REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

DECEMBRIE 2021

ISSN 2065-6432

www.mateinfo.ro

REVISTĂ DIN FEBRUARIE 2009

revista.mateinfo@yahoo.com

ARTICOLE REVISTĂ:

Marin Chirciu[1]
Art 2821

1. OMOGENIZARE

Reamintim:
Funcția $f(x_1,x_2,...,x_n)$ se numește omogenă de gradul k în raport cu variabilele $x_1,x_2,...,x_n$ dacă pentru un t oarecare este adevărată relația:
$f(tx_1,tx_2,...,tx_n)=t^k f(x_1,x_2,...,x_n)$.
Articolul propune o modalitate unitară de rezolvare a unor probleme prin omogenizare.

Aplicația1.

Dacă $x, y, z > 0$ şi $x + y + z = 1$, arătaţi că $5\sum x^2 \le 6\sum x^3 +1$.

Mathematical Reflections 4/2006, Mihai Piticari şi Dan Popescu

Soluție: Omogenizăm şi folosim inegalitatea lui Schur: $5\sum x^2 \le 6\sum x^3 + (x+y+z)^3 = 6\sum x^3 + \sum x^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x) = 7\sum x^3 + 3\left(2xyz + \sum xy(x+y)\right) \Leftrightarrow 5\left(x^2+y^2+z^2\right)(x+y+z) = 5\left(\sum x^3 + \sum xy(x+y)\right) \overset{(1)}{\le} 7\sum x^3 + 6xyz + 3\sum xy(x+y)$,
unde (1) $\Leftrightarrow 2\sum x^3 + 6xyz \ge 2\sum xy(x+y) \Leftrightarrow \sum x^3 + 3xyz \ge \sum xy(x+y) \Leftrightarrow$ Schur.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Aplicația2.

Fie $x, y, z \in [0,\infty)$ cu $x+y+z=1$. Să se arate că

$$9\left(x^3+y^3+z^3\right)+1 \ge 6\left(x^2+y^2+z^2\right).$$

Problema 27745 , GM 10/2019, George Mihai, Slatina

Soluție .

Omogenizăm inegalitatea și obținem:
$9\left(x^3+y^3+z^3\right)+(x+y+z)^3 \ge 6\left(x^2+y^2+z^2\right)(x+y+z) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 9\left(x^3+y^3+z^3\right)+x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x) \ge 6\left(x^3+y^3+z^3+\sum xy(x+y)\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 9\sum x^3 + \sum x^3 + 3\left(2xyz+\sum xy(x+y)\right) \ge 6\sum x^3 + 6\sum xy(x+y) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4\sum x^3 + 6xyz \ge 3\sum xy(x+y)$, care rezultă din sumarea inegalităților (1) și (2),
unde (1) : $2\sum x^3 + 6xyz \ge 2\sum xy(x+y)$, adevărată din inegalitatea lui SCHUR :
$\sum x^r(x-y)(x-z) \ge 0$, unde $x,y,z \ge 0$, pentru $r=1$, obținând $\sum x^3 + 3xyz \ge \sum xy(x+y)$
și (2) : $2\sum x^3 \ge \sum xy(x+y)$, adevărată din $x^3+y^3 \ge xy(x+y) \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$ și analoagele iar apoi se sumează cele trei inegalități obținute.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Remarcă.

Inegalitatea se poate dezvolta:

Fie $x, y, z \in [0,\infty)$ cu $x+y+z=1$. Să se arate că

$$n\left(x^3+y^3+z^3\right)+1 \ge \left(3+\frac{n}{3}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right), \text{ unde } n \ge 6.$$

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești*

Marin Chirciu, Pitești

Soluție .
Omogenizăm inegalitatea și obținem:

$$n\left(x^3+y^3+z^3\right)+\left(x+y+z\right)^3\ge\left(3+\frac{n}{3}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x+y+z\right)\Leftrightarrow$$

$$3n\left(x^3+y^3+z^3\right)+3\left(x^3+y^3+z^3\right)+9\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)\ge\left(n+9\right)\left(x^3+y^3+z^3+\sum xy\left(x+y\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow 3n\sum x^3+3\sum x^3+9\left(2xyz+\sum xy\left(x+y\right)\right)\ge\left(n+9\right)\sum x^3+\left(n+9\right)\sum xy\left(x+y\right)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left(2n-6\right)\sum x^3+18xyz\ge n\sum xy\left(x+y\right)$, care rezultă din sumarea inegalităților (1) și (2),
unde (1) : $6\sum x^3+18xyz\ge 6\sum xy\left(x+y\right)$, adevărată din inegalitatea lui SCHUR :
$\sum x^r\left(x-y\right)\left(x-z\right)\ge 0$, unde $x,y,z\ge 0$, pentru $r=1$, obținând $\sum x^3+3xyz\ge\sum xy\left(x+y\right)$
și (2) : $2\left(n-6\right)\sum x^3\ge\left(n-6\right)\sum xy\left(x+y\right)$, adevărată din ipoteza $n\ge 6$ și
$x^3+y^3\ge xy\left(x+y\right)\Leftrightarrow\left(x-y\right)^2\ge 0$ și analoagele , iar apoi se sumează cele trei inegalități obținute.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Notă.
1).Pentru $n=9$ se obține Problema 27745 din GM 10/2019, propusă de George Mihai, Slatina.
2).Pentru $n=6$ se obține problema:

Fie $x,y,z\in\left[0,\infty\right)$ cu $x+y+z=1$. Să se arate că

$$6\left(x^3+y^3+z^3\right)+1\ge 5\left(x^2+y^2+z^2\right).$$

Soluție .
Omogenizăm inegalitatea și obținem:

$$6\left(x^3+y^3+z^3\right)+\left(x+y+z\right)^3\ge 5\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x+y+z\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\left(x^3+y^3+z^3\right)+\left(x^3+y^3+z^3\right)+3\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)\ge 5\left(x^3+y^3+z^3+\sum xy\left(x+y\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow 6\sum x^3+\sum x^3+3\left(2xyz+\sum xy\left(x+y\right)\right)\ge 5\sum x^3+5\sum xy\left(x+y\right)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sum x^3+3xyz\ge\sum xy\left(x+y\right)$, care rezultă din inegalitatea lui SCHUR :
$\sum x^r\left(x-y\right)\left(x-z\right)\ge 0$, unde $x,y,z\ge 0$, pentru $r=1$, obținând $\sum x^3+3xyz\ge\sum xy\left(x+y\right)$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Aplicația3.

a) Dacă a, b, $c>0$ și $a+b+c=1$, arătți că:

$$10\left(a^3+b^3+c^3\right)-9\left(a^4+b^4+c^4\right)\ge 1.$$

China 2007

b)Dacă a, b, $c>0$ și $a+b+c=1$, arătți că:

$$13\left(a^3+b^3+c^3\right)-12\left(a^4+b^4+c^4\right)\ge 1.$$

Marin Chirciu

Soluție.
b)Omogenizând, inegalitatea este echivalentă cu:

