

WWW.MATEINFO.RO

REVISTA ELECTRONICA MATEINFO.RO

IUNIE 2026

ISSN 2065 - 6432

REVISTĂ DIN FEBRUARIE 2009

COORDONATOR:
ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ȘI SUSȚINĂTORI
PERMANENȚI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU
MARIN CHIRCIU
BOXANA MIHAELA STANCIU



ARTICOLE

R.E.M.I. IUNIE 2026

1. TEN PROBLEMS OF IONESCU-WEITZENBÖCK
TYPE INEQUALITY

pag. 2 -9

Prof. Neculai Stanciu

2. Puteri de matrice pătratică

pag. 10 - 19

Prof. Pop Adela Terezia

3. Math Journal -10-

pag. 20 - 239

Prof. Marin Chirciu

PUTEȚI TRIMITE ARTICOLE ÎN FORMAT WORD PE
REVISTA.MATEINFO@YAHOO.COM

1. TEN PROBLEMS OF IONESCU-WEITZENBÖCK TYPE INEQUALITY

By Neculai Stanciu, Buzău, Romania

Abstract. This paper presents new solutions for some problems - published by math journals from all over the world.

Introduction

Ion Ionescu discovered with 22 years before Weitzenböck the inequality $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$

The author of this paper along with D. M, Băținețu-Giurgiu demonstrated in Romanian Mathematical Gazette, No. 1/2013, pp. 1-10, that the Weitzenböck's inequality must be named the Ionescu-Weitzenböck's inequality.

Our proof is based on: Romanian Mathematical Gazette, Vol. III (15 September 1897 – 15 August 1898), No. 2, 15 October 1897, on page 52, Ion Ionescu, the founder of Romanian Mathematical Gazette, published problem 273: prove that there is no triangle for which the inequality

$4S\sqrt{3} > a^2 + b^2 + c^2$ can be satisfied. The solution of the problem 273, appeared in Romanian Mathematical Gazette, Vol. III (15 September 1897 – 15 August 1898), No. 12, 15 August 1898, on pages 281, 282 and 283. In the year 1919, Roland Weitzenböck published in Mathematische Zeitschrift, Vol. 5, No. 1-2, pp. 137-146 the article Über eine Ungleichung in der Dreiecksgeometrie, where he proved that: In any triangle ABC , with usual notations holds the inequality:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

Main Results

Problem 1 (D.M. Băținețu-Giurgiu, N. Stanciu - La Gaceta de la RSME, No. 2/2020, problem 397).

Prove that in any triangle ABC with the area F , the medians m_a, m_b, m_c (m_a is the mediane from the vertex A , m_b is the mediane from the vertex B , m_c is the mediane from the vertex C) and usual notations is true the following inequality

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \geq am_a + bm_b + cm_c \geq 6F.$$

Solution. First we prove that $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{3} \cdot a \cdot m_a$, (1). Indeed,

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{3} \cdot a \cdot m_a \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 12 \cdot a^2 \cdot m_a^2 = 3a^2 \cdot 4m_a^2 = 3a^2(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 \geq 6a^2b^2 + 6c^2a^2 - 3a^4$$

$$\Leftrightarrow 4a^4 + b^4 + c^4 - 4a^2b^2 - 4c^2a^2 + 2b^2c^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2a^2 - b^2 - c^2)^2 = (b^2 + c^2 - 2a^2)^2 \geq 0, \text{ true. Therefore, } a^2 + b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{3} \cdot a \cdot m_a;$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{3} \cdot b \cdot m_b \text{ and } a^2 + b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{3} \cdot c \cdot m_c \text{ which by adding up yielding that}$$

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2\sqrt{3}(am_a + bm_b + cm_c), (2). \text{ Next we have}$$

$$2\sqrt{3}(am_a + bm_b + cm_c) \geq 2\sqrt{3}(ah_a + bh_b + ch_c) = 12\sqrt{3}F, (3), \text{ where we denote } h_a \text{ the altitude}$$

from the vertex A , h_b the altitude from the vertex B , h_c the altitude from the vertex C . From (2) and (3) we obtain the desired inequality.

Problem 2. (D.M. Băținețu-Giurgiu, N. Stanciu- Refinement of Ionescu-Weitzenböck inequality).

Prove that in any triangle ABC with the area F , the medians m_a, m_b, m_c (m_a is the mediane from the vertex A , m_b is the mediane from the vertex B , m_c is the mediane from the vertex C) and usual notations is true the following inequality

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{2}{\sqrt{3}}(am_a + bm_b + cm_c) \geq 4\sqrt{3}F$$

Solution. First we prove that $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{3} \cdot a \cdot m_a$, (1). Indeed,

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{3} \cdot a \cdot m_a \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 12 \cdot a^2 \cdot m_a^2 = 3a^2 \cdot 4m_a^2 = 3a^2(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 \geq 6a^2b^2 + 6c^2a^2 - 3a^4$$

$$\Leftrightarrow 4a^4 + b^4 + c^4 - 4a^2b^2 - 4c^2a^2 + 2b^2c^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2a^2 - b^2 - c^2)^2 = (b^2 + c^2 - 2a^2)^2 \geq 0, \text{ true.}$$

Therefore, $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{3} \cdot a \cdot m_a$; $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{3} \cdot b \cdot m_b$; $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{3} \cdot c \cdot m_c$

which by adding up yielding that $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2\sqrt{3}(am_a + bm_b + cm_c)$, (2).

Next we have $2\sqrt{3}(am_a + bm_b + cm_c) \geq 2\sqrt{3}(ah_a + bh_b + ch_c) = 12\sqrt{3}F$, (3),

where we denote h_a the altitude from the vertex A , h_b the altitude from the vertex B , h_c the altitude from the vertex C . From (2) and (3) we obtain the desired inequality.

Problem 3. (D.M. Băținețu-Giurgiu, N. Stanciu - Other refinement of Ionescu-Weitzenböck inequality). Prove that in any triangle ABC with the area F , the altitudes h_a, h_b, h_c , the interior angles bisectors w_a, w_b, w_c and usual notations is true the following inequality

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4F}{\sqrt{3}} \left(\frac{w_a}{h_a} + \frac{w_b}{h_b} + \frac{w_c}{h_c} \right) \geq 4\sqrt{3}F.$$

Solution. WLOG we can assume that $a \leq b \leq c$, then $w_a \geq w_b \geq w_c$ and $h_a \geq h_b \geq h_c$.

By Chebyshev's inequality we get that $\sum_{cyclic} \frac{w_a}{h_a} \leq \frac{1}{3} \left(\sum_{cyclic} w_a \right) \left(\sum_{cyclic} \frac{1}{h_a} \right)$, (1);

$$\sum_{cyclic} \frac{1}{h_a} = \sum_{cyclic} \frac{a}{ah_a} = \frac{1}{2F} (a+b+c) = \frac{s}{F}, \text{ (2), and,}$$

$$w_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2} = \frac{2bc}{b+c} \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \cdot \sqrt{s(s-a)} \leq \frac{2\sqrt{bc}}{2\sqrt{bc}} \sqrt{s(s-a)} = \sqrt{s(s-a)}, \text{ (3)}$$

and other two similar. Using the inequality $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3}$, (*), and (3) we deduce

$$\sum_{cyclic} s(s-a) \geq \frac{\left(\sum_{cyclic} \sqrt{s(s-a)} \right)^2}{3} \Leftrightarrow 3s^2 \geq \left(\sum_{cyclic} \sqrt{s(s-a)} \right)^2 \Leftrightarrow \sum_{cyclic} \sqrt{s(s-a)} \leq s\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyclic} w_a \leq s\sqrt{3} \text{, (4). From (1), (2), (4) and (*) we obtain that}$$

$$\sum_{cyclic} \frac{w_a}{h_a} \leq \frac{1}{3} \left(\sum_{cyclic} w_a \right) \left(\sum_{cyclic} \frac{1}{h_a} \right) \leq \frac{1}{3} \cdot s\sqrt{3} \cdot \frac{s}{F} = \frac{(a+b+c)^2}{4F\sqrt{3}} \leq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4F\sqrt{3}}, \text{ (5).}$$

Since $w_a \geq h_a, w_b \geq h_b, w_c \geq h_c$ from (5) we get

$$3 \leq \sum_{cyclic} \frac{w_a}{h_a} \leq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4F\sqrt{3}} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4F}{\sqrt{3}} \left(\frac{w_a}{h_a} + \frac{w_b}{h_b} + \frac{w_c}{h_c} \right) \geq 4\sqrt{3}F, \text{ Q.E.D.}$$

Problem 4. (D.M. Băținețu-Giurgiu, N. Stanciu - Math Problems, Volume 3, Issue 1, Junior MathProblems, Problem 1, 2013). Prove that in all triangle ABC , with usual notations, holds:

$$\frac{a^3}{b \cdot R + c \cdot r} + \frac{b^3}{c \cdot R + a \cdot r} + \frac{c^3}{a \cdot R + b \cdot r} \geq \frac{4\sqrt{3}}{R+r} S.$$

Solution. We have
$$V = \sum_{cyc} \frac{a^3}{b \cdot R + c \cdot r} = \sum_{cyc} \frac{a^4}{abR + acr} \geq 2 \cdot \sum_{cyc} \frac{(a^2)^2}{(a^2 + b^2)R + (a^2 + c^2)r},$$

where we apply *Bergström*'s inequality and we deduce that:

$$V \geq 2 \cdot \frac{\left(\sum_{cyc} a^2 \right)^2}{\sum_{cyc} R(a^2 + b^2) + \sum_{cyc} r(a^2 + c^2)} = 2 \cdot \frac{\left(\sum_{cyc} a^2 \right)^2}{2(R+r) \cdot \sum_{cyc} a^2} = \frac{\sum_{cyc} a^2}{R+r}.$$

Then applying *Ionescu- Weitzenböck*'s inequality, i.e. $\sum_{cyclic} a^2 \geq 4S\sqrt{3}$, $V \geq \frac{4S\sqrt{3}}{R+r}$, and we are done.

