REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

MARTIE 2018

ISSN 2065-6432

www.mateinfo.ro

REVISTĂ LUNARĂ DIN FEBRUARIE 2009

revista@mateinfo.ro

ARTICOLE REVISTĂ:

1. PROBLEMA LUNII MARTIE 2018

Se dă o piramidă patrulateră regulată SABCD cu toate muchiile de lungime x și un corp sferic cu centrul în mijlocul O al muchiei $[SC]$ *, de rază* $\frac{x\sqrt{3}}{4}$ *. Notăm cu* Ω *intersecția celor două corpuri. Să se arate că* $\frac{V_{PIRAMIDĂ}}{V_{\Omega}} < 2,5.$

Autor prof. Constantin Telteu

Așteptăm rezolvări cât mai interesante pe adresa e-mail revista@mateinfo.ro.

Termen: 1 aprilie 2018.

2. REZOLVARE – PROBLEMA LUNII FEBRUARIE 2018

Să se arate că dacă aria S a unui poligon inscriptibil şi circumscriptibil cu $2n$ laturi de lungimi a_1, a_2, ..., a_{2n} se exprimă prin formula $S = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_{2n}}$, atunci $n = 2$.

Propusă de Corneliu Mănescu-Avram

Soluţie autor: Un poligon regulat cu $2n$ laturi este inscriptibil şi circumscriptibil. Dacă a este lungimea laturii poligonului şi S este aria lui, atunci

$$S = \frac{n}{2} a^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}. \qquad (1)$$

În acest caz $a_1 = a_2 = ... = a_{2n}$ şi din ipoteză avem

$$S = \underbrace{\sqrt[n]{a \cdot a \cdot ... \cdot a}}_{2n\ factori} = a^2. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) se obţine

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} = \frac{2}{n}. \qquad (3)$$

Considerăm funcţia $f : (0, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} \pi x - 4x$. Funcţia f este derivabilă pe $(0, \frac{1}{2})$ şi $f'(x) = -\frac{\pi}{\sin^2(\pi x)} - 4 < 0$. Rezultă că f este strict descrescătoare, astfel că f este injectivă pe $(0, \frac{1}{2})$. Ecuaţia $f(x) = 0$ are soluţia $x = \frac{1}{4}$, deci singura soluţie a ecuaţiei (3) este $n = 2$.

Reciproc, se ştie că aria unui patrulater inscriptibil şi circumscriptibil cu laturile de lungimi a, b, c, d este $S = \sqrt{abcd}$.

3. THE NUMBERS of FIBONACCI and LUCAS - IDENTITIES - PROOFS WITH FEW WORDS – (V)

By Dumitru M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania
and Neculai Stanciu, Buzău, Romania

Fibonacci

(1175 -1240)

François-Édouard-Anatole Lucas

(1842 – 1891)

$$F_0 = 0, F_1 = 1,$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbf{N} \quad \text{(F)}$$
$$L_0 = 2, L_1 = 1,$$
$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \forall n \in \mathbf{N} \quad \text{(L)}$$
$$r^2 - r - 1 = 0,$$

$$r_1=\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, r_2=\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

$(x_n)_{n\geq 0}$, **Fibonacci-Lucas**' s sequence

$$x_n=A\alpha^n+B\beta^n,\ \forall n\in\mathbf{N},$$

If $x_0=0=F_0, x_1=1=F_1$, then $A=\frac{1}{\sqrt{5}}, B=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ so:

$$F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n-\beta^n\right),\ \forall n\in\mathbf{N}\text{ (\textbf{Binet}, 1843)},$$

If $x_0=2=L_0, x_1=1=L_1$, then $A=B=1$, so

$$L_n=\alpha^n+\beta^n,\ \forall n\in\mathbf{N}.$$

Note that:

$$\alpha+\beta=1 \text{ and } \alpha\beta=-1,$$

*

* *

JACOBSTHAL POLINOAMYALS

$$J_n(x)=J_{n-1}(x)+xJ_{n-2}(x),\ \forall n\in\mathbf{N}^*-\{1\}, \forall x\in\mathbf{R}$$

$$J_0(x)=0, J_1(x)=J_2(x)=1, J_3(x)=x+1, J_4(x)=2x+1, J_5(x)=x^2+3x+1,$$

$$J_6(x)=3x^2+4x+1, J_7(x)=x^3+6x^2+5x+1, J_8(x)=4x^3+10x^2+6x+1,$$

$$J_9(x)=x^4+10x^3+15x^2+7x+1, J_{10}(x)=5x^4+20x^3+21x^2+8x+1.$$

$$t^2-t-x=0,$$

$$r(x)=\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}, s(x)=\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}, r+s=1, rs=-x, r-s=\sqrt{1+4x}.$$

$$J_n(x)=\frac{r^n-s^n}{r-s}=\frac{r^n-s^n}{\sqrt{1+4x}},\ \forall n\in\mathbf{N}^*.$$

$$K_n(x)=K_{n-1}(x)+xK_{n-2}(x), \forall n\geq 2, \forall x\in\mathbf{R}.$$

$$K_1(x)=1, K_2(x)=x, K_3(x)=2x, K_4(x)=x^2+2x, K_5(x)=3x^2+2x,$$

$$K_6(x)=x^3+5x^2+2x, K_7(x)=4x^3+7x^2+2x, K_8(x)=x^4+9x^3+9x^2+2x,$$

$$K_9(x)=5x^4+16x^3+11x^2+2x, K_{10}(x)=x^5+14x^4+25x^3+13x^2+2x.$$

$$K_n(x)=Ar^n+Bs^n,\ \forall n\in\mathbf{N}^*, \forall x\in\mathbf{R}.$$

$$\begin{cases} Ar + Bs = K_1(x) = 1 \\ Ar^2 + Bs^2 = K_2(x) = x \end{cases}, \quad A = \frac{x-s}{r\sqrt{1+4x}}, B = \frac{r-x}{s\sqrt{1+4x}},$$

$$K_n(x) = \frac{x-s}{r\sqrt{1+4x}} r^n + \frac{r-x}{s\sqrt{1+4x}} s^n = \frac{(x-s)r^{n+1} + (r-x)s^{n-1}}{\sqrt{1+4x}} =$$

$$= \frac{x(r^{n-1} - s^{n-1}) - rs(r^{n-2} - s^{n-2})}{\sqrt{1+4x}} = x\left(J_{n-1}(x) + J_{n-2}(x)\right).$$

*   *

*

*

*   *

OTHER JACOBSTHAL POLINOAMYALS

$$k_n(x) = k_{n-1}(x) + xk_{n-2}(x),\ \forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}, \forall x \in \mathbf{R}$$

$$k_0(x) = 2, k_1(x) = 1.$$

$$Q_n(x) = xQ_{n-1}(x) + xQ_{n-2}(x),\ \forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}, \forall x \in \mathbf{R}$$

$$Q_0(x) = 0, Q_1(x) = 1, Q_2(x) = x.$$

$$t^2 - t - x = 0,$$

$$t_1 = \frac{1+\sqrt{4x+1}}{2}, t_2 = \frac{1-\sqrt{4x+1}}{2},$$

$$y^2 - xy - x = 0$$

$$y_1 = \frac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}, y_2 = \frac{x-\sqrt{x^2+4x}}{2}.$$

$$k_n(x) = At_1^n + Bt_2^n,\ \forall n \in \mathbf{N},$$

$$Q_n(x) = Cy_1^n + Dy_2^n,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

$$\begin{cases} k_0(x) = A + B = 2 \\ k_1(x) = At_1 + Bt_2 = 1 \end{cases}$$

$$A=1, B=1,\ k_n(x)=\left(\frac{1+\sqrt{4x+1}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{4x+1}}{2}\right)^n=t_1^n+t_2^n,\ \forall n\in\mathbf{N}.$$

$$k_0(x)=2, k_1(x)=1, k_2(x)=2x+1, k_3(x)=3x+1, k_4(x)=2x^2+4x+1,$$
$$k_5(x)=5x^2+5x+1, k_6(x)=2x^3+9x^2+6x+1, k_7(x)=2x^4+11x^3+15x^2+7x+1,$$
$$k_8(x)=4x^4+20x^3+21x^2+8x+1.$$

$$\begin{cases}C+D=0\\ Cy_1+Dy_2=1\end{cases}\Rightarrow C=-D, C=\frac{1}{\sqrt{x^2+4x}}, D=-\frac{1}{\sqrt{x^2+4x}}.$$

$$Q_n(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4x}}\left(\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}\right)^n-\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4x}}{2}\right)^n\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+4x}}\left(y_1^n-y_2^n\right),\ \forall n\in\mathbf{N}.$$

$$Q_0(x)=0, Q_1(x)=1, Q_2(x)=x, Q_3(x)=x^2+x, Q_4(x)=x^3+2x^2,$$
$$Q_5(x)=x^4+x^3+3x^2, Q_6(x)=x^5+2x^4+5x^3,$$
$$Q_7(x)=x^6+3x^5+6x^4+3x^3, Q_8(x)=x^7+4x^6+8x^5+8x^4.$$

*　　　*

*

*

*　　　*

MORGAN POLINOAMYALS

$$(C_n(x))_{n\geq 0}, (B_n(x))_{n\geq 0}, C_0(x) = B_0(x) = 1,$$
$$(i)\ C_n(x) = xB_{n-1}(x) + C_{n-1}(x)$$
$$(j)\ B_n(x) = (x+1)B_{n-1}(x) + C_{n-1}(x),\ \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}.$$

$$C_o(x) = 1, C_1(x) = x+1, C_2(x) = x^2 + 3x + 1, C_3(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 1,$$
$$C_4(x) = x^4 + 7x^3 + 15x^2 + 10x + 1.$$
$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{n-k} x^k,\ \forall n \in \mathbf{N}$$

.

$$B_0(x) = 1, B_1(x) = x+2, B_2(x) = x^2 + 4x + 3, B_3(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 4,$$
$$B_4(x) = x^4 + 8x^3 + 21x^2 + 20x + 5.$$
$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k+1}{n-k} x^k,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$
$$C_n(x) = B_n(x) - B_{n-1}(x),\ \forall n \in \mathbf{N}^* \text{ and } xB_n(x) = C_{n+1}(x) - C_n(x),\ \forall n \in \mathbf{N}.$$
$$B_n(x) = (x+2)B_{n-1}(x) - B_{n-2}(x),\ \forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$$
$$B_0(x) = 1, B_1(x) = x+2.$$
$$C_n(x) = (x+2)C_{n-1}(x) - C_{n-2}(x),\ \forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$$
$$C_0(x) = 1, C_1(x) = x+1.$$

$$B_n(x) = \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x+2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x+2 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x+2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & x+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & x+2 \end{vmatrix}$$

$$B_n(x)=(x+2)B_{n-1}(x)-\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & x+2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & x+2 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x+2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x+2\end{vmatrix}=$$

$$=(x+2)B_{n-1}(x)-\begin{vmatrix}x+2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 1 & x+2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & x+2 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x+2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x+2\end{vmatrix}=$$

$$=(x+2)B_{n-1}(x)-B_{n-2}(x).$$

By (j) yields:

$$C_{n-1}(x)=B_n(x)-(x+1)B_{n-1}(x)$$

so (i) becomes:

$$B_{n+1}(x)-(x+1)B_n(x)=xB_{n-1}(x)+B_n(x)-(x+1)B_{n-1}(x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow B_{n+1}(x)=(x+2)B_n(x)-B_{n-1}(x), \forall x\in\mathbf{R}, \forall n\in\mathbf{N}^*, \forall x\in\mathbf{R}.$$

Also by (i) we deduce that:

$$xB_{n-1}(x)=C_n(x)-C_{n-1}(x),$$

so (j) yields:

$$xB_n(x)=(x+1)xB_{n-1}(x)+xC_{n-1}(x)\Leftrightarrow C_{n+1}(x)-C_n(x)=(x+1)(C_n(x)-C_{n-1}(x))+$$
$$+xC_{n-1}(x)\Leftrightarrow C_{n+1}x=(x+2)C_n(x)-C_{n-1}(x).$$

1.133. $x\sum_{k=0}^{n}B_k(x)=C_{n+1}(x)-1,\ \forall n\in\mathbf{N}^*$.

Proof. $xB_k(x)=C_{k+1}(x)-C_k(x), \forall k\in N$, then:

$$x\sum_{k=0}^{n}B_k(x)=\sum_{k=0}^{n}C_{k+1}(x)-\sum_{k=0}^{n}C_k(x)=C_{n+1}(x)-C_0(x)=C_{n+1}(x)-1.$$

1.134. $\sum_{k=0}^{n} C_k(x) = B_n(x), \ \forall n \in \mathbf{N}.$

Proof. $C_k(x) = B_k(x) - B_{k-1}(x), \ \forall k \in \mathbf{N}^*$**,** so

$$\sum_{k=0}^{n} C_k(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k(x) - \sum_{k=0}^{n} B_{k-1}(x) = B_n(x) - B_{-1}(x) = B_n(x),$$

since $B_{-1}(x) = 0$.

