}(h_a-r)^2\geq\frac{p^2\left(20Rr-2r^2-p^2\right)-r^2\left(20R^2+12Rr+r^2\right)}{8R^2}, \text{ unde } x,y,z>0.$$

Soluție.
Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum(h_a-r)=\frac{p^2+r^2-2Rr}{2R} \text{ și } \sum(h_a-r)^2=\frac{p^4+p^2\left(2r^2-12Rr\right)+12R^2r^2+4Rr^3+r^4}{4R^2r^2}.$$

43) In ΔABC

$$\sum\frac{x}{y+z}b^2c^2(r_a-r)^2\geq 8R^2r^2\left[4p^2-(4R+r)^2\right], \text{ unde } x,y,z>0.$$

Soluție.
Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum bc(r_a-r)=4Rr(4R+r) \text{ și } \sum b^2c^2(h_a-r)^2=16R^2r^2\left[(4R+r)^2-2p^2\right].$$

44) In ΔABC

$$\sum\frac{x}{y+z}a^2(h_a-r)^2\geq 2r^2\left(p^2+r^2+4Rr\right)\geq 72r^4, \text{ unde } x,y,z>0.$$

Soluție.
Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum a(h_a-r)=4rp \text{ și } \sum a^2(h_a-r)^2=2r^2\left(3p^2-r^2-4Rr\right).$$

45) In ΔABC

$$\sum\frac{x}{y+z}h_a^2(r_b+r_c)^2\geq 2p^2\left[4r(4R+r)-p^2\right], \text{ unde } x,y,z>0.$$

Soluție.
Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum h_a(r_b+r_c)=2p^2 \text{ și } \sum h_a^2(r_b+r_c)^2=4p^2\left(p^2-2r^2-8Rr\right).$$

46) In ΔABC

$$\sum\frac{x}{y+z}a^2\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}\geq 2p^2, \text{ unde } x,y,z>0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.
Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum a\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=2(4R+r) \text{ și } \sum a^2\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}=2\left[(4R+r)^2-p^2\right].$$

47) In ΔABC

$$\sum \frac{x}{y+z}(p-a)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} \geq \frac{p^2(16Rr-4r^2-p^2)}{2r^2}, \text{ unde } x,y,z>0.$$

Soluție.
Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum (p-a)\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = \frac{p^2-2r^2-8Rr}{2r^2} \text{ și } \sum (p-a)^2 \operatorname{ctg}^2\frac{A}{2} = \frac{p^4-16p^2Rr+2r^2(4R+r)^2}{r^2}.$$

48) In ΔABC

$$\sum \frac{x}{y+z} a^2 \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \geq 2(p^2-4R^2-4Rr), \text{ unde } x,y,z>0.$$

Soluție.
Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum a \operatorname{tg}\frac{A}{2} = 2(2R-r) \text{ și } \sum a^2 \operatorname{tg}^2\frac{A}{2} = 2(8R^2+r^2-p^2).$$

49) In ΔABC

$$\sum \frac{x}{y+z} a^2 \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \geq 2r^2, \text{ unde } x,y,z>0.$$

Soluție.
Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum a \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{2r(4R+r)}{p} \text{ și } \sum a^2 \operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2} = \frac{2r^2\left[(4R+r)^2-p^2\right]}{p^2}.$$

50) In ΔABC

$$\sum \frac{x}{y+z} a^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2} \geq \frac{2p^2}{r^2}(p^2-4Rr-4R^2), \text{ unde } x,y,z>0.$$

Soluție.
Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum a \operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \frac{2p(2R-r)}{r} \text{ și } \sum a^2 \operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2} = \frac{2p^2(8R^2+r^2-p^2)}{r^2}.$$

51) In ΔABC

$$\sum \frac{x}{y+z}(p-a)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \geq \frac{3r^2}{2}, \text{ unde } x,y,z>0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.
Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 3r \text{ și } \sum (p-a)^2 \operatorname{tg}^2\frac{A}{2} = 3r^2.$$

52) In ΔABC

$$\sum \frac{x}{y+z}(p-a)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \geq \frac{16Rr-4r^2-p^2}{2}, \text{ unde } x,y,z>0.$$

Soluție.
Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum(p-a)\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{p^2-2r(4R+r)}{p} \text{ și } \sum a^2\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{p^4-16p^2Rr+2r^2(4R+r)^2}{p^2}.$$

53) In ΔABC

$$\sum\frac{x}{y+z}(p-a)^2\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}\geq\frac{3p^2}{2}, \text{ unde } x,y,z>0.$$

Soluție.

Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum(p-a)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=3p \text{ și } \sum a^2\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}=3p^2.$$

54) In ΔABC

$$\sum\frac{x}{y+z}a^2\csc^4\frac{A}{2}\geq\frac{8R^2\left[4r(4R+r)-p^2\right]}{r^2}, \text{ unde } x,y,z>0.$$

Soluție.

Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum a\csc^2\frac{A}{2}=\frac{4Rp}{r} \text{ și } \sum a^2\csc^4\frac{A}{2}=\left(\frac{4R}{r}\right)^2\left[p^2-2r(4R+r)\right].$$

55) In ΔABC

$$\sum\frac{x}{y+z}a^2\sec^4\frac{A}{2}\geq 8R^2\left[4-\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right], \text{ unde } x,y,z>0.$$

Soluție.

Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum a\sec^2\frac{A}{2}=\frac{4R(4R+r)}{p} \text{ și } \sum a^2\sec^4\frac{A}{2}=\left(\frac{4R}{p}\right)^2\left[(4R+r)^2-2p^2\right].$$

56) In ΔABC

$$\sum\frac{x}{y+z}(p-a)^2\sec^4\frac{A}{2}\geq\frac{p^2\left(24Rr-2r^2-p^2\right)-r^2(4R+r)^2}{2p^2}, \text{ unde } x,y,z>0.$$

Soluție.

Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum(p-a)\sec^2\frac{A}{2}=\frac{p^2+r(4R+r)}{p} \text{ și } \sum a^2\sec^4\frac{A}{2}=\frac{p^4+p^2\left(2r^2-8Rr\right)+r^2(4R+r)^2}{p^2}.$$

57) In ΔABC

$$\sum\frac{x}{y+z}b^2c^2\sin^4\frac{A}{2}\geq\frac{1}{2}r^2\left[2p^2-(4R+r)^2\right], \text{ unde } x,y,z>0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum bc\sin^2\frac{A}{2}=r(4R+r) \text{ și } \sum b^2c^2\sin^4\frac{A}{2}=r^2\left[(4R+r)^2-2p^2\right].$$

58) In ΔABC

$$\sum \frac{x}{y+z} \cdot \frac{\sin^4 \frac{A}{2}}{a^2} \geq \frac{4p^2 - (4R+r)^2}{32R^2p^2}, \text{ unde } x, y, z > 0 .$$

Soluție.
Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:
$\sum \frac{1}{a}\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{4R+r}{4Rp}$ și $\sum \frac{1}{a^2}\sin^4 \frac{A}{2} = \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{16R^2p^2}$.