$13(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)-12(a^4+b^4+c^4)\geq$
$\geq(a+b+c)^4 \Leftrightarrow 13\left(\sum a^4+\sum ab\left(a^2+b^2\right)\right)-12\sum a^4 \geq \sum a^4+4\sum ab\left(a^2+b^2\right)+6\sum a^2b^2+$
$+12abc\sum a \Leftrightarrow 13\sum a^4+13\sum ab\left(a^2+b^2\right)-12\sum a^4 \geq \sum a^4+4\sum ab\left(a^2+b^2\right)+6\sum a^2b^2+$
$+12abc\sum a \Leftrightarrow 9\sum ab\left(a^2+b^2\right)\geq 6\sum a^2b^2+12abc\sum a \mid :3 \Leftrightarrow 3\sum ab\left(a^2+b^2\right)\geq 2\sum a^2b^2+$
$+4abc\sum a$, adevărată din adunarea inegalităților $\sum ab\left(a^2+b^2\right)\geq 2\sum a^2b^2$, (1) și
$2\sum ab\left(a^2+b^2\right)\geq 4abc\sum a$, (2), unde (1) $\Leftrightarrow \sum ab\left(a^2+b^2-2ab\right)\geq 0 \Leftrightarrow \sum ab(a-b)^2\geq 0$,
iare (2) este adevărată din $\sum ab\left(a^2+b^2\right)=ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+ca\left(c^2+a^2\right)=$
$=a^3b+b^3a+b^3c+c^2b+c^3a+a^3c=c\left(a^3+b^3\right)+a\left(b^3+c^3\right)+b\left(c^3+a^3\right)=\sum c\left(a^3+b^3\right)\overset{(3)}{\geq}$
$\overset{(3)}{\geq}\sum c\cdot ab(a+b)=abc\sum(a+b)=abc(2a+2b+2c)=2abc\sum a$, unde (3) $\Leftrightarrow a^3+b^3\geq$
$\geq ab(a+b) \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2\geq 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Aplicația4.

If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=3$ then find the minimum of the expression

$$P=abc+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2.$$

Phan Ngoc Chau, October 1th 2021, VietNam

Soluție.

Demonstrăm

Lema

If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=3$ then

$$abc+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\geq 1.$$

Demonstrație.

Omogenizând obținem:

$abc+a^2+b^2+c^2-2(a+b+c)+3\geq 1 \overset{a+b+c=3}{\Leftrightarrow} abc+a^2+b^2+c^2-2\cdot 3+3\geq 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow abc+a^2+b^2+c^2\geq 4 \overset{a+b+c=3}{\Leftrightarrow} abc+\left(a^2+b^2+c^2\right)\dfrac{a+b+c}{3}\geq 4\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 27abc+9\sum a^3+9\sum bc(b+c)\geq 4(a+b+c)^3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 27abc+9\sum a^3+9\sum bc(b+c)\geq 4\left(\sum a^3+3\sum bc(b+c)+6abc\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5\sum a^3+3abc\geq 3\sum bc(b+c)$, care rezultă din adunarea inegalităților:
$\sum a^3+3abc\geq \sum bc(b+c)$, (Schur) și $4\sum a^3\geq 2\sum bc(b+c)$, adevărată din:
$a^3+b^3\geq ab(a+b)$ și analoagele.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.
Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem că minimum of the expression $P=abc+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2$ este 1 și minimul este atins pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=3$ then find the minimum of the expression

$$P = abc + (a-\lambda)^2 + (b-\lambda)^2 + (c-\lambda)^2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Demonstrăm

Lema

If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=3$ then

$$abc + (a-\lambda)^2 + (b-\lambda)^2 + (c-\lambda)^2 \geq 3(\lambda-1)^2 + 1.$$

Demonstrație.

Omogenizând obținem:

$abc + a^2 + b^2 + c^2 - 2\lambda(a+b+c) + 3\lambda^2 \geq 3(\lambda-1)^2 + 1 \overset{a+b+c=3}{\Leftrightarrow}$

$\overset{a+b+c=3}{\Leftrightarrow} abc + a^2 + b^2 + c^2 - 2\lambda \cdot 3 + 3\lambda^2 \geq 3(\lambda-1)^2 + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow abc + a^2 + b^2 + c^2 \geq 4 \overset{a+b+c=3}{\Leftrightarrow} abc + (a^2+b^2+c^2)\dfrac{a+b+c}{3} \geq 4\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 27abc + 9\sum a^3 + 9\sum bc(b+c) \geq 4(a+b+c)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 27abc + 9\sum a^3 + 9\sum bc(b+c) \geq 4\left(\sum a^3 + 3\sum bc(b+c) + 6abc\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\sum a^3 + 3abc \geq 3\sum bc(b+c)$, care rezultă din adunarea inegalităților:

$\sum a^3 + 3abc \geq \sum bc(b+c)$, (Schur) și $4\sum a^3 \geq 2\sum bc(b+c)$, adevărată din:

$a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$ și analoagele.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem că minimum of the expression

$P = abc + (a-\lambda)^2 + (b-\lambda)^2 + (c-\lambda)^2$ este $3(\lambda-1)^2 + 1$ și minimul este atins

pentru $(a,b,c) = (1,1,1)$.

Notă.

Pentru $\lambda = 1$ se obține Problema propusă de Phan Ngoc Chau în RMM 10/2021.

If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=3$ then find the minimum of the expression

$$P = abc + (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2.$$

Phan Ngoc Chau, October 1th 2021, VietNam

Aplicația5.

S515. If $a,b,c>0$, such that $abc=1$ then

$$\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}\right)^6 \geq 27(a+2)(b+2)(c+2).$$

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

Soluție.

Cu substituția $\sqrt[3]{a} = x, \sqrt[3]{b} = y, \sqrt[3]{c} = z$, problema se reformulează:

If $x,y,z>0$, such that $xyz=1$ then

$$(x+y+z)^6 \geq 27(x^3+2)(y^3+2)(z^3+2).$$

Omogenizând inegalitatea obținem:

$(x+y+z)^6 xyz \geq 27(x^3+2xyz)(y^3+2xyz)(z^3+2xyz) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+y+z)^6 \geq 27(x^2+2yz)(y^2+2xz)(z^2+2xy)$, care rezultă din inegalitatea mediilor:

$$(x+y+z)^6=\left[(x+y+z)^2\right]^3=\left[\sum\left(x^2+2yz\right)\right]^3\geq\left[3\sqrt[3]{\prod\left(x^2+2yz\right)}\right]^3=27\prod\left(x^2+2yz\right).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

Inegalitatea se poate dezvolta.

a) If $a,b>0$, such that $ab=1$ then

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^4\geq 4(a+1)(b+1).$$

Soluție.