The equation of $B_n(x)$ and $C_n(x)$ is :

$$t^2 - (x+2)t + 1 = 0,$$

$$r(x) = \frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2}, s(x) = \frac{x+2-\sqrt{x^2+4x}}{2},$$

so

$$B_n(x) = Ur^n + Vs^n, \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

$$\begin{cases} B_0(x) = 1 = U + V \\ B_1(x) = x + 2 = Ur + Vs \end{cases},$$

$$U = \frac{r}{\sqrt{x^2+4x}}, V = -\frac{s}{\sqrt{x^2+4x}}.$$

So we obtain the *Binet*'s formula for $B_n(x)$:

$$B_n(x) = \frac{r^{n+1}}{\sqrt{x^2+4x}} - \frac{s^{n+1}}{\sqrt{x^2+4x}} = \frac{r^{n+1} - s^{n+1}}{\sqrt{x^2+4x}} =$$

$$= \frac{r^{n+1} - s^{n+1}}{r - s} = \frac{(r(x))^{n+1} - (s(x))^{n+1}}{r(x) - s(x)}, \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

1.135. $f_{2n}(x) = xB_{n-1}(x^2), \ \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Proof. $f_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}, \ \forall n \in \mathbf{N}$**,** $\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2},$

$$\beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}, \alpha^2(x) = \frac{x^2 + x\sqrt{x^2+4} + 2}{2}, \beta^2(x) = \frac{x^2 - x\sqrt{x^2+4} + 2}{2},$$ so

$$f_{2n}(x) = \frac{\alpha^{2n}(x) - \beta^{2n}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} = \frac{(\alpha^2(x))^n - (\beta^2(x))^n}{\alpha(x) - \beta(x)} = \frac{(r(x^2))^n - (s(x^2))^n}{\sqrt{x^2+4x}} =$$

$$= \frac{(r(x^2))^n - (s(x^2))^n}{\sqrt{x^4+4x^2}} \cdot x = x \cdot \frac{(r(x^2))^n - (s(x^2))^n}{r(x^2) - s(x^2)} = xB_{n-1}(x^2).$$

1.136. $C_n(x^2) = f_{2n+1}(x), \ \forall n \in \mathbf{N}.$

Proof. $C_n(x) = B_n(x) - B_{n-1}(x)$, so:

$$xC_n(x^2) = xB_n(x^2) - xB_{n-1}(x^2) = xf_{2n+2}(x) - xf_{2n}(x) =$$
$$= x(f_{2n+2}(x) - f_{2n}(x)) = xf_{2n+1}(x),$$

so:

$$C_n(x^2) = f_{2n+1}(x), \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Let:

$$S = \begin{pmatrix} x+2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1(x) & -B_0(x) \\ B_0(x) & B_1(x) \end{pmatrix}.$$

$$S^2 = \begin{pmatrix} x+2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+4x+3 & -(x+2) \\ x+2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_2(x) & -B_1(x) \\ B_1(x) & -B_0(x) \end{pmatrix},$$

and by mathematical induction we get:

$$S^n = \begin{pmatrix} B_n(x) & -B_{n-1}(x) \\ B_{n-1}(x) & -B_{n-2}(x) \end{pmatrix}, \ \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

$$\det S = \begin{vmatrix} x+2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \text{ so:}$$

$$1 = \det S^n = \begin{vmatrix} B_n(x) & -B_{n-1}(x) \\ B_{n-1}(x) & -B_{n-2}(x) \end{vmatrix} = -B_n(x)B_{n-2}(x) + B_{n-1}^2(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_n^2(x) - B_{n+1}(x)B_{n-1}(x) = 1 \Rightarrow B_{n+1}(x)B_{n-1}(x) - B_n^2(x) = -1.$$

Since:

$$\begin{pmatrix} C_n(x) & -C_{n-1}(x) \\ C_{n-1}(x) & -C_{n-2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_n(x) - B_{n-1}(x) & -(B_{n-1}(x) - B_{n-2}(x)) \\ B_{n-1}(x) - B_{n-2}(x) & -(B_{n-2}(x) - B_{n-3}(x)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} B_n(x) & -B_{n-1}(x) \\ B_{n-1}(x) & -B_{n-2}(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_{n-1}(x) & -B_{n-2}(x) \\ B_{n-2}(x) & -B_{n-3}(x) \end{pmatrix} = S^n - S^{n-1} = S^{n-1}(S - I_2).$$

yields:

$$\det\begin{pmatrix} C_n(x) & -C_{n-1}(x) \\ C_{n-1}(x) & -C_{n-2}(x) \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} C_n(x) & -C_{n-1}(x) \\ C_{n-1}(x) & -C_{n-2}(x) \end{vmatrix} = \det(S^{n-1}(S - I_2)) = \det(S - I_2).$$

1.137. $C_{n+1}(x)C_{n-1}(x) - C_n^2(x) = x, \ \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Proof. $\begin{vmatrix} C_n(x) & -C_{n-1}(x) \\ C_{n-1}(x) & -C_{n-2}(x) \end{vmatrix} = \det(S - I_2) = \begin{vmatrix} x+1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -x - 1 + 1 = -x$, i.e.

$$-C_n(x)C_{n-2}(x) + C_{n-1}^2(x) = -x \Leftrightarrow C_n(x)C_{n-2}(x) - C_{n-1}^2(x) = x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_{n+1}(x)C_{n-1}(x) - C_n^2(x) = x.$$

1.138. $B_{2n-1}(x)=\left(B_n(x)-B_{n-2}(x)\right)B_{n-1}(x),\ \forall n\in\mathbf{N}^*$.

Proof. $B_{m+n}(x)=B_m(x)B_n(x)-B_{m-1}(x)B_{n-1}(x), \forall n\in\mathbf{N},$ and taking $m=n-1$ yields:

$$B_{2n-1}(x)=B_n(x)B_{n-1}(x)-B_{n-1}(x)B_{n-2}(x)=\left(B_n(x)-B_{n-2}(x)\right)B_{n-1}(x).$$

1.139. $(x+2)B_{2n-1}(x)=B_n^2(x)-B_{n-2}^2(x),\ \forall n\in\mathbf{N}^*-\{1\}$.

Proof. By **1.138** we have:

$(x+2)B_{2n-1}(x)=(B_n(x)-B_{n-2}(x))(x+2)B_{n-1}(x)$, and using:

$(x+2)B_{2n-1}(x)=B_n(x)+B_{n-2}(x)$, yields:

$(x+2)B_{2n-1}(x)=(B_n(x)-B_{n-2}(x))(B_n(x)+B_{n-2}(x))=B_n^2(x)-B_{n-2}^2(x)$.

1.140. $C_{m+n}(x)=B_m(x)C_n(x)-B_{m-1}(x)C_{n-1}(x),\ \forall m,n\in\mathbf{N}^*$.

Proof. $C_{m+n}(x)=B_{m+n}(x)-B_{m+n-1}(x)=B_m(x)B_n(x)-B_{m-1}(x)B_{n-1}(x)-$

$$-B_m(x)B_{n-1}(x)+B_{m-1}(x)B_{n-2}(x)=B_m(x)(B_n(x)-B_{n-1}(x))-$$

$$-B_{m-1}(x)(B_{n-1}(x)-B_{n-2}(x))=B_m(x)C_n(x)-B_{m-1}(x)C_{n-1}(x).$$

1.141. $C_{2n}(x)=B_n(x)C_n(x)-B_{n-1}(x)C_{n-1}(x),\ \forall n\in\mathbf{N}^*$.

Proof. In **1.140** we take $m=n$.

1.142. $B_{n+1}(x)-B_{n-1}(x)=C_{n+1}(x)+C_n(x),\ \forall n\in\mathbf{N}.$

Proof. $C_n(x)=B_n(x)-B_{n-1}(x),\ \forall n\in\mathbf{N}^*$, so

$$C_{n+1}(x)+C_n(x)=B_{n+1}(x)-B_n(x)+B_n(x)-B_{n-1}(x)=B_{n+1}(x)-B_{n-1}(x).$$

1.143. $xB_n(x)-xB_{n-1}(x)=C_{n+1}(x)-C_{n-1}(x),\ \forall n\in\mathbf{N}^*$ (**Swamy**, 1966).

Proof. $xB_{n-1}(x)=C_n(x)-C_{n-1}(x),\ \forall n\in\mathbf{N}^*$. So:

$$xB_n(x)-xB_{n-1}(x)=C_{n+1}(x)-C_n(x)-C_n(x)+C_{n-1}(x)=C_{n+1}(x)-C_n(x).$$

1.144. $F_{2n+2}=F_{n+2}^2-F_n^2,\ \forall n\in\mathbf{N}.$

Proof. $F_{n+2}^2-F_n^2=\dfrac{(\alpha^{n+2}-\beta^{n+2})^2-(\alpha^n-\beta^n)^2}{(\alpha-\beta)^2}=\dfrac{1}{5}(\alpha^{2n+4}+\beta^{2n+4}-$

$$-2(\alpha\beta)^{n+2}-\alpha^{2n}-\beta^{2m}+2(\alpha\beta)^n)=\frac{1}{5}(\alpha^{2n+2}(\alpha^2-\alpha^{-2})+\beta^{2n+2}(\beta^2-\beta^{-2}))=$$

$$=\frac{1}{5}(\alpha^{2n+2}(\alpha^2-\beta^2)+\beta^{2n+2}(\beta^2-\alpha^2))=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha^{2n+2}-\beta^{2n+2})=$$

$$=\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}(\alpha^{2n+2}-\beta^{2n+2})=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2n+2}-\beta^{2n+2})=F_{2n+2}.$$

1.145. $F_{2n+2}^2-F_{2n-2}^2=3F_{2n}$, $\forall n\in\mathbf{N}$.

Proof. $F_{2n+2}^2-F_{2n-2}^2=\dfrac{(\alpha^{2n+2}-\beta^{2n+2})^2-(\alpha^{2n-2}-\beta^{2n-2})^2}{(\alpha-\beta)^2}=$

$$=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}(\alpha^{4n+4}+\beta^{4n+4}-2(\alpha\beta)^{n+4}-\alpha^{4n-4}-\beta^{4n-4}+2(\alpha\beta)^{n-4})=$$

$$=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}(\alpha^{2n}(\alpha^2-\alpha^{-2})+\beta^{2n}(\beta^2-\beta^{-2}))=$$

$$=\frac{(\alpha^4-\beta^4)}{(\alpha-\beta)^2}(\alpha^{2n}-\beta^{2n})=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)F_{2n}=3F_{2n}.$$

1.146. $F_{m+n}=F_{m+2}F_n-F_mF_{n-2}$, $\forall m\in\mathbf{N}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*-\{1\}$.

Proof. $F_{m+n}=F_{m+2}F_n-F_mF_{n-2}=$

$$F_{m+n}=F_{m+2}F_n-F_mF_{n-2}=\frac{(\alpha^{m+2}-\beta^{m+2})(\alpha^n-\beta^n)-(\alpha^m-\beta^m)(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2})}{(\alpha-\beta)^2}=$$

$$=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}(\alpha^{m+n+2}-\alpha^n\beta^{m+2}-\alpha^{m+2}\beta^n+\beta^{m+n+2}-\alpha^{m+n-2}-$$

$$-\alpha^m\beta^{n-2}-\alpha^{n-2}\beta^m-\beta^{m+n-2})=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}(\alpha^{m+n}(\alpha^2-\alpha^{-2})+\beta^{m+n}(\beta^2-\beta^{-2})-$$

$$-\alpha^n\beta^m(\alpha^2-\beta^{-2})-\alpha^m\beta^n(\alpha^2-\beta^{-2}))=\frac{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^{m+n}-\beta^{m+n})}{(\alpha-\beta)^2}=$$

$$=\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}(\alpha^{m+n}-\beta^{m+n})=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{m+n}-\beta^{m+n})=F_{m+n}.$$

4. PSEUDOSFERA

Prof. Tănase Gabriel
Colegiul agricol Dr. C. Angelescu Buzău

Pentru a intelege pseudosfera şi importanţa pe care o are in matematică trebuie să intelegem ce este aceea o curbă plană numită *tractrice*.
Conform dexonline tractrice este “Curbă plană având proprietatea că, în fiecare punct al ei, segmentul de tangentă, cuprins între punctul de tangentă și intersecția tangentei cu o dreaptă fixă, are lungimea constantă.”
Cuvantul tractrice vine din latinescul tractare – a trage.
Ecuaţiile parametrice ale unei tractrice se pot obţine cu cunoştinţele care se predau in liceu.
Iată cum:

Căutăm o funcţie $f:(0,R]\to[0,+\infty)$ derivabilă in fiecare punct astfel incat lungimea segmentului AB situat pe tangentă la grafic sa aibă lungimea constantă R.
Ecuaţia tangentei la grafic in punctul de abscisă x_0 este:

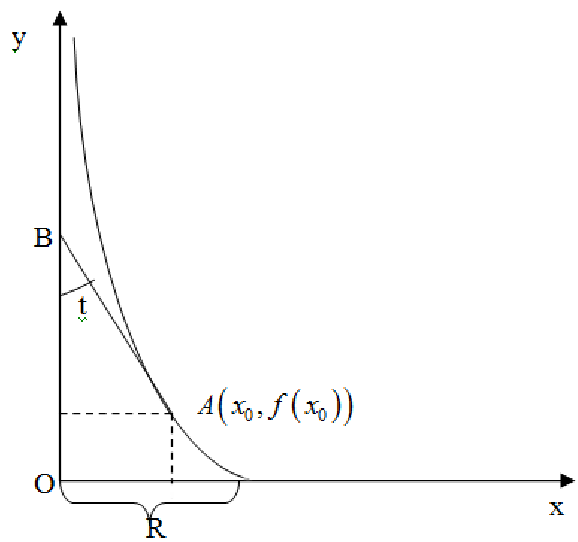
$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

Aflăm intersecţia acestei tangente cu axa Oy:

$$x=0\Rightarrow y=f(x_0)-f'(x_0)x_0$$

$$\Rightarrow B\left(0,f(x_0)-f'(x_0)x_0\right)$$

Punem condiţia ca lungimea segmentului AB să fie constantă egală cu R.



$$AB=\sqrt{x_0^2+\left[f'(x_0)x_0\right]^2}=R$$

$$x_0^2+\left[f'(x_0)x_0\right]^2=R^2\Rightarrow\left(f'(x_0)\right)^2=\frac{R^2-x_0^2}{x_0^2}\Rightarrow f'(x_0)=-\frac{\sqrt{R^2-x_0^2}}{x_0}$$ (funcţie descrescătoare).

