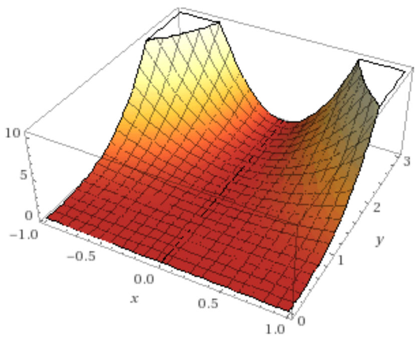
WWW.MATEINFO.RO

Revistă de matematică din februarie 2009

ISSN 2065 - 6432

REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO



REDACTORI PRINCIPALI:

Neculai Stanciu, Roxana Mihaela Stanciu, Nela Ciceu, Marin Chirciu

COORDONATOR:

Andrei Octavian Dobre

DECEMBRIE 2018

revista@mateinfo.ro

ARTICOLE REVISTA MATEINFO.RO
DECEMBRIE 2018

1. Inequalities with Fibonacci and Lucas numbers

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania and

Neculai Stanciu, Buzău, Romania

1. $\arctan\sqrt{\frac{F_n^2+F_{n+1}^2}{2}}+\arctan\sqrt{\frac{L_n^2+L_{n+1}^2}{2}}\ge\arctan\frac{F_{n+2}}{2}+\arctan\frac{L_{n+2}}{2}, \forall n\in\mathbf{N}.$

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu and N. Stanciu**, 2012)

Proof. The function $f:\mathbf{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $f(x)=\arctan x$, $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}, \forall x\in\mathbf{R}$ is increasing on $\mathbf{R}$. Since,

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\ge\frac{x+y}{2}, \forall x,y\in\mathbf{R},$$

We get that:

$$\sqrt{\frac{F_n^2+F_{n+1}^2}{2}}\ge\frac{F_n+F_{n+1}}{2}=\frac{F_{n+2}}{2} \text{ şi } \sqrt{\frac{L_n^2+L_{n+1}^2}{2}}\ge\frac{L_n+L_{n+1}}{2}=\frac{L_{n+2}}{2}, \forall n\in\mathbf{N}.$$

Therefore:

$$f\left(\sqrt{\frac{F_n^2+F_{n+1}^2}{2}}\right)+f\left(\sqrt{\frac{L_n^2+L_{n+1}^2}{2}}\right)\ge f\left(\frac{F_{n+2}}{2}\right)+f\left(\frac{L_{n+2}}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \arctan\sqrt{\frac{F_n^2+F_{n+1}^2}{2}}+\arctan\sqrt{\frac{L_n^2+L_{n+1}^2}{2}}\ge\arctan\frac{F_{n+2}}{2}+\arctan\frac{L_{n+2}}{2}, \forall n\in\mathbf{N}.$$

Remark. The inequality from above is the problem **B-1101** from The Fibonacci Quarterly, Vol. 50, Nr.1, p. 82, 2012.

2. If $T_k=\binom{k+1}{2}, \forall k\ge 1$, then:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{F_k^{2m+2}}{T_k^m} \geq \frac{3^m(F_nF_{n+1})^{m+1}}{n^mT_{n+1}^m},\ \forall n\in\mathbf{N}^*, \forall m\in\mathbf{R}_+^*.$$

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu and N. Stanciu**, 2012)

Proof. We have:

$$U_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{F_k^{2m+2}}{T_k^m} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\left(F_k^2\right)^{m+1}}{T_k^m},$$

And by *J. Radon*, i.e:

''If $x_k \in \mathbf{R}_+^*, y_k \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall k=\overline{1,n},\ n\in\mathbf{N}^*-\{1\}, m\in\mathbf{R}_+$, then

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^{m+1}}{y_k^m} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^{m+1}}{\left(\sum_{k=1}^{n}y_k\right)^m}\text{''}.$$

So,

$$U_n \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n}F_k^2\right)^{m+1}}{\left(\sum_{k=1}^{n}T_k\right)^m},$$

and using the identities:

$$\sum_{k=1}^{n}F_k^2 = F_nF_{n+1} \text{ şi } \sum_{k=1}^{n}T_k = \frac{n}{3}T_{n+1},$$

yields the desired inequality.

Remark. The inequality from above is the problem **B-1108** from The Fibonacci Quarterly, Vol. 50, Nr.2, p. 181, 2012.

3. $2(F_n^4+F_{n+1}^4+F_{n+2}^4) > 9(F_nF_{n+1}F_{n+2})^{\frac{4}{3}}$ (1)

$$F_n^2+F_{n+1}^2+F_{n+2}^2 > \sqrt{6}(F_nF_{n+1}F_{n+2})^{\frac{2}{3}} \qquad (2)$$

$$(F_n^2+F_{n+1}^2+F_{n+2}^2)^2\left(\frac{1}{F_n^4}+\frac{1}{F_{n+1}^4}+\frac{1}{F_{n+2}^4}\right) > 18 \qquad (3)$$

$$2(F_n^4+F_{n+1}^4+F_{n+2}^4)\left(\frac{1}{F_n^4}+\frac{1}{F_{n+1}^4}+\frac{1}{F_{n+2}^4}\right)^2 > 81 \qquad (4)$$

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu şi N. Stanciu**, 2012)

Proof. We have the identity of *Giacomo Candido* (1871-1941) , i.e.:

$$\left(x^2+y^2+(x+y)^2\right)^2=2\left(x^4+y^4+(x+y)^4\right), \forall x,y\in\mathbf{R}.$$

By *Giacomo Candido* identity where x is F_n and y is F_{n+1} and if we taking account by:

$$x+y=F_n+F_{n+1}=F_{n+2},$$

we obtain that:

$$2(F_n^4+F_{n+1}^4+F_{n+2}^4)=(F_n^2+F_{n+1}^2+F_{n+2}^2)^2.$$

Using AM-GM inequality we deduce that

$$2(F_n^4+F_{n+1}^4+F_{n+2}^4)>\left(3\sqrt[3]{F_n^2F_{n+1}^2F_{n+2}^2}\right)^2=9(F_nF_{n+1}F_{n+2})^{\frac{4}{3}}, \text{ so (1) is proved}$$

We have:

$$2(F_n^4+F_{n+1}^4+F_{n+2}^4)=(F_n^2+F_{n+1}^2+F_{n+2}^2)^2,$$

And by M.A. – M.G. we obtain:

$$(F_n^2+F_{n+1}^2+F_{n+2}^2)^2>6\sqrt[3]{F_n^4F_{n+1}^4F_{n+2}^4}\Leftrightarrow(F_n^2+F_{n+1}^2+F_{n+2}^2)>\sqrt{6}(F_nF_{n+1}F_{n+2})^{\frac{2}{3}},$$

So (2) is proved

Multiplying:

$$2(F_n^4+F_{n+1}^4+F_{n+2}^4)=(F_n^2+F_{n+1}^2+F_{n+2}^2)^2,$$

with

$$\left(\frac{1}{F_n^4}+\frac{1}{F_{n+1}^4}+\frac{1}{F_{n+2}^4}\right)>0,$$

Then by M.A. – M.H. inequality we obtain:

$$(F_n^2+F_{n+1}^2+F_{n+2}^2)^2\left(\frac{1}{F_n^4}+\frac{1}{F_{n+1}^4}+\frac{1}{F_{n+2}^4}\right)=$$

$$=2(F_n^4+F_{n+1}^4+F_{n+2}^4).\left(\frac{1}{F_n^4}+\frac{1}{F_{n+1}^4}+\frac{1}{F_{n+2}^4}\right)>2\cdot 9=18, \text{ i.e. (3).}$$

Multiplying:

$$2(F_n^4+F_{n+1}^4+F_{n+2}^4)=(F_n^2+F_{n+1}^2+F_{n+2}^2)^2,$$

wih

$$\left(\frac{1}{F_n^2}+\frac{1}{F_{n+1}^2}+\frac{1}{F_{n+2}^2}\right)^2>0, \text{ and then M.A. – M.H. we get:}$$

$$2(F_n^4+F_{n+1}^4+F_{n+2}^4).\left(\frac{1}{F_n^2}+\frac{1}{F_{n+1}^2}+\frac{1}{F_{n+2}^2}\right)^2=$$

$$=(F_n^2+F_{n+1}^2+F_{n+2}^2)^2\left(\frac{1}{F_n^2}+\frac{1}{F_{n+1}^2}+\frac{1}{F_{n+2}^2}\right)^2>9^2=81,$$

Q.E.D.

Remark. The above result is the problem **B-1109** from The Fibonacci Quarterly, Vol. 50, Nr.2, p. 181, 2012.

4. $$\frac{F_m^2}{(F_qF_n+F_{q+1}F_p)^2}+\frac{F_n^2}{(F_qF_p+F_{q+1}F_m)^2}+\frac{F_p^2}{(F_qF_m+F_{q+1}F_n)^2}\geq\frac{3}{F_{q+2}^2},\ \forall m,n,p,q\in\mathbf{N}.$$

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu and N. Stanciu**, 2012)

Proof. We use *H. Bergström* inequality, i.e.:

''If $x_k\in\mathbf{R},\ y_k\in\mathbf{R}_+^*\ \forall k=\overline{1,n}, n\in\mathbf{N}^*-\{1\}$, then $\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{y_k}\geq\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n}y_k}$''.

(1) $$U=\frac{F_m^2}{(F_qF_n+F_{q+1}F_p)^2}+\frac{F_n^2}{(F_qF_p+F_{q+1}F_m)^2}+\frac{F_p^2}{(F_qF_m+F_{q+1}F_n)^2}\geq$$

$$\geq\frac{1}{3}\left(\frac{F_m}{F_qF_n++F_{q+1}F_p}+\frac{F_n}{F_qF_p+F_{q+1}F_m}+\frac{F_p}{F_qF_m+F_{q+1}F_n}\right)^2,\ \forall m,n,p,q\in\mathbf{N}.$$

Also we have:

$$V=\frac{F_m}{F_qF_n+F_{q+1}F_p}+\frac{F_n}{F_qF_p+F_{q+1}F_m}+\frac{F_p}{F_qF_m+F_{q+1}F_n}=$$

$$=\frac{F_m^2}{F_qF_mF_n+F_{q+1}F_mF_p}+\frac{F_n^2}{F_qF_nF_p+F_{q+1}F_nF_m}+\frac{F_p^2}{F_qF_pF_m+F_{q+1}F_pF_n}$$

Therefore:

(2) $$V\geq\frac{(F_m+F_n+F_p)^2}{(F_q+F_{q+1})(F_mF_n+F_nF_p+F_pF_m)}=\frac{(F_m+F_n+F_p)^2}{F_{q+2}(F_mF_n+F_nF_p+F_pF_m)}$$

Applying the inequality

$$(x+y+z)^2\geq3(xy+yz+zx),\ \forall x,y,z\in\mathbf{R}_+,$$

(2) becomes:

(3) $$V\geq\frac{3}{F_{q+2}}$$

From (1) and (3) we obtain:

$$U\geq\frac{3}{F_{q+2}^2},\ \forall m,n,p,q\in\mathbf{N}.$$

Remark. The above result is **B-1113** from The Fibonacci Quarterly, Vol. 50, Nr. 3, p.273, 2012.

5. If $f : R_+^* \to R_+^*$, such that $f(x) > x$, $\forall x \in R_+^*$, then

$$\sum_{k=1}^{n} f((1+F_k^2)^2) > 4F_nF_{n+1}.$$

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu and N. Stanciu**, 2012)

Proof. From $f(x) > x$, we have that $f((1+F_k^2)^2) > (1+F_k^2)^2$, $\forall k \in \mathbf{N}^*$,
And by $(1+x)^2 \geq 4x, \forall x \in \mathbf{R}_+^*$, we get $f((1+F_k^2)^2) > (1+F_k^2)^2 \geq 4F_k^2$.
Hence: $\sum_{k=1}^{n} f((1+F_k^2)^2) > \sum_{k=1}^{n} \left(1+F_k^2\right)^2 \geq 4\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = 4F_nF_{n+1}$.

Remark. This is the problem **B-1114**, from The Fibonacci Quarterly, Vol. 50, Nr. 3, p.273, 2012.

6.

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{F_k^4 - F_k^2 + 1} + \frac{F_k^2 - 1}{F_k^4 + 1} \right) < F_nF_{n+1}, \forall n \in \mathbf{N}^* \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{L_k^4 - L_k^2 + 1} + \frac{L_k^2 - 1}{L_k^4 + 1} \right) < L_nL_{n+1} - 2, \forall n \in \mathbf{N}^* \quad (2)$$

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu and N. Stanciu**, 2012)

Proof. We have:

$$\sqrt{x^2 - x + 1} \leq \frac{x^3+1}{x^2+1}, \ \forall x \in \mathbf{R}_+^*.$$

Indeed,

$$\sqrt{x^2 - x + 1} \leq \frac{x^3+1}{x^2+1} \Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(x^4 + 2x^2 + 1) \leq x^6 + 2x^3 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x \Leftrightarrow 0 \leq x(x-1)^4, \text{ true.}$$

Equality occurs iff $x = 1$.
So:

$$(*) \ \sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{x-1}{x^2+1} \leq \frac{x^3+1}{x^2+1} + \frac{x-1}{x^2+1} = x.$$

Putting (*) $x = F_k^2$, and using $F_k^2 > 1, \forall k \neq 1$, we deduce:

$$\sqrt{F_k^4 - F_k^2 + 1} + \frac{F_k^2 - 1}{F_k^4 + 1} < F_k^2,\ \forall k \in \mathbf{N}^*.$$

Therefore

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{F_k^4 - F_k^2 + 1} + \frac{F_k^2 - 1}{F_k^4 + 1}\right) < \sum_{k=1}^{n} F_k^2,$$

Using:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1},$$

Yields (1).

Applying (*) $\sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{x-1}{x^2+1} \le x,$ where we put $x = L_k^2,\ \forall k \in \mathbf{N}^*$, and taking account that $L_k^2 > 1,\ \forall k \ne 1$ we get

$$\sqrt{L_k^4 - L_k^2 + 1} + \frac{L_k^2 - 1}{L_k^4 + 1} < L_k^2,\ \forall k \in \mathbf{N}^*.$$

Therefore,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{L_k^4 - L_k^2 + 1} + \frac{L_k^2 - 1}{L_k^4 + 1}\right) < \sum_{k=1}^{n} L_k^2 = L_n L_{n+1} - 2,\ \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Remark. The inequality from above is the problem **B-1117** from The Fibonacci Quartrely, Vol. 50, Nr.4, p.367, 2012.

7. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{\tan^2 \frac{x}{2^k}}{2^k F_k^2} \ge \frac{\left(\cot\frac{x}{2^n} - 2^{n+1}\cot 2x\right)^2}{2^{2n} F_n F_{n+1}},\ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$$

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu and N. Stanciu**, 2012)

Proof. We have:

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\tan^2 \frac{x}{2^k}}{2^k F_k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2^k}}\tan\frac{x}{2^k}\right)^2}{F_k^2},$$

And from *H. Bergström* inequality we obtain that:

$$(*)\quad U_n \ge \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2^k}}\tan\frac{x}{2^k}\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} F_k^2}$$

Since:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2^k}}\tan\frac{x}{2^k}=\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-2\cot 2x,\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\text{ , and}$$

$$\sum_{k=1}^{n}F_k^2=F_nF_{n+1},$$

Then from (*) we obtain the desired result.

Remark. The result from above is the problema **B-1119** from The Fibonacci Quarterly, Vol. 50, Nr. 4, p.367, 2012.

8. If $a,b,c\in\mathbf{R}_+^*$ such that $a+b+c\le 24$, then:

$$\frac{F_n}{\sqrt{F_n^2+aF_{n+1}F_{n+2}}}+\frac{F_{n+1}}{\sqrt{F_{n+1}^2+bF_{n+2}F_n}}+\frac{F_{n+2}}{\sqrt{F_{n+2}^2+cF_nF_{n+1}}}\ge 1,\ \forall n\in\mathbf{N}.$$

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu and N. Stanciu**, 2012)

Proof. Let $U_n=\frac{F_n}{\sqrt{F_n^2+aF_{n+1}F_{n+2}}}+\frac{F_{n+1}}{\sqrt{F_{n+1}^2+bF_{n+2}F_n}}+\frac{F_{n+2}}{\sqrt{F_{n+2}^2+cF_nF_{n+1}}}$.

$$(1)\quad U_n=\sum\frac{F_n}{\sqrt{F_n^2+aF_{n+1}F_{n+2}}}=\sum\frac{F_n^2}{\sqrt{F_n}\cdot\sqrt{F_n^3+aF_nF_{n+1}F_{n+2}}}=$$

$$=\sum\frac{F_n^2}{\sqrt{F_n}\cdot\sqrt{F_n^3+ap_n}},\forall n\in\mathbf{N},$$

where:

$$p_n=F_nF_{n+1}F_{n+2},\ \forall n\in\mathbf{N}.$$

Denoting

$$v_n=\sqrt{F_n}\cdot\sqrt{F_n^3+ap_n},$$

$$V_n=v_n+v_{n+1}+v_{n+2}=\sqrt{F_n}\cdot\sqrt{F_n^3+ap_n}+\sqrt{F_n}\cdot\sqrt{F_n^3+bp_n}+\sqrt{F_n}\cdot\sqrt{F_n^3+cp_n},\forall n\in\mathbf{N}.$$

So,

$$V_n^2=\left(\sum\sqrt{F_n}\sqrt{F_n^3+ap_n}\right)^2\overset{C-B-S}{\le}s_n\left(F_n^3+F_{n+1}^3+F_{n+2}^3+(a+b+c)p_n\right),\forall n\in\mathbf{N},$$

where:

$$s_n=F_n+F_{n+1}+F_{n+2},\ \forall n\in\mathbf{N}.$$

Because :

$$(x+y+z)^3\ge x^3+y^3+z^3+24xyz,\ \forall x,y,z\in\mathbf{R}_+^*\text{, and}$$

$$V_n^2\le s_n\left(F_n^3+F_{n+1}^3+F_{n+2}^3+(a+b+c)p_n\right)\le s_n\left(F_n^3+F_{n+1}^3+F_{n+2}^3+24F_nF_{n+1}F_{n+2}\right),$$

Then:

$$(2)\quad V_n^2\le s_n\cdot s_n^3=s_n^4,\ \forall n\in N\Leftrightarrow v_n\le s_n^2,\forall n\in\mathbf{N}.$$

By the inequality of *H. Bergström*, (1) and (2) we deduce that

$$U_n \geq \frac{(s_n)^2}{V_n} \geq \frac{s_n^2}{s_n^2} = 1, \forall n \in \mathbf{N},$$

Q.E.D.

Remark. The result is the problem **H-728** from The Fibonacci Quartrely, Vol. 50, Nr. 4, p. 375, 2012.