Problem 5. (D.M. Băținețu-Giurgiu, N. Stanciu - Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matematica, Numero 49 (julio-agosto 2013), Problema 242). If $m \in \mathbb{R}_+$, then in all triangle ABC , with usual notations (i.e. R - circumradius, r - inradius, the lengths of the sides are a, b, c and S - the area of triangle ABC) the following inequality holds:

$$\frac{a^{m+2}}{(b \cdot R + c \cdot r)^m} + \frac{b^{m+2}}{(c \cdot R + a \cdot r)^m} + \frac{c^{m+2}}{(a \cdot R + b \cdot r)^m} \geq \frac{4\sqrt{3}}{(R+r)^m} S.$$

Solution.
$$W = \sum_{cyc} \frac{a^{m+2}}{(b \cdot R + c \cdot r)^m} = \sum_{cyc} \frac{a^{2(m+1)}}{(abR + acr)^m} \geq 2^m \cdot \sum_{cyc} \frac{(a^2)^{m+1}}{((a^2 + b^2)R + (a^2 + c^2)r)^m},$$

and applying the inequality of *J. Radon* we obtain

$$W \geq 2^m \cdot \frac{\left(\sum_{cyclic} a^2\right)^{m+1}}{\left(\sum_{cyclic} R(a^2 + b^2) + \sum_{cyclic} r(a^2 + c^2)\right)^m} = 2^m \cdot \frac{\left(\sum_{cyclic} a^2\right)^{m+1}}{2^m (R+r)^m \cdot \left(\sum_{cyclic} a^2\right)^m} = \frac{\sum_{cyclic} a^2}{(R+r)^m}.$$

By *Ionescu- Weitzenböck's* inequality, i.e. $\sum_{cyclic} a^2 \geq 4S\sqrt{3}$, we get $W \geq \frac{4S\sqrt{3}}{(R+r)^m}$, and the proof is complete.

Problem 6. (D.M. Băținețu-Giurgiu , N. Stanciu - Math Problems, Volume 3, Issue 1, Junior MathProblems, Problem 14, 2013) . If $m \in [0, \infty)$, $x, y, z, t \in (0, \infty)$, then in any triangle ABC , with

usual notations holds
$$\sum_{cyclic} \frac{(xm_a^2 + ym_b^2)^{m+1}}{(zw_a^2 + tw_b^2)^m} \geq 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{(x+y)^{m+1}}{(z+t)^m} S$$
.

Solution. $w_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \sqrt{s(s-a)} \Rightarrow w_a \leq \sqrt{s(s-a)} \Rightarrow w_a^2 \leq s(s-a)$, and other two similar.

So, $w_a^2 + w_b^2 + w_c^2 \leq s(s-a + s-b + s-c) = s(3s - 2s) = s^2 =$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{4} \leq \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2, \quad (1); \text{ by } \sum_{cyclic} m_a^2 = \frac{3}{4} \sum_{cyclic} a^2, \text{ J. Radon's}$$

$$\sum_{cyclic} \frac{(xm_a^2 + ym_b^2)^{m+1}}{(zw_a^2 + tw_b^2)^m} \stackrel{RADON}{\geq} \frac{\left(\sum_{cyclic} (xm_a^2 + ym_b^2)\right)^{m+1}}{\left(\sum_{cyclic} (zw_a^2 + tw_b^2)\right)^m} =$$

inequality and (1), we obtain

$$= \frac{\left((x+y) \sum_{cyclic} m_a^2\right)^{m+1}}{\left((z+t) \sum_{cyclic} w_a^2\right)^m} \geq \frac{(x+y)^{m+1} \left(\sum_{cyclic} m_a^2\right)^{m+1}}{(z+t)^m \left(\sum_{cyclic} m_a^2\right)^m} = \frac{(x+y)^{m+1} \left(\sum_{cyclic} m_a^2\right)}{(z+t)^m} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(x+y)^{m+1}}{(z+t)^m} \sum_{cyclic} a^2,$$

(2), by *Ion Ionescu – Weitzenböck* inequality we have $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$, (3). By (2) and (3) we obtain

$$\sum_{cyclic} \frac{(xm_a^2 + ym_b^2)^{m+1}}{(zw_a^2 + tw_b^2)^m} \geq 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{(x+y)^{m+1}}{(z+t)^m} S, \text{ q.e.d.}$$

Problem 7. (D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu - [1]). Prove that in all triangle ABC , with usual

notations, holds

$$\frac{m_a^3}{R \cdot m_b + r \cdot m_c} + \frac{m_b^3}{R \cdot m_c + r \cdot m_a} + \frac{m_c^3}{R \cdot m_a + r \cdot m_b} \geq \frac{3\sqrt{3}}{R+r} S.$$

Solution.

$$U = \sum_{cyc} \frac{m_a^3}{R \cdot m_b + r \cdot m_c} = \sum_{cyc} \frac{(m_a^2)^2}{R \cdot m_a \cdot m_b + r \cdot m_a \cdot m_c} \geq$$

$$\geq 2 \cdot \sum_{cyc} \frac{(m_a^2)^2}{R(m_a^2 + m_b^2) + r(m_a^2 + m_c^2)}, \text{ where we apply Bergström's inequality and well-known}$$

formula

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

. We obtain that

$$U \geq 2 \cdot \frac{\left(\sum_{cyc} m_a^2\right)^2}{R \cdot \sum_{cyc} (m_a^2 + m_b^2) + r \cdot \sum_{cyc} (m_a^2 + m_c^2)} = \frac{2 \cdot \left(\sum_{cyc} m_a^2\right)^2}{2R \cdot \sum_{cyc} m_a^2 + 2r \cdot \sum_{cyc} m_a^2} =$$

$$= \frac{\sum_{cyc} m_a^2}{R+r} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{R+r}, \text{ where we use the Ionescu – Weitzenböck inequality, i.e.}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}, \text{ and we deduce that } U \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{R+r} \cdot 4S\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{R+r} S, \text{ and we are done.}$$

Problem 8. (D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu - The College Mathematics Journal (CMJ), Vol. 45, No.

5, November 2014, Problem 1038). If $m \in R_+, x, y \in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{a^{m+2}}{(xb+yc)^m} + \frac{b^{m+2}}{(xc+ya)^m} + \frac{c^{m+2}}{(xa+yb)^m} \geq \frac{4\sqrt{3}}{(x+y)^m} \cdot \text{area}ABC.$$

$$E = \sum_{cyclic} \frac{a^{m+2}}{(xb+yc)^m} = \sum_{cyclic} \frac{a^{2(m+1)}}{(xab+yac)^m} \stackrel{(RADON)}{\geq} \frac{(a^2+b^2+c^2)^{m+1}}{\left(\sum_{cyclic} (xab+yac)\right)^m} =$$

Solution.

$= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^{m+1}}{(x+y)^m(ab+bc+ca)^m}$, and by $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, we deduce

$$E \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^{m+1}}{(x+y)^m(a^2 + b^2 + c^2)^m} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(x+y)^m}, (1).$$

Ionescu-Weitzenböck inequality $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot \text{area}ABC$, (2)

From (1) and (2) we obtain the desired inequality.

Problem 9. (D.M. Băținețu-Giurgiu, N. Stanciu - The College Mathematics Journal (CMJ), Vol. 46, No. 2, March 2015, Problem 1050). Let $A_1A_2 \dots A_n$, $n \geq 3$, be a convex polygon with a_k the length of the side $[A_kA_{k+1}]$, $k = \overline{1, n}$, $A_{n+1} = A_1$, and let S be the area of the polygon. Prove that

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^{2m+4} \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^{2m}} \right) \geq 16S^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}, \quad \forall m \in R_+.$$

Solution. By J. Radon's inequality we deduce that: $\sum_{k=1}^n a_k^{2m+4} \geq \frac{1}{n^{m+1}} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{m+2}$, $\forall m \in R_+$, (1),

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^{2m}} \geq \frac{n^{m+1}}{\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^m}, \quad \forall m \in R_+, (2).$$

and also by J. Radon's inequality we obtain that

$$U_n = \left(\sum_{k=1}^n a_k^{2m+4} \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^{2m}} \right) \geq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^2, \quad \forall m \in R_+, (3).$$

So, (1) and (2) yields that

By E. Just and N. Schaumberger's inequality (The Problem 1634 from AMM, 70(1963)) we have that

$\sum_{k=1}^n a_k^2 \geq 4S \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$, (4). Therefore, from (3) and (4) we obtain that $U_n \geq 16S^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}$, $\forall m \in R_+$ and we are done.

Problem 10. (D.M. Băținețu-Giurgiu, N. Stanciu - Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matematica, Numero Problema 277, August 2016). Show that in any triangle ABC (with usual notations) holds the following inequality

$$(ab+bc+ca)^2 + 2(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 16\sqrt{3} \cdot s^3 \cdot r.$$

Solution. For any $w_1, w_2, w_3 \in R$ we have $w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 \geq w_1 \cdot w_2 + w_2 \cdot w_3 + w_3 \cdot w_1$, (1),

with equality iff $w_1 = w_2 = w_3$. If $m, n, p \in R_+^*$, then $\frac{m \cdot n}{p} + \frac{n \cdot p}{m} + \frac{p \cdot m}{n} \geq m + n + p$, (2) with

equality iff $m = n = p$. Indeed if in (1) we take $w_1 = \sqrt{\frac{m \cdot n}{p}}, w_2 = \sqrt{\frac{n \cdot p}{m}}, w_3 = \sqrt{\frac{p \cdot m}{n}}$ yields (2).

If $t, u, v, x, y, z \in R_+^*$, then $\frac{(tx + uy + vz)(ty + uz + vx)}{tz + ux + vy} + \frac{(ty + uz + vx)(tz + ux + vy)}{tx + uy + vz} + \frac{(tz + ux + vy)(tx + uy + vz)}{ty + uz + vx} \geq (t + u + v)(x + y + z)$, (3). Indeed if in (2) we take $m = tx + uy + vz$, $n = ty + uz + vx$, $p = tz + ux + vy$ yields (3).

Lemma. For any $x, y, z \in R_+^*$, holds

$$(xy + yz + zx)^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq (x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2, \quad (4).$$

Proof. In (3) we take $t = x, u = y, v = z$ and we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{(x^2 + y^2 + z^2)(xy + yz + zx)}{xz + xy + yz} + \frac{(xy + yz + zx)(xz + xy + yz)}{x^2 + y^2 + z^2} + \\ & + \frac{(xz + xy + yz)(x^2 + y^2 + z^2)}{xy + yz + xz} \geq (x + y + z)^2 \Leftrightarrow \frac{(xy + yz + zx)^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \\ & 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2 \\ & \Leftrightarrow (xy + yz + zx)^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq (x + y + z)^2(x^2 + y^2 + z^2), \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

If in (4) we take $x = a, y = b, z = c$ we obtain

$$(ab + bc + ca)^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq (a + b + c)^2(a^2 + b^2 + c^2), \quad (5).$$

By Ionescu-Weitzenböck's inequality we have $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot S$, (I-W).

So (5) becomes $(ab + bc + ca)^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 4s^2 \cdot 4\sqrt{3}S = 16\sqrt{3} \cdot s^2 \cdot sr = 16\sqrt{3}s^3r$.

2. Puteri de matrice pătrate

Profesor Pop Adela Terezia,

Colegiul Economic „Nicolae Titulescu”, Baia Mare

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & -5 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ și $X(a) = I_3 + aA$ unde $a \in \mathbf{R}$.

a) Să se demonstreze că $A^2 = 9 \cdot A$ și că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 9ab)$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$.

b) Să se calculeze $(X(a))^n$, unde $n \in \mathbf{N}^*$.

c) Să determine numărul real t , astfel încât $X\left(\frac{-8}{9}\right) \cdot X\left(\frac{-7}{9}\right) \cdot \dots \cdot X\left(\frac{8}{9}\right) = X(t)$.

d) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $(X(a))^{2026} = I_3$.

