# REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

## MAI 2018

ISSN 2065-6432

www.mateinfo.ro

REVISTĂ LUNARĂ DIN FEBRUARIE 2009

revista@mateinfo.ro



## ARTICOLE REVISTĂ:

# 1. PROBLEMA LUNII MAI 2018

Să se arate că dacă $a_1, a_2, \dots, a_n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$ sunt numere reale strict pozitive şi $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4)$, atunci oricare trei dintre aceste numere pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

Prof. Corneliu Mănescu Avram

Așteptăm rezolvări cât mai interesante pe adresa de e-mail revista@mateinfo.ro .

Termen: 2 iunie 2018

# 2. SOLUȚII - PROBLEMA LUNII APRILIE 2018

**Daca intr-un pentagon convex cu unghiurile congruente una din laturi este egala cu suma laturilor alaturate, atunci cel putin doua laturi au lungimea un numar irational.**

*Prof. Cantemir Iliescu, Pitesti*

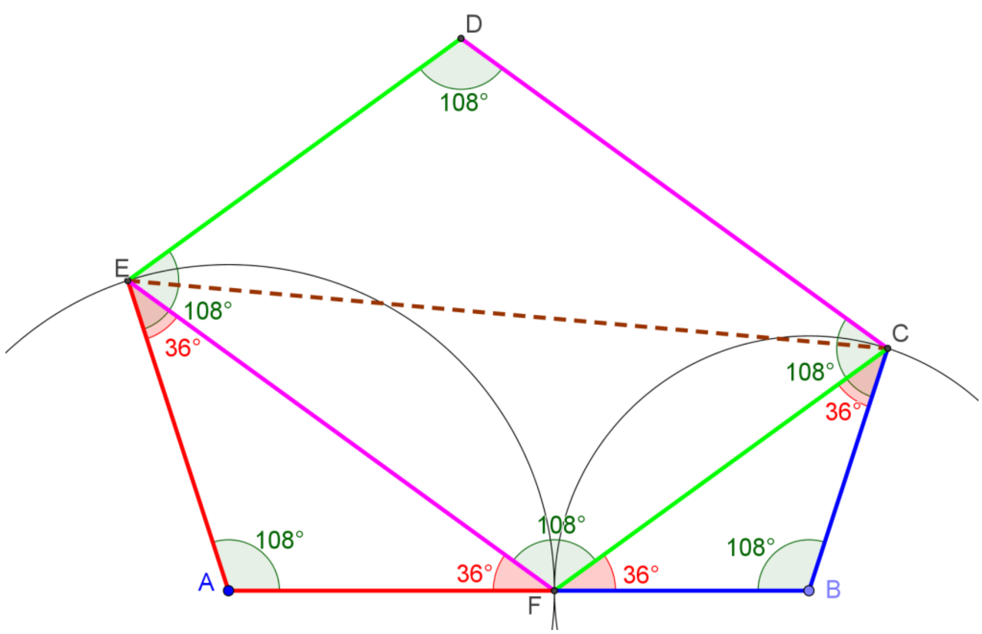
***Solutie autor:***

Fie $ABCDE$ pentagonul convex. Presupunem ca $AE = AB + DE$ si fie $P \in (AE)$ astfel incat $AP = AB$ si $PE = DE$. Masura unghiului unui pentagon este $\frac{3\pi}{5}$, triunghiurile $APB$ si $DEP$ sunt isoscele cu unghiurile de masuri $\frac{3\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}$. Se arata usor ca patrulaterul $PBCD$ este paralelogram (unghiurile opuse sunt congruente), deci $PB = CD$. In triunghiul $APB$ ducem inaltimea din $A$ si aplicam cosinus $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{CD}{2 \cdot AB}$. Cum $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ este irational, rezulta ca cel putin una din $AB$ si $CD$ are lungimea numar irational. Analog in triunghiul $DEP$ cel putin una din $DE$ si $BC$ are lungimea numar irational.

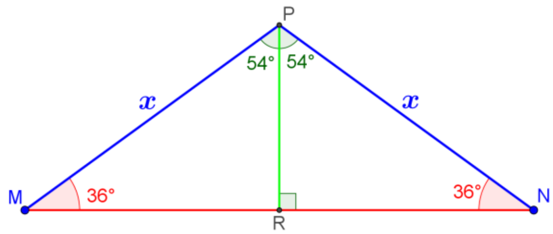
ALTE SOUȚII:

1. **Prof. Constantin Telteu, Constanța**

Suma unghiurilor unui poligon convex cu $n$ laturi este $180^\circ(n-2)$. Dacă pentagonul nostru are unghiurile congruente, fiecare dintre ele are măsura de $108^\circ$.
În figura de mai jos, am luat $AB = EA + BC$. Este ușor de observat că patrulaterul $CDEF$ este paralelogram. Fie $a = AE$ și $b = BC$. Dacă unul dintre numerele a sau b este irațional, atunci și $AB = a + b$ este irațional, și problema este demonstrată.



Dacă $a,b\in\mathbb{Q}$, atunci fie $x\in\{a;b\}$.




Din $\Delta PRN \Rightarrow RN = x\cos 36^\circ \Rightarrow MN = 2x\cos 36^\circ = 2x\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{4}\notin\mathbb{Q}$

Dacă $x=a \Rightarrow MN = EF = DC = 2a\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{4}\notin\mathbb{Q}$;

Dacă $x=b \Rightarrow MN = FC = DE = 2b\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{4}\notin\mathbb{Q}$ și problema este demonstrată.

*Egalitatea* $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ *se poate obține folosind formulele*

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$
$$\cos 3x = \cos x\left(4\cos^2 x - 3\right)$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

*Din egalitatea* $\sin\left(2\cdot 18^\circ\right) = \cos\left(3\cdot 18^\circ\right)$ *folosind primele două formule obținem* $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ *și apoi din formula fundamentală obținem* $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

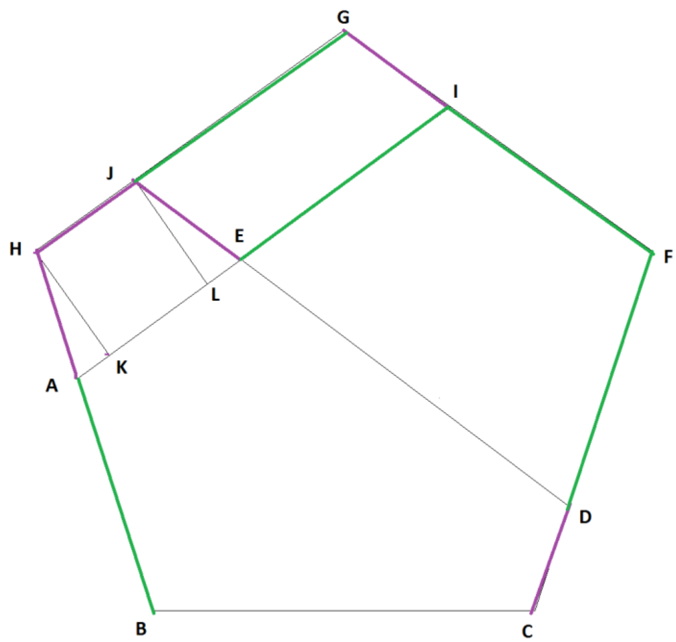
**2. Prof. Octavian Stroe și Marin Chirciu**

) Pentagonul *ABCDE* are unghiurile de măsură 108°. Presupunem că *AB* = *BC* + *AE*. Considerăm punctul $M\in(AB)$ astfel încât *AM* = *AE* și *BM* = *BC*, rezultă că triunghiurile *AEM* și *BMC* sunt isoscele cu ughiurile de la bază de măsură 36°, de aici rezultă că patrulaterul *MCDE* este un paralelogram, deoarece măsura m($\sphericalangle EMC$) ≡ m($\sphericalangle EDC$) = = 108° și m($\sphericalangle MED$) ≡ m($\sphericalangle MCD$) = 72°. Este cunoscută relația cos 36° – cos 72° $=\frac{1}{2}$ de unde deducem cos 36° = $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ și cos 72° $=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ și de aici cos 108° $=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$. Cum $\sqrt{5}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ rezultă cos 108° $\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Deoarece cos ($\sphericalangle MAE$) $=\frac{2AE^2-ME^2}{2AE^2}=\ =\cos 108^\circ$ și

cos ($\sphericalangle MBC$) $=\frac{2BC^2-MC^2}{2BC^2}=\cos 108^\circ$ rezultă $AE\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sau

$ME \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $BC \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sau $MC \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Cum patrulaterul *MCDE* este paralelogram rezultă $ME = CD$ și $MC = DE$. Prin urmare avem $AE \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sau
$DC \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $BC \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sau $DE \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ de unde concluzia problemei.

3. **Cojocaru Petru Romani – Neamt**

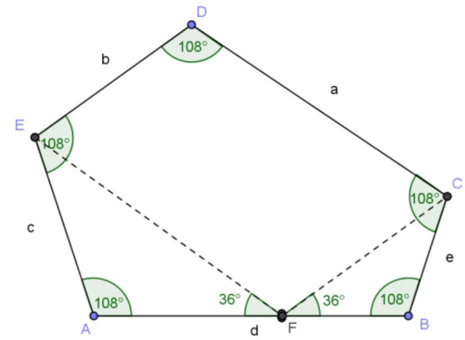



Fie ABCDE pentagonul cu toate unghiurile congruente și BC = AB+ CD, (din ipoteza) si AB = b și CD = a. Construesc pentagonul regulat BCFGH de latura a + b. Orice unghi al oricarui pentagon din figura alaturata are 108°, in plus DE ∥ GF si AE ∥ GH . De aici DFGH este trapez isoscel cu laturile neparalele DF = GJ = b si AIGH este trapez isoscel cu AH = JE = a, mai mult EIGH este paralelogram cu GI = JE = a si GH = EI = b. Evident AEJH este trapez isoscel cu AH = JE = HJ = a și unghiurile de la baza mare de 72° . Fie HK și JL înălțimi în trapezul isoscel AEJK. Triunghiurile AHK și EJL sunt congruente. În triunghiul AHK , AH = $\frac{a}{4}(\sqrt{5}$ - 1 ). ( Consider cunoscută relația: cos72°=$\sqrt{5}$ – 1).