59) In ΔABC

$$\sum \frac{x}{y+z} \cdot \frac{\sin^4 \frac{A}{2}}{(p-b)^2(p-c)^2} \geq \frac{4R+r}{8R^2rp^2}, \text{ unde } x, y, z > 0 .$$

Soluție.
Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:
$\sum \frac{1}{(p-b)(p-c)}\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{2Rr}$ și $\sum \frac{1}{(p-b)^2(p-c)^2}\sin^4 \frac{A}{2} = \frac{p^2 - r(4R+r)}{16p^2R^2r^2}$.

60) In ΔABC

$$\sum \frac{x}{y+z} b^2c^2 \cos^4 \frac{A}{2} \geq \frac{1}{2} p^2 \left[4r(4R+r) - p^2 \right], \text{ unde } x, y, z > 0 .$$

Soluție.
Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:
$\sum bc \cos^2 \frac{A}{2} = p^2$ și $\sum b^2c^2 \cos^4 \frac{A}{2} = p^2(p^2 - 2r^2 - 8Rr)$.

61) In ΔABC

$$\sum \frac{x}{y+z} \cdot \frac{\cos^4 \frac{A}{2}}{a^2} \geq \frac{4r(4R+r) - p^2}{32R^2r^2}, \text{ unde } x, y, z > 0 .$$

Soluție.
Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:
$\sum \frac{1}{a}\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p}{4Rr}$ și $\sum \frac{1}{a^2}\cos^4 \frac{A}{2} = \frac{p^2 - 2r(4R+r)}{16R^2r^2}$.

62) In ΔABC

$$\sum \frac{x}{y+z} \cdot \frac{\cos^4 \frac{A}{2}}{(p-a)^2} \geq \frac{4R+r}{8R^2r}, \text{ unde } x, y, z > 0 .$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.
Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:
$\sum \frac{1}{p-a}\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p}{2Rr}$ și $\sum \frac{1}{(p-a)^2}\cos^4 \frac{A}{2} = \frac{p^2 - r(4R+r)}{8R^2r^2}$.

63) In ΔABC

$$\sum \frac{x}{y+z}(p-a)^2 \sin^4 \frac{A}{2} \geq \frac{r^3(4R+r)}{8R^2}, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Soluție.

Folosim **Lema** și identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum (p-a)\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{rp}{2R} \text{ și } \sum (p-a)^2 \sin^4 \frac{A}{2} = \frac{r^2(p^2-r^2-4Rr)}{8R^2}.$$

În inegalitățile de mai sus egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Bibliografie:

1. O.Bottema, R.Z.Djordjevic, R.R.Janic, D.S.Mitrinovic, P.M.Vasic, Geometric Inequalities, Groningen 1969, The Netherlands.
2. D.M.Bătinețu-Giurgiu, Martin Lukarevski, JP.103 Winter Edition 2017 Romanian Mathematical Magazine 2017, Founding Editor Daniel Sitaru.
3. George Tsintsifas , Crux Mathematicorum, 11/1986.
4. D.M.Bătinețu-Giurgiu, Martin Lukarevski, JP.105 Winter Edition 2017 Romanian Mathematical Magazine 2017, Founding Editor Daniel Sitaru.
5. Marin Chirciu, Inegalități algebrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2014.
6. Marin Chirciu, Inegalități geometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2015.
7. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.
8. Marin Chirciu, Inegalități cu laturi și raze în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2017.

6. O NOUĂ DEMONSTRAŢIE A INEGALITĂŢII LUI GERRETSEN

de MARIAN CUCOANEŞ, MĂRĂŞEŞTI

În cele ce urmează vom demonstra următoarea inegalitate a lui *Gerretsen*

$$p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2,$$

adevărată în orice triunghi ABC - cu notaţiile uzuale.

Demonstraţie. Datorită identităţilor

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R};$$

$$\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A = \frac{p^2 + 4Rr + r^2}{4R^2} - \frac{r}{R} - 1;$$

$$\cos A\cos B\cos C = \frac{p^2 - 4Rr - r^2}{4R^2} - 1,$$

inegalitatea de demonstrat se scrie sub următoarea formă echivalentă:

$$(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C) \ge \cos A\cos B\cos C. \qquad (1)$$

Dacă triunghiul ABC este obtuzunghic sau dreptunghic, atunci inegalitatea (1) este evidentă.

Rămâne să demonstrăm inegalitatea (1) în cazul ΔABC ascuţitunghic.

Notăm: $\alpha = \pi - 2A, \beta = \pi - 2B, \gamma = \pi - 2C$ şi deoarece $A, B, C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ avem că $\alpha, \beta, \gamma > 0$

şi

$\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Deci: $A = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, $B = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}, C = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$ şi urmează

$$\cos A = \sin\frac{\alpha}{2}, \cos B = \sin\frac{\beta}{2}, \cos C = \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Aşadar, inegalitatea (1) devine

$$\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\gamma}{2}\right) \ge \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \qquad (2)$$

Rămâne să demonstrăm că inegalitatea (2) este adevărată în orice triunghi $A'B'C'$ cu măsurile unghiurilor în radiani α, β, γ.

Cu substituţiile lui Ravi avem $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}}$ şi analoagele, iar inegalitatea (2) se rescrie astfel

$$\left(\sqrt{(x+y)(x+z)}-\sqrt{yz}\right)\left(\sqrt{(x+y)(y+z)}-\sqrt{xz}\right)\left(\sqrt{(x+z)(y+z)}-\sqrt{xy}\right)\geq xyz. \qquad (3)$$

În continuare vom demonstra inegalitatea (3).

Avem succesiv

$$\sqrt{(x+y)(x+z)}+\sqrt{yz}\overset{MA-MG}{\leq}\frac{x+y+x+z}{2}+\frac{y+z}{2}=x+y+z$$

$$\left(\sqrt{(x+y)(x+z)}+\sqrt{yz}\right)\left(\sqrt{(x+y)(x+z)}-\sqrt{yz}\right)\leq(x+y+z)\left(\sqrt{(x+y)(x+z)}-\sqrt{yz}\right)$$

$$(x+y+z)\left(\sqrt{(x+y)(x+z)}-\sqrt{yz}\right)\geq(x+y)(x+z)-yz=x(x+y+z)$$

$$\left(\sqrt{(x+y)(x+z)}-\sqrt{yz}\right)\geq x.$$

Analog se obţin şi inegalităţile similare

$$\left(\sqrt{(x+y)(y+z)}-\sqrt{xz}\right)\geq y \text{ şi } \left(\sqrt{(x+z)(y+z)}-\sqrt{xy}\right)\geq z,$$

care înmulţite conduc la inegalitatea dorită.

Observaţii

1.Inegalitatea (3) se poate demonstra şi aşa

$$(x+y)(x+z)\overset{C-B-S}{\geq}(x+\sqrt{yz})^2$$

$$\sqrt{(x+y)(x+z)}\geq x+\sqrt{yz}$$

$\sqrt{(x+y)(x+z)}-\sqrt{yz}\geq x$, şi de aici se contină ca mai sus.