Rezolvare

$$a) A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & -5 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & -5 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 18 & 45 \\ -9 & -18 & -45 \\ 18 & 36 & 90 \end{pmatrix} = 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & -5 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix} = 9A.$$

$$X(a) \cdot X(b) = (I_3 + aA) \cdot (I_3 + bA) = I_3^2 + I_3 \cdot bA + aA \cdot I_3 + abA^2 \stackrel{A^2=9A}{=} I_3 + aA + bA + 9abA = I_3 + (a + b + 9ab) \cdot A = X(a + b + 9ab), \forall a, b \in \mathbf{R}$$

$$b) X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 9ab) = X\left(9a\left(b + \frac{1}{9}\right) + b\right) = X\left(9\left(a + \frac{1}{9}\right)\left(b + \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{9}\right)$$

$$(X(a))^2 = X(a) \cdot X(a) = X\left(9\left(a + \frac{1}{9}\right)^2 - \frac{1}{9}\right) = X\left(\frac{(9a+1)^2 - 1}{9}\right)$$

$$P(n) : (X(a))^n = X\left(\frac{(9a+1)^n - 1}{9}\right), n \in \mathbf{N}^*.$$

$$I) P(1): X(a) = X\left(\frac{9a+1-1}{9}\right) \Leftrightarrow X(a) = X(a), \text{ "A"}$$

$$II) P(k) \rightarrow P(k+1), \forall k \in \mathbf{N}^*$$

$$P(k): (X(a))^k = X\left(\frac{(9a+1)^k - 1}{9}\right), \text{ presupunem adevărat.}$$

$$P(k+1): (X(a))^{k+1} = X\left(\frac{(9a+1)^{k+1} - 1}{9}\right), \text{ trebuie demonstrat.}$$

$$\begin{aligned} (X(a))^{k+1} &= (X(a))^k \cdot X(a) = X\left(\frac{(9a+1)^k - 1}{9}\right) \cdot X(a) = \\ &= X\left(\frac{(9a+1)^k - 1}{9} + a + 9 \cdot \frac{(9a+1)^k - 1}{9} \cdot a\right) = X\left(\frac{(9a+1)^k - 1 + 9a + 9a \cdot ((9a+1)^k - 1)}{9}\right) = \\ &= X\left(\frac{(9a+1)^{k+1} - 1}{9}\right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow P(k+1)$ propoziție adevărată.

$$\text{Din } \left. \begin{array}{l} P(1) \text{ "A"} \\ P(k) \rightarrow P(k+1), \forall k \in \mathbf{N}^* \end{array} \right\} \overset{M.I.M}{\Rightarrow} P(n) \text{ propoziție adevărată, } \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Metoda II.

$A^2 = 9 \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A = 9 \cdot A \cdot A = 9 \cdot 9A = 9^2 \cdot A$. Prin metoda inducției matematice obținem $A^n = 9^{n-1} \cdot A$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Deoarece $I_3 \cdot (aA) = (aA) \cdot I_3$ se poate aplica formula binomului lui Newton:

$$\begin{aligned} (X(a))^n &= (I_3 + aA)^n = C_n^0 \cdot I_3 + C_n^1 aA + C_n^2 a^2 A^2 + \dots + C_n^n a^n A^{n-1} \overset{A^n = 9^{n-1} \cdot A}{=} \\ &= I_3 + (C_n^1 a + C_n^2 a^2 9 + \dots + C_n^n a^n 9^{n-1})A = I_3 + \frac{(C_n^0 + C_n^1 9a + C_n^2 9^2 a^2 + \dots + C_n^n 9^n a^n - 1)}{9} A = \\ &= I_3 + \frac{(9a+1)^n - 1}{9} \cdot A = X\left(\frac{(9a+1)^n - 1}{9}\right). \end{aligned}$$

$$c) \text{ Conform punctului a) } X(a) \cdot X\left(\frac{-1}{9}\right) = X\left(a - \frac{1}{9} + 9 \cdot a \cdot \frac{-1}{9}\right) = X\left(\frac{-1}{9}\right), \forall a \in \mathbf{R} \Rightarrow$$

$$X\left(\frac{-8}{9}\right) \cdot X\left(\frac{-7}{9}\right) \cdot \dots \cdot X\left(\frac{-1}{9}\right) = X\left(\frac{-1}{9}\right).$$

Conform punctului a) $X\left(\frac{-1}{9}\right) \cdot X(b) = X\left(-\frac{1}{9} + b + 9 \cdot \frac{-1}{9} \cdot b\right) = X\left(\frac{-1}{9}\right), \forall b \in \mathbf{R} \Rightarrow$

$$X\left(\frac{-1}{9}\right) \cdot X\left(\frac{0}{9}\right) \cdot \dots \cdot X\left(\frac{8}{9}\right) = X\left(\frac{-1}{9}\right).$$

Relația din enunț $X\left(\frac{-8}{9}\right) \cdot X\left(\frac{-7}{9}\right) \cdot \dots \cdot X\left(\frac{8}{9}\right) = X(t) \Leftrightarrow X\left(\frac{-1}{9}\right) = X(t) \Leftrightarrow t = \frac{-1}{9}.$

$$d) (X(a))^{2018} = I_3 \Leftrightarrow X\left(\frac{(9a+1)^{2026}-1}{9}\right) = X(0) \Leftrightarrow (9a+1)^{2026} = 1 \stackrel{a \in \mathbf{R}}{\Leftrightarrow} a \in \left\{\frac{-2}{9}, 0\right\}.$$

2. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} \cos x + \sin x & 2 \sin x \\ -\sin x & \cos x - \sin x \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbf{R}$.

a) Să se demonstreze că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.

b) Să se calculeze $A^n(x)$, unde $n \in \mathbf{N}^*$.

c) Dacă $B = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$, să se calculeze B^n , unde $n \in \mathbf{N}^*$.

d) Dacă $C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix}$, să se determine $n \in \mathbf{N}^*$, astfel încât $C^n = I_2$.

Rezolvare a)

$$\begin{aligned} A(x) \cdot A(y) &= \begin{pmatrix} \cos x + \sin x & 2 \sin x \\ -\sin x & \cos x - \sin x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos y + \sin y & 2 \sin y \\ -\sin y & \cos y - \sin y \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y) + (\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y) & 2(\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y) \\ -(\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y) & (\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y) - (\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(x+y) + \sin(x+y) & 2 \sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & \cos(x+y) - \sin(x+y) \end{pmatrix} = A(x+y), \forall x, y \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

$$b) A^2(x) = A(x) \cdot A(x) = A(x+x) = A(2x).$$

$$A^3(x) = A^2(x) \cdot A(x) = A(2x) \cdot A(x) = A(2x+x) = A(3x).$$

$$P(n): A^n(x) = A(nx), n \in \mathbb{N}^*$$

$$I) P(1): A(x) = A(x) \text{ propoziție adevărată}$$

$$II) P(k) \rightarrow P(k+1), \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$P(k): A^k(x) = A(kx) \text{ presupunem adevărat}$$

$$P(k+1): A^{k+1}(x) = A((k+1) \cdot x) \text{ trebuie demonstrat.}$$

$$A^{k+1}(x) = A^k(x) \cdot A(x) = A(kx) \cdot A(x) = A(kx+x) = A((k+1) \cdot x) \Rightarrow P(k+1) \text{ propoziție adevărată.}$$

$$\text{Din } \left. \begin{array}{l} P(1) \text{ "A"} \\ P(k) \rightarrow P(k+1), \forall k \in \mathbb{N}^* \end{array} \right\} \xRightarrow{M.I.M} P(n) \text{ propoziție adevărată, } \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$

$$A^n(x) = A(nx) = \begin{pmatrix} \cos nx + \sin nx & 2 \sin nx \\ -\sin nx & \cos nx - \sin nx \end{pmatrix}.$$

$$c) B = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} & 2 \sin \frac{\pi}{3} \\ -\sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$B^n = 2^n \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} & 2 \sin \frac{\pi}{3} \\ -\sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \stackrel{b)}{=} 2^n \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{3} + \sin \frac{n\pi}{3} & 2 \sin \frac{n\pi}{3} \\ -\sin \frac{n\pi}{3} & \cos \frac{n\pi}{3} - \sin \frac{n\pi}{3} \end{pmatrix}.$$

$$d) C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} & 2 \sin \frac{\pi}{6} \\ -\sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$C^n = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} & 2 \sin \frac{\pi}{6} \\ -\sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{6} + \sin \frac{n\pi}{6} & 2 \sin \frac{n\pi}{6} \\ -\sin \frac{n\pi}{6} & \cos \frac{n\pi}{6} + \sin \frac{n\pi}{6} \end{pmatrix}.$$

$$C^n = I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{n\pi}{6} = 0 \\ \cos \frac{n\pi}{6} = 1 \end{cases} \stackrel{n \in \mathbb{N}^*}{\Leftrightarrow} \frac{n\pi}{6} \in \{2k\pi | k \in \mathbb{N}^*\} \Leftrightarrow n:12$$

3. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n , unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 7 & 10 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fie $A^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_n & 2b_n \\ 0 & 0 & b_n & a_n \\ a_n & 2b_n & 0 & 0 \\ b_n & a_n & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $n \in \mathbb{N}$. Din egalitatea $A^{2n+3} = A^{2n+1} \cdot A^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$

obținem relațiile de recurență $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 4b_n, \forall n \in \mathbb{N}, (1) \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n, \forall n \in \mathbb{N}, (2) \end{cases}$

Din (1) obținem $b_n = \frac{a_{n+1} - 3a_n}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ care substituit în relația (2) conduce la

$a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Folosind ecuația caracteristică relației de recurență și condițiile

inițiale $a_0 = 1, a_1 = 7$ obținem $a_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{2n+1} + (1-\sqrt{2})^{2n+1}}{2}$,

$$b_n = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left[(1+\sqrt{2})^{2n+1} - (1-\sqrt{2})^{2n+1} \right].$$

Prin urmare $A^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_n & 2b_n \\ 0 & 0 & b_n & a_n \\ a_n & 2b_n & 0 & 0 \\ b_n & a_n & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $a_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{2n+1} + (1-\sqrt{2})^{2n+1}}{2}$,

$$b_n = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left[(1+\sqrt{2})^{2n+1} - (1-\sqrt{2})^{2n+1} \right], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned}
A^{2n} &= A^{2n-1} \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{n-1} & 2b_{n-1} \\ 0 & 0 & b_{n-1} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & 2b_{n-1} & 0 & 0 \\ b_{n-1} & a_{n-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a_{n-1} + 2b_{n-1} & 2a_{n-1} + 2b_{n-1} & 0 & 0 \\ a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-1} + 2b_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} + 2b_{n-1} & 2a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ 0 & 0 & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-1} + 2b_{n-1} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} x_n & 2y_n & 0 & 0 \\ y_n & x_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_n & 2y_n \\ 0 & 0 & y_n & x_n \end{pmatrix}, \text{ unde } x_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{2n} + (1-\sqrt{2})^{2n}}{2}, y_n = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left[(1+\sqrt{2})^{2n} - (1-\sqrt{2})^{2n} \right], \\
&\forall n \in \mathbb{N}^*
\end{aligned}$$

4. O matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ se numește **involutivă** dacă: $A^2 = I_n$;

O matrice $B \in M_n(\mathbb{C})$ se numește **idempotentă** dacă: $B^2 = B$.