2.9. If $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$ with $abc = 1$, then for any $m \in \mathbf{R}_+$ we have:

$$\frac{1}{a^{3m+3}(F_n b + F_{n+1}c)^{m+1}} + \frac{1}{b^{3m+3}(F_n c + F_{n+1}a)^{m+1}} + \frac{1}{c^{3m+3}(F_n a + F_{n+1}b)^{m+1}} \geq \frac{3}{F_{n+2}^{m+1}}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu and N. Stanciu**, 2012)

Proof. By the inequality of *J. Radon* we have:

$$(1)\quad A_n = \frac{1}{a^{3m+3}(F_n b + F_{n+1}c)^{m+1}} + \frac{1}{b^{3m+3}(F_n c + F_{n+1}a)^{m+1}} + \frac{1}{c^{3m+3}(F_n a + F_{n+1}b)^{m+1}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{3^m}\left(\frac{1}{a^3(F_n b + F_{n+1}c)} + \frac{1}{b^3(F_n c + F_{n+1}a)} + \frac{1}{c^3(F_n a + F_{n+1}b)}\right)^{m+1}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Also we have

$$B_n = \frac{1}{a^3(F_n b + F_{n+1}c)} + \frac{1}{b^3(F_n c + F_{n+1}a)} + \frac{1}{c^3(F_n a + F_{n+1}b)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{a^2}}{F_n ab + F_{n+1}ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{F_n bc + F_{n+1}ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{F_n ac + F_{n+1}bc}, \forall n \in \mathbf{N},$$

And *H. Bergström* inequality we get

$$(2)\ B_n \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{(F_n + F_{n+1})(ab + bc + ca)} = \frac{(ab + bc + ca)^2}{F_{n+2}(abc)^2(ab + bc + ca)} = \frac{ab + bc + ca}{F_{n+2}} \overset{MA-MG}{\geq}$$

$$\overset{MA-MG}{\geq} \frac{3 \cdot \sqrt[3]{(abc)^2}}{F_{n+2}} = \frac{3}{F_{n+2}}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

From (1) and (2) we obtain

$$A_n \geq \frac{1}{3^m}\left(\frac{3}{F_{n+2}}\right)^{m+1} = \frac{3}{F_{n+2}^{m+1}}, \forall n \in \mathbf{N}, \text{ Q.E.D.}$$

Remark. For $n = m = 0$, $F_0 = F_1 = 1, F_2 = 2$, so from above we get

If $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$ with $abc = 1$, then

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2},$$

i.e. the IMO Problem , **Canada**, 1995, proposed by **Russia**.

Other remark. The above result is the problem **H-728** from The Fibonacci Quartrely,, Vol. 50, Nr. 4, p. 375, 2012.

10. If $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $m\geq 0$, then:

$$\frac{\sin^{m+2}t}{(F_n\sin t+F_{n+1}\cos t)^m}+\frac{\cos^{m+2}t}{(F_n\cos t+F_{n+1}\sin t)^m}\geq\frac{1}{F_{n+2}^m},\ \forall n\in\mathbf{N}^* \qquad (1)$$

$$\frac{1}{(L_n+L_{n+1}\tan t)^m}+\frac{\tan^{m+2}t}{(L_n\tan t+L_{n+1})^m}\geq\frac{1}{L_{n+2}^m\cos^2 t},\quad \forall n\in\mathbf{N}^* \qquad (2)$$

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu and N. Stanciu**, 2012)

Proof. ***We have*** (*) $\frac{x^{m+2}}{(ux+vy)^m}+\frac{y^{m+2}}{(uy+vx)^m}\geq\frac{x^2+y^2}{(u+v)^m},\ \forall x,y,u,v\in\mathbf{R}_+^*$.

Indeed:

$$U=\frac{x^{m+2}}{(ux+vy)^m}+\frac{y^{m+2}}{(uy+vx)^m}=\frac{x^{2(m+1)}}{(ux^2+vxy)^m}+\frac{y^{2(m+1)}}{(uy^2+vxy)^m}\geq$$

$$\geq\frac{(x^2)^{m+1}}{(ux^2+\frac{v(x^2+y^2)}{2})^m}+\frac{(y^2)^{m+1}}{(uy^2+\frac{v(x^2+y^2)}{2})^m},$$

by *J. Radon* inequality we obtain:

$$U\geq\frac{(x^2+y^2)^{m+1}}{(u(x^2+y^2)+v(x^2+y^2))^m}=\frac{x^2+y^2}{(u+v)^m}.$$

- $u=F_n$, $v=F_{n+1}$, $x=\sin t$, $y=\cos t$, by (*) we obtain:

$$\frac{\sin^{m+2}t}{(F_n\sin t+F_{n+1}\cos t)^m}+\frac{\cos^{m+2}t}{(F_n\cos t+F_{n+1}\sin t)^m}\geq\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{(F_n+F_{n+1})^m}=\frac{1}{F_{n+2}^m}, \text{ i.e (1)}.$$

- $u=L_n$, $v=L_{n+1}$, $x=1$, $y=\tan t$, by (*) we deduce that:

$$\frac{1}{L_n+L_{n+1}\tan t}+\frac{\tan^3 t}{L_n\tan t+L_{n+1}}\geq\frac{1+\tan^2 t}{L_n+L_{n+1}}=\frac{1}{L_{n+2}\cos^2 t}, \text{ i.e. (2).}$$

Remark. The above result was given at Internaţional **József Wildt Contest**, 2012, the problem **W1**, see for e.g. Octogon Mathematical Magazine, Vol. 20, Nr. 1, April, 2012, p. 252.

11. If $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, then:

$$\frac{\sin^3 t}{F_n \sin t + F_{n+1}\cos t} + \frac{\cos^3 t}{F_n \cos t + F_{n+1}\sin t} \geq \frac{1}{F_{n+2}}, \text{ oricare ar fi } n \in \{1,2,3,...\} \quad (1)$$

$$\frac{1}{L_n + L_{n+1}\tan t} + \frac{\tan^3 t}{L_n \tan t + L_{n+1}} \geq \frac{1}{L_{n+2}\cos^2 t}, \text{ oricare ar fi } n \in \{1,2,3,...\} \quad (2)$$

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu and N. Stanciu**, 2013)

Proof. We have:

$$(*) \quad \frac{x^3}{ux+vy} + \frac{y^3}{uy+vx} \geq \frac{x^2+y^2}{u+v}, \ \forall x, y, u, v \in \mathbf{R}_+^*.$$

Indeed:

$$U = \frac{x^3}{ux+vy} + \frac{y^3}{uy+vx} = \frac{(x^2)^2}{ux^2+vxy} + \frac{(y^2)^2}{uy^2+vxy} \geq$$

$$\geq \frac{(x^2)^2}{ux^2 + \frac{v(x^2+y^2)}{2}} + \frac{(y^2)^2}{uy^2 + \frac{v(x^2+y^2)}{2}} = 2\left(\frac{(x^2)^2}{2ux^2 + v(x^2+y^2)} + \frac{(y^2)^2}{2uy^2 + v(x^2+y^2)}\right),$$

And by the inequality of *H. Bergström* we deduce that:

$$U \geq \frac{2(x^2+y^2)^2}{2u(x^2+y^2) + 2v(x^2+y^2)} = \frac{x^2+y^2}{u+v}.$$

- We take $u = F_n$, $v = F_{n+1}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, then by (*) we have:

$$\frac{\sin^3 t}{F_n \sin t + F_{n+1}\cos t} + \frac{\cos^3 t}{F_n \cos t + F_{n+1}\sin t} \geq \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{F_n + F_{n+1}} = \frac{1}{F_{n+2}},$$

So (1) is proved

- We take $u = L_n$, $v = L_{n+1}$, $x = 1$, $y = \tan t$, then by (*) we get:

$$\frac{1}{L_n + L_{n+1}\tan t} + \frac{\tan^3 t}{L_n \tan t + L_{n+1}} \geq \frac{1 + \tan^2 t}{L_n + L_{n+1}} = \frac{1}{L_{n+2}\cos^2 t},$$

so (2) is proved.

2. In connection with issue 5467 of the SSMA Mathematics Journal November 2017

Marin Chirciu[1]

The SSMA journal is an international journal which is published monthly, October through May, emphasizing research on issues, concerns, and lessons within and between the disciplines of science and mathematics in the classroom.
University of Alabama at Birmingham, USA.
This section of the Journal offers readers an opportunity to exchange interesting mathematical problems and solutions. To view, the current problems see the most recent issue of *School Science and Mathematics*.

1) In ΔABC

$$\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{3abc}{2R}\sqrt[3]{\frac{1}{h_a h_b h_c}}.$$

Proposed by Jose Luis Diaz-Barrero, Barcelona Teach, Barcelona , Spain

<u>Soluție.</u>
Demonstrăm rezultatul ajutător:
<u>Lemă .</u>

2) In ΔABC

$$\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq 2p.$$

<u>Demonstrație.</u>
Avem $\sum \frac{a^2}{b+c} = \frac{2p\left(p^2-3r^2-4Rr\right)}{p^2+r^2+2Rr}$ și $\sum \frac{bc}{b+c} = \frac{p^4+p^2\left(2r^2+16Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2}{2p\left(p^2+r^2+2Rr\right)}$,

de unde $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} = \frac{5p^4-10p^2r^2+r^2\left(4R+r\right)^2}{2p\left(p^2+r^2+2Rr\right)}$. Inegalitatea (1) se scrie:

$$\frac{5p^4-10p^2r^2+r^2\left(4R+r\right)^2}{2p\left(p^2+r^2+2Rr\right)} \geq 2p \Leftrightarrow \Leftrightarrow p^2\left(p^2-14r^2-8Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2 \geq 0 .$$

Distingem cazurile:
Cazul 1). Dacă $p^2-14r^2-8Rr \geq 0$, inegalitatea este evidentă.
Cazul 2). Dacă $p^2-14r^2-8Rr < 0$, inegalitatea se rescrie:
$r^2\left(4R+r\right)^2 \geq p^2\left(8Rr+14r^2-p^2\right)$, care rezultă din inegalitatea Blundon-Gerretsen:

$16Rr-5r^2 \leq p^2 \leq \frac{R\left(4R+r\right)^2}{2\left(2R-r\right)}$. Rămâne să arătăm că:

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești*

$$r^2(4R+r)^2 \ge \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}\left(8Rr+14r^2-\left(16Rr-5r^2\right)\right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 8R^2-15Rr-2r^2 \ge 0 \Leftrightarrow (R-2r)(8R+r) \ge 0$, evident din inegalitatea lui Euler: $R \ge 2r$.

Propoziție.

3) In ΔABC

$$2p \ge \frac{3abc}{2R}\sqrt[3]{\frac{1}{h_a h_b h_c}}$$

Avem $2p \ge \frac{3\cdot 4Rrp}{2R}\sqrt[3]{\frac{R}{2r^2p^2}} \Leftrightarrow 1 \ge 3r\sqrt[3]{\frac{R}{2r^2p^2}} \Leftrightarrow 1 \ge 27r^3\cdot\frac{R}{2r^2p^2} \Leftrightarrow 2p^2 \ge 27Rr$,

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2 \ge 16Rr-5r^2$ .Rămâne să arătăm că:

$2\left(16Rr-5r^2\right) \ge 27Rr \Leftrightarrow R \ge 2r$ (Inegalitatea lui Euler).

Din **Lemă** și **Propoziție** deducem :

4) In ΔABC

$$\sum\frac{a^2+bc}{b+c} \ge 2p \ge \frac{3abc}{2R}\sqrt[3]{\frac{1}{h_a h_b h_c}}.$$

Din dubla inegalitate de mai sus deducem concluzia $\sum\frac{a^2+bc}{b+c} \ge \frac{3abc}{2R}\sqrt[3]{\frac{1}{h_a h_b h_c}}$.

Remarcă.

În continuare sunt puse în evidență inegalitați în triunghi în care intervine suma $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}$.

5) In ΔABC: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c} \ge \frac{2}{\sqrt{3}}\left(h_a+h_b+h_c\right)$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2+bc}{b+c} = \frac{5p^4-10p^2r^2+r^2(4R+r)^2}{2p\left(p^2+r^2+2Rr\right)}$ și $\sum h_a = \frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}$.

Inegalitatea se scrie: $\frac{5p^4-10p^2r^2+r^2(4R+r)^2}{2p\left(p^2+r^2+2Rr\right)} \ge \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R} \Leftrightarrow$

$3R\left[5p^4-10p^2r^2+r^2(4R+r)^2\right] \ge 2\left(p^2+r^2+2Rr\right)\left(p^2+r^2+4Rr\right)\cdot p\sqrt{3}$, care rezultă din inegalitatea lui Doucet: $4R+r \ge p\sqrt{3}$. Rămâne să arătăm că:

$3R\left[5p^4-10p^2r^2+r^2(4R+r)^2\right] \ge 2\left(p^2+r^2+2Rr\right)\left(p^2+r^2+4Rr\right)\cdot(4R+r) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^2\left[p^2(7R-2r)-r\left(48R^2+58Rr+4r^2\right)\right] \ge r^2(4R+r)\left(4R^2+9Rr+2r^2\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2 \ge 16Rr-5r^2$ .Rămâne să arătăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)\left[\left(16Rr-5r^2\right)(7R-2r)-r\left(48R^2+58Rr+4r^2\right)\right] \ge r^2(4R+r)\left(4R^2+9Rr+2r^2\right) \Leftrightarrow$

$126R^3-295R^2r+88Rr^2-4r^3\geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(126R^2-43Rr+2r^2)\geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler: $R\geq 2r$.

6) In ΔABC: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{4p}{3\sqrt{3}}(\sin A+\sin B+\sin C)$.

Soluție.

Folosim $\sum\sin A=\frac{p}{R}\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (adevărată din inegalitatea luiMitrinovic $p\leq\frac{3R\sqrt{3}}{2}$).

Este suficient să arătăm că: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{4p}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=2p$ și vezi **Lema.**

7) In ΔABC: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{4p}{3}(\cos A+\cos B+\cos C)$.

Soluție.

Folosim $\sum\cos A=1+\frac{r}{R}\leq\frac{3}{2}$ (adevărată din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$).

Este suficient să arătăm că: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{4p}{3}\cdot\frac{3}{2}=2p$ și vezi **Lema.**

8) In ΔABC: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{16p}{3\sqrt{3}}\cdot\sin A\sin B\sin C$.

Soluție.

Folosim $\prod\sin A=\frac{rp}{2R^2}\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}$ (din Euler $R\geq 2r$ și Mitrinovic $p\leq\frac{3R\sqrt{3}}{2}$).

Este suficient să arătăm că: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{16p}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}=2p$ și vezi **Lema.**

9) In ΔABC: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq 16p\cdot\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

Soluție.

Folosim $\prod\sin\frac{A}{2}=\frac{r}{4R}\leq\frac{1}{8}$ (adevărată din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$).

Este suficient să arătăm că: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq 16p\cdot\frac{1}{8}=2p$ și vezi **Lema.**

10) In ΔABC: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{16p}{3\sqrt{3}}\cdot\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

Soluție.

Folosim $\prod\cos\frac{A}{2}=\frac{p}{4R}\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}$ (adevărată din inegalitatea luiMitrinovic $p\leq\frac{3R\sqrt{3}}{2}$).

Este suficient să arătăm că: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{16p}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}=2p$ și vezi **Lema.**

11) In ΔABC: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq 6p\sqrt{3} \cdot tg\frac{A}{2} tg\frac{B}{2} tg\frac{C}{2}$.

Soluție.

Folosim $\prod tg\frac{A}{2} = \frac{r}{p} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$ (adevărată din inegalitatea luiMitrinovic $p \leq \frac{3R\sqrt{3}}{2}$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq 6p\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} = 2p$ și vezi **Lema.**

12) In ΔABC: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{8p}{9} \sum \cos^2\frac{A}{2}$.

Soluție.

Folosim $\sum \cos^2\frac{A}{2} = 2 + \frac{r}{2R} \leq \frac{9}{4}$ (adevărată din inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{8p}{9} \cdot \frac{9}{4} = 2p$ și vezi **Lema.**

13) In ΔABC: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{8p}{9} \sum \sin^2 A$.

Soluție.

Folosim $\sum \sin^2 A = \frac{p^2-r^2-4Rr}{2R^2} \leq \frac{9}{4}$ (din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{8p}{9} \cdot \frac{9}{4} = 2p$ și vezi **Lema.**

14) In ΔABC: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{8p}{9} \sum \sin B \sin C$.

Soluție.

Folosim $\sum \sin B \sin C = \frac{p^2+r^2+4Rr}{4R^2} \leq \frac{9}{4}$ (din inegalitatea Gerretsen $p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{8p}{9} \cdot \frac{9}{4} = 2p$ și vezi **Lema.**

15) In ΔABC: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{8p}{3} \sum \cos B \cos C \leq \frac{3}{4}$.

Soluție.

Folosim $\sum \cos B \cos C = \frac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2}$ (din inegalitatea Gerretsen $p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{8p}{3} \cdot \frac{3}{4} = 2p$ și vezi **Lema.**

16) In ΔABC: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{2p}{3} \sum \cos(B-C)$.

Soluție.

Folosim $\sum\cos(B-C)=\dfrac{p^2+r^2+2Rr-2R^2}{2R^2}\le 3$ (din Gerretsen $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$).

Este suficient să arătăm că: $\sum\dfrac{a^2+bc}{b+c}\ge\dfrac{2p}{3}\cdot 3=2p$ și vezi **Lema.**

17) In ΔABC : $\sum\dfrac{a^2+bc}{b+c}\ge\dfrac{2p}{3}\sum\cos^2\dfrac{B-C}{2}$.

Soluție.

Folosim $\sum\cos^2\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{p^2+r^2+2Rr+4R^2}{4R^2}\le 3$ (din Gerretsen $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$).

Este suficient să arătăm că: $\sum\dfrac{a^2+bc}{b+c}\ge\dfrac{2p}{3}\cdot 3=2p$ și vezi **Lema.**

18) In ΔABC : $\sum\dfrac{a^2+bc}{b+c}\ge 2p\prod\cos\dfrac{B-C}{2}$.

Soluție.

Folosim $\prod\cos\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{p^2+r^2+2Rr}{8R^2}\le 1$ (din inegalitatea Gerretsen $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$).

Este suficient să arătăm că: $\sum\dfrac{a^2+bc}{b+c}\ge\dfrac{2p}{3}\cdot 3=2p$ și vezi **Lema.**

19) In ΔABC : $\sum\dfrac{a^2+bc}{b+c}\ge 16p\prod(1-\cos A)$.

Soluție.

Folosim $\prod(1-\cos A)=\dfrac{r^2}{2R^2}\le\dfrac{1}{8}$ (care rezultă din inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$).