AE = AK + KL + LE și AE = $\frac{a}{4}(\sqrt{5} - 1)$ +a + $\frac{a}{4}(\sqrt{5} - 1)$ . AE = $\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$

Daca „a" este număr rațional, numărul $\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$, care reprezintă marimea laturii AE din problemă, este număr irațional. Acelasi rationament pentru latura DE = $\frac{b}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Daca „a`` si\sau „b`` este irational sunt indeplinite conditiile din problema (q.e.d.).

### 4. Profesor Biro Istvan




Fie pentagonul convex *ABCDE* care satisface conditiile din enunt si consideram punctul *F* pe latura *AB* astfel ca *AF=AE* si *BF=BC*. Deducem cu usurinta ca *CDEF* este paralelograma, deci intre lungimile laturilor pentagonului exista urmatoarele relatii:

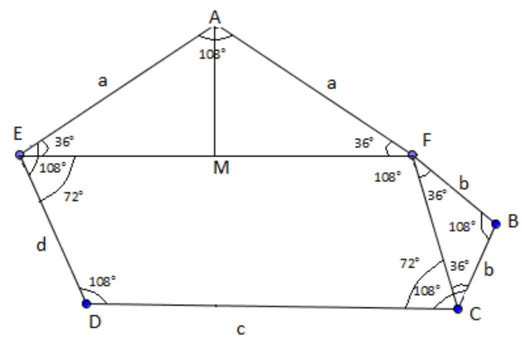
$$d = c + e,$$

$$a = 2c.\cos 36^{\circ} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)c,$$

$$b = 2e.\cos 36^{\circ} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)e.$$

In aceste conditii daca $c \text{ si } e \in Q$ atunci $a \text{ si } b \notin Q$, iar daca numai unul dintre $c \text{ sau } e \in Q$ atunci $d \notin Q$, deci cel putin doua laturi sunt irationale.

### 5. Prof. Silvia Musatoiu

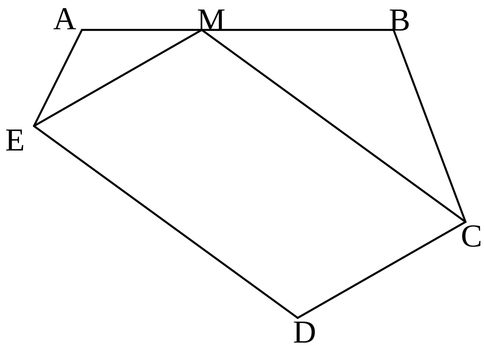



Unghiurile pentagonului au masuri de 108°.
Am considerat, in figura alaturata, AE = a, BC = b, AB = a+b, CD = c si DE = d.
Consideram cazurile:

1) a si b irationale (concluzia devine adevarata)
2) a irational si b rational (sau invers): in acest caz laturile AE si AB (respectiv BC si AB) au lungimi exprimate prin numere irationale.
3) a si b rationale: in acest caz laturile AE, AB si BC au lungimi exprimate prin numere rationale. Ramane sa demonstram ca CD si DE au lungimi exprimate prin numere irationale.

Punctul F a fost construit pe latura AB astfel incat AF = a si BF = b. Folosind congruentele de unghiuri, se demonstreaza ca CDEF este paralelogram, deci EF = c, iar FC = d. Am considerat AM ⊥ EF, M∈EF, asadar in triunghiul isoscel AEF, AM este si inaltime si mediana. Din ΔAEM, se exprima cos 36° = $\frac{c}{2a}$, deci c = 2a cos 36°. In mod analog, se exprima, folosind ΔBFC, d = 2b cos 36°.
Cum a si b, in acest caz, sunt rationale, problema se reduce la a demonstra: cos $\frac{\pi}{5}$ ∈R-Q.
Pornim de la cos $\frac{3\pi}{5}$ = - cos $\frac{2\pi}{5}$ . Notand cos $\frac{\pi}{5}$ =x, obtinem ecuatia $x(4x^2-3) = -2x^2 + 1$ ⇔ $4x^3 + 2x^2-3x-1=0$ ⇔ $(x+1)(4x^2-2x-1) = 0$. Cum cos $\frac{\pi}{5}$ ≠ -1, iar solutiile ecuatiei $4x^2-2x-1 = 0$ sunt $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$ rezulta cos $\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ∈R-Q (cealalta solutie, fiind negativa, nu convine).
Asadar in pentagonul nostru laturile c si d au lungimi exprimate prin numere irationale.

6. **Prof. Bercaru Geta**




Fie

Consideram ca $AB = AE + BC$

Notam $AE = a, BC = b$

$M \in AB$ astfel incat $AM = a, BM = b$

Pentagonul avand toate unghiurile egale rezulta ca fiecare din ele are masura $108^o$

In $\Delta AEM$ fiind triunghi isoscel , Masurile unghiurilr vor fi :

$m(\measuredangle EAM) = 108^O \quad m(\measuredangle AEM) = 36^O \quad m(\measuredangle AME) = 36^O$

Analog in $\Delta BMC$ de asemenea triunghi isoscel unghiurile sunt:

$m(\measuredangle MBC) = 108^O \quad m(\measuredangle MCB) = 36^O \quad m(\measuredangle CMB) = 36^O$

Rezulta ca $m(\measuredangle MED) = 108^O - 36^O = 72^O$

$m(\measuredangle MCD) = 108^O - 36^O = 72^O$

$m(\measuredangle EMC) = 180^O - 36^O - 36^O = 108^O$

$$\left.\begin{array}{l} m(\measuredangle EMC) = 108^O \\ m(\measuredangle MED) = 72^O \end{array}\right\} \Rightarrow MC \parallel ED$$

$$\left.\begin{array}{l} m(\measuredangle EMC) = 108^O \\ m(\measuredangle MCD) = 72^O \end{array}\right\} \Rightarrow ME \parallel CD$$

Deci $EMCD$ este paralelogram. Rezulta $EM = CD, ED = MC$

In $\Delta AEM$ stim :

masurile unghiurilor $m(\measuredangle EAM) = 108^O \quad m(\measuredangle AEM) = 36^O \quad m(\measuredangle AME) = 36^O$

si $AE = AM = a$ , rezulta $EM = 2a\cos 36^O$

Analog in $\Delta BMC$ obtinem $CM = 2b\cos 36^O$

Deci laturile pentagonului sunt: $AB = a + b \;\; AE = a \;\; BC = b \;\; CD = 2a\cos 36^O \;\; DE = 2b\cos 36^O$ .

Voi demonstra in continuare ca valoarea $\cos 36^O$ e numar irațional.

$$\begin{aligned}
\cos 5x &= \cos(2x+3x) = \cos 2x\cos 3x - \sin 2x \sin 3x \\
&= (2\cos^2 x - 1)(4\cos^3 x - 3\cos x) - 2\sin x\cos x(3\sin x - 4\sin^3 x) = \\
&= 8\cos^5 x - 6\cos^3 x - 4\cos^3 x + 3\cos x - 2\sin^2 x\cos x(3 - 4\sin^2 x) = \\
&= 8\cos^5 x - 10\cos^3 x + 3\cos x - 2(1-\cos^2 x)\cos x(3 - 4 + 4\cos^2 x) = \\
&= 8\cos^5 x - 10\cos^3 x + 3\cos x - 2(\cos x - \cos^3 x)(4\cos^2 x - 1) = \\
&= 8\cos^5 x - 10\cos^3 x + 3\cos x - 2(4\cos^3 x - \cos x - 4\cos^5 x + \cos^3 x) = \\
&= 8\cos^5 x - 10\cos^3 x + 3\cos x - 8\cos^3 x + 2\cos x + 8\cos^5 x - 2\cos^3 x = \\
&= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x
\end{aligned}$$

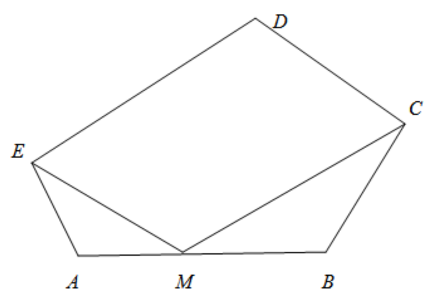
Deci $\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$

Luand x=36$^o$ notez cu c .
Rezulta $16c^5-20c^3+5c+1=0$.
Daca ecuatia ar avea radacini rationale ele ar fi din multimea $\left\{\pm 1,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{4}\pm\frac{1}{8},\pm\frac{1}{16}\right\}$ ,
dar niciuna nu verifica ecuatia ,deci c este irrational
Deci cos36$^o$ este irational .
Cum laturile pentagonului sunt:
$AB=a+b$ $AE=a$ $BC=b$ $CD=2a\cos 36^O$ $DE=2b\cos 36^O$ .Deci cel putin doua laturi sunt irationale

## 7. Prof. Corneliu Manescu Avram

Fie $a$, $a + b$, $b \in (0, \infty)$ lungimile a trei laturi alaturate si $x$, $y \in (0, \infty)$ lungimile celorlalte doua laturi ale pentagonului. Exista urmatoarele posibiliati :
i) cel mult unul dintre numerele $a$, $a + b$, $b$ este rational, caz in care nu avem nimic de demonstrat ;
ii) doua dintre aceste trei numere sunt rationale, dar atunci si al treilea numar este rational, deoarece $(\mathbb{Q}, +)$ este un grup abelian.

Ramane deci sa demonstram ca daca $a, b \in \mathbb{Q}$, atunci $x$, $y$ sunt numere irationale.