Cu substituția $\sqrt{a}=x,\sqrt{b}=y$, problema se reformulează:

If $x,y>0$, such that $xy=1$ then

$$(x+y)^4\geq 4\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right).$$

Omogenizând inegalitatea obținem:

$(x+y)^4\geq 4\left(x^2+xy\right)\left(y^2+xy\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+y)^4\geq 4\left(x^2+xy\right)\left(y^2+xy\right)$, care rezultă din inegalitatea mediilor:

$$(x+y)^4=\left[(x+y)^2\right]^2=\left[\sum\left(x^2+xy\right)\right]^2\geq\left[2\sqrt{\prod\left(x^2+xy\right)}\right]^2=4\prod\left(x^2+xy\right).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=1$.

b)If $a,b,c,d>0$, such that $abcd=1$ then

$$\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}+\sqrt[4]{d}\right)^8\geq 256(a+3)(b+3)(c+3)(d+3).$$

Soluție.

Cu substituția $\sqrt[4]{a}=x,\sqrt[4]{b}=y,\sqrt[4]{c}=z,\sqrt[4]{d}=t$, problema se reformulează:

If $x,y,z,t>0$, such that $xyzt=1$ then

$$(x+y+z+t)^8\geq 256\left(x^4+3\right)\left(y^4+3\right)\left(z^4+3\right)\left(t^4+3\right).$$

Omogenizând inegalitatea obținem:

$(x+y+z+t)^8\,xyzt\geq 64\left(x^4+3xyzt\right)\left(y^4+3xyzt\right)\left(z^4+3xyzt\right)\left(t^4+3xyzt\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+y+z+t)^8\geq 64\left(x^3+3yzt\right)\left(y^3+3xzt\right)\left(z^3+3xyt\right)\left(t^3+3xyz\right)$, care rezultă din inegalitatea mediilor:

$$(x+y+z+t)^8=\left[(x+y+z+t)^2\right]^4=\left[\sum\left(x^2+2yz\right)\right]^4\geq\left[4\sqrt[4]{\prod\left(x^2+yz+yt+zt\right)}\right]^4=$$

$$=256\prod\left(x^2+yz+yt+zt\right).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

Aplicația6.

a)Demonstrați inegalitatea

$$\frac{a+b}{3a+2b+c}+\frac{b+c}{3b+2c+a}+\frac{c+a}{3c+2a+b}\leq 1,$$

pentru orice numere strict pozitive a,b,c .

SGM 4/2017, Eugen Radu, București

Soluție.

Datorită omogenității putem lua $a+b+c=1$.

Inegalitatea se scrie:

$$\sum\frac{b+c}{2b+c+1}\le 1\Leftrightarrow\sum\frac{2b+2c}{2b+c+1}\le 2\Leftrightarrow\sum\left(1+\frac{c-1}{2b+c+1}\right)\le 2\Leftrightarrow 3-\sum\frac{1-c}{2b+c+1}\le 2\ \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\sum\frac{1-c}{2b+c+1}\ge 1$, care rezultă din inegalitatea lui Bergström.

Obținem

$$\sum\frac{1-c}{2b+c+1}=\sum\frac{(1-c)^2}{(1-c)(2b+c+1)}\ge\frac{(3-a-b-c)^2}{\sum(1-c)(2b+c+1)}=\frac{(3-1)^2}{3+2\sum a-\sum a^2-2\sum bc}=$$

$$=\frac{4}{5-\left(\sum a\right)^2}=\frac{4}{5-1}=1.$$

În acest caz , $a+b+c=1$, egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Apoi trecem $a\to\frac{a}{a+b+c}, b\to\frac{b}{a+b+c}, c\to\frac{c}{a+b+c}$ în inegalitatea demonstrată mai sus și obținem inegalitatea adevărată pentru orice numere strict pozitive a,b,c .

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Notă

Inegalitatea poate fi dezvoltată:

b)Fie $n\in N^*$. Demonstrați inegalitatea

$$\frac{a+b}{(n+2)a+(n+1)b+c}+\frac{b+c}{(n+2)b+(n+1)c+a}+\frac{c+a}{(n+2)c+(n+1)a+b}\le\frac{2}{n+1}\ ,$$

pentru orice numere strict pozitive a,b,c .

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Datorită omogenității putem lua $a+b+c=1$.

Inegalitatea se scrie:

$$\sum\frac{a+b}{2a+b+n}\le\frac{2}{n+1}\Leftrightarrow\sum\frac{2a+2b}{2a+b+n}\le\frac{4}{n+1}\Leftrightarrow\sum\left(1+\frac{b-n}{2a+b+n}\right)\le\frac{4}{n+1}\Leftrightarrow 3+\sum\frac{b-n}{2a+b+n}\le\frac{4}{n+1}$$

$\Leftrightarrow\sum\frac{n-b}{2a+b+n}\ge 3-\frac{4}{n+1}\Leftrightarrow\sum\frac{n-b}{2a+b+n}\ge\frac{3n-1}{n+1}$, care rezultă din inegalitatea lui Bergström.

Obținem

$$\sum\frac{n-b}{2a+b+n}=\sum\frac{(n-b)^2}{(n-b)(2a+b+n)}\ge\frac{(3n-a-b-c)^2}{\sum(1-b)(2a+b+n)}=\frac{(3n-1)^2}{3n^2+2n\sum a-\sum a^2-2\sum bc}=$$

$$=\frac{(3n-1)^2}{3n^2+2n-\left(\sum a\right)^2}=\frac{(3n-1)^2}{3n^2+2n-1}=\frac{(3n-1)^2}{(n+1)(3n-1)}=\frac{3n-1}{n+1}.$$

În acest caz , $a+b+c=1$, egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Apoi trecem $a\to\frac{a}{a+b+c}, b\to\frac{b}{a+b+c}, c\to\frac{c}{a+b+c}$ în inegalitatea demonstrată mai sus și obținem inegalitatea adevărată pentru orice numere strict pozitive a,b,c .

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarcă

Pentru $n=1$ se obține problema S:317.134 din Suplimentul GM 4/2017.

Aplicația9.

If $x,y,z>0$ then

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\ge\frac{2y}{x+y}+\frac{2z}{y+z}+\frac{2z}{z+x}.$$

Soluție.

Demonstrăm

Lema

If $x,y,z>0$ then

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\ge\frac{4x}{x+z}.$$

Demonstrație.

Datorită omogenității putem lua $y=1$.

Avem $x+\frac{1}{z}\ge\frac{4x}{x+z}\Leftrightarrow(x+z)(xz+1)\ge4xz$, care rezultă din $x+z\ge2\sqrt{xz}$ și $xz+1\ge2\sqrt{xz}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=z=1$și $y>0$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem obținem $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\ge\frac{4x}{x+z}$, $\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\ge\frac{4y}{x+y}$, $\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\ge\frac{4z}{z+y}$, se sumează și obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Aplicația10.