Este suficient să arătăm că: $\sum\dfrac{a^2+bc}{b+c}\ge 16p\cdot\dfrac{1}{8}=2p$ și vezi **Lema.**

20) In ΔABC : $\sum\dfrac{a^2+bc}{b+c}\ge\dfrac{4p}{3\sqrt{3}}\sum\sin 2A$.

Soluție.

Folosim $\sum\sin 2A=\dfrac{2rp}{R^2}\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (care rezultă din inegalitatea lui Mitrinovic $p\le\dfrac{3R\sqrt{3}}{2}$).

Este suficient să arătăm că: $\sum\dfrac{a^2+bc}{b+c}\ge\dfrac{4p}{3\sqrt{3}}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=2p$ și vezi **Lema.**

21) In ΔABC : $\sum\dfrac{a^2+bc}{b+c}\ge p\sum\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=2$. Inegalitatea se scrie: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge 2p$ și vezi **Lema.**

22) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge 2p\sum tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}$.

Soluție.

Folosim $\sum tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=1$. Inegalitatea se scrie: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge 2p$ și vezi **Lema.**

23) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge 2p\sum \operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C$.

Soluție.

Folosim $\sum \operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C=1$. Inegalitatea se scrie: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge 2p$ și vezi **Lema.**

24) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge 2\sum a\cos A$.

Soluție.

Folosim $\sum a\cos A=\frac{2rp}{R} \le p$. Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge 2p$ și vezi **Lema.**

25) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge \frac{4}{3}\sum a\cos^2\frac{A}{2}$.

Soluție.

Folosim $\sum a\cos^2\frac{A}{2}=p\left(1+\frac{r}{R}\right) \le \frac{3p}{2}$(care rezultă din inegalitatea lui Euler $R \ge 2r$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge \frac{4}{3}\cdot\frac{3p}{2}=2p$ și vezi **Lema.**

26) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge \frac{4}{3}\sum a\sin B\sin C$.

Soluție.

Folosim $\sum a\sin B\sin C=\frac{3rp}{R} \le \frac{3p}{2}$ (care rezultă din inegalitatea lui Euler $R \ge 2r$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge \frac{4}{3}\cdot\frac{3p}{2}=2p$ și vezi **Lema.**

27) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge 4\sum a\cos B\cos C$.

Soluție.

Cu $\sum a\cos B\cos C=\frac{rp}{R} \le \frac{p}{2}$(Euler $R \ge 2r$). E suficient : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge 4\cdot\frac{p}{2}=2p$ și **Lema.**

28) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{8}{3\sqrt{3}} \sum r_a \cos^2 \frac{A}{2}$.

Soluție.

Folosim $\sum r_a \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p^2}{2R} \leq \frac{3p\sqrt{3}}{4}$ (care rezultă din inegalitatea lui Mitrinovic $p \leq \frac{3R\sqrt{3}}{2}$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{8}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{3p\sqrt{3}}{4} = 2p$ și vezi **Lema.**

29) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{8}{3\sqrt{3}} \sum h_a \cos^2 \frac{A}{2}$.

Soluție.

Folosim $\sum h_a \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p^2}{2R} \leq \frac{3p\sqrt{3}}{4}$ (care rezultă din inegalitatea lui Mitrinovic $p \leq \frac{3R\sqrt{3}}{2}$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{8}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{3p\sqrt{3}}{4} = 2p$ și vezi **Lema.**

30) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \sum a(\cos B + \cos C)$.

Soluție.

Folosim $\sum a(\cos B + \cos C) = 2p$. Inegalitatea se scrie: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq 2p$ și vezi **Lema.**

31) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq 2\sqrt{3} \sum (p-a) tg \frac{A}{2}$.

Soluție.

Folosim $\sum (p-a) tg \frac{A}{2} = 3r \leq \frac{p}{\sqrt{3}}$ (care rezultă din inegalitatea lui Mitrinovic $p \geq 3r\sqrt{3}$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq 2\sqrt{3} \cdot \frac{p}{\sqrt{3}} = 2p$ și vezi **Lema.**

32) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq 8 \sum (p-a) \sin^2 \frac{A}{2}$.

Soluție.

Folosim $\sum (p-a) \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{rp}{2R} \leq \frac{p}{4}$ (care rezultă din inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq 8 \cdot \frac{p}{4} = 2p$ și vezi **Lema.**

33) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{8}{9} \sum \frac{p^2(p-a)}{bc}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{p^2(p-a)}{bc} = p\left(2 + \frac{r}{2R}\right) \leq \frac{9p}{4}$ (care rezultă din inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{8}{9}\cdot\frac{9p}{4} = 2p$ și vezi **Lema.**

34) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{8p^2}{3\sqrt{3}} \sum \frac{2R-r_a}{bc}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{p(2R-r_a)}{bc} = \frac{p}{2R} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$ (care rezultă din inegalitatea lui Mitrinovic $p \leq \frac{3R\sqrt{3}}{2}$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{8p}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4} = 2p$ și vezi **Lema.**

35) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{2p}{3\sqrt{3}} \sum \frac{h_b+h_c}{a}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{h_b+h_c}{a} = \frac{2p}{R} \leq 3\sqrt{3}$ (care rezultă din inegalitatea lui Mitrinovic $p \leq \frac{3R\sqrt{3}}{2}$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{2p}{3\sqrt{3}}\cdot 3\sqrt{3} = 2p$ și vezi **Lema.**

36) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{4p}{3\sqrt{3}} \sum \frac{h_b h_c}{a h_a}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{h_b h_c}{a h_a} = \frac{p}{R} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (care rezultă din inegalitatea lui Mitrinovic $p \leq \frac{3R\sqrt{3}}{2}$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{4p}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2} = 2p$ și vezi **Lema.**

37) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{2p}{3} \sum \frac{h_b+h_c}{r_b+r_c}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{h_b+h_c}{r_b+r_c} = 2\left(1+\frac{r}{R}\right) \leq 3$. E suficient : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{4p}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2} = 2p$ și **Lema.**

38) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{p}{3} \sum \frac{h_b+h_c}{r_a}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{h_b+h_c}{r_a} = 6$. Inegalitatea se scrie: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{p}{3}\cdot 6 = 2p$ și vezi **Lema.**

39) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{8p}{9} \sum \frac{h_b h_c}{bc}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{h_b h_c}{bc} = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2R^2} \le \frac{9}{4}$ (din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2 + bc}{b+c} \ge \frac{8p}{9} \cdot \frac{9}{4} = 2p$ și vezi **Lema.**

40) In ΔABC : $\sum \frac{a^2 + bc}{b+c} \ge \frac{4}{3} \sum \frac{h_b h_c}{a}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{h_b h_c}{a} = \frac{3rp}{R} \le \frac{3p}{2}$. Este suficient : $\sum \frac{a^2 + bc}{b+c} \ge \frac{4}{3} \cdot \frac{3p}{2} = 2p$ și vezi **Lema.**

41) In ΔABC : $\sum \frac{a^2 + bc}{b+c} \ge \frac{8p}{9} \sum \frac{h_b h_c}{a^2}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{h_b h_c}{a^2} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2} \le \frac{9}{4}$ (din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2 + bc}{b+c} \ge \frac{8p}{9} \cdot \frac{9}{4} = 2p$ și vezi **Lema.**

42) In ΔABC : $\sum \frac{a^2 + bc}{b+c} \ge \frac{2}{3r} \sum (p-a) r_a$.

Soluție.

Folosim $\sum (p-a) r_a = 3rp$. Inegalitatea se scrie: $\sum \frac{a^2 + bc}{b+c} \ge \frac{2}{3r} \cdot 3rp = 2p$ și vezi **Lema.**

43) In ΔABC : $\sum \frac{a^2 + bc}{b+c} \ge \frac{1}{2r} \sum a (h_a - r)$.

Soluție.

Folosim $\sum a (h_a - r) = 4rp$. Inegalitatea se scrie: $\sum \frac{a^2 + bc}{b+c} \ge \frac{1}{2r} \cdot 4rp = 2p$ și vezi **Lema.**

44) In ΔABC : $\sum \frac{a^2 + bc}{b+c} \ge 2 \sum \frac{(p-a)^2}{h_a - 2r} tg \frac{A}{2}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{(p-a)^2}{h_a - 2r} tg \frac{A}{2} = p$. Inegalitatea se scrie: $\sum \frac{a^2 + bc}{b+c} \ge 2p$ și vezi **Lema.**

45) In ΔABC : $\sum \frac{a^2 + bc}{b+c} \ge \frac{8p}{3} \sum \frac{p-a}{b+c}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{p-a}{b+c} = \frac{p^2 + 5r^2 + 8Rr}{2(p^2 + r^2 + 2Rr)} \le \frac{3}{4}$ (din inegalitatea Gerretsen $p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2 + bc}{b+c} \ge \frac{8p}{3} \cdot \frac{3}{4} = 2p$ și vezi **Lema.**

46) In ΔABC : $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{2}{p}\sum h_bh_c$.

Soluție.

Folosim $\sum h_bh_c=\frac{2rp^2}{R}\leq p^2$. Este suficient : $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{2}{p}\cdot p^2=2p$ și vezi **Lema.**

47) In ΔABC : $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{2}{p}\sum r_br_c$.

Soluție.

Folosim $\sum r_br_c=p^2$. Inegalitatea se scrie: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{2}{p}\cdot p^2=2p$ și vezi **Lema.**

48) In ΔABC : $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{8p^2}{9}\sum\frac{p-a}{bc}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{p-a}{bc}=\frac{1}{2p}\left(4+\frac{r}{R}\right)\leq\frac{9}{4p}$ (care rezultă din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$).

Este suficient să arătăm că: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{8p^2}{9}\cdot\frac{9}{4p}=2p$ și vezi **Lema.**

49) In ΔABC : $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{2p}{3}\sum\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}=2\left(1+\frac{r}{R}\right)\leq 3$. E suficient : $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{2p}{3}\cdot 3=2p$ și vezi **Lema.**

50) In ΔABC : $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\sum\frac{b^2+c^2-a^2}{b+c-a}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{b^2+c^2-a^2}{b+c-a}=\frac{5p^2-(4R+r)^2}{p}\leq 2p$ (din inegalitatea lui Doucet $4R+r\geq p\sqrt{3}$).

Este suficient să arătăm că: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq 2p$ și vezi **Lema.**

51) In ΔABC : $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{2}{3abc}\sum a(b+c)l_a^2$.

Soluție.

Folosim $\sum a(b+c)l_a^2=8p^2R\cdot\frac{p^2+5r^2+8Rr}{p^2+r^2+2Rr}\leq 8p^2R\cdot\frac{3}{2}=3abcp$.

Este suficient să arătăm că: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{2}{3abc}\cdot 3abcp=2p$ și vezi **Lema.**

52) In ΔABC : $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{\sqrt{3}}{p}\sum al_a$.

Soluție.

Folosim $\sum al_a \le \frac{2p^2}{\sqrt{3}}$,(care rezultă din inegalitatea lui Cebâșev)

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge \frac{\sqrt{3}}{p} \cdot \frac{2p^2}{\sqrt{3}} = 2p$ și vezi **Lema.**

53) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge \frac{2}{\sqrt{3}} \sum l_a$.

Soluție.

Folosim $\sum l_a \le p\sqrt{3}$, (care rezultă din inegalitatea CBS)

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot p\sqrt{3} = 2p$ și vezi **Lema.**

54) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge 2S \sum \frac{h_a}{l_a^2}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{h_a}{l_a^2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2r} \le \frac{1}{r}$ (care rezultă din inegalitatea lui Euler: $R \ge 2r$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge 2rp \cdot \frac{1}{r} = 2p$ și vezi **Lema.**

55) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge \frac{4}{3} \sum l_a \cos\frac{A}{2}$.

Soluție.

Folosim $\sum l_a \cos\frac{A}{2} = \frac{p\left(p^2+5r^2+8Rr\right)}{p^2+r^2+2Rr} \le \frac{3p}{2}$ (din inegalitatea Gerretsen $p^2 \ge 16Rr - 5r^2$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge \frac{4}{3} \cdot \frac{3p}{2} = 2p$ și vezi **Lema.**

56) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge \frac{4}{9r} \sum l_b l_c \cos\frac{A}{2}$.

Soluție.

Folosim $\sum l_b l_c \cos\frac{A}{2} = \frac{4rp\left(p^2+r^2+4Rr\right)}{p^2+r^2+2Rr} \le \frac{9rp}{2}$ (din Gerretsen $p^2 \ge 16Rr - 5r^2$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge \frac{4}{9r} \cdot \frac{9rp}{2} = 2p$ și vezi **Lema.**

57) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge \frac{8}{3\sqrt{3}} \sum l_a \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

Soluție.

Folosim $\sum l_a \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{p^4+p^2\left(16Rr+2r^2\right)+r^2\left(4R+r\right)^2}{4R\left(p^2+r^2+2Rr\right)} \le \frac{p^2}{2R} \le \frac{3p\sqrt{3}}{4}$,

(care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ și $\frac{p^2}{2R} \leq \frac{3p\sqrt{3}}{4}$, adevărată din inegalitatea lui Mitrinovic $p \leq \frac{3R\sqrt{3}}{2}$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{8}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{3p\sqrt{3}}{4} = 2p$ și vezi **Lema.**

58) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq 2S\sum \frac{1}{l_a}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{1}{l_a} \leq \frac{1}{r}$ (care rezultă din $\sum \frac{1}{l_a} \leq \sum \frac{1}{h_a} = \frac{1}{r}$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq 2rp \cdot \frac{1}{r} = 2p$ și vezi **Lema.**

59) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq 16r^2 p\sum \frac{a}{b^3+c^3}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a}{b^3+c^3} \leq \frac{1}{8r^2}$.

Într-adevăr: $b^3+c^3 \geq bc(b+c) \Rightarrow \frac{a}{b^3+c^3} \leq \frac{a}{bc(b+c)}$.

Avem $\sum \frac{a}{bc(b+c)} = \frac{p^2-3r^2-4Rr}{2Rr(p^2+r^2+2Rr)}$.

Deoarece $\frac{p^2-3r^2-4Rr}{2Rr(p^2+r^2+2Rr)} \leq \frac{1}{8r^2}$, care rezultă din Gerretsen $p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$,

este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq 16r^2 p \cdot \frac{1}{8r^2} = 2p$ și vezi **Lema.**

60) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq 2S\sum \frac{\text{ctg}\, A}{p-a}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{\text{ctg}\, A}{p-a} = \frac{1}{2r}\left[5-\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right] \leq \frac{1}{r}$ (din inegalitatea lui Doucet: $4R+r \geq p\sqrt{3}$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq 2rp \cdot \frac{1}{r} = 2p$ și vezi **Lema.**

61) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{4p^2}{9}\sum \frac{\cos A}{p-a}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{\cos A}{p-a} = \frac{p^2 - R(4R+r)}{Rrp} \le \frac{9}{2p}$ (din Gerretsen $p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge \frac{4p^2}{9} \cdot \frac{9}{2p} = 2p$ și vezi **Lema.**

62) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge \frac{4}{3} \sum r_a \cos\frac{A}{2}$.

Soluție.

Folosim $\sum r_a \cos\frac{A}{2} \le \frac{3p}{2}$ (rezultă din $\sum r_a \cos\frac{A}{2} = \sum ptg\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{A}{2} = \sum p\sin\frac{A}{2} \le p \cdot \frac{3}{2} = \frac{3p}{2}$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge \frac{4}{3} \cdot \frac{3p}{2} = 2p$ și vezi **Lema.**

63) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge abc \sum \frac{\cos A}{a(p-a)}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{\cos A}{a(p-a)} = \frac{1}{4Rr}\left[5 - \left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right] \le \frac{1}{2Rr}$ (adevărată din Doucet: $4R + r \ge p\sqrt{3}$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge 4Rrp \cdot \frac{1}{2Rr} = 2p$ și vezi **Lema.**

64) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge 8r^2 p \sum \frac{1}{a^2}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{1}{a^2} \le \frac{1}{4r^2}$. Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge 8r^2 p \cdot \frac{1}{4r^2} = 2p$ și vezi **Lema.**

65) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge \frac{8S}{\sqrt{3}} \sum \frac{1}{a}\sin\frac{A}{2}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{1}{a}\sin\frac{A}{2} \le \frac{\sqrt{3}}{4r}$.(Vezi: $\sum \frac{1}{a}\sin\frac{A}{2} \le \frac{1}{3}\sum\frac{1}{a}\sum\sin\frac{A}{2} \le \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{3Rr} \cdot \frac{3}{2} = \frac{p}{6Rr} \le \frac{\sqrt{3}}{4r}$,
care rezultă din inegalitățile Cebâșev și Mitrinovic).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge \frac{8rp}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4r} = 2p$ și vezi **Lema.**

66) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge \frac{8S}{3} \sum \frac{1}{a}\cos\frac{A}{2}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{1}{a}\cos\frac{A}{2} \le \frac{3}{4r}$ (care rezultă din CBS, $\sum \frac{1}{a^2} \le \frac{1}{4r^2}$ și $\sum \cos^2\frac{A}{2} \le \frac{9}{4}$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \ge \frac{8rp}{3} \cdot \frac{3}{4r} = 2p$ și vezi **Lema.**

67) In ΔABC: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{1}{3R}\sum (b+c)m_a$.

Soluție.

Folosim $\sum (b+c)m_a \leq 6Rp$ (care rezultă din CBS, $\sum m_a^2 = \frac{3}{4}\sum a^2$ și Gerretsen).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{1}{3R}\cdot 6Rp = 2p$ și vezi **Lema.**

68) In ΔABC: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq 6Rr\sum \frac{1}{a}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{1}{a} = \frac{p^2+r^2+4Rr}{4Rrp} \leq \frac{p}{3Rr}$ (din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 6Rr - 5r^2$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq 6Rr\cdot \frac{p}{3Rr} = 2p$ și vezi **Lema.**

69) In ΔABC: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{S}{3R}\sum \frac{a^2}{(p-b)(p-c)}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{(p-b)(p-c)} = \frac{4(R+r)}{r} \leq \frac{6R}{r}$ (care rezultă din inegalitatea lui Euler: $R \geq 2r$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{rp}{3R}\cdot \frac{6R}{r} = 2p$ și vezi **Lema.**

70) In ΔABC: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{16p^2}{9}\sum \frac{1}{a}\sin^2\frac{A}{2}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{1}{a}\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{p}\left(1+\frac{r}{4R}\right) \leq \frac{9}{8p}$ (care rezultă din inegalitatea lui Euler: $R \geq 2r$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{16p^2}{9}\cdot \frac{9}{8p} = 2p$ și vezi **Lema.**

71) In ΔABC: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq 8Rr\sum \frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2} = \frac{p}{4Rr}$. Inegalitatea se scrie: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{16p^2}{9}\cdot \frac{9}{8p} = 2p$ și vezi **Lema.**

72) In ΔABC: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq 2r^2\sum \frac{\mathrm{ctg}^2\frac{A}{2}}{p-a}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}}{p-a} = \frac{p}{r^2}$. Inegalitatea se scrie: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq 2r^2 \cdot \frac{p}{r^2} = 2p$ și vezi **Lema.**

73) In $\Delta ABC: \sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{8}{\sqrt{3}} \sum r_a \cos^2 \frac{A}{2}$.