Fie $ABCDE$ pentagonul dat, $m(\hat{A}) = ... = m(\hat{E}) = \frac{3\pi}{5}$ si $M \in AB$ astfel incat $AM = AE = a$, $BM = BC = b$. Triunghiurile $AEM$ si $BCM$ sunt isoscele si unghiurile de la baza au masura $\frac{\pi}{5}$, deci $m(\angle CME) = m(\hat{D}) = \frac{3\pi}{5}$. Avem si $m(\angle DCM) = m(\angle DEM) = \frac{2\pi}{5}$, deci patrulaterul $CDEM$ este un paralelogram, astfel ca $EM = CD = x$, $CM = DE = y$. Intr-un triunghi isoscel inaltimea este si mediana, deci $x = 2a\cos\frac{\pi}{5}$, $y = 2b\cos\frac{\pi}{5}$. Daca $a, b \in \mathbb{Q}$, atunci $x, y \notin \mathbb{Q}$, deoarece $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \notin \mathbb{Q}$.

## 8. Prof. Viorica Ciocanaru

Pentru pentagonul convex ABCDE cu unghiurile congruente se aplica formula **(n-2)180$^0$/n** ca sa i se afle masura fiecarui unghi; pentru n = 5 aceasta masura este de 108$^0$.

Fie DE = AE + CD, AE = a, CD = b, a, b > 0.

a) Daca a, b sunt irationale atunci laturile AE si DC sau AE, ED si DC au lungimile exprimate prin numere irationale (dupa cum $a = p - \sqrt{r}$ si $b = q + \sqrt{r}$, p, q, r $\in$ $\mathbf{Q}_+$ sau $a = p + \sqrt{r}$ si $b = q + \sqrt{s}$, p, q, r, s $\in$ $\mathbf{Q}_+$) adica *cel putin doua laturi*.

b) Daca a, b sunt rationale

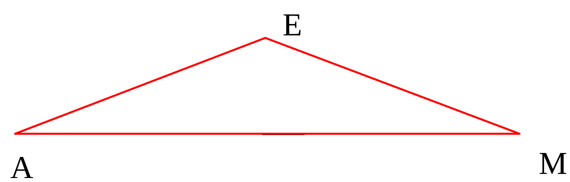
M $\in$ [DE], ME = EA si MD = DC. Triunghiurile EAM si DMC sunt isoscele. Stiind ca m ($\angle$AEM) = m ($\angle$MDC) = $108^0$ rezulta ca m ($\angle$EAM) = m ($\angle$EMA) = m ($\angle$DMC) = m ($\angle$DCM) = $(180^0 - 108^0)/2 = 36^0$.

m ($\angle$AMC) = $180^0 - 2*36^0 = 108^0$, m ($\angle$MCB) = $108^0 - 36^0 = 72^0$ deci dreptele AM si BC taiate de secanta MC formand unghiuri interne de aceeasi parte a secantei suplementare sunt paralele

$AM \parallel BC$ **(1)**

m ($\angle$MAB) = $108^0 - 36^0 = 72^0$, m ($\angle$AMC) = $108^0$ deci dreptele AB si MC taiate de secanta AM formand unghiuri interne de aceeasi parte a secantei suplementare sunt paralele $AB \parallel MC$ **(2)**

Din **(1)** si **(2)** rezulta ca ABCM este paralelogram $\Rightarrow$ AM = BC = x, MC = AB = y, x, y > 0.




In trunghiul EAM isoscel cu m ($\angle$A) = m ($\angle$M) = $36^0$ cu **teorema cosinusului** $x^2 = 2a^2 - 2a^2\cos 108^0 \leftrightarrow x^2 = 2a^2 + 2a^2\cos 72^0$ **(3)**.

Din $\mathbf{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$ aplicata lui $\cos 72^0 = 2\cos^2 36^0 - 1$ si **(3)** rezulta $x^2 = 2a^2 + 2a^2(2\cos^2 36^0 - 1) \leftrightarrow x^2 = 4a^2\cos^2 36^0$ de unde $x = 2a\cos 36^0$ **(4)**, x pozitiv.

Cu **teorema sinusurilor** $x/\sin 108^0 = a/\sin 36^0$ si formula $\mathbf{\sin 3\alpha = \sin\alpha\,(3 - 4\sin^2\alpha)}$ aplicata lui $\sin 108^0 = \sin 3*36^0 = \sin 36^0(3 - 4\sin^2 36^0)$ rezulta $x/(3 - 4\sin^2 36^0) = a$ **(5)**.

Din **(4)**, **(5)** si $\mathbf{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$ se obtine $2\cos 36^0 = 3 - 4 + 4\cos^2 36^0 \leftrightarrow$

$4\cos^2 36^0 - 2\cos 36^0 - 1 = 0$ **(6)**.

Pentru rezolvarea ecuatiei **(6)** se noteaza $\cos 36^0 = t$, $t > 0$ unghiul fiind ascutit; ecuatia **(6)** devine

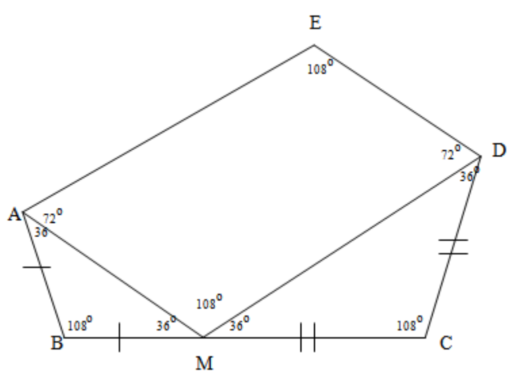
$4t^2 - 2t - 1 = 0$ cu $t_1 = (1+\sqrt{5})/4 > 0$ si $t_2 = (1-\sqrt{5})/4 < 0$. Deci $\cos 36^0 = (1+\sqrt{5})/4$.

Inlocuind $\cos 36^0$ in relatia **(4)** se obtine $x = a(1+\sqrt{5})/2$, x irational.

Printr-un rationament analog aplicat in triunghiul DMC se obtine $y = b(1+\sqrt{5})/2$, y irational.

Deci daca a, b sunt rationale, x, y sunt irationale atunci laturile AE, ED si DC au lungimile exprimate prin numere rationale iar laturile AB si BC au lungimile exprimate prin numere irationale adica *cel putin doua*.

9. **Prof. Laura Radu**




$$m(\angle A) = m(\angle B) = m(\angle C) = m(\angle D) = m(\angle E) = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} = \frac{3\cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$$

Stiind ca $BC = AB + CD$, fie punctul $M \in BC$ astfel incat BM=AB si CM=CD si avem ca $\Delta$ABM si $\Delta$CDM sunt isoscele. Deducem astfel ca $m(\angle BAM) = m(\angle BMA) = 36^\circ$ si

$m(\angle CMD) = m(\angle CDM) = 36^\circ$,

$m(\angle MAE) = 180^\circ - 36^\circ = 72^\circ$ si analog $m(\angle MDE) = 72^\circ$. Din ipoteza avem $m(\angle E) = 108^\circ$ si rezulta ca patrulaterul AMDE este paralelogram. Deci **AM=ED** si **MD=AE** .

Aplicam teorema cosinusului in $\Delta$ABM.

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB\cdot BM\cdot\cos B \Rightarrow DE^2 = 2AB^2 - 2AB^2\cos 108^\circ \Rightarrow$$
$$DE^2 = 2AB^2(1-\cos 108^\circ) \Rightarrow DE^2 = 2AB^2\cdot 2\sin^2 54^\circ \Rightarrow$$
$$DE^2 = 4AB^2\cdot\cos^2 36^\circ \Rightarrow DE = 2AB\cdot\cos 36^\circ$$

In mod analog , aplicand teorema cosinusului in $\Delta$CDM, obtinem $AE = 2CD\cdot\cos 36^\circ$.

Demonstram ca $\cos 36^\circ = \cos\frac{\pi}{5}$ este numar irational .

$\sin\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{5\pi}{5}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5} = 0$

$\Rightarrow$

$\sin\frac{\pi}{5}\left(2\cos^2\frac{2\pi}{5}-1\right)+\cos\frac{\pi}{5}\cdot 2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = 0 \quad / :\sin\frac{\pi}{5} \neq 0 \quad \Rightarrow$

$2\left(2\cos^2\frac{\pi}{5}-1\right)^2 - 1 + 4\cos^2\frac{\pi}{5}\cdot\left(2\cos^2\frac{\pi}{5}-1\right) = 0 \quad \Rightarrow$

$2\left(4\cos^4\frac{\pi}{5}-4\cos^2\frac{\pi}{5}+1\right)-1+4\cos^2\frac{\pi}{5}\cdot\left(2\cos^2\frac{\pi}{5}-1\right) = 0 \quad \Rightarrow$

$8\cos^4\frac{\pi}{5}-8\cos^2\frac{\pi}{5}+2-1+8\cos^4\frac{\pi}{5}-4\cos^2\frac{\pi}{5} = 0 \Rightarrow$

$16\cos^4\frac{\pi}{5}-12\cos^2\frac{\pi}{5}+1 = 0 \Rightarrow$

Notam $\cos^2\frac{\pi}{5} = t > 0$ si rezulta ecuatia $16t^2-12t+1=0$ cu solutiile pozitive $t_{1,2} = \frac{6\pm 2\sqrt{5}}{16}$ .

Deci $\cos^2\frac{\pi}{5} = \frac{6\pm 2\sqrt{5}}{16} \quad \Rightarrow \quad \cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{6\pm 2\sqrt{5}}}{4}$, $\cos\frac{\pi}{5} > 0$ deoarece $\frac{\pi}{5} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

$\sqrt{6\pm 2\sqrt{5}} = \sqrt{6\pm\sqrt{20}} = \sqrt{\frac{6+4}{2}} \pm \sqrt{\frac{6-4}{2}} = \sqrt{5}\pm 1$

$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}\pm 1}{4}$

Dar $\cos\frac{\pi}{5} = \cos 36^\circ > \cos 60^\circ = \frac{1}{2} = 0{,}5$ si $\frac{\sqrt{5}+1}{4} \approx 0{,}8$ , $\frac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 0{,}3$ rezulta ca

$\cos\frac{\pi}{5} = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Avem $DE = 2AB\cdot\cos 36^\circ$ si $AE = 2CD\cdot\cos 36^\circ$, $\cos 36^\circ$ este irational, atunci din prima relatie rezulta ca sau DE este irational sau AB este irational; analog din a doua relatie rezulta ca sau AE este irational sau CD este irational (pentru ca cei doi membrii, stang si drept, trebuiesc sa fie ambii rationali sau ambii irationali) .
Deci cel putin doua laturi au ca lungimi numere irationale , ceea ce trebuia demonstrat.