Să se arate că:

a) Dacă A este involutivă atunci $\frac{1}{2}(A + I_n)$ este idempotentă.

b) dacă B este idempotentă atunci $2B - I_n$ este involutivă.

Rezolvare:

a) Din $A^2 = I_n$ obținem

$$\left[\frac{1}{2}(A + I_n) \right]^2 = \frac{1}{4}(A^2 + 2A + I_n) = \frac{1}{4}(I_n + 2A + I_n) = \frac{1}{2}(A + I_n) \Rightarrow \frac{1}{2}(A + I_n) \text{ este idempotentă.}$$

b) Din $B^2 = B$ obținem

$$(2B - I_n)^2 = 4B^2 - 4B + I_n = 4B - 4B + I_n = I_n \Rightarrow 2B - I_n \text{ este involutivă.}$$

5. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$, unde ε este o rădăcină a ecuației $x^2 + x + 1 = 0$. Să se

calculeze A^n , unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare.

ε este o rădăcină a ecuației $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

$$\varepsilon^3 - 1 = (\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) = 0 \Rightarrow \varepsilon^3 = 1.$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3\varepsilon^2 & 3\varepsilon \\ 3 & 3\varepsilon & 3\varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3\varepsilon^2 & 3\varepsilon \\ 3 & 3\varepsilon & 3\varepsilon^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9 \cdot I_3.$$

$$A^{4k} = (A^4)^k = (9I_3)^k = 9^k \cdot I_3, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow A^n = \begin{cases} 9^k \cdot I_3, n = 4k \\ 9^k \cdot A, n = 4k + 1 \\ 9^k \cdot A^2, n = 4k + 2 \\ 9^k \cdot A^3, n = 4k + 3 \end{cases}, k \in \mathbb{N}.$$

6. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$, unde $x_n = \frac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2}$,

$$y_n = \frac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2}.$$

b) Să se rezolve în mulțimea $M_2(\mathbf{R})$ ecuația $X^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Rezolvare.

$$P(n): A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}, \text{ unde } x_n = \frac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2}, y_n = \frac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2}.$$

$$\text{I) } P(1): A = \begin{pmatrix} \frac{a+b+a-b}{2} & \frac{a+b-(a-b)}{2} \\ \frac{a+b-(a-b)}{2} & \frac{a+b+a-b}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ propoziție adevărată.}$$

II) $P(k) \rightarrow P(k+1), \forall k \in \mathbf{N}^*$

$$P(k): A^k = \begin{pmatrix} x_k & y_k \\ y_k & x_k \end{pmatrix}, \text{ unde } x_k = \frac{(a+b)^k + (a-b)^k}{2}, y_k = \frac{(a+b)^k - (a-b)^k}{2} \text{ presupunem}$$

adevărat.

$$P(k+1): A^{k+1} = \begin{pmatrix} x_{k+1} & y_{k+1} \\ y_{k+1} & x_{k+1} \end{pmatrix}, \text{ unde } x_{k+1} = \frac{(a+b)^{k+1} + (a-b)^{k+1}}{2},$$

$$y_{k+1} = \frac{(a+b)^{k+1} - (a-b)^{k+1}}{2} \text{ trebuie demonstrat.}$$

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} x_k & y_k \\ y_k & x_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x_k + b \cdot y_k & b \cdot x_k + a \cdot y_k \\ b \cdot x_k + a \cdot y_k & a \cdot x_k + b \cdot y_k \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} a \cdot \frac{(a+b)^k + (a-b)^k}{2} + b \cdot \frac{(a+b)^k - (a-b)^k}{2} & b \cdot \frac{(a+b)^k + (a-b)^k}{2} + a \cdot \frac{(a+b)^k - (a-b)^k}{2} \\ b \cdot \frac{(a+b)^k + (a-b)^k}{2} + a \cdot \frac{(a+b)^k - (a-b)^k}{2} & a \cdot \frac{(a+b)^k + (a-b)^k}{2} + b \cdot \frac{(a+b)^k - (a-b)^k}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{k+1} = \begin{pmatrix} \frac{(a+b)^{k+1} + (a-b)^{k+1}}{2} & \frac{(a+b)^{k+1} - (a-b)^{k+1}}{2} \\ \frac{(a+b)^{k+1} - (a-b)^{k+1}}{2} & \frac{(a+b)^{k+1} + (a-b)^{k+1}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow P(k+1) \text{ propoziție adevărată.}$$

$$\text{Din } \left. \begin{matrix} P(1) \text{ "A"} \\ P(k) \rightarrow P(k+1), \forall k \in \mathbf{N}^* \end{matrix} \right\} \begin{matrix} M.I.M \\ \Rightarrow \end{matrix} P(n) \text{ propoziție adevărată, } \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

b) Dacă $X^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ atunci $X^4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X$ și $X^4 = X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, prin urmare

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Obținem:

$$\begin{cases} 2a + c = 2a + b \\ 2b + d = a + 2b \\ a + 2c = 2c + d \\ b + 2d = c + 2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = a \\ c = b \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{conform a)}} \Rightarrow$$

$$X^3 = \begin{pmatrix} \frac{(a+b)^3 + (a-b)^3}{2} & \frac{(a+b)^3 - (a-b)^3}{2} \\ \frac{(a+b)^3 - (a-b)^3}{2} & \frac{(a+b)^3 + (a-b)^3}{2} \end{pmatrix}.$$

$$X^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{(a+b)^3 + (a-b)^3}{2} & \frac{(a+b)^3 - (a-b)^3}{2} \\ \frac{(a+b)^3 - (a-b)^3}{2} & \frac{(a+b)^3 + (a-b)^3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a+b)^3 + (a-b)^3 = 4 \\ (a+b)^3 - (a-b)^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^3 = 3 \\ (a-b)^3 = 1 \end{cases} \xrightarrow{a,b \in \mathbf{R}} \begin{cases} a+b = \sqrt[3]{3} \\ a-b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt[3]{3}+1}{2} \\ b = \frac{\sqrt[3]{3}-1}{2} \end{cases}, \text{ prin urmare}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt[3]{3}+1}{2} & \frac{\sqrt[3]{3}-1}{2} \\ \frac{\sqrt[3]{3}-1}{2} & \frac{\sqrt[3]{3}+1}{2} \end{pmatrix}$$

7. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & z+i & 2z \\ z+i & z^2+2iz-1 & 2z^2+2iz \\ -i & 1-iz & -2iz \end{pmatrix}$, unde $z \in \mathbf{C}$ și

$X(a) = I_3 + a \cdot A$, unde $a \in \mathbf{C}$. Să se calculeze $(X(a))^n$, unde $n \in \mathbf{N}^*$.

Rezolvare

Prin calcul se arată că $A^2 = z^2 \cdot A$

$$X(a) \cdot X(b) = (I_3 + a \cdot A)(I_3 + b \cdot A) = I_3 + a \cdot A + b \cdot A + ab \cdot A^2 = I_3 + a \cdot A + b \cdot A + abz^2 \cdot A = \\ = I_3 + (a + b + abz^2) \cdot A = X(a + b + ab \cdot z^2), \forall a, b \in \mathbb{C}$$

I) Dacă $z = 0$ atunci $X(a) \cdot X(b) = X(a + b), \forall a, b \in \mathbb{C}$ și prin metoda inducției matematice se demonstrează că $(X(a))^n = X(na) = I_3 + na \cdot A$.

II) Dacă $z \in \mathbb{C}^*$ atunci

$$X(a) \cdot X(b) = X(a + b + ab \cdot z^2) = X\left(z^2 \cdot \left(a + \frac{1}{z^2}\right)\left(b + \frac{1}{z^2}\right) - \frac{1}{z^2}\right), \forall a, b \in \mathbb{C} \text{ și prin metoda}$$

inducției matematice se demonstrează că $(X(a))^n = X\left(\frac{(a \cdot z^2 + 1)^n - 1}{z^2}\right) = I_3 + \frac{(a \cdot z^2 + 1)^n - 1}{z^2} \cdot A$.

Bibliografie:

1. Marius Burtea, Georgeta Burtea, Manual de matematică pentru clasa a XI-a, Editura Carminis, 2009.
2. Traian Cohal, Gheorghe Iurea, Probleme de matematică, Editura Paralela 45, 2010.

3. Math Journal

-10-

Marin Chirciu ¹

Mathematical Journal prezintă o selecție de probleme recente din diverse publicații de specialitate .

Problema1315.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{\cos B + \cos C}{\sin \frac{A}{2}} \leq 6 .$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{\cos B + \cos C}{\sin \frac{A}{2}} = \sum \frac{2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = \sum \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = \\ &= 2 \sum \cos \frac{B-C}{2} \stackrel{\cos x \leq 1}{\leq} 6 = RHS . \end{aligned}$$

Remarcă.

In $\triangle ABC$

$$\sum \sqrt{\frac{\cos B + \cos C}{2 \sin \frac{A}{2}}} \leq 3 .$$

Marin Chirciu

Soluție.

¹ Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu” Pitești

$$LHS = \sum \sqrt{\frac{\cos B + \cos C}{2 \sin \frac{A}{2}}} \stackrel{CBS}{\leq} \sqrt{3 \sum \frac{\cos B + \cos C}{2 \sin \frac{A}{2}}} \stackrel{Lema}{\leq} \sqrt{3 \cdot 3} = 3 = RHS.$$

Lemă.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{\cos B + \cos C}{\sin \frac{A}{2}} \leq 6.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1316.

If $a, b, c > 0$ then

$$\sum \frac{b^2 + c^2}{b^2 + c^2 + 2a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Sanong Huayrerai

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{b^2 + c^2}{b^2 + c^2 + 2a^2} = \sum \frac{b^2 + c^2}{(a^2 + b^2) + (c^2 + a^2)} = \sum \frac{x}{y + z} \stackrel{Nesbitt}{\geq} \frac{3}{2} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.

Remarcă.