Soluție.

Folosim $\sum r_a \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p^2}{2R} \leq \frac{p\sqrt{3}}{4}$ (adevărată din inegalitatea lui Mitrinovic $p \leq \frac{3R\sqrt{3}}{2}$).

Este suficient să arătăm că: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{p\sqrt{3}}{4} = 2p$ și vezi **Lema.**

74) In $\Delta ABC: \sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq abc \sum \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{(p-b)(p-c)}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2Rr}$.

Inegalitatea se scrie: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq 4Rrp \cdot \frac{1}{2Rr} = 2p$ și vezi **Lema.**

75) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq 4Rr \sum \frac{\csc^2 \frac{A}{2}}{p-a}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{\csc^2 \frac{A}{2}}{p-a} = \frac{p}{2Rr}$. Inegalitatea se scrie: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq 4Rr \cdot \frac{p}{2Rr} = 2p$ și vezi **Lema.**

76) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq 2r^2 p \sum \frac{\csc^2 \frac{A}{2}}{bc}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{\csc^2 \frac{A}{2}}{bc} = \frac{1}{r^2}$. Inegalitatea se scrie: $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq 2r^2 p \cdot \frac{1}{r^2} = 2p$ și vezi **Lema.**

77) In ΔABC : $\sum \frac{a^2+bc}{b+c} \geq \frac{4abc}{3} \sum \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{bc}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{bc} = \frac{1}{4Rr}\left(1+\frac{r}{R}\right) \leq \frac{3}{8Rr}$ (care rezultă din inegalitatea lui Euler: $R \geq 2r$).

Este suficient să arătăm că: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{4}{3}\cdot 4Rrp\cdot\frac{3}{8Rr}=2p$ și vezi **Lema.**

78) In ΔABC : $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq 4Rp\sum\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{r_a}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{r_a}=\frac{1}{2R}$. Inegalitatea se scrie: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq 4Rp\cdot\frac{1}{2R}=2p$ și vezi **Lema.**

79) In ΔABC : $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{8S}{3}\sum\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{h_a}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{h_a}=\frac{1}{2r}\left(1+\frac{r}{R}\right)\leq\frac{3}{4r}$(care rezultă din inegalitatea lui Euler: $R\geq 2r$).

Este suficient să arătăm că: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{8rp}{3}\cdot\frac{3}{4r}=2p$ și vezi **Lema.**

80) In ΔABC : $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{2p^3}{9}\sum\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{r_a^2}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{r_a^2}=\frac{1}{2p^2}\left(4+\frac{r}{R}\right)\leq\frac{9}{p^2}$(care rezultă din inegalitatea lui Euler: $R\geq 2r$).

Este suficient să arătăm că: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{2p^3}{9}\cdot\frac{9}{p^2}=2p$ și vezi **Lema.**

81) In ΔABC : $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq 4Rr\sum\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{p-a}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{p-a}=\frac{p}{2Rr}$. Inegalitatea se scrie: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq 4Rr\cdot\frac{p}{2Rr}=2p$ și vezi **Lema.**

82) In ΔABC : $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{2}{3}\sum(p-a)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$.

Soluție.

Folosim $\sum(p-a)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=3p$.

Inegalitatea se scrie: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{2}{3}\cdot 3p=2p$ și vezi **Lema.**

83) In ΔABC: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{2}{3p}\sum(p-a)^2\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}$.

Soluție.

Folosim $\sum(p-a)^2\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}=3p^2$.

Inegalitatea se scrie: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{2}{3p}\cdot 3p^2=2p$ și vezi **Lema.**

84) In ΔABC: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{8p}{9}\sum\frac{p-a}{bc}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{p-a}{bc}=\frac{1}{2p}\left(4+\frac{r}{R}\right)\leq\frac{9}{4p}$(care rezultă din inegalitatea lui Euler: $R\geq 2r$).

Este suficient să arătăm că: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{8p}{9}\cdot\frac{9}{4p}=2p$ și vezi **Lema.**

85) In ΔABC: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq 2r^2p\sum\frac{1}{(p-b)(p-c)}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{1}{(p-b)(p-c)}=\frac{1}{r^2}$.

Inegalitatea se scrie: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq 2r^2p\cdot\frac{1}{r^2}=2p$ și vezi **Lema.**

86) In ΔABC: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{S}{6R}\sum\frac{a(b+c)}{(p-b)(p-c)}$.

Soluție.

Din $\sum\frac{a(b+c)}{(p-b)(p-c)}=\frac{12R}{r}$, inegalitatea se scrie: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{rp}{6R}\cdot\frac{12R}{r}=2p$ și vezi **Lema.**

87) In ΔABC: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{S}{R}\sum\frac{1}{\sin B\sin C}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{1}{\sin B\sin C}=\frac{2R}{r}$. Inegalitatea se scrie: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{rp}{R}\cdot\frac{2R}{r}=2p$ și vezi **Lema.**

88) In ΔABC: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq r\sum\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$.

Soluție.

Folosim $\sum \dfrac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\dfrac{2p}{r}$. Inegalitatea se scrie: $\sum \dfrac{a^2+bc}{b+c}\ge r\cdot\dfrac{2p}{r}=2p$ și vezi **Lema.**

89) In ΔABC : $\sum \dfrac{a^2+bc}{b+c}\ge \dfrac{4r}{R\sqrt{3}}\sum m_a$.

Soluție.

Folosim $\sum m_a\le \dfrac{R}{2r}\cdot p\sqrt{3}$ (Vezi RMT 1-2/1989, Marcel Chiriță, București)

Este suficient să arătăm că: $\sum \dfrac{a^2+bc}{b+c}\ge \dfrac{4r}{R\sqrt{3}}\cdot\dfrac{R}{2r}\cdot p\sqrt{3}=2p$ și vezi **Lema.**

90) In ΔABC : $\sum \dfrac{a^2+bc}{b+c}\ge \dfrac{S}{2R}\sum \dfrac{a(b+c)}{bc\cdot\cos^2\frac{A}{2}}$.

Soluție.

Folosim $\sum \dfrac{a(b+c)}{bc\cdot\cos^2\frac{A}{2}}=\dfrac{4R}{r}$. Inegalitatea se scrie: $\sum \dfrac{a^2+bc}{b+c}\ge \dfrac{rp}{2R}\cdot\dfrac{4R}{r}=2p$ și vezi **Lema.**

91) In ΔABC : $\sum \dfrac{a^2+bc}{b+c}\ge \dfrac{S}{6R}\sum \dfrac{a(b+c)}{bc\cdot\sin^2\frac{A}{2}}$.

Soluție.

Folosim $\sum \dfrac{a(b+c)}{bc\cdot\sin^2\frac{A}{2}}=\dfrac{12R}{r}$. Inegalitatea se scrie: $\sum \dfrac{a^2+bc}{b+c}\ge \dfrac{rp}{6R}\cdot\dfrac{12R}{r}=2p$ și vezi **Lema.**

92) In ΔABC : $\sum \dfrac{a^2+bc}{b+c}\ge p\sum \dfrac{AI}{l_a}$.

Soluție.

Folosim $\sum \dfrac{AI}{l_a}=2$. Inegalitatea se scrie: $\sum \dfrac{a^2+bc}{b+c}\ge 2p$ și vezi **Lema.**

93) In ΔABC : $\sum \dfrac{a^2+bc}{b+c}\ge \dfrac{2\sqrt{3}}{R}\sum \dfrac{AI}{l_a}(p-b)(p-c)$.

Soluție.

Folosim $2\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{R}\sum \dfrac{AI}{l_a}(p-b)(p-c)=2\sqrt{3}\cdot 2r\left(1+\dfrac{r}{R}\right)\le 2\sqrt{3}\cdot 3r\le 2p$.

Este suficient să arătăm că: $\sum \dfrac{a^2+bc}{b+c}\ge 2p$ și vezi **Lema.**

94) In ΔABC: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{\sqrt{3}}{R}\sum\frac{AI}{l_a}a(p-a)$.

Soluție.

Folosim $\frac{\sqrt{3}}{R}\sum\frac{AI}{l_a}a(p-a)=\frac{\sqrt{3}}{R}\cdot 6Rr=6r\sqrt{3}\leq 2p$.

Este suficient să arătăm că: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq 2p$ și vezi **Lema.**

95) In ΔABC: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{1}{Rr}\sum\frac{AI}{l_a}a(p-b)(p-c)$.

Soluție.

Cu $\sum\frac{AI}{l_a}a(p-b)(p-c)=2Rrp$,inegalitatea se scrie: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{1}{Rr}\cdot 2Rrp=2p$ și **Lema.**

96) In ΔABC: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{4}{3}r^2p\sum\frac{1}{h_b^2+h_c^2}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{1}{h_b^2+h_c^2}\leq\frac{3}{2r^2}$. Este suficient: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{4}{3}r^2p\cdot\frac{3}{2r^2}=2p$ și vezi **Lema.**

97) In ΔABC: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{4}{3}r^2p\sum\frac{1}{r_b^2+r_c^2}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{1}{r_b^2+r_c^2}\leq\frac{3}{2r^2}$. Este suficient : $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{4}{3}r^2p\cdot\frac{3}{2r^2}=2p$ și vezi **Lema.**

98) In ΔABC: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{2p}{3R}\sum AI\cdot\frac{h_a}{l_a}$.

Soluție.

Folosim $\sum AI\cdot\frac{h_a}{l_a}=\frac{p^2+r^2-2Rr}{2R}\leq 3R$ (din inegalitatea Gerretsen $p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$).

Este suficient să arătăm că: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{2p}{3R}\cdot 3R=2p$ și vezi **Lema.**

99) In ΔABC: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{p}{3R}\sum AI\cdot\frac{h_b+h_c}{l_a}$.

Soluție.

Folosim $\sum AI\cdot\frac{h_b+h_c}{l_a}=\frac{p^2+r^2+10Rr}{2R}\leq 6R$ (din Gerretsen $p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$).

Este suficient să arătăm că: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{p}{3R}\cdot 6R=2p$ și vezi **Lema.**

100) In ΔABC: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{2p^2}{3R}\sum\frac{AI}{l_a}\cdot\frac{a}{h_b+h_c}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{AI}{l_a}\cdot\frac{a}{h_b+h_c}=\frac{3R}{p}$. Inegalitatea se scrie: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{2p^2}{3R}\cdot\frac{3R}{p}=2p$ și vezi **Lema.**

101) In ΔABC: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{p}{3R}\sum\frac{AI}{l_a}\cdot\frac{a(b+c)}{h_b+h_c}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{AI}{l_a}\cdot\frac{a(b+c)}{h_b+h_c}=6R$. Inegalitatea se scrie: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{p}{3R}\cdot 6R=2p$ și vezi **Lema.**

102) In ΔABC: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{p}{R}\sum\frac{AI}{l_a}\cdot\frac{a^2}{h_b+h_c}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{AI}{l_a}\cdot\frac{a^2}{h_b+h_c}=2R$. Inegalitatea se scrie: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{p}{R}\cdot 2R=2p$ și vezi **Lema.**

103) In ΔABC: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{4p}{R}\sum\frac{AI}{l_a}\cdot\frac{(p-b)(p-c)}{h_b+h_c}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{AI}{l_a}\cdot\frac{(p-b)(p-c)}{h_b+h_c}=\frac{1}{r}\left[1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right]\leq\frac{R}{2}$ (din Gerretsen $p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$).

Este suficient să arătăm că: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{4p}{R}\cdot\frac{R}{2}=2p$ și vezi **Lema.**

104) In ΔABC: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{p}{R}\sum\frac{AI}{l_a}\cdot\frac{a(p-a)}{h_b+h_c}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{AI}{l_a}\cdot\frac{a(p-a)}{h_b+h_c}=2R$. Inegalitatea se scrie: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{p}{R}\cdot 2R=2p$ și vezi **Lema.**

105) In ΔABC: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{2}{R\sqrt{3}}\sum a(p-a)$.

Soluție.

Folosim $\frac{2}{R\sqrt{3}}\sum a(p-a)=\frac{2}{R\sqrt{3}}\cdot 2r(4R+r)=\frac{4r}{\sqrt{3}}\left(4+\frac{r}{R}\right)\leq\frac{4r}{\sqrt{3}}\cdot\frac{9}{2}=2\cdot 3r\sqrt{3}\leq 2p$.

Este suficient să arătăm că: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq 2p$ și vezi **Lema.**

106) In ΔABC: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\sum a\cos^2\frac{B-C}{2}$.

Soluție.

Folosim $\sum a\cos^2\frac{B-C}{2}=p\left(1+\frac{2r}{R}\right)\leq 2p$ (care rezultă din inegalitatea lui Euler: $R\geq 2r$).

Este suficient să arătăm că: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq 2p$ și vezi **Lema.**

107) In ΔABC : $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{8Sp}{9}\sum\frac{1}{a}\cos^2\frac{B-C}{2}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{1}{a}\cos^2\frac{B-C}{2}=\frac{p^4+p^2\left(2r^2-8Rr\right)+r\left(4R+r\right)\left(2R+r\right)^2}{16SR^3}\leq\frac{9R}{4S}$ (Gerretsen).

Este suficient să arătăm că: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{8Sp}{9}\cdot\frac{9R}{4S}=2p$ și vezi **Lema.**

108) In ΔABC : $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{8}{p}\sum\left(l_a\sin\frac{A}{2}\right)^2$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosim $\sum\left(l_a\sin\frac{A}{2}\right)^2=\frac{9p^4+p^2\left(8Rr-6r^2\right)+r\left(4R+r\right)^2}{\left(p^2+r^2+2Rr\right)^2}\leq\frac{p^2}{4}$ (Gerretsen).

Este suficient să arătăm că: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{8}{p}\cdot\frac{p^2}{4}=2p$ și vezi **Lema.**

109) In ΔABC : $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq 2S\sum\frac{\sec\frac{A}{2}}{a}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{\sec\frac{A}{2}}{a}\leq\frac{1}{r}$ (Cebâșev). Este suficient: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq 2rp\cdot\frac{1}{r}=2p$ și vezi **Lema.**

110) In ΔABC : $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq\frac{4S}{3R}\sum\frac{a}{b}$.

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a}{b}\leq\frac{3R}{2r}$ (GM 4-5/1990, V.Băndilă și M.Lascu).

Este suficient să arătăm că: $\sum\frac{a^2+bc}{b+c}\geq 2rp\cdot\frac{1}{r}=2p$ și vezi **Lema.**

La toate inegalitățile de mai sus egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

20iunie 2018

Bibliografie:

1. Jose Luis Diaz-Barrero, Problem 5467, November 2017, SSMA Mathematical Journal, Birmingham, USA.
2. O.Bottema, R.Z.Djordjevic, R.R.Janic, D.S.Mitrinovic, P.M.Vasic,

Geometric Inequalities, Groningen 1969, The Netherlands.
3. Marin Chirciu, Inegalități geometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2015.
4. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.
5. Marin Chirciu, Inegalități cu laturi și raze în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2017.
6. Marin Chirciu, Inegalități cu linii importante în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2018.

3. LOCURI GEOMETRICE

Prof. Alexandru Elena-Marcela
Şcoala Gimnazială „Ion Irimescu” Fălticeni

1. Se numeşte *loc geometric mulţimea punctelor care se bucură de o aceeaşi proprietate.* (definiţie din geometria elementară)

În plan această mulţime de puncte poate alcătui una sau mai multe curbe. De exemplu toate punctele din plan *egal depărtate de un punct fix* se găsesc pe un cerc, prin urmare- cercul- este format dintr-o singură curbă, în timp ce punctele egal depărtate de o dreaptă sunt situate pe două drepte paralele cu o dreaptă dată, de o parte şi de alta a ei, deci locul geometric este alcătuit din *două drepte*.

Se poate concepe locul geometric şi într-un alt mod, bazat pe mişcare, deci *cinematic*. Fie un punct *M* mobil, care păstrează în tot timpul mişcării proprietatea dată şi generează astfel locul geometric. În acest fel punctul *M* coincide pe rând cu punctele locului geometric definit mai înainte static, ca mulţime de puncte. Definiţia cinematică: *se numeşte loc geometric figura plană descrisă de un punct mobil M, care satisface o anumită condiţie (proprietate) dată.* Această figură plană poate fi alcătuită din una sau mai multe curbe sau chiar de o porţiune din plan.

Clasificare, după condiţia la care este supus punctul variabil:

a) locuri geometrice rezultate din mişcarea unui punct care păstrează neschimbată o *relaţie geometrică*;

b) locuri geometrice descrise prin schimbarea poziţiei *punctului de intersecţie* a două *curbe variabile.* În acest caz proprietatea care se păstrează este că punctul variabil se găseşte mereu la întretăierea celor două curbe.

2. *Locuri geometrice rezultate din relaţii geometrice.* A găsi locul geometric al punctului $M(x, y)$ înseamnă a găsi relaţia de legătură între coordonatele *x* şi *y*, adică ecuaţia locului. În cazul când $M(x, y)$ satisface o anumită relaţie geometrică este suficient să se transforme relaţia dată într-o relaţie analitică. Rezultă regula simplă: *locul geometric al unui punct care satisface o relaţie geometrică se găseşte transformând relaţia geometrică în relaţie analitică.*

Exemple:

1) Se cere locul geometric al punctelor egal depărtate de dreptele paralele $Ax + By + C = 0$ şi $Ax + By + C' = 0$.