**10. Prof.Olah Csaba**

Fie pentagonul $ABCDE$, cu unghiurile congruente. Sa notam $BC=b$, $AE=a$, $CD=x$, $DE=y$, si fie $AB=AE+BC=a+b$. Sa luam punctul $M\in(AB)$. Atunci $AE=AM$ si

$BM = BC$. Cum toate unghiurile pentagonului sunt congruente, un unghi are masura de $\frac{3\pi}{5}$ (suma unghiurilor unui poligon convex cu $n$-laturi fiind $(n-2)\pi$, daca unghiurile sunt congruente un unghi are masura $\frac{(n-2)\pi}{n}$).

In triunghiul $AME$, $m(M)=m(E)=\frac{\pi}{5}$. In mod similar, in triunghiul $BMC$,

$m(M)=m(C)=\frac{\pi}{5}$.

Stim ca: $m(EMC)=m(AMB)-m(AME)-m(MBC)=\pi-\frac{2\pi}{5}=\frac{3\pi}{5}=m(EDC)$. De asemenea se stie ca $m(MCD)=\frac{3\pi}{5}-\frac{\pi}{5}=m(MED)$. De aici rezulta ca $MCDE$ este paralelogram, adica $ME=CD=x$ si $MC=ED=y$.

Calculam valorile lui $x$ si $y$ in functie de $a$ si $b$. – In triunghiul $AME$,

$x=2a\cdot\cos\frac{\pi}{5}=2a\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}=2a\frac{\sqrt{5}+1}{4}=\frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}$, iar in triunghiul $BMC$, $y=\frac{b(\sqrt{5}+1)}{2}$.

Distingem patru cazuri:

I. $a,b\in Q\Rightarrow x,y\in R\setminus Q$ (pt.ca $\frac{\sqrt{5}+1}{2}\in R\setminus Q$) $\Rightarrow$ 2 laturi au lungimi numere irationale;

II. $a\in Q, b\in R\setminus Q\Rightarrow x=\frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}\in R\setminus Q$, si $AB=a+b\in R\setminus Q\Rightarrow$ cel putin 2 laturi au lungimi numere irationale (plus latura $BC=b$, care este irational, adica cel putin 3 laturi);

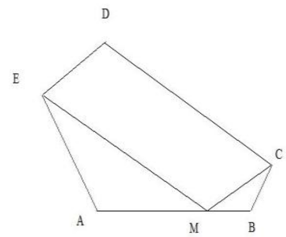
III. $a\in R\setminus Q, b\in Q\Rightarrow y=\frac{b(\sqrt{5}+1)}{2}\in R\setminus Q$ si $AB=a+b\in R\setminus Q\Rightarrow$ cel putin 3 laturi au lungimi numere irationale, luand si latura $AE=a$;

IV. $a,b\in R\setminus Q\Rightarrow BC=b$ si $AE=a$ sigur sunt irationale.

Luand aceste 4 cazuri impreuna, putem constata ca acest pentagon are cel putin 2 laturi cu lungimi numere irationale.

**11. Prof. Dan Marinache, Calarasi**

Fie $ABCDE$ un pentagon cu toate unghiurile avand aceeasi masura si astfel incat $AB=EA+BC$. Folosind cea de-a doua conditie putem considera $M\in AB$ astfel incat $AM=EA$ si $MB=BC$ iar atunci triunghiurile $EAM$ si $MBC$ sunt triunghiuri isoscele asemenea.




Prin urmare $\sphericalangle EAM \equiv \sphericalangle AME \equiv \sphericalangle BMC \equiv \sphericalangle BCM$ .
Cum $m(\sphericalangle AED) = m(\sphericalangle AEM) + m(\sphericalangle MED)$ si $m(\sphericalangle BCD) = m(\sphericalangle BCM) + m(\sphericalangle MCD)$ rezulta ca $m(\sphericalangle MED) = m(\sphericalangle MCD)$ ca diferenta de unghiuri cu aceeasi masura.Pe de alta parte , cum $m(\sphericalangle AME) + m(\sphericalangle EMC) + m(\sphericalangle BMC) = 180^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle EMC) = 180^\circ - m(\sphericalangle AME) - m(\sphericalangle BMC) \Rightarrow$
$\Rightarrow m(\sphericalangle EMC) = m(\sphericalangle EDC)$ .
Acum patrulaterul $EMCD$ este paralelogram (unghiurile opuse congruente)si deci $DE = MC = l$ iar $CD = EM = L$ .
Pentru simplitate notam $AM = x$ si $MB = y$ si vom avea $EA = x$ iar $BC = y$ .Asadar lungimile laturilor pentagonului sunt $AB = x + y, EA = x, BC = y, CD = L, DE = l$ iar masura oricarui unghi este $\frac{3\pi}{5}$.

Cazul I
$x \notin \mathbb{Q} \wedge y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow$ cel putin doua din laturile pentagonului au lungimi irationale.

Cazul II
$x \in \mathbb{Q} \wedge y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x + y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow$ cel putin doua din laturile pentagonului au lungimi irationale.

Cazul III
$x \notin \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x + y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow$ cel putin doua din laturile pentagonului au lungimi irationale.

Cazul IV
$x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q}$
Folosind teorema cosinusului in triunghiurile $AEM$ si $BMC$ obtinem ca
$\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{2x^2 - L^2}{2x^2} = \frac{2y^2 - l^2}{2y^2}$.Daca $L, l \in \mathbb{Q} \overset{x,y\in\mathbb{Q}}{\Rightarrow} \cos\frac{3\pi}{5} \in \mathbb{Q}$ ceea ce este evident o contradictie caci $\cos\frac{3\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}-1}{4} \notin \mathbb{Q}$ si deci $L, l \notin \mathbb{Q}$ .q.e.d.

# 3. IN LEGĂTURĂ CU O INEGALITATE DIN 360 PROBLEMS FOR MATHEMATICAL CONTESTS

*Marin Chirciu*[1]

Articolul pornește de la **Problema 42**, pagina 144 din **360 Problems for Mathematical Contests,** autori **Titu Andreescu** și **Dorin Andrica**, apărută la Editura **GIL**, Zalău, 2003. Inegalitatea poate fi întărită.

În continuare se pun în evidență inegalități în triunghi, în care suma $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}$ se compară cu diferite sume remarcabile construite cu elemente ale triunghiului.

**Lemă.**

In $\Delta ABC: \frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$.

**Demonstrație.**

Folosim $a^3+b^3+c^3=2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)$ și $abc=4Rrp$.

Obținem $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)}{4Rrp}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$.

**1)** Prove that in any triangle

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\geq 4\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right).$$

Dorin Andrica

**Soluție.**

Folosim **Lema** și $\sum\sin^2\frac{A}{2}=1-\frac{r}{2R}$. Inegalitatea se scrie: $\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}\geq 4\left(1-\frac{r}{2R}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^2\geq 14Rr-r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$, (G) și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$, (E). Rămâne să arătăm că $16Rr-5r^2\geq 14Rr-r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

**Remarcă.**

Inegalitatea poate fi întărită:

**2)** In $\Delta ABC$

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\geq 5-\frac{4r}{R}.$$

**Soluție.**

Folosind **Lema**, inegalitatea se scrie: $\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}\geq 5-\frac{4r}{R} \Leftrightarrow p^2\geq 16Rr-5r^2$, (G).

**Remarcă.**

Inegalitatea **2)** este mai tare decât inegalitatea **1):**

**3)** In $\Delta ABC$

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești*

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\ge 5-\frac{4r}{R}\ge 4\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right).$$

**Soluție.**

Vezi **2)** și $5-\frac{4r}{R}\ge 4\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)\Leftrightarrow 5-\frac{4r}{R}\ge 4\left(1-\frac{r}{2R}\right)\Leftrightarrow R\ge 2r$, (E).

**Remarcă.**

Inegalitatea **2)** poate fi și ea întărită:

**4)** In $\Delta ABC$

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\ge \frac{10R^2-17Rr+6r^2}{2R(R-r)}.$$

Marin Chirciu, Pitești

**Soluție.**

Se folosește **Lema** și inegalitatea lui Yang Xue Zhi: $p^2\ge 16Rr-5r^2+\frac{r^2(R-2r)}{R-r}$.

Obținem:

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}\ge\frac{16Rr-5r^2+\frac{r^2(R-2r)}{R-r}-3r^2-6Rr}{2Rr}=\frac{10R^2-17Rr+6r^2}{2R(R-r)}.$$

**Remarcă.**

Inegalitatea **4)** este mai tare decât inegalitatea **2):**

**5)** In $\Delta ABC$

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\ge \frac{10R^2-17Rr+6r^2}{2R(R-r)}\ge 5-\frac{4r}{R}.$$

**Soluție.**

Vezi **4)** și $\frac{10R^2-17Rr+6r^2}{2R(R-r)}\ge 5-\frac{4r}{R}\Leftrightarrow R\ge 2r$, (E).

**Remarcă.**

Se pot scrie inegalitățile:

**6)** In $\Delta ABC$

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\ge \frac{10R^2-17Rr+6r^2}{2R(R-r)}\ge 5-\frac{4r}{R}\ge 4\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)\ge 3.$$

**Soluție.**

Vezi **5) , 3)** și inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$.

**7)** In $\Delta ABC$

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\ge \frac{10R^2-17Rr+6r^2}{2R(R-r)}\ge 5-\frac{4r}{R}\ge 4-\frac{2r}{R}\ge 3.$$

**Soluție.**

Este reformularea inegalităților **6).**

**Remarcă.**

Suma $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}$, unde $a,b,c$ sunt lungimile laturilor unui triunghi, poate fi comparată cu alte sume cunoscute în triunghi.

Comparăm mai întâi $\sum\frac{a^2}{bc}$ cu sume trigonometrice cunoscute în triunghi.