If $a, b, c > 0$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{b + c}{b + \lambda c + (\lambda + 1)a} \geq \frac{3}{\lambda + 1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{b + c}{b + \lambda c + (\lambda + 1)a} = \sum \frac{b + c}{(a + b) + \lambda(c + a)} = \sum \frac{x}{y + \lambda z} \stackrel{Nesbitt}{\geq} \frac{3}{\lambda + 1} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.

Problema1317.

Solve for naturals

$$x^3 = 18^3 + 24^3 + 30^3.$$

Math 3/26

Soluție.

$$x^3 = 18^3 + 24^3 + 30^3 \Leftrightarrow x^3 = 6^3 (3^3 + 4^3 + 5^3) \Leftrightarrow x^3 = 6^3 \cdot 6^3 = 36^3 \Leftrightarrow x = 36.$$

Deducem că $x = 36$ este soluția ecuației.

Remarcă.

Let be $\lambda \in \mathbb{N}$ fixed. Solve for naturals

$$x^3 = (3\lambda)^3 + (4\lambda)^3 + (5\lambda)^3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$x^3 = (3\lambda)^3 + (4\lambda)^3 + (5\lambda)^3 \Leftrightarrow x^3 = \lambda^3 (3^3 + 4^3 + 5^3) \Leftrightarrow x^3 = \lambda^3 \cdot 6^3 = (6\lambda)^3 \Leftrightarrow x = 6\lambda.$$

Deducem că $x = 6\lambda$ este soluția ecuației.

Problema1318.

If $a, b, c > 0$ then

$$\sum \left(\frac{a^2 + b^2}{a + b} \right)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3.$$

Math Olympiads 5/2025, Sachin Mittal

Soluție.**Lema.**

If $a, b > 0$ then

$$\left(\frac{a^2 + b^2}{a + b} \right)^3 \geq \frac{a^3 + b^3}{2}.$$

Demonstrație.

$$\left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} \right)^3 \geq \frac{x^3 + 1}{2} \Leftrightarrow x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^4 (x^2 + x + 1) \geq 0.$$

Pentru $x = \frac{a}{b}$ obținem $\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)^3 \geq \frac{a^3+b^3}{2}$, cu egal pentru $a = b$.

$$LHS = \sum \left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)^3 \stackrel{Lema}{\geq} \sum \frac{a^3+b^3}{2} = \sum a^3 = a^3 + b^3 + c^3 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.

Remarcă.

1). Let be $\lambda \geq 0$ fixed. Solve for reals

$$\left(\frac{x^2+\lambda}{x+\lambda}\right)^3 = \frac{x^3+\lambda}{\lambda+1}.$$

Soluție.

$$\left(\frac{x^2+\lambda}{x+\lambda}\right)^3 = \frac{x^3+\lambda}{\lambda+1} \Leftrightarrow \lambda x^6 - 3\lambda x^5 + 3\lambda x^4 - \lambda(\lambda^2+1)x^3 + 3\lambda^3 x^2 - 3\lambda^3 x + \lambda^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda(x^6 - 3x^5 + 3x^4 - (\lambda^2+1)x^3 + 3\lambda^2 x^2 - 3\lambda^2 x + \lambda^2) = 0.$$

Pentru $\lambda = 0 \Rightarrow x \in \mathbf{R}^*$ este soluție.

$$\text{Pentru } \lambda > 0 \Rightarrow x^6 - 3x^5 + 3x^4 - (\lambda^2+1)x^3 + 3\lambda^2 x^2 - 3\lambda^2 x + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3(x^3 - \lambda^2) = 0, \text{ cu soluțiile reale } x_1 = 1 \text{ și } x_2 = \sqrt[3]{\lambda^2}.$$

2). If $x, y, z > 0$, $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ then

$$\sum \left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)^3 \geq 2.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x > 0$ then

$$\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)^3 \geq \frac{x^3+1}{2}.$$

Demonstrație.

$$\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)^3 \geq \frac{x^3+1}{2} \Leftrightarrow x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^4(x^2+x+1) \geq 0.$$

$$LHS = \sum \left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)^3 \stackrel{\text{Lema}}{\geq} \sum \frac{x^3+1}{2} = \frac{x^3+y^3+z^3+1}{2} = \frac{3+1}{2} = 2 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Problema1319.

If $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, $x_1 x_2 \dots x_n = 1$ and $k > 0$ then

$$\sum \frac{x_1^3}{\sqrt{x_1+k}} \geq \frac{n}{\sqrt{1+k}}.$$

Mathematical Inequalities 5/2025, Crăciun Gheorghe

Soluție.

Considerăm funcția convexă $f(t) = \frac{e^{3t}}{\sqrt{e^t+k}}$ și folosim inegalitatea lui Jensen.

$$\begin{aligned} \sum f(t_1) &\geq n f\left(\frac{\sum t_1}{n}\right) = n f\left(\frac{\sum \ln x_1}{n}\right) = n f\left(\frac{\ln x_1 x_2 \dots x_n}{n}\right) = \\ &= n f\left(\frac{\ln 1}{n}\right) = n f(0) = n \frac{1}{\sqrt{1+k}} = \frac{n}{\sqrt{1+k}}. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$.

Remarcă.

1). If $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, $x_1 x_2 \dots x_n = 1$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{x_1^4}{\sqrt{x_1+\lambda}} \geq \frac{n}{\sqrt{1+\lambda}}.$$

Soluție.

Considerăm funcția convexă $f(t) = \frac{e^{4t}}{\sqrt{e^t+\lambda}}$ și folosim inegalitatea lui Jensen.

$$\begin{aligned}\sum f(t_1) &\geq nf\left(\frac{\sum t_1}{n}\right) = nf\left(\frac{\sum \ln x_1}{n}\right) = nf\left(\frac{\ln x_1 x_2 \dots x_n}{n}\right) = \\ &= nf\left(\frac{\ln 1}{n}\right) = nf(0) = n \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} = \frac{n}{\sqrt{1+\lambda}}.\end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$.

2). If $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, $x_1 x_2 \dots x_n = 1$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{x_1^5}{\sqrt{x_1 + \lambda}} \geq \frac{n}{\sqrt{1 + \lambda}}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Considerăm funcția convexă $f(t) = \frac{e^{5t}}{\sqrt{e^t + \lambda}}$ și folosim inegalitatea lui Jensen.

$$\begin{aligned}\sum f(t_1) &\geq nf\left(\frac{\sum t_1}{n}\right) = nf\left(\frac{\sum \ln x_1}{n}\right) = nf\left(\frac{\ln x_1 x_2 \dots x_n}{n}\right) = \\ &= nf\left(\frac{\ln 1}{n}\right) = nf(0) = n \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} = \frac{n}{\sqrt{1+\lambda}}.\end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$.

Problema 1320.

If $a, b, c > 0$, $abc = 1$ then

$$\sum \sqrt{\frac{2a}{a+1}} \leq 3.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

Cu substituția $(a, b, c) = \left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right)$ inegalitatea se scrie $\sum \sqrt{\frac{2x}{x+y}} \leq 3$, vezi **Lema**.

Lema.

If $x, y, z > 0$ then

$$\sum \sqrt{\frac{2x}{x+y}} \leq 3.$$

Vasile Cîrtoaje

Soluție.

$$\begin{aligned} \sum \sqrt{\frac{2x}{x+y}} \leq 3 &\Leftrightarrow \sum \sqrt{2x(y+z)(z+x)} \leq 3\sqrt{\prod (y+z)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\sum \sqrt{2x(y+z)(z+x)} \right)^2 \leq 9\prod (y+z), \text{ vezi} \\ \left(\sum \sqrt{2x(y+z)(z+x)} \right)^2 &\stackrel{CBS}{\leq} \sum 2x(y+z) \sum (z+x) = 4 \sum xy \cdot 2 \sum x = \\ &= 8 \sum xy \sum x \stackrel{\text{Lema8/9}}{\leq} 9\prod (y+z). \end{aligned}$$

Am folosit mai sus **Lema8/9**: $\prod (y+z) \geq \frac{8}{9} \sum xy \sum x$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Remarcă.

If $a, b, c > 0, abc = 1$ then

$$\sum \sqrt[4]{\frac{2a}{a+1}} \leq 3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \sqrt[4]{\frac{2a}{a+1}} = \sum \sqrt{\sqrt{\frac{2a}{a+1}}} \stackrel{CBS}{\leq} \sqrt{3 \sum \sqrt{\frac{2a}{a+1}}} \stackrel{(1)}{\leq} \sqrt{3 \cdot 3} = 3 = RHS,$$

$$\text{unde (1)} \Leftrightarrow \sum \sqrt{\frac{2a}{a+1}} \leq 3:$$

Cu substituția $(a, b, c) = \left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x} \right)$ inegalitatea se scrie $\sum \sqrt{\frac{2x}{x+y}} \leq 3$, vezi **Lema**.

Lema.

If $x, y, z > 0$ then

$$\sum \sqrt{\frac{2x}{x+y}} \leq 3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Problema1321.

If $a, b, c > 0, a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$ then

$$\sum \frac{a}{b+c} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a}{b+c} \stackrel{\text{Nesbitt}}{\geq} \frac{3}{2} \sum_{a^2 \leq 3} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Remarcă.

If $a, b, c > 0, a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{a}{b+\lambda c} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\lambda + 1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a}{b+\lambda c} \stackrel{\text{Nesbitt}}{\geq} \frac{3}{\lambda + 1} \sum_{a^2 \leq 3} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\lambda + 1} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Problema1322.

If $a, b, c > 0, a + b + c = 1$ then

$$\sum \frac{a^2 + 4a + 4}{3a^2 - 2a + 1} \leq \frac{49}{2}.$$

Mathematical Inequalities, Crăciun Gheorghe

Soluție.

Lema.

If $a > 0$ then

$$\frac{a^2 + 4a + 4}{3a^2 - 2a + 1} \leq 7a + \frac{35}{6}.$$

Demonstrație.

$$\frac{a^2 + 4a + 4}{3a^2 - 2a + 1} \leq 7a + \frac{35}{6} \Leftrightarrow 126a^3 + 15a^2 - 52a + 11 \geq 0 \Leftrightarrow (3a - 1)^2 (14a + 11) \geq 0.$$

$$LHS = \sum \frac{a^2 + 4a + 4}{3a^2 - 2a + 1} \stackrel{Lema}{\leq} \sum \left(7a + \frac{35}{6} \right) = 7 \sum a + 3 \cdot \frac{35}{6} = 7 \cdot 1 + \frac{35}{2} = \frac{49}{2} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Remarcă.

1). If $a, b, c > 0$, $a + b + c = 1$ and $n \geq \frac{1}{3}$ then

$$\sum \frac{(a+n)^2}{3a^2 - 2a + 1} \leq \frac{(3n+1)^2}{2}.$$

Soluție.

Lema.