Aşadar funcţia căutată de noi trebuie să indeplinească condiţia $f'(x)=-\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{x},\forall x\in(0,R]$.

In plus trebuie să indeplinească şi condiţia iniţială $f(R)=0$ (punctul din care incepe tractarea).

Vom căută funcţia f cu ajutorul integralei nedefinite $\int\left(-\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{x}\right)dx$ pe intervalul $(0,R]$.

Pentru a rezolva integrala de mai sus facem schimbarea de variabilă $x=R\sin t,t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$$\int\left(-\frac{\sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}}{R\sin t}\right)R\cos t dt=-R\int\left(\frac{\cos^2 t}{\sin t}\right)dt=-R\int\left(\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\right)dt=R\int\sin t dt-R\int\frac{1}{\sin t}dt=$$

$$=-R\cos t-R\int\frac{1}{\sin t}dt=-R\cos t-R\int\frac{\sin t}{\sin^2 t}dt=-R\cos t-R\int\frac{(\cos t)'}{\cos^2 t-1}dt=$$

$$=-R\cos t-\frac{R}{2}\ln\left|\frac{\cos t-1}{\cos t+1}\right|+C=-R\cos t-R\ln\left(tg\frac{t}{2}\right)+C \quad (*)$$

Aşadar $\int\left(-\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{x}\right)dx=-R\cos\left(\arcsin\frac{x}{R}\right)-\frac{R}{2}\ln\left|\frac{\cos\left(\arcsin\frac{x}{R}\right)-1}{\cos\left(\arcsin\frac{x}{R}\right)+1}\right|+C$

$$\int\left(-\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{x}\right)dx=-R\left(\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{R}\right)-\frac{R}{2}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{R}-1}{\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{R}+1}\right|+C=-\sqrt{R^2-x^2}-\frac{R}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{R^2-x^2}-R}{\sqrt{R^2-x^2}+R}\right|+C=$$

$$=-\sqrt{R^2-x^2}-R\ln\left(\frac{R-\sqrt{R^2-x^2}}{x}\right)+C$$

Deoarece $f(R)=0$ rezultă că funcţia căutată este $f(x)=-\sqrt{R^2-x^2}-R\ln\left(\frac{R-\sqrt{R^2-x^2}}{x}\right)$

Vom considera că tractricea este formată din graficul funcţiei de mai sus şi din simetricul acestuia faţă de axa Ox (fig.1).

Ţinand cont de rezultatul (*) putem deduce ecuaţiile parametrice ale tractricei:

$$\begin{cases} x=R\sin t \\ y=R\cos t+R\ln\left(tg\frac{t}{2}\right) \end{cases}, \quad t\in(0,\pi)$$

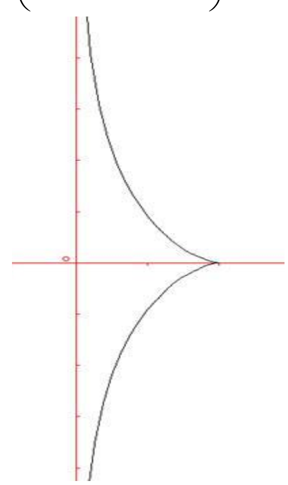
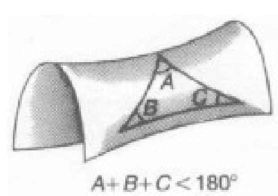


Fig .1

Suprafaţa obţinută prin rotirea tractricei in jurul axei *Oy* se numeşte *pseudosferă*. (fig.2).

Dacă sfera are proprietatea că in fiecare punct al ei curbura totală este aceeaşi (pozitivă) atunci pseudosfera are proprietatea că in fiecare punct al ei curbura totală este constantă negativă.De fapt in fiecare punct de pe pseudosferă forma este de şa (curbură negativă).

Un triunghi construit pe suprafaţa unei pseudosfere are suma unghiurilor mai mică de 180^0.

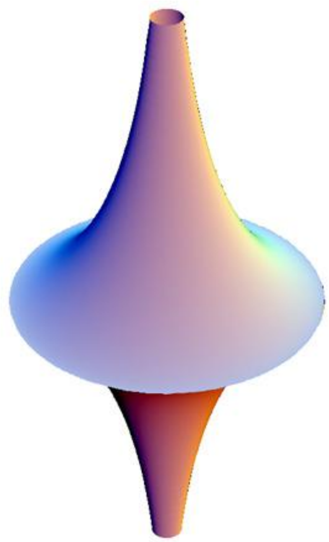


ste un punct exterior
rsectează cu *d*.

Matematicianul italian Eugenio Beltrami (1835 - 1899) a arătat că geometria neeuclidiană Bolyai - Lobacevsky nu este alta decat geometria intrinsecă pe o pseudosferă, aşa după cum geometria lui Euclid (pe care o invăţăm in gimnaziu) este geometria pe un plan.

Se rezolva astfel o problemă veche de aproape două mii de ani, aceea a postulatului 5 al lui Euclid (axioma paralelelor).Mai exact, afirmaţia “printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singura paralelă la acea dreaptă” nu poate fi demonstrată ci este axiomă pentru geometria euclidiană.

Fig .2



Bibliografie: “Aventura geometriilor neeuclidiene” Florica T. Câmpan

5. DEZVOLTĂRI ALE PROBLEMEI JP.110 DIN SPRING EDITION 2018 ROMANIAN MATHEMATICAL MAGAZINE

Marin Chirciu[1]

Articolul pornește de la o problemă din jurnalul de matematică RMM , Spring Edition 2018, obținând o clasă specială de inegalități în triunghi.

1) If $x,y,z\in(0,1)$ and ABC ia a triangle, then prove that

$$\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{x(1-x^3)}+\frac{\sin^2\frac{B}{2}}{y(1-y^3)}+\frac{\sin^2\frac{C}{2}}{z(1-z^3)}\ge\frac{2\sqrt[3]{4}}{3R}(2R-r).$$

Proposed by D.M.Bătinețu-Giurgiu, Neculai Stanciu, Romania

Soluție.

Funcția $g:(0,1)\to\boldsymbol{R}, g(x)=x(1-x^3)$ are $g'(x)=1-4x^3$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

Rezultă din tabelul de variație al funcției că $\max g(x)=g\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)=\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$,

de unde $\frac{1}{g(x)}\ge\frac{4\sqrt[3]{4}}{3}$.

Obținem $\sum\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{x(1-x^3)}\ge\frac{4\sqrt[3]{4}}{3}\sum\sin^2\frac{A}{2}=\frac{4\sqrt[3]{4}}{3}\left(1-\frac{r}{2R}\right)=\frac{2\sqrt[3]{4}}{3R}(2R-r)$.

Am folosit identitatea cunoscută în triunghi $\sum\sin^2\frac{A}{2}=1-\frac{r}{2R}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

Remarcă.

Inegalitatea se poate dezvolta.

Dezvoltarea 1.

Dacă $x,y,z\in(0,1)$ și ABC este un triunghi atunci are loc inegalitatea

$$\frac{f\left(\frac{A}{2}\right)}{x(1-x^3)}+\frac{f\left(\frac{B}{2}\right)}{y(1-y^3)}+\frac{f\left(\frac{C}{2}\right)}{z(1-z^3)}\ge\frac{4\sqrt[3]{4}}{3}\sum f\left(\frac{A}{2}\right),$$

unde f este o funcție care depinde de elementele triunghiului ABC , $f>0$.

Soluție.

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu", Pitești*

Se folosește raționamentul de mai sus.

Dezvoltarea 2.

Dacă $x, y, z \in (0,1)$ și ABC este un triunghi atunci are loc inegalitatea

$$\frac{f\left(\frac{A}{2}\right)}{x(1-x^n)}+\frac{f\left(\frac{B}{2}\right)}{y(1-y^n)}+\frac{f\left(\frac{C}{2}\right)}{z(1-z^n)}\geq\frac{(n+1)\sqrt[n]{n+1}}{n}\sum f\left(\frac{A}{2}\right),$$

unde f este o funcție care depinde de elementele triunghiului ABC, $f>0$ și $n\in\boldsymbol{N}^*$.

Soluție.

Se folosește raționamentul de mai sus pentru funcția $g:(0,1)\to\boldsymbol{R}, g(x)=x(1-x^n)$.

$g'(x)=1-(n+1)x^n$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$.

Rezultă din tabelul de variație al funcției că $\max g(x)=g\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}\right)=\frac{n}{(n+1)\sqrt[n]{n+1}}$,

de unde $\frac{1}{g(x)}\geq\frac{(n+1)\sqrt[n]{n+1}}{n}$.

Obținem $\sum\frac{f\left(\frac{A}{2}\right)}{x(1-x^n)}\geq\frac{(n+1)\sqrt[n]{n+1}}{n}\sum f\left(\frac{A}{2}\right)$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$.

Pentru $n=1$ inegalitatea de mai sus se scrie

$$\frac{f\left(\frac{A}{2}\right)}{x(1-x)}+\frac{f\left(\frac{B}{2}\right)}{y(1-y)}+\frac{f\left(\frac{C}{2}\right)}{z(1-z)}\geq 4\sum f\left(\frac{A}{2}\right).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{2}$.

În continuare să obținem o serie de inegalități în triunghi, folosind **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1,2,3$.

Remarcă.

La toate aplicațiile ce vor urma $x, y, z\in(0,1)$.

2) In ABC

$$\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{x(1-x^2)}+\frac{\sin^2\frac{B}{2}}{y(1-y^2)}+\frac{\sin^2\frac{C}{2}}{z(1-z^2)}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{r}{2R}\right).$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,** pentru $n=2$ și $f(x)=\sin^2 x$.

3) In ABC

$$\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{\sin^2\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{\sin^2\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq 4\left(1-\frac{r}{2R}\right).$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $f(x)=\sin^2 x$.

4) In ABC

$$\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{\cos^2\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{\cos^2\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq 4\left(2+\frac{r}{2R}\right).$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $f(x)=\cos^2 x$, iar $\sum\cos^2\frac{A}{2}=2+\frac{r}{2R}$.

5) In ABC

$$\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{x(1-x^2)}+\frac{\cos^2\frac{B}{2}}{y(1-y^2)}+\frac{\cos^2\frac{C}{2}}{z(1-z^2)}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(2+\frac{r}{2R}\right).$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=2$ și $f(x)=\cos^2 x$.

6) In ABC

$$\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{x(1-x^3)}+\frac{\cos^2\frac{B}{2}}{y(1-y^3)}+\frac{\cos^2\frac{C}{2}}{z(1-z^3)}\geq\frac{4\sqrt[3]{4}}{3}\left(2+\frac{r}{2R}\right).$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=3$și $f(x)=\cos^2 x$.

7) In ABC

$$\frac{\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq 4\left[\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2-2\right].$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $f(x)=\mathrm{tg}^2 x$, iar $\sum\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}=\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2-2$.

8) In ABC

$$\frac{\mathrm{ctg}^2\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{\mathrm{ctg}^2\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{\mathrm{ctg}^2\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq 4\cdot\frac{p^2-2r^2-8Rr}{r^2}.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $f(x)=\mathrm{ctg}^2 x$, iar $\sum\mathrm{ctg}^2\frac{A}{2}=\frac{p^2-2r^2-8Rr}{r^2}$.

9) In ABC

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq 4\cdot\frac{4R+r}{p}.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $f(x)=\operatorname{tg}x$, iar $\sum\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{p}$.

10) In ABC

$$\frac{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq 4\cdot\frac{p}{r}.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $f(x)=\operatorname{ctg}x$, iar $\sum\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{p}{r}$.

11) In ABC

$$\frac{\csc^2\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{\csc^2\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{\csc^2\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq 4\cdot\frac{p^2+r^2-8Rr}{r^2}.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $f(x)=\csc^2 x$, iar $\sum\csc^2\frac{A}{2}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{r^2}$.

12) In ABC

$$\frac{\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}{x(1-x)}+\frac{\sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A}{2}}{y(1-y)}+\frac{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}}{z(1-z)}\geq\frac{p^2+r^2-8Rr}{4R^2}.$$

Soluție.

Vezi **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{16R^2}$.

13) In ABC

$$\frac{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}{x(1-x)}+\frac{\cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A}{2}}{y(1-y)}+\frac{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}}{z(1-z)}\geq\frac{p^2+(4R+r)^2}{4R^2}.$$

Soluție.

Dezvoltarea 2,pentru $n=1$și $\sum\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}=\frac{p^2+(4R+r)^2}{16R^2}$.