**8)** In $\Delta ABC$: $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\geq\frac{4}{3}\left(\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\right)$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum\cos^2\frac{A}{2}=2+\frac{r}{2R}$ și vezi **1)**.

**9)** In $\Delta ABC$: $\sum\frac{a^2}{bc}\leq\frac{1}{3}\sum\text{ctg}^2\frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum\text{ctg}^2\frac{A}{2}=\frac{p^2-2r^2-8Rr}{r^2}$, (G) și (E).

**10)** In $\Delta ABC$: $\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{2}{\sqrt{3}}\sum\sin A$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum\sin A=\frac{p}{R}$, (G), (D) și (E).

Inegalitatea lui Doucet: $4R+r\geq p\sqrt{3}$, (D).

**11)** In $\Delta ABC$: $\sum\frac{a^2}{bc}\geq 2\sum\cos A$

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum\cos A=1+\frac{r}{R}$ și vezi **1)**.

**12)** In $\Delta ABC$: $\sum\frac{a^2}{bc}\leq\frac{1}{4}\sum\csc^2\frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum\csc^2\frac{A}{2}=\sum\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{r^2}$, (G) și (E).

**13)** In $\Delta ABC$: $\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{4}{3}\sum\sin^2 A$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum\sin^2 A=\frac{p^2-r^2-4Rr}{2R^2}$, (G) și (E).

**14)** In $\Delta ABC$ $\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{4}{3}\sum\sin B\sin C$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \sin B \sin C = \dfrac{p^2+r^2+4Rr}{4R^2}$, (G) și (E).

**15)** In $\Delta ABC$ : $\sum \dfrac{a^2}{bc} \geq 4\sum \cos B \cos C$ .

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \cos B \cos C = \dfrac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2}$, (G) și (E).

**16)** In $\Delta ABC$ : $\sum \dfrac{a^2}{bc} \geq \dfrac{1}{2}\sum \dfrac{\sin B + \sin C}{\sin A}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \dfrac{\sin B+\sin C}{\sin A} = \dfrac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr}$ și vezi **1)**.

**17)** In $\Delta ABC$ $\sum \dfrac{a^2}{bc} \geq 16\sum \sin^2\dfrac{B}{2}\sin^2\dfrac{C}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \sin^2\dfrac{B}{2}\sin^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{p^2+r^2-8Rr}{16R^2}$, (G) și (E).

**18)** In $\Delta ABC$ $\sum \dfrac{a^2}{bc} \geq 16\sum \cos^2\dfrac{B}{2}\cos^2\dfrac{C}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \cos^2\dfrac{B}{2}\cos^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{p^2+(4R+r)^2}{16R^2}$, (G) și (E).

**19)** In $\Delta ABC$ : $\sum \dfrac{a^2}{bc} \leq \dfrac{1}{16}\sum \csc^2\dfrac{B}{2}\csc^2\dfrac{C}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** și $\sum \csc^2\dfrac{B}{2}\csc^2\dfrac{C}{2} = \sum \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{B}{2}\sin^2\dfrac{C}{2}} = \dfrac{8R(2R-r)}{r^2}$.

Inegalitatea se scrie: $\dfrac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr} \leq \dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{8R(2R-r)}{r^2} \Leftrightarrow rp^2 \leq 2R^3 - R^2r + 6Rr^2 + 3r^3$,

care rezultă din (G) și (E). Inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$, (G).

**20)** In $\Delta ABC$ : $\sum \dfrac{a^2}{bc} \leq \dfrac{1}{9}\sum \operatorname{ctg}^2\dfrac{B}{2}\operatorname{ctg}^2\dfrac{C}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** și $\sum \operatorname{ctg}^2\dfrac{B}{2}\operatorname{ctg}^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{(4R+r)^2-2p^2}{r^2}$. Inegalitatea se scrie:

$\dfrac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr} \leq \dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{(4R+r)^2-2p^2}{r^2} \Leftrightarrow p^2(4R+9r) \leq 36R^3+16R^2r+56Rr^2+27r^3$,
care rezultă din (G) și (E).

**21)** In $\Delta ABC$ $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \sum \cos(B-C)$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \cos(B-C) = \frac{p^2+r^2+2Rr-2R^2}{2R^2}$, (G) și (E).

Soluție alternativă: $\sum \frac{a^2}{bc} \geq 3 \geq \sum \cos(B-C)$, din AM-GM și $\cos x \leq 1, x \in \boldsymbol{R}$.

**22)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \sum \cos^2 \frac{B-C}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \cos^2 \frac{B-C}{2} = \frac{p^2+r^2+2Rr+4R^2}{4R^2}$, (G) și (E).

Soluție alternativă: $\sum \frac{a^2}{bc} \geq 3 \geq \sum \cos^2 \frac{B-C}{2}$, din AM-GM și $\cos x \leq 1, x \in \boldsymbol{R}$.

**23)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{8\sqrt{3}}{9} \sum \sin^3 A$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \sin^3 A = \frac{2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)}{8R^3}$, (G) , (D) și (E).

**24)** In $\Delta ABC$ $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{16}{9} \sum \sin^4 A$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** și $\sum \sin^4 A = \frac{p^4 - p^2\left(8Rr+6r^2\right)+r^2(4R+r)^2}{8R^4}$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr} \geq \frac{16}{9} \cdot \frac{p^4 - p^2\left(8Rr+6r^2\right)+r^2(4R+r)^2}{8R^4} \Leftrightarrow$$

$$p^2\left[9R^3+32R^2r+24r^3-4rp^2\right] \geq 4r^3(4R+r)^2+9R^3\left(3r^2+6Rr\right),$$

care rezultă din $16Rr-5r^2 \leq p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$, (G) și (E).

Rămâne să arătăm că:

$$\left(16Rr-5r^2\right)\left[9R^3+32R^2r+24r^3-4r\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\right] \geq 4r^3(4R+r)^2+9R^3\left(3r^2+6Rr\right) \Leftrightarrow$$

$$45R^4-164R^3r+136R^2r^2+40Rr^3-32r^4 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)\left(45R^3-74R^2r-12Rr^2+16r^3\right) \geq 0.$$

**25)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{16}{9} \sum \cos^4 \frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** și $\sum \cos^4 \frac{A}{2} = \frac{(4R+r)^2-p^2}{8R^2}$. Inegalitatea se scrie:

$\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}\geq\frac{16}{9}\cdot\frac{(4R+r)^2-p^2}{8R^2}\Leftrightarrow p^2(9R+4r)\geq 4r(4R+r)^2+9R\left(3r^2+6Rr\right)$ ,
care rezultă din (G) și (E).

**26)** In $\Delta ABC$ : $\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{2}{\sqrt{3}}\sum\sin 2A$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum\sin 2A=\frac{2rp}{R^2}$, (G) , (D) și (E).

**27)** In $\Delta ABC$ : $\sum\frac{a^2}{bc}+2\sum\cos 2A\geq 0$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** și $\sum\cos 2A=\frac{3R^2+4Rr+r^2-p^2}{R^2}$. Inegalitatea se scrie:

$\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}+2\cdot\frac{3R^2+4Rr+r^2-p^2}{R^2}\geq 0\Leftrightarrow p^2(R-4r)+r\left(6R^2+13Rr+4r^2\right)\geq 0$.

Distingem cazurile:
Cazul 1). Dacă $R-4r\geq 0$, inegalitatea este evidentă.
Cazul 2). Dacă $R-4r<0$, inegalitatea se rescrie: $r\left(6R^2+13Rr+4r^2\right)\geq p^2(4r-R)$,
care rezultă din (G) și (E). Rămâne să arătăm că:

$r\left(6R^2+13Rr+4r^2\right)\geq\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)(4r-R)\Leftrightarrow 2R^3-3R^2r-4r^3\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(R-2r)^2(R+r)\geq 0$.

**28)** In $\Delta ABC$ : $\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{\sqrt{3}}{p}\sum a\cdot\sin A$

**Soluție.**

Folosim **Lema** și $\sum a\sin A=\frac{p^2-r^2-4Rr}{R}$. Inegalitatea se scrie:

$\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}\geq\frac{\sqrt{3}}{p}\cdot\frac{p^2-r^2-4Rr}{R}\Leftrightarrow p^2-3r^2-6Rr\geq\frac{2r\sqrt{3}}{p}\left(p^2-r^2-4Rr\right)$,care rezultă din inegalitatea lui Mitrinović $p\geq 3r\sqrt{3}$ , (M). Rămâne să arătăm că:

$p^2-3r^2-6Rr\geq\frac{2}{3}\left(p^2-r^2-4Rr\right)\Leftrightarrow p^2\geq 10Rr+7r^2$, care rezultă din (G) și (E).

**29)** In $\Delta ABC$ : $\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{3}{p}\sum a\cdot\cos A$

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum a\cos A=\frac{2rp}{R}$, (G) și (E).

**30)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{1}{R} \sum a \operatorname{tg} \frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum a \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 2(2R - r)$ și vezi **1)**.

**31)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{1}{3R} \sum a \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum a \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = 2(4R + r)$ și vezi **1)**.

**32)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{1}{Rp} \sum a^2 \sin A$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum a^2 \sin A = \frac{p}{R}\left(p^2 - 3r^2 - 6Rr\right)$ și vezi **1)**.

**33)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{1}{3Rr} \sum a^2 \cos A$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum a^2 \cos A = \frac{r}{R}\left(3p^2 - r^2 - 6Rr - 8R^2\right)$, (G) și (E).

**34)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{2}{p} \sum a \sin B \sin C$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum a \sin B \sin C = \frac{3rp}{R}$ și vezi **1)**.

**35)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{6}{p} \sum a \cos B \cos C$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum a \cos B \cos C = \frac{rp}{R}$ și vezi **1)**.

**36)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{8p}{3} \sum \frac{1}{a} \sin^2 \frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{1}{a} \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{4R + r}{4Rp}$ și vezi **1)**.

**37)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{8p}{9} \sum \frac{1}{a} \cos^2 \frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{1}{a} \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p}{4Rr}$ și vezi **1)**.

