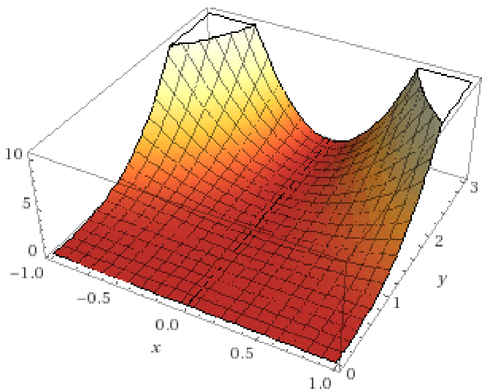
WWW.MATEINFO.RO

Revistă de matematică din februarie 2009
ISSN 2065 - 6432

Revista electronică MATEINFO.RO



REDACTORI PRINCIPALI:
Neculai Stanciu, Roxana Mihaela Stanciu,
Nela Ciceu, Marin Chirciu

COORDONATOR:
Andrei Octavian Dobre

SEPTEMBRIE 2018

revista@mateinfo.ro

Cuprins

1. About one of the best inequality

By Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

Theorem. If $a,b,c,d>0; a+b+c+d=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$, then 3 is the biggest k for which the following inequality holds:

$$(a+b+c+d)^2+16kabcd\geq 16(1+k).$$

Further, if $k=3$, then equality holds at $(1,1,1,1)$ or $\left(\frac{\sqrt{10}}{5},\frac{\sqrt{10}}{5},\frac{\sqrt{10}}{5},\sqrt{10}\right)$ and permutations.

Proof.

- If $k=3$ is proved that $(a+b+c+d)^2+48abcd-64\geq 0$.

- If $0<k<3$, we shall prove $(a+b+c+d)^2+16kabcd-16(1+k)\geq 0$.

Starting from the inequality $(3-k)(a+b+c+d)^2\geq 16(3-k)$, we get the equivalence one

$3(a+b+c+d)^2+48kabcd-48(1+k)\geq k(a+b+c+d)^2+48kabcd-64k$.

But $k(a+b+c+d)^2+48kabcd-64k\geq 0$, so $(a+b+c+d)^2+16kabcd-16(1+k)\geq 0$.

- If $k>3$, we take the vector $\left(\frac{\sqrt{10}}{5},\frac{\sqrt{10}}{5},\frac{\sqrt{10}}{5},\sqrt{10}\right)$ and we get $\frac{2+k}{5}<\frac{1+k}{4}$.

2. Asupra unor probleme din RMT

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti,

Nicolaie Ivăşchescu, Canada şi

Neculai Stanciu, Buzău

Domnul *Vasile Peiţa* a propus în RMT următoarele probleme

OBJ.75. Arătaţi că pentru orice $a,b,c>0$ cu $a+b+c=1$, are loc inegalitatea

$$\frac{a}{a^2+3b}+\frac{b}{b^2+3c}+\frac{c}{c^2+3a}\geq\frac{9}{10},\ (1)$$

şi

OBJ.82. Demonstraţi că dacă $a,b,c>0$ şi $a+b+c=1$, atunci

$$\frac{a}{(1+bc)^3}+\frac{b}{(1+ca)^3}+\frac{c}{(1+ab)^3}\geq\left(\frac{9}{10}\right)^3,\ (2).$$

În cele ce urmează vom enunţa şi demonstra unele generalizări ale acestor probleme interesante.

G1. (OBJ.75.). Dacă $a,b,c,m>0$ şi $a+b+c=1$, atunci

$$\frac{a}{(a^2+3b)^m}+\frac{b}{(b^2+3c)^m}+\frac{c}{(c^2+3a)^m}\geq\left(\frac{9}{10}\right)^m,\ (3).$$

Demonstraţie. Avem

$$\sum_{cyclic}\frac{a}{(a^2+3b)^m}=\sum_{cyclic}\frac{a^{m+1}}{(a^3+3b)^m}\overset{J.Radon}{\geq}\frac{(a+b+c)^{m+1}}{\left(\sum_{cyclic}(a^3+3ab)\right)^m}=\frac{1}{\left(a^3+b^3+c^3+3(ab+bc+ca)\right)^m},$$

(4).

Avem însă identitatea

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3(ab+bcc+ca)=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca+3abc+3(ab+bc+ca)=$$

$=(a+b+c)^2+3abc=1+3abc$, şi atunci relaţia (4) devine

$$\sum_{cyclic}\frac{a}{(a^2+3b)^m}\geq\frac{1}{(1+3abc)^m}, (5).$$

Dar, $1=a+b+c\overset{MA-MG}{\geq}3\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow abc\leq\frac{1}{27}$, şi din relaţia (5) rezultă

$$\sum_{cyclic}\frac{a}{(a^2+3b)^m}\geq\frac{1}{\left(1+3\cdot\frac{1}{27}\right)^m}=\left(\frac{9}{10}\right)^m, \text{ q.e.d.}$$

Egalitatea are loc $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Observaţia 1. Dacă $m=1$, atunci relaţia (3) devine relaţia (1).

G2. (OBJ.75.). Dacă $x,y,z>0$, $m\geq1$, şi $xy+yz+zx=xyz$, atunci

$$\frac{x^{2m-1}y^m}{(y+3x^2)^m}+\frac{y^{2m-1}z^m}{(z+3y^2)^m}+\frac{z^{2m-1}x^m}{(z+3x^2)^m}\geq\left(\frac{9}{10}\right)^m, (6).$$

Demonstraţie. Fie $a,b,c>0$, $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c}$, atunci din $xy+yz+zx=xyz$, rezultă $a+b+c=1$, şi

$$\sum_{cyclic}\frac{x^{2m-1}y^m}{(y+3x^2)^m}=\sum_{cyclic}\frac{1}{a^{2m-1}b^m\left(\frac{1}{b}+\frac{3}{a^2}\right)^m}=\sum_{cyclic}\frac{a}{(a^2+3b)^m}=$$

$$=\sum_{cyclic}\frac{a^{m+1}}{(a^3+3ab)^m}\overset{J.Radon}{\geq}\frac{(a+b+c)^{m+1}}{\left(\sum_{cyclic}(a^3+3ab)\right)^m}=\frac{1}{\left(a^3+b^3+c^3+3(ab+bc+ca)\right)^m},$$ adică am obţinut relaţia (4) şi mai departe ca mai sus obţinem relaţia (6); cu egalitate $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=y=z=3$.

G3. (OBJ.82.). Dacă $a,b,c,m,t,u>0$, cu $a+b+c=1$, atunci

$$\frac{a}{(t+ubc)^m}+\frac{b}{(t+uca)^m}+\frac{c}{(t+uab)^m}\geq\left(\frac{9}{9t+u}\right)^m, (7).$$

Demonstraţie. Avem

$$\sum_{cyclic}\frac{a}{(t+ubc)^m}=\sum_{cyclic}\frac{a^{m+1}}{(ta+uabc)^m}\overset{J.Radon}{\geq}\frac{(a+b+c)^{m+1}}{\left(\sum_{cyclic}(ta+uabc)\right)^m}=$$

$$=\frac{1}{\left(t(a+b+c)+3uabc\right)^m}=\frac{1}{(t+3uabc)^m},\quad (8).$$

Din $a+b+c=1$, rezultă $1\overset{MA-MG}{\geq}3\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow abc\leq\frac{1}{27}$ şi atunci din (8) obţinem

$$\sum_{cyclic}\frac{a}{(t+ubc)^m}\geq\frac{1}{\left(t+3u\cdot\frac{1}{27}\right)^m}=\left(\frac{9}{9t+u}\right)^m,\text{ q.e.d; cu egalitate }\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}.$$

Observaţia 2. Dacă $m=t=u=1$, atunci relaţia (7) devine relaţia (2).

G4. (OBJ.82.). Dacă $m,x,y,z,t,u>0$, şi $xy+yz+zx=xyz$, atunci

$$\frac{x^m y^m}{z(txy+u)^m}+\frac{y^m z^m}{x(tyz+u)^m}+\frac{z^m x^m}{y(tzx+u)^m}\geq\left(\frac{9}{9t+u}\right)^m,\quad (9).$$

Demonstraţie. Fie $a,b,c>0$, $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c}$, atunci din $xy+yz+zx=xyz$, rezultă $a+b+c=1$, şi

$$\sum_{cyclic}\frac{x^m y^m}{z(txy+u)^m}=\sum_{cyclic}\frac{c}{a^m b^m\left(\frac{t}{ab}+u\right)^m}=\sum_{cyclic}\frac{c}{(t+uab)^m}=$$

$$=\sum_{cyclic}\frac{c^{m+1}}{(tc+uabc)^m}\overset{J.Radon}{\geq}\frac{(a+b+c)^{m+1}}{\left(\sum_{cyclic}(tc+uabc)\right)^m}=\frac{1}{\left(t(a+b+c)+3uabc\right)^m}=\frac{1}{(t+3uabc)^m},\quad (10).$$

Dar, ca mai sus $abc\leq\frac{1}{27}$, şi din (10) obţinem

$$\sum_{cyclic}\frac{x^m y^m}{z(txy+u)^m}\geq\frac{1}{\left(t+3u\cdot\frac{1}{27}\right)^m}=\left(\frac{9}{9t+u}\right)^m,\text{ q.e.d; cu egalitate}$$

$$\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=y=z=3.$$

G5. (OBJ.82.). Dacă $n \in N, n \geq 3, a, b, m, x_k > 0, k = \overline{1,n}$, astfel încât $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$ şi $P_k = \prod_{i=1, i\neq k}^{n} x_i$, atunci

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{(a+bP_k)^m} \geq \frac{n^{m(n-1)}}{(an^{n-1}+b)^m}, \quad (11).$$

Demonstraţie. Avem: $P_k = \prod_{i=1, i\neq k}^{n} x_i$, $P = x_k P_k = \prod_{k=1}^{n} x_k$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{(a+bP_k)^m} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{m+1}}{(ax_k+bx_kP_k)^m} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{m+1}}{(ax_k+bP)^m} \overset{J.Radon}{\geq} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{m+1}}{\left(\sum_{k=1}^{n}(ax_k+bP)\right)^m} =$$

$$= \frac{1}{\left(a\sum_{k=1}^{n} x_k + nbP\right)^m} = \frac{1}{(a+bnP)^m}, \quad (12).$$

Dar, $1 = \sum_{k=1}^{n} x_k \overset{MA-MG}{\geq} n\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} = n\sqrt[n]{P} \Leftrightarrow P \leq \frac{1}{n^n}$, şi atunci relaţia (12) devine

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{(a+bP_k)^m} \geq \frac{1}{\left(a+bn\cdot\frac{1}{n^n}\right)^m} = \frac{n^{m(n-1)}}{\left(an^{n-1}+b\right)^m},$$ q.e.d; cu egalitate $\Leftrightarrow x_k = \frac{1}{n}, k = \overline{1,n}$.

Observaţia 3. Dacă $m = n = 3$, $a = b = 1$ atunci relaţia (11) devine relaţia (2).

3.Extinderi ale Problemei din REMI 5/2018

Marin Chirciu[1]

Se continuă,din numărul anterior al Revistei Electronice MateInfo.ro, Mai 2018, seria inegalităților în triunghi, în care suma $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}$ se compară cu diferite sume remarcabile construite cu laturi ale triunghiului.

Articolul a pornit de la **Problema 42**, pagina 144 din **360 Problems for Mathematical Contests,** autori **Titu Andreescu** și **Dorin Andrica**, apărută la Editura **GIL**, Zalău, 2003.

Lemă.

In $\Delta ABC: \frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$.

Demonstrație.

Folosim $a^3+b^3+c^3=2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)$ și $abc=4Rrp$.

Obținem $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)}{4Rrp}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$.