If $a,b,c>0$ such that $ab+bc+ca=3$ and $0\le\lambda\le1$ then

$$\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\ge\frac{3}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Inegalitatea se scrie echivalent:

$$\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\ge\frac{3}{\lambda+1}\Leftrightarrow(\lambda+1)\sum(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)\ge3\prod(a^2+\lambda)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(2\lambda-\lambda^2)\sum a^2+3\lambda^2\ge(2\lambda-1)\sum b^2c^2+3a^2b^2c^2, \text{ (1).}$$

Folosind inegalitatea mediilor obținem:

$(a+b+c)(ab+bc+ca)\ge9abc$ și $ab+bc+ca=3$, rezultă $a+b+c\ge3abc$, (2).

Omogenizând și ținând seama de (2) pentru a demonstra inegalitatea (1) este suficient să arătăm că:

$$(2\lambda-\lambda^2)\frac{\sum bc}{3}\sum a^2+3\lambda^2\frac{\left(\sum bc\right)^2}{9}\ge(2\lambda-1)\sum b^2c^2+abc\sum a\Leftrightarrow$$

$$(2\lambda-\lambda^2)\sum bc\sum a^2+\lambda^2\left(\sum bc\right)^2\ge3(2\lambda-1)\sum b^2c^2+3abc\sum a\Leftrightarrow$$

$$(2\lambda-\lambda^2)\sum bc(b^2+c^2)\ge(6\lambda-3-\lambda^2)\sum b^2c^2+(3-2\lambda-\lambda^2)abc\sum a,$$

care rezultă din $(2\lambda-\lambda^2)>0$, adevărat din $0\le\lambda\le1$ și $b^2+c^2\ge2bc\Leftrightarrow(b-c)^2\ge0$.

Este suficient să arătăm că:

$$(2\lambda-\lambda^2)\sum bc\cdot2bc\ge(6\lambda-3-\lambda^2)\sum b^2c^2+(3-2\lambda-\lambda^2)abc\sum a\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(4\lambda-2\lambda^2-6\lambda+3+\lambda^2)\sum b^2c^2\ge(3-2\lambda-\lambda^2)abc\sum a\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left(3-2\lambda-\lambda^2\right)\sum b^2c^2 \ge \left(3-2\lambda-\lambda^2\right)abc\sum a$, care rezultă din $\left(3-2\lambda-\lambda^2\right)\ge 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+3)\le 0$, evident din $0\le\lambda\le 1$ și $\sum b^2c^2 \ge abc\sum a$, adevărat din
$\sum x^2 \ge \sum yz$, pentru $x=bc, y=ca, z=ab$.
Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Notă.
Pentru $\lambda=1$ se obține Problema 21 din Capitolul 1, Algebraic Inequalities, Old and News Methods, Vasile Cîrtoaje, Editura GIL-2006.

Aplicația11.

a)Fie $a,b,c>0$ astfel încât $a+b+c=1$. Arătați că

$$ab+bc+ca-abc\le\frac{8}{27}.$$

Soluție.
Omogenizăm, folosind condiția din ipoteză $a+b+c=1$.
Inegalitatea se scrie: $(ab+bc+ca)(a+b+c)-abc\le\frac{8}{27}(a+b+c)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 27(ab+bc+ca)(a+b+c)-27abc\le 8(a+b+c)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 27\left[\sum bc(b+c)+3abc\right]-27abc\le 8\left[\sum a^3+3(a+b)(b+c)(c+a)\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 27\left[\sum bc(b+c)+3abc\right]-27abc\le 8\left[\sum a^3+3\left(\sum bc(b+c)+2abc\right)\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8\sum a^3\ge 3\sum bc(b+c)+6abc$,

care rezultă din sumarea inegalităților (1) și (2),
unde (1) este : $6\sum a^3\ge 3\sum bc(b+c) \Leftrightarrow 2\sum a^3\ge\sum bc(b+c)$, adevărată din $b^3+c^3\ge bc(b+c)$ și celelalte două inegalități analoage.
Inegalitatea (2) este $2\sum a^3\ge 6abc \Leftrightarrow \sum a^3\ge 3abc$, adevărată din inegalitatea mediilor

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

b)Fie $a,b,c>0$ astfel încât $a+b+c=1$ și $0\le n\le\frac{9}{7}$. Arătați că

$$ab+bc+ca-nabc\le\frac{9-n}{27}.$$

Marin Chirciu

Soluție.
Omogenizăm, folosind condiția din ipoteză $a+b+c=1$.
Inegalitatea se scrie: $(ab+bc+ca)(a+b+c)-nabc\le\frac{9-n}{27}(a+b+c)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 27(ab+bc+ca)(a+b+c)-27nabc\le(9-n)(a+b+c)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 27\left[\sum bc(b+c)+3abc\right]-27nabc\le(9-n)\left[\sum a^3+3(a+b)(b+c)(c+a)\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 27\left[\sum bc(b+c)+3abc\right]-27nabc\le(9-n)\left[\sum a^3+3\left(\sum bc(b+c)+2abc\right)\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (9-n)\sum a^3\ge 3n\sum bc(b+c)+(27-21n)abc$,

care rezultă din sumarea inegalităților (1) și (2), unde (1)este :

$6n\sum a^3 \geq 3n\sum bc(b+c) \Leftrightarrow 2\sum a^3 \geq \sum bc(b+c)$, adevărată din $b^3+c^3 \geq bc(b+c)$ și celelalte două inegalități analoage.

Inegalitatea (2) este $(9-7n)\sum a^3 \geq (27-21n)abc \Leftrightarrow \sum a^3 \geq 3abc$, adevărată din inegalitatea mediilor și $(9-7n) \geq 0$, imediată din condiția din ipoteză $0 \leq n \leq \frac{9}{7}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Notă.

1). Pentru $n=1$ se obține $ab+bc+ca-abc \leq \frac{8}{27}$, unde $a,b,c>0$ astfel încât $a+b+c=1$.

2).Cea mai bună inegalitate de forma din enunț se obține pentru $n=\frac{9}{7}$.

Dacă $a,b,c>0$ astfel încât $a+b+c=1$ atunci $ab+bc+ca-\frac{9}{7}abc \leq \frac{2}{7}$.