14) In ABC

$$\frac{\csc^2\frac{B}{2}\csc^2\frac{C}{2}}{x(1-x)}+\frac{\csc^2\frac{C}{2}\csc^2\frac{A}{2}}{y(1-y)}+\frac{\csc^2\frac{A}{2}\csc^2\frac{B}{2}}{z(1-z)}\geq\frac{32R(2R-r)}{r^2}.$$

Soluție.

Vezi **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum\csc^2\frac{B}{2}\csc^2\frac{C}{2}=\frac{8R(2R-r)}{r^2}$.

15) In ABC

$$\frac{\sec^2\frac{B}{2}\sec^2\frac{C}{2}}{x(1-x)}+\frac{\sec^2\frac{C}{2}\sec^2\frac{A}{2}}{y(1-y)}+\frac{\sec^2\frac{A}{2}\sec^2\frac{B}{2}}{z(1-z)}\geq\frac{32R(4R+r)}{p^2}.$$

Soluție.

Vezi **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$ și $\sum\sec^2\frac{B}{2}\sec^2\frac{C}{2}=\frac{8R(4R+r)}{r^2}$.

16) In ABC

$$\frac{\text{tg}^2\frac{B}{2}\text{tg}^2\frac{C}{2}}{x(1-x)}+\frac{\text{tg}^2\frac{C}{2}\text{tg}^2\frac{A}{2}}{y(1-y)}+\frac{\text{tg}^2\frac{A}{2}\text{tg}^2\frac{B}{2}}{z(1-z)}\geq 4\cdot\frac{p^2-2r^2-8Rr}{p^2}.$$

Soluție.

Vezi **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$ și $\sum\text{tg}^2\frac{B}{2}\text{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{p^2-2r^2-8Rr}{p^2}$.

17) In ABC

$$\frac{\text{ctg}^2\frac{B}{2}\text{ctg}^2\frac{C}{2}}{x(1-x)}+\frac{\text{ctg}^2\frac{C}{2}\text{ctg}^2\frac{A}{2}}{y(1-y)}+\frac{\text{ctg}^2\frac{A}{2}\text{ctg}^2\frac{B}{2}}{z(1-z)}\geq 4\cdot\frac{(4R+r)^2-2p^2}{r^2}.$$

Soluție.

Dezvoltarea 2, pentru $n=1$ și $\sum\text{ctg}^2\frac{B}{2}\text{ctg}^2\frac{C}{2}=\frac{(4R+r)^2-2p^2}{r^2}$.

18) In ABC

$$\frac{\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2}}{x(1-x)}+\frac{\text{tg}\frac{C}{2}\text{tg}\frac{A}{2}}{y(1-y)}+\frac{\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}}{z(1-z)}\geq 4.$$

Soluție.

Vezi **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$ și $\sum\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2}=1$.

19) In ABC

$$\frac{\text{ctg}\frac{B}{2}\text{ctg}\frac{C}{2}}{x(1-x)}+\frac{\text{ctg}\frac{C}{2}\text{ctg}\frac{A}{2}}{y(1-y)}+\frac{\text{ctg}\frac{A}{2}\text{ctg}\frac{B}{2}}{z(1-z)}\geq 4\left(1+\frac{4R}{r}\right).$$

Soluție.

Vezi **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$ și $\sum\text{ctg}\frac{B}{2}\text{ctg}\frac{C}{2}=1+\frac{4R}{r}$.

20) In ABC

$$\frac{a\sin^2\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{b\sin^2\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{c\sin^2\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq 4p\left(1-\frac{r}{R}\right).$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$ și $\sum a\sin^2\frac{A}{2}=p\left(1-\frac{r}{R}\right)$.

21) In ABC

$$\frac{a\cos^2\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{b\cos^2\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{c\cos^2\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq 4p\left(1+\frac{r}{R}\right).$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$ și $\sum a\cos^2\frac{A}{2}=p\left(1+\frac{r}{R}\right)$.

22) In ABC

$$\frac{a\cdot\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{b\cdot\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{c\cdot\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq 4\cdot\frac{4R(4R+r)-2p^2}{p}.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$ și $\sum a\cdot\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}=\frac{4R(4R+r)-2p^2}{p}$.

23) In ABC

$$\frac{a\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{b\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{c\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq\frac{8p(2R-r)}{r}.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$ și $\sum a\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}=\frac{2p(2R-r)}{r}$.

24) In ABC

$$\frac{a\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{b\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{c\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq 8(2R-r).$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$ și $\sum a\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}=2(2R-r)$.

25) In ABC

$$\frac{a\cdot\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{b\cdot\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{c\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq 8(4R+r).$$

26) In ABC

$$\frac{a\cdot\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}{x(1-x)}+\frac{b\cdot\sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A}{2}}{y(1-y)}+\frac{c\cdot\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}}{z(1-z)}\geq 4\cdot\frac{rp}{4R}.$$

Soluție.

Vezi **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$ și $\sum a\cdot\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}=\frac{rp}{4R}$.

27) In ABC

$$\frac{a\cdot \mathrm{tg}^2\frac{B}{2}\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}}{x(1-x)}+\frac{b\cdot \mathrm{tg}^2\frac{C}{2}\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}}{y(1-y)}+\frac{c\cdot \mathrm{tg}^2\frac{A}{2}\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}}{z(1-z)}\geq 4\cdot\frac{2r(2R-r)}{p}.$$

Soluție.

Vezi **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum a\cdot \mathrm{tg}^2\frac{B}{2}\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{2r(2R-r)}{p}$.

28) In ABC

$$\frac{a\cdot \sec^2\frac{B}{2}\sec^2\frac{C}{2}}{x(1-x)}+\frac{b\cdot \sec^2\frac{C}{2}\sec^2\frac{A}{2}}{y(1-y)}+\frac{a\cdot \sec^2\frac{A}{2}\sec^2\frac{B}{2}}{z(1-z)}\geq\frac{64R(R+r)}{p}.$$

Soluție.

Vezi **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum a\cdot \sec^2\frac{B}{2}\sec^2\frac{C}{2}=\frac{16R(R+r)}{p}$.

29) In ABC

$$\frac{a\cdot \csc^2\frac{B}{2}\csc^2\frac{C}{2}}{x(1-x)}+\frac{b\cdot \csc^2\frac{C}{2}\csc^2\frac{A}{2}}{y(1-y)}+\frac{c\cdot \csc^2\frac{A}{2}\csc^2\frac{B}{2}}{z(1-z)}\geq\frac{64Rp(R-r)}{r^2}.$$

Soluție.

Vezi **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum a\cdot \csc^2\frac{B}{2}\csc^2\frac{C}{2}=\frac{16Rp(R-r)}{r^2}$.

30) In ABC

$$\frac{a\cdot \mathrm{ctg}^2\frac{B}{2}\mathrm{ctg}^2\frac{C}{2}}{x(1-x)}+\frac{b\cdot \mathrm{ctg}^2\frac{C}{2}\mathrm{ctg}^2\frac{A}{2}}{y(1-y)}+\frac{c\cdot \mathrm{ctg}^2\frac{A}{2}\mathrm{ctg}^2\frac{B}{2}}{z(1-z)}\geq\frac{p(4R+r)}{R}.$$

Soluție.

Vezi **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum a\cdot \mathrm{ctg}^2\frac{B}{2}\mathrm{ctg}^2\frac{C}{2}=\frac{p(4R+r)}{4R}$.

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum a\cdot \mathrm{ctg}\frac{A}{2}=2(4R+r)$.

31) In ABC

$$\frac{a^2\cdot \mathrm{tg}\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{b^2\cdot \mathrm{tg}\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{c^2\cdot \mathrm{tg}\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq 16p(R-r).$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum a^2\cdot \mathrm{tg}\frac{A}{2}=4p(R-r)$.

32) In ABC

$$\frac{a^2\cdot\text{ctg}\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{b^2\cdot\text{ctg}\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{c^2\cdot\text{ctg}\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq 16p(R+r).$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum a^2\cdot\text{ctg}\frac{A}{2}=4p(R+r)$.

33) In ABC

$$\frac{a^2\cdot\text{tg}^2\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{b^2\cdot\text{tg}^2\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{c^2\cdot\text{tg}^2\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq 8\left(8R^2+r^2-p^2\right).$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum a^2\cdot\text{tg}^2\frac{A}{2}=2\left(8R^2+r^2-p^2\right)$.

34) In ABC

$$\frac{a^2\cdot\text{ctg}^2\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{b^2\cdot\text{ctg}^2\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{c^2\cdot\text{ctg}^2\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq 8\left[(4R+r)^2-2p^2\right].$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum a^2\cdot\text{ctg}^2\frac{A}{2}=2\left[(4R+r)^2-2p^2\right]$.

35) In ABC

$$\frac{a^3\cdot\text{tg}\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{b^3\cdot\text{tg}\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{c^3\cdot\text{tg}\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq 4\cdot\left[2p^2(2R-3r)+2r^2(4R+r)\right].$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum a^3\cdot\text{tg}\frac{A}{2}=\left[2p^2(2R-3r)+2r^2(4R+r)\right]$.

36) In ABC

$$\frac{a^3\cdot\text{ctg}\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{b^3\cdot\text{ctg}\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{c^3\cdot\text{ctg}\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq 4\cdot\left[2p^2(2R+3r)-2r(4R+r)^2\right].$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum a^3\cdot\text{ctg}\frac{A}{2}=2p^2(2R+3r)-2r(4R+r)^2$.

37) In ABC

$$\frac{\frac{1}{a}\cdot\text{tg}\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{\frac{1}{b}\cdot\text{tg}\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{\frac{1}{a}\cdot\text{tg}\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq\frac{1}{R}\left[1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right].$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum \frac{1}{a}\cdot \mathrm{tg}\frac{A}{2}=\frac{1}{4R}\left[1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right]$.

38) In ABC

$$\frac{\frac{1}{a}\cdot \mathrm{ctg}\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{\frac{1}{b}\cdot \mathrm{ctg}\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{\frac{1}{c}\cdot \mathrm{ctg}\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq 4\cdot \frac{p^2+r^2-8Rr}{4Rr^2}.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum \frac{1}{a}\cdot \mathrm{ctg}\frac{A}{2}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{4Rr^2}$.

39) In ABC

$$\frac{\frac{1}{a}\cdot \sin^2\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{\frac{1}{b}\cdot \sin^2\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{\frac{1}{a}\cdot \sin^2\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq \frac{4R+r}{Rp}.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum \frac{1}{a}\cdot \sin^2\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{4Rp}$.

40) In ABC

$$\frac{\frac{1}{a}\cdot \cos^2\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{\frac{1}{b}\cdot \cos^2\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{\frac{1}{a}\cdot \cos^2\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq \frac{p}{Rr}.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum \frac{1}{a}\cdot \cos^2\frac{A}{2}=\frac{p}{4Rr}$.

41) In ABC

$$\frac{\frac{1}{bc}\cdot \sin^2\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{\frac{1}{ca}\cdot \sin^2\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{\frac{1}{ab}\cdot \sin^2\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq \frac{R-r}{R^2r}.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum \frac{1}{bc}\cdot \sin^2\frac{A}{2}=\frac{R-r}{4R^2r}$.

42) In ABC

$$\frac{\frac{1}{bc}\cdot \cos^2\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{\frac{1}{ca}\cdot \cos^2\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{\frac{1}{ab}\cdot \cos^2\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq \frac{R+r}{R^2r}.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum \frac{1}{bc}\cdot \cos^2\frac{A}{2}=\frac{R+r}{4R^2r}$.

43) In ABC

$$\frac{\frac{1}{bc}\cdot \mathrm{tg}^2\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{\frac{1}{ca}\cdot \mathrm{tg}^2\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{\frac{1}{ab}\cdot \mathrm{tg}^2\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq 2\cdot\frac{8R^2+2Rr-p^2}{p^2Rr}.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum\frac{1}{bc}\cdot \mathrm{tg}^2\frac{A}{2}=\frac{8R^2+2Rr-p^2}{2p^2Rr}$.

44) In ABC

$$\frac{\frac{1}{bc}\cdot \mathrm{ctg}^2\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{\frac{1}{ca}\cdot \mathrm{ctg}^2\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{\frac{1}{ab}\cdot \mathrm{ctg}^2\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq \frac{2R-r}{Rr^2}.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum\frac{1}{bc}\cdot \mathrm{ctg}^2\frac{A}{2}=\frac{2R-r}{4Rr^2}$.

45) In ABC

$$\frac{\frac{1}{bc}\cdot \sec^2\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{\frac{1}{ca}\cdot \sec^2\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{\frac{1}{ab}\cdot \sec^2\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq 4\cdot\frac{4R+r}{rp^2}.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum\frac{1}{bc}\cdot \sec^2\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{rp^2}$.

46) In ABC

$$\frac{\frac{1}{bc}\cdot \csc^2\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{\frac{1}{ca}\cdot \csc^2\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{\frac{1}{ab}\cdot \csc^2\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq 4\cdot\frac{1}{r^2}.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum\frac{1}{bc}\cdot \csc^2\frac{A}{2}=\frac{1}{r^2}$.

47) In ABC

$$\frac{(b+c)\sin^2\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{(c+a)\sin^2\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{(a+b)\sin^2\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq 4p.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum(b+c)\sin^2\frac{A}{2}=p$.

48) In ABC

$$\frac{(b+c)\cos^2\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{(c+a)\cos^2\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{(a+b)\cos^2\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq 12p.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum(b+c)\cos^2\frac{A}{2}=3p$.