Prezentăm aplicații cu suma anunțată mai sus.

1) In $\Delta ABC: \sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{1}{2}\sum\frac{b+c}{a}\geq 3$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}, \sum\frac{b+c}{a}=\frac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr}$,

inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$, (G) și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$, (E).

2) In $\Delta ABC: \sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{1}{9R^4}\sum a^4$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$ și $\sum a^4=2\left[p^4-p^2\left(8Rr+6r^2\right)+r^2\left(4R+r\right)\right]^2$.

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești*

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}\ge\frac{1}{9R^4}\cdot 2\left[p^4-p^2\left(8Rr+6r^2\right)+r^2\left(4R+r\right)\right]\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\ p^2\left[9R^3+32R^2r+24r^3-4rp^2\right]\ge 4r^3\left(4R+r\right)^2+9R^3\left(3r^2+6Rr\right)$, care rezultă din

inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2\le p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$, (G) și a lui Euler $R\ge 2r$.

Rămâne să arătăm că:

$$\left(16Rr-5r^2\right)\left[9R^3+32R^2r+24r^3-4r\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\right]\ge 4r^3\left(4R+r\right)^2+9R^3\left(3r^2+6Rr\right)\Leftrightarrow$$
$$45R^4-164R^3r+136R^2r^2+40Rr^3-32r^4\ge 0\ \Leftrightarrow\ \left(R-2r\right)\left(45R^3-74R^2r-12Rr^2+16r^3\right)\ge 0.$$

3) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\ge\sum\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}=\frac{2\left(R+r\right)}{R}$,(G) și (E).

4) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\ge\frac{4p^2}{9}\sum\frac{1}{bc}\ge 3$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum\frac{1}{bc}=\frac{1}{2Rr}$,(G) și (E).

5) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\ge\frac{1}{2}\sum\frac{b^2+c^2}{bc}\ge 3$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum\frac{b^2+c^2}{bc}=\frac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr}$,(G) și (E).

6) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\ge\frac{3r}{8Rp}\sum\frac{\left(b+c\right)^2}{p-a}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum\frac{\left(b+c\right)^2}{p-a}=\frac{4p\left(R+2r\right)}{r}$,(G) și (E).

7) In $\Delta ABC: \sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{1}{4} \sum \frac{(b+c)^2}{bc} \geq 3$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$, $\sum \frac{(b+c)^2}{bc} = \frac{p^2 + r^2 + 10Rr}{2Rr}$,(G) și (E).

8) In $\Delta ABC: \sum \frac{a^2}{bc} \leq \frac{3}{2p} \sum \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$, $\sum \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a} = \frac{p^4 - 8p^2 Rr - r^2 (4R + r)^2}{2Rrp}$,(G) și (E).

9) In $\Delta ABC: \sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{3}{2p} \sum \frac{b^2 + c^2 - a^2}{b + c - a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$ și $\sum \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a} = \frac{5p^2 - r^2 (4R + r)^2}{p}$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr} \geq \frac{3}{2p} \cdot \frac{5p^2 - r^2 (4R + r)^2}{p} \Leftrightarrow p^2 \left(p^2 - 3r^2 - 21Rr \right) + 3Rr (4R + r)^2 \geq 0.$$

Distingem cazurile:

Cazul 1).Dacă $p^2 - 3r^2 - 21Rr \geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2).Dacă $p^2 - 3r^2 - 21Rr < 0$, inegalitatea se rescrie:

$3Rr(4R + r)^2 \geq p^2 \left(21Rr + 3r^2 - p^2 \right)$, care rezultă din inegalitatea Blundon- Gerretsen

$16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq \frac{R(4R + r)^2}{2(2R - r)}$. Rămâne să arătăm că:

$$3Rr(4R + r)^2 \geq \frac{R(4R + r)^2}{2(2R - r)} \left(21Rr + 3r^2 - 16Rr + 5r^2 \right) \Leftrightarrow 6(2R - r) \geq 5R + 8r \quad \Leftrightarrow R \geq 2r.$$

10) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{8p}{9Rr}\sum\frac{(p-b)(p-c)}{b+c}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum\frac{(p-b)(p-c)}{b+c}=\frac{p^2(8Rr-3r^2)+r^2(4R+r)^2}{2p(p^2+r^2+2Rr)}$,(G) și (E).

11) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq 4\sum\frac{p-a}{b+c}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum\frac{p-a}{b+c}=\frac{p^2+5r^2+8Rr}{2(p^2+r^2+2Rr)}$,(G) și (E).

12) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{3}{2Rrp^2}\sum a^2(p-a)^2$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum a^2(p-a)^2=2r^2\left[(4R+r)^2-p^2\right]$,(G) și (E).

13) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{9}{4p^2}\sum a^2$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$ și $\sum a^2=2(p^2-r^2-4Rr)$. Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}\geq\frac{9}{4p^2}\cdot 2(p^2-r^2-4Rr)\Leftrightarrow p^2(p^2-3r^2-15Rr)+9Rr^2(4R+r)\geq 0.$$

Distingem cazurile:

Cazul 1).Dacă $p^2-3r^2-15Rr\geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2).Dacă $p^2-3r^2-15Rr<0$, inegalitatea se rescrie:
$9Rr^2(4R+r)\geq p^2(15Rr+3r^2-p^2)$ și vezi **9).**

14) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\leq\frac{3}{8Rrp^2}\sum a^4$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$ şi $\sum a^4 = 2\left[p^4 - p^2\left(8Rr+6r^2\right)+r^2\left(4R+r\right)^2\right]$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr} \le \frac{3}{8Rrp^2}\cdot 2\left[p^4 - p^2\left(8Rr+6r^2\right)+r^2\left(4R+r\right)^2\right] \Leftrightarrow$$
$$p^2\left(p^2-12r^2-12Rr\right)+3r^2\left(4R+r\right)^2 \ge 0.$$

Distingem cazurile:

Cazul 1).Dacă $p^2-12r^2-12Rr \ge 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2).Dacă $p^2-12r^2-12Rr < 0$, inegalitatea se rescrie:
$3r^2\left(4R+r\right)^2 \ge p^2\left(12Rr+12r^2-p^2\right)$ şi vezi **9).**

15) In $\Delta ABC : \sum \frac{a^2}{bc} \ge \frac{3}{8Rrp^2}\sum b^2c^2$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum b^2c^2 = p^4 + p^2\left(2r^2-8Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2$,(G) şi (E).

16) In $\Delta ABC : \sum \frac{a^2}{bc} \ge 2\sum \frac{a}{b+c}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum \frac{a}{b+c} = \frac{2\left(p^2-r^2-Rr\right)}{p^2+r^2+2Rr}$,(G) şi (E).

17) In $\Delta ABC : \sum \frac{a^2}{bc} \ge \frac{1}{8Rrp}\sum bc\left(b+c\right)$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum bc\left(b+c\right) = 2p\left(p^2+r^2-2Rr\right)$,(G) şi (E).

18) In $\Delta ABC : \sum \frac{a^2}{bc} \ge \frac{1}{2}\sum \frac{b+c}{a} \ge 3$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum \frac{b+c}{a} = \frac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr}$,(G) şi (E).

19) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{2p}{3}\sum\frac{1}{a}$.

Soluție.

20) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq 2\sum\frac{p-a}{a}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum\frac{p-a}{a}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{4Rr}$,(G) și (E).

21) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\leq 3R^2\sum\frac{1}{a^2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$ și $\sum\frac{1}{a^2}=\frac{p^4+p^2(2r^2-8Rr)+r^2(4R+r)^2}{16R^2r^2p^2}$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}\leq 3R^2\cdot\frac{p^4+p^2(2r^2-8Rr)+r^2(4R+r)^2}{16R^2r^2p^2}\Leftrightarrow$$
$$p^2\left[p^2(3R-8r)+r\left(24r^2+54Rr-24R^2\right)\right]+3Rr^2(4R+r)^2\geq 0.$$

Distingem cazurile:

Cazul 1).Dacă $\left[p^2(3R-8r)+r\left(24r^2+54Rr-24R^2\right)\right]\geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2).Dacă $\left[p^2(3R-8r)+r\left(24r^2+54Rr-24R^2\right)\right]<0$, inegalitatea se rescrie:
$3Rr^2(4R+r)^2\geq p^2\left[p^2(8r-3R)+r\left(24R^2-54Rr-24r^2\right)\right]$ și vezi **9).**

22) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{1}{24Rr}\sum(b+c)^2$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$ $\sum(b+c)^2=2\left(3p^2-r^2-4Rr\right)$,(G) și (E).

23) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{4p}{3}\sum\frac{1}{b+c}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum\frac{1}{b+c}=\frac{5p^2+r^2+4Rr}{2p\left(p^2+r^2+2Rr\right)}$,(G) și (E).

24) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{2p}{9Rr}\sum\frac{bc}{b+c}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum\frac{bc}{b+c}=\frac{p^4+p^2\left(16Rr+2r^2\right)+r^2\left(4R+r\right)^2}{2p\left(p^2+r^2+2Rr\right)}$,(G) și (E).

25) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{p}{18R^2}\sum\frac{a\left(b+c\right)}{p-a}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum\frac{a\left(b+c\right)}{p-a}=\frac{4Rp}{r}$,(G) și (E).

26) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{2}{3R}\sum r_a$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum r_a=4R+r$,(G) și (E).

27) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{3}{p^2}\sum r_br_c$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum r_br_c=p^2$,(G) și (E).

28) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{1}{3r}\sum h_a$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum h_a=\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}$,(G) și (E).

29) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{3}{p^2}\sum h_bh_c$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum h_bh_c=\frac{2rp^2}{R}$,(G) și (E).

30) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\ge\frac{2rp}{3R}\sum\frac{1}{p-a}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}, \sum\frac{p}{p-a}=\frac{4R+r}{rp}$,(G) și (E).

31) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\ge\frac{r}{R}\sum\frac{p}{p-a}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}, \sum\frac{p}{p-a}=\frac{2(2R-r)}{r}$,(G) și (E).

32) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\ge 6r^2\sum\frac{1}{a(p-a)}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}, \sum\frac{1}{a(p-a)}=\frac{p^2+(4R+r)^2}{4Rrp^2}$,(G) și (E).

33) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\ge\frac{rp}{3R}\sum\frac{a}{(p-b)(p-b)}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}, \sum\frac{a}{(p-b)(p-b)}=\frac{2(4R+r)}{rp}$,(G) și (E).

34) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\le\frac{p}{9r^2}\sum\frac{(p-b)(p-c)}{p-a}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}, \sum\frac{(p-b)(p-c)}{p-a}=\frac{(4R+r)^2-2p^2}{p}$,(G) și (E).

35) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\ge 4\sum\frac{(p-b)(p-c)}{bc}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}, \sum\frac{(p-b)(p-c)}{bc}=\frac{2R-r}{2R}$,(G) și (E).

36) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\le\frac{6}{p}\sum\frac{(p-a)^2}{a}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$, $\sum \frac{(p-a)^2}{a} = \frac{p(p^2 + r^2 - 12Rr)}{4Rr}$,(G) și (E).

37) In $\Delta ABC: \sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{4p}{3} \sum \frac{p-a}{bc}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$, $\sum \frac{p-a}{bc} = \frac{4R+r}{2Rp}$,(G) și (E).