Aplicația12.

a)Fie $a,b,c>0$, astfel încât $a+b+c=1$. Arătați că:

$$\sum \frac{a}{1+9bc+4(b-c)^2} \geq \frac{1}{2} .$$

2014 Japan Mathematical Olympiad

Soluție:

Cu inegalitatea lui Bergström obținem:

$$\sum \frac{a}{1+9bc+4(b-c)^2} = \sum \frac{a^2}{a+9abc+4a(b-c)^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+27abc+4\sum a(b-c)^2} =$$

$$= \frac{1}{1+27abc+4\sum a(b-c)^2} \overset{(1)}{\geq} \frac{1}{2},$$

unde (1) $\Leftrightarrow 2 \geq 1+27abc+4\sum a(b-c)^2 \Leftrightarrow 1 \geq 27abc+4\sum a(b^2+c^2-2bc) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 \geq 3abc+4\sum a(b^2+c^2) \Leftrightarrow 1 \geq 3abc+4\sum bc(b+c) \Leftrightarrow 1 \geq 3abc+4\sum bc(1-a) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+9abc \geq 4\sum bc$. Omogenizând ultima inegalitate se transformă echivalent:

$1+9abc \geq 4\sum bc \Leftrightarrow (a+b+c)^3+9abc \geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca) \Leftrightarrow$

$\sum a^3+3abc \geq \sum bc(b+c)$, adevărată din inegalitatea lui Schur pentru $r=1$, unde:

Inegalitatea lui Schur:

$\sum a^r(a-b)(a-c) \geq 0,\ \forall a,b,c \geq 0$ și $r>0$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate pentru $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Remarcă.

Inegalitatea se poate dezvolta.

b)Fie $a,b,c>0$, astfel încât $a+b+c=1$ și $\lambda \geq 0$. Arătați că:

$$\sum \frac{a}{9+9\lambda bc+4\lambda(b-c)^2} \geq \frac{1}{9+\lambda} .$$

Marin Chirciu

Soluție:

Cu inegalitatea lui Bergström obținem:

$$\sum\frac{a}{9+9\lambda bc+4\lambda(b-c)^2}=\sum\frac{a^2}{9a+9\lambda abc+4\lambda a(b-c)^2}\geq$$

$$\geq\frac{(a+b+c)^2}{9(a+b+c)+27\lambda abc+4\lambda\sum a(b-c)^2}=\frac{1}{9+27\lambda abc+4\lambda\sum a(b-c)^2}\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{9+\lambda},$$

unde (1) $\Leftrightarrow 9+\lambda\geq 9+27\lambda abc+4\lambda\sum a(b-c)^2 \Leftrightarrow \lambda\geq 27\lambda abc+4\lambda\sum a(b-c)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1\geq 27abc+4\sum a(b-c)^2 \Leftrightarrow 1\geq 3abc+4\sum bc(b+c) \Leftrightarrow 1\geq 3abc+4\sum bc(1-a) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+9abc\geq 4\sum bc$. Omogenizând ultima inegalitate se transformă echivalent:

$1+9abc\geq 4\sum bc \Leftrightarrow (a+b+c)^3+9abc\geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca) \Leftrightarrow$

$\sum a^3+3abc\geq\sum bc(b+c)$, adevărată din inegalitatea lui Schur pentru $r=1$, unde:
Inegalitatea lui Schur:
$\sum a^r(a-b)(a-c)\geq 0$, $\forall a,b,c\geq 0$ și $r>0$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate pentru $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Notă.
Pentru $\lambda=9$ se obține 2014 Japan Mathematical Olympiad.

Aplicația13.

If $a,b,c>0$ such that $ab+bc+ca=3$ then

$$a+b+c\geq abc+2\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{3}}.$$

Nguyen Van Canh, Vietnam

Soluție.
Folosind condiția din ipoteză $ab+bc+ca=3$ omogenizăm inegalitatea din concluzie:
Obținem:

$$a+b+c\geq abc+2\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{3}}\Leftrightarrow\sum a\geq abc+2\sqrt{\frac{1}{3}\sum b^2c^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum a\sum bc\geq 3abc+6\sqrt{\frac{1}{9}\sum bc\sum b^2c^2}\Leftrightarrow\sum bc(b+c)\geq 6\sqrt{\frac{1}{9}\sum bc\sum b^2c^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\sum bc(b+c)\right]^2\geq 4\sum bc\sum b^2c^2\Leftrightarrow\left(\sum b^2c+\sum bc^2\right)^2\geq 4\sum bc\sum b^2c^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sum b^2c+\sum bc^2\right)^2\geq 4\sum bc\sum b^2c^2,\ (1).$$

Pentru demonstrarea inegalității(1) folosim inegalitatea $(x+y)^2\geq 4xy$,
pentru $x=\sum b^2c, y=\sum bc^2$.
Obținem:

$$Ms=\left(\sum b^2c+\sum bc^2\right)^2\geq 4\sum b^2c\cdot\sum bc^2\overset{(2)}{\geq}4\sum bc\sum b^2c^2=Md,$$

unde (2)

$$\Leftrightarrow\sum b^2c\cdot\sum bc^2\geq\sum bc\sum b^2c^2\Leftrightarrow\sum b^3c^3+3a^2b^2c^2+abc\sum a^3\geq\sum b^3c^3+abc\sum bc(b+c)$$

$\Leftrightarrow abc\sum a^3+3a^2b^2c^2\geq abc\sum bc(b+c)\Leftrightarrow\sum a^3+3abc\geq\sum bc(b+c)$,(inegalitatea Schur).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația14.

a)Dacă $a,b,c\geq 0$, $a+b+c=3$ then

$$4(ab+bc+ca)\le 3abc+9.$$

b)Dacă $a,b,c\ge 0$, $a+b+c=3$ și $0\le n\le 3$ then

$$(n+1)(ab+bc+ca)\le nabc+9.$$

Marin Chirciu

Soluție.

b).Omogenizăm și folosim inegalitatea lui Schur:

Obținem:

$(n+1)(ab+bc+ca)(a+b+c)\le 3nabc+(a+b+c)^3 \Leftrightarrow$

$a^3+b^3+c^3+3abc\ge (n-2)\sum ab(a+b)$, care rezultă din inegalitatea lui Schur:

$Ms=a^3+b^3+c^3+3abc\overset{Schur}{\ge}\sum ab(a+b)\overset{n\le 3}{\ge}(n-2)\sum ab(a+b)=Md$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația15.

a)Dacă $a,b,c\ge 0$, $a+b+c=3$ then

$$a^2+b^2+c^2+abc+2\ge 2(ab+bc+ca).$$

b)Dacă $a,b,c\ge 0$, $a+b+c=3$ și $n\ge 0$ then

$$a^2+b^2+c^2+abc+3n-4\ge n(ab+bc+ca).$$

Marin Chirciu

Soluție.

b).Omogenizăm și folosim inegalitatea lui Schur:

Obținem:

$$(a^2+b^2+c^2)\frac{a+b+c}{3}+abc+(3n-4)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\ge n(ab+bc+ca)\frac{a+b+c}{3}\Leftrightarrow$$

$(3n+5)(a^3+b^3+c^3)\ge 3\sum ab(a+b)+(9n-3)abc$,

care rezultă din adunarea inegalităților: $a^3+b^3+c^3+3abc\ge\sum ab(a+b)$, (Schur) ,