49) In ABC

$$\frac{(b+c)\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{(c+a)\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{(a+b)\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq\frac{8\left(8R^2+6Rr+r^2-p^2\right)}{p}.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$ și $\sum(b+c)\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}=\frac{2\left(8R^2+6Rr+r^2-p^2\right)}{p}$.

50) In ABC

$$\frac{(b+c)\mathrm{ctg}^2\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{(c+a)\mathrm{ctg}^2\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{(a+b)\mathrm{ctg}^2\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq\frac{8p\left(p^2-r^2-2Rr\right)}{r^2}.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$ și $\sum(b+c)\mathrm{ctg}^2\frac{A}{2}=\frac{2p\left(p^2-r^2-2Rr\right)}{r^2}$.

51) In ABC

$$\frac{(b+c)\sec^2\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{(c+a)\sec^2\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{(a+b)\sec^2\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq\frac{8\left(p^2+r^2+6Rr+8R^2\right)}{p}.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$ și $\sum(b+c)\sec^2\frac{A}{2}=\frac{2\left(p^2+r^2+6Rr+8R^2\right)}{p}$.

52) In ABC

$$\frac{(b+c)\csc^2\frac{A}{2}}{x(1-x)}+\frac{(c+a)\csc^2\frac{B}{2}}{y(1-y)}+\frac{(a+b)\csc^2\frac{C}{2}}{z(1-z)}\geq\frac{8p\left(p^2+r^2-10Rr\right)}{r^2}.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$ și $\sum(b+c)\csc^2\frac{A}{2}=\frac{2p\left(p^2+r^2-10Rr\right)}{r^2}$.

53) In ABC

$$\frac{(b+c)\sec^2\frac{B}{2}\sec^2\frac{C}{2}}{x(1-x)}+\frac{(c+a)\sec^2\frac{C}{2}\sec^2\frac{A}{2}}{y(1-y)}+\frac{(a+b)\sec^2\frac{A}{2}\sec^2\frac{B}{2}}{z(1-z)}\geq\frac{16R(R+r)}{p}.$$

Soluție.

Vezi **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$, și $\sum(b+c)\sec^2\frac{B}{2}\sec^2\frac{C}{2}=\frac{4R(R+r)}{p}$.

54) In ABC

$$\frac{(b+c)\csc^2\frac{B}{2}\csc^2\frac{C}{2}}{x(1-x)}+\frac{(c+a)\csc^2\frac{C}{2}\csc^2\frac{A}{2}}{y(1-y)}+\frac{(a+b)\csc^2\frac{A}{2}\csc^2\frac{B}{2}}{z(1-z)}\geq\frac{64R^2p}{r^2}.$$

Soluție.

Vezi **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$ și $\sum(b+c)\csc^2\frac{B}{2}\csc^2\frac{C}{2}=\frac{16R^2p}{r^2}$.

55) In ABC

$$\frac{(b+c)\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}{x(1-x)}+\frac{(c+a)\sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A}{2}}{y(1-y)}+\frac{(a+b)\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}}{z(1-z)}\geq\frac{rp}{R}.$$

Soluție.

Vezi **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$ și $\sum(b+c)\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}=\frac{rp}{4R}$.

56) In ABC

$$\frac{(b+c)\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}}{x(1-x)}+\frac{(c+a)\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}{y(1-y)}+\frac{(a+b)\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}}{z(1-z)}\geq\frac{8(p^2-r^2-10Rr)}{p}.$$

Soluție.

Vezi **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$ și $\sum(b+c)\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{2(p^2-r^2-10Rr)}{p}$.

57) In ABC

$$\frac{(b+c)\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}}{x(1-x)}+\frac{(c+a)\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}}{y(1-y)}+\frac{(a+b)\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}}{z(1-z)}\geq\frac{p(p^2+r^2+6Rr+8R^2)}{2R^2}.$$

Soluție.

Dezvoltarea 2, pentru $n=1$ și $\sum(b+c)\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}=\frac{p(p^2+r^2+6Rr+8R^2)}{8R^2}$.

58) In ABC

$$\frac{a}{x(1-x)}+\frac{b}{y(1-y)}+\frac{c}{z(1-z)}\geq 8p.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$ și $\sum a=2p$.

59) In ABC

$$\frac{a^2}{x(1-x)}+\frac{b^2}{y(1-y)}+\frac{c^2}{z(1-z)}\geq 16S\sqrt{3}.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$ și $\sum a^2=2(p^2-r^2-4Rr)\geq 4S\sqrt{3}$.

60) In ABC

$$\frac{a^3}{x(1-x)}+\frac{b^3}{y(1-y)}+\frac{c^3}{z(1-z)}\geq 32S(2R-r).$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$ și $\sum a^3=2p(p^2-3r^2-6Rr)\geq 8S(2R-r)$

61) In ABC

$$\frac{a^4}{x(1-x)}+\frac{b^4}{y(1-y)}+\frac{c^4}{z(1-z)}\geq 64S^2.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$ și $\sum a^4=2\left[p^4-p^2\left(8Rr+6r^2\right)+r^2\left(4R+r\right)^2\right]\geq 16S^2$

62) In ABC

$$\frac{bc}{x(1-x)}+\frac{ca}{y(1-y)}+\frac{ab}{z(1-z)}\geq 16S\sqrt{3}.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$ și $\sum bc=p^2+r^2+4Rr\geq 4S\sqrt{3}$.

63) In ABC

$$\frac{(bc)^2}{x(1-x)}+\frac{(ca)^2}{y(1-y)}+\frac{(ab)^2}{z(1-z)}\geq 64S^2.$$

Soluție.

Dezvoltarea 2, pentru $n=1$ și $\sum (bc)^2=\left[p^4-p^2\left(8Rr-2r^2\right)+r^2\left(4R+r\right)^2\right]\geq 16S^2$.

64) In ABC

$$\frac{bc(b+c)}{x(1-x)}+\frac{ca(c+a)}{y(1-y)}+\frac{ab(a+b)}{z(1-z)}\geq 8p\left(p^2+r^2-2Rr\right).$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$ și $\sum bc(b+c)=2p\left(p^2+r^2-2Rr\right)$

65) In ABC

$$\frac{r_a}{x(1-x)}+\frac{r_b}{y(1-y)}+\frac{r_c}{z(1-z)}\geq 4\cdot(4R+r).$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$ și $\sum r_a=4R+r$

66) In ABC

$$\frac{r_a^2}{x(1-x)}+\frac{r_b^2}{y(1-y)}+\frac{r_c^2}{z(1-z)}\geq 4\cdot\left(8R^2-5r^2\right).$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$ și $\sum r_a^2=(4R+r)^2-2p^2\geq 8R^2-5r^2$.

67) In ABC

$$\frac{r_br_c}{x(1-x)}+\frac{r_cr_a}{y(1-y)}+\frac{r_ar_b}{z(1-z)}\geq 4\cdot p^2.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,** pentru $n=1$ și $\sum r_br_c=p^2$.

68) In ABC

$$\frac{r_a^3}{x(1-x)}+\frac{r_b^3}{y(1-y)}+\frac{r_c^3}{z(1-z)}\geq 324r^3.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum r_a^2=(4R+r)^3-12Rp^2\geq 81r^3$.

69) In ABC

$$\frac{ar_a}{x(1-x)}+\frac{br_b}{y(1-y)}+\frac{cr_c}{z(1-z)}\geq 8p(2R-r).$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum ar_a=2p(2R-r)$

70) In ABC

$$\frac{a^2r_a}{x(1-x)}+\frac{b^2r_b}{y(1-y)}+\frac{c^2r_c}{z(1-z)}\geq 16p^2(R-r).$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum a^2r_a=4p^2(R-r)$

71) In ABC

$$\frac{ar_br_c}{x(1-x)}+\frac{br_cr_a}{y(1-y)}+\frac{cr_ar_b}{z(1-z)}\geq 8S(4R+r).$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum ar_br_c=2rp(4R+r)$

72) In ABC

$$\frac{bcr_br_c}{x(1-x)}+\frac{car_cr_a}{y(1-y)}+\frac{abr_ar_b}{z(1-z)}\geq 48S^2.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum bcr_br_c=p^2\left(p^2+r^2-8Rr\right)\geq 12S^2$

73) In ABC

$$\frac{a^2r_a^2}{x(1-x)}+\frac{b^2r_b^2}{y(1-y)}+\frac{c^2r_c^2}{z(1-z)}\geq 48S^2.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum a^2r_a^2=2p^2\left(8R^2+r^2-p^2\right)\geq 12S^2$

74) In ABC

$$\frac{(p-a)r_a}{x(1-x)}+\frac{(p-b)r_b}{y(1-y)}+\frac{(p-c)r_c}{z(1-z)}\geq 12S.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum (p-a)r_a=3S$

75) In ABC

$$\frac{(p-a)^2r_a^2}{x(1-x)}+\frac{(p-b)^2r_b^2}{y(1-y)}+\frac{(p-c)^2r_c^2}{z(1-z)}\geq 4\cdot 3S^2.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum(p-a)^2 r_a^2 = 3S^2$

76) In ABC

$$\frac{h_a}{x(1-x)}+\frac{h_b}{y(1-y)}+\frac{h_c}{z(1-z)} \geq 2\cdot\frac{p^2+r^2+4Rr}{R}.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum h_a = \frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}$.

77) In ABC

$$\frac{h_a^2}{x(1-x)}+\frac{h_b^2}{y(1-y)}+\frac{h_c^2}{z(1-z)} \geq 4\cdot\left[\left(\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}\right)^2-2\cdot\frac{2rp^2}{R}\right].$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum h_a^2 = \left(\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}\right)^2-2\cdot\frac{2rp^2}{R}$.

78) In ABC

$$\frac{h_bh_c}{x(1-x)}+\frac{h_ch_a}{y(1-y)}+\frac{h_ah_b}{z(1-z)} \geq \frac{8rp^2}{R}.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum h_bh_c = \frac{2rp^2}{R}$.

79) In ABC

$$\frac{(p-a)h_a}{x(1-x)}+\frac{(p-b)h_b}{y(1-y)}+\frac{(p-c)h_c}{z(1-z)} \geq \frac{r}{R}\cdot 24S.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum(p-a)h_a = \frac{p(p^2+r^2-8Rr)}{2R} \geq \frac{r}{R}\cdot 6S$.

80) In ABC

$$\frac{(p-a)^2h_a^2}{x(1-x)}+\frac{(p-b)^2h_b^2}{y(1-y)}+\frac{(p-c)^2h_c^2}{z(1-z)} \geq \left(\frac{r}{R}\right)^2\cdot 48S^2.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum(p-a)^2h_a^2 \geq \left(\frac{r}{R}\right)^2\cdot 12S^2$.

81) In ABC

$$\frac{a(h_a-r)}{x(1-x)}+\frac{b(h_b-r)}{y(1-y)}+\frac{c(h_c-r)}{z(1-z)} \geq 16S.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum a(h_a-r) = 4S$.

82) In ABC

$$\frac{a^2\left(h_a-r\right)^2}{x(1-x)}+\frac{b^2\left(h_b-r\right)^2}{y(1-y)}+\frac{c^2\left(h_c-r\right)^2}{z(1-z)}\geq\frac{64}{3}S^2.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum a^2\left(h_a-r\right)^2\geq\frac{16}{3}S^2$.

83) In ABC

$$\frac{m_a}{x(1-x)}+\frac{m_b}{y(1-y)}+\frac{m_c}{z(1-z)}\geq 36r.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum m_a\geq 9r$.

84) In ABC

$$\frac{m_a^2}{x(1-x)}+\frac{m_b^2}{y(1-y)}+\frac{m_c^2}{z(1-z)}\geq 6\left(p^2-r^2-4Rr\right).$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum m_a^2=\frac{3}{4}\sum a^2=\frac{3}{2}\left(p^2-r^2-4Rr\right)$.

85) In ABC

$$\frac{m_bm_c}{x(1-x)}+\frac{m_cm_a}{y(1-y)}+\frac{m_am_b}{z(1-z)}\geq\frac{144r^4}{R^2}.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$, $m_a\geq\frac{b^2+c^2}{4R}$ și $\sum m_bm_c\geq\frac{36r^4}{R^2}$.

86) In ABC

$$\frac{m_a^4}{x(1-x)}+\frac{m_b^4}{y(1-y)}+\frac{m_c^4}{z(1-z)}\geq 36S^2.$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum m_a^4=\frac{9}{16}\sum a^4\geq 9S^2$.

87) In ABC

$$\frac{a\cdot m_a^2}{x(1-x)}+\frac{b\cdot m_b^2}{y(1-y)}+\frac{c\cdot m_c^2}{z(1-z)}\geq 36Rrp$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum am_a^2=\frac{p}{2}\left(p^2+5r^2+2Rr\right)\geq 9Rrp$.

88) In ABC

$$\frac{a^2m_a^2}{x(1-x)}+\frac{b^2m_b^2}{y(1-y)}+\frac{c^2m_c^2}{z(1-z)}\geq 1296r^4.$$

Soluție.

Dezvoltarea 2,pentru $n=1$și $\sum a^2m_a^2=\dfrac{p^4+p^2\left(10r^2-8Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2}{2}\geq 324r^4$

89) In ABC

$$\frac{(a+b)(a+c)m_a^2}{x(1-x)}+\frac{(b+c)(b+a)m_b^2}{y(1-y)}+\frac{(c+a)(c+b)m_c^2}{z(1-z)}\geq 4\cdot 12r^2\cdot 108r^2.$$

Soluție.