38) In $\Delta ABC: \sum \frac{a^2}{bc} \leq \frac{R^2}{3r^2} \sum \frac{p(p-a)}{a^2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$ și $\sum \frac{p(p-a)}{a^2} = \frac{p^4 + p^2(2r^2 - 12Rr) + r^3(4R+r)}{16R^2r^2}$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr} \geq \frac{pR^2}{3r^2} \cdot \frac{p^4 + p^2(2r^2 - 12Rr) + r^3(4R+r)}{16R^2r^2 p} \Leftrightarrow \Leftrightarrow$$
$$p^2(Rp^2 + 2Rr^2 - 12R^2r - 24r^3) \geq r^3(4R^2 + 145Rr + 72r^2).$$

Distingem cazurile:

Cazul 1).Dacă $(Rp^2 + 2Rr^2 - 12R^2r - 24r^3) \geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2).Dacă $(Rp^2 + 2Rr^2 - 12R^2r - 24r^3) < 0$, inegalitatea se rescrie:
$r^3(4R^2 + 145Rr + 72r^2) \geq p^2(12R^2r + 24r^3 - 2Rr^2 - Rp^2)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

39) In $\Delta ABC: \sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{9}{2p^2} \sum a(p-a)$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$, $\sum a(p-a) = 2r(4R+r)$,(G) și (E).

40) In $\Delta ABC: \sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{1}{Rrp} \sum a(p-a)^2$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum a(p-a)^2=2rp(2R-r)$,(G) și (E).

41) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\le\frac{p}{6}\sum\frac{a}{(p-a)^2}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum\frac{a}{(p-a)^2}=\frac{4R(4R+r)-2p^2}{r^2p}$,(G) și (E).

42) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\le\frac{1}{3Rr}\sum\frac{a(p-b)(p-c)}{p-a}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum\frac{a(p-b)(p-c)}{p-a}=4R(4R+r)-2p^2$,(G) și (E).

43) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\le\frac{p^2}{9}\sum\frac{1}{(p-a)^2}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum\frac{1}{(p-a)^2}=\frac{(4R+r)^2-2p^2}{r^2p^2}$,(G) și (E).

44) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\ge\frac{3}{2Rrp^2}\sum a^2(p-a)^2$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum a^2(p-a)^2=2r^2\left[(4R+r)^2-p^2\right]$,(G) și (E).

45) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\ge 4\sum\frac{p-a}{b+c}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum\frac{p-a}{b+c}=\frac{p^2+5r^2+8Rr}{2(p^2+r^2+2Rr)}$,(G) și (E).

46) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\ge 2\sum\frac{2p-a}{2p+a}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$, $\sum \frac{2p-a}{2p+a} = \frac{15p^2 - r^2 - 10Rr}{9p^2 + r^2 + 6Rr}$,(G) şi (E).

47) In $\Delta ABC : \sum \frac{a^2}{bc} \geq 5 \sum \frac{p-a}{p+a}$.

Marin Chirciu, Piteşti

<u>Soluție.</u>

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$, $\sum \frac{p-a}{p+a} = \frac{4p^2 - r^2 - 16Rr}{4p^2 + r^2 + 8Rr}$. Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr} \geq 5 \cdot \frac{4p^2 - r^2 - 16Rr}{4p^2 + r^2 + 8Rr} \Leftrightarrow p^2\left(4p^2 - 11r^2 - 56Rr\right) + r^2\left(112R^2 - 20Rr - 3r^2\right) \geq 0 .$$

Distingem cazurile:

Cazul 1).Dacă $\left(4p^2 - 11r^2 - 56Rr\right) \geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2).Dacă $\left(4p^2 - 11r^2 - 56Rr\right) < 0$, inegalitatea se rescrie:
$r^2\left(112R^2 - 20Rr - 3r^2\right) \geq p^2\left(56Rr + 11r^2 - 4p^2\right)$, care rezultă din inegalitatea lui

Gerretsen $16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

48) In $\Delta ABC : \sum \frac{a^2}{bc} \geq 2 \sum \frac{p-a}{a}$.

<u>Soluție.</u>

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$, $\sum \frac{p-a}{a} = \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{4Rr}$,(G) şi (E).

49) In $\Delta ABC : \sum \frac{a^2}{bc} \leq \frac{2}{3Rr} \sum (p-a)^2$.

<u>Soluție.</u>

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$, $\sum (p-a)^2 = p^2 - 2r^2 - 8Rr$,(G) şi (E).

50) In $\Delta ABC : \sum \frac{a^2}{bc} \leq \frac{2}{Rrp} \sum (p-a)^3$.

<u>Soluție.</u>

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$, $\sum (p-a)^3 = p\left(p^2 - 12Rr\right)$,(G) şi (E).

51) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\le\frac{p}{3}\sum\frac{p-a}{(p-b)(p-c)}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum\frac{p-a}{(p-b)(p-c)}=\frac{p^2-2r^2-8Rr}{r^2p}$,(G) și (E).

52) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\ge\frac{1}{2Rrp}\sum a^2(p-a)$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum a^2(p-a)=4rp(R+r)$,(G) și (E).

53) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\ge\frac{3}{4Rrp^2}\sum a^3(p-a)$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$ și $\sum a^3(p-a)=2r\left[p^2(2R+3r)-r(4R+r)^2\right]$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}\ge\frac{3}{4Rrp^2}\cdot 2r\left[p^2(2R+3r)-r(4R+r)^2\right]\Leftrightarrow$$
$$p^2\left(p^2-12r^2-12Rr\right)+3r^2(4R+r)^2\ge 0\ .$$

Distingem cazurile:

Cazul 1).Dacă $\left(p^2-12r^2-12Rr\right)\ge 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2).Dacă $\left(p^2-12r^2-12Rr\right)<0$, inegalitatea se rescrie:

$3r^2(4R+r)^2\ge p^2\left(12Rr+12r^2-p^2\right)$ și vezi **9).**

54) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\le\frac{3}{4p}\sum\frac{a^2}{p-a}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum\frac{a^2}{p-a}=\frac{4p(R-r)}{r}$,(G) și (E).

55) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\le\frac{1}{6R^2}\sum\frac{a^3}{p-a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$ şi $\sum \frac{a^3}{p-a} = \frac{2p^2(2R-3r)+2r^2(4R+r)}{r}$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr} \le \frac{1}{6R^2} \cdot \frac{2p^2(2R-3r)+2r^2(4R+r)}{r} \Leftrightarrow p^2(R-6r)+r\left(18R^2+17Rr+2r^2\right) \ge 0$$

Distingem cazurile:

Cazul 1).Dacă $(R-6r) \ge 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2).Dacă $(R-6r) < 0$, inegalitatea se rescrie: $r\left(18R^2+17Rr+2r^2\right) \ge p^2(6r-R)$,

care rezultă din inegalitatea Gerretsen $p^2 \le 4R^2+4Rr+3r^2$.

56) In $\Delta ABC : \sum \frac{a^2}{bc} \le \frac{1}{9r^4} \sum (p-a)^4$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Cu $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$ şi $\sum (p-a)^4 = p^4 - 16p^2Rr + 2r^2(4R+r)^2$, inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr} \le \frac{1}{9r^4} \cdot \left[p^4 - 16p^2Rr + 2r^2(4R+r)^2\right] \Leftrightarrow$$
$$p^2\left(2Rp^2 - 32R^2r - 9r^3\right) + r^2\left(64R^3 + 32R^2r + 58Rr^2 + 27r^3\right) \ge 0.$$

Distingem cazurile:

Cazul 1).Dacă $\left(2Rp^2 - 32R^2r - 9r^3\right) \ge 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2).Dacă $\left(2Rp^2 - 32R^2r - 9r^3\right) < 0$, inegalitatea se rescrie:
$r^2\left(64R^3 + 32R^2r + 58Rr^2 + 27r^3\right) \ge p^2\left(32R^2r + 9r^3 - 2Rp^2\right)$, care rezultă din inegalitatea

Gerretsen $16Rr - 5r^2 \le p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

57) In $\Delta ABC : \sum \frac{a^2}{bc} \le \frac{2Rp^3}{27r} \sum \frac{1}{a^2(p-a)}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$ și $\sum \frac{1}{a^2(p-a)} = \frac{p^4 + p^2(2r^2 - 4Rr) + r(4R+r)^3}{16R^2r^2p^3}$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr} \le \frac{2Rp^3}{27r} \cdot \frac{p^4 + p^2(2r^2 - 4Rr) + r(4R+r)^3}{16R^2r^2p^3} \Leftrightarrow$$
$$p^2(p^2 - 106r^2 - 4Rr) + r(64R^3 + 48R^2r + 660Rr^2 + 325r^3) \ge 0.$$

Distingem cazurile:

Cazul 1).Dacă $(p^2 - 106r^2 - 4Rr) \ge 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2).Dacă $(p^2 - 106r^2 - 4Rr) < 0$, inegalitatea se rescrie:
$r(64R^3 + 48R^2r + 660Rr^2 + 325r^3) \ge p^2(4Rr + 106r^2 - p^2)$, care rezultă din inegalitatea

Gerretsen $16Rr - 5r^2 \le p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

58) In $\Delta ABC : \sum \frac{a^2}{bc} \ge \frac{3}{R^2p^2} \sum a^2(p-b)(p-c)$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$, $\sum a^2(p-b)(p-c) = 4rp^2(R-r)$,(G) și (E).

59) In $\Delta ABC : \sum \frac{a^2}{bc} \le \frac{2p^3}{27} \sum \frac{1}{a(p-a)^2}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$, $\sum \frac{1}{a(p-a)^2} = \frac{p^2(r-8R) + (4R+r)^3}{4Rr^2p^3}$,(G) și (E).

60) In $\Delta ABC : \sum \frac{a^2}{bc} \le \frac{3R}{16S} \sum \frac{a(b+c)}{p-a}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$, $\sum \frac{a(b+c)}{p-a} = \frac{4Rp}{r}$,(G) și (E).

61) In $\Delta ABC : \sum \frac{a^2}{bc} \le \frac{p}{8r} \sum \frac{b+c}{p-a}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}, \sum\frac{b+c}{p-a}=4\left(1+\frac{R}{r}\right)$,(G) şi (E).

62) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{3}{4Rrp^2}\sum a(b+c)(p-b)(p-c)$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}, \sum a(b+c)(p-b)(p-c)=4Rrp^2$,(G) şi (E).

63) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{1}{2Rrp}\sum(b+c)(p-b)(p-c)$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}, \sum(b+c)(p-b)(p-c)=4rp(R+r)$,(G) şi (E).

64) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq16\sum\frac{(p-b)(p-c)}{(a+b)(a+c)}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}, \sum\frac{(p-b)(p-c)}{(a+b)(a+c)}=\frac{2r(R+r)}{p^2+r^2+2Rr}$,(G) şi (E).

65) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{3}{32Rrp^2}\sum a^2(a+b)(a+c)$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}, \sum a^2(a+b)(a+c)=4p^2\left(p^2-3r^2-4Rr\right)$,(G) şi (E).

66) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{3}{32Rrp^2}\sum bc(b+c)^2$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}, \sum bc(b+c)^2=4p^2\left(p^2-3r^2-4Rr\right)$,(G) şi (E).

67) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{3}{8p}\sum\frac{(b+c)^2}{a}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}, \sum\frac{(b+c)^2}{a}=\frac{p\left(p^2+r^2-6Rr\right)}{Rr}$,(G) şi (E).

68) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\ge 12Rr\sum\frac{a}{bc(b+c)}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum\frac{a}{bc(b+c)}=\frac{p^2-3r^2-4Rr}{2Rr\left(p^2+r^2+2Rr\right)}$,(G) și (E).

69) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\le\frac{9}{16r^2p^3}\sum b^2c^2(p-a)$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$ și $\sum b^2c^2(p-a)=p\left[p^4+p^2\left(2r^2-12Rr\right)+r^3(4R+r)\right]$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}\le\frac{9}{16r^2p^3}\cdot p\left[p^4+p^2\left(2r^2-12Rr\right)+r^3(4R+r)\right]\Leftrightarrow$$
$$p^2\left[p^2(9R-8r)-108R^2r+66Rr^2+24r^3\right]+9Rr^3(4R+r)\ge 0.$$

Distingem cazurile:

Cazul 1).Dacă $\left[p^2(9R-8r)-108R^2r+66Rr^2+24r^3\right]\ge 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2).Dacă $\left[p^2(9R-8r)-108R^2r+66Rr^2+24r^3\right]<0$, inegalitatea se rescrie:

$p^2\left[108R^2r-66Rr^2-24r^3+p^2(8r-9R)\right]\le 9Rr^3(4R+r)$, care rezultă din inegalitatea

Gerretsen $16Rr-5r^2\le p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$. Rămâne să arătăm că:

$$\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left[108R^2r-66Rr^2-24r^3+\left(16Rr-5r^2\right)(8r-9R)\right]\le 9Rr^3(4R+r)\Leftrightarrow$$
$$36R^4-71R^3r-7R^2r^2-14Rr^3+48r^4\ge 0\quad\Leftrightarrow(R-2r)\left(36R^3+R^2r-5Rr^2-24r^3\right)\ge 0,$$ evident

din inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$.

70) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\le\frac{2}{9R^2r^2}\sum a(p-a)^3$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum a(p-a)^3=2r\left[2Rp^2-r(4R+r)^2\right]$,(G) și (E).

71) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\le\frac{8p}{9Rr}\sum\frac{(p-a)^3}{bc}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$, $\sum \frac{(p-a)^3}{bc} = \frac{2Rp^2 - r(4R+r)^2}{2Rp}$,(G) și (E).

72) In $\Delta ABC : \sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{1}{24Rr} \sum (b+c)^2$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$, $\sum (b+c)^2 = 6p^2 - 2r^2 - 8Rr$,(G) și (E).

73) In $\Delta ABC : \sum \frac{a^2}{bc} \geq 12 \sum \frac{(p-a)^2}{bc}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$, $\sum \frac{(p-a)^2}{bc} = 1 - \frac{r}{2R}$,(G) și (E).

74) In $\Delta ABC : \sum \frac{a^2}{bc} \leq \frac{1}{4r^4 p^2} \sum a^2 (p-b)^2 (p-c)^2$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$, $\sum a^2 (p-b)^2 (p-c)^2 = 2r^2 p^2 \left(8R^2 + r^2 - p^2\right)$,(G) și (E).

75) In $\Delta ABC : \sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{9}{2Rrp^3} \sum a^2 (p-a)^3$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$, $\sum a^2 (p-a)^3 = 4r^2 p \left(4R^2 - 3Rr - r^2\right)$,(G) și (E).

76) In $\Delta ABC : \sum \frac{a^2}{bc} \leq \frac{r^2 p^2}{3} \sum \frac{1}{(p-b)^2 (p-c)^2}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$, $\sum \frac{1}{(p-b)^2 (p-c)^2} = \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{r^4 p^2}$,(G) și (E).

77) In $\Delta ABC : \sum \frac{a^2}{bc} \leq \frac{1}{4} \sum \frac{a^2}{(p-a)^2}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$, $\sum \frac{a^2}{(p-a)^2} = \frac{2\left(8R^2 + r^2 - p^2\right)}{r^2}$,(G) și (E).

78) In $\Delta ABC: \sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{16p^2}{9} \sum \frac{(p-a)^2}{b^2c^2}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$, $\sum \frac{(p-a)^2}{b^2c^2} = \frac{(4R+r)^2 - p^2}{8R^2p^2}$,(G) și (E).

79) In $\Delta ABC: \sum \frac{a^2}{bc} \leq \frac{1}{6R^2r^2p} \sum a^3(p-b)(p-c)$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$ și $\sum a^3(p-b)(p-c) = 2rp\left[p^2(2R-3r) + r^2(4R+r)\right]$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr} \leq \frac{1}{6R^2r^2p} \cdot 2rp\left[p^2(2R-3r) + r^2(4R+r)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2(R-6r) + r(8R^2 + 17Rr + 2r^2) \geq 0.$$

Distingem cazurile:

Cazul 1).Dacă $(R-6r) \geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2).Dacă $(R-6r) < 0$, inegalitatea se rescrie:

$r(8R^2 + 17Rr + 2r^2) \geq p^2(6r - R)$, care rezultă din inegalitatea Gerretsen $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

80) In $\Delta ABC: \sum \frac{a^2}{bc} \geq \frac{1}{4R^2r^2p^2} \sum b^2c^2(p-b)(p-c)$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$ și

$\sum b^2c^2(p-b)(p-c) = r^2\left[p^2(p^2 + 2r^2 - 4Rr) + r(4R+r)^3\right]$,(G) și (E).

81) In $\Delta ABC: \sum \frac{a^2}{bc} \leq Rrp \sum \frac{1}{a(p-b)(p-c)}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum\frac{1}{a(p-b)(p-c)}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{4Rr^3p}$,(G) şi (E).

82) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\le\frac{p}{36r^2}\sum\frac{bc}{p-a}$.

Marin Chirciu, Piteşti

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$ şi $\sum\frac{bc}{p-a}=\frac{p^2+(4R+r)^2}{p}$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}\le\frac{p}{36r^2}\cdot\frac{p^2+(4R+r)^2}{p}\Leftrightarrow p^2(R-18r)+R(4R+r)^2+54r^2(2R+r)\ge 0.$$

Distingem cazurile:

Cazul 1).Dacă $(R-18r)\ge 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2).Dacă $(R-18r)<0$, inegalitatea se rescrie:

$p^2(18r-R)\le R(4R+r)^2+54r^2(2R+r)$, care rezultă din inegalitatea Gerretsen

$p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$.

83) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\ge\frac{9}{p^2}\sum(p-b)(p-c)$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum(p-b)(p-c)=r(4R+r)$,(G) şi (E).

84) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\le\frac{1}{4}\sum\frac{bc}{(p-b)(p-c)}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum\frac{bc}{(p-b)(p-c)}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{r^2}$,(G) şi (E).

85) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\ge\frac{4r^2p^2}{3}\sum\frac{1}{bc(p-b)(p-c)}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$, $\sum \frac{1}{bc(p-b)(p-c)} = \frac{4R+r}{2Rr^2p^2}$,(G) şi (E).

86) In $\Delta ABC: \sum \frac{a^2}{bc} \le \frac{p^2}{9} \sum \frac{1}{(p-b)(p-c)}$.

Marin Chirciu, Piteşti

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$ şi $\sum \frac{1}{(p-b)(p-c)} = \frac{1}{r^2}$. Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr} \le \frac{p^2}{9} \cdot \frac{1}{r^2} \Leftrightarrow p^2(2R - 9r) + 27r^2(2R + r) \ge 0.$$

Distingem cazurile:

Cazul 1).Dacă $(2R - 9r) \ge 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2).Dacă $(2R - 9r) < 0$, inegalitatea se rescrie:

$p^2(9r - 2R) \le 27r^2(2R + r)$, care rezultă din inegalitatea Gerretsen $p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

87) In $\Delta ABC: \sum \frac{a^2}{bc} \ge \frac{1}{2Rrp} \sum bc(p-a)$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$, $\sum bc(p-a) = p(p^2 + r^2 - 8Rr)$,(G) şi (E).

88) In $\Delta ABC: \sum \frac{a^2}{bc} \le \frac{p^2}{108r^2} \sum \frac{a^2}{(p-b)(p-c)}$.

Marin Chirciu, Piteşti

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$, $\sum \frac{a^2}{(p-b)(p-c)} = 4\left(1 + \frac{R}{r}\right)$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr} \le \frac{p^2}{108r^2} \cdot \frac{4(R+r)}{r} \Leftrightarrow p^2(2R^2 + 2Rr - 27r^2) + 81r^3(2R + r) \ge 0.$$

Distingem cazurile:

Cazul 1).Dacă $\left(2R^2+2Rr-27r^2\right)\geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2).Dacă $\left(2R^2+2Rr-27r^2\right)<0$, inegalitatea se rescrie:

$p^2\left(27r^2-2Rr-2R^2\right)\leq 81r^3\left(2R+r\right)$, care rezultă din inegalitatea Gerretsen

$p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$.

89) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{4}{9R^4}\sum a^2\left(p-b\right)\left(p-c\right)$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum a^2\left(p-b\right)\left(p-c\right)=4rp^2\left(R-r\right)$,(G) și (E).

90) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{1}{4Rrp}\sum a\left(b+c\right)\left(p-a\right)$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum a\left(b+c\right)\left(p-a\right)=12Rrp$,(G) și (E).

91) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{r}{4R}\sum\frac{a\left(b+c\right)}{\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum\frac{a\left(b+c\right)}{\left(p-b\right)\left(p-c\right)}=\frac{12R}{r}$,(G) și (E).

92) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{r}{2R}\sum\frac{b+c}{p-a}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum\frac{b+c}{p-a}=4\left(1+\frac{R}{r}\right)$,(G) și (E).

93) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{8}{3R^4p}\sum a\left(p-b\right)^2\left(p-c\right)^2$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum a\left(p-b\right)^2\left(p-c\right)^2=2r^2p\left(8R^2+2Rr-p^2\right)$,(G) și (E).

94) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{16}{9R^4}\sum\left(p-b\right)^2\left(p-c\right)^2$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$, $\sum (p-b)^2 (p-c)^2 = r^2\left[(4R+r)^2 - 2p^2\right]$,(G) și (E).

95) In $\Delta ABC: \sum \frac{a^2}{bc} \le 9R^2r^2 \sum \frac{1}{a^2(p-b)(p-c)}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$ și $\sum \frac{1}{a^2(p-b)(p-c)} = \frac{p^4 + p^2(2r^2 - 12Rr) + r^3(4R+r)}{16p^2R^2r^4}$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr} \le 9R^2r^2 \cdot \frac{p^4 + p^2(2r^2 - 12Rr) + r^3(4R+r)}{16p^2R^2r^4} \Leftrightarrow$$
$$p^2\left[p^2(9R-8r) - 6r(18R^2 - 11Rr - 4r^2)\right] + 9Rr^3(4R+r) \ge 0.$$

Distingem cazurile:

Cazul 1).Dacă $\left[p^2(9R-8r) - 6r(18R^2 - 11Rr - 4r^2)\right] \ge 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2).Dacă $\left[p^2(9R-8r) - 6r(18R^2 - 11Rr - 4r^2)\right] < 0$, inegalitatea se rescrie:

$p^2\left[6r(18R^2 - 11Rr - 4r^2) - p^2(9R-8r)\right] \le 9Rr^3(4R+r)$, care rezultă din inegalitatea

Gerretsen $16Rr - 5r^2 \le p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

96) In $\Delta ABC: \sum \frac{a^2}{bc} \ge \frac{3r}{4Rp} \sum \frac{a^3}{(p-b)(p-c)}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}$ și $\sum \frac{a^3}{(p-b)(p-c)} = \frac{p^2(2R+3r) - r(4R+r)}{rp}$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr} \ge \frac{3r}{4Rp} \cdot \frac{p^2(2R+3r) - r(4R+r)}{rp} \Leftrightarrow p^2(p^2 - 12r^2 - 12Rr) + 3r^2(4R+r)^2 \ge 0 .$$

Distingem cazurile:

Cazul 1).Dacă $\left(p^2-12r^2-12Rr\right)\geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2).Dacă $\left(p^2-12r^2-12Rr\right)<0$, inegalitatea se rescrie:
$3r^2(4R+r)^2\geq p^2\left(12Rr+12r^2-p^2\right)$ și vezi **9).**

97) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{2}{3R^4p}\sum a^3(p-b)(p-c)$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$ și $\sum a^3(p-b)(p-c)=2rp\left[p^2(2R-3r)+r^2(4R+r)\right]$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}\geq\frac{2}{3R^4p}\cdot 2rp\left[p^2(2R-3r)+r^2(4R+r)\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2\left(3R^3-16Rr^2+24r^3\right)\geq r\left(18R^4+9R^3r+32R^2r^2+8r^4\right),$$

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$. Rămâne să arătăm că:

$$\left(16Rr-5r^2\right)\left(3R^3-16Rr^2+24r^3\right)\geq r\left(18R^4+9R^3r+32R^2r^2+8r^4\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15R^4-12R^3r-128R^2r^2+216Rr^3-64r^4\geq 0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (R-2r)\left(15R^3+18R^2r-92Rr^2+32r^3\right)\geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

98) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\geq\frac{3}{2Rrp^2}\sum bc(p-b)(p-c)$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum bc(p-b)(p-c)=r^2\left[p^2+(4R+r)^2\right]$,(G) și (E).

99) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\leq\frac{3}{2Rrp^2}\sum bc(p-a)^2$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, $\sum bc(p-a)^2=p^2\left(p^2+r^2-12Rr\right)$,(G) și (E).

100) In $\Delta ABC:\sum\frac{a^2}{bc}\leq 2Rrp\sum\frac{1}{bc(p-a)}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}, \sum \frac{1}{bc(p-a)} = \frac{2R-r}{2Rr^2 p}$,(G) și (E).

101) In $\Delta ABC : \sum \frac{a^2}{bc} \le \frac{R^2}{2r^2} \sum \frac{(p-b)(p-c)}{a(p-a)}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}, \sum \frac{(p-b)(p-c)}{a(p-a)} = \frac{p^2(r-8R)+(4R+r)^3}{4Rp^2}$,(G) și (E).

102) In $\Delta ABC : \sum \frac{a^2}{bc} \ge 4 \sum \frac{(p-a)^2}{bc}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}, \sum \frac{(p-a)^2}{bc} = \frac{2R-r}{2R}$,(G) și (E).

103) In $\Delta ABC : \sum \frac{a^2}{bc} \ge \frac{4p}{3} \sum \frac{p-a}{bc}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}, \sum \frac{p-a}{bc} = \frac{4R+r}{2Rp}$,(G) și (E).

104) In $\Delta ABC : \sum \frac{a^2}{bc} \ge \frac{3r}{2R} \sum \frac{bc}{p-a}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}, \sum \frac{bc}{p-a} = 1 + \left(\frac{4R+r}{p}\right)^2$,(G) și (E).

105) In $\Delta ABC : \sum \frac{a^2}{bc} \le \sum \frac{(p-a)^2}{(p-b)(p-c)}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}, \sum \frac{(p-a)^2}{(p-b)(p-c)} = \frac{p^2 - 12Rr}{r^2}$,(G) și (E).

106) In $\Delta ABC : \sum \frac{a^2}{bc} \le \frac{27Rr^2}{2} \sum \frac{1}{r_a^3}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}, \sum \frac{1}{r_a^3} = \frac{p\left(p^2 - 12Rr\right)}{S^3}$,(G) şi (E).

Remarcă.

La toate inegalitățile de mai sus, egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Bibliografie:

8. Titu Andreescu, Dorin Andrica, 360 Problems for Mathematical Contest, GIL Publishing House, Zalău, 2003.
9. O.Bottema, R.Z.Djordjevic, R.R.Janic, D.S.Mitrinovic, P.M.Vasic, Geometric Inequalities, Groningen 1969, The Netherlands.
10. Marin Chirciu, Inegalități algebrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2014.
11. Marin Chirciu, Inegalități cu linii importante în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2018.

4. INTEGRALA DEFINITĂ A UNOR FUNCŢII TRIGONOMETRICE

Prof.Balogh Erika
Colegiul Tehnic „C.D.Neniţescu" Baia Mare

Fie $f:[0;1]\to R$ o funcţie continuă.Atunci

I. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$ şi **II.**

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

Soluţie

I. Cu substituţia $x=\frac{\pi}{2}-t$ obţinem relaţia $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt$

ştiind că: $\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$

Prin urmare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$.

II. Cu substituţia $x=\pi-t$ obţinem relaţia

$I=\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = -\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin t)dt = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt - t\int_0^{\pi} f(\sin t)dt$ ştiind că:

$\sin(\pi-t)=\sin t$ Prin urmare $2I=\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt$ rezultă:

$$I=\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

Funcţia fiind continuă rezultă: $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

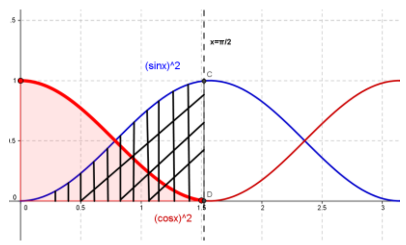
Aplicând sustituţia $x=\pi-t$ la a doua integrala rezultă în final: $I=\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

I.Aplicaţii:

1) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=\frac{\pi}{4}$ pentru că $\begin{cases} I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx \\ I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx \end{cases}$ adunând cele două relaţii şi

folosind formula de bază din trigonometrie : $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ rezultă $2I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx=\frac{\pi}{2}$

de unde obţinem $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=\frac{\pi}{4}$



2) $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ respectiv $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$ sunt egale, adunând cele două relaţii

obţinem $I_2=I_3=\frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow$ $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^n x}{\cos^n x+\sin^n x}dx=\frac{\pi}{4}$,

$n\in N^*$

3) $I_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x dx=\frac{2}{3}$

$$2I_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)\left(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin^2 x\cos x dx+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\cos^2 x(-\sin x)dx=$$

$$=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{3}\sin^3 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{3}\cos^3 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\qquad\Rightarrow\qquad I_4=\frac{2}{3}$$

4) $I_5=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x dx=\frac{5\pi}{32}$

$$2I_5=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x\right)dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-3\sin^2 x\cos^2 x\right]dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\frac{3}{4}(2\sin x\cos x)^2\right]dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx-\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x dx$$

notând $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x dx$ obţinem $2J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 2x+\cos^2 2x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2}\Rightarrow$ $J=\frac{\pi}{4}$

de unde rezultă $2I_5=\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{16}=\frac{5\pi}{16}$ şi în final $I_5=\frac{5\pi}{32}$

5) $I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos x + \sin x} dx = \frac{\pi - 1}{4}$

$2I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx$ simplificând fracţia cu $(\sin x + \cos x)$ rezultă:

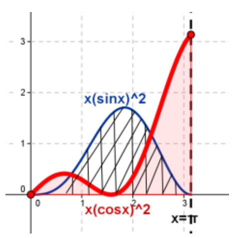
$$2I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\pi - 1}{2}$$

$\Rightarrow I_6 = \frac{\pi - 1}{4}$

II.Aplicaţii:

Folosind relaţia: $\int_0^{\pi} x f(\sin x) = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$ de la punctul **II.** obţinem:

1) $I_7 = \int_0^{\pi} x \sin^2 x dx = \pi \cdot I_1 = \frac{\pi^2}{4}$ respetiv $I_8 = \int_0^{\pi} x \cos^2 x dx = \frac{\pi^2}{4}$



2) $I_9 = \int_0^{\pi} \frac{x \sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$ respetiv $I_{10} = \int_0^{\pi} \frac{x \cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$

$$I_9=\int_0^{\pi}\frac{x\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\pi\cdot I_2=\frac{\pi^2}{4}$$ respectiv:

$$I_{10}=\int_0^{\pi}\frac{x\cos^4 x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx=\frac{\pi^2}{4}$$

În caz general obţinem:

$I_{11}=\int_0^{\pi}\frac{x\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx=\frac{\pi^2}{4}$ respetiv $I_{12}=\int_0^{\pi}\frac{x\cos^n x}{\cos^n x+\sin^n x}dx=\frac{\pi^2}{4}$, $n\in N$ dacă n - număr par

3) $I_{12}=\int_0^{\pi}x\sin^3 xdx=\frac{2\pi}{3}$

$$I_{12}=\int_0^{\pi}x\sin^3 xdx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 xdx=\pi\cdot I_4=\frac{2\pi}{3}$$

4) $I_{14}=\int_0^{\pi}x\sin^6 xdx=\frac{5\pi^2}{32}$ respetiv $I_{15}=\int_0^{\pi}x\cos^6 xdx=\frac{5\pi^2}{32}$

$$I_{14}=\int_0^{\pi}x\sin^6 xdx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 xdx=\pi\cdot I_5=\frac{5\pi^2}{32}$$ respectiv:

$$I_{15}=\int_0^{\pi}x\cos^6 xdx=\frac{5\pi^2}{32}$$

5) $I_{16}=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi^2}{4}$

$$I_{16}=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(-\sin x)}{1+\cos^2 x}dx=-\pi\cdot arctg(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\pi\cdot arctgo+\pi\cdot arctg1=$$

-5-

$$=0+\pi\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{4}\quad\Rightarrow\quad I_{16}=\frac{\pi^2}{4}$$

Sau

$$I_{16}=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\pi}\frac{(-\sin x)}{1+\cos^2 x}=-\frac{\pi}{2}arctg(\cos x)\Big|_0^{\pi}=-\frac{\pi}{2}arctg(-1)+\frac{\pi}{2}arctg1=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{4}$$

Bibliografie:
1.Gh.Şireţchi, Calculul diferenţial şi integral, Editura Ştiinţifică şi Enciplopedică, Bucureşti, 1985
2.B.P.Gyemidovici, Culegere de probleme de analiza matematica, 1987

5. Another solution to Problem 11942 from The American Mathematical Monthly

By Nela Ciceu and Roxana Mihaela Stanciu

11942. *Proposed by Florin Parvanescu, Slat, Romania.* In acute triangle ABC, let D be the foot of the altitude from A, let E be the foot of the perpendicular from D to AC, and let F be a point on segment DE. Prove that AF is perpendicular to BE if and only if $|FE|/|FD| = |BD|/|CD|$.

Solution:

As usual, $a = BC, b = CA, c = AB$. We denote $x = DF$.
We have

$$BD = c\cos B, DC = b\cos C, AD = b\sin C = c\sin B, AE = b\sin^2 C, DE = b\sin C\cos C.$$

Since $\angle ADE = \angle C$, by the Law of cosines, we obtain

$$BF^2 = c^2\cos^2 B + x^2 + 2cx\cos B\sin C.$$

It follows that

$$AF \perp BE \Leftrightarrow BF^2 + AE^2 = FE^2 + AB^2$$
$$\Leftrightarrow c^2\cos^2 B + x^2 + 2cx\cos B\sin C + b^2\sin^4 C = (b\sin C\cos C - x)^2 + c^2$$
$$\Leftrightarrow 2x\sin C(c\cos B + b\cos C) = c^2 - c^2\cos^2 B + b^2\sin^2 C\cos^2 C - b^2\sin^4 C$$
$$\Leftrightarrow 2ax\sin C = b^2\sin^2 C + b^2\sin^2 C\cos^2 C - b^2\sin^4 C$$
$$\Leftrightarrow 2ax\sin C = b^2\sin^2 C(1+\cos^2 C - \sin^2 C)$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{b^2\sin C\cos^2 C}{a} \Leftrightarrow \frac{b\sin C\cos C}{x} = \frac{a}{b\cos C}$$
$$\Leftrightarrow \frac{DE}{DF} = \frac{BC}{DC} \Leftrightarrow \frac{FE}{DF} = \frac{BD}{CD}$$, and we are done!

6. „Locul numerelor”

Prof. Alexandru Elena-Marcela
Școala Gimnazială „Ion Irimescu” Fălticeni

A fost inventat în anul 1892 sub numele de „*locul numerelor*”. Noua denumire „*sudoku*” înseamnă în limba japoneză „*un singur număr*”.

Poate fi în format 4x4 cu 2x2, 6x6 cu 3x2, dar grila standard este 9x9 cu 3x3.