**38)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq 9r^2 \sum \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}{(p-b)(p-c)}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema și** $\sum \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}{(p-b)(p-c)} = \frac{4R+r}{rp^2}$. Inegalitatea se scrie:

$\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr} \geq 9r^2 \cdot \frac{4R+r}{rp^2} \Leftrightarrow p^2\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq 18r^2\left(4R^2+Rr\right)$,

care rezultă din (G) și (E). Rămâne să arătăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)\left(16Rr-5r^2-3r^2-6Rr\right) \geq 18r^2\left(4R^2+Rr\right) \Leftrightarrow 22R^2-49Rr+10r^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (R-2r)(22R-5r) \geq 0$ .

**39)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{3r^2}{p} \sum \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}}{p-a}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}}{p-a} = \frac{p}{r^2}$ și vezi **1)**.

**40)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{1}{6R} \sum \frac{r_a}{\sin^2 \frac{A}{2}}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{r_a}{\sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{p^2+r^2+4Rr}{r}$ și vezi **1)**.

**41)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \leq \frac{3r^2}{2R} \sum \frac{\csc^2 \frac{A}{2}}{r_a}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{\csc^2 \frac{A}{2}}{r_a} = \frac{p^2+r^2-12Rr}{r^3}$, (G) și (E).

**42)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{2}{9R} \sum r_a \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum r_a \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} = \frac{p^2}{r}$ și vezi **1)**.

**43)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq 9r \sum \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}{r_a}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}{r_a} = \frac{4R+r}{p^2}$, (G) și (E).

**44)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \leq \frac{4}{3r} \sum r_a \sin^2 \frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** și $\sum r_a \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2R(4R+r)-p^2}{2R}$. Inegalitatea se scrie:

$\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr} \leq \frac{4}{3r} \cdot \frac{2R(4R+r)-p^2}{2R} \Leftrightarrow 7p^2 \leq 32R^2+26Rr+9r^2$, rezultă din (G) și (E).

Rămâne să arătăm că: $7\left(4R^2+4Rr+3r^2\right) \leq 32R^2+26Rr+9r^2 \Leftrightarrow 2R^2-Rr-6r^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (R-2r)(2R+3r) \geq 0$ .

**45)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{4}{3r} \sum r_a \cos^2 \frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum r_a \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p^2}{2R}$ și vezi **1)**.

**46)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{2r}{3R} \sum \operatorname{ctg}\frac{B}{2} \operatorname{ctg}\frac{C}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \operatorname{ctg}\frac{B}{2} \operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \frac{4R+r}{r}$ și vezi **1)**.

**47)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq 3 \sum \operatorname{tg}\frac{B}{2} \operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \operatorname{tg}\frac{B}{2} \operatorname{tg}\frac{C}{2} = 1$ și vezi **1)**.

**48)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{4p^2}{9} \sum \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{(p-b)(p-c)}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2Rr}$ și vezi **1)**.

**49)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{4p}{9} \sum \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{p-a}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{p-a} = \frac{p}{2Rr}$ și vezi **1)**.

**50)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq 9r^2 \sum \frac{\sec^2 \frac{A}{2}}{bc}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{\sec^2 \frac{A}{2}}{bc} = \frac{4R+r}{rp^2}$, (G) și (E).

**51)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq 3r^2 \sum \frac{\csc^2 \frac{A}{2}}{bc}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{\csc^2 \frac{A}{2}}{bc} = \frac{1}{r^2}$ și vezi **1)**.

**52)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq 48r^2 \sum \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{bc}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{bc} = \frac{R-r}{4R^2 r}$, (G) și (E).

**53)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq 16r^2 \sum \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{bc}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{bc} = \frac{R+r}{4R^2 r}$, (G) și (E).

**54)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \leq \frac{4p^2}{3} \sum \frac{\mathrm{tg}^2 \frac{A}{2}}{bc}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{\mathrm{tg}^2 \frac{A}{2}}{bc} = \frac{2R(4R+r)-p^2}{2Rrp^2}$, (G) și (E).

**55)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq 4r^2 \sum \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}}{bc}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}}{bc} = \frac{2R-r}{2Rr^2}$ și vezi **1)**.

**56)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq 12r \sum \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{r_a}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{r_a} = \frac{1}{2R}$ și vezi **1)**.

**57)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq 4r \sum \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{r_a}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{r_a} = \frac{2R-r}{2Rr}$ și vezi **1)**.

**58)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{4}{9r} \sum h_a \cos^2 \frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum h_a \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p^2}{2R}$ și vezi **1)**.

**59)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{4}{3r} \sum h_a \sin^2 \frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum h_a \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{r(4R+r)}{2R}$ și vezi **1)**.

**60)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq 4r \sum \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{h_a}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{h_a} = \frac{R+r}{2Rr}$ și vezi **1)**.

**61)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{24r^2}{R} \sum \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{h_a}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{h_a} = \frac{R-r}{2Rr}$ , (G) și (E).

**62)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{3r^2}{2R} \sum \frac{\csc^2 \frac{A}{2}}{h_a}$ .

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{\csc^2 \frac{A}{2}}{h_a} = \frac{2R}{r^2}$ și vezi **1)**.

**63)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{9r^2}{2R} \sum \frac{\sec^2 \frac{A}{2}}{h_a}$ .

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{\sec^2 \frac{A}{2}}{h_a} = \frac{2R(4R+r)}{rp^2}$, (G) și (E).

**64)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{1}{9R^2} \sum a^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}$ .

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum a^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} = 2\left[(4R+r)^2 - p^2\right]$, (G) și (E).

**65)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \leq \frac{1}{2Rr} \sum a^2 \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}$ .

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum a^2 \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = 2\left(8R^2 + r^2 - p^2\right)$, (G) și (E).

**66)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{4}{3R^2} \sum a^2 \cos B \cos C$ .

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum a^2 \cos B \cos C = 2\left(8R^2 + 6Rr + r^2 - p^2\right)$, (G) și (E).

**67)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \leq \frac{R}{18r^3} \sum a^2 \sin B \sin C$ .

**Soluție.**

Folosim **Lema** și $\sum a^2 \sin B \sin C = \frac{p^4 - p^2\left(8Rr + 6r^2\right) + r^2\left(4R+r\right)^2}{2R^2}$ .

Inegalitatea se scrie: $\frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr} \leq \frac{R}{18r^3} \cdot \frac{p^4 - p^2\left(8Rr + 6r^2\right) + r^2\left(4R+r\right)^2}{2R^2} \Leftrightarrow$

$p^2\left(p^2-24r^2-8Rr\right)+r^2\left(16R^2+116Rr+55r^2\right)\geq 0$. Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $p^2-24r^2-8Rr\geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $p^2-24r^2-8Rr<0$, inegalitatea se rescrie:

$r^2\left(16R^2+116Rr+55r^2\right)\geq p^2\left(8Rr+24r^2-p^2\right)$,care rezultă din (G) și (E).

Rămâne să arătăm că:

$r^2\left(16R^2+116Rr+55r^2\right)\geq\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left(8Rr+24r^2-16Rr+5r^2\right)\Leftrightarrow$

$8R^3-17R^2r+6Rr^2-8r^3\geq 0\quad\Leftrightarrow\left(R-2r\right)\left(8R^2-Rr+4r^2\right)\geq 0$

**68)** In $\Delta ABC$ : $\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{1}{6r}\sum a\left(\sin B+\sin C\right)$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum a\left(\sin B+\sin C\right)=\frac{p^2+r^2+4Rr}{R}$ și vezi **1)**.

**69)** In $\Delta ABC$ : $\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{3}{2p}\sum a\left(\cos B+\cos C\right)$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum a\left(\cos B+\cos C\right)=2p$ și vezi **1)**.

**70)** In $\Delta ABC$ : $\sum\frac{a^2}{bc}\geq 6r\sum\frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum\frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{1}{4R}\left[1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right]$, (G) și (E).

**71)** In $\Delta ABC$ : $\sum\frac{a^2}{bc}\geq 2r\sum\frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum\frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{4Rr^2}$ și vezi **1)**.

**72)** In $\Delta ABC$ : $\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{2}{p}\sum a\sin^2 A$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum a\sin^2 A=\frac{p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)}{2R^2}$ și vezi **1)**.

**73)** In $\Delta ABC$ : $\sum\frac{a^2}{bc}\leq\frac{4p^2}{9}\sum\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{r_a^2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{r_a^2} = \frac{2Rp^2 - r(4R+r)^2}{2Rr^2p^2}$, (G) și (E).

**74)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{4p^2}{3} \sum \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{r_a^2}$

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{r_a^2} = \frac{4R+r}{2Rp^2}$ și vezi **1)**.

**75)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \leq \frac{2}{3R} \sum (p-a)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum (p-a)\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{r}$, și vezi **1)**.

**76)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{2}{R} \sum (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 3r$ și vezi **1)**.

**77)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \leq \frac{2}{R} \sum (p-a)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** și $\sum (p-a)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} = \frac{p^4 - 16p^2Rr + 2r^2(4R+r)^2}{r^2}$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr} \leq \frac{3}{p^2} \cdot \frac{p^4 - 16p^2Rr + 2r^2(4R+r)^2}{r^2} \Leftrightarrow$$

$p^2\left[p^2(6R-r) - 96R^2r + 6Rr^2 + 3r^3\right] + 12Rr^2(4R+r)^2 \geq 0$. Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $\left[p^2(6R-r) - 96R^2r + 6Rr^2 + 3r^3\right] \geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $\left[p^2(6R-r) - 96R^2r + 6Rr^2 + 3r^3\right] < 0$, inegalitatea se rescrie:

$12Rr^2(4R+r)^2 \geq p^2\left[96R^2r - 6Rr^2 - 3r^3 + p^2(r-6R)\right]$,

care rezultă din inegalitatea Blundon-Gerretsen $16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$, (B-G).

Rămâne să arătăm că:

$$12Rr^2(4R+r)^2 \geq \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}\left[96R^2r-6Rr^2-3r^3+(16Rr-5r^2)(r-6R)\right] \Leftrightarrow$$

$2(2R-r)\cdot 12r^2 \geq 40Rr^2-8r^3 \quad \Leftrightarrow R \geq 2r$, (E).