Folosim $\sum(a+b)(a+c)m_a^2=2p^4+p^2\left(5r^2-4Rr\right)-r^2\left(4R+r\right)^2\geq 12r^2\cdot 108r^2$.

90) In ABC

$$\frac{(p-a)\cdot m_a^2}{x(1-x)}+\frac{(p-b)\cdot m_b^2}{y(1-y)}+\frac{(p-c)\cdot m_c^2}{z(1-z)}\geq 36S(R-r).$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum(p-a)m_a^2=p\left(p^2-4r^2-7Rr\right)\geq 9rp(R-r)$.

91) In ABC

$$\frac{(p-b)(p-c)\cdot m_a^2}{x(1-x)}+\frac{(p-c)(p-a)\cdot m_b^2}{y(1-y)}+\frac{(p-a)(p-b)\cdot m_c^2}{z(1-z)}\geq 648r^4$$

Soluție.

Dezvoltarea 2,pentru $n=1$și $\sum(p-b)(p-c)m_a^2=r(4R+r)\left[p^2-r(4R+r)\right]\geq 9r^2\cdot 18r^2$

92) In ABC

$$\frac{m_a^2h_bh_c}{x(1-x)}+\frac{m_b^2h_ch_a}{y(1-y)}+\frac{m_c^2h_ah_b}{z(1-z)}\geq 36S^2$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum m_a^2h_bh_c=\dfrac{rp^2\left(p^2+5r^2+2Rr\right)}{2R}\geq 9S^2$.

93) In ABC

$$\frac{l_a}{x(1-x)}+\frac{l_b}{y(1-y)}+\frac{l_c}{z(1-z)}\geq 36r$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum l_a\geq 9r$.

94) In ABC

$$\frac{l_a^2}{x(1-x)}+\frac{l_b^2}{y(1-y)}+\frac{l_c^2}{z(1-z)}\geq 108r^2$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,**pentru $n=1$și $\sum l_a^2\geq 27r^2$.

95) In ABC

$$\frac{l_bl_c}{x(1-x)}+\frac{l_cl_a}{y(1-y)}+\frac{l_al_b}{z(1-z)}\geq 108r^2$$

Soluție.

Se folosește **Dezvoltarea 2,** pentru $n = 1$ și $\sum l_b l_c \geq 27r^2$.

Bibliografie:

1. O.Bottema, R.Z.Djordjevic, R.R.Janic, D.S.Mitrinovic, P.M.Vasic, Geometric Inequalities, Groningen 1969, The Netherlands.
2. D.M.Bătinețu-Giurgiu, Neculai Stanciu, JP.110 Spring Edition 2018, Romanian Mathematical Magazine 2017, Founding Editor Daniel Sitaru.
3. Marin Chirciu, Inegalități algebrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2014.
4. Marin Chirciu, Inegalități geometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2015.
5. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.
6. Marin Chirciu, Inegalități cu laturi și raze în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2017.

6. SOLUTIONS FOR CERTAIN PROBLEMS FROM AMM

By Nela Ciceu, Roşiori, Bacău, Romania and Roxana Mihaela Stanciu, Buzău, Romania

11963. *Proposed by Gheorghe Alexe and George-Florin Serban, Braila, Romania.* Let $a_1, \ldots, a_n$ be positive real numbers with $\prod_{k=1}^{n} a_k = 1$. Show that

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i + a_{i+1})^4}{a_i^2 - a_i a_{i+1} + a_{i+1}^2} \geq 12n,$$

where $a_{n+1} = a_1$.

Solution.

We have

$$\frac{(x+y)^4}{x^2 - xy + y^2} \geq 12xy \Leftrightarrow x^4 - 8x^3 y + 18x^2 y^2 - 8xy^3 + y^4 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4xy + y^2)^2 \geq 0, \text{ true}$$

So

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i + a_{i+1})^4}{{a_i}^2 - a_i a_{i+1} + {a_{i+1}}^2} \geq 12 \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1}$$

By AM – GM, $12 \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} \geq 12n \sqrt[n]{\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^2} = 12n$

From above yields the desired inequality.

11971. *Proposed by Spiros P. Andriopoulos, Third High School of Amaliada, Eleia, Greece.* For $n \geq 2$, let $a_1, \ldots, a_n$ be positive real numbers. Prove

$$\left(\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i)\right)^{n-1} \geq \left(\prod_{i<j}\left(1 + \frac{2a_i a_j}{a_i + a_j}\right)\right)^2.$$

Solution.

We have $a + b \geq \frac{4ab}{a+b}$, $ab \geq \frac{4a^2 b^2}{(a+b)^2} \Rightarrow (1+a)(1+b) \geq \left(1 + \frac{2ab}{a+b}\right)^2$, (1).

Writing the inequality (1) for the pairs $(a_1,a_2),...,(a_1,a_n),(a_2,a_3),...,(a_2,a_n),...,(a_{n-1},a_n)$ and multiply these inequalities we obtain the desired inequality.

11984. *Proposed by Daniel Sitaru, Drobeta-Turnu Severin, Romania.* Let a, b, and c be the lengths of the sides of a triangle with inradius r. Prove $a^6+b^6+c^6 \geq 5184r^6$.

Solution.

I. By *Jensen i*nequality we have

$$a^6+b^6+c^6 \geq 3\cdot\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^6 = \frac{(a+b+c)^6}{3^5}, \text{ (1).}$$

By *Mitrinović* inequality we have

$$a+b+c \geq 6\sqrt{3}r, \text{ (2).}$$

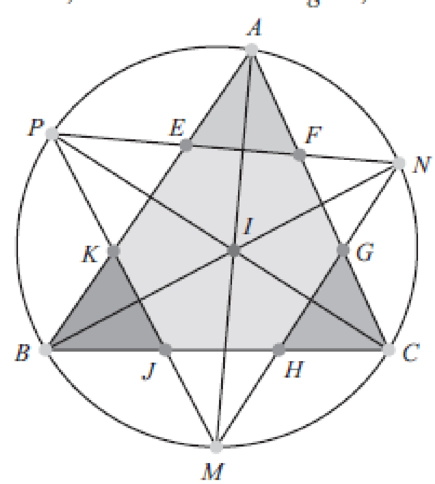
From (1) and (2) yields the desired inequality!

II. By *Chebyshev* inequality and the item 5.11. from *O. Bottema* (Geometric inequalities, Groningen, 1969), i.e. *Mitrinović* inequality we obtain

$$a^6+b^6+c^6 \geq \frac{1}{3}(a^5+b^5+c^5)(a+b+c) \geq ... \geq \frac{1}{3^5}(a+b+c)^6 \geq \frac{2^6}{3^6}(3\sqrt{3}r)^6 = 2^6 3^4 r^6 = 5184r^6.$$

11994. *Proposed by Miguel Ochoa Sanchez, Lima, Peru, and Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin, Romania.* Let ABC be a triangle with incenter I and circumcircle ω. Let M, N, and P be the second points of intersection of ω with lines AI, BI, and CI, respectively. Let E and F be the points of intersection of NP with AB and AC, respectively. Similarly, let G and H be the points of intersection of MN with AC and BC, respectively, and let J and K be the points of intersection of MP with BC and AB, respectively. Prove

$$EF+GH+JK \leq KE+FG+HJ.$$



Solution.

By buffalo way (brute force) we have

$$AP=\frac{c}{2\cos\frac{C}{2}},\ AN=\frac{b}{2\cos\frac{B}{2}},\ PN=2R\sin\frac{B+C}{2}=\frac{a}{2\sin\frac{A}{2}}$$

$$\frac{PE}{EN}=\frac{AP\cdot\sin\frac{C}{2}}{AN\cdot\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)}=\frac{\sin^2\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)}=\frac{1-\cos C}{\cos A+\cos C}$$

$$\Rightarrow PE=\frac{1-\cos C}{1+\cos A}\cdot PN,\quad NF=\frac{1-\cos B}{1+\cos A}\cdot PN$$

$$EF=\frac{a}{2\sin\frac{A}{2}}\cdot\frac{1+\cos A-1+\cos B-1+\cos C}{1+\cos A}=\frac{a}{2\sin\frac{A}{2}}\cdot\frac{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}=$$

$$=\frac{abc}{s(s-a)}\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)(s-a)(s-b)}{a^2bc}}=\frac{bc\sin\frac{A}{2}}{s}\leqslant\frac{bc}{s}\cdot\frac{a}{b+c}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{abc}{4s}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{ab+ac}{2(a+b+c)}\qquad(1)$$

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AP\cdot\sin\frac{B}{2}}{BP\cdot\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)}\Rightarrow\frac{AE}{c}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)+\sin\frac{B}{2}}\Rightarrow AE=\frac{c\sin\frac{B}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow EK=c\left(1-\frac{\sin\frac{B}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}-\frac{\sin\frac{A}{2}}{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\right)=c\cdot\frac{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=$$

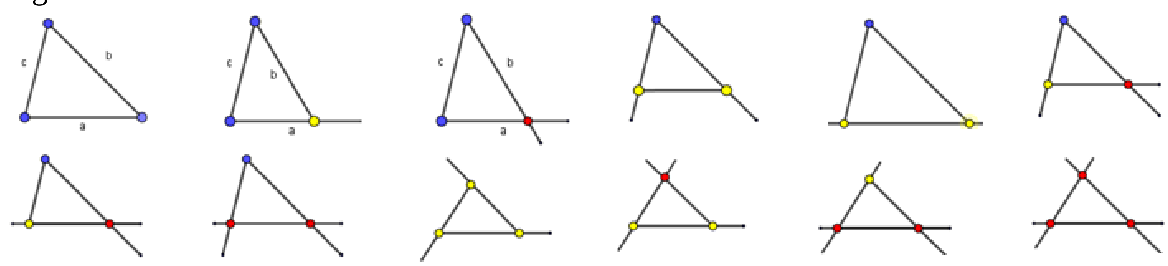
$$=c\cdot\frac{\sin A+\sin B+\sin C-\sin B-\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{ac}{a+b+c}\qquad(2)$$

By (1) and (2) yields the conclusion.
Remark. We used above Ballieu’s inequality, i.e.

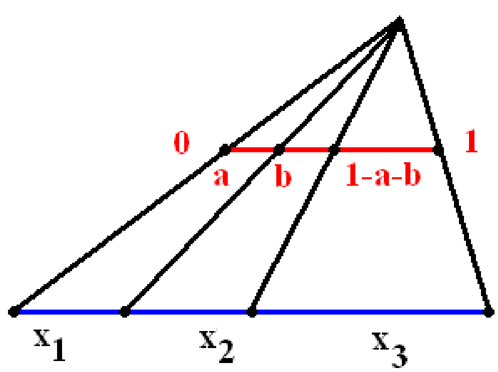
7. PROBABILITĂŢI GEOMETRICE
- TRIUNGHIUL TRIUNGHIURILOR -
Studiu de specialitate

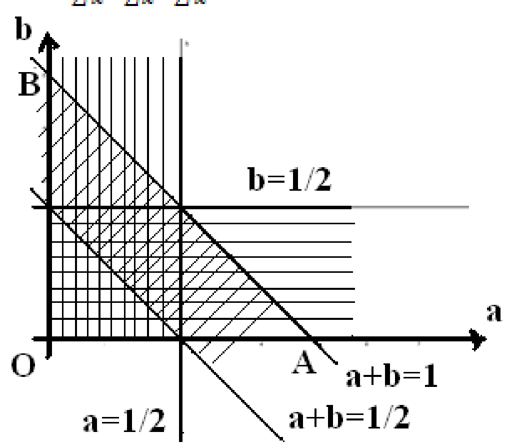
Prof. Stan Ilie[2]

“Care e probabilitatea de a construi cu 3 segmente un triunghi?”
Aceasta a fost întrebarea! Răspunsul este ¼. Vezi numărul trecut
http://www.mateinfo.ro/reviste-de-matematica/revista-electronica-de-matematica-mateinfo-ro-aparitie-lunara-2065-6432/revista-electronica-mateinfo-ro-2018/792-revista-electronica-mateinfo-ro-februarie-2018
unde – pentru încălzire şi divertisment - am schiţat şi toate posibilităţile de a “desena” un triunghi



Fie x_1, x_2, $x_3>0$.
Problema poate fi transferată de la suma segmentelor către segmentul unitate
printr-o transformare bijectivă de forma: $(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow (\frac{x1}{\sum x}, \frac{x1}{\sum x}, \frac{x1}{\sum x}) \Rightarrow (a,b,1-a-b)$