$3n(a^3+b^3+c^3)\ge 9nabc$,(AM-GM) și $4(a^3+b^3+c^3)\ge 2\sum ab(a+b)$,

(vezi $x^3+y^3\ge xy(x+y)$ și analoagele).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația16.

a)Dacă $a,b,c\ge 0$ then

$$a^2+b^2+c^2+abc+4\ge 2(ab+bc+ca).$$

RMT 3/20012, George Mihai, Slatina

b) Dacă $a,b,c\ge 0$ și $n\ge\frac{7}{3}$ then

$$a^2+b^2+c^2+2abc+3n-5\ge n(ab+bc+ca).$$

c) Dacă $a,b,c\ge 0$ și $k\ge\frac{1}{3}, n\ge\frac{7(k-1)}{3}$ then

$$a^2+b^2+c^2+kabc+3n-k-3\ge n(ab+bc+ca).$$

Marin Chirciu

Soluție.

b).Omogenizăm și folosim inegalitatea lui Schur:

Obținem:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\frac{a+b+c}{3}+2abc+(3n-5)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\geq n(ab+bc+ca)\frac{a+b+c}{3}\Leftrightarrow$$

$$(3n+4)\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq 6\sum ab(a+b)+(9n-24)abc,$$

care rezultă din adunarea inegalităților: $a^3+b^3+c^3+3abc\geq\sum ab(a+b)$, (Schur),

$(3n-7)\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq 3(3n-7)nabc$,(AM-GM și $n\geq\frac{7}{3}$) și

$10\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq 5\sum ab(a+b)$,

(vezi $x^3+y^3\geq xy(x+y)$ și analoagele).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația17.

a)Dacă $a,b,c\geq 0$, $a+b+c=3$ then

$$a^2+b^2+c^2+\frac{4}{3}abc\geq\frac{13}{3}.$$

China, 2007

b) Dacă $a,b,c\geq 0$ și $\frac{6}{7}\leq n\leq\frac{3}{2}$ then

$$a^2+b^2+c^2+nabc\geq n+3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

b).Omogenizăm și folosim inegalitatea lui Schur:

Obținem:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\frac{a+b+c}{3}+nabc\geq(n+3)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\Leftrightarrow$$

$$(6-n)\left(a^3+b^3+c^3\right)+3(7n-6)abc\geq 3n\sum ab(a+b),$$

care rezultă din adunarea inegalităților: $a^3+b^3+c^3+3abc\geq\sum ab(a+b)\,|(7n-6)$, (Schur),

și $\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq 5\sum ab(a+b)\,|(6-4n)$,

(vezi $x^3+y^3\geq xy(x+y)$ și analoagele).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația18.

a)Dacă $a,b,c\geq 0$, $a+b+c=1$ then

$$5\left(a^2+b^2+c^2\right)+18abc\geq\frac{7}{3}.$$

RM Gorj 1/2011, Constantin Zălog, Tg.Jiu

b) Dacă $a,b,c\geq 0$, $a+b+c=1$ și $\frac{18n}{7}\leq k\leq\frac{18n}{4}$, $n,k>0$ then

$$n\left(a^2+b^2+c^2\right)+kabc\geq\frac{9n+k}{27}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Omogenizăm și folosim inegalitatea lui Schur:

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația19.

a)Dacă $a,b,c\geq 0$, $a+b+c=1$then

$$7\left(a^2+b^2+c^2\right)\leq 2+9abc.$$

British Mathematical Olympiad 1998

b) Dacă $a,b,c\geq 0$, $a+b+c=1$și $n\geq 1$then

$$(4n+3)\left(a^2+b^2+c^2\right)\leq n+1+9nabc.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție</u>.
Omogenizăm și folosim inegalitatea lui Schur:
Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

<u>Aplicația20.</u>
a)Dacă $a,b,c\geq 0$, $a+b+c=1$then

$$15\left(a^3+b^3+c^3+ab+bc+ca\right)+9abc\geq 7.$$

Mathlinks

b) Dacă $a,b,c\geq 0$, $a+b+c=3$și $n\geq \frac{7}{18}$ then

$$n\left(a^3+b^3+c^3+ab+bc+ca\right)+(3n-1)abc\geq 9n-1.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție</u>.
Omogenizăm și folosim inegalitatea lui Schur:
Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

<u>Aplicația21.</u>
a)Dacă $a,b,c\geq 0$, $a+b+c=1$then

$$15\left(a^3+b^3+c^3\right)+a^2+b^2+c^2+8abc\geq \frac{23}{27}.$$

Mathlinks

b) Dacă $a,b,c\geq 0$, $a+b+c=3$și $x,y,z\geq 0$ then

$$x\left(a^3+b^3+c^3\right)+y\left(a^2+b^2+c^2\right)+zabc\geq \frac{3x+9y+z}{27}.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție</u>.
Omogenizăm și folosim inegalitatea lui Schur:
Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

<u>Aplicația22.</u>
a)Dacă $a,b>0$, $a+b=1$then

$$\frac{2}{ab}+\frac{1}{a^2+b^2}\geq 10.$$

RM Gorj 1/2011

b)Dacă $a,b>0$, $a+b=1$și $n\geq \frac{1}{2}$ then

$$\frac{n}{ab}+\frac{1}{a^2+b^2}\geq 4n+2.$$

c)Dacă $a,b>0$, $a+b=1$și $2n\geq k>0$then

$$\frac{n}{ab}+\frac{k}{a^2+b^2}\geq 4n+2k.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție</u>.

c)Omogenizând obținem:

$$Ms=\frac{n(a+b)^2}{ab}+\frac{k(a+b)^2}{a^2+b^2}\geq 4n+2k\,;\frac{a}{b}=x\Rightarrow n\cdot\frac{x^2+1}{x}+2k\cdot\frac{x}{x^2+1}\geq 2n+k\,;\frac{x^2+1}{x}=t\Rightarrow$$

$\Rightarrow n\cdot t+2k\cdot\frac{1}{t}\geq 2n+k\Leftrightarrow nt^2-(2n+k)t+2k\geq 0\Leftrightarrow(t-2)(nt-k)\geq 0$, care rezultă din

$t\geq 2\geq\frac{k}{n}$, cu egalitate pentru $t=2\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}=2\Leftrightarrow x=1\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=\frac{1}{2}$.