2. Pentru inegalitatea (1) există mai multe demonstraţii (vezi [1], [2] şi [3]).

BIBLIOGRAFIE

[1] **D. Grinberg, M. Lascu, M. Pachiţariu, M. Tetiva** – *Din nou despre inegalităţi geometrice*, G.M.-B 6/2006.

[2] **L. Panaitopol** - *O inegalitate geometrică*, G.M.-B 4/1982.

[3] **Marian Tetiva** – *New proof for an Old Inequality*, RecMat 1/2007.

7. ASUPRA UNEI PROBLEME DESCHISE

MARIAN CUCOANEŞ, MĂRĂŞEŞTI, MARIUS DRĂGAN, BUCUREŞTI
şi NECULAI STANCIU, BUZĂU

În [1] apare următoarea

Problemă deschisă. Să se determine numerele naturale $n \geq 2$ astfel încât inegalitatea

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \ldots + \frac{x_n^2}{x_1} \geq \sqrt{n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)}, \ (1)$$

să fie adevărată pentru orice numere strict pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Soluţie. Considerăm cazurile $n \geq 9$. Pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_8 = x \geq \sqrt{17} - 4, x_9 = x_{10} = \ldots = x_n = 1$ inegalitatea (1) se scrie după ridicarea la putere a doua şi efectuarea calculelor echivalent

$(x^3 + 7x^2 - 9x + 1)^2 \geq n(6x^4 - 14x^3 + 10x^2 - 2x)$, apoi după simplificare cu $(x-1)^2$

$(6x^2 - 2x)n \leq (x^2 + 8x - 1)^2$ sau $n \leq \dfrac{(x^2 + 8x - 1)^2}{6x^2 - 2x}$, (2).

Considerăm funcţia $f : [\sqrt{17} - 4, \infty) \to R$, $f(x) = \dfrac{(x^2 + 8x - 1)^2}{6x^2 - 2x}$ cu derivata

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x^2 + 8x - 1)(6x^2 + 3x + 1)}{2x^2(3x-1)}.$$

Avem

$$\min_{x \geq \sqrt{17} - 4} f(x) = f(1) = 16, \ (3).$$

Din (2) şi (3) obţinem $n \leq \min\limits_{x \geq \sqrt{17} - 40} f(x) = 16$. Deci $n \leq 16$. Aşadar, $n \in \{9, 10, \ldots, 16\}$.

Deducem că (1) ar putea fi adevărată pentru $n \in \{2, 3, \ldots, 16\}$.

În continuare considerăm $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{ciclic} \dfrac{x_1^2}{x_2} - \sqrt{n \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}$ şi $F_n(x) = f(1, x, x^2, \ldots, x^{n-1})$,

$$F_n(x) = \frac{1}{x} + 1 + x + \ldots + x^{n-3} + x^{2n-2} - \sqrt{n(1 + x^2 + .. + x^{2n-2})}.$$

Calculăm

$F_{11}\left(\dfrac{7}{10}\right) \cong -0{,}015$, $F_{12}\left(\dfrac{7}{10}\right) \cong -0{,}18$, $F_{13}\left(\dfrac{7}{10}\right) \cong -0{,}35$, $F_{14}\left(\dfrac{7}{10}\right) \cong -0{,}52$, $F_{15}\left(\dfrac{7}{10}\right) \cong -0{,}69$,

$$F_{16}\left(\frac{7}{10}\right) \cong -0{,}86.$$

Deci pentru $n \in \{11, 12, 13, 14, 15, 16\}$ inegalitatea (1) nu e adevărată $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$.

Rămân cazurile $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. În [1] sunt demonstrate cazurile $n \in \{2, 3, 4\}$ şi este propusă ca conjectură inegalitatea care reprezintă cazul $n = 5$ al inegalităţii (1), i.e.

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{t}+\frac{t^2}{u}+\frac{u^2}{x}\ge\sqrt{5(x^2+y^2+z^2+t^2+u^2)}\text{, (4).}$$

Iată o soluţie

$$\sum_{ciclic}\frac{x^2}{y}-\sum_{ciclic}x=\sum_{ciclic}\left(\frac{x^2}{y}-2x+y\right)=\sum_{ciclic}\frac{(x-y)^2}{y}\text{, (5).}$$

$$5\sum_{ciclic}x^2-(\sum_{ciclic}x)^2=2\sum_{ciclic}[(x-y)^2+(x-z)^2]\text{, (6).}$$

$$\sum_{ciclic}(x-z)^2=2\sum_{ciclic}(x-y)^2+2\sum_{ciclic}(x-y)(y-z)\text{, (7).}$$

Inegalitatea (4) este echivalentă cu

$$\left(\sum_{ciclic}\frac{x^2}{y}\right)^2\ge5\left(\sum_{ciclic}x^2\right)\Leftrightarrow\left(\sum_{ciclic}\frac{x^2}{y}\right)^2-\left(\sum_{ciclic}x\right)^2\ge5\left(\sum_{ciclic}x^2\right)-\left(\sum_{ciclic}x\right)^2\text{, (8),}$$

iar din (6) inegalitatea (8) este echivalentă cu

$$\left(\sum_{ciclic}\frac{x^2}{y}-\sum_{ciclic}x\right)\left(\sum_{ciclic}\frac{x^2}{y}+\sum_{ciclic}x\right)\ge\sum_{ciclic}(x-y)^2+\sum_{ciclic}(x-z)^2\text{, (9),}$$

iar din (5) inegalitatea (9) este echivalentă cu

$$\sum_{ciclic}\frac{(x-y)^2}{y}\left(\sum_{ciclic}\frac{x^2}{y}+\sum_{ciclic}x\right)\ge\sum_{ciclic}(x-y)^2+\sum_{ciclic}(x-z)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{ciclic}(x-y)^2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y}{z}+\frac{z^2}{ty}+\frac{t^2}{uy}+\frac{u^2}{xy}+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{t}{y}+\frac{u}{y}\right)\ge\sum_{ciclic}(x-z)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{ciclic}(x-y)^2\left(\frac{(y-z)^2}{yz}+2+\frac{(z-t)^2}{yt}+\frac{2z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{t^2}{uy}+\frac{u^2}{xy}+\frac{u}{y}\right)\ge\sum_{ciclic}(x-z)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{ciclic}(x-y)^2\left(\frac{x^2}{u^2}+\frac{t^2}{uy}+\frac{u^2}{xy}+\frac{u}{y}+\frac{z}{y}+\frac{(y-z)^2}{yz}+\frac{(z-t)^2}{yz}+2\right)+\sum_{ciclic}(x-y)^2\left(\frac{z+x}{y}\right)\ge\sum_{ciclic}(x-z)^2$$

$$\Leftrightarrow\sum_{ciclic}(x-y)^2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{t^2}{uy}+\frac{u^2}{xy}+\frac{u}{y}+\frac{z}{y}+\frac{(y-z)^2}{yz}+\frac{(z-t)^2}{yz}\right)+\sum_{ciclic}(x-y)^2+$$

$$+\sum_{ciclic}\left[(x-y)\sqrt{\frac{z}{y}}-(y-z)\sqrt{\frac{y}{z}}\right]^2+2\sum_{ciclic}(x-y)(y-z)\ge\sum_{ciclic}(x-z)^2\text{, (10).}$$

Din (7) rezultă că (10) este echivalentă cu

$$\sum_{ciclic}(x-y)^2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{t^2}{uy}+\frac{u^2}{xy}+\frac{u}{y}+\frac{z}{y}+\frac{(y-z)^2}{yz}+\frac{(z-t)^2}{yz}\right)+\sum_{ciclic}\left[(x-y)\sqrt{\frac{z}{y}}+(z-y)\sqrt{\frac{y}{z}}\right]^2\ge0,$$

adevărată.

