REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

SEPTEMBRIE 2020

ISSN 2065-6432

www.mateinfo.ro

REVISTĂ DIN FEBRUARIE 2009

revista.mateinfo@yahoo.com



COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ŞI SUSŢINĂTOR PERMANENŢI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ŞI NELA CICEU

ARTICOLE REVISTĂ:

1. **Câteva limite de tip Lalescu la 120 de ani de la apariţia în Gazeta Matematică … pag. 2**

D. M. Bătineţu-Giurgiu şi Neculai Stanciu

2. **Inegalitatea VASC & JP.118 –RMM-Spring 2018 … pag. 7**

Marin Chirciu

3. **Greşeli tipice în rezolvarea exerciţiilor şi a problemelor de analiză matematică... pag. 49**

Ungureanu Angelica-Mihaela

1. Câteva limite de tip Lalescu la 120 de ani de la apariţia în Gazeta Matematică

D. M. Bătineţu-Giurgiu[1] şi Neculai Stanciu[2]

În acest material vom prezenta câteva limite de tip Lalescu. Problemele selectate au fost publicate în diverse reviste de specialitate, dar, aici sunt prezentate alte soluţii.

1) Limita şirului lui *Traian Lalescu* (G.M., Vol. VI, 1900-1901, problema 579, pag. 148).

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)\overset{k!\cong\left(\frac{k}{e}\right)^k\Rightarrow\sqrt[k]{k!}\cong\frac{k}{e}}{=}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{e}-\frac{n}{e}\right)=\frac{1}{e}$$

2) Limita şirului lui *D. M. Bătineţu-Giurgiu* (G.M., Vol. XCIV, 1989, problema C:890, pag. 139).

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}-\frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}\right)\overset{k!\cong\left(\frac{k}{e}\right)^k\Rightarrow\sqrt[k]{k!}\cong\frac{k}{e}}{=}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\frac{(n+1)}{e}}-\frac{n^2}{\frac{n}{e}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left((n+1)e-ne\right)=e$$

3) (*D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu*, CMJ 3/2018)

Fie $e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $\lim_{n\to\infty}e_n=e$ (constanta lui Euler) şi $s_n=-2\sqrt{n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$, $\lim_{n\to\infty}s_n=s$ (constanta Ioachimescu). Calculaţi $\lim_{n\to\infty}\frac{e-e_n}{(s_n-s)^2}$.

Soluţie. $\lim_{n\to\infty}\frac{e-e_n}{(s_n-s)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(e-e_n)}{\left(\sqrt{n}(s_n-s)\right)^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(s_n-s)=\lim_{n\to\infty}\frac{s_n-s}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\overset{C-S}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{s_{n+1}-s_n}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}(s_n-s_{n+1})=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(-2\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}+2\sqrt{n+1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(2n+1-2\sqrt{n(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{2n+1+2\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{2}.$$

[1] Profesor, Colegiul Naţional „Matei Basarab'', Bucureşti
[2] Profesor, Şcoala Gimnazială „George Emil Palade'', Buzău

Este binecunoscut că $\frac{e}{2n+2} < e-e_n < \frac{e}{2n+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n(e-e_n) = \frac{e}{2}$. Deci, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e-e_n}{(s_n-s)^2} = 2e$.

Remarcă. Problema 16 din Gazeta Matematică, nr. 2, Vol. I, 1895-1896, pag. 39, propusă de *Andrei G. Ioachimescu* (1868-1943) – unul dintre cei patru stâlpi ai Gazetei Matematice - cerea să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-2\sqrt{n}\right)$.

4) (*D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu*, GMB 2/2014)
Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot\left(\sqrt[2(n+1)]{(n+1)!}-\sqrt[2n]{n!}\right)$.

Soluţia 1. Avem: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \overset{Cauchy-D'Alembert}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}\right) = e$.

$$x_n = \sqrt{n}\cdot\left(\sqrt[2(n+1)]{(n+1)!}-\sqrt[2n]{n!}\right) = \sqrt{n}\cdot\sqrt[2n]{n!}\cdot(u_n-1) = \frac{\sqrt[2n]{n!}}{\sqrt{n}}\cdot(u_n-1)\cdot n =$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n, \forall n\geq 2, \text{ unde } u_n = \frac{\sqrt[2(n+1)]{(n+1)!}}{\sqrt[2n]{n!}} = \frac{\sqrt[2(n+1)]{(n+1)!}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[2n]{n!}}\cdot\sqrt{\frac{n+1}{n}}.$$

Deci, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sqrt{e}\cdot\sqrt{\frac{1}{e}}\cdot 1 = 1$, și urmează că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n} = 1$.

$$\lim_{n\to\infty} u_n^n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}}\cdot\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}} = \sqrt{e}.$$

Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{\frac{1}{e}}\cdot 1\cdot\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty} u_n^n\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}\cdot\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2\sqrt{e}}$.

Soluţia 2.

$$x_n = \sqrt{n}\cdot\left(\sqrt[2(n+1)]{(n+1)!}-\sqrt[2n]{n!}\right) = \sqrt{n}\cdot\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[2(n+1)]{(n+1)!}+\sqrt[2n]{n!}} = \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}}{\sqrt{\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}}+\sqrt{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}},$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)\cdot\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}}+\sqrt{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}\right)} =$

$$= \frac{1}{e}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{e}}+\sqrt{\frac{1}{e}}} = \frac{1}{2\sqrt{e}}.$$

Soluţia 3. $x_n = \sqrt{n}\cdot\left(\sqrt[2(n+1)]{(n+1)!}-\sqrt[2n]{n!}\right) = \sqrt{n}\cdot\frac{\sqrt[2(n+1)]{(n+1)!}-\sqrt[2n]{n!}}{1+n-n} =$

$$= \frac{\sqrt[2n]{n!}}{n}\cdot\frac{u_n-1}{v_n-1}\cdot\sqrt{n} = \sqrt{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}\cdot\frac{u_n-1}{v_n-1} = \sqrt{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\frac{\ln v_n}{v_n-1}\cdot\frac{\ln u_n}{\ln v_n} =$$

$= \sqrt{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}} \cdot \frac{u_n - 1}{\ln u_n} \cdot \frac{\ln v_n}{v_n - 1} \cdot \frac{\ln u_n^n}{\ln v_n^n}$, unde $u_n = \frac{\sqrt[2(n+1)]{(n+1)!}}{\sqrt[2n]{n!}}$, $v_n = 1 + \frac{1}{n}$, şi deci $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = 1$ şi atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n - 1}{\ln u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{v_n - 1}{\ln v_n} = 1$. De asemenea avem $\lim_{n\to\infty} u_n^n = \sqrt{e}$, $\lim_{n\to\infty} v_n^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Prin urmare: $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\ln \sqrt{e}}{\ln e} = \frac{1}{2\sqrt{e}}$.

Exerciţii

1) (*D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu*, CM 7/2013)

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale strict positive astfel încât $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{n} = a \in R_+^*$. Definim $a_n!$ astfel $a_{n+1} = a_n! \cdot a_{n+1}, \forall n \in N^*$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1}!}}{n+1} - \frac{\sqrt[n]{a_n!}}{n} \right)$.

2) (*D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu*, P 2/2011)

Dacă $x_n = \sqrt[n]{\sqrt{2!} \cdot \sqrt[3]{3!} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{n!}}$, atunci să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{x_{n+1}} - \frac{n^2}{x_n} \right)$.

3) (*D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu*, MP 3/2013)

Fie $f, g : R_+^* \to R_+^*$ astfel încât $\lim_{x\to\infty} \left(f(x+1) - f(x) \right) = a \in R_+^*$, $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x+1)}{x g(x)} = b \in R_+^*$ şi există $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{(g(x))^{\frac{1}{x}}}{x}$. Dacă $t \in R$, atunci calculaţi $\lim_{x\to\infty} (f(x))^{\sin^2 t} \left((g(x))^{\frac{\cos^2 t}{x+1}} - (g(x))^{\frac{\cos^2 t}{x}} \right)$.

4) (*D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu*, SSM 5/2013)

Fie $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}, a_n, b_n \in R_+^*, \forall n \in N^*$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = a \in R_+^*$ şi $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{n b_n} = b \in R_+^*$. Dacă $x \in R$, atunci să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \left(a_n^{\sin^2 x} \left(\left(\sqrt[n+1]{b_{n+1}} \right)^{\cos^2 x} - \left(\sqrt[n]{b_n} \right)^{\cos^2 x} \right) \right)$.

5) (*D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu*, MP 2/2013)

Dacă $x \in R$, atunci şirul $(L_n(x))_{n\geq 2}$, $L_n(x) = n^{\cos^2 x} \left(\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} \right)^{\sin^2 x} - \left(\sqrt[n]{n!} \right)^{\sin^2 x} \right)$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} L_n(x)$.

6) (*D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu*, RMM 1/2018)

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$, un şir de numere reale positive astfel încât $\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = x > 0$.

Calculaţi $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)x_{n+1}}{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!}} - \frac{n x_n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}} \right)$.

7) (*D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu*, AMM 4/2014)

Calculaţi $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{(2n-1)!!} \left(\tan \frac{\pi \sqrt[n+1]{(n+1)!}}{4 \sqrt[n]{n!}} - 1 \right) \right)$.

8) (*D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu*, SSM 5/2014)

Fie $a \in R_+^*$ şi $\{E_n\}_{n\geq 0}$, $E_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Calculaţi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} \left(a^{\sqrt[n]{E_n} - 1} - 1 \right)$.

9) (*D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu*, RMM 2020)

Fie $\{\gamma_n\}_{n\geq 1}, \gamma_n = -\ln n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, cu $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma$ (i.e. γ este constanta Euler – Mascheroni), atunci calculaţi $\lim_{n\to\infty} (\sin \gamma_n - \sin \gamma)\sqrt[n]{n!}$.

10) (*D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu*, P 1/2018)

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale positive astfel încât $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n!} = a > 0$.

Calculaţi $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{a_n}} \right)$.

11) (*D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu*, PME 1/2015)

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale poziive astfel încât $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n!} = a > 0$.

Calculaţi $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{a_{n+1}} - \sqrt[n]{a_n} \right)$

12) (*D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu*, CM 7/2014)

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale positive şi $a > 0$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} (a_n - a \cdot n!) = b > 0$.

Calculaţi $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{a_{n+1}} - \sqrt[n]{a_n} \right)$.

13) (*D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu*, SSM 4/2018)

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_1 = 1$, $x_n = 1 \cdot \sqrt{3!!} \cdot \sqrt[3]{5!!} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{(2n-1)!!}$. Calculaţi $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{x_{n+1}}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{x_n}} \right)$.

14) (*D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu*, RM 2/2017)

Fie $\gamma_n = -\ln n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma$. Calculaţi $\lim_{n\to\infty} (\gamma_n - \gamma)\sqrt[n]{(2n-1)!!}$.

15) (*D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu*, FQ 3/2014)

Calculaţi $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{(n+1)! L_{n+1}} - \sqrt[n]{n! L_n} \right)$.

16) (*D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu*, FQ 3/2014)

Calculaţi $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{(2n+1)!! F_{n+1}} - \sqrt[n]{(2n-1)!! F_n} \right)$.

17) (*D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu*, SSM 4/2012)

Fie $(a_n)_{n\geq 1}, a_n \in R_+^*, \forall n \in N^*$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{n^2 \cdot a_n} = b \in R_+^*$. Calculaţi $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}}{n+1} - \frac{\sqrt[n]{a_n}}{n} \right)$.

Abrevieri

* Crux Mathematicorum (CM); Gazeta Matematică Seria B (G. M. –B); La Gaceta de la RSME (LG); Math Problems (MP); Pi Mu Epsilon Journal (PME); Revista de Matematică din Timişoara (RMT); Recreaţii Matematice (RM); Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matematica (REOIM); Romanian Mathematical Magazine (RMM); School Science and Mathematics (SSM); The American Mathematical Monthly (AMM); The College Mathematics Journal (CMJ); The Pentagon (P); The Fibonacci Quarterly (FQ).