Rezolvare:

Fie $M(x_0, y_0)$ punctul care are distanţe egale faţă de cele două drepte, adică

$$\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{Ax_0 + By_0 + C'}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (1)$$

Semnele din faţa radicalilor se pot combina în patru feluri care conduc la următoarele două ecuaţii:

$$Ax_0 + By_0 + C = \pm(Ax_0 + By_0 + C').$$

Dacă se ia semnul (+) înaintea parantezei se ajunge la o imposibilitate (deoarece $C \neq C'$); dacă se ia semnul (-) se găseşte:

$$Ax_0 + By_0 + \frac{C+C'}{2} = 0.$$

Deoarece x_0, y_0 sunt coordonate curente se poate șterge indicele și ecuația locului este dreapta: $Ax + By + \frac{C+C'}{2} = 0$ (2)

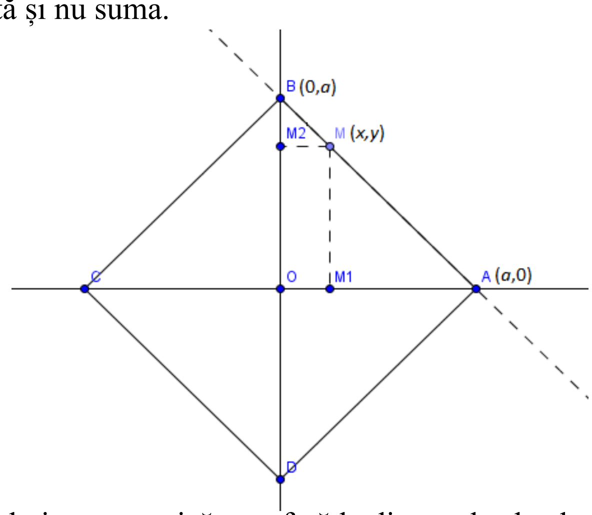
echidistantă față de dreptele date, deoarece ordonata la origine este media aritmetică a ordonatelor la origine a dreptelor date.

2) Să se găsească locul geometric al punctelor care au suma distanțelor față de două drepte perpendiculare, constantă și egală cu *a*.

Rezolvare:

Problema poate fi studiată sub două aspecte după cum distanțele sunt socotite cu semn sau în valoare absolută. În orice caz, axele de coordonate vor fi chiar cele două drepte și atunci este foarte clar că distanțele unui punct M la cele două drepte sunt chiar coordonatele punctului. Relația geometrică dată de enunț este: $\overline{MM_1} + \overline{MM_2} = a$.

Cazul I: Dacă distanțele sunt socotite cu semn atunci acestea sunt coordonatele punctului *M*, cu semnele respective în cele patru cadrane. Relația geometrică transformată analitic este deci $x+y=a$ (3) și reprezintă dreapta *AB* în întregime din figura de mai jos, deci și partea punctată. Dacă *M* iese din cadranul I atunci din punctul de vedere al geometriei fără semne *diferența distanțelor* este constantă și nu suma.



Cazul II: Dacă relația geometrică se referă la distanțele absolute atunci relația analitică este: $|x| + |y| = a$ (4) și reprezintă pătratul *ABCD*, deoarece dacă *M* aparține locului atunci simetricele față de *OX*, *OY* și origine aparțin de asemenea locului.

Din punct de vedere al *geometriei elementare* problema se încadrează în al doilea caz.

După ce s-a obținut ecuația rămâne de cercetat dacă natura problemei permite ca toate punctele care verifică ecuația să aparțină locului sau numai o parte. Este chestiunea locului geometric limitat.

3) Fiind date trei puncte *A*, *B*, *C* să se găsească locul geometric al punctelor care satisfac relația: $MB^2 + MC^2 = 2 \cdot MA^2$.

Rezolvare:

Se alege dreapta *BC* ca axă *OX* și mediatoarea segmentului *BC* ca axă *OY*. Coordonatele punctelor sunt $A(x_1, y_1)$, $B(a,0)$, $C(-a,0)$ și $M(x,y)$ care este punctul curent al locului. Relația geometrică transpusă analitic este:

$(x-a)^2+y^2+(x+a)^2+y^2=2(x-x_1)^2+(y-y_1)^2$ sau, dpă dezvoltarea și reducerea termenilor asemenea: $2x_1x+2y_1y=x_1^2+y_1^2-a^2$. (5)

Aceasta este ecuația locului geometric și reprezintă o perpendiculară pe mediana *OA* a triunghiului *ABC*, deoarece coeficientul său unghiular este $-\dfrac{x_1}{y_1}$.

Discuție:
a) Problema, prin enunțul ei, nu duce la nicio limitare a locului geometric, deci locul geometric este toată dreapta.
b) *Cazuri particulare.*

1) Dacă $OA=a$, adică mediana triunghiului *ABC* este jumătatea laturii *BC* atunci $x_1^2+y_1^2=a^2$ și ecuația locului se reduce la $x_1x+y_1y=0$, adică perpendiculara pe *OA* care trece prin origine.

2) Dacă triunghiul *ABC* este isoscel atunci $A\in OY$ și $x_1=0$. Ecuația locului devine $y=\dfrac{y_1^2+a^2}{2y_1}$, o paralelă la *OX*.

3) Dacă *A*, *B*, *C* sunt coliniare atunci $A\in OX$ și $y_1=0$. Ecuația (5) se reduce la $x=\dfrac{x^2-a^2}{2x_1}$, deci o perpendiculară pe dreapta *BC*.

3. *Locuri geometrice rezultate din intersecții.* În cazul locurilor rezultate din intersecții de curbe punctul *M* se află la intersecția a două curbe variabile, a căror poziție depinde de un parametru λ. Prin urmare ecuația fiecărei curbe conține variabilele *x*, *y* și un același parametru λ care schimbă poziția fiecărei curbe, dar nu modifică gradul ecuației sale. Cele două curbe se pot scrie, în general, sub forma: $f(x,y;\lambda)=0$ și $g(x,y;\lambda)=0$ (6).

Ecuațiile (6) formează un sistem care se rezolvă în raport cu *x* și *y*; acestea vor fi funcții de λ: $x=\varphi(\lambda)$, $y=\psi(\lambda)$. (7)

În baza relațiilor (7) la fiecare valoare a lui λ corespunde o pereche de valori (x,y), deci un punct în plan. Când λ variază continuu, punctul $M(x,y)$ își schimbă și el continuu poziția și descrie curba – loc geometric. Pentru acest motiv se zice că (7) reprezintă *ecuațiile parametrice* ale locului geometric. Legătura între *x* și *y* este făcută indirect prin parametrul λ.

Ecuația carteziană a locului reprezintă legătura directă între *x* și *y*. Aceasta se face eliminând pe λ între cele două ecuații (7), deci scoțând pe λ dintr-una din ele și introducându-l în cealaltă. În acest fel se obține o relație de forma $F(x,y)=0$ (7') care este ecuația locului geometric căutat.

Pentru a găsi locul geometric rezultat din intersecția a două curbe variabile, care depind de un același parametru, se elimină parametrul între ecuațiile celor două curbe.

În cazul când curbele conțin mai mulți parametri (de exemplu doi parametri) atunci când se elimină unul din parametri se elimină de la sine și al doilea.

Exemplu: Pe laturile unui unghi drept xOy se iau punctele A pe Ox și B pe Oy, apoi punctele variabile M pe Ox, N pe Oy care satisface relația: $\dfrac{\overline{OM}}{\overline{OA}}+\dfrac{\overline{ON}}{\overline{OB}}=2$. Să se găsească locul geometric al punctului $\{J\}=AN\cap BM$.

Rezolvare:

În problema dată axele sunt laturile unghiului drept. Coordonatele punctelor le notăm: $A(a,0)$, $B(0,b)$, $M(\alpha,0)$, $N(0,\beta)$.

Dreptele din enunț se scriu prin tăieturi:

(AN) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{\beta}-1=0$; *(BM)* $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}-1=0$

în care se adaugă relația de legătură $\dfrac{\alpha}{a}+\dfrac{\beta}{b}=2$.

Din primele două ecuații rezultă $\beta=\dfrac{ay}{a-x}$; $\alpha=\dfrac{bx}{b-y}$. Acestea înlocuite în relația de legătură și după efectuarea calculelor conduc la

$$b^2x^2+2abxy+a^2y^2-3ab(bx+ay)+2a^2b^2=0.$$

S-a obținut o ecuație de gradul al II-lea. Atunci când *N=B*, deci $\beta=b$, din relația de legătură se obține $\alpha=a$, adică *M=A*. În acest caz dreptele *AN* și *BM* coincid și toate punctele dreptei *AB* sunt puncte comune deci *AM* trebuie să apară ca loc geometric rezultat din nedeterminare. În consecință ecuația de gradul al II-lea trebuie să se descompună.

Ecuația poate fi scrisă $(bx+ay)^2-3ab(bx+ay)+2a^2b^2=0$ care rezolvată în raport cu $(bx+ay)$ duce la $\dfrac{x}{2a}+\dfrac{y}{2b}-1=0$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}-1=0$. Prima dreaptă este veritabilul loc geometric și se construiește imediat având tăieturile *2a, 2b* ; este deci paralelă cu *AB*. A doua dreaptă este *AB*, care trebuia să apară ca loc rezultat din nedeterminarea punctului de intersecție.

Observație: La același rezultat se ajunge mai simplu dacă se scrie ecuația locului geometric sub forma $\dfrac{bx}{ab-ay}-1+\dfrac{ay}{ab-bx}-1=0$. Apare imediat factorul $(bx+ay-ab)$, după care se elimină numitorul.

Bibliografie: *Geometrie analitică*, Manual pentru anul III liceu, secția reală și licee de specialitate de Gh.D.Simionescu, EDP –Buc. 1973

ISSN 2065-6432
1 DECEMBRIE 2018

4. MATEMATICA GPS

ANCA CIOBOTARU
LICEUL TEHNOLOGIC DE TRANSPORTURI – PLOIEŞTI

Matematica este omniprezentă în dezvoltarea tehnologiei, iar rezolvarea unei probleme din viaţa reală se face de obicei prin utilizarea unor cunoştinţe matematice. Unul dintre cele mai bune exemple de aplicaţie a matematicii în practică este dat de următoarea problemă simplă : cum poate fi localizat un obiect pe suprafaţa Pământului?

Pentru rezolvarea acestei probleme au fost utilizate diverse instrumente, precum compasul magnetic, astrolabul, sextantul. În prezent sunt folosite metode şi tehnologii mai avansate, cum ar fi Sistemul Global de Poziţionare (GPS). Sistemul GPS a fost completat în 1995 de către Departamentul Apărării al SUA şi a fost autorizat pentru aplicaţii civile. El era compus iniţial din 24 de sateliţi, dintre care cel puţin 21 erau funcţionali 98% din timp. În 2005 el a fost extins la 32 de sateliţi, dintre care cel puţin 24 sunt funcţionali, iar restul sunt de rezervă, pentru a înlocui un eventual satelit defect. Sateliţii se află la 20 200 km de suprafaţa Pământului şi sunt distribuiţi în 6 plane orbitale, care fac un unghi de 55° cu planul ecuatorial. Fiecare plan orbital conţine cel puţin 4 sateliţi şi fiecare satelit descrie o orbită circulară în jurul Pământului în 11 h 58 min. Sateliţii sunt distribuiţi astfel încât în orice moment şi în orice loc de pe suprafaţa Pământului pot fi observaţi cel puţin 4 sateliţi.

Cei 24 de sateliţi emit câte un semnal care se repetă periodic şi care poate fi captat de către un receptor special, un echipament care foloseşte informaţia pentru a-şi determina poziţia. În acelaşi timp, receptorul poate determina poziţia absolută a fiecărui satelit în orice moment. Semnalul emis conţine şi un cod corector al inevitabilelor erori de orbită, cod actualizat la fiecare oră. Semnalul emis de către fiecare satelit are o perioadă fixă şi începutul fiecărui ciclu poate fi calculat de receptor. Sateliţii sunt dotaţi cu câte un ceas atomic de mare precizie, sincronizat cu ceasul receptorului. Când receptorul primeşte un semnal de la un satelit, el începe să-l compare cu unul generat de el şi care se presupune că este identic. În general, aceste semnale nu sunt identice, de aceea receptorul îl modifică pe cel generat de el, până când cele două semnale sunt în fază. În acest mod, receptorul poate să calculeze timpul necesar semnalului să ajungă de la satelit la el.

Sistemul GPS descris mai sus este cel standard şi permite calculul poziţiei receptorului cu o precizie de până la 20 m. Această precizie poate fi îmbunătăţită, dar din anul 2000 Departamentul Apărării a introdus în mod intenţionat inadvertenţe în semnalele sateliţilor, pentru a reduce precizia sistemului la 100 m.

Teoria care stă la baza GPS. Presupunem că ceasurile receptorului şi ale tuturor sateliţilor sunt sincronizate perfect. Receptorul îşi calculează poziţia prin triangulare, al cărei principiu de bază este determinarea poziţiei unui obiect, cunoscând poziţia acelui obiect faţă de nişte obiecte de referinţă, ale căror poziţii sunt cunoscute. Receptorul GPS calculează distanţa la sateliţi cunoscând poziţia acestora.

- Satelitul P_1 emite un semnal care ajunge la receptor în timpul t_1, timp pe care receptorul poate să-l determine. Distanţa până la satelit este $r_1 = ct_1$, unde *c* este viteza luminii. Mulţimea punctelor care se află la distanţa r_1 de satelitul P_1 este o sferă S_1 cu centrul în

P_1 şi raza r_1. Într-un sistem cartezian de coordonate, fie (*x*, *y*, *z*) poziţia necunoscută a receptorului şi (a_1, b_1, c_1) poziţia cunoscută a satelitului P_1. Receptorul se află pe sfera S_1, deci

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=r_1^2=c^2t_1^2. \qquad (1)$$

- Informaţia este insuficientă pentru determinarea poziţiei receptorului, dar acesta primeşte un alt semnal în timpul t_2 de la un satelit P_2, care se află la distanţa $r_2=ct_2$. Ca mai sus, receptorul se află pe sfera S_2 cu centrul $P_2(a_2, b_2, c_2)$ şi raza r_2, deci

$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2=r_2^2=c^2t_2^2. \qquad (2)$$

  Intersecţia celor două sfere este un cerc $C_{1,2}$ pe care se află receptorul.

- Receptorul mai primeşte un semnal în timpul t_3 de la un satelit $P_3(a_3, b_3, c_3)$ aflat la distanţa $r_3=ct_3$, deci el este situat pe sfera S_3 cu centrul P_3 şi raza r_3 :

$$(x-a_3)^2+(y-b_3)^2+(z-c_3)^2=r_3^2=c^2t_3^2. \qquad (3)$$

  Receptorul se află deci la intersecţia cercului $C_{1,2}$ cu sfera S_3. Intersecţia unui cerc cu o sferă poate să conţină două puncte, deci teoretic încă nu putem fi siguri care este poziţia receptorului. Practic, sateliţii sunt poziţionaţi astfel încât una dintre soluţii poate fi eliminată, fiind departe de suprafaţa Pământului. Prin rezolvarea sistemului de ecuaţii (1), (2), (3) se poate deci determina poziţia receptorului.

Prin scădere obţinem ecuaţiile

$$2(a_3-a_1)x+2(b_3-b_1)y+2(c_3-c_1)z=A_1, \qquad (4)$$

$$2(a_3-a_2)x+2(b_3-b_2)y+2(c_3-c_2)z=A_2, \qquad (5)$$

unde

$$A_1=c^2(t_1^2-t_3^2)+a_3^2+b_3^2+c_3^2-a_1^2-b_1^2-c_1^2,$$

$$A_2=c^2(t_2^2-t_3^2)+a_3^2+b_3^2+c_3^2-a_2^2-b_2^2-c_2^2. \qquad (6)$$

Sateliţii sunt plasaţi astfel încât nu există trei coliniari. Acest fapt ne garantează că printre determinanţii

$$\begin{vmatrix} a_3-a_1 & b_3-b_1 \\ a_3-a_2 & b_3-b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_3-a_1 & c_3-c_1 \\ a_3-a_2 & c_3-c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_3-b_1 & c_3-c_1 \\ b_3-b_2 & c_3-c_2 \end{vmatrix}$$

există cel puţin unul nenul. Presupunem că primul determinant este nenul şi găsim cu regula lui Cramer din ecuaţiile (4), (5) pe *x, y* ca funcţii de *z* :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} A_1-2(c_3-c_1)z & 2(b_3-b_1) \\ A_2-2(c_3-c_2)z & 2(b_3-b_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(a_3-a_1) & 2(b_3-b_1) \\ 2(a_3-a_2) & 2(b_3-b_2) \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2(a_3-a_1) & A_1-2(c_3-c_1)z \\ 2(a_3-a_2) & A_2-2(c_3-c_2)z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(a_3-a_1) & 2(b_3-b_1) \\ 2(a_3-a_2) & 2(b_3-b_2) \end{vmatrix}} \tag{7}$$

Înlocuind aceste valori în (3) obţinem o ecuaţie de gradul doi în *z*, cu soluţiile z_1, z_2. Substituind *z* cu z_1 şi z_2 în (7), se obţin cele două soluţii căutate $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)$, dintre care receptorul o recunoaşte pe cea corectă.

Alegem sistemul cartezian de coordonate astfel ca exprimarea poziţiei prin latitudine, longitudine şi altitudine să fie cât mai simplă :

- originea sistemului de coordonate este centrul Pământului;
- axa *Oz* este axa polilor şi este orientată spre nord;
- axele *Ox*, *Oy* sunt conţinute în planul ecuatorial;
- partea pozitivă a axei *Ox* trece prin punctul de 0° longitudine;
- partea pozitivă a axei *Oy* trece prin punctul de 90° longitudine vestică.

Raza Pământului este egală aproximativ cu 6365 km, deci o soluţie (*x, y, z*) este considerată acceptabilă dacă $x^2+y^2+z^2 \approx (6365 \pm 50)^2$. Aproximarea ± 50 este admisă pentru poziţionarea avioanelor şi a altitudinilor montane. Latitudinea *l* şi longitudinea *L* sunt unghiuri exprimate în grade şi pot fi determinate din egalităţile :

$$x = R\cos L\cos l, \quad y = R\sin L\cos l, \quad z = R\sin l.$$

Cum $l \in [-90°, 90°]$, obţinem $l = \arcsin\frac{z}{R}$, ceea ce ne permite să calculăm cos *l*. Longitudinea *L* este deci unic determinată din egalităţile :

$$\cos L = \frac{x}{R\cos l}, \qquad \sin L = \frac{y}{R\cos l}.$$

Distanţa *h* a receptorului faţă de centrul Pământului este $h = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Putem să înlocuim peste tot pe *R* cu *h* şi să calculăm latitudinea şi longitudinea. Altitudinea la care se află receptorul este egală cu $h - R$.

Această teorie se aplică într-o lume ideală, dar, din păcate, lumea reală este mult mai complicată. Sateliţii sunt dotaţi cu câte un ceas atomic foarte precis (şi foarte scump!), receptorul este înzestrat însă cu un ceas de duzină, accesibil unui buget modest. Chiar dacă ceasurile sateliţilor sunt sincronizate perfect, receptorul va calcula nişte timpi fictivi, conform ceasului său. Fie τ = (timpul de sosire a semnalului după ceasul receptorului) − (timpul de sosire a semnalului după ceasul satelitului). Apare astfel o a patra necunoscută τ, decalajul ceasului receptorului faţă de ceasurile sateliţilor, ceea ce impune considerarea unui al patrulea satelit. Se aplică în mod similar regula lui Cramer pentru determinarea poziţiei receptorului, ceea ce este posibil, deoarece nu există trei sateliţi coplanari vizibili dintr-un punct dat de pe suprafaţa Pământului.