**78)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{2}{Rr}\sum (p-a)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum (p-a)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = 3r^2$ și vezi **1)**.

**79)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \leq \frac{3R}{rp}\sum a\sin^2 \frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum a\sin^2 \frac{A}{2} = p\left(1-\frac{r}{R}\right)$ ,vezi **1)** și $p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$, (G).

**80)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \leq \frac{R^2}{2r^2p}\sum a\cos^2 \frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum a\cos^2 \frac{A}{2} = p\left(1+\frac{r}{R}\right)$ , vezi **1)** și $p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$, (G).

**81)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{9}{p^2}\sum bc\sin^2 \frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum bc\sin^2 \frac{A}{2} = r(4R+r)$, (G) și (E).

**82)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{3}{p^2}\sum bc\cos^2 \frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum bc\cos^2 \frac{A}{2} = p^2$, (G) și (E).

**83)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{12}{p}\sum (p-a)\sin^2 \frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum (p-a)\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{rp}{2R}$ și vezi **1)**.

**84)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{4}{p}\sum (p-a)\cos^2 \frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum (p-a)\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{(2R-r)p}{2R}$ și vezi **1)**.

**85)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \le \frac{3R}{16rp} \sum \frac{a}{\sin^2 \frac{A}{2}}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{a}{\sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{4Rp}{r}$ , vezi **1)** și $p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ , (G).

**86)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \le \frac{p}{24r^2} \sum \frac{a}{\cos^2 \frac{A}{2}}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** și $\sum \frac{a}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{4R(4R+r)}{p}$. Inegalitatea se scrie:

$\frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr} \le \frac{p}{24r^2} \cdot \frac{4R(4R+r)}{p} \Leftrightarrow 3r\left(p^2 - 3r^2 - 6Rr\right) \le 4R^2(4R+r)$, care rezultă din (G) și (E).Rămâne să arătăm că: $3r\left(4R^2 + 4Rr + 3r^2 - 3r^2 - 6Rr\right) \le 4R^2(4R+r) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4R^2 - 11Rr + 6r^2 \ge 0 \Leftrightarrow (R-2r)(4R-3r) \ge 0$.

**87)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \le \frac{3}{4p} \sum \frac{p-a}{\sin^2 \frac{A}{2}}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** și $\sum \frac{p-a}{\sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{p\left(p^2 + r^2 - 12Rr\right)}{r^2}$. Inegalitatea se scrie:

$\frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr} \le \frac{3}{4p} \cdot \frac{p\left(p^2 + r^2 - 12Rr\right)}{r^2} \Leftrightarrow p^2(3R-2r) \ge r\left(36R^2 - 15Rr - 6r^2\right)$

care rezultă din (G) și (E).

**88)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \ge \frac{9}{4p} \sum \frac{p-a}{\cos^2 \frac{A}{2}}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{p-a}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{p}$, (G) și (E).

**89)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \le \frac{4p}{3} \sum \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{p-a}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** și $\sum \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{p-a} = \frac{2R(4R+r)-p^2}{2Rrp}$. Inegalitatea se scrie:

$\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr} \le \frac{4p}{3} \cdot \frac{2R(4R+r)-p^2}{2Rrp} \Leftrightarrow 7p^2 \le 32R^2+26Rr+9r^2$, care rezultă din (G) și (E).Rămâne să arătăm că: $7(4R^2+4Rr+3r^2) \le 32R^2+26Rr+9r^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2R^2-Rr-6r^2 \ge 0 \Leftrightarrow (R-2r)(2R+3r) \ge 0$.

**90)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \ge \frac{4p}{9} \sum \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{p-a}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{p-a} = \frac{p}{2Rr}$ și vezi **1)**.

**91)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \le \frac{1}{96Rr} \sum \frac{a^2}{\sin^4 \frac{A}{2}}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** și $\sum \frac{a^2}{\sin^4 \frac{A}{2}} = \frac{16R^2}{r^2}(p^2-2r^2-8Rr)$. Inegalitatea se scrie:

$\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr} \le \frac{1}{96Rr} \cdot \frac{16R^2}{r^2}(p^2-2r^2-8Rr) \Leftrightarrow p^2(R^2-3r^2) \ge r(8R^3+2R^2r-18Rr^2-9r^3)$

care rezultă din (G) și (E). Rămâne să arătăm că:

$(16Rr-5r^2)(R^2-3r^2) \ge r(8R^3+2R^2r-18Rr^2-9r^3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8R^3-7R^2r-30Rr^2+24r^3 \ge 0 \Leftrightarrow (R-2r)(8R^2+9Rr-12r^2) \ge 0$.

**92)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \le \frac{3}{64r^2} \sum \frac{a^2}{\cos^4 \frac{A}{2}}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** și $\sum \frac{a^2}{\cos^4 \frac{A}{2}} = \frac{16R^2}{p^2}\left[(4R+r)^2-2p^2\right]$. Inegalitatea se scrie:

$\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr} \le \frac{3}{64r^2} \cdot \frac{16R^2}{p^2}\left[(4R+r)^2-2p^2\right] \Leftrightarrow p^2(2rp^2+6R^3-12Rr^2-6r^3) \le 3R^3(4R+r)^2$

, care rezultă din Blundon-Gerretsen

$p^2 \le \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)} \le 4R^2+4Rr+3r^2$ , (B-G) și (E). Rămâne să arătăm că:

$$\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}\left(2r\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)+6R^3-12Rr^2-6r^3\right)\le 3R^3(4R+r)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3R^2-7Rr+2r^2\ge 0 \Leftrightarrow (R-2r)(3R-r)\ge 0.$$

**93)** In $\Delta ABC$ : $\sum\frac{a^2}{bc}\le\frac{24R^3}{r}\sum\frac{\sin^4\frac{A}{2}}{a^2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** și $\sum\frac{\sin^4\frac{A}{2}}{a^2}=\frac{(4R+r)^2-2p^2}{16R^2p^2}$. Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}\le\frac{24R^3}{r}\cdot\frac{(4R+r)^2-2p^2}{16R^2p^2} \Leftrightarrow p^2\left(p^2-3r^2-6Rr+6R^2\right)\le 3R^2(4R+r)^2,$$

care rezultă din (B-G) și (E). Rămâne să arătăm că:

$$\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}\left(4R^2+4Rr+3r^2-3r^2-6Rr+6R^2\right)\le 3R^2(4R+r)^2 \Leftrightarrow R\ge 2r.$$

**94)** In $\Delta ABC$ : $\sum\frac{a^2}{bc}\le\frac{32Rr}{3}\sum\frac{\cos^4\frac{A}{2}}{a^2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum\frac{\cos^4\frac{A}{2}}{a^2}=\frac{p^2-2r^2-8Rr}{16R^2r^2}$, (G) și (E).

**95)** In $\Delta ABC$ : $\sum\frac{a^2}{bc}\le\frac{1}{9r^4}\sum b^2c^2\sin^4\frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** și $\sum b^2c^2\sin^4\frac{A}{2}=r^2\left[(4R+r)^2-2p^2\right]$. Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}\le\frac{1}{9r^4}\cdot r^2\left[(4R+r)^2-2p^2\right] \Leftrightarrow p^2(4R+9r)\le 32R^3+16R^2r+56Rr^2+27r^3,$$

care rezultă din (G) și (E ). Rămâne să arătăm că:

$$\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)(4R+9r)\le 32R^3+16R^2r+56Rr^2+27r^3 \Leftrightarrow 4R^2-9Rr+2r^2\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (R-2r)(4R-r)\ge 0.$$

**96)** In $\Delta ABC$ : $\sum\frac{a^2}{bc}\le\frac{2}{3Rrp^2}\sum b^2c^2\cos^4\frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum b^2c^2\cos^4\frac{A}{2}=p^2\left(p^2-2r^2-8Rr\right)$ și vezi **1)**.

**97)** In $\Delta ABC$ : $\sum\frac{a^2}{bc}\ge\frac{16}{3r^2}\sum(p-a)^2\sin^4\frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum (p-a)^2 \sin^4 \frac{A}{2} = \frac{r^2(p^2-2r^2-8Rr)}{8R^2}$, (G) și (E).

**98)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{16}{27r^2} \sum (p-a)^2 \cos^4 \frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema**

și $\sum (p-a)^2 \cos^4 \frac{A}{2} = \frac{-p^6+p^4(12Rr+33r^2)-p^2(128R^2r^2+144Rr^3+25r^4)+r^3(4R+r)^3}{16R^2r^2}$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr} \geq \frac{16}{27r^2} \cdot \frac{-p^6+p^4(12Rr+33r^2)-p^2(128R^2r^2+144Rr^3+25r^4)+r^3(4R+r)^3}{16R^2r^2} \Leftrightarrow$$

$$p^2\left[2p^4-2p^2(12Rr+33r^2)+256R^2r^2+315Rr^3+50r^4\right] \geq 128R^3+258R^2r+105Rr^2+2r^3$$

care rezultă din (G) și (E). Rămâne să arătăm că:

$$(16Rr-5r^2)\left[2(16Rr-5r^2)(16Rr-5r^2-12Rr-33r^2)+256R^2r^2+315Rr^3+50r^4\right] \geq$$

$$\geq 128R^3+258R^2r+105Rr^2+2r^3 \Leftrightarrow 3008R^3-8617R^2r+5740Rr^2-1076r^3 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (R-2r)(3008R^2-2601Rr+538r^2) \geq 0.$$

**99)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{16r^2}{3} \sum \frac{\cos^4 \frac{A}{2}}{(p-a)^2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{\cos^4 \frac{A}{2}}{(p-a)^2} = \frac{p^2-r^2-4Rr}{8R^2r^2}$, (G) și (E).

**100)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq 6Rr \sum \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{(p-b)(p-c)}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2Rr}$ și vezi **1)**.

**101)** In $\Delta ABC$ : $\sum \frac{a^2}{bc} \geq 4r^2 \sum \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{(p-b)(p-c)}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{(p-b)(p-c)} = \frac{2R-r}{2Rr^2}$ și vezi **1)**.