În final propunem ca problemă deschisă rezolvarea cazurilor $n\in\{6,7,8,9,10\}$ ale inegalităţii (1) care se verifică cu ajutorul calculatorului.

BIBLIOGRAFIE

1. T. Zvonaru, N. Stanciu, *Bergström sau Hölder*, Revista de Matematică din Timişoara, Nr. 4, 2013, 10-12.

8. PROBABILITĂŢI GEOMETRICE – TRIUNGHIUL

Studiu de specialitate
Partea I-a

Prof. Stan Ilie
Colegiul Tehnic "Anghel Saligny", Roşiorii de Vede, Teleorman

Cândva Moş Nicolae mi-a lăsat în ghete, Trei nuieluşe-jucăuşe, drepte şi cochete. Şi o întrebare ce mă răscoleşte ca un junghi: Care e probabilitatea de a face un triunghi?

Temă:
Ne propunem să studiem posibilitatea şi probabilitatea construirii unui triunghi folosind 3 segmente de lungimi date: a,b,c.

Condiţii:
Este cunoscută exprimarea "Oricare latură este mai mică decât suma celorlalte două laturi" (exprimare "generoasă"... ce conţine un cuvânt <u>două</u> în plus!).
Aşadar: $a<b+c$, $b<c+a$, $c<a+b$

Din $b<c+a$ putem obţine $b-c<a$ iar din $c<a+b$ obţinem $c-b<a$ adică $|b-c|<a<b+c$:
"O latură mai mică decât suma şi mai mare ca diferenţa celorlalte laturi". Ajunge pentru una!

$a+b+c=s \Rightarrow a+b=s-c<s$ deci $a+b<s$
"Suma oricăror două laturi este mai mică decât perimetrul triunghiului". Normal…

$a<b+c \Rightarrow a+a<a+b+c \Rightarrow 2a<a+b+c$
Notând $s=a+b+c$ avem $2a<s \Rightarrow a<s/2$. Analog $b<s/2$, $c<s/2$.
"Oricare latură este mai mică decât semiperimetrul triunghiului". Ştia el Heron că $p-a>0$…

$s=a+b+c<a+b+s/2 \Rightarrow s<a+b+s/2 \Rightarrow s-s/2<a+b \Rightarrow s/2<a+b \Rightarrow a+b>s/2$
"Suma oricăror două laturi este mai mare decât semiperimetrul triunghiului". Are logică...↑

Posibilităţi:
Cu 3 segmente putem construi un triunghi sau nici un triunghi după cum sunt sau nu îndeplinite condiţiile anterioare. Aşadar putem construi maxim 1 triunghi.

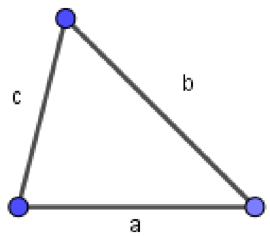
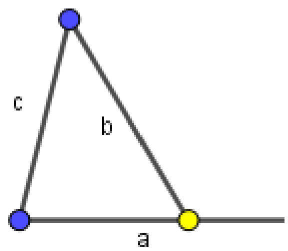
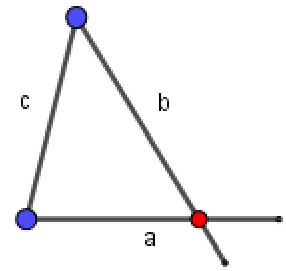
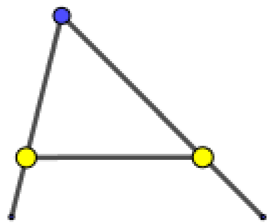
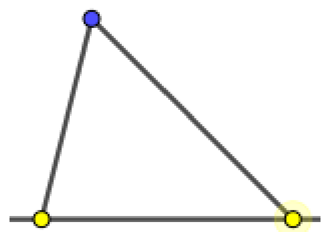
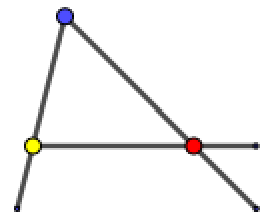
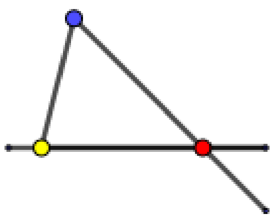
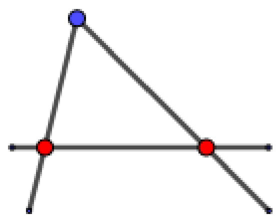
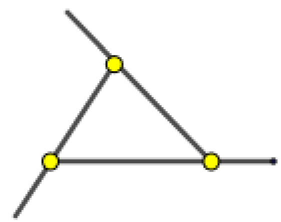
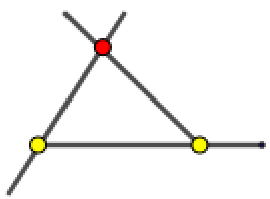
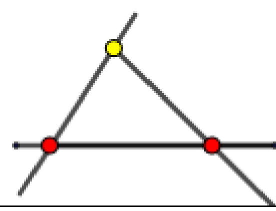
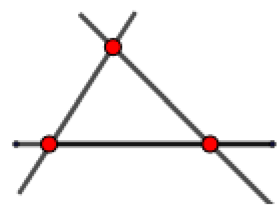
De fapt...oricare 3 segmente determină un triunghi!!!
Şi sunt mai multe modalităţi!!! Cuvântul cheie este "determină"!