Grilă 4x4 cu 2x2:

Completează tabelul cu cifrele de la 1 la 4. Fiecare cifră trebuie să apară doar o singură dată în fiecare coloană, rând și pătrat:

			4
		3	2
		4	3
4	3		

Grilă 6x6 cu 3x2:

Completează tabelul cu cifrele de la 1 la 6. Fiecare cifră trebuie să apară doar o singură dată în fiecare coloană, rând și regiune:

		2	1	6	4
		4	5		2
	3			4	
4	2		3		6
	6				5
2		5			

Grilă 9x9 cu 3x3 *(Grila matematicianului nordic Arto Inkala considerată un adevărat Everest al jocurilor numerice)**:***

8								
		3	6					
	7			9		2		
	5				7			
				4	5	7		
			1				3	
		1					6	8
		8	5				1	
	9					4		

Pentru a rezolva o grilă sunt necesare trei proceduri: căutarea, utilizarea cifrelor candidate (când o cifră poate fi înscrisă într-o căsuță se numește candidată) și analiza.

Căutarea presupune reducerea prin cruce și numărătoarea de la 1 la 9.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4		6	8		3			
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Analiza constă în eliminare și ipoteză. Se caută soluția eliminând succesiv cifrele candidate pentru o căsuță astfel încât să se păstreze doar o singură cifră candidat.

Dacă această cifră a fost găsită trebuie efectuată o altă căutare pentru a determina consecințele pe care această alegere o are asupra celorlalte căsuțe.

Metoda prin ipoteză este considerată o metodă de încercări și eșecuri mai ales că necesită folosirea unui creion și a unei radiere. Totuși această metodă conduce mai lesne la găsirea soluției.

Metoda ideală de rezolvare a unei grile de sudoku este cea care minimizează numărarea, numărul cifrelor candidat și numărul de ipoteze.

Soluțiile informatice se bazează pe metoda backtracking. O alternativă este aceea de a recurge la metode preconizate de programarea logică. Donald Knuth a pus la punct un algoritm care folosește listele dublu înlănțuite și care s-a dovedit a fi foarte eficace.

Jocul Sudoku are și variante în care se folosesc literele de la A la F și nu numai, simboluri și culori.

În paginile unor reviste de integrame se găsesc grile sudoku cu litere, a căror rezolvare reprezintă continuarea unui banc sau a unei glume.

Exemplu: Completați literele A, D, E, G, I, L, M, R, U astfel încât să nu se repete le linii, nici pe coloane și nici în pătratele de 3x3 căsuțe. Pe cele patru diagonale colorate diferit, citite de la stânga la dreapta și de sus în jos veți afla finalul următorului banc:

Gigel sună la Pompieri:

- Alo, Pompierii?

- Da, bună ziua, care este problema?Cu ce vă putem ajuta?

- ... !

				R				L
E	G		D	U			I	A
	L			G	E	U		
		G			I		M	
	R	I		E	M		L	
		A				G		I
	M	L				I	A	R
R			L	I			U	
	D			M				

În ceea ce privește jocul Sudoku cu numere matematicienii Bertram Felgenhauer și Frazer Jarvis au calculat că sunt posibile 6.670.903.752 de miliarde de combinații sudoku.

***Beneficiile** jocului Sudoku:*

- *din punct de vedere matematic jucând sudoku se poate învăța citirea și scrierea, ordonarea și compararea numerelor până la 9; recunoașterea și numirea figurilor cu două dimensiuni (pătrat, dreptunghi); măsurarea ariilor prin numărarea pătratelor sau folosirea rețelelor;*
- *orele de matematică, cele de opțional sau activitățile din cadrul programului „Să știi mai multe, să fii mai bun!" devin mai atractive prin învățarea jocurilor logice precum sudoku;*
- *antrenează gândirea logică;*
- *poate încetini procesul bolii Alzheimer;*
- *ajută la o concentrare mai bună;*

- *menține creierul în formă, celulele sale devin mai sănătoase, iar exercițiile de gândire împiedică moartea neuronilor;*
- *poate avea plicații practice în întocmirea orarelor școlare sau organizarea competițiilor sportive;*
- *rezolvarea grilelor de sudoku conduce și la arderea caloriilor: 90 de calorii într-o oră.*

Soluțiile grilelor din exemple:

3	2	1	4
1	4	3	2
2	1	4	3
4	3	2	1

3	5	2	1	6	4
6	1	4	5	3	2
5	3	6	2	4	1
4	2	1	3	5	6
1	6	3	4	2	5
2	4	5	6	1	3

8	1	2	7	5	3	6	4	9
9	4	3	6	8	2	1	7	5
6	7	5	4	9	1	2	8	3
1	5	4	2	3	7	8	9	6
3	6	9	8	4	5	7	2	1
2	8	7	1	6	9	5	3	4
5	2	1	9	7	4	3	6	8
4	3	8	5	2	6	9	1	7
7	9	6	3	1	8	4	5	2

U	I	D	M	R	A	E	G	L
E	G	M	D	U	L	R	I	A
A	L	R	I	G	E	U	D	M
L	U	G	R	A	I	D	M	E
D	R	I	G	E	M	A	L	U
M	E	A	U	L	D	G	R	I
G	M	L	E	D	U	I	A	R
R	A	E	L	I	G	M	U	D
I	D	U	A	M	R	L	E	G

Bibliografie/Webografie: www.crisristefan.com; www.m.ziare.com; www.vmsmedien.de; www.jurnalspiritual.eu; www.wikipedia.ro; revistă de integrame.

7. INEGALITĂŢI OBŢNUTE FOLOSIND DISTANŢA DINTRE DOUĂ PUNCTE

CONSTANTIN RUSU

Scopul acestei lucrări[2] este de a obţine cu ajutorul formulei cu care se calculează distanţa dintre două puncte, inegalităţi sau egalităţi ce au loc în orice triunghi şi de a stabili o cale algebrică de a le demonstra.

Fie un triunghi ABC şi punctele: M Є S(spaţiu), K Є [ABC]*

AK ∩ BC = {A'}. Introducem notaţiile:

$$p_k=\frac{AK}{KA'},q_k=\frac{BA'}{A'C},\alpha_k=\frac{1}{1+p_k},\beta_k=\frac{p_k}{(1+p_k)\cdot(1+q_k)},\gamma_k=\frac{p_k\cdot q_k}{(1+p_k)\cdot(1+q_k)}$$

α_k, β_k, γ_k sunt coordonatele baricentrice ale punctului K.

Calculând aceste coordonate pentru unele puncte importante din triunghi, obţinem:

$$\alpha_G=\beta_G=\gamma_G=\frac{1}{3},\alpha_I=\frac{a}{a+b+c},\beta_I=\frac{b}{a+b+c},\gamma_I=\frac{c}{a+b+c}$$

$$\alpha_H=\frac{1}{tgBtgC},\beta_H=\frac{1}{tgCtgA},\gamma_H=\frac{1}{tgAtgB},\alpha_O=\frac{cosA}{2\sin B\sin C},\beta_O=\frac{cosB}{2\sin C\sin A},\gamma_O=\frac{cosC}{2\sin A\sin B}$$

$$\alpha_L=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2},\beta_L=\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2},\gamma_L=\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2},\alpha_N=\frac{p-a}{p},\beta_N=\frac{p-b}{p},\gamma_N=\frac{p-c}{p}$$

$$\alpha_\Gamma=\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{a\cdot(p-a)+(p-b)\cdot(p-c)},\beta_\Gamma=\frac{(p-c)\cdot(p-a)}{a\cdot(p-a)+(p-b)\cdot(p-c)},\gamma_\Gamma=\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{a\cdot(p-a)+(p-b)\cdot(p-c)}$$

$$\alpha_F=\frac{yz}{xy+yz+zx},\beta_F=\frac{zx}{xy+yz+zx},\gamma_F=\frac{xy}{xy+yz+zx},x=FA,y=FB,z=FC,$$

unde punctele G, I, H, O, L, N, Γ şi F semnifică: centrul de greutate, centrul cercului înscris, ortocentru, centrul cercului circumscris, centrul simedian (punctul lui Emile Lemoine (1840-1908), punctul de intersecţie al cevienelor ce unesc vârfurile triunghiului cu punctele de contact al cercurilor exînscrise (punctul lui Christian Heinrich Von Nagel (1803-1882), punctul de intersecţie al cevienelor ce unesc vârfurile triunghiului cu punctele de contact ale cercului înscris cu laturile (punctul lui Joseph Diaz Gergonne (1771-1859)), centrul izogon al Δ ABC (punctul lui Fermat-Toricelli).

Vom utiliza în cele ce urmează următoarea:

Teoremă. Pentru orice punct M Є S şi K Є [ABC] – {A} (vezi [1]), avem:

$$MK=\sqrt{\alpha_K MA^2+\beta_K MB^2+\gamma_K MC^2-\beta_K\gamma_K a^2-\gamma_K\alpha_K b^2-\alpha_K\beta_K c^2}$$

---

[1] Profesor, Liceul Teoretic „Ştefan cel Mare” Rîmnicu Sărat

[2] Lucrarea a fost prezentată la a XXII-a Conferinţă Anuală a Societăţii de Ştiinţe Matematice diun România, 25-25 Mai 2018, Corabia, România

Observaţii:

1. $\alpha_K MA^2 + \beta_K MB^2 + \gamma_K MC^2 \geq \beta_K\gamma_K a^2 + \gamma_K\alpha_K b^2 + \alpha_K\beta_K c^2$
2. Dacă M Є [ABC] – {A}, atunci:
   $\alpha_M KA^2 + \beta_M KB^2 + \gamma_M MC^2 \geq \beta_M\gamma_M a^2 + \gamma_M\alpha_M b^2 + \alpha_M\beta_M c^2$
   Avem egalitate dacă M = K
3. Cum MK = KM rezultă:
   $\alpha_K MA^2 + \beta_K MB^2 + \gamma_K MC^2 - \beta_K\gamma_K a^2 - \gamma_K\alpha_K b^2 - \alpha_K\beta_K c^2 =$
   $= \alpha_M KA^2 + \beta_M KB^2 + \gamma_M KC^2 - \beta_M\gamma_M a^2 - \gamma_M\alpha_M b^2 - \alpha_M\beta_M c^2.$

Această egalitate are loc în orice triunghi ABC pentru oricare ar fi punctele M şi K Є [ABC] – {A}.