If $a > 0$ and $n \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ then

$$\frac{(a+n)^2}{3a^2 - 2a + 1} \leq (3n+1)a + \frac{9n^2 - 1}{6}.$$

Demonstrație.

$$\frac{a^2 + 2na + n^2}{3a^2 - 2a + 1} \leq (3n+1)a + \frac{9n^2 - 1}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18(3n+1)a^3 + (27n^2 - 36n - 21)a^2 + (-18n^2 + 6n + 8)a + 3n^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3a-1)^2 \left[18(3n+1)a + 9(3n^2 - 1) \right] \geq 0, \text{ vezi } n \geq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$LHS = \sum \frac{a^2 + 2na + n^2}{3a^2 - 2a + 1} \stackrel{Lema}{\leq} \sum \left((3n+1)a + \frac{9n^2 - 1}{6} \right) = (3n+1) \sum a + 3 \cdot \frac{9n^2 - 1}{6} =$$

$$= (3n+1) \cdot 1 + \frac{9n^2 - 1}{2} = \frac{(3n+1)^2}{2} = RHS$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \frac{1}{3}$.

2). If $a, b, c > 0$, $a + b + c = 1$ and $\lambda \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ then

$$\sum \frac{(a+\lambda)^2}{3a^2 - 2a + 1} \leq \frac{(3\lambda+1)^2}{2}.$$

Soluție.

Lema.

If $a > 0$ and $\lambda \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ then

$$\frac{(a+\lambda)^2}{3a^2 - 2a + 1} \leq (3\lambda+1)a + \frac{9\lambda^2 - 1}{6}.$$

Demonstrație.

$$\frac{(a+\lambda)^2}{3a^2 - 2a + 1} \leq (3\lambda+1)a + \frac{9\lambda^2 - 1}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18(3\lambda+1)a^3 + (27\lambda^2 - 36\lambda - 21)a^2 + (-18\lambda^2 + 6\lambda + 8)a + 3\lambda^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3a-1)^2 [18(3\lambda+1)a + 9(3\lambda^2 - 1)] \geq 0, \text{ vezi } \lambda \geq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$LHS = \sum \frac{a^2 + 2\lambda a + \lambda^2}{3a^2 - 2a + 1} \stackrel{\text{Lema}}{\leq} \sum \left((3\lambda+1)a + \frac{9\lambda^2 - 1}{6} \right) = (3\lambda+1) \sum a + 3 \cdot \frac{9\lambda^2 - 1}{6} =$$

$$= (3\lambda+1) \cdot 1 + \frac{9\lambda^2 - 1}{2} = \frac{(3\lambda+1)^2}{2} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Remarcă.

3). If $a, b, c > 0$, $a + b + c = 1$ then

$$\sum \frac{(a+1)^2}{3a^2 - 2a + 1} \leq 8.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema 1323.If $n \in \mathbb{N}^*$ then

$$a). \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

$$b). \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3) \cdot (4n+1)} = \frac{n}{4n+1}.$$

$$c). \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(5n-4) \cdot (5n+1)} = \frac{n}{5n+1}.$$

$$d). \frac{1}{1 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 19} + \dots + \frac{1}{(9n-8) \cdot (9n+1)} = \frac{n}{9n+1}.$$

Math 5/2026, Manual

Soluție.

Inducție matematică.

Problema 1324.If $a, b, c > 0$ then

$$\sum \frac{1}{(b+c)^2} \geq \frac{9}{4 \sum a^2}.$$

Mathematical Inequalities, Problem(326), 2/26, Konstantinos Geronikolas, Greece

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{1}{(b+c)^2} = \sum \frac{a^2}{a^2 \cdot (b+c)^2} = \sum \frac{\left(\frac{a}{b+c}\right)^2}{a^2} \stackrel{CS}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{a}{b+c}\right)^2}{\sum a^2} \stackrel{Nesbitt}{\geq} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\sum a^2} = \frac{9}{4 \sum a^2} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.**Remarcă.**1). If $a, b, c > 0$ then

$$\sum \frac{1}{(b+c)^3} \geq \frac{9}{8 \sum a^3}.$$

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{1}{(b+c)^3} = \sum \frac{a^3}{a^3 \cdot (b+c)^3} = \sum \frac{\left(\frac{a}{b+c}\right)^3}{a^3} \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{a}{b+c}\right)^3}{3 \sum a^3} \stackrel{\text{Nesbitt}}{\geq} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{3 \sum a^3} = \\ &= \frac{9}{8 \sum a^3} = RHS. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.

2). If $a, b, c > 0$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{1}{(b+\lambda c)^3} \geq \frac{9}{(\lambda+1)^3 \sum a^3}.$$

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{1}{(b+\lambda c)^3} = \sum \frac{a^3}{a^3 \cdot (b+\lambda c)^3} = \sum \frac{\left(\frac{a}{b+\lambda c}\right)^3}{a^3} \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{a}{b+\lambda c}\right)^3}{3 \sum a^3} \stackrel{\text{Nesbitt}}{\geq} \frac{\left(\frac{3}{\lambda+1}\right)^3}{3 \sum a^3} = \\ &= \frac{\left(\frac{3}{\lambda+1}\right)^3}{3 \sum a^3} = \frac{9}{(\lambda+1)^3 \sum a^3} = RHS. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.

3). If $a, b, c > 0$ and $n \in \mathbf{N}$ then

$$\sum \frac{1}{(b+c)^n} \geq \frac{9}{2^n \sum a^n}.$$

Soluție.

Pentru $n = 0$ se obține egalitatea $3 = 3$.

$$\text{Pentru } n = 1 \text{ avem } \sum \frac{1}{b+c} \geq \frac{9}{2 \sum a}, \text{ vezi } \sum \frac{1}{b+c} \stackrel{\text{CS}}{\geq} \frac{9}{\sum (b+c)} = \frac{9}{2 \sum a}.$$

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$\begin{aligned}
LHS &= \sum \frac{1}{(b+c)^n} = \sum \frac{a^n}{a^n \cdot (b+c)^n} = \sum \frac{\left(\frac{a}{b+c}\right)^n}{a^n} \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{a}{b+c}\right)^n}{3^{n-2} \sum a^n} \stackrel{\text{Nesbitt}}{\geq} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{3^{n-2} \sum a^n} = \\
&= \frac{9}{2^n \sum a^n} = RHS.
\end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.

4). If $a, b, c > 0$ and $n \in \mathbf{N}, \lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{1}{(b+\lambda c)^n} \geq \frac{9}{(\lambda+1)^n \sum a^n}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n = 0$ se obține egalitatea $3 = 3$.

$$\text{Pentru } n = 1 \text{ avem } \sum \frac{1}{b+\lambda c} \geq \frac{9}{(\lambda+1) \sum a}, \text{ vezi } \sum \frac{1}{b+\lambda c} \stackrel{\text{CS}}{\geq} \frac{9}{\sum (b+\lambda c)} = \frac{9}{(\lambda+1) \sum a}.$$

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$\begin{aligned}
LHS &= \sum \frac{1}{(b+\lambda c)^n} = \sum \frac{a^n}{a^n \cdot (b+\lambda c)^n} = \sum \frac{\left(\frac{a}{b+\lambda c}\right)^n}{a^n} \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{a}{b+\lambda c}\right)^n}{3^{n-2} \sum a^n} \stackrel{\text{Nesbitt}}{\geq} \frac{\left(\frac{3}{\lambda+1}\right)^n}{3^{n-2} \sum a^n} = \\
&= \frac{9}{(\lambda+1)^n \sum a^n} = RHS.
\end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.

Problema1325.

If $a, b, c \geq 1$ then

$$\prod \left(a^2 + \frac{2}{a}\right) \geq 9 \sum \frac{1}{a}.$$

Mathematical Inequalities 5/2026, Crăciun Gheorghe

Soluție.

$$LHS = \prod \left(a^2 + \frac{2}{a}\right) = \prod \left(a^2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a}\right) \stackrel{AG}{\geq} \prod 3 \sqrt[3]{a^2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a}} = \prod 3 = 27 \stackrel{(1)}{\geq} 9 \sum \frac{1}{a} = RHS,$$

unde $27 \stackrel{(1)}{\geq} 9 \sum \frac{1}{a} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{a} \leq 3$, vezi $a, b, c \geq 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Remarcă.

1). If $a, b, c, d \geq 1$ then

$$\prod \left(a^3 + \frac{3}{a} \right) \geq 16 \sum \frac{1}{a}.$$

Soluție.

$$LHS = \prod \left(a^3 + \frac{3}{a} \right) = \prod \left(a^3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \right) \stackrel{AG}{\geq} \prod 4 \sqrt[4]{a^3 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a}} = \prod 4 = 64 \stackrel{(1)}{\geq} 16 \sum \frac{1}{a} = RHS,$$

unde $64 \stackrel{(1)}{\geq} 16 \sum \frac{1}{a} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{a} \leq 4$, vezi $a, b, c, d \geq 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = d = 1$.

2). If $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 1$ then

$$\prod \left(a_1^{n-1} + \frac{n-1}{a_1} \right) \geq n \sum \frac{1}{a_1}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \prod \left(a_1^{n-1} + \frac{n-1}{a_1} \right) = \prod \left(a_1^{n-1} + \underbrace{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_1}}_{n-1} \right) \stackrel{AG}{\geq} \prod n \sqrt[n]{a_1^{n-1} \cdot \underbrace{\frac{1}{a_1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_1}}_{n-1}} = \prod n = \\ &= n^n \stackrel{(1)}{\geq} n^{n-1} \sum \frac{1}{a_1} = RHS, \end{aligned}$$

unde $n^n \stackrel{(1)}{\geq} n^{n-1} \sum \frac{1}{a_1} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{a_1} \leq n$, vezi $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$.

Problema 1326.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{81R^3}{8} \leq \sum r_a^3 \leq 82R^3 - 575r^3.$$

Soluție.

Lemă.

In $\triangle ABC$

$$\sum r_a^3 = (4R + r)^3 - 12p^2R.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum r_a^3 &= (4R + r)^3 - 12p^2R \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} (4R + r)^3 - 12(16Rr - 5r^2)R = \\ &= 64R^3 - 144R^2r + 72Rr^2 + r^3 \stackrel{\text{Euler}}{\leq} 82R^3 - 575r^3. \end{aligned}$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} \sum r_a^3 &= (4R + r)^3 - 12p^2R \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} (4R + r)^3 - 12(4R^2 + 4Rr + 3r^2)R = \\ &= 16R^3 - 24Rr^2 + r^3 \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{81R^3}{8} \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$81r^3 \leq \sum h_a^3 \leq \frac{81R^3}{8}.$$

Soluție.

Lemă.