Soluţiile:

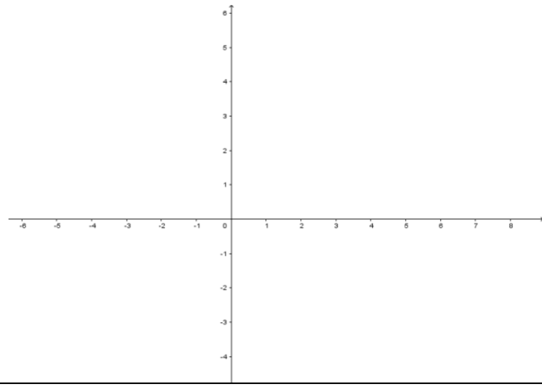
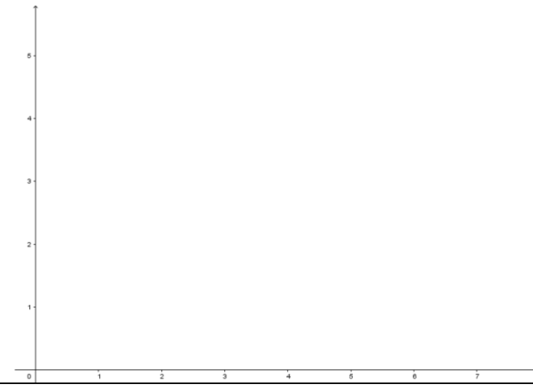
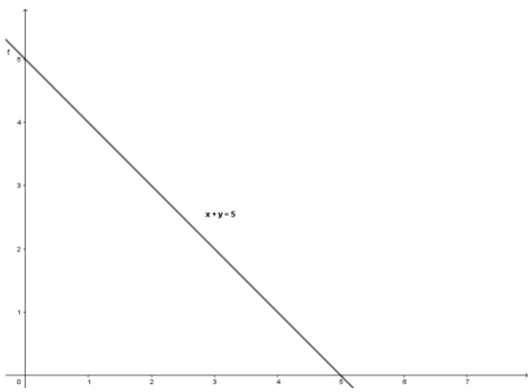
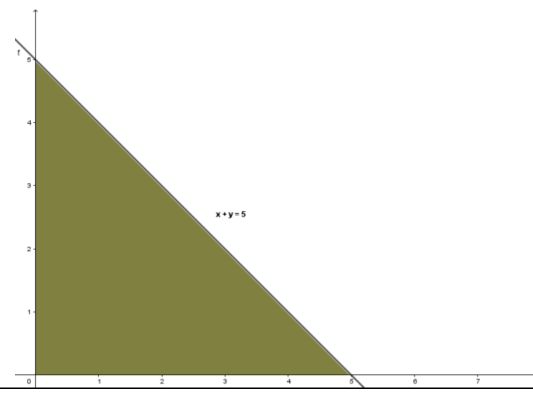
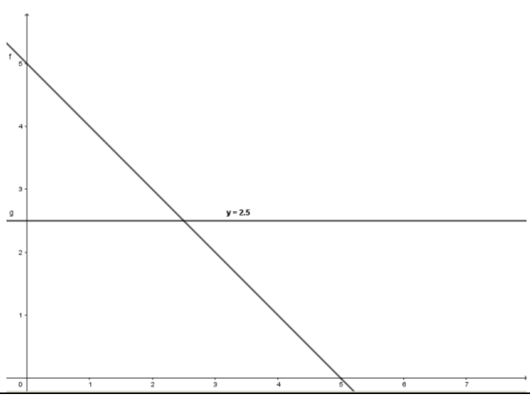
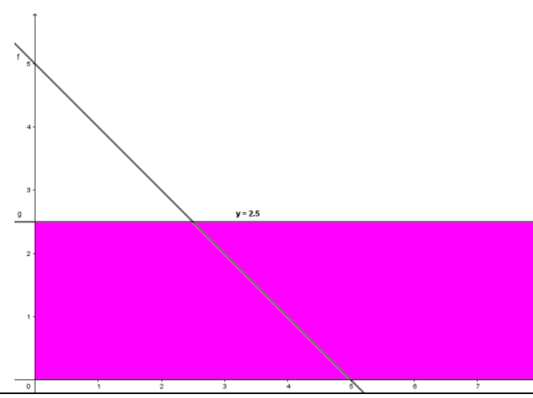
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
E + E	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0
E / S	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0
S ∩ S	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3

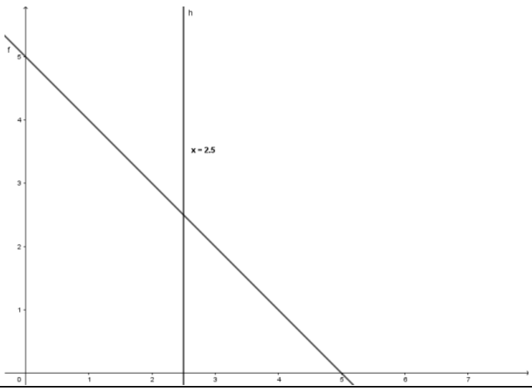
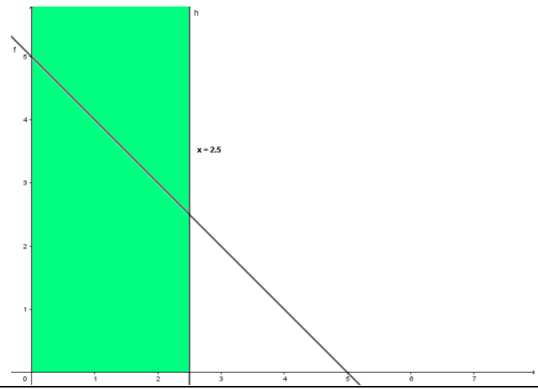
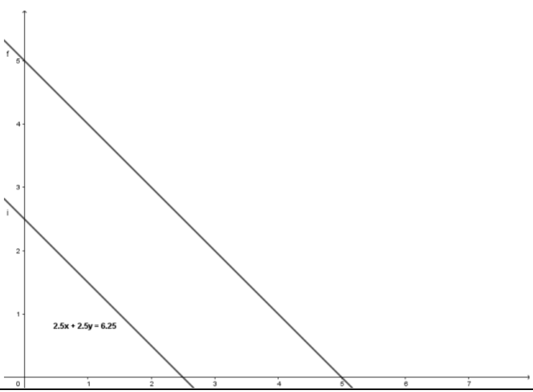
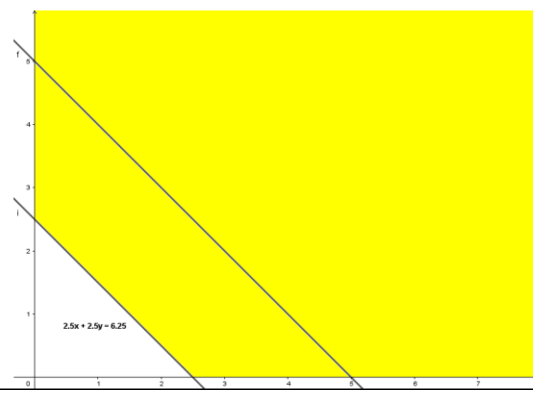
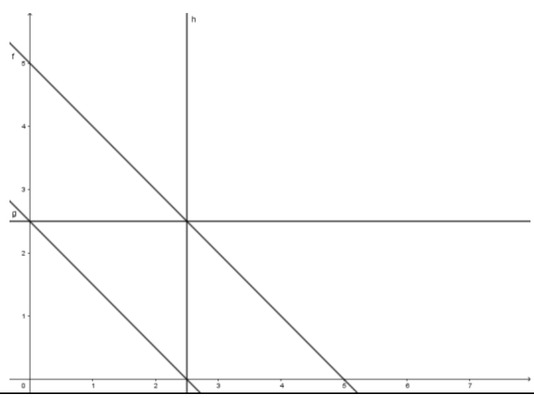
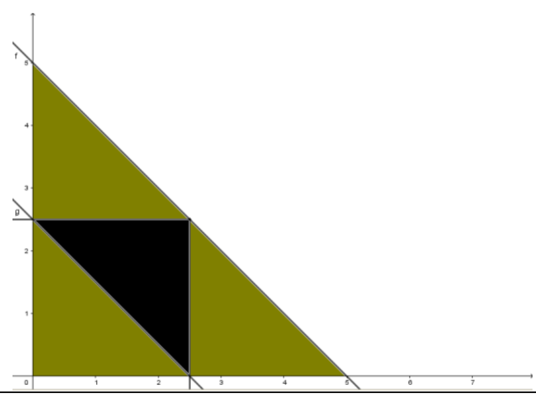
S=Segment, E=Extremitate segment
Reprezentările sunt pe pagina următoare.