În continuare considerăm cazul când M=V= vârful unui tetraedru care are baza Δ ABC şi K Є [ABC] – {A}, inegalitatea O_1 devine:

1.1K = G $3(VA^2 + VB^2 + VC^2) \geq a^2 + b^2 + c^2$ (1.1a), folosind inegalitatea Ionescu-Weitzenböck (I-W) obţinem:

$$VA^2+VB^2+VC^2 \geqslant \frac{4S}{\sqrt{3}} \qquad (1.1_b)$$

1.2 Dacă K = I, avem: $aVA^2 + bVB^2 + cVC^2 \geq abc$ (1.2_a)

Utilizând inegalitatea Szegö-Polya:

$$a^2b^2c^2 \geqslant \left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^3, obţinem: aVA^2+bVB^2+cVC^2 \geqslant \frac{4S}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}}\ (1.2_a)$$

1.3 Dacă K = H, avem:

$$\frac{1}{tgBtgC}\cdot VA^2+\frac{1}{tgCtgA}\cdot VB^2+\frac{1}{tgAtgB}\cdot VC^2 \geqslant \frac{1}{tg^2AtgBtgC}\cdot a^2+\frac{1}{tgAtg^2BtgC}\cdot b^2+\frac{1}{tgAtgBtg^2C}\cdot c^2$$

1.4 Pentru K = 0, obţinem:

$$VA^2\sin 2A+VB^2\sin 2B+VC^2\sin 2C \geqslant \frac{a^2 sin2Bsin2C+b^2\sin 2C\sin 2A+c^2 sin2Asin2B}{4sinAsinBsinC}$$

1.5 Pentru K = L, obţinem:

$$a^2VA^2+b^2VB^2+c^2VC^2 \geqslant \frac{3a^2b^2c^2}{a^2+b^2+c^2};(1.5_a)$$

Folosind inegalitatea Szegö-Polya, obţinem:

$$(a^2+b^2+c^2)\cdot(a^2VA^2+b^2VB^2+C^2VC^2) \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(4S)^3;(1.5_b)$$

Iar dacă în (1.5_a) VA = VB = VC, atunci rezultă:

$$VA \geqslant \frac{abc\cdot\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2};(1.5_c)$$

1.6 Pentru K = N, avem:

$$(p-a)\cdot VA^2+(p-b)\cdot VB^2+(p-c)\cdot VC^2 \geqslant \frac{(p-b)\cdot(p-c)}{p}\cdot a^2+\frac{(p-c)\cdot(p-a)}{p}\cdot b^2+\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{p}\cdot c^2;(1.6_a)$$

Iar dacă VA = VB = VC, găsim:

$$VA \geqslant \sqrt{\frac{(p-a)\cdot a^2}{p}\cdot tg^2\frac{A}{2}+\frac{(p-b)\cdot b^2}{p}\cdot tg^2\frac{B}{2}+\frac{(p-c)\cdot c^2}{p}\cdot tg^2\frac{C}{2}};(1.6_b)$$

1.7 Pentru K = F, avem:

$$yz\cdot VA^2+zx\cdot VB^2+xy\cdot VC^2 \geqslant \frac{xyz}{xy+yz+zx}\cdot(xa^2+yb^2+zc^2);(1.7_a)$$

Dacă VA = VB = VC, avem:

$$VA \geqslant \frac{1}{xy+yz+zx}\cdot\sqrt{x^2 yza^2+xy^2 zb^2+xyz^2 c^2};(1.7_b)$$

Cu observaţia 2, vom obţine inegalităţi care sunt adevărate oricare ar fi triunghiul ABC. Inegalitatea se realizează dacă M = K când triunghiul este echilateral.

Astfel avem:

2.1 M = I şi K = G, avem:

$$\alpha_G IA^2+\beta_G IB^2+\gamma_G IC^2 \geqslant \frac{1}{9}\cdot(a^2+b^2+c^2), echivalent\ cu:$$

$$IA^2+IB^2+IC^2 \geqslant \frac{1}{3}\cdot(a^2+b^2+c^2);(2.1_a)$$

Folosind inegalitatea (I-W) obţinem:

$$IA^2+IB^2+IC^2 \geqslant \frac{4S}{\sqrt{3}};(2.1_b)$$

Dacă M = G şi K = I, avem:

$$\frac{a}{a+b+c}\cdot GA^2+\frac{b}{a+b+c}\cdot GB^2+\frac{c}{a+b+c}\cdot GC^2 \geqslant \frac{a^2bc}{(a+b+c)^2}+\frac{ab^2c}{(a+b+c)^2}+\frac{abc^2}{(a+b+c)^2}$$

$\Leftrightarrow$ $aGA^2 + bGB^2 + cGC^2 \geq abc$ (2.1_c), aplicând teorema medianei obţinem:

$2ab(a+b) + 2bc(b+c) + 2ca(c+a) \geq a^3 + b^3 + c^3 + 9abc$ (2.1_d)

2.2 Dacă M = O şi K = G, avem:

$$\frac{1}{3}\cdot(OA^2+OB^2+OC^2) \geqslant \frac{1}{9}\cdot(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow R^2 \geqslant \frac{1}{9}\cdot(a^2+b^2+c^2);(2.2_a)$$

$$Dar, a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\cdot S, (inegalitatea\ I-W)\ şi\ deci\ în (2.2_a)\ avem:$$

$$R^2 \geqslant \frac{4\sqrt{3}\cdot S}{9} \Leftrightarrow \frac{a^2b^2c^2}{16S^2} \geqslant \frac{4\sqrt{3}S}{9} \Leftrightarrow a^2b^2c^2 \geqslant \left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^3$$

Am obţinut o demonstraţie pentru inegalitatea Szegö-Polya.

Dacă M = G şi K = O, avem:

$$\frac{cosA}{2\sin B\sin C}GA^2+\frac{cosB}{2\sin A\sin C}GB^2+\frac{cosC}{2\sin A\sin B}GC^2\geqslant\frac{cosBcosC}{4\sin^2 A\sin B\sin C}a^2+\frac{cosCcosA}{4\sin A\sin^2 B\sin C}b^2+\frac{cosAcosB}{2\sin A\sin B\sin^2 C}c^2$$

(2.2$_b$)

2.3 Dacă M = O şi K = L, avem:

$$\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}OA^2+\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}OB^2+\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}OC^2\geqslant\left(\frac{bc}{a^2+b^2+c^2}\right)^2a^2+\left(\frac{ca}{a^2+b^2+c^2}\right)^2b^2+\left(\frac{ab}{a^2+b^2+c^2}\right)^2c^2$$

$$<=> R^2\geqslant\frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} <=> R\geqslant\frac{abc\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2};(2.3_a)$$

$$<=> \frac{abc}{4S}\geqslant\frac{abc\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2} <=> a^2+b^2+c^2\geqslant 4S\sqrt{3}$$

Am demonstrat inegalitatea Ionescu-Weitzenböck.

Dacă M = L şi K = O, avem:

$$\frac{cosA}{2\sin B\sin C}LA^2+\frac{cosB}{2\sin A\sin C}LB^2+\frac{cosC}{2\sin A\sin B}LC^2\geqslant\frac{cosBcosC}{4\sin^2 A\sin B\sin C}a^2+\frac{cosCcosA}{4\sin A\sin^2 B\sin C}b^2+\frac{cosAcosB}{2\sin A\sin B\sin^2 C}c^2$$

(2.3$_b$)

2.4 Dacă M = L şi K = G, avem:

$$\frac{1}{3}\cdot(LA^2+LB^2+LC^2)\geqslant\frac{1}{9}\cdot(a^2+b^2+c^2) <=> LA^2+LB^2+LC^2\geqslant\frac{1}{3}\cdot(a^2+b^2+c^2);(2.4_a)$$

Folosind inegalitatea (I-W), găsim:

$$LA^2+LB^2+LC^2\geqslant\frac{4\sqrt{3}S}{3};(2.4_b)$$

Dacă M = G şi K = L, avem:

$$\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}GA^2+\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}GB^2+\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}GC^2\geqslant\frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}; \quad (2.4_c)$$

$$<=> 4(a^2b^2+b^2c^2+c^2c^2)-a^4-b^4-c^4\geqslant\frac{27a^2b^2c^2}{a^2+b^2+c^2} \quad (2.4_d)$$

2.5 Dacă M = L şi K = I, avem:

$$\frac{a}{a+b+c}\cdot LA^2+\frac{b}{a+b+c}\cdot LB^2+\frac{c}{a+b+c}\cdot LC^2\geqslant\frac{a^2bc}{(a+b+c)^2}+\frac{ab^2c}{(a+b+c)^2}+\frac{abc^2}{(a+b+c)^2}$$

$$aLA^2 + bLB^2 + cLC^2 \geq abc \quad (2.5_a)$$

Dacă M = I şi K = L, avem:

$$\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}IA^2+\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}IB^2+\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}IC^2\geqslant\frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2};$$

$$a^2 IA^2 + b^2 IB^2 + c^2 IC^2 \geqslant \frac{3a^2b^2c^2}{a^2+b^2+c^2} \quad (2.5_b)$$

2.6 Dacă M = N şi K = G, avem:

$$\frac{1}{3}(NA^2+NB^2+NC^2) \geqslant \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2) \iff NA^2+NB^2+NC^2 \geqslant \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2);(2.6_a)$$

Folosind inegalitatea (I-W), rezultă:

$$NA^2+NB^2+NC^2 \geqslant \frac{4\sqrt{3}S}{3};(2.6_b)$$

Dacă M = G şi K = N, avem:

$$\frac{p-a}{p}GA^2+\frac{p-b}{p}GB^2+\frac{p-c}{p}GC^2 \geqslant \frac{(p-b)\cdot(p-c)}{p^2}a^2+\frac{(p-c)\cdot(p-a)}{p^2}b^2+\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{p^2}c^2$$

$$\iff p(p-a)GA^2+p(p-b)GB^2+p(p-c)GC^2 \geqslant (p-a)a^2 tg^2\frac{A}{2}+(p-b)b^2 tg^2\frac{B}{2}+(p-c)c^2 tg^2\frac{C}{2} \quad (2.6_c)$$

2.7 Dacă M = N şi K = I, avem:

$$\frac{a}{a+b+c}\cdot NA^2+\frac{b}{a+b+c}\cdot NB^2+\frac{c}{a+b+c}\cdot NC^2 \geqslant \frac{a^2bc}{(a+b+c)^2}+\frac{ab^2c}{(a+b+c)^2}+\frac{abc^2}{(a+b+c)^2}$$

$\iff$ $aNA^2 + bNB^2 + cNC^2 \geq abc$ (2.7_a)

Dacă M = I şi K = N, avem:

$$\frac{p-a}{p}IA^2+\frac{p-b}{p}IB^2+\frac{p-c}{p}IC^2 \geqslant \frac{(p-b)\cdot(p-c)}{p^2}a^2+\frac{(p-c)\cdot(p-a)}{p^2}b^2+\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{p^2}c^2$$

$$(p-a)IA^2+(p-b)IB^2+(p-c)IC^2 \geqslant (p-a)a^2 tg^2\frac{A}{2}+(p-b)b^2 tg^2\frac{B}{2}+(p-c)c^2 tg^2\frac{C}{2} \quad (2.7_b)$$

2.8 Dacă M = F şi K = G, avem:

$$\frac{1}{3}(FA^2+FB^2+FC^2) \geqslant \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2) \iff FA^2+FB^2+FC^2 \geqslant \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2);(2.8_a)$$

$$FA^2+FB^2+FC^2 \geqslant \frac{4\sqrt{3}S}{3};(2.8_b), s-a\ folosit\ (I-W)$$

sau $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ (2.8_c), o inegalitate cunoscută.