Dacă receptorul "vede" mai mult de patru sateliţi, atunci se poate arăta că pentru a obţine o aproximare mai bună a poziţiei sale, receptorul trebuie să aleagă acei patru sateliţi care maximizează determinantul

$$\begin{vmatrix} 2(a_4-a_1) & 2(b_4-b_1) & 2(c_4-c_1) \\ 2(a_4-a_2) & 2(b_4-b_2) & 2(c_4-c_2) \\ 2(a_4-a_3) & 2(b_4-b_3) & 2(c_4-c_3) \end{vmatrix}.$$

Distanţele sunt calculate de către receptor folosind constanta c, care este viteza luminii în vid. În realitate semnalul traversează atmosfera şi se refractă, ceea ce îi lungeşte traiectoria şi îi micşorează viteza. Se foloseşte de aceea un receptor auxiliar (staţie de bază) cu poziţie fixă cunoscută, realizându-se astfel un GPS *diferenţial* (DGPS), cu o precizie de ordinul centimetrilor.

Pământul nu este sferic în realitate, el este turtit la poli, cu raza de 6356 km, pe când la ecuator raza este de 6378 km, de aceea trecerea de la coordonate carteziene la cele geografice trebuie să ia în considerare acest fapt.

Viteza sateliţilor şi masa Pământului sunt mari, deci conform teoriei relativităţii (confirmată de măsurători) ele vor influenţa mersul ceasurilor sateliţilor. Cu toate că aceste influenţe sunt de sens contrar, ele nu se anulează reciproc, deci trebuie considerate împreună în calcule.

Până acum Statele Unite deţin monopolul pe această piaţă, ceea ce le permite un control exclusiv. În 2002 Uniunea Europeană a creat un fond de dezvoltare pentru Galileo, un sistem de poziţionare alternativ faţă de GPS.

Aplicaţii ale GPS. Sistemul Global de Poziţionare tinde să devină indispensabil, el realizând, printre altele :

- determinarea poziţiei unor persoane izolate (excursionişti, vânători, marinari) prin marcarea unui traseu, inclusive pe o hartă ;
- găsirea unei adrese de către conducătorul unui taxi, de exemplu ;
- orientarea cu o hartă veche, prin scanarea sau digitizarea ei ;
- realizarea de coridoare aeriene pentru avioane, pentru a evita coliziunea lor ;
- urmărirea simultană a mai multor autovehicule, de exemplu de către o companie de închirieri, pentru a verifica respectarea contractului ;
- determinarea exactă a altitudinilor montane (Everest, K2, Mont Blanc, etc.) ;
- aplicaţii militare (doar pentru asta a fost creat!).

Sateliţii GPS nu transmit informaţii în legătură cu starea lor sau calitatea semnalului. Spre deosebire de ei, sateliţii Galileo transmit în mod constant astfel de informaţii, ceea ce permite receptorului să ignore semnalele de la sateliţii cu defecte. Acest fapt se realizează prin intermediul unui sistem de staţii de bază, care măsoară poziţia reală a sateliţilor şi o compară cu poziţia antecalculată. Informaţia este transmisă satelitului defect, care o retransmite receptoarelor. Guvernul SUA are în plan o îmbunătăţire asemănătoare a GPS.

Semnalul GPS şi registrele cu deplasare liniară. Registrele cu deplasare liniară generează şiruri care permit receptorului să se sincronizeze cu ele. Aceste echipamente simple generează semnale care par în mare măsură aleatoare, cu toate că sunt generate de un algoritm determinist. Un semnal care nu se corelează cu translaţiile lui sau cu alte semnale permite receptorului GPS să identifice semnalul unui anumit satelit şi să se sincronizeze cu el.

Registrul poate fi considerat ca o bandă cu *r* casete care conţin numerele $a_{n-1}, \dots, a_{n-r}$, fiecare dintre ele având valorile 0 sau 1. Fiecare casetă este asociată cu un număr $q_i \in \{0, 1\}$, cele *r* valori q_i sunt fixe şi distincte pentru fiecare satelit. Se generează un şir pseudoaleator astfel :

- se dau condiţiile iniţiale $a_{r-1}, \dots, a_0 \in \{0, 1\}$, nu toate nule ;
- fiind date $a_{n-1}, \dots, a_{n-r}$, registrul calculează $a_n \equiv \sum_{i=0}^{r-1} a_{n-r+i} q_i$ (mod 2) ;
- se deplasează toate valorile spre dreapta cu o unitate, se omite a_{n-r} şi se inserează a_n în caseta cea mai din stânga ;
- se iterează procedura.

Acest algoritm este determinist şi numărul condiţiilor iniţiale este finit, deci şirul generat este periodic. Există 2^r şiruri distincte de lungime *r*, deci perioada este cel mult 2^r.Dacă la un moment dat $a_{n-1} = \dots = a_{n-r} = 0$, atunci $a_m = 0$, pentru orice $m \geq n$. Un şir periodic "interesant" nu conţine *r* zerouri consecutive, deci lungimea perioadei este cel mult $2^r - 1$. Fie $M = 2^r - 1$, $B = (b_1, \dots, b_M)$ şirul finit $(a_n)_{n=m}^{n=m+M-1}$ şi $C = (c_1, \dots, c_M)$ şirul finit $(a_n)_{n=p}^{n=p+M-1}$ de exemplu şirul *B* este transmis de către satelit, iar şirul *C* este o permutare ciclică a lui, generată de receptorul GPS. Se numeşte *corelaţia* şirurilor *B* şi *C*, notată Cor (*B*, *C*), numărul indicilor *i* pentru care $b_i = c_i$ minus numărul indicilor *i* pentru care $b_i \neq c_i$. Avem evident

$-M \leq$ Cor $(B, C) \leq M$. Spunem că şirurile sunt slab corelate, atunci când Cor (B, C) este apropiat de 0.

Teorema 1. Corelaţia a două şiruri este dată de

$$\mathrm{Cor}\,(B, C) = \sum_{i=1}^{M}(-1)^{b_i}(-1)^{c_i}.$$

DEMONSTRAŢIE : Se adună 1 la Cor (B, C) dacă $b_i = c_i$ şi se scade 1 dacă $b_i \neq c_i$. Dacă $b_i = c_i = 0$, atunci $(-1)^{b_i}(-1)^{c_i} = 1 \cdot 1 = 1$, iar dacă $b_i = c_i = 1$, atunci $(-1)^{b_i}(-1)^{c_i} = (-1)\cdot(-1) = 1$. Similar, dacă $b_i \neq c_i$, atunci unul dintre numerele $(-1)^{b_i}, (-1)^{c_i}$ este egal cu 1, celălalt este -1, deci $(-1)^{b_i}(-1)^{c_i} = 1 \cdot (-1) = -1$.

Orice registru cu deplasare liniară poate fi iniţializat astfel încât să genereze un şir slab corelat cu toate translaţiile lui, aşa cum rezultă din următoarea teoremă, a cărei demonstraţie o omitem

Teorema 2.[7] Există coeficienţii $q_0, \dots, q_{r-1} \in \{0, 1\}$ şi condiţiile iniţiale $a_0, \dots, a_{r-1} \in \{0, 1\}$ astfel încât şirul generat de registrul cu deplasare liniară corespunzător să aibă perioada de lungime $2^r - 1$. Dacă B şi C sunt două "ferestre" de lungime $M = 2^r - 1$ ale acestui şir, $B = (a_n)_{n=m}^{n=m+M-1}$, $C = (a_n)_{n=p}^{n=p+M-1}$, $p > m$ şi M nu divide $p - m$, atunci Cor $(B, C) = -1$.

Exemplu. Fie $r = 4$, $(q_0, q_1, q_2, q_3) = (1, 1, 0, 0)$ şi $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0, 1)$. Şirul generat are perioada 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1 de lungime $2^4 - 1 = 15$, care coincide cu toate translaţiile sale în exact 7 poziţii, deci corelaţia lui cu orice translaţie este egală cu -1.

Fie $\mathbb{F}_{2^r}$ un corp finit cu 2^r elemente (toate aceste corpuri sunt commutative şi sunt izomorfe între ele), $x \in \mathbb{F}_{2^r}$ un element primitiv peste $\mathbb{F}_2$ şi $T : \mathbb{F}_{2^r} \to \mathbb{F}_2$ funcţia "urmă", definită prin $T(b_{r-1}x^{r-1} + \dots + b_1 x + b_0) = b_{r-1}$, unde $b_i \in \mathbb{F}_2$, $0 \leq i \leq r-1$. Alegem un polinom primitiv P peste $\mathbb{F}_2$ (ireductibil şi cu o rădăcină x element primitiv al lui $\mathbb{F}_{2^r}$), $P = X^r + q_{r-1}X^{r-1} + \dots + q_1 X + q_0$, $b \in \mathbb{F}_{2^r}$ un element nenul şi construim registrul cu deplasare liniară având condiţiile iniţiale $a_i = T(x^i b)$, $0 \leq i \leq r-1$.

În exemplul precedent am ales $P = X^4 + X + 1$, polinom care este primitiv, $b = 1$, deci $a_0 = T(1) = 0$, $a_1 = T(x) = 0$, $a_2 = T(x^2) = 0$, $a_3 = T(x^3) = 1$.

Această construcţie funcţionează în general [7]. Dacă dorim să generăm alt şir pseudoaleator de aceeaşi lungime (fiecare satelit are un şir propriu), atunci schimbăm polinomul P. Corelaţiile acestor şiruri cu translaţiile lor pot fi calculate folosind teoria lui Galois, în practică se folosesc însă tabele cu valori antecalculate.

Notă. Această scurtă prezentare este realizată după [7], dezvoltări mai ample ale subiectului pot fi găsite în [2] [4] [5] , celelalte lucrări conţin alte aplicaţii interesante ale matematicii în probleme de transport, dar şi în alte domenii.

Bibliografie

[1] Bolt, Brian, *Mathematics meets Technology*, Cambridge University Press, Cambridge New York Port Chester Melbourne Sydney, 1991
[2] French, Gregory T., *Understanding the GPS*, GeoResearch, Inc., 1996
[3] Bossler, John D. (ed.), *Manual of Geospatial Science and Technology*, Taylor and Francis, Inc., London New York, 2002
[4] Beidleman, Scott W.(Lt. Col. USAF), *GPS versus Galileo, Balancing for Position in Space*, Air University Press, Maxwell Air Force Base, Alabama 36112 – 6615, 2006
[5] Kaplan, Elliott D., Hegarty, Christopher, J. (eds.) *Understanding GPS, Principles and Applications*, Artech House, Inc., Boston London, 2006
[6] Heydecker, Benjamin (ed.), Centre for Transport Studies, University College London, UK, *Mathematics in Transport* (Selected Proceedings of the 4th IMA International Conference on Mathematics in Transport), Elsevier Ltd., 2007
[7] Rousseau, Christiane, Saint-Aubin, Yvan, *Mathematics and Technology*, Springer, 2008
[8] Lidl, Rudolf, Niederreiter, Harald, *Finite Fields*, Cambridge University Press, 1997

5. TRIUNGHIURI MEDIANE

Prof. Stan Ilie[2]

Materialul face parte din seria **"Observaţii fără Ilustraţii şi fără Demonstraţii".**
Lipsa desenelor este concepută ca o invitaţie la imaginaţie sau la…desen.
Chiar simpla lecturare a secţiunii Notaţii ar putea conduce pe Cetitor la a deveni Descoperitor.
Liniile mijlocii determină un triunghi(triunghiul median) asemenea celui dat, de arie ¼ şi perimetru ½ din acesta.
Acesta a fost punctul de la care a pornit acest studiu. Rezultatele au venit(aproape) de la sine…

NOTAȚII
Fie triunghiul ΔABC cu AB=c, AC=b, BC=a.
A_1, B_1 și C_1 mijloacele lui BC, AC respectiv AB.
A_2, B_2 și C_2 mijloacele lui B_1C_1, A_1C_1 respectiv A_1B_1 samd
A_n, B_n și C_n mijloacele lui $B_{n-1}C_{n-1}$, $A_{n-1}C_{n-1}$ respectiv $A_{n-1}B_{n-1}$
$t_A=\Delta AB_1C_1=\Delta A_0B_1C_1$, $t_B=\Delta A_1BC_1=\Delta A_1B_0C_1$, $t_C=\Delta A_1B_1C=\Delta A_1B_1C_0$
$t_n=\Delta A_nB_nC_n$, $\Delta A_0B_0C_0=\Delta ABC=t_0$
O_n centrul cercului circumscris triunghiului t_n.
H_n ortocentrul triunghiului t_n.
I_n centrul cercului înscris în triunghiul t_n.
G_A, G_B, G_C centre de greutate în triunghiurile t_A, t_B respectiv t_C
O_A, O_B, O_C centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor t_A, t_B respectiv t_C
H_A, H_B, H_C ortocentre în triunghiurile t_A, t_B respectiv t_C
I_A, I_B, I_C centrele cercurilor înscrise în triunghiurile t_A, t_B respectiv t_C

PARALELISM
- Triunghiurile t_n au laturile respectiv paralele.

LATURI, ARII și PERIMETRE
- Laturile lui t_n sunt $(a/2^n, b/2^n , c/2^n)$
- $S_{tn}=S_{ABC}/4^n$; $S_{tn}=4^{m-n} S_{tm}$
- $P_{tn}=P_{ABC}/2^n$; $P_{tn}=2^{m-n} P_{tm}$
- $(4^n-1)/3$ triunghiuri mediane după n pași
- $(2^n-1)/2^{n-1}$ lungimea totală a figurii realizate de triunghiurile t_n după n pași

ASEMĂNĂRI
- Triunghiurile t_n sunt asemenea.
- $\Delta ABC \sim \Delta G_AG_BG_C \sim \Delta H_AH_BH_C \sim \Delta I_AI_BI_C \sim \Delta O_AO_BO_C$

ECHIVALENȚĂ
- Trapezele ABA_1B_1, BCB_1C_1 și ACA_1C_1 sunt echivalente și au aria ¾ S.
- Paralelogramele $AB_1A_1C_1$, $BA_1B_1C_1$ și $CB_1C_1A_1$ sunt echivalente și au aria 1/2 S.
- Trapezele $A_nB_nA_{n+1}B_{n+1}$, $B_nC_nB_{n+1}C_{n+1}$ și $A_nC_nA_{n+1}C_{n+1}$ sunt echivalente și au aria $(3/4)^{n+1}$ S.

[2] stan_ilie@yahoo.com

CONGRUENȚĂ

- Liniile mijlocii şi laturile ce le determină, formează 3 triunghiuri congruente cu triunghiul median.
- Încă 3 triunghiuri congruente se obţin unind mijloacele segmentelor congruente.
- G-urile, H-urile, I-urile respectiv O-urile corespunzătoare triunghiurilor t_A, t_B respectiv t_C determină alte 4 triunghiuri congruente cu triunghiul median t_1.

COINCIDENȚĂ

- Medianele triunghiului ΔABC sunt mediane şi în t_n.
- Medianele lui t_n sunt mediane şi în t_{n+1}.
- Toate triunghiurile t_n au acelaşi centru de greutate.
- Triunghiurile $\Delta G_AG_BG_C$, $\Delta A_1B_1C_1$ şi ΔABC au acelaşi centru de greutate.

CORESPONDENȚĂ

Mediatoarele lui t_n sunt înălţimi în t_{n+1}.

CONVERGENȚĂ

- Şirul triunghiurilor mediane t_n este convergent către G.
- Şirul $\{O_n\}$ converge către G.
- Şirul $\{H_n\}$ converge către G.
- Şirul $\{I_n\}$ converge către G.

COLINIARITATE

- Punctele O_n sunt coliniare. $OO^1=2O^1O^2=4O^2O^3=\ldots=2^nO_nO_{n+1}$
- Punctele H_n sunt coliniare.
- Punctele I_n sunt coliniare.
- Punctele G , On , H_n se găsesc pe dreapta lui Euler.

FRACTALI

- Se trasează un triunghi, triunghiul său median şi apoi triunghiurile mediane pentru t_A, t_B şi t_C. Procedeul se repetă la nesfârşit(Triunghiul lui Sierpinski).
- Pornind de la un triunghi plin se îndepărtează triunghiul median. Procedeul se repetă la nesfârşit(Garnitura lui Sierpinski).

TRANSFORMĂRI GEOMETRICE

- t_0, t_2, t_4,… sunt omotetii de centru G
- t_0, t_1, t_2, t_3, t_4,…… sunt omotetii de centru G
- Triunghiul lui Sierpinski se poate construi printr-o succesiune(de succes!) de omotetii de centru G şi raport ½ aplicate triunghiului iniţial şi tuturor triunghiurilor nemediane apărute.

TETRAEDRU

- Triunghiurile congruente ΔAB_1C_1, ΔA_1BC_1, ΔA_1B_1C şi $\Delta A_1B_1C_1$ sunt feţele unui tetraedru $VA_1B_1C_1$ dacă triunghiul ABC este ascuţitunghic.
- Planele paralele cu baza la distanţele $h/4^n$ de vârf, intersectează tetraedrul după t_1, t_3, t_5,…

Desigur, după “Cuvinte fără Demonstraţii” ar trebui să urmeze “Demonstraţii fără Cuvinte”!

6. Aplicaţiile trigonometriei în geometria patrulaterului

Antohe Florin

În patrulaterul convex ABCD notăm lungimile laturilor AB=a, BC=b, CD=c, DA=d, lungimile diagonalelor AC=e, BD=f şi măsurile unghiurilor prin A, B, C, D. Se ştie că A+B+C+D=360^0.

Relaţii între măsurile unghiurilor unui patrulater:

I. În orice patrulater convex au loc relaţiile:

1) $\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{C+D}{2}=0$, $\sin\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C+D}{2}$

2) $\cos\frac{A-B+C-D}{2}=-\cos(B+D)=-\cos(A+C)$

3) $\cos\frac{A+B+2C}{2}=-\cos\frac{C-D}{2}$

4) $\cos\frac{A-B+C-D}{4}=\sin\frac{A+C}{2}=\sin\frac{B+D}{2}$,

$\sin\frac{A-B-C+D}{4}=\cos\frac{B+C}{2}$

Demonstraţie:

1) Din A+B+C+D=360^0, rezultă $\frac{A+B}{2}=180^0-\frac{C+D}{2}$.