E + E = Extremităţi comune(albastru)
E / S = Extremităţi pe segment(galben)
S ∩ S = Intersecţie de segmente(roşu)

I (3-0-0) 	**II (2-1-0)** 	**III (2-0-1)** 
IV(1-2-0) 	**IV(1-2-0)** 	**V(1-1-1)** 
V(1-1-1) 	**VI(1-0-2)** 	**VII(0-3-0)** 
VIII(0-2-1) 	**IX(0-1-2)** 	**X(0-0-3)** 

Probabilităţi:
Să reprezentăm grafic condiţiile:
$a+b<s$
$a<s/2$
$b<s/2$
$a+b>s/2$

Într-un sistem de coordonate carteziene xOy 	**x,y>0 fac trimitere la primul cadran** 
Dreapta x+y=s 	**determină prin semiplanul x+y<s…** **un triunghi:** 
Dreapta y=s/2 	**delimitează(prin semiplanul y<s/2) zona:** 

Dreapta x=s/2	**delimitează(prin semiplanul x<s/2) zona:**
	
Dreapta x+y=s/2	**delimitează(prin semiplanul x+y>s/2) zona:**
	
Toate dreptele condiţii(☺!) conduc	**prin intersecţia lor către...triunghiul median**
	

Raportul dintre aria triunghiului median şi aria triunghiului iniţial este ¼.
Aceasta este şi probabilitatea ca 3 segmente date să poată forma(puse cap la cap!) un triunghi.

9. ASUPRA LIMITEI UNUI ŞIR

Profesor matematică: Tănase Gabriel
Colegiul Agricol Dr. C. Angelescu Buzău

Se dă funcţia $f:[0,+\infty)\to R$ prin formula $f(x)=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$

Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f^{(n)}(x)\right]$

Notăm $x_n=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f^{(n)}(x)$, $n\ge1$.

$$f'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}=\frac{e^{\sqrt{x}}\cdot P_1(\sqrt{x})-e^{-\sqrt{x}}\cdot P_1(-\sqrt{x})}{2^1x^{1-1}\sqrt{x}}$$ unde $P_1(x)=1$ şi $gradP_1=0$

$$f''(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+e^{-\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)}{4x\sqrt{x}}=\frac{e^{\sqrt{x}}\cdot P_2(\sqrt{x})-e^{-\sqrt{x}}\cdot P_2(-\sqrt{x})}{2^2x^{2-1}\sqrt{x}}$$ unde $P_2(x)=x-1$ şi $gradP_2=1$

$$f'''(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}(x-3\sqrt{x}+3)-e^{-\sqrt{x}}(x+3\sqrt{x}+3)}{8x^2\sqrt{x}}=\frac{e^{\sqrt{x}}\cdot P_3(\sqrt{x})-e^{-\sqrt{x}}\cdot P_3(-\sqrt{x})}{2^3x^{3-1}\sqrt{x}}$$ unde $P_3(x)=x^2-3x+3$ şi $gradP_3=2$.

Din relaţiile de mai sus putem deduce că

$$f^{(n)}(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}\cdot P_n(\sqrt{x})-e^{-\sqrt{x}}\cdot P_n(-\sqrt{x})}{2^nx^{n-1}\sqrt{x}},n\ge1$$ unde P_n este polinom de gradul $n-1$.

Demonstrăm această relaţie prin inducţie matematică

$$P(n):\ f^{(n)}(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}\cdot P_n(\sqrt{x})-e^{-\sqrt{x}}\cdot P_n(-\sqrt{x})}{2^nx^{n-1}\sqrt{x}},n\ge1$$

Etapa verificării:

$$P(1):\ f'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$ adevarat

$$P(2):\ f''(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)-e^{-\sqrt{x}}(-\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$$ adevarat

Etapa demonstraţiei:

Presupunem $P(1),P(2),...,P(k-2),P(k-1)$ adevărate şi demonstrăm că $P(k)$ este adevărată.

Ştim că $4xf^{(n)}(x)+(4n-6)f^{(n-1)}(x)-f^{(n-2)}(x)=0$, $n\ge2$ (*) (se dem. tot prin inducţie).

$$f^{(k-2)}(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}\cdot P_{k-2}\left(\sqrt{x}\right)-e^{-\sqrt{x}}\cdot P_{k-2}\left(-\sqrt{x}\right)}{2^{k-2}x^{k-3}\sqrt{x}} \text{ cu } gradP_{k-2}=k-3$$

$$f^{(k-1)}(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}\cdot P_{k-1}\left(\sqrt{x}\right)-e^{-\sqrt{x}}\cdot P_{k-1}\left(-\sqrt{x}\right)}{2^{k-1}x^{k-2}\sqrt{x}} \text{ cu } gradP_{k-1}=k-2$$

Din relaţia (*) deducem:

$$4xf^{(k)}(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}\cdot P_{k-2}\left(\sqrt{x}\right)-e^{-\sqrt{x}}\cdot P_{k-2}\left(-\sqrt{x}\right)}{2^{k-2}x^{k-3}\sqrt{x}}-(4n-6)\frac{e^{\sqrt{x}}\cdot P_{k-1}\left(\sqrt{x}\right)-e^{-\sqrt{x}}\cdot P_{k-1}\left(-\sqrt{x}\right)}{2^{k-1}x^{k-2}\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{e^{\sqrt{x}}\left[2xP_{k-2}\left(\sqrt{x}\right)-(4n-6)P_{k-1}\left(\sqrt{x}\right)\right]-e^{-\sqrt{x}}\left[2xP_{k-2}\left(-\sqrt{x}\right)-(4n-6)P_{k-1}\left(-\sqrt{x}\right)\right]}{2^{k-1}x^{k-2}\sqrt{x}}$$

$$f^{(k)}(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}\left[2xP_{k-2}\left(\sqrt{x}\right)-(4n-6)P_{k-1}\left(\sqrt{x}\right)\right]-e^{-\sqrt{x}}\left[2xP_{k-2}\left(-\sqrt{x}\right)-(4n-6)P_{k-1}\left(-\sqrt{x}\right)\right]}{2^{k+1}x^{k-1}\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f^{(k)}(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}\left[\sqrt{x}^2P_{k-2}\left(\sqrt{x}\right)-(2n-3)P_{k-1}\left(\sqrt{x}\right)\right]-e^{-\sqrt{x}}\left[\sqrt{x}^2P_{k-2}\left(-\sqrt{x}\right)-(2n-3)P_{k-1}\left(-\sqrt{x}\right)\right]}{2^{k}x^{k-1}\sqrt{x}}$$