Dacă M = G şi K = F, avem:

$$\frac{yz}{xy+yz+zx}GA^2+\frac{zx}{xy+yz+zx}GB^2+\frac{xy}{xy+yz+zx}GC^2 \geqslant \frac{xyz}{(xy+yz+zx)^2}\cdot(xa^2+yb^2+zc^2) \quad (2.8_d)$$

$$\iff yz\,GA^2+zxGB^2+xyGC^2 \geqslant \frac{xyz}{xy+yz+zx}(xa^2+yb^2+zc^2)$$

2.9 Dacă M = F şi K = I, avem:

$$\frac{a}{a+b+c}\cdot FA^2+\frac{b}{a+b+c}\cdot FB^2+\frac{c}{a+b+c}\cdot FC^2\geqslant\frac{a^2bc}{(a+b+c)^2}+\frac{ab^2c}{(a+b+c)^2}+\frac{abc^2}{(a+b+c)^2}$$

<=> $aFA^2 + bFB^2 + cFC^2 \geq abc$ (2.9_a)

Dacă M = I şi K = F, avem:

$$\frac{yz}{xy+yz+zx}IA^2+\frac{zx}{xy+yz+zx}IB^2+\frac{xy}{xy+yz+zx}IC^2\geqslant\frac{x^2yz}{(xy+yz+zx)^2}a^2+\frac{xy^2z}{(xy+yz+zx)^2}b^2+\frac{xyz^2}{(xy+yz+zx)^2}c^2$$

<=> $$yz\,IA^2+zxIB^2+xyIC^2\geqslant\frac{xyz}{xy+yz+zx}(xa^2+yb^2+zc^2)\quad(2.9_b)$$

2.10 Dacă M = F şi K = L, avem:

$$\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}FA^2+\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}FB^2+\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}FC^2\geqslant\frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2};$$

<=> $$a^2FA^2+b^2FB^2+c^2FC^2\geqslant\frac{3a^2b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}\quad(2.10_a)$$

Folosind inegalitatea (S-P), avem:

$$a^2FA^2+b^2FB^2+c^2FC^2\geqslant\frac{3}{a^2+b^2+c^2}\left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^3\quad(2.10_b)$$

Dacă M = L şi K = F, avem:

$$yz\,LA^2+zxLB^2+xyLC^2\geqslant\frac{xyz}{xy+yz+zx}(xa^2+yb^2+zc^2)\quad(2.10_c)$$

2.11 Dacă M = O şi K = F, avem:

$$OF^2 = \alpha_F R^2 + \beta_F R^2 + \gamma_F R^2 - \beta_F\gamma_F a^2 - \gamma_F\alpha_F b^2 - \alpha_F\beta_F c^2$$

$$OF^2=R^2-\frac{xyz}{(xy+yz+zx)^2}(xa^2+yb^2+zc^2)$$

$$R^2\geqslant\frac{xyz}{xy+yz+zx}(xa^2+yb^2+zc^2)\quad(2.11_a)$$

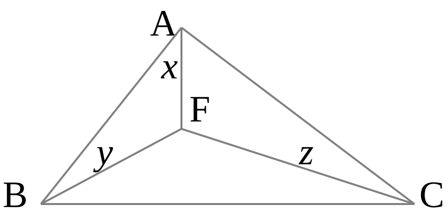
Folosind exprimările lui a^2, b^2, c^2 din formulele (5) după calcule şi reduceri de termeni deducem că:

$$OF^2\leqslant a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S \Rightarrow a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S\ ,$$

care reprezintă o demonstraţie a inegalităţii (I-W).

II. Considerăm $\Delta\, ABC$ *şi punctul F, astfel încât* $m(\widehat{AFB})=m(\widehat{BFC})=m(\widehat{CFA})$

F este punctul lui Pieree Fermat (1601-1665) sau centrul izogon al triunghiului ABC.



Aplicând teorema cosinusului în Δ BFC, Δ CFA, Δ AFC, obţinem relaţiile:

$a^2 = y^2 + z^2 + yz$

$b^2 = x^2 + z^2 + xz$ (1)
$c^2 = x^2 + y^2 + xy$

Din relaţiile (1) deducem că numerele: $\sqrt{x^2+y^2+yx}$, $\sqrt{z^2+y^2+zy}$, $\sqrt{x^2+z^2+xz}$,
$x,y,z \in R^*_+$ sunt laturile unui triunghi.
Mai avem în mod evident: $A(\Delta BFC) + A(\Delta CFA) + A(\Delta AFC) = A(\Delta ABC)$

$$<=> \frac{yz\sin 120^0}{2}+\frac{zx\sin 120^0}{2}+\frac{xy\sin 120^0}{2}=S \quad => \quad S=(xy+yz+zx)\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (2)$$

$$R^2=\frac{(x^2+y^2+xy)(y^2+z^2+yz)(z^2+x^2+zx)}{3(xy+yz+zx)^2} \quad (3)$$

$$r^2=\frac{3}{16}\frac{(xy+yz+zx)^2}{\sqrt{x^2+y^2+xy}+\sqrt{y^2+z^2+yz}+\sqrt{z^2+x^2+zx}} \quad (4)$$

Cu relaţiile (1), (2), (3), (4), cu relaţiile lui Ravi: a = y+z, b = z+x, c = x+y, $x,y,z \in R^*_+$, cu relaţiile b = x, c = y, $a = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos A}$, unde x > 0, y > 0, $A \in (0, \pi)$, vezi [3], putem „algebriza" orice inegalitate referitoare la un triunghi. Este evident că există inegalităţi algebrice care nu pot fi transformate în inegalităţi ce conţin elementele unui triunghi cum ar fi de exemplu inegalităţile care au un număr de variabile diferit de 3.

Inegalităţile cu 3 variabile pot fi transformate în inegalităţi ce conţin elemente ale unui triunghi astfel: x = p-a, y = p-b, z = p-c,

$$A=2\,arctg\sqrt{\frac{yz}{x}},\ B=2\,arctg\sqrt{\frac{zx}{y}},\ C=2\,arctg\sqrt{\frac{xy}{z}}$$

(s-au folosit relaţiile lui Ravi).

Prezentăm acum câteva inegalităţi care se demonstrează uşor folosind relaţiile (1) şi (2).

1. Să se arate că: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\,S$ (inegalitatea (I-W)).

Demonstraţie. Avem:

$$a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S=2(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx-4\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{4}(xy+yz+zx)=2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

$<=> (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geqslant 0,$ *şi demonstraţia se încheie.*

2. Să se arate că în orice triunghi ABC avem: $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2$ (vezi [2]).

Soluţie: cu relaţiile (1) şi (2), obţinem:
$(y^2 + z^2 + yz)^2 + (z^2 + x^2 + zx)^2 + (x^2 + y^2 + xy)^2 \geq (xy + yz + zx)^2$
Dezvoltând şi apoi reducând unii termeni, obţinem:
$x^4 + y^4 + z^4 + x^3y\ xy^3 + x^3z + xz^3 + y^3z + yz^3 \geq 3xyz\,(x+y+z)$ <=>
<=> $(x^4 + x^3y + x^3) + (y^4 + y^3x + y^3z) + (z^4 + z^3x + z^3y) \geq 3xyz\,(x+y+z)$ <=>
<=> $x^3\,(x+y+z) + y^3(x+y+z) + z^3(x+y+z) \geq 3xyz\,(x+y+z)$
Simplificând cu $x+y+z \neq 0$ (deoarece x > 0, y > 0, z > 0) obţinem:
$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$, ceea ce este edevărat conform cu inegalitatea mediilor.

Uneori inegalităţile algebrice se pot demonstra mai uşor folosind forma lor geometrică (dacă există). Iată un exemplu:

3. Demonstraţi că: $(y^2 + z^2 + yz)(z^2 + x^2 + zx)(x^2 + y^2 + xy) \geq (xy + yz + zx)^3$

Egalitatea are loc dacă x = y = z
Demonstraţie. Cu relaţiile (1) şi (2) obţinem:

$a^2b^2c^2 \geqslant \left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^3$, *adică inegalitatea* $(S-P)$ *care a fost demonstrată la* (2.2).

Folosind relaţiile (1) şi (2) vom demonstra teorema lui Pitagora, adică:

ΔABC, $m(\hat{A}) = 90^0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$

Demonstrăm mai întâi următoarea propoziţie:

Un triunghi este dreptunghic în A <=> $b \cdot c = 2S$

Implicaţia directă este evidentă.

Reciproc: $b \cdot c = 2S \Rightarrow m(\hat{A}) = 90^0$. Avem:

$$S = \frac{b \cdot c \sin A}{2} = \frac{b \cdot c}{2} \Rightarrow \sin A = 1 \Rightarrow A = \frac{\pi}{2}$$

Acum avem de demonstrat că:

$b \cdot c = 2S \Leftrightarrow a^2 = b^2 = c^2$

$b \cdot c = 2S \Leftrightarrow b^2c^2 = 4S^2 \Leftrightarrow (z^2 + x^2 + zx)(x^2 + y^2 + xy) = \frac{3}{4}(xy + yz + zx)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4(z^2x^2+z^2y^2+y^2z^2+xyz^2+x^4+x^3y+z^3x+xy^2z+x^2yz = 3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2x^2yz+2xy^2z+2xyz^2)$

$\Leftrightarrow 4x^4 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - 2x^2yz - 2xy^2z - 2xyz^2 + 4x^3y + 4zx^3 = 0$

$\Leftrightarrow (2x^2 + xy + xz - yz)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + xy + xz - yz = 0$, ceea ce trebuia dovedit pentru că:

$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow y^2 + yz + z^2 = x^2 + z^2 + xz + x^2 + y^2 + xy \Leftrightarrow 2x^2 + xz + xy - yz = 0$

Conchidem că un triunghi ABC este dreptunghic în A.

$\Leftrightarrow 2x^2 + xz + xy - yz = 0$ (unde $x = FA$, $y = FB$, $z = FC$).

4. Folosind notaţiile (5) demonstrăm inegalitatea (S-P):

$$a^2b^2c^2 \geqslant \left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^3$$

Avem:

$$a^2b^2c^2 \geqslant \left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^3 \Leftrightarrow x^2y^2(x^2+y^2-2xy\cos A) \geqslant \frac{8}{3\sqrt{3}}x^3y^3\sin^3 A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{3}(x^2+y^2-2xy\cos A) \geqslant 8xy\sin^3 A \Leftrightarrow$$

$$3\sqrt{3}x^2 - x(6\sqrt{3}y\cos A - 8y\sin^3 A) + 3\sqrt{3}y^2 \geqslant 0 \quad (1)$$

Vom arăta că $\Delta_y \leq 0$, de unde va rezulta (1).

Avem:

$$\Delta_y = (6\sqrt{3}y\cos A + 8y\sin^3 A)^2 - 12\sqrt{3}(3\sqrt{3}y^2 \leqslant 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3\sqrt{3}\cos A - 4\sin^3 A)^2 - 27 \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3\sqrt{3}\cos A - 4\sin^3 A - 3\sqrt{3})(3\sqrt{3}\cos A - 4\sin^3 A + 3\sqrt{3}) \leqslant 0$$

Primul factor este negativ, deoarece:

$$3\sqrt{3}\cos A - 4\sin^3 A - 3\sqrt{3} = -3\sqrt{3}(1-\cos A) - 4\sin^3 A = -3\sqrt{3}\,2\sin^2\frac{A}{2} - 4\sin^3 A \leqslant 0$$

Al doilea factor este pozitiv deoarece asociind o funcţie $f:(0, \pi) \to R$

$f(x) = 3\sqrt{3}\cos x - 4\sin^3 x + 3\sqrt{3}$, *avem*:

$\lim_{x\to 0} f(x)=6\sqrt{3}, \lim_{x\to\pi} f(x)=0, f'(x)=-3\sin x(\sqrt{3}+2\sin 2x)$

$f'(x)=0$ *dacă şi numai dacă* $x=\frac{2\pi}{3}$ *sau* $x=\frac{5\pi}{6}$, $f'(x)<0$ *pentru* $x\in(0,\frac{2\pi}{3})U(\frac{5\pi}{6},\pi)$

$f'(x)>0$ *pentru* $x\in(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6})$

f *are un punct de minim de coordonate* $(\frac{2\pi}{3},0)$ *şi un punct de maxim de coordonate* $(\frac{5\pi}{5},-5+3\sqrt{3})$.

Cum $-5+3\sqrt{3}>0$ *rezultă că graficul funcţiei este situat deasupra axei OX , ceea ce arată că* $f(x)\geqslant 0$, oricare ar fi *x ϵ (0, π)* şi în concluzie al doilea factor este pozitiv.

Bibliografie:

[1] Rusu C, Calculul distanţei de la un punct al spaţiului la un punct din planul unui triunghi, Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericană de Matematică nr. 55 (iunie-septembrie 2016).

[2] Popescu G.P, Maftei I.V., José Luiz Diaz-Barrero, Dincă M, Inegalităţi Matematice. Modele inovative. Editura Didactică şi Pedagogică, R A, www.edituradp.ro, pag. 107, pag. 115-116.

[3] Rusu C, „Ionescu-Weitzenböck type inqulities" în OCTOGON Mathematical Magzine Vol. 25, No 2, October 2017, pag. 236-241.