Bibliografie

1. **D.M. Bătineţu-Giurgiu**, *Şiruri,* Editura Albatros, Bucureşti, 1979.

2. **D.M. Bătineţu-Giurgiu**, *Şiruri Lalescu*, R.M.T., anul XX (1989), pp. 37-38.
3. **D.M. Bătineţu-Giurgiu**, *Şirurile Lalescu şi funcţia Euler de speţa a doua. Funcţii Euler-Lalescu*, Gazeta Matematică seria A, nr.1 /1990, pp. 21-26.
4. **D.M. Bătineţu-Giurgiu**, *Asupra unei generalizări a şirului lui Traian Lalescu. Metode de abordare*, Gazeta Matematică, nr. 8-9/1990, pp. 219-224.
5. **D.M. Bătineţu-Giurgiu, D. Sitaru, N. Stanciu** - *New classes of sequences-functions and famous limits*– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No.2, October, 2019, 784-797.
6. **D.M. Bătineţu-Giurgiu, D. Sitaru, N. Stanciu** -*Two classes of Lalescu's sequences* – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No. 2, October, 2019, 805-813.
7. **D.M. Bătineţu-Giurgiu, M. Bencze, D. Sitaru, N. Stanciu** - *Some limits of Traian Lalescu type with Fibonacci and Lucas numbers (II)* – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No. 1, April, 2019, 101-111.
8. **D.M. Bătineţu-Giurgiu, M. Bencze, D. Sitaru, N. Stanciu** - *Some limits of Traian Lalescu type (II)*– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No. 1, April, 2019, 184-209.
9. **D.M. Bătineţu-Giurgiu, M. Bencze, D. Sitaru, N. Stanciu** - *Some limits of definite integrals of Lalescu's type* – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No. 1, April, 2019, 312-328.
10. **D.M. Bătineţu-Giurgiu, M. Bencze, D. Sitaru, N. Stanciu** - *Some limits of Traian Lalescu type (II)*– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 26, No. 2, October, 2018, 664-690.
11. **D.M. Bătineţu-Giurgiu, M. Bencze, N. Stanciu** - *Some limits of Traian Lalescu type with Fibonacci and Lucas numbers* – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 26, No. 1, April, 2018, 54-87.
12. **D.M. Bătineţu-Giurgiu, M. Bencze, N. Stanciu** - *Some limits of Traian Lalescu type (I)* – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 26, No. 1, April, 2018, 116-136.
13. **D.M. Bătineţu-Giurgiu, M. Bencze, D. Sitaru, N. Stanciu** -*Certain classes of Lalescu sequence*– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 26, No. 1, April, 2018, 243-251.
14. **D.M. Bătineţu-Giurgiu, N. Stanciu** -*Several results of some classes of sequences*– The Pentagon – Volume 73, Number 2, Spring 2014, 10-24.
15. **D.M. Bătineţu-Giurgiu, A. Kotronis, N. Stanciu** -*Calculating the limits of some real sequences*– Math Problems, Issue 1, 2014, 252-257.
16. **D.M. Bătineţu-Giurgiu, N. Stanciu** - *New methods for calculations of some limits*– The Teaching of Mathematics, Vol. XVI, Nr. 2, 2013, 82-88.
17. **D.M. Bătineţu-Giurgiu, N. Stanciu** - *120 de ani de la limita şirului lui Traian Lalescu* – Sclipirea Minţii, Nr. 25, Mai, 2020, 6-7.
18. **D.M. Bătineţu-Giurgiu, N. Stanciu, José Luis Díaz-Barrero** - *The Last Three Decades of Lalescu Limit* – Arhimede Mathematical Journal, Vol. 7, No.1, 2020, 18-28.
19. **D.M. Bătineţu-Giurgiu, N. Stanciu** – *120 de ani de la limita lui Traian Lalescu* – Recreaţii Matematice, Nr. 2, Iulie-Decembrie, 2020, 104-106.
20. **N. Stanciu** - *Limits of Lalescu Type* – Journal of Mathematics and Statistics Research, Research Article,Volume 2, Issue 1, 2020, 1-16.
21. **D. Sitaru, N. Stanciu** – *Traian Lalescu limit – 120 Years, D. M. Bătineţu-Giurgiu – 85 Years*, Romanian Mathematical Magazine (RMM), 20 July, 2020, 1-12.

2. Inegalitatea VASC
&
JP.118 –RMM-Spring 2018

Marin Chirciu[3]

În literatura de specialitate eticheta „inegalitatea VASC'' se atribuie inegalității lui Vasile Cârtoaje publicată în Gazeta Matematică 7-8/1992 , vezi problema 22694, prezentată aici sub forma echivalentă:

$a^2(a-b)(a-2b)+b^2(b-c)(b-2c)+c^2(c-a)(c-2a)\geq 0$, $\forall a,b,c\in \mathbf{R}$.

GM-B 7-8/1992, Problema22694, Vasile Cîrtoaje, conf.univ., Ploiești

Inegalitatea folosită în aplicații este echivalentă cu cea propusă în GM-B 7-8/1992 și anume:

$$\forall a,b,c\in \boldsymbol{R}\,,\ \left(a^2+b^2+c^2\right)^2\geq 3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right).$$

Demonstrație.

Folosim inegalitatea :

$\left(x+y+z\right)^2\geq 3\left(xy+yz+zx\right)$, cu $x=a^2-ab+bc$, $y=b^2-bc+ca$, $z=c^2-ca+ab$.

Variante de rezolvare:

Se poate folosi una din identitățile:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)=\frac{1}{2}\sum\left(a^2-b^2-ab+2bc-ca\right)^2.$$

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)=\frac{1}{6}\sum\left(2a^2-b^2-c^2-3ab+3bc\right)^2.$$

Folosind această inegalitate se pot rezolva o serie de noi inegalități , cu aplicații în triunghi.

În legătură cu Problema JP.118
Spring 2018
Romanian Mathematical Magazine

1) In ΔABC : $\dfrac{a^3}{b}+\dfrac{b^3}{c}+\dfrac{c^3}{a}\geq\dfrac{3\left(a^3+b^3+c^3\right)}{a+b+c}$.

Proposed by Nguen Ngoc Tu, Vietnam

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Vasile Cârtoaje:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\geq 3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right),\forall a,b,c\in \boldsymbol{R}\,.$$

Să trecem la rezolvarea inegalității din enunț.

Folosind inegalitatea lui Bergström obținem:

$\dfrac{a^3}{b}+\dfrac{b^3}{c}+\dfrac{c^3}{a}=\dfrac{a^6}{a^3b}+\dfrac{b^6}{b^3c}+\dfrac{c^6}{c^3a}\geq\dfrac{\left(a^3+b^3+c^3\right)^2}{a^3b+b^3c+c^3a}\geq\dfrac{3\left(a^3+b^3+c^3\right)}{a+b+c}$, unde ultima inegalitate este echivalentă cu $\left(a^3+b^3+c^3\right)(a+b+c)\geq 3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)$, adevărată din inegalitatea CBS și inegalitatea lui Vasile Cârtoaje:

Într-adevăr: $\left(a^3+b^3+c^3\right)(a+b+c)\geq\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\geq 3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarcă.

Inegalitatea este adevărată pentru orice $a,b,c>0$.

---

[3] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu", Pitești*

În continuare vom pune în evidență inegalități în triunghi în care suma $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}$ se va compara cu diferite sume remarcabile construite cu elemente ale triunghiului.

Vom scrie un rezultat echivalent cu $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq\frac{3\left(a^3+b^3+c^3\right)}{a+b+c}$, adevărat pentru a,b,c lungimile laturilor unui triunghi oarecare**.**

Lemă:

2) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)$.

Soluție.

Folosim **1)** și $a^3+b^3+c^3=2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right), a+b+c=2p$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 6r\left(5R-4r\right)$.

Soluție.

Vezi **Lema** și inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$.

4) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 12r^2$.

Soluție.

Vezi **4)** și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

5) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq \sum a^2$.

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum a^2=2\left(p^2-r^2-4Rr\right)$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 2\left(p^2-r^2-4Rr\right)\Leftrightarrow\ p^2\geq 10Rr+7r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 10Rr+7r^2\Leftrightarrow R\geq 2r$.

6) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq \frac{4}{3}\sum m_a^2$.

Soluție.

Vezi **Lema**, $\sum m_a^2=\frac{3}{4}\sum a^2$ și $\sum a^2=2\left(p^2-r^2-4Rr\right)$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 2\left(p^2-r^2-4Rr\right)\Leftrightarrow\ p^2\geq 10Rr+7r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 10Rr+7r^2\Leftrightarrow R\geq 2r$.

7) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq \frac{4}{3}\sum l_a^2$.

Soluție.

Vezi **Lema**, $l_a\geq m_a$, $\sum m_a^2=\frac{3}{4}\sum a^2$ și $\sum a^2=2\left(p^2-r^2-4Rr\right)$.

Este suficient să arătăm că:
$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 2\left(p^2-r^2-4Rr\right) \Leftrightarrow \ p^2\geq 10Rr+7r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.
Rămâne să demonstrăm că:
$16Rr-5r^2\geq 10Rr+7r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

8) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq \frac{4}{3}\sum h_a^2$.

Soluție.

Vezi **Lema**, $h_a\geq m_a$, $\sum m_a^2=\frac{3}{4}\sum a^2$ și $\sum a^2=2\left(p^2-r^2-4Rr\right)$.

Este suficient să arătăm că:
$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 2\left(p^2-r^2-4Rr\right) \Leftrightarrow \ p^2\geq 10Rr+7r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.
Rămâne să demonstrăm că:
$16Rr-5r^2\geq 10Rr+7r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

9) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq \frac{16r^2}{3R^2}\sum r_a^2$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum r_a^2=\left(4R+r\right)^2-2p^2$.
Este suficient să arătăm că:
$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq \frac{16r^2}{3R^2}\left[\left(4R+r\right)^2-2p^2\right] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ p^2\left(9R^2+32r^2\right)\geq r\left(54R^3+283R^2r+128Rr^2+16r^3\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.
Rămâne să demonstrăm că:
$\left(16Rr-5r^2\right)\left(9R^2+32r^2\right)\geq r\left(54R^3+283R^2r+128Rr^2+16r^3\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 45R^3-164R^2r+192Rr^2-88r^3\geq 0 \Leftrightarrow \left(R-2r\right)\left(45R^2-74Rr+44r^2\right)\geq 0$.

10) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq \frac{2p}{3}\sum \frac{b^2+c^2-a^2}{b+c-a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{b^2+c^2-a^2}{b+c-a}=\frac{5p^2-\left(4R+r\right)^2}{p}\leq 2p$ (adevărată din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$).
Este suficient să arătăm că:
$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq \frac{2p}{3}\cdot 2p \ \Leftrightarrow 5p^2\geq 27r\left(2R+r\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.
Rămâne să demonstrăm că:
$5\left(16Rr-5r^2\right)\geq 27r\left(2R+r\right) \Leftrightarrow R\geq 2r$.

11) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq \sum \frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} = 7p^2-\left(24R^2+26Rr+5r^2\right)$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq 7p^2-\left(24R^2+26Rr+5r^2\right) \Leftrightarrow p^2 \leq 6R^2+2Rr-r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$4R^2+4Rr+3r^2 \leq 6R^2+2Rr-r^2 \Leftrightarrow R^2-Rr-2r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(R+r) \geq 0$.

12) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq 24r^2 \sum \frac{a}{b+c}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{a}{b+c} = \frac{2\left(p^2-r^2-Rr\right)}{p^2+r^2+2Rr}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq 24r^2 \cdot \frac{2\left(p^2-r^2-Rr\right)}{p^2+r^2+2Rr} \Leftrightarrow p^2\left(p^2-18r^2-4Rr\right) \geq r^2\left(12R^2-4Rr-13r^2\right)$,

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$(16Rr-5r^2)(16Rr-5r^2-18r^2-4Rr) \geq r^2(12R^2-4Rr-13r^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 45R^2-106Rr+32r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(45R-16r) \geq 0$.

13) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq 6r^2 \sum \frac{b+c}{a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{b+c}{a} = \frac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq 6r^2 \cdot \frac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr} \Leftrightarrow p^2(R-r) \geq r\left(6R^2+Rr+r^2\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$(16Rr-5r^2)(R-r) \geq r\left(6R^2+Rr+r^2\right) \Leftrightarrow 5R^2-11Rr+2r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(5R-r) \geq 0$.

14) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq 6r^2 \sum \frac{a}{p-a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{a}{p-a} = \frac{2(2R-r)}{r}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 6r^2\cdot\frac{2(2R-r)}{r} \Leftrightarrow p^2\geq 14Rr-r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 14Rr-r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

15) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 24r^2\sum\frac{p-a}{a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{p-a}{a}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{4Rr}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 24r^2\cdot\frac{p^2+r^2-8Rr}{4Rr} \Leftrightarrow p^2(R-2r)\geq r\left(6R^2-13Rr+2r^2\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$(16Rr-5r^2)(R-2r)\geq r\left(6R^2-13Rr+2r^2\right) \Leftrightarrow R\geq 2r$.

16) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 12r^2\sum\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}=\frac{2(R+r)}{r}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 12r^2\cdot\frac{2(R+r)}{r} \Leftrightarrow R\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 8r^2(R+r)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$R\left(16Rr-5r^2-3r^2-6Rr\right)\geq 8r^2(R+r) \Leftrightarrow 5R^2-8Rr-4r^2\geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(5R+2r)\geq 0$.

17) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 6r^2\sum\frac{b^2+c^2}{bc}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{b^2+c^2}{bc}=\frac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 6r^2\cdot\frac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr} \Leftrightarrow p^2(R-r)\geq r\left(6R^2+Rr+r^2\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

18) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 48r^2\sum\frac{p-a}{b+c}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{p-a}{b+c} = \frac{p^2+5r^2+8Rr}{2\left(p^2+r^2+2Rr\right)}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq 48r^2 \cdot \frac{p^2+5r^2+8Rr}{2\left(p^2+r^2+2Rr\right)}$

$\Leftrightarrow p^2\left(p^2-10r^2-4Rr\right) \geq r^2\left(12R^2+76Rr+43r^2\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)\left(16Rr-5r^2-10r^2-4Rr\right) \geq r^2\left(12R^2+76Rr+43r^2\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 45R^2-94Rr+8r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(45R-4r) \geq 0$.

19) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq 48r^2 \sum \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{(p-b)(p-c)}{bc} = \frac{2R-r}{2R}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq 48r^2 \cdot \frac{2R-r}{2R} \Leftrightarrow R\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq 8r^2(2R-r)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$R\left(16Rr-5r^2-3r^2-6Rr\right) \geq 8r^2(2R-r) \Leftrightarrow 5R^2-12Rr+4r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(5R-2r) \geq 0$.

20) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq 16r^2 \sum \frac{p(p-a)}{bc}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{p(p-a)}{bc} = \frac{4R+r}{2R}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq 16r^2 \cdot \frac{4R+r}{2R} \Leftrightarrow R\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq 8r^2(4R+r)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$R\left(16Rr-5r^2-3r^2-6Rr\right) \geq 8r^2(4R+r) \Leftrightarrow 15R^2-28Rr-4r^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (R-2r)(15R+2r) \geq 0$.

21) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq 60r^2 \sum \frac{p-a}{p+a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{p-a}{p+a} = \frac{4p^2-r^2-16Rr}{4p^2+r^2+8Rr}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 60r^2\cdot\dfrac{4p^2-r^2-16Rr}{4p^2+r^2+8Rr}$

$\Leftrightarrow\ p^2\left(4p^2-91r^2-16Rr\right)\geq r^2\left(48R^2-290Rr-17r^2\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)\left[4\left(16Rr-5r^2\right)-91r^2-16Rr\right]\geq r^2\left(48R^2-290Rr-17r^2\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 360R^2-863Rr+286r^2\geq 0\ \Leftrightarrow\ (R-2r)(360R-143r)\geq 0.$

22) In $\Delta ABC: \dfrac{a^3}{b}+\dfrac{b^3}{c}+\dfrac{c^3}{a}\geq 24r^2\sum\dfrac{2p-a}{2p+a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\dfrac{2p-a}{2p+a}=\dfrac{15p^2-r^2-16Rr}{9p^2+r^2+6Rr}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 24r^2\cdot\dfrac{15p^2-r^2-16Rr}{9p^2+r^2+6Rr}$

$\Leftrightarrow\ p^2\left(9p^2-146r^2-48Rr\right)\geq r^2\left(36R^2-56Rr-5r^2\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)\left[9\left(16Rr-5r^2\right)-146r^2-48Rr\right]\geq r^2\left(36R^2-56Rr-5r^2\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 25R^2-58Rr+16r^2\geq 0\ \Leftrightarrow\ (R-2r)(25R-8r)\geq 0.$

23) In $\Delta ABC: \dfrac{a^3}{b}+\dfrac{b^3}{c}+\dfrac{c^3}{a}\geq \dfrac{9r^2}{2}\sum\dfrac{a(b+c)}{p(p-a)}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\dfrac{a(b+c)}{p(p-a)}=\dfrac{4R}{r}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq\dfrac{9r^2}{2}\cdot\dfrac{4R}{r}\ \Leftrightarrow\ p^2\geq 12Rr+3r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 12Rr+3r^2\ \Leftrightarrow\ R\geq 2r$.

24) In $\Delta ABC: \dfrac{a^3}{b}+\dfrac{b^3}{c}+\dfrac{c^3}{a}\geq \dfrac{3r^2}{2}\sum\dfrac{a(b+c)}{(p-b)(p-c)}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\dfrac{a(b+c)}{(p-b)(p-c)}=\dfrac{12R}{r}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq\frac{3r^2}{2}\cdot\frac{12R}{r}\Leftrightarrow p^2\geq 12Rr+3r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 12Rr+3r^2\Leftrightarrow R\geq 2r$.

25) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq\frac{3r^2}{2}\sum\frac{a(b+c)}{bc\sin^2\frac{A}{2}}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{a(b+c)}{bc\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{12R}{r}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq\frac{3r^2}{2}\cdot\frac{12R}{r}\Leftrightarrow p^2\geq 12Rr+3r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 12Rr+3r^2\Leftrightarrow R\geq 2r$.

26) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 3r^2\sum\frac{b+c}{p-a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{b+c}{p-a}=\frac{4(R+r)}{r}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 3r^2\cdot\frac{4(R+r)}{r}\Leftrightarrow p^2\geq 10Rr+7r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 10Rr+7r^2\Leftrightarrow R\geq 2r$.

27) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 192r^2\sum\frac{(p-b)(p-c)}{(a+b)(a+c)}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{(p-b)(p-c)}{(a+b)(a+c)}=\frac{2r(R+r)}{p^2+r^2+2Rr}\leq\frac{3}{16}$ (adevărată din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$).

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 192r^2\cdot\frac{3}{16}\Leftrightarrow p^2\geq 6Rr+15r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 6Rr+15r^2\Leftrightarrow R\geq 2r$.

28) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq 3r^2 \sum \frac{a^2}{(p-b)(p-c)}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{a^2}{(p-b)(p-c)} = \frac{4(R+r)}{r}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq 3r^2 \cdot \frac{4(R+r)}{r} \Leftrightarrow p^2 \geq 10Rr+7r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2 \geq 10Rr+7r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$.

29) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq 48r^2 \sum \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{(p-b)(p-c)}{bc} = \frac{2R-r}{2R}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq 48r^2 \cdot \frac{2R-r}{2R} \Leftrightarrow R\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq 8r^2(2R-r)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$R\left(16Rr-5r^2-3r^2-6Rr\right) \geq 8r^2(2R-r) \Leftrightarrow 5R^2-12Rr+4r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(5R-2r) \geq 0$.

30) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq 9r^2 \sum \frac{bc}{(p-b)(p-c)}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{bc}{(p-b)(p-c)} = 1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq 9r^2\left[1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^2\left(p^2-6r^2-6Rr\right) \geq 3r^2(4R+r)^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)\left(16Rr-5r^2-6r^2-6Rr\right) \geq 3r^2(4R+r)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 56R^2-125Rr+26r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(56R-13r) \geq 0$.

31) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq 2S \sum \frac{a}{r_a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{a}{r_a} = \frac{2(4R+r)}{p}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq 2rp \cdot \frac{2(4R+r)}{p} \Leftrightarrow 3p^2 \geq 34Rr+13r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$3\left(16Rr-5r^2\right) \geq 34Rr+13r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$.

32) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq \frac{8S}{3}\sum \frac{r_a}{a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{r_a}{a} = \frac{p}{4R}\left[1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right]$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq \frac{8rp}{3} \cdot \frac{p}{4R}\left[1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right] \Leftrightarrow p^2(9R-2r) \geq r\left(86R^2+43Rr+2r^2\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)(9R-2r) \geq r\left(86R^2+43Rr+2r^2\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 29R^2-60Rr+4r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(29R-2r) \geq 0$.

33) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq \frac{4S}{3}\sum \frac{r_b+r_c}{a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{r_b+r_c}{a} = \frac{p}{r}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq \frac{4rp}{3} \cdot \frac{p}{r} \Leftrightarrow 5p^2 \geq 27r(2R+r)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$5\left(16Rr-5r^2\right) \geq 27r(2R+r) \Leftrightarrow R \geq 2r$.

34) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq 9r^2\sum \frac{a^2}{r_a^2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{a^2}{r_a^2} = 2\left[\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2-1\right]$.

Este suficient să arătăm că:

$$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 9r^2\cdot 2\left[\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2-1\right] \Leftrightarrow p^2\left(p^2+3r^2-6Rr\right)\geq 6r^2\left(4R+r\right)^2,$$

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că: $\left(16Rr-5r^2\right)\left(16Rr-5r^2+3r^2-6Rr\right)\geq 6r^2\left(4R+r\right)^2$

$\Leftrightarrow 32R^2-65Rr+2r^2\geq 0 \Leftrightarrow \left(R-2r\right)\left(32R-r\right)\geq 0$.

35) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 16r^2\sum\frac{r_br_c}{bc}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{r_br_c}{bc}=\frac{4R+r}{2R}\leq\frac{9}{4}$(adevărată din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$).

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 16r^2\cdot\frac{9}{4} \Leftrightarrow p^2\geq 6Rr+15r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 6Rr+15r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

36) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 9r^2\sum\frac{bc}{r_br_c}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{bc}{r_br_c}=1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2$.

Este suficient să arătăm că:

$$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 9r^2\left[1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right] \Leftrightarrow p^2\left(p^2-6r^2-6Rr\right)\geq 3r^2\left(4R+r\right)^2,$$

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)\left(16Rr-5r^2-6r^2-6Rr\right)\geq 3r^2\left(4R+r\right)^2 \Leftrightarrow 56R^2-125Rr+26r^2\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(R-2r\right)\left(56R-13r\right)\geq 0$.

37) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 24r^2\sum\frac{r_a}{r_b+r_c}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{r_a}{r_b+r_c}=\frac{p^2\left(r-8R\right)+\left(4R+r\right)^3}{4p^2R}$.