Luăm $P_k(x)=x^2P_{k-2}(x)-(2k-3)P_{k-1}(x)$ (**)

$$\left.\begin{array}{l} gradP_{k-2}=k-3 \\ gradP_{k-1}=k-2 \end{array}\right| \Rightarrow gradP_k=k-1$$

Obţinem $f^{(k)}(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}\cdot P_k\left(\sqrt{x}\right)-e^{-\sqrt{x}}\cdot P_k\left(-\sqrt{x}\right)}{2^{k}x^{k-1}\sqrt{x}}$ si inductia matematică se termină aici.

Observăm că şirul de polinoame P_n are proprietatea:

$$P_n(x)+P_n'(x)=xP_{n-1}(x), n\geq 2$$

Demonstraţie:
Inducţie matematică

Pentru $n=2$ avem $P_2(x)+P_2'(x)=x-1+1=x=x\cdot P_1(x)$

Pentru $n=3$ avem $P_3(x)+P_3'(x)=x^2-3x+3+2x-3=x^2-x=x(x-1)=x\cdot P_2(x)$

Din (**) rezultă:

$$P_n'(x)=\left[x^2P_{n-2}(x)-(2n-3)P_{n-1}(x)\right]'=2xP_{n-2}(x)+x^2P_{n-2}'(x)-(2n-3)P_{n-1}'(x)$$

Mai departe avem:

$$P_n(x)+P_n'(x)=x^2P_{n-2}(x)-(2n-3)P_{n-1}(x)+2xP_{n-2}(x)+x^2P_{n-2}'(x)-(2n-3)P_{n-1}'(x)=$$

$$=x^2\underbrace{\left[P_{n-2}(x)+P_{n-2}'(x)\right]}_{x\cdot P_{n-3}(x)}-(2n-3)\underbrace{\left[P_{n-1}(x)+P_{n-1}'(x)\right]}_{x\cdot P_{n-2}(x)}+2xP_{n-2}(x)=x^3P_{n-3}(x)-(2n-3)xP_{n-2}(x)+2xP_{n-2}(x)=$$

$$=x^3P_{n-3}(x)-(2n-5)xP_{n-2}(x)=x\left[x^2P_{n-3}(x)-(2n-5)P_{n-2}(x)\right]=xP_{n-1}(x) \quad , \quad \text{c.c.t.d.}$$

Acum putem calcula formula termenului general a şirului $(x_n)_n$

$$x_n = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f^{(n)}(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^{\sqrt{x}}\cdot P_n\left(\sqrt{x}\right) - e^{-\sqrt{x}}\cdot P_n\left(-\sqrt{x}\right)}{2^n x^{n-1}\sqrt{x}} \overset{Subst\,\sqrt{x}=t}{=} \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{e^{t}\cdot P_n(t) - e^{-t}\cdot P_n(-t)}{2^n t^{2n-1}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{e^{t}\left(P_n(t)+P_n'(t)\right) + e^{-t}\left(P_n(-t)+P_n'(-t)\right)}{2^n(2n-1)t^{2n-2}} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{e^{t}\cdot t\cdot P_{n-1}(t) + e^{-t}\cdot\left(-tP_{n-1}(-t)\right)}{2^n(2n-1)t^{2n-2}} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{e^{t}\cdot P_{n-1}(t) - e^{-t}\cdot P_{n-1}(-}{2^n(2n-1)t^{2n-3}}$$

$$= \ldots = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{e^{t}\cdot P_1(t) - e^{-t}\cdot P_1(-t)}{2^n(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 3t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{e^{t} - e^{-t}}{2^n(2n-1)!!\,t} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{e^{t} + e^{-t}}{2^n(2n-1)!!} = \frac{2}{2^n(2n-1)!!}$$

Rezultă $x_n = \dfrac{1}{2^{n-1}(2n-1)!!}$ pentru $n \geq 1$ deci $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f^{(n)}(x)\right] = 0$

10. CÂTEVA RELAȚII METRICE ÎN PATRULATERUL CONVEX

Prof. Buzea Gabriela
Școala Gimnazială Nr. 56,București

Fie ABCD un patrulater convex.

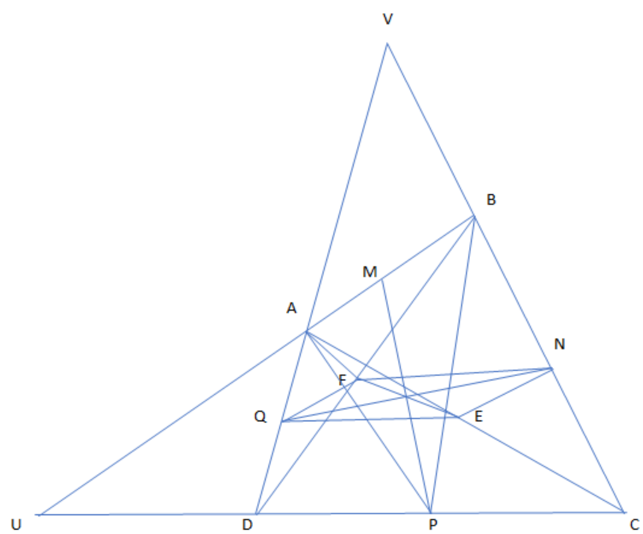
Notăm cu M,N,P,Q mijloacele laturilor AB,BC,CD, respectiv AD.

Notăm cu E și F mijloacele diagonalelor AC, respectiv BD.

Segmentele MP,NQ și EF se numesc bimediane ale patrulaterului .

Notăm cu u și v măsurile unghiurilor formate de laturile opuse AB, CD respectiv AD, BC ale patrulaterului convex ABCD.