Utilizând formulele trigonometrice cos(180^0-x)=-cos x, sin(180^0-x)=sin x, obţinem:

$\cos\frac{A+B}{2}=\cos(180^0-\frac{C+D}{2})=-\cos\frac{C+D}{2}$, de unde rezultă:

$\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{C+D}{2}=0$

$\sin\frac{A+B}{2}=\sin(180^0-\frac{C+D}{2})=\sin\frac{C+D}{2}$

2) $\frac{1}{2}(A-B+C-D)=\frac{1}{2}[(A+B+C+D)-2(B+D)]=\frac{1}{2}[360^0-2(B+D)]=180^0-(B+D)$

De aici rezultă că: $\cos\frac{A-B+C-D}{2}=-\cos(B+D)$

Ţinând cont de faptul că 180^0-(B+D)=(A+C)-180^0 rezultă $-\cos(B+D)=-\cos(A+C)$

3) $\cos\frac{A+B+2C}{2}=\cos\frac{(360^0-D)+C}{2}=\cos(180^0-\frac{D-C}{2})=-\cos\frac{C-D}{2}$

4) $\cos\frac{A-B+C-D}{4}=\cos\frac{360^0-2(B+D)}{4}=\cos(90^0-\frac{B+D}{2})=\sin\frac{B+D}{2}=\sin\frac{A+C}{2}$

$\sin\frac{A-B-C+D}{4}=\sin\frac{360^0-2(B+C)}{4}=\sin(90^0-\frac{B+C}{2})=\cos\frac{B+C}{2}$

Aplicaţii :

- Să se arate că în orice patrulater convex au loc relaţiile :

1) $\sin A+\sin B+\sin C+\sin D=4\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{B+C}{2}\cdot\sin\frac{C+A}{2}$

2) $\cos A+\cos B+\cos C+\cos D=4\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{B+C}{2}\cdot\cos\frac{C+A}{2}$

3) $\sin A-\sin B+\sin C-\sin D=4\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{B+C}{2}\cdot\sin\frac{C+A}{2}$

4) $\cos A-\cos B+\cos C-\cos D=4\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{B+C}{2}\cdot\cos\frac{C+A}{2}$

5) $\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{D}{2}=\sin\frac{A+C}{2}\cdot\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{D}{2}$

6) $tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}+tg\frac{D}{2}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A+C}{2}\cdot\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{D}{2}}=$

$=tg\frac{A}{2}\cdot tg\frac{B}{2}\cdot tg\frac{C}{2}+tg\frac{B}{2}\cdot tg\frac{C}{2}\cdot tg\frac{D}{2}+tg\frac{C}{2}\cdot tg\frac{D}{2}\cdot tg\frac{A}{2}+tg\frac{D}{2}\cdot tg\frac{A}{2}\cdot tg\frac{B}{2}$

7) $ctg\frac{A}{2}+ctg\frac{B}{2}+ctg\frac{C}{2}+ctg\frac{D}{2}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A+C}{2}\cdot\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{D}{2}}$

Rezolvare :

1) Transformăm în produse şi aplicăm relaţiile 1 şi 4 demonstrate anterior. Notăm membrul stâng prin M_s.

$\mathrm{M}_s=2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C+D}{2}\cdot\cos\frac{C-D}{2}=2\sin\frac{A+B}{2}(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{C-D}{2})=$

$=4\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B+C-D}{4}\cdot\cos\frac{A-B-C+D}{4}=4\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{B+C}{2}\cdot\sin\frac{C+A}{2}$

2) Se demonstrează analog cu 1)

3) Transformăm în produse şi aplicăm relaţiile 1 şi 4 de mai sus.

$$\mathrm{M}_s=\begin{aligned}&2\sin\frac{A-B}{2}\cdot\cos\frac{A+B}{2}+2\sin\frac{C-D}{2}\cdot\cos\frac{C+D}{2}=2\cos\frac{A+B}{2}(\sin\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C-D}{2})=\\&=4\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B-C+D}{4}\cdot\cos\frac{A-B+C-D}{4}=4\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{B+C}{2}\cdot\sin\frac{A+C}{2}\end{aligned}$$

4) Analog cu 3.

5) Se notează $\frac{A}{2}=x, \frac{B}{2}=y, \frac{C}{2}=z, \frac{D}{2}=t$. Evident x+y+z+t=$180^0$

Va trebui să demonstrăm :

$\cos x\cdot\cos y+\cos z\cdot\cos t=\sin(x+z)\cdot\sin(y+z)=\sin x\cdot\sin y+\sin z\cdot\sin t$

Notăm cele trei expresii, în ordinea în care apar, prin E,F,G.

E=G $\Leftrightarrow \cos(x+y)=-\cos(z+t)\Leftrightarrow \cos(180^0-(z+t))=-\cos(z+t)$

$2E=[\cos(x+y)+\cos(x-y)+\cos(z+t)+\cos(z-t)]=\cos(x-y)+\cos(z-t)$

$2F=\cos(x-y)-\cos(x+y+2z)=\cos(x-y)+\cos(z-t)=2E$, deoarece:

cos(x+y+2z)=cos(180^0+z-t)=-cos(z-t).

Analog se demonstrează (sub aceeaşi condiţie x+y+z+t=180^0) :

$\cos t\cdot\cos x+\cos y\cdot\cos z=\sin(t+y)\cdot\sin(x+y)=\sin t\cdot\sin x+\sin y\cdot\sin z,$

$\cos x\cdot\cos z+\cos y\cdot\cos t=\sin(x+y)\cdot\sin(z+y)=\sin x\cdot\sin z+\sin y\cdot\sin t$

6. Notăm expresiile, în ordinea în care apar , prin , E, F, G.

Pentru E=F se aplică formula $tgx+tgy=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}$ şi punctul 5) iar pentru E=G se observă că $\frac{A+B+C}{2}=180^0-\frac{D}{2}$ şi se aplică formula :

$$tg(x+y+z)=\frac{tgx+tgy+tgz-tgx\cdot tgy\cdot tgz}{1-tgx\cdot tgy-tgy\cdot tgz-tgz\cdot tgx}.$$

7) Se aplică formula $ctgx+ctgy=\frac{\sin(x+y)}{\sin x\cdot\sin y}$ şi punctul 5).

- Fie x,y$\in(0;90^0)$. Să se arate că :

a) $tg\frac{x+y}{2}\le\frac{tgx+tgy}{2}$, egalitatea având loc dacă şi numai dacă x=y.

b) Să se arate că în orice patrulater convex :

$tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}+tg\frac{D}{2}\ge 4$, egalitatea având loc dacă şi numai dacă patrulaterul este dreptunghi.

Soluţie :

a) Notăm E=$tg\frac{x+y}{2}-\frac{tgx+tgy}{2}$. După un calcul simplu obţinem :

$$E=\sin\frac{x+y}{2}\cdot\frac{\cos(x-y)-1}{2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos x\cdot\cos y}$$

Deoarece x,y$\in(0;90^0)$.rezultă că factorii expresiei E sunt strict pozitivi, cu excepţia factorului cos(x-y)-1, care este negativ sau nul. Deci E≤ 0.

E=0$\Leftrightarrow\cos(x-y)-1=0\Leftrightarrow x-y=0\Leftrightarrow x=y$.

b) Dacă α este măsura unui unghi al unui patrulater convex, atunci $\alpha \in (0;180^0)$, deci $\frac{\alpha}{2} \in (0;90^0)$. În acest caz putem aplica punctul a) pentru x=$\frac{A}{2}$, y=$\frac{B}{2}$ şi apoi pentru x=$\frac{C}{2}$ şi y=$\frac{D}{2}$. Adunând cele două relaţii obţinem :

$$tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}+tg\frac{D}{2} \geq 2tg\frac{A+B}{4}+2tg\frac{C+D}{4} \ .$$

Aplicăm încă o dată punctul a) pentru $x=\frac{A+B}{4}$, $y=\frac{C+D}{4}$.

$$2tg\frac{A+B}{4}+2tg\frac{C+D}{4} \geq 4tg\frac{A+B+C+D}{8}=4tg\frac{360^0}{8}=4tg45^0=4 .$$

În final să demonstrăm că egalitatea se realizează dacă şi numai dacă A=B=C=D.

De la punctul a) ştim că $tgx+tgy=2tg\frac{x+y}{2} \Rightarrow x=y.$

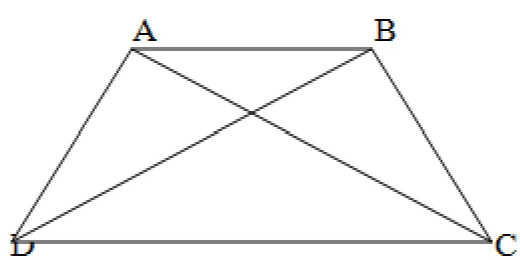
Din egalitatea $tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}+tg\frac{D}{2}=4$ rezultă :

$4 \geq 2tg\frac{A+B}{4}+2tg\frac{C+D}{4} \geq 4$, deci $tg\frac{A+B}{4}+tg\frac{C+D}{4}=2=2tg\left[\left(\frac{A+B}{4}\right)+\left(\frac{C+D}{4}\right)/2\right]$,

de unde A+B=C+D. Analog obţinem A+C=B+D şi A+D=B+C.
Din ultimile trei relaţii rezultă A=B=C=D.

- Diagonalele unui patrulater ABCD sunt perpendiculare şi congruente.

Să se determine măsurile unghiurilor patrulaterului , dacă a=1, b=$\sqrt{2}$ şi c=$\sqrt{3}$.
Soluţie :
Deoarece patrulaterul are diagonalele perpendiculare, avem : $a^2+c^2=b^2+d^2$.
Deci $1+3=2+d^2 \Rightarrow d=\sqrt{2}$.
Patrulaterul care respectă aceste condiţii este trapezul isoscel ABCD din figură :



Punctul de intersecţie al diagonalelor îl notăm cu I.
Deci măsura unghiului CAB este egală cu măsura unghiului DBA=45^0.
IA=IB=$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

În triunghiul dreptunghic BIC , BC=$\sqrt{2}$, IB=$\frac{\sqrt{2}}{2}$, deci IB=$\frac{BC}{2}$.

Atunci măsura unghiului ACB=30^0 şi prin urmare măsura unghiului DBC este de 60^0.
Rezultă măsura unghiului ABC este de 105^0 şi măsura unghiului BCD este de 75^0.

Teoremele generalizate ale lui Ptolemeu

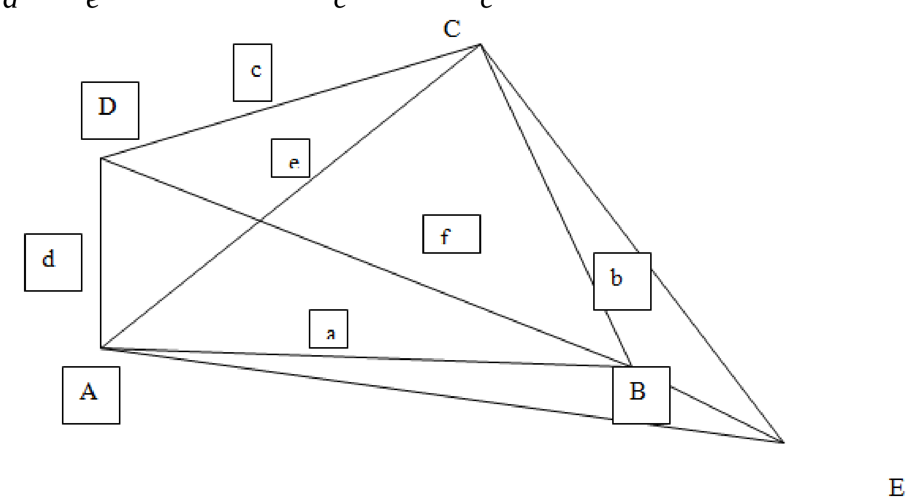
Fie ABCD un patrulater convex . Notăm m(<CAD)=α , m(<DBC)=β, m(<ACB)=γ şi m(<ADB)=δ .Au loc relaţiile :

1) $e^2 f^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + 2\cdot abcd\cdot\cos\frac{A-B+C-D}{2}$

2) $\frac{e^2(b^2+d^2-2bd\cdot\cos(\gamma+\alpha))}{f^2(b^2+d^2-2bd\cdot\cos(\beta+\gamma))} = \frac{a^2d^2+b^2c^2-2abcd\cdot\cos(B+D)}{a^2b^2+c^2d^2-2abcd\cdot\cos(A+C)}$

Demonstraţie :

Vom demonstra doar prima relaţie din cele două.
Construim punctul E, în semiplanul opus cu D faţă de BC, astfel încât triunghiurile DAC şi BEC să fie asemenea cu <CBE≡<CDA şi <BCE≡<ACD.
Rezultă $\frac{b}{c}=\frac{BE}{d}=\frac{CE}{e}$ de unde $BE=\frac{bd}{c}$, $CE=\frac{be}{c}$.



În triunghiurile CDB şi CAE avem <ACE≡<DCB şi $\frac{CE}{e}=\frac{b}{c}$, deci triunghiurile sunt asemenea.

Rezultă $\frac{e}{c}=\frac{AE}{f}$ deci $AE=\frac{ef}{c}$.

În ΔABE , unde m(<ABE)=2π -(B+D) (sau B+D) , aplicăm teorema cosinusului pentru AE:

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2\cdot AB\cdot BE\cdot\cos(B+D) \Leftrightarrow \frac{e^2f^2}{c^2} = a^2 + \frac{b^2d^2}{c^2} - 2\cdot\frac{abd}{c}\cdot\cos(B+D) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow e^2 f^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2\cdot abcd\cdot\cos(B+D)$.

Conform relaţiilor demonstrate anterior $-\cos(B+D) = \cos\dfrac{A-B+C-D}{2} = -\cos(A+C)$.

- În orice patrulater convex ABCD au loc relaţiile:

1) $|ac-bd| < ef \le ac+bd$.

2) $\dfrac{e}{f} < \dfrac{ad+bc}{ab+cd}$ dacă A+C>180^0 sau $\dfrac{e}{f} > \dfrac{ad+bc}{ab+cd}$ dacă A+C<180^0.

Vom folosi relaţia anterior demonstrată : $e^2 f^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + 2\cdot abcd\cdot\cos\dfrac{A-B+C-D}{2}$,

pe care o scriem convenabil astfel :

$e^2 f^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2\cdot abcd\cdot\cos(B+D)$.

Avem $-1 \le \cos(B+D) < 1$. Nu putem avea cos(B+D)=1, decât în cazul B=D=0 care este imposibil. Egalitatea cos(B+D)=-1 are loc dacă B+D=180^0, deci în cazul patrulaterului inscriptibil. Rezultă $-1 < -\cos(B+D) \le 1$ deci:

$$a^2c^2 + b^2d^2 - 2\cdot abcd < e^2 f^2 \le a^2c^2 + b^2d^2 + 2\cdot abcd \text{ sau}$$

$$(ac-bd)^2 < e^2 f^2 \le (ac+bd)^2,$$

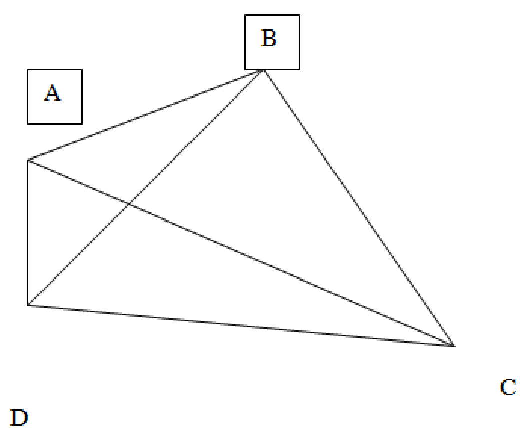
de unde rezultă inegalităţile din enunţ.

Măsura unghiului format de diagonale

În patrulaterul ABCD , unde AC$\cap$BD={I}, măsura ϕ a unghiului AIB verifică relaţia:

$$\cos\phi = \frac{b^2 + d^2 - a^2 - c^2}{2ef}$$

Demonstraţie:



I este punctul de intersecţie al diagonalelor AC şi BD.

Notăm AB=a ; BC=b ; CD= c ; AD=d ; IA= x ; IB=y ; IC=z ; ID=t

În cazul unui patrulater convex ca cel din figura de mai sus , dacă m(<AIB)=ϕ , rezultă m(<BIC)=$\pi - \phi$.

Aplicând teorema cosinusului în cele 4 triunghiuri formate obţinem :

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos\phi$$
$$b^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cdot \cos(\pi - \phi)$$
$$c^2 = z^2 + t^2 - 2zt \cdot \cos\phi$$
$$d^2 = t^2 + x^2 - 2tx \cdot \cos(\pi - \phi)$$

, de unde :

$$a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2(xy + zt) \cdot \cos\phi$$
$$b^2 + d^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(yz + xt) \cdot \cos\phi$$

Scăzând ultimile două relaţii şi ţinând cont că :

$xy + yz + zt + tx = (x + z)(y + t) = ef$, rezultă formula anunţată.

Consecinţe :

a) În orice patrulater $0 \le \left| b^2 + d^2 - a^2 - c^2 \right| < 2ef$.

b) Patrulaterul ABCD este ortodiagonal dacă şi numai dacă $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

c) În particular , măsura ϕ a unghiului dintre diagonale este dată de relaţia:

$\cos\phi = \dfrac{b^2 + d^2 - a^2 - c^2}{2(ac + bd)}$, dacă ABCD este inscriptibil.

$\cos\phi = \dfrac{ac - bd}{ef}$, dacă ABCD este circumscriptibil.

$\cos\phi = \dfrac{e^2 + f^2 - (a + c)^2}{2ef}$, dacă ABCD este trapez cu bazele AB=a şi CD=c.

- Fie paralelogramul ABCD cu AB=a , BC=b , a$\ge$b şi ϕ măsura unghiului ascuţit sau drept format de diagonale.

Să se arate că :

a) $a^2 - b^2 < ef$

b) $\cos\phi \ge \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$, egalitatea având loc dacă şi numai dacă ABCD este romb sau dreptunghi.

Soluţie :

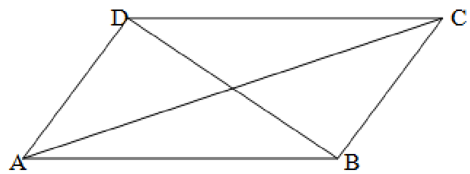
a) $\cos\phi = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2ef} = \dfrac{a^2 - b^2}{ef} < 1$

b) $\cos\phi = \dfrac{a^2 - b^2}{ef} \ge \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$, deoarece $ef \le a^2 + b^2$.

Într-adevăr cu teorema cosinusului în ΔAIB şi ΔIBC, $a^2 = \dfrac{e^2 + f^2}{4} + \dfrac{1}{2} ef \cos\phi$,

$b^2 = \frac{e^2 + f^2}{4} - \frac{1}{2} ef \cos\phi$.