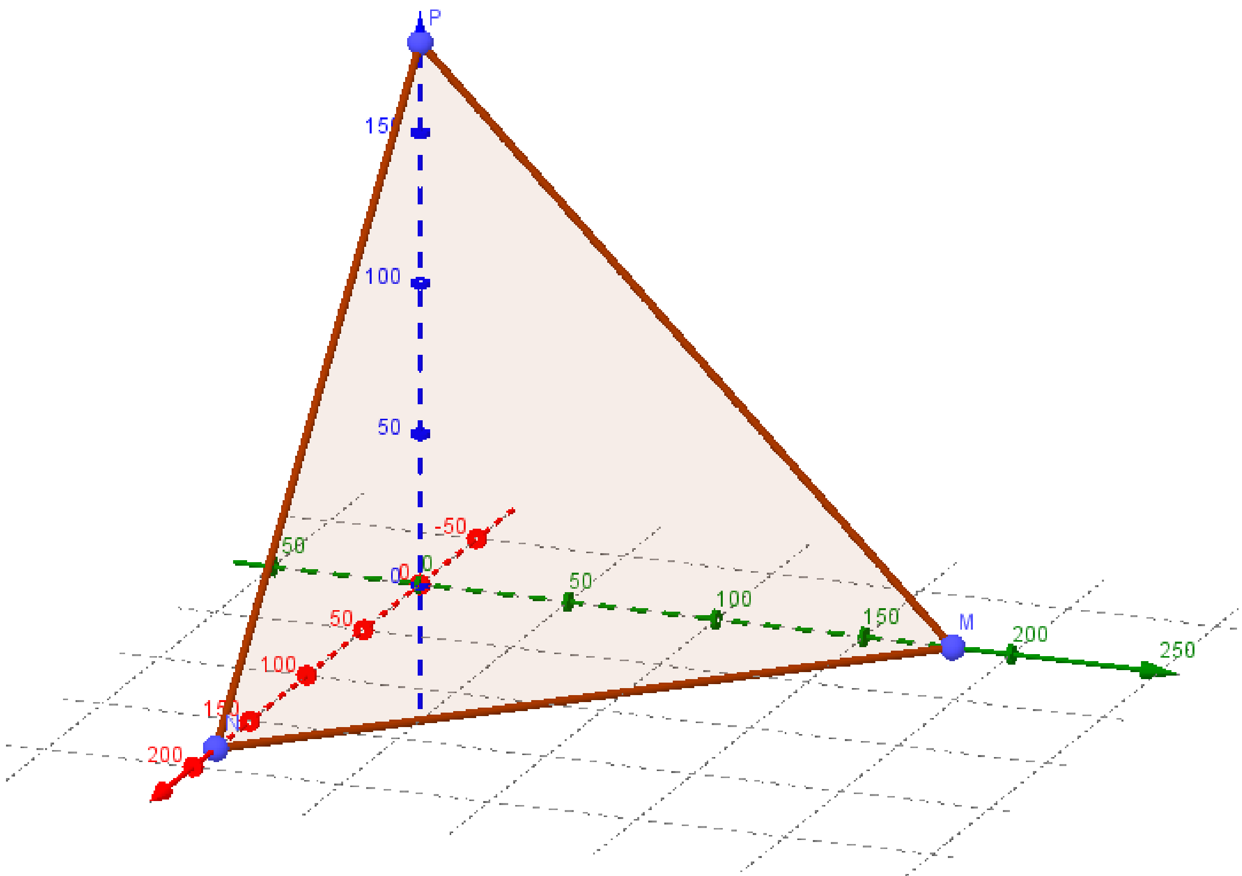
Condiţiile
{a+b>1-a-b, 1-a-b+b>a, a+1-a-b>b conduc la { a+b>1/2, a<1/2, b<1/2 şi desigur a+b<1
Din reprezentare se observă că zona comună a cazurilor favorabile(triunghiul median) are aria ¼ din zona cazurilor posibile(triunghiul OAB).
Aşadar probabilitatea ca trei numere pozitive să fie lungimile laturilor unui triunghi este 0,25.

---

[2] Colegiul Tehnic “Anghel Saligny”, Roşiorii de Vede, Teleorman, stan_ilie@yahoo.com

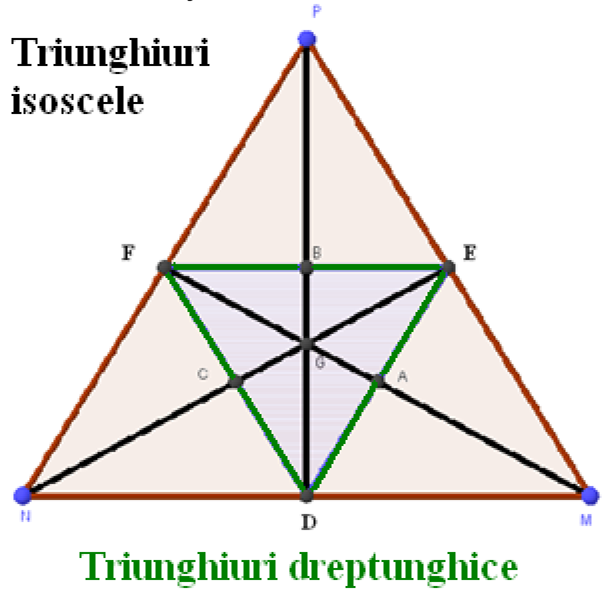
Altă întrebare:
Care este locul geometric al punctelor ale căror coordonate pot reprezenta unghiurile unui triunghi?

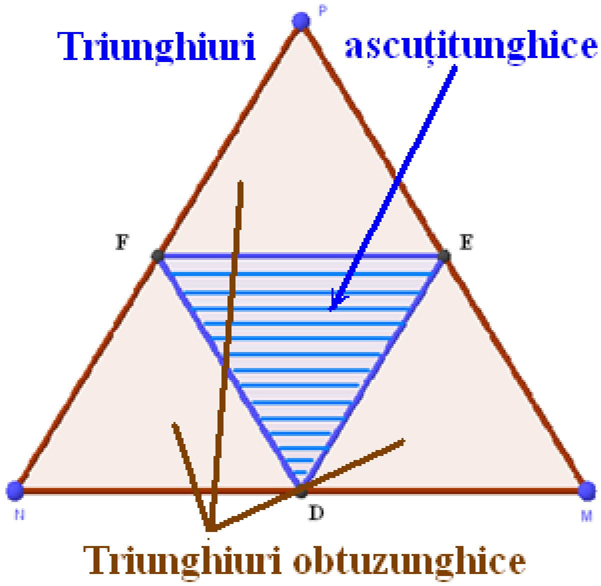
Folosim un sistem xOyz în care axele au măsurile în grade.
Avem $0<x,y,z<180$ şi relaţia $x+y+z=180$
Ecuaţia planului α
$\alpha: x+y+z-180=0$, împreună cu condiţiile $0<x<180$, $0<y<180$, $0<z<180$ determină:



interiorul triunghiului echilateral MNP
M(180,0,0), N(0,180,0), P(0,0,180)
Acesta este locul geometric.

Fie D, E, F mijloacele laturilor MN, PM, PN. D(90,90,0), E(90,0,90), F(0,90,90)





Reuniunea segmentelor PD, MF şi NE este locul geometric al triunghiurilor isoscele.
Intersecţia segmentelor PD, MF şi NE(punctul G) este locul geometric al triunghiurilor echilaterale.
Reuniunea segmentelor DE, EF şi FD este locul geometric al triunghiurilor dreptunghice.
Intersecţia segmentelor MF şi ED, PD şi EF respectiv NE şi FD (adică punctele A, B respectiv C) este locul geometric al triunghiurilor dreptunghic-isoscele.
Interiorul triunghiului echilateral DEF este locul geometric al triunghiurilor ascuţitunghice.
Reuniunea interioarelor triunghiurilor echilaterale MDE, PEF respectiv NDF reprezintă locul geometric al triunghiurilor obtuzunghice.

Concluzii:

1. Triunghiuri isoscele sunt de $\sqrt{3}$ ori mai multe ca cele dreptunghice.

   PD+MF+NE=$\sqrt{3}$ (DE+EF+FD)

2. Triunghiuri isoscel-ascuţitungice sunt tot atâtea cât isoscel-obtuzunghice.
   AF+BD+CE=AM+BP+CN
3. Triunghiuri obtuzunghice sunt de 3 ori mai multe ca cele ascuţitunghice.
   Fie triunghiul ascuţitunghic de laturi a,b,c şi unghiuri alfa, beta, gama.
   Triunghiul ascuţitunghic (c,b,alfa) echivalent cu triunghiul obtuzunghic(c,b,pi-alfa).
   Triunghiul ascuţitunghic (c,b,alfa) echivalent cu triunghiul obtuzunghic(c,b,pi-alfa).
   Triunghiul ascuţitunghic (c,b,alfa) echivalent cu triunghiul obtuzunghic(c,b,pi-alfa).
   Dar (c,b,a,alfa,beta,gama) înseamnă şi (c,b,alfa) şi (b,a,gama) şi (c,a,beta).
   La echivalenţă pentru arii am folosit formula cu semiprodusul a două laturi şi a sinusului unghiului format de ele.
   Aşadar fiecărui triunghi ascuţitunghic îi corespund 3 triunghiuri obtuzunghice echivalente.

Pentru a evita capcanele de la Puterea Continuului putem reformula prin următoarele

Concluzii probabilistice:

1. Fiind dat un triunghi(isoscel sau dreptunghic) probabilitatea ca acesta să fie isoscel este $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$, iar dreptunghic este $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
2. Fiind dat un triunghi isoscel probabilitatea ca acesta să fie ascuţitunghic este aceeaşi cu probabilitatea ca el să fie obtuzunghic şi este ½.
3. Fiind dat un triunghi probabilitatea ca acesta să fie ascuţitunghic este ~ ¼, iar probabilitatea ca el să fie obtuzunghic şi este ~ ¾ . Aproximativul apare datorită triunghiurilor dreptunghice!

3' Fiind dat un triunghi nedreptunghic probabilitatea ca acesta să fie ascuţitunghic este ¼ , iar probabilitatea ca el să fie obtuzunghic şi este ¾ .

4. Fiind date 3 segmente probabilitatea ca ele să formeze un triunghi obtuzunghic este 3/16 3/16=1/4(probabilitatea de a forma un triunghi)*3/4(probabilitatea ca triunghiul să fie obtuzunghic).
5. Fiind date 3 segmente probabilitatea ca ele să formeze un triunghi ascuţitunghic este 1/16 1/16=1/4(probabilitatea de a forma un triunghi)*1/4(probabilitatea ca triunghiul să fie ascuţitunghic).

Triunghi ascuţitunghic...adică are toate unghiurile ascuţite...adică între 0 şi 90^0...hmm...
...ne putem pune o...

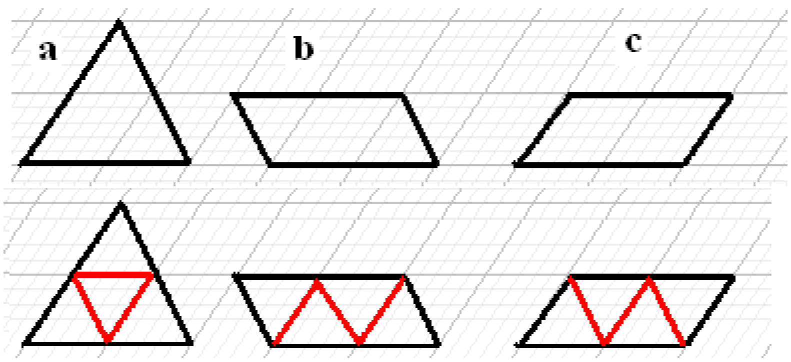
Altă întrebare: Cum arată probabilităţile triunghiului dacă modificăm limitele unghiurilor?
Exemplu: Care e probabilitatea ca un triunghi să aibă toate unghiurile între 45^0 şi 90^0?

8. DESFĂŞURĂRILE POLIEDRELOR
- TETRAEDRUL REGULAT -
Studiu de specialitate

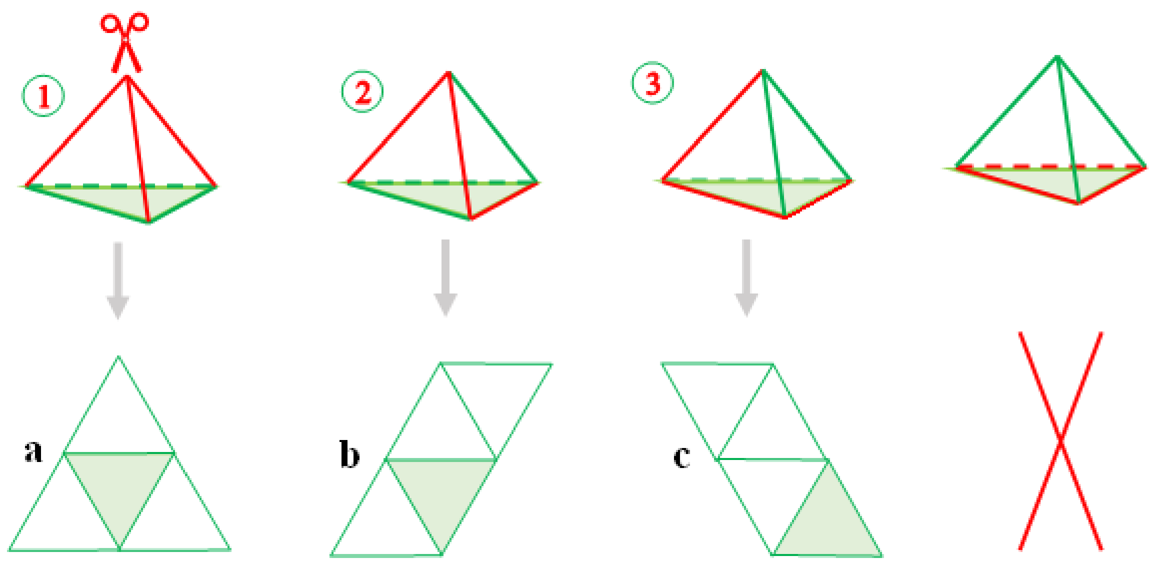
Prof. Stan Ilie[3]

Ne propunem analiza desfăşurărilor tetraedrului regulat.