$m\left(\widehat{AB,CD}\right) = u\ ,m\left(\widehat{AD,BC}\right) = v.$



1. **Relația lui Euler**

$$\boldsymbol{AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2, (1).}$$

Conform teoremei medianei,

$$\left.\begin{matrix} \text{În triunghiul } FAC \\ EF \ \ \text{mediană} \end{matrix}\right\} \Rightarrow EF^2 = \frac{2(FA^2 + FC^2) - AC^2}{4}, (2).$$

$$\left.\begin{matrix} \text{În triunghiul } ADB \\ AF \ \ \text{mediană} \end{matrix}\right\} \Rightarrow AF^2 = \frac{2(AD^2 + AB^2) - BD^2}{4}, (3).$$

$$\left.\begin{matrix} \text{În triunghiul } BCD \\ CF \ \text{mediană} \end{matrix}\right\} \Rightarrow CF^2 = \frac{2(BC^2 + CD^2) - BD^2}{4}, (4).$$

Din relațiile (2),(3) și (4) obținem

$$4EF^2 = 2\left(\frac{2(AD^2+AB^2)-BD^2}{4}+\frac{2(BC^2+CD^2)-BD^2}{4}\right)-AC^2$$
$$4EF^2 = AD^2+AB^2+BC^2+CD^2-BD^2-AC^2$$

Obținem relația lui Euler $\boldsymbol{AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=AC^2+BD^2+4EF^2,(1).}$

2. **Relații între laturi, diagonale și bimediane**

$$\boldsymbol{AC^2+BD^2+BC^2+AD^2=AB^2+CD^2+4MP^2,(5).}$$

$$\boldsymbol{AC^2+BD^2+AB^2+CD^2=BC^2+AD^2+4NQ^2,(6).}$$

Conform teoremei medianei,

$$\left.\begin{array}{c}\text{În triunghiul } PAB\\ MP \text{ mediană}\end{array}\right\}\Rightarrow MP^2=\frac{2(PA^2+PB^2)-AB^2}{4},(7).$$
$$\left.\begin{array}{c}\text{În triunghiul } ADC\\ AP \text{ mediană}\end{array}\right\}\Rightarrow AP^2=\frac{2(AD^2+AC^2)-CD^2}{4},(8).$$
$$\left.\begin{array}{c}\text{În triunghiul } BCD\\ BP \text{ mediană}\end{array}\right\}\Rightarrow BP^2=\frac{2(BD^2+BC^2)-CD^2}{4},(9).$$

Din relațiile (7),(8) și (9) obținem

$$4MP^2 = 2\left(\frac{2(AD^2+AC^2)-CD^2}{4}+\frac{2(BD^2+BC^2)-CD^2}{4}\right)-AB^2$$
$$4MP^2 = AD^2+AC^2+BD^2+BC^2-CD^2-AB^2\Rightarrow$$
$$\boldsymbol{AC^2+BD^2+BC^2+AD^2=AB^2+CD^2+4MP^2,(5).}$$

Analog pentru demonstrația relației (6).

3. **Relație între diagonale și bimediane**

$$\boldsymbol{AC^2+BD^2=2(MP^2+NQ^2),(10).}$$

Adunând relațiile (5) și (6) obținem relația (10).

4. **Relație între laturi și bimediane**

$$\boldsymbol{(BC^2+AD^2)-(AB^2+CD^2)=2(MP^2-NQ^2),(11).}$$

Scăzând din relația (5) relația (6) se obține relația (11).

5. **Lungimile bimedianelor MP,NQ și EF verifică relațiile**

$$4EF^2 = AB^2-2\cdot AB\cdot CD\cdot \cos u+\ CD^2=BC^2-2\cdot BC\cdot AD\cdot \cos v+AD^2,(12).(13).$$

$$4NQ^2=AB^2+2\cdot AB\cdot CD\cdot \cos u+CD^2,(14).$$

$$4MP^2 = BC^2 + 2 \cdot BC \cdot AD \cdot \cos v + AD^2, (15).$$

Dacă $AB \nparallel CD$

$$\left.\begin{array}{l} \text{În triunghiul } ABC, NE \text{ linie mijlocie} \Rightarrow NE \parallel AB \\ \text{În triunghiul } BDC, NF \text{ linie mijlocie} \Rightarrow NF \parallel DC \\ \qquad m(\widehat{AB,CD}) = u \end{array}\right\} \Rightarrow m(\widehat{AB,CD}) = m(\widehat{NE,NF}) = u$$

În triunghiul ENF, conform teoremei cosinusului obținem

$$EF^2 = NE^2 + NF^2 - 2 \cdot NE \cdot NF \cdot \cos u$$

$$EF^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{DC}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{AB}{2} \cdot \frac{DC}{2} \cdot \cos u$$

$$4EF^2 = AB^2 + DC^2 - 2 \cdot AB \cdot DC \cdot \cos u, \qquad (12).$$

Dacă $AB \parallel CD \Rightarrow \cos u = 1 \Rightarrow 4EF^2 = AB^2 - 2 \cdot AB \cdot CD + CD^2$

$$\left.\begin{array}{l} \text{În triunghiul } ABD, QE \text{ linie mijlocie} \Rightarrow QF = \dfrac{AB}{2}, QF \parallel AB \\ \text{În triunghiul } ACD, QF \text{ linie mijlocie} \Rightarrow QE = \dfrac{CD}{2}, QE \parallel CD \end{array}\right\} \Rightarrow EF = |QE - QF| \Rightarrow$$

$$2EF = |AB - CD| \Rightarrow 4EF^2 = AB^2 - 2 \cdot AB \cdot CD + CD^2$$

Dacă în plus și $AD \parallel BC$, atunci E=F și AB=CD.

Analog pentru demonstrația relației (13).

Pentru a demonstra relația (14), folosim relația (1) și relația (12), obținând

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 - AC^2 - BD^2 = AB^2 + CD^2 - 2 \cdot AB \cdot CD \cdot \cos u$$

$$AB^2 + CD^2 + 2 \cdot AB \cdot CD \cdot \cos u = AC^2 + BD^2 + AB^2 - BC^2 + DC^2 - AD^2$$

Dar conform relației (6), $AC^2 + BD^2 + AB^2 - BC^2 + CD^2 - AD^2 = 4NQ^2$,
obținem $4NQ^2 = AB^2 + 2 \cdot AB \cdot CD \cdot \cos u + CD^2, (14).$

Analog pentru demonstrația relației (15).

6. Cosinusul unghiurilor formate de laturile opuse ale unui patrulater convex

$$\cos u = \frac{AC^2 + BD^2 - BC^2 - AD^2}{2 \cdot AB \cdot CD}, (16). \qquad \cos v = \frac{AC^2 + BD^2 - AB^2 - CD^2}{2 \cdot BC \cdot AD}, (17).$$

Din relația lui Euler, $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2, (1)$ și relația

$4EF^2 = AB^2 + CD^2 - 2 \cdot AB \cdot CD \cdot \cos u, \ (12).$ obținem

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + AB^2 + CD^2 - 2 \cdot AB \cdot CD \cdot \cos u$$

Obținem $\cos u = \frac{AC^2+BD^2-BC^2-AD^2}{2 \cdot AB \cdot CD}$, (16).

Analog, pentru demonstrația relației (17), folosim relațiile (1) și (13).

Bibliografie

1. Dan Mihalca,Ion Chițescu, Marcel Chiriță, Geomeria patrulaterului ,Editura Teora,București,1998
2. Liviu Nicolescu,Vladimir Boskoff,Probleme practice de geometrie,Editura Tehnică, București 1990
3. Andrei Ivanov, Marcel Teleucă, Probleme de geometrie competitivă,Editura Gil,Zalău, 2009