**102)** In $\Delta ABC$ : $\sum\frac{a^2}{bc}\geq 36R^2r^2\sum\frac{\sin^4\frac{A}{2}}{(p-b)^2(p-c)^2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** și $\sum\frac{\sin^4\frac{A}{2}}{(p-b)^2(p-c)^2}=\frac{p^2-r^2-4Rr}{8R^2r^2p^2}$. Inegalitatea se scrie:

$\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}\geq 36R^2r^2\cdot\frac{p^2-r^2-4Rr}{8R^2r^2p^2}\Leftrightarrow p^2\left(p^2-3r^2-15Rr\right)+9Rr^2(4R+r)\geq 0$.

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $p^2-3r^2-15Rr\geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $p^2-3r^2-15Rr<0$, inegalitatea se rescrie:

$9Rr^2(4R+r)\geq p^2\left(15Rr+3r^2-p^2\right)$, care rezultă din $16Rr-5r^2\leq p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$, (G)

Rămâne să arătăm că: $9Rr^2(4R+r)\geq\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left(15Rr+3r^2-16Rr+5r^2\right)$

$\Leftrightarrow R^3+2R^2r-5Rr^2-6r^3\geq 0\quad\Leftrightarrow(R-2r)\left(R^2+4Rr+3r^2\right)\geq 0$, evident din Euler $R\geq 2r$.

**103)** In $\Delta ABC$ : $\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{9}{2p}\sum a\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum a\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{2r(4R+r)}{p}$, (G) și (E).

**104)** In $\Delta ABC$ : $\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{r}{Rp}\sum a\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum a\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{2p(2R-r)}{r}$ și vezi **1)**.

**105)** In $\Delta ABC$ : $\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{3}{2Rr}\sum a^2\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum a^2\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}=2r^2\left[\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2-1\right]$, (G) și (E).

**106)** In $\Delta ABC$ : $\sum\frac{a^2}{bc}\leq\frac{1}{27R^2}\sum a^2\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** și $\sum a^2\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}=\frac{2p^2\left(8R^2+r^2-p^2\right)}{r^2}$.

Inegalitatea se scrie: $\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}\leq\frac{1}{27R^2}\cdot\frac{2p^2\left(8R^2+r^2-p^2\right)}{r^2}\Leftrightarrow$

$p^2\left(4p^2-4r^2-32R^2+27Rr\right)\le 81Rr^2(2R+r)$. Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $\left(4p^2-4r^2-32R^2+27Rr\right)\le 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $\left(4p^2-4r^2-32R^2+27Rr\right)>0$, folosim inegalitatea lui Gerretsen $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$. Rămâne să arătăm că:

$\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left(4\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)-4r^2-32R^2+27Rr\right)\le 81Rr^2(2R+r)\Leftrightarrow$

$32R^4-54R^3r+3R^2r^2-40Rr^3-12r^4\ge 0 \Leftrightarrow (R-2r)\left(32R^3+10R^2r+23Rr^2+6r^3\right)\ge 0$.

**107)** In $\Delta ABC$: $\sum\frac{a^2}{bc}\le\frac{2p}{3Rr}\sum(p-a)\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum(p-a)\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{p^2-2r^2-8Rr}{p}$, (G) și (E).

**108)** In $\Delta ABC$: $\sum\frac{a^2}{bc}\ge\frac{1}{p}\sum(p-a)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum(p-a)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=3p$ și vezi **1)**.

**109)** In $\Delta ABC$: $\sum\frac{a^2}{bc}\le\frac{3}{r^2}\sum(p-a)^2\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** și $\sum(p-a)^2\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{p^4-16p^2Rr+2r^2(4R+r)^2}{p^2}$.

Inegalitatea se scrie: $\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}\le\frac{3}{r^2}\cdot\frac{p^4-16p^2Rr+2r^2(4R+r)^2}{p^2}\Leftrightarrow$

$p^2\left[p^2(6R-r)+3r^3+6Rr^2-96R^2r\right]+12Rr^2(4R+r)^2\ge 0$. Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $\left[p^2(6R-r)+3r^3+6Rr^2-96R^2r\right]\ge 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $\left[p^2(6R-r)+3r^3+6Rr^2-96R^2r\right]<0$, inegalitatea se rescrie:

$12Rr^2(4R+r)^2\ge p^2\left[96R^2r-6Rr^2-3r^3+p^2(r-6R)\right]$,

care rezultă din inegalitatea Blundon- Gerretsen $16Rr-5r^2\le p^2\le\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$.

Rămâne să arătăm că:

$12Rr^2(4R+r)^2\ge\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}\left[96R^2r-6Rr^2-3r^3+\left(16Rr-5r^2\right)(r-6R)\right]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 48Rr-24r^2\ge 40Rr-8r^2\Leftrightarrow R\ge 2r$ ( inegalitatea lui Euler).

**110)** In $\Delta ABC$: $\sum\frac{a^2}{bc}\ge\frac{1}{p^2}\sum(p-a)^2\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum(p-a)^2 \operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}=3p^2$ și vezi **1)**.

**111)** In $\Delta ABC$ : $\sum\frac{a^2}{bc}\le\frac{1}{p^2}\sum\frac{m_a^2}{\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** și $\sum\frac{m_a^2}{\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}=\frac{2p^4-p^2\left(24Rr+3r^2\right)+r^2(4R+r)^2}{2r^2}$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}\le\frac{1}{p^2}\cdot\frac{2p^4-p^2\left(24Rr+3r^2\right)+r^2(4R+r)^2}{2r^2}\Leftrightarrow$$

$p^2\left[p^2(2R-r)+3r^3+3Rr^2-24R^2r\right]+Rr^2(4R+r)^2\ge 0$. Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $\left[p^2(2R-r)+3r^3+3Rr^2-24R^2r\right]\ge 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $\left[p^2(2R-r)+3r^3+3Rr^2-24R^2r\right]<0$, inegalitatea se rescrie:

$Rr^2(4R+r)^2\ge p^2\left[24R^2r-3Rr^2-3r^3+p^2(r-2R)\right]$,

care rezultă din inegalitatea Blundon- Gerretsen $16Rr-5r^2\le p^2\le\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$.

Rămâne să arătăm că:

$$Rr^2(4R+r)^2\ge\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}\left[24R^2r-3Rr^2-3r^3+\left(16Rr-5r^2\right)(r-2R)\right]\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 8R^2-19Rr+6r^2\ge 0 \Leftrightarrow (R-2r)(8R-3r)\ge 0$, evident din inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$.

**112)** In $\Delta ABC$ : $\sum\frac{a^2}{bc}\le\frac{2}{Rr}\sum m_a^2\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** și $\sum m_a^2\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{2p^4-p^2\left(24Rr+3r^2\right)+r^2(4R+r)^2}{2p^2}$.

Inegalitatea se scrie: $\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}\le\frac{2}{Rr}\cdot\frac{2p^4-p^2\left(24Rr+3r^2\right)+r^2(4R+r)^2}{2p^2}\Leftrightarrow$

$p^2\left(3p^2-3r^2-42Rr\right)+2r^2(4R+r)^2\ge 0$. Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $\left(3p^2-3r^2-42Rr\right)\ge 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $\left(3p^2-3r^2-42Rr\right)<0$, inegalitatea se rescrie:

$2r^2(4R+r)^2\ge p^2\left(42Rr+3r^2-3p^2\right)$, care rezultă din $16Rr-5r^2\le p^2\le\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$.

Rămâne să arătăm că: $2r^2(4R+r)^2 \geq \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}\left(42Rr+3r^2-3\left(16Rr-5r^2\right)\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3R^2-5Rr-r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(3R+r) \geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

**113)** In $\Delta ABC$: $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{12}{p^2}\sum m_a^2 \sin^2\frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** și $\sum m_a^2 \sin^2\frac{A}{2} = \frac{p^2(2R+5r)+r(4R+r)(r-8R)}{8R}$.

Inegalitatea se scrie: $\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr} \geq \frac{12}{p^2}\cdot\frac{p^2(2R+5r)+r(4R+r)(r-8R)}{8R} \Leftrightarrow$

$p^2\left(p^2-8r^2-12Rr\right)+r^2(4R+r)(8R-r) \geq 0$. Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $\left(p^2-8r^2-12Rr\right) \geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $\left(p^2-8r^2-12Rr\right) < 0$, inegalitatea se rescrie:

$r^2(4R+r)(8R-r) \geq p^2\left(12Rr+8r^2-p^2\right)$, care rezultă din inegalitatea

$16Rr-5r^2 \leq p^2 \leq \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$ ( Blundon- Gerretsen).

Rămâne să arătăm că: $r^2(4R+r)(8R-r) \geq \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}\left(12Rr+8r^2-16Rr+5r^2\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16R^3-16R^2r-33Rr^2+2r^3 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)\left(16R^2+16Rr-r^2\right) \geq 0$.

**114)** In $\Delta ABC$: $\sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{4}{p}\sum \frac{bc}{b+c}\cos^2\frac{A}{2}$.

**Soluție.**

Folosim **Lema** , $\sum \frac{bc}{b+c}\cos^2\frac{A}{2} = \frac{p\left(p^2+5r^2+8Rr\right)}{2\left(p^2+r^2+2Rr\right)}$, (G) și (E).

**Remarcă.**
La toate inegalitățile de mai sus, egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.
**Remarcă.**

În numărul următor suma $\sum \frac{a^2}{bc}$ se va compara cu alte sume remarcabile construite cu laturile triunghiului.

**Bibliografie:**


1. Titu Andreescu, Dorin Andrica, 360 Problems for Mathematical Contest, GIL Publishing House, Zalău, 2003.
2. O.Bottema, R.Z.Djordjevic, R.R.Janic, D.S.Mitrinovic, P.M.Vasic, Geometric Inequalities, Groningen 1969, The Netherlands.

3. Marin Chirciu, Inegalități algebrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2014.
4. Marin Chirciu, Inegalități geometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2015.
5. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.
6. Marin Chirciu, Inegalități cu laturi și raze în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2017.
7. Marin Chirciu, Inegalități cu linii importante în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2018.