Aplicația23.

a)Dacă $a,b>0$, $a+b=1$then

$$8\left(a^7+b^7\right)-7\left(a^8+b^8\right)\geq\frac{9}{128}.$$

GM 1/2013,Costel Anghel, Negreni, Olt

b) Dacă $a,b>0$, $a+b=1$și $0\leq n\leq 126$ then

$$(n+1)\left(a^7+b^7\right)-n\left(a^8+b^8\right)\geq\frac{n+2}{128}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

b)Omogenizând obținem:

$(n+1)\left(a^7+b^7\right)(a+b)-n\left(a^8+b^8\right)\geq\frac{n+2}{128}(a+b)^8\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(126-n)a^8+(120n+112)a^7b-28(n+2)a^6b^2-56(n+2)a^5b^3-70(n+2)a^4b^4-$

$-56(n+2)a^3b^5-28(n+2)a^2b^6-(120n+112)ab^7+(126-n)b^8\geq 0$.

Dacă $b=0$,evident;dacă $b\neq 0$, împărțim prin b^8,notăm $\frac{a}{b}=t$ și obținem cu schema lui Horner:

$(t-1)^2\left[(126-n)t^6+(118n+364)t^5+(209n+546)t^4+(244n+616)t^3+(209n+546)t^2+E\right]$

unde $E=(118n++364))t+(126-n)$,

cu egalitate pentru $t=1\Leftrightarrow\frac{a}{b}=1$și $a+b=1\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$.

$;\frac{a}{b}=x\Rightarrow n\cdot\frac{x^2+1}{x}+2k\cdot\frac{x}{x^2+1}\geq 2n+k\,;\frac{x^2+1}{x}=t\Rightarrow$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=\frac{1}{2}$.

Aplicația24.

Dacă $a,b>0$, $a+b=2$ then

$$\left(a^4+1\right)\left(b^4+1\right)\geq 4.$$

Soluție.

Omogenizând inegalitatea se scrie:

$\left(a^4+\left(\frac{a+b}{2}\right)^4\right)\left(b^4+\left(\frac{a+b}{2}\right)^4\right)\geq 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^8$;împart prin $b\neq 0$, $\frac{a}{b}=t$.

Obținem:

$(t-1)^2\left[13t^6+66t^5+131t^4+92t^3+66t+13\right]\geq 0$, cu egalitate pentru $t=1 \Leftrightarrow \frac{a}{b}=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=b$ și $a+b=2 \Leftrightarrow a=b=1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=1$.

Aplicația25.

a)Dacă $x,y,z\geq 0$, $x+y+z=1$ then

$$3(xy+yz+zx)\leq 2\left(x^2+y^2+z^2\right)+9xyz.$$

27701, GM 6-7-8/2019,Octavian Purcaru, Ploiești

b)Dacă $x,y,z\geq 0$, $x+y+z=1$ și $n\geq 2$ then

$$(n+1)(xy+yz+zx)\leq n\left(x^2+y^2+z^2\right)+9xyz.$$

Marin Chirciu

Soluție.

b)Omogenizând inegalitatea se scrie:

$(n+1)(xy+yz+zx)(x+y+z)\leq n\left(x^2+y^2+z^2\right)(x+y+z)+9xyz \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n\sum x^3\geq \sum yz(y+z)+3(n-2)xyz$, care rezultă din adunarea inegalităților:

$2\sum x^3\geq \sum yz(y+z)$,(vezi $x^3+y^3\geq xy(x+y)$ și analoagele).

și $(n-2)\sum x^3\geq 3(n-2)xyz$,(Vezi AM-GM și $n\geq 2$).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Bibliografie:

1. Marin Chirciu, Inegalități algebrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2014.
2. Titu Andreescu, University of Texas at Dallas,Mathematical Reflections, USA .
3. Nguyen Van Canh, RMM 7/2021.
4. Vasile Cîrtoaje , Algebraic Inequalities Old and News Methods ,GIL-2006.
5. Octavian Purcaru, GM 6-7-8/2019.
6. Costel Anghel, GM 1/2013.
7. Eugen Radu, București , SGM 4/2017.
8. Japan Mathematical Olympiad 2014.
9. Mihai Piticari, Mathematical Reflections 4/2006.
10. Dan Popescu, Mathematical Reflections 4/2006.
11. George Mihai, GM 10/2019.
12. George Mihai , RMT 3/20012.
13. Phan Ngoc Chau,Vietnam, RMM 10/2021.
14. Constantin Zălog , RM Gorj 1/2011.
15. British Mathematical Olympiad 1998.
16. Marin Chirciu, Inegalități algebrice 2, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2021.

Art 2820
10 Noiembrie 2021

2. Asupra inegalităţii lui Radon
de Marian Dincă, Bucureşti

Inegalitatea lui Radon.

Dacă $x_k \ge 0$, $y_k > 0$, $k \in \{1,2,...,n\}$ *şi* $t \ge 0$, *atunci este adevărată inegalitatea*

$$\frac{x_1^{t+1}}{y_1^t}+\frac{x_2^{t+1}}{y_2^t}+\ldots+\frac{x_n^{t+1}}{y_n^t} \ge \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^{t+1}}{(y_1+y_2+\ldots+y_n)^t} \quad \textit{(Radon).}$$

Demonstrez această inegalitate folosind inegalitatea lui *Jensen* cu ponderi pentru funcţia concavă $f(x)=\dfrac{1}{x^t}$.

$$\frac{x_1^{t+1}}{y_1^t}+\frac{x_2^{t+1}}{y_2^t}+\ldots+\frac{x_n^{t+1}}{y_n^t} = x_1\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{y_1}{x_1}\right)^t}+x_2\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{y_2}{x_2}\right)^t}+\ldots+x_n\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{y_n}{x_n}\right)^t}=$$

$$=\sum_{k=1}^n x_k f\left(\frac{y_k}{x_k}\right) \ge \left(\sum_{k=1}^n x_k\right) f\left(\frac{\sum_{k=1}^n \left(x_k\cdot\dfrac{y_k}{x_k}\right)}{\sum_{k=1}^n x_k}\right) = \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{\sum_{k=1}^n y_k}{\sum_{k=1}^n x_k}\right)^t}=$$

$$=\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^{t+1}}{(y_1+y_2+\ldots+y_n)^t}.$$

Reversul inegalităţii lui Radon.