In $\triangle ABC$

$$\sum h_a^3 = \frac{p^6 + 3p^4(r^2 - 4Rr) + 3p^2r^4 + r^3(4R + r)^3}{8R^3}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum h_a^3 = \frac{p^6 + 3p^4(r^2 - 4Rr) + 3p^2r^4 + r^3(4R + r)^3}{8R^3} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p^2 \left[p^2 (p^2 + 3r^2 - 12Rr) + 3r^4 \right] + r^3 (4R + r)^3}{8R^3} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \\
&\stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{(4R^2 + 4Rr + 3r^2) \left[(4R^2 + 4Rr + 3r^2) (4R^2 + 4Rr + 3r^2 + 3r^2 - 12Rr) + 3r^4 \right] + r^3 (4R + r)^3}{8R^3} = \\
&= \frac{64R^6 + 32R^3r^3 + 144R^2r^4 + 96Rr^5 + 64r^6}{8R^3} = \frac{2(4R^6 + 2R^3r^3 + 9R^2r^4 + 6Rr^5 + 4r^6)}{R^3} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \\
&\stackrel{\text{Euler}}{\leq} 2 \cdot \frac{81R^6}{16R^3} = \frac{81R^3}{8}.
\end{aligned}$$

$$= 64R^3 - 144R^2r + 72Rr^2 + r^3 \stackrel{\text{Euler}}{\leq} 82R^3 - 575r^3.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned}
\sum h_a^3 &= \frac{p^6 + 3p^4(r^2 - 4Rr) + 3p^2r^4 + r^3(4R + r)^3}{8R^3} = \\
&= \frac{p^2 \left[p^2 (p^2 + 3r^2 - 12Rr) + 3r^4 \right] + r^3 (4R + r)^3}{8R^3} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \\
&\stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{(16Rr - 5r^2) \left[(16Rr - 5r^2) (16Rr - 5r^2 + 3r^2 - 12Rr) + 3r^4 \right] + r^3 (4R + r)^3}{8R^3} = \\
&= r^3 \cdot \frac{(16R - 5r) \left[(16R - 5r) (4R - 2r) + 3r^2 \right] + (4R + r)^3}{8R^3} = \frac{r^3 (1088R^3 - 1104R^2r + 480Rr^2 - 64r^3)}{8R^3} = \\
&= \frac{r^3 (136R^3 - 138R^2r + 60Rr^2 - 8r^3)}{R^3} = \frac{2r^3 (68R^3 - 69R^2r + 30Rr^2 - 4r^3)}{R^3} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{2r^3 \cdot \frac{81R^3}{2}}{R^3} = \\
&= 81r^3.
\end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum h_a^3 \geq \left(\frac{2r}{R} \right)^3 \sum r_a^3.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.**Lema1.**In $\triangle ABC$

$$\sum h_a^3 = \frac{p^6 + 3p^4(r^2 - 4Rr) + 3p^2r^4 + r^3(4R + r)^3}{8R^3}.$$

Lema2.In $\triangle ABC$

$$\sum r_a^3 = (4R + r)^3 - 12p^2R.$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^6 + 3p^4(r^2 - 4Rr) + 3p^2r^4 + r^3(4R + r)^3}{8R^3} \geq \left(\frac{2r}{R}\right)^3 \left((4R + r)^3 - 12p^2R\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^6 + 3p^4(r^2 - 4Rr) + p^2r^2(128Rr + 3r^2) \geq 63r^3(4R + r)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2 \left[p^2(p^2 + 3r^2 - 12Rr) + r^2(128Rr + 3r^2) \right] \geq 63r^3(4R + r)^3, \text{ care rezultă din inegalitatea lui}$$

$$\text{Gerretsen } p^2 \geq 16Rr - 5r^2 \geq \frac{r(4R + r)^2}{R + r}.$$

Problema1327.1). If $a, b, c > 3, a + b + c = 12$ then

$$\sum \frac{a^2}{a-3} \geq 48.$$

Soluție.Folosim Tangent Line Method pentru funcția $f(x) = \frac{x^2}{x-3}, x > 3$ în punctul $x_0 = 4$.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}, f(4) = 16, f'(4) = -8.$$

$$\text{Ecuația tangentei este } y - 16 = -8(x - 4) \Leftrightarrow y = -8x + 48.$$

$$\text{Avem } f(x) = \frac{x^2}{x-3} \geq -8x + 48 \Leftrightarrow (x-4)^2 \geq 0.$$

$$LHS = \sum \frac{a^2}{a-3} \stackrel{TLM}{\geq} \sum (-8a+48) = -8 \sum a + 3 \cdot 48 = -8 \cdot 12 + 144 = 48.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 4$.

2). If $a, b, c > n$, $a + b + c = 3(n+1)$ then

$$\sum \frac{a^2}{a-n} \geq 3(n+1)^2.$$

Soluție.

Folosim Tangent Line Method pentru funcția $f(x) = \frac{x^2}{x-n}$, $x > n$ în punctul $x_0 = n+1$.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2nx}{(x-n)^2}, f(n) = (n+1)^2, f'(n+1) = 1 - n^2.$$

Ecuția tangentei este $y - (n+1)^2 = (1 - n^2)(x - n - 1) \Leftrightarrow y = (1 - n^2)x + n^3 + 2n^2 + n$.

Avem $f(x) = \frac{x^2}{x-n} \geq (1 - n^2)x + n^3 + 2n^2 + n \Leftrightarrow n^2(x - n - 1)^2 \geq 0$.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{a^2}{a-n} \stackrel{TLM}{\geq} \sum ((1 - n^2)a + n^3 + 2n^2 + n) = (1 - n^2) \sum a + 3 \cdot (n^3 + 2n^2 + n) = \\ &= (1 - n^2) \cdot 3(n+1) + 3(n^3 + 2n^2 + n) = 3(n+1)^2 \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = n+1$.

Remarcă.

3). If $a, b, c > \lambda$, $a + b + c = 3(\lambda+1)$ then

$$\sum \frac{a^2}{a-\lambda} \geq 3(\lambda+1)^2.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Folosim Tangent Line Method pentru funcția $f(x) = \frac{x^2}{x-\lambda}$, $x > \lambda$ în punctul $x_0 = \lambda+1$.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2\lambda x}{(x-\lambda)^2}, f(\lambda) = (\lambda+1)^2, f'(\lambda+1) = 1 - \lambda^2.$$

Ecuția tangentei este $y - (\lambda + 1)^2 = (1 - \lambda^2)(x - \lambda - 1) \Leftrightarrow y = (1 - \lambda^2)x + \lambda(\lambda + 1)^2$.

Avem $f(x) = \frac{x^2}{x - \lambda} \geq (1 - \lambda^2)x + \lambda(\lambda + 1)^2 \Leftrightarrow \lambda^2(x - \lambda - 1)^2 \geq 0$.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{a^2}{a - \lambda} \stackrel{TLM}{\geq} \sum \left((1 - \lambda^2)a + \lambda(\lambda + 1)^2 \right) = (1 - \lambda^2) \sum a + 3 \cdot \lambda(\lambda + 1)^2 = \\ &= (1 - \lambda^2) \cdot 3(\lambda + 1) + 3\lambda(\lambda + 1)^2 = 3(\lambda + 1)^2 \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \lambda + 1$.

Problema1328.

If $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x + y + z}$ then find $E = \sum \frac{1}{x^{2027}} - \sum \frac{1}{x^{2027}}$.

Math5/2026, Samuel Okpako

Soluție.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{x + y + z} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x + y + z} - \frac{1}{z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x + y}{xy} &= \frac{-x - y}{z(x + y + z)} \Leftrightarrow \frac{x + y}{xy} + \frac{x + y}{z(x + y + z)} = 0 \Leftrightarrow (x + y) \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{z(x + y + z)} \right) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{xyz(x + y + z)} &= 0. \end{aligned}$$

Cazul1). $x + y = 0$.

$$\begin{aligned} x + y = 0, x + y + z = 1 &\Rightarrow z = -1 \Rightarrow \\ E &= \frac{1}{x^{2027}} + \frac{1}{y^{2027}} + \frac{1}{z^{2027}} - \frac{1}{x^{2027} + y^{2027} + z^{2027}} = \frac{1}{x^{2027}} + \frac{1}{(-x)^{2027}} + \frac{1}{(-1)^{2027}} - \\ &- \frac{1}{x^{2027} + (-x)^{2027} + (-1)^{2027}} = \frac{1}{-1} - \frac{1}{-1} = 0. \end{aligned}$$

Cazul2). $y + z = 0$.

$$y + z = 0, x + y + z = 1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow E = \sum \frac{1}{x^{2027}} - \sum \frac{1}{x^{2027}} = 0.$$

Cazul3). $z + x = 0$.

$$z+x=0, x+y+z=1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow E = \sum \frac{1}{x^{2027}} - \sum \frac{1}{x^{2027}} = 0.$$

Deducem că $E = 0$.

Remarcă.

If $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$ then find $E = \sum \frac{1}{x^n} - \sum \frac{1}{x^n}$, unde n este număr natural impar.

Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că $E = 0$.

Problema1329.

If $x, y, z > 0, x+y+z=1$ then

$$\sum x^3 + 6xyz \geq \frac{1}{3}.$$

Octogon- April 2007, Mihaly Bencze, Braşov

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = \sum x = 1, q = \sum xy, r = xyz$.

Avem $\sum x^3 = p^3 - 3pq + 9r, p=1 \Leftrightarrow \sum x^3 = 1 - 3q + 3r$.

Inegalitatea se scrie:

$$(1-3q+3r)+6r \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow 1-3q+9r \geq \frac{1}{3}, \text{ care rezultă din inegalitatea lui Schur } p^3-4pq+9r \geq 0, \\ p=1 \Leftrightarrow 1-4q+9r \geq 0 \Leftrightarrow 9r \geq 4q-1.$$

Este suficient să arătăm că:

$$1-3q+4q-1 \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow ??? 3q \leq 1, \text{ vezi } 1=p^2=(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)=3q.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Remarcă.

1). If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ and $\lambda \geq \frac{1}{3}$ then

$$\sum \frac{x}{x^2 + \lambda} \leq \frac{9}{9\lambda + 1}.$$

Soluție.

Considerăm funcția $f(x) = \frac{x}{x^2 + \lambda}$, $x \in (0, 1)$, $f'(x) = \frac{\lambda - x^2}{(x^2 + \lambda)^2}$, $f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3\lambda)}{(x^2 + \lambda)^3} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ este concavă și aplicăm inegalitatea lui Jensen:

$$LHS = \sum \frac{x}{x^2 + \lambda} = \sum f(x) \stackrel{\text{Jensen}}{\leq} 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = 3f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\lambda + \frac{1}{9}} = \frac{9}{9\lambda + 1} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Cazul $\lambda = \frac{1}{3}$.