Este suficient să arătăm că:

$$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 24r^2\cdot\frac{p^2\left(r-8R\right)+\left(4R+r\right)^3}{4p^2R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2\left[Rp^2-r\left(6R^2-13Rr+2r^2\right)\right]\geq 2r^2\left(4R+r\right)^3,$$

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)\left[R\left(16Rr-5r^2\right)-r\left(6R^2-13Rr+2r^2\right)\right]\geq 2r^2\left(4R+r\right)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16R^3-9R^2r-48Rr^2+4r^3\geq 0 \Leftrightarrow \left(R-2r\right)\left(16R^2+23Rr-2r^2\right)\geq 0.$

38) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 6r^2\sum\frac{r_b+r_c}{r_a}.$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{r_b+r_c}{r_a}=\frac{2\left(2R-r\right)}{r}.$

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 6r^2\cdot\frac{2\left(2R-r\right)}{r} \Leftrightarrow p^2\geq 14Rr-r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 14Rr-r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$

39) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 24r^2\sum\frac{r_a-r}{r_a+r}.$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{r_a-r}{r_a+r}=\frac{2\left(p^2-r^2-Rr\right)}{p^2+r^2+2Rr}.$

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 24r^2\cdot\frac{2\left(p^2-r^2-Rr\right)}{p^2+r^2+2Rr} \Leftrightarrow p^2\left(p^2-18r^2-4Rr\right)\geq r^2\left(12R^2-4Rr-13r^2\right),$

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)\left(16Rr-5r^2-18r^2-4Rr\right)\geq r^2\left(12R^2-4Rr-13r^2\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 45R^2-106Rr+32r^2\geq 0 \Leftrightarrow \left(R-2r\right)\left(45R-16r\right)\geq 0.$

40) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 6r^2\sum\frac{r_a+r}{r_a-r}.$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{r_a+r}{r_a-r}=\frac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr}.$

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 6r^2\cdot\frac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr} \Leftrightarrow p^2\left(R-r\right)\geq r\left(6R^2+Rr+r^2\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)\left(R-r\right)\geq r\left(6R^2+Rr+r^2\right) \Leftrightarrow 5R^2-11Rr+2r^2\geq 0 \Leftrightarrow \left(R-2r\right)\left(5R-r\right)\geq 0.$

41) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 4S\sum\frac{a}{h_b+h_c}.$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{a}{h_b+h_c}=\frac{R\left(5p^2+r^2+4Rr\right)}{p\left(p^2+r^2+2Rr\right)}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 4rp\cdot\frac{R\left(5p^2+r^2+4Rr\right)}{p\left(p^2+r^2+2Rr\right)}$

$\Leftrightarrow p^2\left(3p^2-6r^2-32Rr\right)\geq r^2\left(44R^2+38Rr+9r^2\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)\left[3\left(16Rr-5r^2\right)-6r^2-32Rr\right]\geq r^2\left(44R^2+38Rr+9r^2\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 17R^2-38Rr+8r^2\geq 0\Leftrightarrow (R-2r)(17R-4r)\geq 0$.

42) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq\frac{4S}{3}\sum\frac{h_b+h_c}{a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{h_b+h_c}{a}=\frac{2p}{R}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq\frac{4rp}{3}\cdot\frac{2p}{R}\Leftrightarrow p^2(9R-8r)\geq 27Rr(2R+r)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

43) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq S\sum\frac{b+c}{h_a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{b+c}{h_a}=\frac{p^2+r^2+4Rr}{rp}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq rp\cdot\frac{p^2+r^2+4Rr}{rp}\Leftrightarrow p^2\geq 11Rr+5r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 11Rr+5r^2\Leftrightarrow R\geq 2r$.

44) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 3Rr\sum\frac{h_b+h_c}{h_a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{h_b+h_c}{h_a}=\frac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 3Rr\cdot\dfrac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr} \Leftrightarrow p^2\geq 10Rr+7r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 10Rr+7r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

45) In $\Delta ABC: \dfrac{a^3}{b}+\dfrac{b^3}{c}+\dfrac{c^3}{a}\geq 16r^2\sum\dfrac{h_a^2}{bc}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\dfrac{h_a^2}{bc}=\dfrac{p^2+r^2+4Rr}{4R^2}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 16r^2\cdot\dfrac{p^2+r^2+4Rr}{4R^2} \Leftrightarrow p^2\left(3R^2-4r^2\right)\geq r\left(18R^3+9R^2r+16Rr^2+4r^3\right)$,

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)\left(3R^2-4r^2\right)\geq r\left(18R^3+9R^2r+16Rr^2+4r^3\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15R^3-12R^2r-40Rr^2+8r^3\geq 0 \Leftrightarrow \left(R-2r\right)\left(15R^2+18Rr-4r^2\right)\geq 0$.

46) In $\Delta ABC: \dfrac{a^3}{b}+\dfrac{b^3}{c}+\dfrac{c^3}{a}\geq 9r^2\sum\dfrac{bc}{h_a^2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\dfrac{bc}{h_a^2}=\dfrac{2R}{r}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 9r^2\cdot\dfrac{2R}{r} \Leftrightarrow p^2\geq 12Rr+3r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 12Rr+3r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$

47) In $\Delta ABC: \dfrac{a^3}{b}+\dfrac{b^3}{c}+\dfrac{c^3}{a}\geq \dfrac{8S}{3}\sum\dfrac{h_bh_c}{ah_a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\dfrac{h_bh_c}{ah_a}=\dfrac{p}{R}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq \dfrac{8rp}{3}\cdot\dfrac{p}{R} \Leftrightarrow p^2\left(9R-8r\right)\geq 27Rr\left(2R+r\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)\left(9R-8r\right)\geq 27Rr\left(2R+r\right) \Leftrightarrow 9R^2-20Rr+4r^2\geq 0 \Leftrightarrow \left(R-2r\right)\left(9R-2r\right)\geq 0$.

48) In $\Delta ABC: \dfrac{a^3}{b}+\dfrac{b^3}{c}+\dfrac{c^3}{a}\geq 2S\sum\dfrac{ah_a}{h_bh_c}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{ah_a}{h_b h_c} = \frac{p^2+r^2+4Rr}{2rp}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq 2rp \cdot \frac{p^2+r^2+4Rr}{2rp} \Leftrightarrow p^2 \geq 11Rr+5r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2 \geq 11Rr+5r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$.

49) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq \frac{9r^2}{2}\sum \frac{a(b+c)}{h_b h_c}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{a(b+c)}{h_b h_c} = \frac{4R}{r}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq \frac{9r^2}{2} \cdot \frac{4R}{r} \Leftrightarrow p^2 \geq 12Rr+3r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2 \geq 12Rr+3r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$

50) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq 4r^2\sum \frac{r_a^2}{(p-b)(p-c)}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{r_a^2}{(p-b)(p-c)} = \frac{4R+r}{r}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq 4r^2 \cdot \frac{4R+r}{r} \Leftrightarrow 3p^2 \geq 34Rr+13r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$3\left(16Rr-5r^2\right) \geq 34Rr+13r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$

51) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq 36r^2\sum \frac{(p-b)(p-c)}{r_a^2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{(p-b)(p-c)}{r_a^2} = 1$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq 36r^2 \cdot 1 \Leftrightarrow p^2 \geq 6Rr+15r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 6Rr+15r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$

52) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 12r^2\sum\frac{h_b+h_c}{r_b+r_c}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{h_b+h_c}{r_b+r_c}=\frac{2(R+r)}{R}\leq 3$ (adevărată din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$).

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 12r^2\cdot 3 \Leftrightarrow p^2\geq 6Rr+15r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 6Rr+15r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$

53) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 12r^2\sum\frac{r_b+r_c}{h_b+h_c}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{r_b+r_c}{h_b+h_c}=\frac{R}{r}\cdot\frac{p^2+5r^2+8Rr}{p^2+r^2+2Rr}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 12r^2\cdot\frac{R}{r}\cdot\frac{p^2+5r^2+8Rr}{p^2+r^2+2Rr} \Leftrightarrow p^2\left(p^2-2r^2-8Rr\right)\geq r^2\left(44R^2+32Rr+3r^2\right)$,

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)\left(16Rr-5r^2-2r^2-8Rr\right)\geq r^2\left(44R^2+32Rr+3r^2\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 21R^2-46Rr+8r^2\geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(21R-4r)\geq 0$.

54) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 6r^2\sum\frac{h_b+h_c}{r_a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{h_b+h_c}{r_b+r_c}=6$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 6r^2\cdot 6 \Leftrightarrow p^2\geq 6Rr+15r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 6Rr+15r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$

55) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 6r^2\sum\frac{r_b+r_c}{h_a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{r_b+r_c}{h_a}=\frac{2(R+r)}{r}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 6r^2\cdot\frac{2(R+r)}{r} \Leftrightarrow p^2\geq 10Rr+7r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 10Rr+7r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

56) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 24r^2\sum\frac{h_a}{r_b+r_c}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{h_a}{r_b+r_c}=\frac{p^4+p^2\left(2r^2-4Rr\right)+r(4R+r)^3}{8R^2p^2}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 24r^2\cdot\frac{p^4+p^2\left(2r^2-4Rr\right)+r(4R+r)^3}{8R^2p^2}$

$\Leftrightarrow p^2\left[p^2\left(R^2-r^2\right)-r\left(12R^3+2R^2r-4Rr^2+2r^3\right)\right]\geq r^3(4R+r)^3$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)\left[\left(16Rr-5r^2\right)\left(R^2-r^2\right)-r\left(12R^3+2R^2r-4Rr^2+2r^3\right)\right]\geq r^3(4R+r)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 80R^4-121R^3r-100R^2r^2+48Rr^3-8r^4\geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)\left(80R^3+39R^2r-22Rr^2+4r^3\right)\geq 0$.

57) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 2S\sum\frac{a}{h_a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{a}{h_a}=\frac{p^2-r^2-4Rr}{rp}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 2rp\cdot\frac{p^2-r^2-4Rr}{rp} \Leftrightarrow p^2\geq 10Rr+7r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 10Rr+7r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

58) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq \frac{8S}{3}\sum\frac{h_a}{a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{h_a}{a}=\frac{p^4+p^2\left(2r^2-8Rr\right)+r^2(4R+r)^2}{8SR^2}$.

Este suficient să arătăm că:

$$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq\frac{8S}{3}\cdot\frac{p^4+p^2\left(2r^2-8Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2}{8SR^2}$$

$\Leftrightarrow\ p^2\left(9R^2+8Rr-2r^2-p^2\right)\geq 9R^2\left(3r^2+6Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2\leq p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$$\left(16Rr-5r^2\right)\left(9R^2+8Rr-2r^2-\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\right)\geq 9R^2\left(3r^2+6Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 13R^3-2R^2r-42Rr^2+12r^3\geq 0\ \Leftrightarrow\left(R-2r\right)\left(13R^2+24Rr-6r^2\right)\geq 0.$$

59) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 24r^2\sum\frac{h_a-r}{h_a+r}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{h_a-r}{h_a+r}=\frac{15p^2-r^2-10Rr}{9p^2+r^2+6Rr}$.

Este suficient să arătăm că:

$$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 24r^2\cdot\frac{15p^2-r^2-10Rr}{9p^2+r^2+6Rr}$$

$\Leftrightarrow\ p^2\left(9p^2-146r^2-48Rr\right)\geq r^2\left(36R^2-56Rr-5r^2\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$$\left(16Rr-5r^2\right)\left[9\left(16Rr-5r^2\right)-146r^2-48Rr\right]\geq r^2\left(36R^2-56Rr-5r^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25R^2-58Rr+16r^2\geq 0\ \Leftrightarrow\left(R-2r\right)\left(25R-8r\right)\geq 0.$$

60) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 6r^2\sum\frac{h_a+r}{h_a-r}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{h_a+r}{h_a-r}=\frac{7p^2-r^2+2Rr}{p^2+r^2+2Rr}$.