Dacă $x_k \ge 0$, $y_k > 0$, $k \in \{1,2,...,n\}$ *şi* $0 < t \le 1$, *atunci este adevărată inegalitatea*

$$\frac{x_1^t}{y_1^{t-1}}+\frac{x_2^t}{y_2^{t-1}}+\ldots+\frac{x_n^t}{y_n^{t-1}} \le \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^t}{(y_1+y_2+\ldots+y_n)^{t-1}}.$$

Demonstrez această inegalitate folosind inegalitatea lui *Jensen* cu ponderi pentru funcţia concavă $f(x)=x^{1-t}$, $f''(x)=(1-t)(-t)x^{-t-1}<0$.

$$\frac{x_1^t}{y_1^{t-1}}+\frac{x_2^t}{y_2^{t-1}}+\ldots+\frac{x_n^t}{y_n^{t-1}} = \sum_{k=1}^n x_k\left(\frac{y_k}{x_k}\right)^{1-t} = \sum_{k=1}^n x_k f\left(\frac{y_k}{x_k}\right) \le$$

$$\le\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) f\left(\frac{\sum_{k=1}^n \left(x_k\cdot\dfrac{y_k}{x_k}\right)}{\sum_{k=1}^n x_k}\right) = \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\cdot\left(\frac{\sum_{k=1}^n y_k}{\sum_{k=1}^n x_k}\right)^{1-t} = \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^t}{(y_1+y_2+\ldots+y_n)^{t-1}}.$$

Observaţie. Pentru $t=\dfrac{1}{2}$, se obţine inegalitatea următoare:

$$\frac{x_1^{\frac{1}{2}}}{y_1^{-\frac{1}{2}}}+\frac{x_2^{\frac{1}{2}}}{y_2^{-\frac{1}{2}}}+\ldots+\frac{x_n^{\frac{1}{2}}}{y_n^{-\frac{1}{2}}}\le\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^{\frac{1}{2}}}{(y_1+y_2+\ldots+y_n)^{-\frac{1}{2}}}.$$

Această inegalitate arată că aplicaţiile **1**, **5**, **8**, **11**, **14** şi **17** din **[1]** au sensul opus celui prezentat, adică de exemplu:

În orice triunghi ABC, are loc inegalitatea $\sum\sqrt{a(b+c-a)}\le 2p$.

Folosind inegalitatea lui *Jensen* pentru funcţia concavă $f(x)=\sqrt{x}$ şi inegalitatea lui *Cebâşev* se obţine

$$\sum\sqrt{a(b+c-a)}=\sum f(a(b+c-a))\le 3f\left(\frac{\sum a(b+c-a)}{3}\right)\le$$

$$\le 3f\left(\left(\frac{\sum a}{3}\right)\left(\frac{\sum(b+c-a)}{3}\right)\right)=3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=a+b+c=2p.$$

Bibliografie

1. Marin Chirciu, *Obţinerea unor relaţii în triunghi cu ajutorul inegalităţii lui Radon*, REMI, septembrie, 2021, 2-40.

3. În legătură cu o inegalitate din G.M.-B nr.3/2021
de Marian Dincă, Bucureşti

Fie ABC un triunghi echilateral şi M un punct în interiorul acestui triunghi.

Dacă R_a, R_b, R_c *sunt lungimile distanţelor de la* M *la vârfurile* A, B, C *iar* d_a, d_b, d_c *distanţele de la* M *la laturile triunghiului, atunci*

$$R_a^2 + R_b^2 + R_c^2 \le 4(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2),\ (1).$$

În [1] s-a dat o demonstraţie complicată pentru inegalitatea de mai sus.

Iată *o demonstraţie mai simplă*:

Fie P, Q, R proiecţiile lui M pe laturile BC, CA, AB. În patrulaterul inscriptibil $ARMQ$, $AM = R_a$ este diametrul cercului înscris acestui patrulater; $MP = d_a, MQ = d_b, MR = d_c$.

Rezultă $RQ = R_a \sin 120^0 = \sqrt{d_b^2 + d_c^2 - 2d_b d_c \cos 120^0} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} R_a = \sqrt{d_b^2 + d_c^2 + d_b d_c} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{4} R_a^2 = d_b^2 + d_c^2 + d_b d_c$ şi analoagele.

Obţinem $\dfrac{3}{4}(R_a^2 + R_b^2 + R_c^2) = d_a^2 + d_b^2 + d_a d_b + d_b^2 + d_c^2 + d_b d_c + d_c^2 + d_a^2 + d_a d_c \le$

$$\le d_a^2 + d_b^2 + \frac{d_a^2 + d_b^2}{2} + d_b^2 + d_c^2 + \frac{d_b^2 + d_c^2}{2} + d_c^2 + d_a^2 + \frac{d_a^2 + d_c^2}{2} = 3(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2),$$

de unde deducem (1).

În continuare prezentăm *o generalizare* pentru un poligon regulat.

Fie poligonul regulat $A_1 A_2 \ldots A_n$ şi M un punct în interiorul acestui poligon.

Dacă $R_1, R_2, \ldots, R_n$ *sunt distanţele de la* M *la vârfurile poligonului, iar* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *sunt distanţele de la* M *la laturile poligonului, atunci*

$$\sum_{k=1}^{n} R_k^2 \left(\sin \frac{2\pi}{n} \right)^2 \le 2\sum_{k=1}^{n} r_k^2 - 2\left(\frac{n-4}{n} \right) \sum_{k=1}^{n} r_k r_{k+1}\ ,\ (2).$$

Fie M_k proiecţiile lui M pe laturile $A_k A_{k+1}$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, unde $A_{n+1} = A_1$.

În patrulaterul inscriptibil $A_{k+1} M_k M M_{k+1}$ avem

$$M_k M_{k+1} = MA_{k+1} \sin A_{k+1} = R_{k+1} \sin\left(\frac{(n-2)\pi}{n} \right) =$$

$$= \sqrt{MM_k^2 + MM_{k+1}^2 - 2 \cdot MM_k \cdot MM_{k+1} \cdot \cos(\pi - A_{k+1})} = \sqrt{r_k^2 + r_{k+1}^2 - 2r_k r_{k+1} \cos A_{k+1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R_{k+1} \sin \frac{2\pi}{n} = \sqrt{r_k^2 + r_{k+1}^2 - 2r_k r_{k+1} \cos \frac{2\pi}{n}} \Leftrightarrow R_{k+1}^2 \left(\sin \frac{2\pi}{n} \right)^2 = r_k^2 + r_{k+1}^2 - 2r_k r_{k+1} \cos \frac{2\pi}{n}.$$

Deoarece, $\cos \dfrac{2\pi}{n} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\pi}{n} \right) = \sin \dfrac{(n-4)\pi}{2n}$, iar pentru $n \ge 4$, $\dfrac{(n-4)\pi}{2n} < \dfrac{\pi}{2}$ conform inegalităţii lui Jordan, i.e. $\sin x \ge \dfrac{2x}{\pi}, x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2} \right]$, reiese că $\cos \dfrac{2\pi}{n} \ge \dfrac{2 \cdot \dfrac{(n-4)\pi}{2n}}{\pi} = \dfrac{n-4}{n}$.

Deci, $R_{k+1}^2 \left(\sin \dfrac{2\pi}{n} \right)^2 = r_k^2 + r_{k+1}^2 - 2r_k r_{k+1} \cos \dfrac{2\pi}{n} \le r_k^2 + r_{k+1}^2 - 2r_k r_{k+1} \left(\dfrac{n-4}{4} \right)$,

de unde obţinem (2).

Bibliografie

1. Dumitru Mihalache, *Câteva observaţii pe marginea inegalităţii Erdős-Mordell*, Gazeta Matematică, nr.3, 2021, 113-120.