DESFĂŞURĂRI SIMPLE



Modalităţi de obţinere

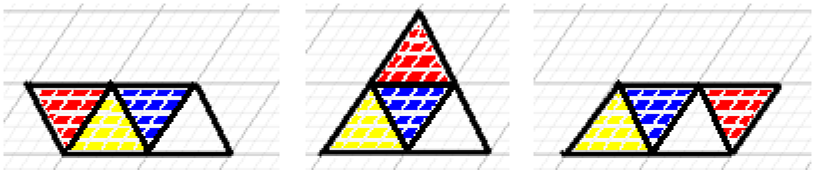


[3] Colegiul Tehnic "Anghel Saligny", Roşiorii de Vede, Teleorman, stan_ilie@yahoo.com

Sunt aşadar 3 forme diferite(formele b şi c sunt simetrice între ele dar nu pot fi obţinute prin rotaţie în plan).

Rostogoliri în jurul câte unei muchii
Formele b şi c pot fi obţinute prin rostogolirea tetraedrului fără revenirea pe vreo faţă.
Forma a necesită revenirea pe faţa centrală.

Rostogoliri în jurul unui vârf
Prin rostogolirea câte unui triunghi în jurul unui singur vârf se poate trece prin toate cele 3 desfăşurări?
DA! bac

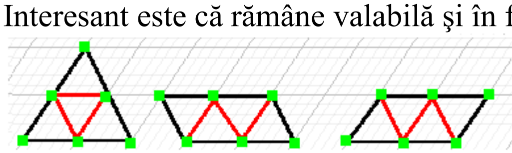


Desigur şi cab.

Arii şi perimetre
Cele 3 desfăşurări au aceeaşi arie şi respectiv acelaşi perimetru!
Ariile sunt egale(desigur!) deoarece provin din suma ariilor celor 4 feţe.
Perimetrele sunt egale deoarece, pentru fiecare variantă de desfăşurare, din totalul muchiilor 3 sunt înlăturate iar celelalte 3 dublate.
Aşadar perimetrele desfăşurărilor rămân egale cu perimetrul tetraedrului!

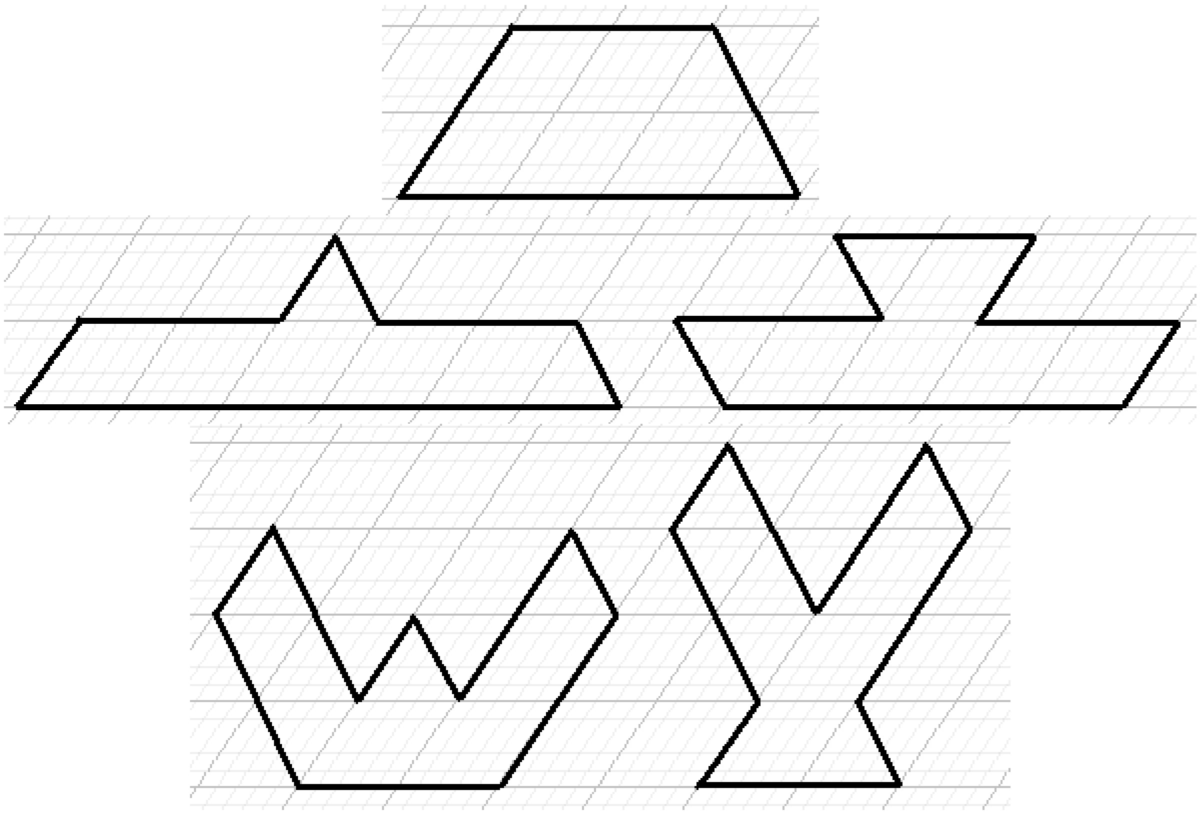
Relaţii tip Euler
Formula lui Euler referitoare la legătura dintre numărul de Vârfuri, Feţe respectiv Muchii într-un poliedru (V+F=M+2) este în cazul tetraedrului 4+4=6+2.
Aceasta funcţionează pentru desfăşurări adaptată la V+F=M+1!

3+1=3+1, 4+1=4+1, 4+1=4+1
Interesant este că rămâne valabilă şi în forma N+T=S+1 (Noduri, Triunghiuri, Segmente)



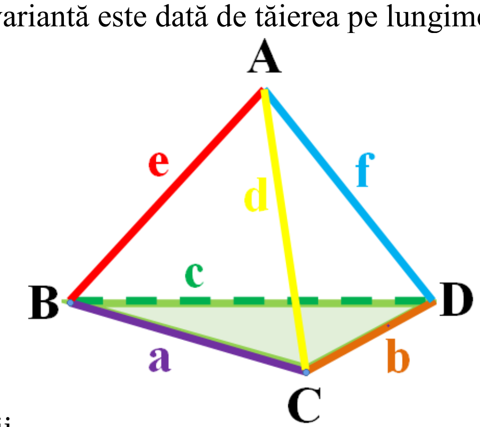
6+4=9+1, 6+4=9+1, 6+4=9+1

Acoperiri
Cele 3 desfăşurări pot acoperi împreună o suprafaţă convexă+simetrică, precum şi alte suprafeţe simetrice dar neconvexe.



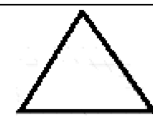
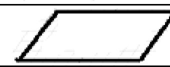
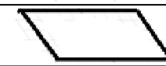
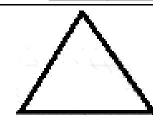
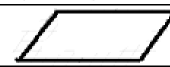
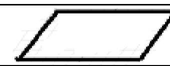
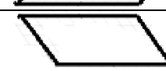
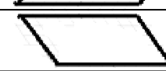
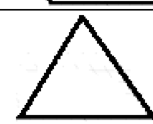
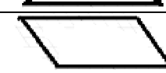
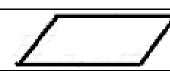
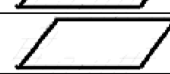
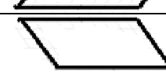
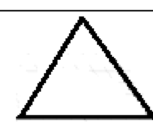
DESFĂŞURĂRI COLORATE(NUMEROTATE)

Din cele 24 de posibilităţi(4!) pentru ordinea feţelor rămân doar 12(cele fără simetric în şir):
1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2413, 3124, 3214.
Ele vor fi împărţite între desfăşurările de tip b) şi c).
Acestora le adăugăm încă 4 posibilităţi corespunzătoare desfăşurărilor de tip a).
Total: 16
Altă variantă este dată de tăierea pe lungime a câte 3



muchii.

1=ΔBCD, 2=ΔABC, 3=ΔACD, 4=ΔABD
a=BC, b=CD, c=BD, d=AC, e=AB, f=AD

Nr.	**Muchii**						**Desfăşurare**	**Forma**
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**		
I	✂	✂	✂				-	-
II	✂	✂		✂			4 baza	
III	✂	✂			✂		1432	
IV	✂	✂				✂	1423	
V	✂		✂	✂			1342	
VI	✂		✂		✂		3 baza	
VII	✂		✂			✂	1324	
VIII	✂			✂	✂		-	-
IX	✂			✂		✂	2413	
X	✂				✂	✂	2314	
XI		✂	✂	✂			1243	
XII		✂	✂		✂		1234	
XIII		✂	✂			✂	2 baza	
XIV		✂		✂	✂		2143	
XV		✂		✂		✂	-	-
XVI		✂			✂	✂	3214	
XVII			✂	✂	✂		2134	
XVIII			✂	✂		✂	3124	
XIX			✂		✂	✂	-	-
XX				✂	✂	✂	1 baza	

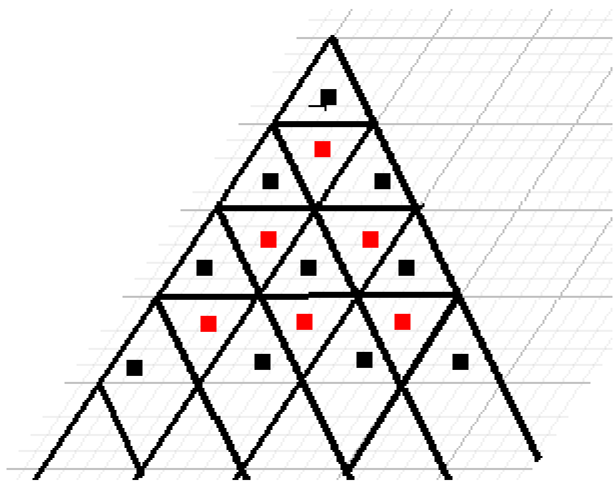
$C_6^3(total\ posibilitati)$ −4(*muchii coplanare*) = *20 – 4 = 16*

Acoperiri ale suprafeţelor convexe

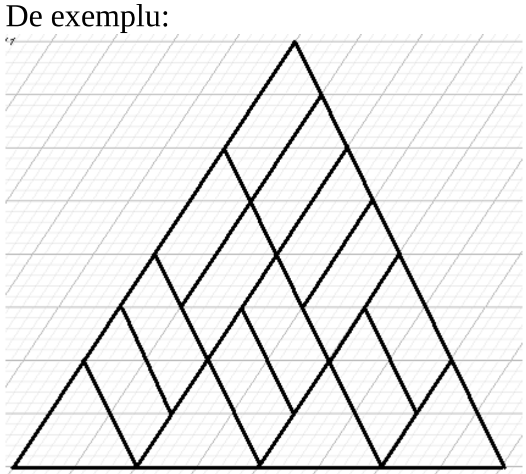
Datorită particularităţilor formelor de acoperire(ce au doar unghiuri de 60^0 si 120^0) putem cerceta doar suprafeţele închise de:

- triunghi echilateral
- romb
- paralelogram
- pentagon
- hexagon

Triunghi



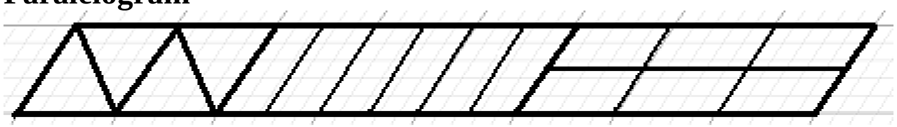
Triunghiul echilateral poate fi descompus în 1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7,..., 1+3+...+(2k+1) triunghiuri echilaterale congruente. Adică în n^2 triunghiuri echilaterale congruente.
Cum avem 16 desfăşurări…16x4=64=8^2…putem încerca găsirea unor astfel de acoperiri.
De exemplu:



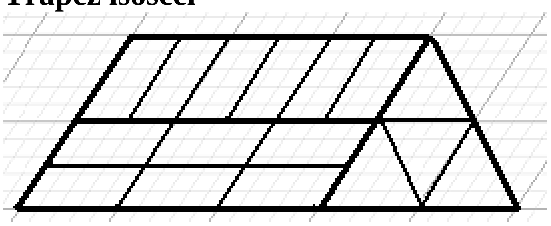
Romb

Rombul poate fi privit ca alăturarea a două triunghiuri(echilaterale în acest caz).
Cum $64 \neq 2n^2$...nu putem obţine un romb.

Paralelogram

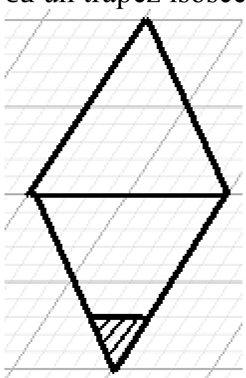


Trapez isoscel



Pentagon

Pentagonul de unghiuri 120^0, 120^0, 120^0, 120^0, 60^0 poate fi privit ca alăturarea unui triunghi echilateral cu un trapez isoscel(sau a două triunghiuri echilaterale din care s-a înlăturat ceva de



la un vârf).

Cum ecuaţia $2n^2-m^2=64$ nu are soluţii(se verifică uşor) concluzionăm că nu putem acoperi pentagonul.

Hexagon