Este suficient să arătăm că:

$$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 6r^2\cdot\frac{7p^2-r^2+2Rr}{p^2+r^2+2Rr}\ \Leftrightarrow\ p^2\left(p^2-16r^2-4Rr\right)\geq r^2\left(12R^2+16Rr+r^2\right),$$

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$$\left(16Rr-5r^2\right)\left(16Rr-5r^2-16r^2-4Rr\right)\geq r^2\left(12R^2+16Rr+r^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 45R^2-103Rr+26r^2\geq 0\ \Leftrightarrow\left(R-2r\right)\left(45R-13r\right)\geq 0.$$

61) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 24r^2\sum\frac{r_a-r}{r_a+r}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{r_a-r}{r_a+r}=\frac{2\left(p^2-r^2-Rr\right)}{p^2+r^2+2Rr}$.

Este suficient să arătăm că:

$$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 24r^2\cdot\frac{2\left(p^2-r^2-Rr\right)}{p^2+r^2+2Rr}\Leftrightarrow p^2\left(p^2-18r^2-4Rr\right)\geq r^2\left(12R^2-4Rr-13r^2\right),$$

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$$\left(16Rr-5r^2\right)\left(16Rr-5r^2-18r^2-4Rr\right)\geq r^2\left(12R^2-4Rr-13r^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 45R^2-106Rr+32r^2\geq 0\Leftrightarrow (R-2r)(45R-16r)\geq 0.$$

62) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 6r^2\sum\frac{r_a+r}{r_a-r}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{r_a+r}{r_a-r}=\frac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 6r^2\cdot\frac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr}\Leftrightarrow p^2\left(R-r\right)\geq r\left(6R^2+Rr+r^2\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$$\left(16Rr-5r^2\right)(R-r)\geq r\left(6R^2+Rr+r^2\right)\Leftrightarrow 5R^2-11Rr+2r^2\geq 0\Leftrightarrow (R-2r)(5R-r)\geq 0.$$

63) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq\frac{4S^2}{3R^2}\sum\frac{bc}{h_bh_c}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{bc}{h_bh_c}=\frac{p^4+p^2\left(2r^2-8Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2}{4S^2}$.

Este suficient să arătăm că:

$$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq\frac{4S^2}{3R^2}\cdot\frac{p^4+p^2\left(2r^2-8Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2}{4S^2}$$

$\Leftrightarrow p^2\left(9R^2+8Rr-2r^2-p^2\right)\geq 9R^2\left(3r^2+6Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2\leq p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$$\left(6Rr-5r^2\right)\left(9R^2+8Rr-2r^2-\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\right)\geq 9R^2\left(3r^2+6Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 13R^3-2R^2r-42Rr^2+12r^3\geq 0\Leftrightarrow (R-2r)\left(13R^2+24Rr-6r^2\right)\geq 0.$$

64) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 16r^2\sum\frac{h_bh_c}{bc}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{h_bh_c}{bc}=\frac{p^2-r^2-4Rr}{2R^2}\leq\frac{9}{4}$(adevărată din Gerretsen $p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$).

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 16r^2\cdot\frac{9}{4} \Leftrightarrow p^2\geq 6Rr+15r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 6Rr+15r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

65) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 16r^2\sum\frac{h_bh_c}{a^2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{h_bh_c}{a^2}=\frac{p^2+r^2+4Rr}{4R^2}\leq\frac{9}{4}$ (adevărată din Gerretsen $p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$).

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 16r^2\cdot\frac{9}{4} \Leftrightarrow p^2\geq 6Rr+15r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 6Rr+15r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

66) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 9r^2\sum\frac{a^2}{h_bh_c}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{a^2}{h_bh_c}=\frac{2R}{r}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 9r^2\cdot\frac{2R}{r} \Leftrightarrow p^2\geq 12Rr+3r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 12Rr+3r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

67) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 9r^2\sum\frac{bc}{h_ar_a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{bc}{h_ar_a}=\frac{2R}{r}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 9r^2\cdot\frac{2R}{r} \Leftrightarrow p^2\geq 12Rr+3r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 12Rr+3r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

68) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 16r^2\sum\frac{h_ar_a}{bc}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{h_a r_a}{bc} = 2 + \frac{r}{2R} \le \frac{9}{4}$ (adevărată din inegalitatea lui Euler $R \ge 2r$).

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2 - 3r^2 - 6Rr\right) \ge 16r^2 \cdot \frac{9}{4} \Leftrightarrow p^2 \ge 6Rr + 15r^2$, care rezultă din inegalitatea lui

Gerretsen $p^2 \ge 16Rr - 5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \ge 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr - 5r^2 \ge 6Rr + 15r^2 \Leftrightarrow R \ge 2r$.

69) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \ge 12r^2 \sum \frac{p(p-a)}{h_a r_a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{p(p-a)}{h_a r_a} = \frac{2R-r}{r}$ (adevărată din inegalitatea lui Euler $R \ge 2r$).

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2 - 3r^2 - 6Rr\right) \ge 12r^2 \cdot \frac{2R-r}{r} \Leftrightarrow p^2 \ge 14Rr - r^2$, care rezultă din inegalitatea lui

Gerretsen $p^2 \ge 16Rr - 5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \ge 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr - 5r^2 \ge 14Rr - r^2 \Leftrightarrow R \ge 2r$.

70) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \ge 12r^2 \sum \frac{p(p-a)}{h_a r_a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{p(p-a)}{h_a r_a} = \frac{p^2(r-8R) + (4R+r)^3}{2p^2 R}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2 - 3r^2 - 6Rr\right) \ge 12r^2 \cdot \frac{p^2(r-8R) + (4R+r)^3}{2p^2 R}$

$\Leftrightarrow p^2\left[2Rp^2 - r\left(12R^2 - 26Rr + 4r^2\right)\right] \ge 4r^2(4R+r)^3$, care rezultă din inegalitatea lui

Gerretsen $p^2 \ge 16Rr - 5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \ge 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$p^2\left[2R\left(16Rr - 5r^2\right) - r\left(12R^2 - 26Rr + 4r^2\right)\right] \ge 4r^2(4R+r)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16R^3 - 9R^2 r - 48Rr^2 + 4r^3 \ge 0 \Leftrightarrow (R-2r)\left(16R^2 + 23Rr - 2r^2\right) \ge 0$.

71) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \ge 8S \sum \frac{(p-b)(p-c)}{ar_a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{(p-b)(p-c)}{ar_a} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4Rp}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 8rp\cdot\dfrac{p^2+r^2+4Rr}{4Rp} \Leftrightarrow p^2\left(3R-2r\right)\geq r\left(18R^2+17Rr+2r^2\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)\left(3R-2r\right)\geq r\left(18R^2+17Rr+2r^2\right) \Leftrightarrow 15R^2-32Rr+4r^2\geq 0$

$\Leftrightarrow \left(R-2r\right)\left(15R-2r\right)\geq 0$.

72) In $\Delta ABC: \dfrac{a^3}{b}+\dfrac{b^3}{c}+\dfrac{c^3}{a}\geq\dfrac{2S}{3}\sum\dfrac{ar_a}{(p-b)(p-c)}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\dfrac{ar_a}{(p-b)(p-c)}=\dfrac{2p}{r}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq\dfrac{2rp}{3}\cdot\dfrac{2p}{r} \Leftrightarrow 5p^2\geq 27r\left(2R+r\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$5\left(16Rr-5r^2\right)\geq 27r\left(2R+r\right) \Leftrightarrow R\geq 2r$.

73) In $\Delta ABC: \dfrac{a^3}{b}+\dfrac{b^3}{c}+\dfrac{c^3}{a}\geq 8S\sum\dfrac{(p-b)(p-c)}{ah_a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\dfrac{(p-b)(p-c)}{ah_a}=\dfrac{4R+r}{2p}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 8rp\cdot\dfrac{4R+r}{2p} \Leftrightarrow 3p^2\geq 34Rr+13r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$3\left(16Rr-5r^2\right)\geq 34Rr+13r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

74) In $\Delta ABC: \dfrac{a^3}{b}+\dfrac{b^3}{c}+\dfrac{c^3}{a}\geq\dfrac{2S}{3}\sum\dfrac{ah_a}{(p-b)(p-c)}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\dfrac{ah_a}{(p-b)(p-c)}=\dfrac{2p}{r}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq\dfrac{2rp}{3}\cdot\dfrac{2p}{r} \Leftrightarrow 5p^2\geq 27r\left(2R+r\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$5\left(16Rr-5r^2\right)\geq 27r\left(2R+r\right) \Leftrightarrow R\geq 2r$.

75) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq \frac{8S}{3}\sum \frac{r_b r_c}{ah_a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{r_b r_c}{ah_a}=\frac{p}{2r}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq \frac{8rp}{3}\cdot\frac{p}{2r} \Leftrightarrow 5p^2\geq 27r\left(2R+r\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$5\left(16Rr-5r^2\right)\geq 27r\left(2R+r\right) \Leftrightarrow R\geq 2r$.

76) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 2S\sum \frac{ah_a}{r_b r_c}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{ah_a}{r_b r_c}=\frac{2\left(4R+r\right)}{p}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 2rp\cdot\frac{2\left(4R+r\right)}{p} \Leftrightarrow 3p^2\geq 34Rr+13r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$3\left(16Rr-5r^2\right)\geq 34Rr+13r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

77) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 4S\sum \frac{a}{h_a+r_a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{a}{h_a+r_a}=\frac{2p^2\left(2R+3r\right)-3r\left(4R+r\right)\left(2R+r\right)}{p\left(p^2+r^2+2Rr\right)}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 4rp\cdot\frac{2p^2\left(2R+3r\right)-3r\left(4R+r\right)\left(2R+r\right)}{p\left(p^2+r^2+2Rr\right)}$

$\Leftrightarrow p^2\left(3p^2-30r^2-28Rr\right)+r^2\left(28R^2+12Rr-r^2\right)\geq 0$.

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $\left(3p^2-30r^2-28Rr\right)\geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 1). Dacă $\left(3p^2-30r^2-28Rr\right)<0$, inegalitatea de rescrie:

$r^2\left(28R^2+12Rr-r^2\right)\geq p^2\left(30r^2+28Rr-3p^2\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2\leq p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$r^2\left(28R^2+12Rr-r^2\right)\geq \left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left[30r^2+28Rr-3\left(16Rr-5r^2\right)\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 20R^3-18R^2r-27Rr^2-34r^3\geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)\left(20R^2+22Rr+17r^2\right)\geq 0$.

78) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq \frac{4S}{3}\sum\frac{h_a+r_a}{a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{h_a+r_a}{a}=\frac{p^4+p^2\left(2r^2-6Rr\right)+r(4R+r)^2(2R+r)}{8SR^2}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq\frac{4S}{3}\cdot\frac{p^4+p^2\left(2r^2-6Rr\right)+r(4R+r)^2(2R+r)}{8SR^2}$

$\Leftrightarrow p^2\left(18R^2+6Rr-2r^2-p^2\right)\geq 18R^2\left(3r^2+6Rr\right)+r(4R+r)^2(2R+r)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2\leq p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)\left(18R^2+6Rr-2r^2-\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\right)\geq 18R^2\left(3r^2+6Rr\right)+r(4R+r)^2(2R+r)$

$\Leftrightarrow 21R^3-31R^2r-25Rr^2+6r^3\geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)\left(21R^2+11Rr-3r^2\right)\geq 0$.

79) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 6S\sum\frac{a}{h_a+2r_a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{a}{h_a+2r_a}=\frac{2(R+r)}{p}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 6rp\cdot\frac{2(R+r)}{p} \Leftrightarrow p^2\geq 10Rr+7r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 10Rr+7r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

80) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq \frac{8S}{9}\sum\frac{h_a+2r_a}{a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{h_a+2r_a}{a}=\frac{p^4+p^2\left(2r^2-4Rr\right)+r(4R+r)^3}{8SR^2}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq\frac{8S}{9}\cdot\frac{p^4+p^2\left(2r^2-8Rr\right)+r(4R+r)^3}{8SR^2}$

$\Leftrightarrow p^2\left(27R^2+4Rr-2r^2-p^2\right)\geq 27R^2\left(3r^2+6Rr\right)+r(4R+r)^3$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2\leq p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)\left(27R^2+4Rr-2r^2-\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\right)\geq 27R^2\left(3r^2+6Rr\right)+r(4R+r)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 71R^3-122R^2r-46Rr^2+12r^3\geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)\left(71R^2+20Rr-6r^2\right)\geq 0$.

81) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 4S\sum\frac{p-a}{h_a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{p-a}{h_a}=\frac{4R+r}{p}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 4rp\cdot\frac{4R+r}{p} \Leftrightarrow 3p^2\geq 34Rr+13r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$3\left(16Rr-5r^2\right)\geq 34Rr+13r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

82) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq \frac{4S}{3}\sum\frac{h_a}{p-a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{h_a}{p-a}=\frac{p}{2R}\left[1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right]$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq \frac{4rp}{3}\cdot\frac{p}{2R}\left[1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right] \Leftrightarrow p^2\left(9R-2r\right)\geq r\left(86R^2+43Rr+2r^2\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)\left(9R-2r\right)\geq r\left(86R^2+43Rr+2r^2\right) \Leftrightarrow 29R^2-60Rr+4r^2\geq 0$

$\Leftrightarrow \left(R-2r\right)\left(29R-2r\right)\geq 0$.

83) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 3Rr\sum\frac{h_b+h_c}{r_a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{h_b+h_c}{r_a}=6$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 3Rr\cdot 6 \Leftrightarrow p^2\geq 12Rr+3r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 12Rr+3r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

84) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 6Rr\sum\frac{p\left(p-a\right)}{r_br_c}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{p\left(p-a\right)}{r_br_c}=3$.

Este suficient să arătăm că:
$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 6Rr\cdot 3 \Leftrightarrow p^2\geq 12Rr+3r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.
Rămâne să demonstrăm că:
$16Rr-5r^2\geq 12Rr+3r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

85) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 6Rr\sum\frac{r_br_c}{p(p-a)}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{r_br_c}{p(p-a)}=3$.
Este suficient să arătăm că:
$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 6Rr\cdot 3 \Leftrightarrow p^2\geq 12Rr+3r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.
Rămâne să demonstrăm că:
$16Rr-5r^2\geq 12Rr+3r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

86) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 12r^2\sum\frac{p(p-a)}{h_bh_c}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{p(p-a)}{h_bh_c}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{4r^2}$.
Este suficient să arătăm că:
$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 12r^2\cdot\frac{p^2+r^2-8Rr}{4r^2} \Leftrightarrow R\geq 2r$, (inegalitatea lui Euler).

87) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 6Rr\sum\frac{h_bh_c}{p(p-a)}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{h_bh_c}{p(p-a)}=4-\frac{2r}{R}$.
Este suficient să arătăm că:
$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 6Rr\cdot\frac{4R-2r}{R} \Leftrightarrow p^2\geq 14Rr-r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.
Rămâne să demonstrăm că:
$16Rr-5r^2\geq 14Rr-r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

88) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq \frac{4S}{3}\sum\frac{r_b+r_c}{p-a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{r_b+r_c}{p-a}=\frac{2p}{r}$.
Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq\frac{4rp}{3}\cdot\frac{2p}{r}\Leftrightarrow 5p^2\geq 27r\left(2R+r\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$5\left(16Rr-5r^2\right)\geq 27r\left(2R+r\right)\Leftrightarrow R\geq 2r$.

89) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq\frac{4S}{3}\sum\frac{h_b+h_c}{p-a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{h_b+h_c}{p-a}=\frac{2p}{r}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq\frac{4rp}{3}\cdot\frac{2p}{r}\Leftrightarrow 5p^2\geq 27r\left(2R+r\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$5\left(16Rr-5r^2\right)\geq 27r\left(2R+r\right)\Leftrightarrow R\geq 2r$.

90) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 12r^2\sum\frac{m_a^2}{r_br_c}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{m_a^2}{r_br_c}=\frac{p^2\left(Rr+4r^2\right)-r^2\left(4R+r\right)^2}{S^2}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 12r^2\cdot\frac{p^2\left(Rr+4r^2\right)-r^2\left(4R+r\right)^2}{r^2p^2}$

$\Leftrightarrow p^2\left(p^2-19r^2-10Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2\geq 0$.

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $\left(p^2-19r^2-10Rr\right)\geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 1). Dacă $\left(p^2-19r^2-10Rr\right)<0$, inegalitatea de rescrie:

$r^2\left(4R+r\right)^2\geq p^2\left(10Rr+19r^2-p^2\right)$, care rezultă din inegalitatea Blundon- Gerretsen

$16Rr-5r^2\leq p^2\leq\frac{R\left(4R+r\right)^2}{2\left(2R-r\right)}$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$r^2\left(4R+r\right)^2\geq\frac{R\left(4R+r\right)^2}{2\left(2R-r\right)}\left[10Rr+19r^2-\left(16Rr-5r^2\right)\right]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3R^2-4Rr-4r^2\geq 0\Leftrightarrow\left(R-2r\right)\left(3R+2r\right)\geq 0$.

91) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq\frac{4p^2}{9}\sum\frac{h_a^2}{r_br_c}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{h_a^2}{r_b r_c} = \frac{p^4 + p^2\left(2r^2 - 4Rr\right) + r\left(4R + r\right)^3}{p^2 R^2}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2 - 3r^2 - 6Rr\right) \geq \frac{4p^2}{9} \cdot \frac{p^4 + p^2\left(2r^2 - 4Rr\right) + r\left(4R + r\right)^3}{p^2 R^2}$

$\Leftrightarrow p^2\left(27R^2 + 4Rr - 2r^2 - p^2\right) \geq 27R^2\left(3r^2 + 6Rr\right) + r\left(4R + r\right)^3$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$\left(16Rr - 5r^2\right)\left(27R^2 + 4Rr - 2r^2 - \left(4R^2 + 4Rr + 3r^2\right)\right) \geq 27R^2\left(3r^2 + 6Rr\right) + r\left(4R + r\right)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 71R^3 - 122R^2 r - 46Rr^2 + 12r^3 \geq 0 \Leftrightarrow \left(R - 2r\right)\left(71R^2 + 20Rr - 6r^2\right) \geq 0$.

92) In ΔABC: $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq 6Rr \sum \frac{l_a^2}{r_b r_c}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{l_a^2}{r_b r_c} = \sum \frac{4bc}{\left(b + c\right)^2} \leq 3$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2 - 3r^2 - 6Rr\right) \geq 6Rr \cdot 3 \Leftrightarrow p^2 \geq 12Rr + 3r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr - 5r^2 \geq 12Rr + 3r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$.

93) In ΔABC: $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq 12r^2 \sum \frac{m_a^2}{h_a^2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{m_a^2}{h_a^2} = \frac{p^4 + p^2\left(10r^2 - 8Rr\right) + r^2\left(4R + r\right)^2}{8S^2}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2 - 3r^2 - 6Rr\right) \geq 12r^2 \cdot \frac{p^4 + p^2\left(10r^2 - 8Rr\right) + r^2\left(4R + r\right)^2}{8r^2 p^2}$

$\Leftrightarrow p^2\left(p^2 - 16r^2 - 4Rr\right) \geq r^2\left(4R + r\right)^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$\left(16Rr - 5r^2\right)\left(16Rr - 5r^2 - 16r^2 - 4Rr\right) \geq r^2\left(4R + r\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 44R^2 - 101Rr + 26r^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(R - 2r\right)\left(44R - 13r\right) \geq 0$.

94) In ΔABC: $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq 12r^2 \sum \frac{m_a^2}{h_a r_a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{m_a^2}{h_a r_a} = \frac{p^2\left(10r^2-5Rr\right)-r^2\left(4R+r\right)^2}{4S^2}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq 12r^2 \cdot \frac{p^2\left(10r^2-5Rr\right)-r^2\left(4R+r\right)^2}{4r^2p^2}$

$\Leftrightarrow p^2\left(p^2+2r^2-16Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2 \geq 0$.

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $\left(p^2+2r^2-16Rr\right) \geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 1). Dacă $\left(p^2+2r^2-16Rr\right) < 0$, inegalitatea de rescrie:

$r^2\left(4R+r\right)^2 \geq p^2\left(16Rr-2r^2-p^2\right)$, care rezultă din inegalitatea Blundon- Gerretsen

$16Rr-5r^2 \leq p^2 \leq \frac{R\left(4R+r\right)^2}{2\left(2R-r\right)}$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$r^2\left(4R+r\right)^2 \geq \frac{R\left(4R+r\right)^2}{2\left(2R-r\right)}\left[16Rr-2r^2-\left(16Rr-5r^2\right)\right] \Leftrightarrow R \geq 2r$.

95) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq 12r^2\sum \frac{m_a^2}{h_b h_c}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{m_a^2}{h_b h_c} = \frac{p^4-6p^2Rr-r^2\left(4R+r\right)^2}{4S^2}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq 12r^2 \cdot \frac{p^4-6p^2Rr-r^2\left(4R+r\right)^2}{4S^2} \Leftrightarrow r^2\left(4R+r\right)^2 \geq 3p^2$ (Doucet).

96) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq 12r^2\sum \frac{p-a}{h_a-2r} tg\frac{A}{2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{p-a}{h_a-2r} tg\frac{A}{2} = \frac{2R}{r}-1$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq 12r^2 \cdot \frac{2R-r}{r} \Leftrightarrow p^2 \geq 14Rr-r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2 \geq 14Rr-r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$.

97) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq 18Rr\sum \frac{\left(p-a\right)^2}{p\left(h_a-2r\right)} tg\frac{A}{2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{(p-a)^2}{p(h_a-2r)} tg\frac{A}{2}=1$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 18Rr\cdot 1 \Leftrightarrow p^2\geq 12Rr+3r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 12Rr+3r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

98) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 4r\sum \frac{m_a^2}{h_a}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{m_a^2}{h_a}=\frac{p^2-5r^2+2Rr}{4r}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 4r\cdot\frac{p^2-5r^2+2Rr}{4r} \Leftrightarrow p^2\geq 10Rr+7r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 10Rr+7r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

99) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq \frac{8S}{3}\sum \sin A$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \sin A=\frac{p}{R}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq \frac{8rp}{3}\cdot\frac{p}{R} \Leftrightarrow p^2(9R-8r)\geq 27Rr(2R+r)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$(16Rr-5r^2)(9R-8r)\geq 27Rr(2R+r) \Leftrightarrow 9R^2-20Rr+4r^2\geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(9R-2r)\geq 0$.

100) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 12Rr\sum \cos A$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \cos A=1+\frac{r}{R}\leq\frac{3}{2}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 12Rr\cdot\frac{3}{2} \Leftrightarrow p^2\geq 12Rr+3r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 12Rr+3r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

101) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 48r^2\sum\sin^2\frac{A}{2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\sin^2\frac{A}{2}=1-\frac{r}{2R}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 48r^2\cdot\frac{2R-r}{2R} \Leftrightarrow R\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 8r^2\left(2R-r\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$R\left(16Rr-5r^2-3r^2-6Rr\right)\geq 8r^2\left(2R-r\right) \Leftrightarrow 5R^2-12Rr+4r^2\geq 0 \Leftrightarrow \left(R-2r\right)\left(5R-2r\right)\geq 0$.

102) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 8Rr\sum\cos^2\frac{A}{2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\cos^2\frac{A}{2}=2+\frac{r}{2R}\leq\frac{9}{4}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 8Rr\cdot\frac{9}{4} \Leftrightarrow p^2\geq 12Rr+3r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 12Rr+3r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

103) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 3r^2\sum\csc^2\frac{A}{2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\csc^2\frac{A}{2}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{r^2}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 3r^2\cdot\frac{p^2+r^2-8Rr}{r^2} \Leftrightarrow R\geq 2r$ (inegalitatea lui Euler).

104) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 9r^2\sum\sec^2\frac{A}{2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\sec^2\frac{A}{2}=1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 9r^2\cdot\left[1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right] \Leftrightarrow p^2\left(p^2-6r^2-6Rr\right)\geq 3r^2\left(4R+r\right)^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)\left(16Rr-5r^2-6r^2-6Rr\right)\geq 3r^2\left(4R+r\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 56R^2-125Rr+26r^2\geq 0 \Leftrightarrow \left(R-2r\right)\left(56R-13r\right)\geq 0$.

105) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 8Rr\sum \sin^2 A$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \sin^2 A=\frac{p^2-r^2-4Rr}{2R^2}\leq \frac{9}{4}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 8Rr\cdot\frac{9}{4} \Leftrightarrow p^2\geq 12Rr+3r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 12Rr+3r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

106) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 8Rr\sum \sin B\sin C$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \sin B\sin C=\frac{p^2+r^2+4Rr}{4R^2}\leq \frac{9}{4}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 8Rr\cdot\frac{9}{4} \Leftrightarrow p^2\geq 12Rr+3r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 12Rr+3r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

107) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 24Rr\sum \cos B\cos C$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \cos B\cos C=\frac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2}\leq \frac{3}{4}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 24Rr\cdot\frac{3}{4} \Leftrightarrow p^2\geq 12Rr+3r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 12Rr+3r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

108) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 9r^2\sum \csc B\csc C$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \csc B\csc C=\frac{2R}{r}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 9r^2\cdot\frac{2R}{r} \Leftrightarrow p^2\geq 12Rr+3r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 12Rr+3r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

109) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 2S\sum\csc A$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\csc A=\frac{p^2+r^2+4Rr}{2S}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 2S\cdot\frac{p^2+r^2+4Rr}{2S} \Leftrightarrow p^2\geq 11Rr+5r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 11Rr+5r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

110) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 4S\sum\operatorname{ctg} A$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\operatorname{ctg} A=\frac{p^2-r^2-4Rr}{2S}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 4S\cdot\frac{p^2-r^2-4Rr}{2S} \Leftrightarrow p^2\geq 10Rr+7r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 10Rr+7r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

111) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 112r^2\sum\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{16R^2}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 192r^2\cdot\frac{p^2+r^2-8Rr}{16R^2} \Leftrightarrow p^2\left(R^2-4r^2\right)\geq r\left(6R^3+3R^2r-32Rr^2+4r^3\right)$,

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$\Leftrightarrow \left(16Rr-5r^2\right)\left(R^2-4r^2\right)\geq r\left(6R^3+3R^2r-32Rr^2+4r^3\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5R^3-4R^2r-16Rr^2+8r^3\geq 0 \Leftrightarrow \left(R-2r\right)\left(55R^2+6Rr-4r^2\right)\geq 0$.

112) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq\frac{64r^2}{3}\sum\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}=\frac{p^2+(4R+r)^2}{16R^2}\le\frac{27}{16}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\ge\frac{64r^2}{3}\cdot\frac{27}{16}\Leftrightarrow p^2\ge 6Rr+15r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\ge 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\ge 6Rr+15r^2\Leftrightarrow R\ge 2r$.

113) În ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge 6Rr\sum\cos(B-C)$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\cos(B-C)=\frac{p^2+r^2+2Rr-2R^2}{2R^2}\le 3$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\ge 6Rr\cdot 3\Leftrightarrow p^2\ge 12Rr+3r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\ge 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\ge 12Rr+3r^2\Leftrightarrow R\ge 2r$.

114) În ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge 6Rr\sum\cos^2\frac{B-C}{2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\cos^2\frac{B-C}{2}=\frac{p^2+r^2+2Rr+4R^2}{4R^2}\le 3$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\ge 6Rr\cdot 3\Leftrightarrow p^2\ge 12Rr+3r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\ge 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\ge 12Rr+3r^2\Leftrightarrow R\ge 2r$.

115) În ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge 9Rr\sum\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=2$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\ge 9Rr\cdot 2\Leftrightarrow p^2\ge 12Rr+3r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\ge 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 12Rr+3r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

116) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq \frac{2S}{3}\sum \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{2p}{r}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq \frac{2rp}{3}\cdot\frac{2p}{r} \Leftrightarrow 5p^2\geq 54Rr+27r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$5\left(16Rr-5r^2\right)\geq 54Rr+27r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

117) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 4S\sum tg\frac{A}{2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum tg\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{p}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 4rp\cdot\frac{4R+r}{p} \Leftrightarrow 3p^2\geq 34Rr+13r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$3\left(16Rr-5r^2\right)\geq 34Rr+13r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

118) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq \frac{4S}{3}\sum ctg\frac{A}{2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum ctg\frac{A}{2}=\frac{p}{r}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq \frac{4rp}{3}\cdot\frac{p}{r} \Leftrightarrow 5p^2\geq 54Rr+27r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$5\left(16Rr-5r^2\right)\geq 54Rr+27r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

119) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 18Rr\sum tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=1$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 18Rr\cdot 1 \Leftrightarrow p^2\geq 12Rr+3r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 12Rr+3r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

120) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 4r^2\sum ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{r}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 4r^2\cdot\frac{4R+r}{r} \Leftrightarrow 3p^2\geq 34Rr+13r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$3\left(16Rr-5r^2\right)\geq 34Rr+13r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

121) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 2R\sum a\sin A$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum a\sin A=\frac{p^2-r^2-4Rr}{R}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 2R\cdot\frac{p^2-r^2-4Rr}{R} \Leftrightarrow p^2\geq 10Rr+7r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 10Rr+7r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

122) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq \frac{4p}{3}\sum a\cos A$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum a\cos A=\frac{2rp}{R}$.

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq \frac{4rp}{3}\cdot\frac{2rp}{R} \Leftrightarrow p^2(9R-8r)\geq 27Rr(2R+r)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$(16Rr-5r^2)(9R-8r)\geq 27Rr(2R+r) \Leftrightarrow 9R^2-20Rr+4r^2\geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(9R-2r)\geq 0$.

123) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 6r\sum a\cdot tg\frac{A}{2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum a\cdot tg\frac{A}{2}=2(2R-r)$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 6r\cdot 2(2R-r) \Leftrightarrow p^2\geq 14Rr-r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 14Rr-r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

124) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 2r\sum a\cdot ctg\frac{A}{2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum a\cdot ctg\frac{A}{2}=2(4R+r)$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 2r\cdot 2(4R+r) \Leftrightarrow 3p^2\geq 34Rr+13r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$3\left(16Rr-5r^2\right)\geq 34Rr+13r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

125) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq \frac{8p}{9}\sum a\sin B\sin C$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum a\sin B\sin C=\frac{3rp}{R}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq \frac{8p}{9}\cdot\frac{3rp}{R} \Leftrightarrow p^2(9R-8r)\geq 27Rr(2R+r)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)(9R-8r)\geq 27Rr(2R+r) \Leftrightarrow 9R^2-20Rr+4r^2\geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(9R-2r)\geq 0$.

126) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq \frac{8p}{3}\sum a\cos B\cos C$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum a\cos B\cos C=\frac{rp}{R}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq \frac{8p}{3}\cdot\frac{rp}{R} \Leftrightarrow p^2(9R-8r)\geq 27Rr(2R+r)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)(9R-8r)\geq 27Rr(2R+r) \Leftrightarrow 9R^2-20Rr+4r^2\geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(9R-2r)\geq 0$.

127) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 6R\sum(p-a)tg\frac{A}{2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum(p-a)tg\frac{A}{2}=3r$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 6R\cdot 3r \Leftrightarrow p^2\geq 12Rr+3r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 12Rr+3r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

128) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 12\sum(p-a)^2tg^2\frac{A}{2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum(p-a)^2tg^2\frac{A}{2}=3r^2$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 12\cdot 3r^2 \Leftrightarrow p^2\geq 6Rr+15r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr-5r^2\geq 6Rr+15r^2 \Leftrightarrow R\geq 2r$.

129) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq \frac{16S}{3R}\sum a\sin^2\frac{A}{2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum a\sin^2\frac{A}{2}=p\left(1-\frac{r}{R}\right)$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq \frac{16rp}{3R}\cdot p\left(1-\frac{r}{R}\right) \Leftrightarrow p^2\left(9R^2-16Rr+16r^2\right)\geq 27R^2r(2R+r)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$\left(16Rr-5r^2\right)\left(9R^2-16Rr+16r^2\right)\geq 27R^2r(2R+r) \Leftrightarrow 45R^3-164R^2r+168Rr^2-40r^3\geq 0$

$\Leftrightarrow (R-2r)\left(45R^2-74Rr+20r^2\right)\geq 0$.

130) In $\Delta ABC: \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq \frac{8p}{9}\sum a\cos^2\frac{A}{2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum a\cos^2\frac{A}{2}=p\left(1+\frac{r}{R}\right)\leq\frac{3p}{2}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq\frac{8p}{9}\cdot\frac{3p}{2}\Leftrightarrow 5p^2\geq 54Rr+27r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$5\left(16Rr-5r^2\right)\geq 54Rr+27r^2\Leftrightarrow R\geq 2r$.

131) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 4\sum bc\sin^2\frac{A}{2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum bc\sin^2\frac{A}{2}=r\left(4R+r\right)$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq 4\cdot r\left(4R+r\right)\Leftrightarrow 3p^2\geq 34Rr+13r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$3\left(16Rr-5r^2\right)\geq 34Rr+13r^2\Leftrightarrow R\geq 2r$.

132) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq\frac{4}{3}\sum bc\cos^2\frac{A}{2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum bc\cos^2\frac{A}{2}=p^2$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq\frac{4}{3}\cdot p^2\Leftrightarrow 5p^2\geq 54Rr+27r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$5\left(16Rr-5r^2\right)\geq 54Rr+27r^2\Leftrightarrow R\geq 2r$.

133) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq\frac{16}{3}\sum p\left(p-a\right)\sin^2\frac{A}{2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum p\left(p-a\right)\sin^2\frac{A}{2}=\frac{rp^2}{2R}\leq\frac{p^2}{4}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right)\geq\frac{16}{3}\cdot\frac{p^2}{4}\Leftrightarrow 5p^2\geq 54Rr+27r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$5\left(16Rr-5r^2\right)\geq 54Rr+27r^2\Leftrightarrow R\geq 2r$.

134) In ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq\frac{S}{R}\sum\frac{a}{\cos^2\frac{A}{2}}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{a}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{4R(4R+r)}{p}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq \frac{rp}{R} \cdot \frac{4R(4R+r)}{p} \Leftrightarrow 3p^2 \geq 34Rr+13r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$3\left(16Rr-5r^2\right) \geq 34Rr+13r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$.

135) În ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq \frac{S}{3R} \sum \frac{a}{\sin^2 \frac{A}{2}}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum \frac{a}{\sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{4Rp}{r}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq \frac{rp}{3R} \cdot \frac{4Rp}{r} \Leftrightarrow 5p^2 \geq 54Rr+27r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$5\left(16Rr-5r^2\right) \geq 54Rr+27r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$.

136) În ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq 2p \sum atg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum atg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} = \frac{2r(4R+r)}{p}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \geq 2p \cdot \frac{2r(4R+r)}{p} \Leftrightarrow 3p^2 \geq 34Rr+13r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$3\left(16Rr-5r^2\right) \geq 34Rr+13r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$.

137) În ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq 3\sum IA^2$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum IA^2 = p^2+r^2-8Rr$.

Este suficient să arătăm că:

138) În ΔABC: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq 3\sum GA^2$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum GA^2 = \frac{2}{3}\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2 - 3r^2 - 6Rr\right) \geq 3 \cdot \frac{2}{3}\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right) \Leftrightarrow p^2 \geq 10Rr + 7r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr - 5r^2 \geq 10Rr + 7r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$.