Avem egalitate dacă şi numai dacă : a=b (adică ABCD e romb) sau a>b şi e=f (adică ABCD) e dreptunghi.



Bibliografie :

[1] D. Mihalca , I. Chiţescu , Marcel Chiriţă – Geometria patrulaterului, Ed Teora 1998.

7. INTEGRALA DEFINITĂ A UNOR FUNCŢII TRIGONOMETRICE

Prof. Balogh Erika
Colegiul Tehnic „C.D.Neniţescu” Baia Mare

Fie $f:[0;1]\to R$ o funcţie continuă.Atunci

I. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$ şi **II.** $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

Soluţie

I. Cu substituţia $x=\frac{\pi}{2}-t$ obţinem relaţia $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt$

ştiind că: $\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$

Prin urmare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$.

II. Cu substituţia $x=\pi-t$ obţinem relaţia

$I=\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = -\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin t)dt = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt - t\int_0^{\pi} f(\sin t)dt$ ştiind că: $\sin(\pi-t)=\sin t$

Prin urmare $2I=\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt$ rezultă: $I=\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

Funcţia fiind continuă rezultă: $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

Aplicând sustituţia $x=\pi-t$ la a doua integrala

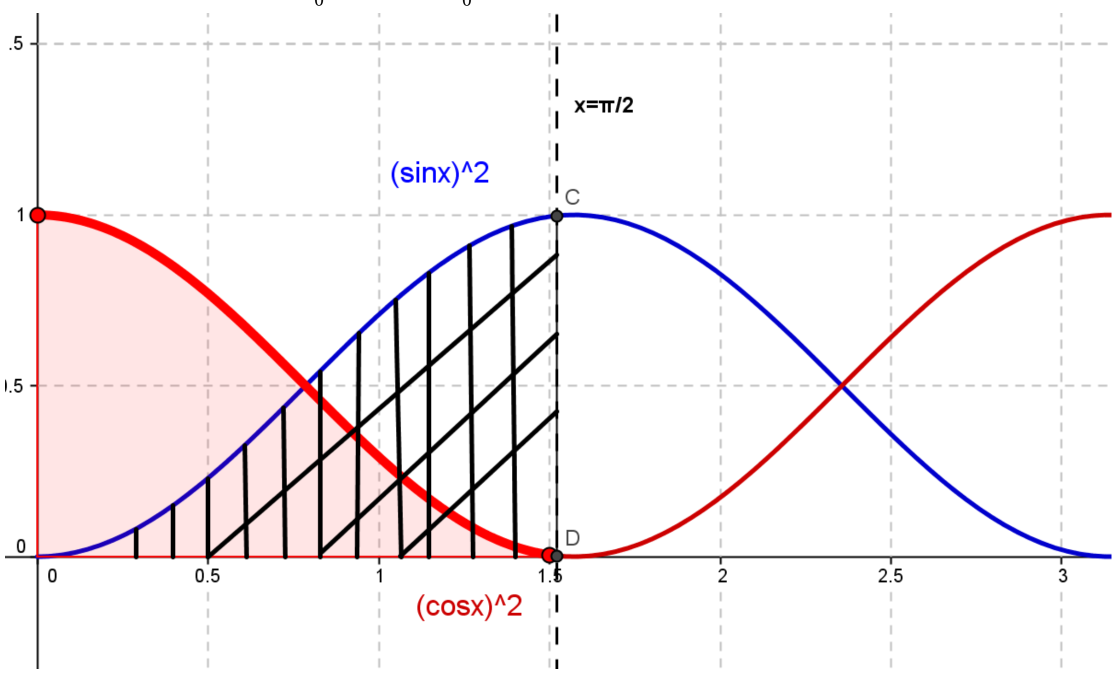
rezultă în final: $I=\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

I.Aplicaţii:

1) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=\frac{\pi}{4}$ pentru că $\begin{cases} I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx \\ I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx \end{cases}$ adunând cele două relaţii şi

folosind formula de bază din trigonometrie : $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ rezultă $2I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2}$

de unde obţinem $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=\frac{\pi}{4}$



2) $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ respectiv $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$ sunt egale, adunând cele două relaţii

obţinem $I_2=I_3=\frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow$ $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^n x}{\cos^n x+\sin^n x}dx=\frac{\pi}{4}, n\in N^*$

3) $I_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x dx=\frac{2}{3}$

$$2I_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)\left(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin^2 x\cos x dx+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\cos^2 x(-\sin x)dx=$$

$$=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{3}\sin^3 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{3}\cos^3 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\qquad\Rightarrow\qquad I_4=\frac{2}{3}$$

4) $I_5=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x dx=\frac{5\pi}{32}$

$$2I_5=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x\right)dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-3\sin^2 x\cos^2 x\right]dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\frac{3}{4}(2\sin x\cos x)^2\right]dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx-\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x dx$$

notând $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x dx$ obţinem $2J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 2x+\cos^2 2x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow J=\frac{\pi}{4}$

de unde rezultă $2I_5=\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{16}=\frac{5\pi}{16}$ şi în final $I_5=\frac{5\pi}{32}$

5) $I_6=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\cos x+\sin x}dx=\frac{\pi-1}{4}$

$2I_6=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx$ simplificând fracţia cu $(\sin x+\cos x)$ rezultă:

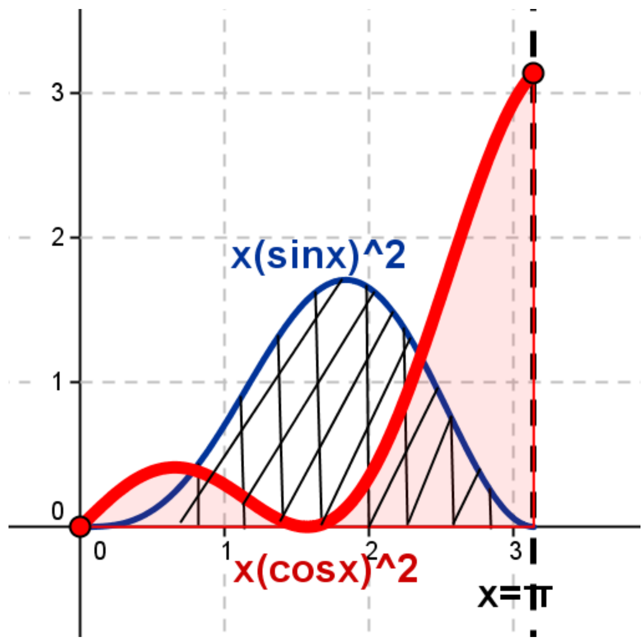
$$2I_6=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x dx=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{\pi-1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad I_6 = \frac{\pi - 1}{4}$$

II.Aplicaţii:

Folosind relaţia: $\int_0^{\pi} xf(\sin x) = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$ de la punctul **II.** obţinem:

1) $I_7 = \int_0^{\pi} x\sin^2 x dx = \pi \cdot I_1 = \frac{\pi^2}{4}$ respetiv $I_8 = \int_0^{\pi} x\cos^2 x dx = \frac{\pi^2}{4}$



2) $I_9 = \int_0^{\pi} \frac{x\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$ respetiv $I_{10} = \int_0^{\pi} \frac{x\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$

$I_9 = \int_0^{\pi} \frac{x\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \pi \cdot I_2 = \frac{\pi^2}{4}$ respectiv:

$I_{10} = \int_0^{\pi} \frac{x\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$

În caz general obţinem:

$I_{11} = \int_0^{\pi} \frac{x\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \frac{\pi^2}{4}$ respetiv $I_{12} = \int_0^{\pi} \frac{x\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx = \frac{\pi^2}{4}$, $n \in N$ dacă n - număr par

3) $I_{12} = \int_0^{\pi} x\sin^3 x dx = \frac{2\pi}{3}$

$$I_{12}=\int_0^{\pi} x\sin^3 x dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x dx=\pi\cdot I_4=\frac{2\pi}{3}$$

4) $I_{14}=\int_0^{\pi} x\sin^6 x dx=\frac{5\pi^2}{32}$ respetiv $I_{15}=\int_0^{\pi} x\cos^6 x dx=\frac{5\pi^2}{32}$

$I_{14}=\int_0^{\pi} x\sin^6 x dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x dx=\pi\cdot I_5=\frac{5\pi^2}{32}$ respectiv: $I_{15}=\int_0^{\pi} x\cos^6 x dx=\frac{5\pi^2}{32}$

5) $I_{16}=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi^2}{4}$

$$I_{16}=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(-\sin x)}{1+\cos^2 x}dx=-\pi\cdot arctg(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\pi\cdot arctgo+\pi\cdot arctg1=$$

$$=0+\pi\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{4}\quad\Rightarrow\quad I_{16}=\frac{\pi^2}{4}$$

Sau

$$I_{16}=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\pi}\frac{(-\sin x)}{1+\cos^2 x}=-\frac{\pi}{2}arctg(\cos x)\Big|_0^{\pi}=-\frac{\pi}{2}arctg(-1)+\frac{\pi}{2}arctg1=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{4}$$

Bibliografie:
1.Gh.Şireţchi, Calculul diferenţial şi integral, Editura Ştiinţifică şi Enciplopedică, Bucureşti, 1985
2.B.P.Gyemidovici, Culegere de probleme de analiza matematica, 1987

8. Probleme de antrenament pentru liceu (cls. a X a)

Dobre Andrei Octavian

1. Fie $E(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y^2}}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{\left(x^2y^3\right)^3}}{\sqrt[4]{x^3y}}\cdot\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{y}$.

   Atunci $\sqrt[3]{E(81,27)}$ este:

   a) 1; b) 81; c) 84; d) 121

2. Rezultatul calculului $\left(\dfrac{2016}{2017}\right)^{\ln 2015}\cdot\left(\dfrac{2017}{2015}\right)^{\ln 2016}\cdot\left(\dfrac{2015}{2016}\right)^{\ln 2017}$ este:

   a) 0; b) 1; c) 2016; d) 2017

3. Rezultatul calculului $\log_{2016}2017\cdot\log_{2018}2015-\log_{2016}2015\cdot\log_{2018}2017$ este:

   a) $\log_{2016}2018$; $b)0$; $c)1$; $d)2017$

4. Aveți la dispoziție cifrele 0, 1, 2, 3. Câte numere naturale puteți forma cu aceste cifre astfel că în orice număr fiecare cifră se găsește cel mult o dată.

   a) 18; b) 36; c) 45; d) 49

5. Folosind câte o singură dată fiecare din cifrele 0,1,2,3, ... ,9, se scriu toate numerele $\overline{a_1a_2...a_{10}}$ care au cifre pare pe poziții impare și cifre impare pe pozițiile pare. Câte astfel de numere se pot scrie?

   a) 11520; b) 12016; c) 12620; d) 12017

6. Dintr-un colectiv format din doi matematicieni si zece economiști trebuie aleasă o comisie de opt persoane. În câte moduri se poate alcătui această comisie dacă ea include cel puțin un matematician.

   a) 210 ; b) 240 ; c) 420; d) 450

7. Un depozit bancar beneficiază de dobândă la vedere de 2% anual. Pentru ce perioadă trebuie lăsată la bancă suma de 2400 de lei, pentru a obține o dobândă de cel puțin 50 lei.

   $a)1an$; $b)13\,luni$; $c)14\,luni$; $d)15\,luni$

9. Other solutions for Quickies problems from Math Journal Sclipirea Minţii

By Daniel Văcaru, Piteşti, Romania

Q41. Proposed by Mihàly Bencze, Bucharest, Romania

If $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, then prove that $\frac{8}{\sin^2 2x}+\frac{3}{\sin^4 x+\cos^4 x}\geq 14$.

Solution (proposed by Daniel Văcaru, Pitești, Romania).

One has, equivaletly,

$$\frac{8}{4\sin^2 x\cos^2 x}+\frac{3}{\sin^4 x+\cos^2 x}\geq 14\Leftrightarrow\frac{2}{\sin^2 x\cos^2 x}+\frac{3}{\sin^4 x+\cos^4 x}\geq 14\Leftrightarrow\frac{2\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x\cos^2 x}+\frac{3}{\sin^4 x+\cos^4 x}\geq 14\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{2}{\sin^2 x}+\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{3}{\sin^4 x+\cos^4 x}\geq 14$$

One note $\sin^2 x\overset{not}{=}t$. One may write $\frac{2}{\sin^2 x}+\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{3}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ as $\frac{2}{t}+\frac{2}{1-t}+\frac{3}{2t^2-2t+1}=f(t), f:(0,1)\to\mathbb{R}$.

Then

$$f'(t)=-\left(\frac{2}{t^2}\right)+\frac{2}{(1-t)^2}-3\cdot\left(\frac{(4t-2)}{(2t^2-2t+1)^2}\right)=2\cdot\left(\frac{t^2-(1-t)^2}{t^2\cdot(1-t)^2}\right)-3\cdot\left(\frac{(4t-2)}{(2t^2-2t+1)^2}\right)=(4t-2)\cdot\left(\frac{1}{t^2\cdot(1-t)^2}-\frac{3}{(2t^2-2t+1)^2}\right)=$$
$$=(4t-2)\cdot\left(\frac{(2t^2-2t+1)^2-3\cdot t^2\cdot(1-t)^2}{t^2\cdot(1-t)^2\cdot(2t^2-2t+1)^2}\right)=(4t-2)\cdot\left(\frac{[(2t^2-2t+1)-\sqrt{3}\cdot t\cdot(1-t)]\cdot[(2t^2-2t+1)+\sqrt{3}\cdot t\cdot(1-t)]}{t^2\cdot(1-t)^2\cdot(2t^2-2t+1)^2}\right)=$$
$$(4t-2)\cdot\left(\frac{[(2+\sqrt{3})t^2-(2+\sqrt{3})t+1]\cdot[(2-\sqrt{3})t^2-(2-\sqrt{3})t+1]}{t^2\cdot(1-t)^2\cdot(2t^2-2t+1)^2}\right).$$

Let's calculate Δ for $(2+3)t^2-(2+\sqrt{3})t+1$ which is

$(2+\sqrt{3})^2-4\cdot(2+\sqrt{3})=(2+\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3}-4)=(2+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}-2)=(\sqrt{3})^2-2^2=-1<0$,

and this proves that $(2+3)t^2-(2+\sqrt{3})t+1>0,(\forall)t\in(0,1)$.

In the same manner, for $(2-\sqrt{3})t^2-(2-\sqrt{3})t+1$ one obtain

$\Delta=(2-\sqrt{3})^2-4\cdot(2-\sqrt{3})=(2-\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3}-4)=(2-\sqrt{3})(-2-\sqrt{3})=-1$ and this shows that

$(2-\sqrt{3})t^2-(2-\sqrt{3})t+1>0,(\forall)t\in(0,1)$. This shows that the sign for derivative $f'(t)$ is given by the sign for $4t-2$. That proves that minimum is attained for $t=\frac{1}{2}$ and this minimum is $\frac{2}{\frac{1}{2}}+\frac{2}{1-\frac{1}{2}}+\frac{3}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+1}=4+4+3\cdot 2=14$,

as desired. This concludes our solution.

Q43. Proposed by D.M.Bătinețu – Giurgiu, Bucharest, Romania
If ABC is a triangle with area S and usual notations, then prove that

$$\sqrt{(a^4+1)(b^4+1)}+\sqrt{(b^4+1)(c^4+1)}+\sqrt{(c^4+1)(a^4+1)}\geq 8\sqrt{3}S.$$

Solution (proposed by **Daniel Văcaru, Pitești, Romania**)
By AM – GM, one has

$$(a^4+1)(b^4+1)=a^4b^4+a^4+b^4+1\geq 4\sqrt[4]{(a^4b^4)\cdot a^4\cdot b^4\cdot 1}=4a^2b^2\Rightarrow\sqrt{(a^4+1)(b^4+1)}\geq\sqrt{4a^2b^2}=2ab$$

On the other hand, one know

$$2S=ab\sin C\Rightarrow 2\text{ab}=\frac{4S}{\sin C}\quad .$$

One obtain

$$\sqrt{(a^4+1)(b^4+1)}+\sqrt{(b^4+1)(c^4+1)}+\sqrt{(c^4+1)(a^4+1)}\geq 4S\cdot\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)(1)\quad .$$

But

$$(\sin A+\sin B+\sin C)\cdot\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)\geq 9\Rightarrow\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\geq\frac{9}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

About $\sin:[0,\pi]\to[0,1]$ one know that is concave, for example,

$(\sin x)''=-\sin x<0$; it follows $0<\sin A+\sin B+\sin C\leq 3\sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

One obtain $\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\geq\frac{9}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}=\frac{18}{3\sqrt{3}}=2\sqrt{3}(2)$

From (1) and (2) one obtain the required relation.

Q44. Proposed by D.M.Bătinețu – Giurgiu, Bucharest, Romania.

Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be a continuous and odd function and $g:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ be a continuous function such that $g\left(\frac{1}{x}\right)=-g(x), \forall x\in\mathbb{R}_+^*$.

Compute $\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\left(\frac{1}{(1+x^2)\cdot(1+a^{((f\circ g)(x))})}\right)dx$, where $a>1$.

Solution (proposed by **Daniel Văcaru, Pitești, Romania**). With substitution $x=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=\frac{-dt}{t^2}$,

$\sqrt{2}-1\to\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$ and $\sqrt{2}+1\to\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$, one has

$$I=\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\left(\frac{1}{(1+x^2)\cdot(1+a^{((f\circ g)(x))})}\right)dx=\int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}-1}\left(\frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{t}\right)^2\right)\cdot\left(1+a^{(f\circ g)\left(\frac{1}{t}\right)}\right)}\right)\left(\frac{-dt}{t^2}\right)=$$

$$-\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\left(\frac{t^2}{(t^2+1)\cdot(1+a^{(f(-g(t)))})}\right)\left(\frac{dt}{t^2}\right)=\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\left(\frac{1}{(t^2+1)\cdot(1+a^{(-f(g(x)))})}\right)dt=$$

$$=\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\left(\frac{1}{(t^2+1)\cdot\left(1+\frac{1}{a^{(f(g(x)))}}\right)}\right)dt=\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\left(\frac{a^{(f(g(t)))}}{(1+t^2)\cdot(1+a^{(f(g(t)))})}\right)dt=J$$

One has

$$I+J=\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\left(\frac{1}{(1+x^2)\cdot(1+a^{((f\circ g)(x))})}\right)dx+\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\left(\frac{a^{(f(g(x)))}}{(1+x^2)\cdot(1+a^{(f(g(x)))})}\right)dx=\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\left(\frac{1+a^{(f(g(x)))}}{(1+x^2)\cdot(1+a^{(f(g(x)))})}\right)dx=\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$$

$$arctgx\Big|_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}=arctg(\sqrt{2}+1)-arctg(\sqrt{2}-1)$$