139) In ΔABC: $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq 3\sum a^2 + 9IG^2$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema,** $\sum a^2 = 2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)$ și $IG^2 = \frac{1}{9}\left(p^2 + 5r^2 - 16Rr\right)$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2 - 3r^2 - 6Rr\right) \geq 3 \cdot 2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right) + 9 \cdot \frac{1}{9}\left(p^2 + 5r^2 - 16Rr\right) \Leftrightarrow R \geq 2r$ (Euler).

140) In ΔABC: $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq 6Rr\sum\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)\cos A$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)\cos A = 3$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2 - 3r^2 - 6Rr\right) \geq 6Rr \cdot 3 \Leftrightarrow p^2 \geq 12Rr + 3r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr - 5r^2 \geq 12Rr + 3r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$.

141) In ΔABC: $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq \frac{4Sr}{R}\sum\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)\operatorname{ctg} A$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Vezi **Lema** și $\sum\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)\operatorname{ctg} A = \frac{p^2(2R - r) - r^2(4R + r)}{2RS}$.

Este suficient să arătăm că:

$3\left(p^2 - 3r^2 - 6Rr\right) \geq \frac{4r^2 p}{R} \cdot \frac{p^2(2R - r) - r^2(4R + r)}{2RS} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^2\left(3R^2 - 4Rr + 2r^2\right) \geq r\left(18R^3 + 9R^2 r - 8Rr^2 - 2r^3\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$\left(16Rr - 5r^2\right)\left(3R^2 - 4Rr + 2r^2\right) \geq r\left(18R^3 + 9R^2 r - 8Rr^2 - 2r^3\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15R^3 - 44R^2 r + 30Rr^2 - 4r^3 \geq 0 \Leftrightarrow (R - 2r)\left(15R^2 - 14Rr + 2r^2\right) \geq 0$.

Remarcă.
La fiecare din inegalitățile de mai sus egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Bibliografie:

1. Vasile Cârtoaje, Problema 22694, Gazeta Matematică-B ,Nr. 7-8/1992.
2. Nguen Ngoc Tu, Problema JP.118, Romanian Mathematical Magazine, Spring 2018 , coordonator Daniel Sitaru.
3. O.Bottema, R.Z.Djordjevic, R.R.Janic, D.S.Mitrinovic, P.M.Vasic, Geometric Inequalities, Groningen 1969, The Netherlands.
4. Marin Chirciu, Inegalități algebrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2014.
5. Marin Chirciu, Inegalități geometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2015.
6. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.
7. Marin Chirciu, Inegalități cu laturi și cu raze în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2017.
8. Marin Chirciu, Inegalități cu linii importante în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2018.
9. Marin Chirciu, Puncte remarcabile în triunghi. Distanțe. Inegalități, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2019.

3. Greşeli tipice în rezolvarea exerciţiilor şi a problemelor de analiză matematică

Prof. Ungureanu Angelica-Mihaela
Liceul „Alexandru cel Bun”, Botoşani

Tipul de greşeli pe care-l prezentăm sub denumirea de „greşeli tipice”, are drept principală sursă necunoaşterea corectă a teoriei matematice. Consecinţele imediate ale acestui fapt conduc la interpretări, extinderi sau extrapolări eronate ale unor operaţii, teoreme sau extinderi matematice.

Este necesar să obişnuim elevii să sesizeze propriile greşelile, greşelile altora şi greşelile în general. Identificând şi analizând greşelile, elevul va preveni şi va evita ulterior apariţia aceleiaşi erori sau a alteia.

În cele ce urmează, vom prezenta o suită de exerciţii, probleme şi „demonstraţii” din analiza matematică punând accentul pe cele referitoare la punctele de extrem ale unei funcţii. Prin intermediul acestora vom scoate în evidenţă unele greşeli de largă circulaţie în activitatea rezolvitorilor începători. Unele greşeli, care nu par a fi „vizibile” la prima vedere, îşi fac adeseori apariţia şi în activitatea elevilor experimentaţi.

I. Din neatenţie, apar deseori greşeli privind domeniul de definiţie al funcţiilor.

1) Spre exemplu, pentru funcţia definită prin relaţia $f(x)=\ln(1+\sin x)$, se stabileşte greşit $x\in\mathbb{R}$. Evident, funcţia nu există pentru $x_k=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$, deci $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

2) Uneori se adoptă în mod greşit ca domeniu al unei funcţii date, domeniul altei funcţii, obţinută după efectuarea de „operaţii” asupra funcţiei date.

Astfel, observăm că funcţia definită prin relaţia $f(x)=\ln\frac{2-x^2}{3-x^2}$ are $D_f=\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ şi funcţia $g(x)=\ln(2-x^2)-\ln(3-x^2)$ are $D_g=\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

Acest procedeu greşit îl întâlnim sub pretextul simplificării calculelor (spre exemplu, în calculul derivatei unei funcţii), dar conduce la grave erori atunci când este vorba de studiul variaţiei şi trasarea graficului unei funcţii.

II. O variată sursă de greşeli iese în evidenţă la determinarea derivatei unei funcţii.

1) Nefolosirea regulilor de derivare conduce la greşeli în rezultatele derivatelor generând concluzii false.

De exemplu, calculează greşit: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f(x)'}{g(x)'}$. Procedeul este aplicat în virtutea inerţiei, mai ales după parcurgerea regulilor lui l’Hospital.

2) O greşeală frecvent întâlnită constă în omiterea modulului la scoaterea de sub radicalul de ordin par, ceea ce conduce la o determinare eronată a derivatei, deci, implici, şi a punctelor de extrem ale funcţiei.

Spre exemplu, afirmaţia $\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)'=\frac{2}{1+x^2}, (\forall)x\in\mathbb{R}$ este greşită. Calculul corect al derivatei funcţiei este:

$$\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\cdot\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\cdot|1-x^2|} =$$

$$\begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, & x\in(-1,1) \\ -\frac{2}{1+x^2}, & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \end{cases}'$$

derivabilitatea funcţiei în punctele 1 şi -1 urmând să fie studiată separat.

De fapt, constatăm că s-a comis încă o greşeală: la simplificarea cu factorul $1-x^2$, s-a omis să se excludă din domeniul de existenţă al derivatei punctele 1 şi -1.

3) Greşeli apar şi la calcularea derivatei unei funcţii într-un punct. Adeseori se confundă $f'(x_0)$ cu $\left(f(x_0)\right)'$, ceea ce este fals deoarece primul număr reprezintă derivata funcţiei f calculată în x_0 iar al doilea reprezintă derivata funcţiei constante $f(x_0)$ şi $\left(f(x_0)\right)' = 0$.

III. În mod eronat, se caută punctele de extrem ale unei funcţii f în $D_{f'}$. În realitate, un punct $x_0 \in D$ poate fi punct de extrem fără ca funcţia să fie derivabilă în acel punct.

Spre exemplu, funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0 \\ x^2e^{-x}, & x>0 \end{cases}$ are derivata $f'(x)=\begin{cases} -1, & x<0 \\ (-x^2+2x)e^{-x}, & x>0 \end{cases}$. În puctul $x_0=0$ funcţia nu este derivabilă, dar $f_s'(0)=-1, f_d'(x)>0, (\forall)x\in(0,2)$, deci $x_0=0$ este punct de minim local. Funcţia are un maxim local în $x_1=2$ şi $f'(2)=0$ (funcţia este derivabilă în $x_1=2$ interior intervalului $(0,+\infty)$).

Pentru aflarea punctelor de extrem în care f nu este derivabilă (dar are derivate laterale finite nenule sau infinite) se studiază semnele derivatelor laterale.

IV. Altă sursă de greşeli apare pe fondul identificării mulţimii punctelor critice cu mulţimea punctelor de extrem (în cazul funcţiilor derivabile).

1) Se poate întâmpla ca într-un punct derivata să se anuleze fără ca punctul respectiv să fie punct de extrem. Într-adevăr, dacă se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3$, derivabilă pe $\mathbb{R}$, cu $f'(x)=3x^2, (\forall)x\in\mathbb{R}$, se observă că $f'(0)=0$ dar punctul $x_0=0$ nu este punct de extrem al funcţiei.

Deci, dacă f este derivabilă, anularea derivatei este condiţie necesară pentru existenţa extremului, nu însă şi suficientă. Anularea derivatei în punctul x_0 şi schimbarea simplă de semn a derivatei în acest punct (trecerea de la valori numai pozitive la altele numai negative sau invers) este condiţie suficientă de extrem.

Schimbarea simplă de semn a derivatei într-un punct nu este însă şi necesară. Într-adevăr, funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^4\left(2+\sin\frac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ are în $x_0=0$ un minim absolut, însă derivata $f'(x)=\begin{cases} x^2\left[4x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)-\cos\frac{1}{x}\right], & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ ia atât valori pozitive cât şi negative în fiecare vecinătate a originii (în fiecare interval de forma $(a,0)$sau $(0,b)$funcţia nu este monotonă).

2) Se poate întâmpla ca o funcţie să fie derivabilă pe un interval $[a,b]$ şi derivata nu se anulează în nici un punct din acest interval. În acest caz, a şi b sunt punctele de extrem ale funcţiei (consecinţă a faptului că f' are proprietatea lui Darboux).

V. În mod greşit, se consideră că în cazul unui punct de extrem, există o vecinătate în care f să fie descrescătoare la stânga şi crescătoare la dreapta punctului (sau invers).

Într-adevăr, funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2-x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$ are în $x_0=0$ un maxim local egal cu 2, însă, oricare ar fi intervalul $(0,\varepsilon)$, există $m\,n\in\mathbb{N}$, cu $x_n=\frac{1}{2n\pi}\in(0,\varepsilon)$ şi $y_m=\frac{1}{(2m+1)\pi}\in(0,\varepsilon)$ în care derivata $f'(x)=f(x)=\begin{cases}-4x-2x\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ ia valori de semen contrare.

Derivata f' fiind continuă însă pe $(0,\varepsilon)$, există vecinătăţi ale punctelor x_n şi y_m pe care ea este pozitivă, respectiv negativă. Deci f' nu păstrează semn constant pe $(0,\varepsilon)$ şi în consecinţă f nu este monotonă pe $(0,\varepsilon)$.

Deci condiţia ca f continuă în x_0 şi există o vecinătate V a lui x_0 în care f să fie descrescătoare la stânga lui x_0 şi crescătoare la dreapta lui x_0 (sau invers) este condiţie suficientă de extrem, nu însă şi necesară.

VI. Greşeli apar şi în interpretarea rolului derivatei a doua în caracterizarea punctelor de extrem.

Condiţia $f''(x_0)>0$ (respectiv $f''(x_0)<0$) pentru un punct critic este suficientă, dar nu şi necesară pentru ca x_0 să fie punct de minim (respectiv maxim) local.

Într-adevăr, punctul $x_0=0$ este punct de minim global (deci şi local) pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4$, dar $f''(x)=12x^2$, deci $f''(0)=0$.

Pentru a decide, în cazul funcţiilor derivabile, care din punctele critice sunt puncte de extrem, putem recurge la derivatele de ordin superior.

BIBLIOGRAFIE

1. Banea, H. – *Metodica predării matematicii*, Editura Paralele 45, Piteşti, 1998.
2. Catană, A., Săcuiu, M., Stănăşilă, O. – *Metodica predării analizei matematice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
3. Ganga, M. – *Elemente de analiză matematică pentru clasa a XI-a, partea a II-a*, Editura Mathpress, Ploieşti, 1999.
4. Konnerth, O. – *Greşeli tipice în învăţarea analizei matematice,* Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1982.
5. Udrişte, C., Bucur, C. – *Probleme de matematici şi observaţii metodologice*, Editura Facla, Timişoara, 1980.
6. Udrişte, C., Tănăsescu, E. – *Minime şi maxime ale funcţiilor reale de variabile reale*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1980.