2). If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$\sum \frac{x}{3x^2 + 1} \leq \frac{3}{4}.$$

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r_a}{r_a^2 + r^2} \leq \frac{9}{10r}.$$

Lemă.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$\sum \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{9}{10}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{r_a}, \frac{r}{r_b}, \frac{r}{r_c}\right)$ inegalitatea se scrie:

$$\sum \frac{\frac{r}{r_a}}{\left(\frac{r}{r_a}\right)^2 + 1} \leq \frac{9}{10} \Leftrightarrow \sum \frac{\frac{r}{r_a}}{\frac{r^2}{r_a^2} + 1} \leq \frac{9}{10} \Leftrightarrow \sum \frac{r_a}{r_a^2 + r^2} \leq \frac{9}{10r}.$$

4). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_a}{h_a^2 + r^2} \leq \frac{9}{10r}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Lemă.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$\sum \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{9}{10}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{h_a} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{h_a}, \frac{r}{h_b}, \frac{r}{h_c}\right)$ inegalitatea se scrie:

$$\sum \frac{\frac{r}{h_a}}{\left(\frac{r}{h_a}\right)^2 + 1} \leq \frac{9}{10} \Leftrightarrow \sum \frac{\frac{r}{h_a}}{\frac{r^2}{h_a^2} + 1} \leq \frac{9}{10} \Leftrightarrow \sum \frac{h_a}{h_a^2 + r^2} \leq \frac{9}{10r}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1330.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{\cot \frac{A}{2}}{\cot^2 \frac{B}{2}} \geq \sqrt{3}.$$

RMM 5/2026, Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Solutie

$$\begin{aligned}
LHS &= \sum \frac{\cot \frac{A}{2}}{\cot^2 \frac{B}{2}} \stackrel{AG}{\geq} 3 \sqrt[3]{\prod \frac{\cot \frac{A}{2}}{\cot^2 \frac{B}{2}}} = 3 \sqrt[3]{\prod \frac{1}{\cot \frac{A}{2}}} = 3 \sqrt[3]{\prod \tan \frac{A}{2}} = 3 \sqrt[3]{\frac{r}{p}} \stackrel{Mitrinovic}{\geq} 3 \sqrt[3]{\frac{r}{3R\sqrt{3}}} = \\
&= 3 \sqrt[3]{\frac{2r}{R} \cdot \frac{1}{(\sqrt{3})^3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \left(\frac{2r}{R} \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{3} \left(\frac{2r}{R} \right)^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{\tan \frac{A}{2}}{\tan^2 \frac{B}{2}} \geq 3\sqrt{3}.$$

Inemath 5/2026, Marin Chirciu

Solutie

$$\begin{aligned}
LHS &= \sum \frac{\tan \frac{A}{2}}{\tan^2 \frac{B}{2}} \stackrel{AG}{\geq} 3 \sqrt[3]{\prod \frac{\tan \frac{A}{2}}{\tan^2 \frac{B}{2}}} = 3 \sqrt[3]{\prod \frac{1}{\tan \frac{A}{2}}} = 3 \sqrt[3]{\prod \cot \frac{A}{2}} = 3 \sqrt[3]{\frac{p}{r}} \stackrel{Mitrinovic}{\geq} 3 \sqrt[3]{\frac{3r\sqrt{3}}{r}} = \\
&= 3 \sqrt[3]{3\sqrt{3}} = 3 \sqrt[3]{(\sqrt{3})^3} = 3\sqrt{3} = RHS.
\end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1331.

If $a, b > 0$, $a^3 + b^3 \leq 2$ then

$$\frac{a^3}{a^2+1} + \frac{b^3}{b^2+1} \leq 1.$$

RMM 5/2026, Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Solutie

Folosim inegalitatea ponderată a mediilor.

$$\sqrt{\frac{\sum a^2}{2}} \leq \sqrt[3]{\frac{\sum a^3}{2}}, a^3 + b^3 \leq 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{\sum a^2}{2}} \leq \sqrt[3]{\frac{\sum a^3}{2}} \leq \sqrt[3]{\frac{2}{2}} = 1 \Rightarrow \sum a^2 \leq 2.$$

$$\frac{a^3}{a^2+1} + \frac{b^3}{b^2+1} \stackrel{AG}{\leq} \frac{a^3}{2a} + \frac{b^3}{2b} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \leq \frac{2}{2} = 1.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = 1$.

Remarcă.

If $a, b > 0$, $a^{2n+1} + b^{2n+1} \leq 2$ and $n \in \mathbb{N}$ then

$$\frac{a^{2n+1}}{a^2+1} + \frac{b^{2n+1}}{b^2+1} \leq 1.$$

Marin Chirciu

Soluție

Pentru $n = 0$ se obține $\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} \leq 1$, vezi $\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} \stackrel{AG}{\leq} \frac{a}{2a} + \frac{b}{2b} = 1$.

În continuare fie $n \in \mathbb{N}^*$.

Folosim inegalitatea ponderată a mediilor.

$$\sqrt[2n]{\frac{\sum a^{2n}}{2}} \leq \sqrt[2n+1]{\frac{\sum a^{2n+1}}{2}}, a^{2n+1} + b^{2n+1} \leq 2 \Rightarrow \sqrt[2n]{\frac{\sum a^{2n}}{2}} \leq \sqrt[2n+1]{\frac{\sum a^{2n+1}}{2}} \leq \sqrt[2n+1]{\frac{2}{2}} = 1 \Rightarrow \sum a^{2n} \leq 2.$$

$$\frac{a^{2n+1}}{a^2+1} + \frac{b^{2n+1}}{b^2+1} \stackrel{AG}{\leq} \frac{a^{2n+1}}{2a} + \frac{b^{2n+1}}{2b} = \frac{a^{2n}}{2} + \frac{b^{2n}}{2} \leq \frac{2}{2} = 1.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = 1$.

Problema 1332.

$$\text{If } x, y, z \in \mathbb{C}, \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 \end{cases} \text{ then find } P = x^{2026} + y^{2026} + z^{2026}.$$

Soluție

Notăm $p = \sum x, q = \sum xy, r = xyz$

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=3 \\ p^2-2q=3 \\ p^3-3pq+3r=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=3 \\ q=3 \\ r=1 \end{cases}.$$

Ecuația cu soluțiile x, y, z este $t^3 - px^2 + qx - r = 0 \Leftrightarrow t^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^3 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow x=y=z=1.$$

Obținem $P = x^{2026} + y^{2026} + z^{2026} = 1^{2026} + 1^{2026} + 1^{2026} = 3$.

Deducem că $P = 3$.

Remarcă.

If $x, y, z \in \mathbf{C}$, $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases}$ then find $P = x^n + y^n + z^n$, unde $n \in \mathbf{N}$.

Marin Chirciu

Deducem că $P = 3$.

Problema 1333.

1735. If $a \geq b \geq 1 \geq c > 0$, $\sum a = 3$ then

$$\sum \frac{1}{a} \geq \sum a^2.$$

Mathematical Reflections 3/2026, Mircea Lascu, Zalău, România

Solution.

Since $a \geq b \geq 1 \geq c > 0$ we have $(a-1)(b-1)(c-1) \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow abc + \sum a - \sum ab - 1 \leq 0, \sum a = 3 \Leftrightarrow abc + 3 - \sum ab - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + abc \leq \sum ab \Leftrightarrow 2 + r \leq q.$$

We use pqr -Method: $p = \sum a = 3, q = \sum ab, r = abc$.

We need to show that $\sum \frac{1}{a} \geq \sum a^2 \Leftrightarrow \frac{q}{r} \geq p^2 - 2q, p = 3 \Leftrightarrow \frac{q}{r} \geq 9 - 2q \Leftrightarrow \frac{q}{r} + 2q \geq 9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow q\left(\frac{1}{r}+2\right) \geq 9, \text{ see } q \geq 2+r.$$

$$\text{It is enough to show that } (2+r)\left(\frac{1}{r}+2\right) \geq 9 \Leftrightarrow 2r^2-4r+2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(r-1)^2 \geq 0.$$

Equality occurs if and only if $a=b=c=1$.

Problema1334.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{\cot^2 A}{\sin A} \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

RMM 5/2026, Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{\cot^2 A}{\sin A} \stackrel{CS}{\geq} \frac{\left(\sum \cot A\right)^2}{\sum \sin A} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{(\sqrt{3})^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Am folosit(1): } \sum \cot A = \frac{p^2-r^2-4Rr}{2pr} \geq \sqrt{3} \text{ și } \sum \sin A = \frac{p}{R} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Remarcă.

In acute $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{\tan^2 A}{\cos A} \geq 18.$$

Math 5/2026, Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{\tan^2 A}{\cos A} \stackrel{CS}{\geq} \frac{\left(\sum \tan A\right)^2}{\sum \cos A} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{(3\sqrt{3})^2}{\frac{3}{2}} = \frac{27}{\frac{3}{2}} = 18.$$

$$\text{Am folosit(1): } \sum \tan A = \frac{2pr}{p^2-(2R+r)^2} \geq 3\sqrt{3} \text{ și } \sum \cos A = 1 + \frac{r}{R} \leq \frac{3}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1335.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{27R^2}{4} \leq \sum r_a^2 \leq \frac{27R^3}{8r}.$$

Soluție.

Lemă.

In $\triangle ABC$

$$\sum r_a^2 = (4R + r)^2 - 2p^2.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum r_a^2 = (4R + r)^2 - 2p^2 \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} (4R + r)^2 - 2(16Rr - 5r^2) = 16R^2 - 24Rr + 11r^2 \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{27R^3}{8r}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum r_a^2 = (4R + r)^2 - 2p^2 \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} (4R + r)^2 - 2(4R^2 + 4Rr + 3r^2) = 8R^2 - 5r^2 \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{27R^2}{4}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2) In $\triangle ABC$ holds

$$27r^2 \leq \sum h_a^2 \leq \frac{27R^2}{4}.$$

Soluție.

Lemă.

In $\triangle ABC$

$$\sum h_a^2 = \frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2}{4R^2}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum h_a^2 &= \frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2}{4R^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \\ &\stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{(4R^2 + 4Rr + 3r^2)(4R^2 + 4Rr + 3r^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2}{4R^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{16R^4 + 32R^2r^2 + 16Rr^3 + 16r^4}{4R^2} = \frac{4(R^4 + 2R^2r^2 + Rr^3 + r^4)}{R^2} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{4 \cdot \frac{27R^4}{16}}{R^2} = \frac{27R^2}{4}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} \sum h_a^2 &= \frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2}{4R^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \\ &\stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{(16Rr - 5r^2)(16Rr - 5r^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2}{4R^2} = \frac{r^2(144R^2 - 80Rr + 16r^2)}{4R^2} = \\ &= \frac{16r^2(9R^2 - 5Rr + r^2)}{4R^2} = \frac{4r^2(9R^2 - 5Rr + r^2)}{R^2} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{4r^2 \cdot \frac{27R^2}{4}}{R^2} = 27r^2. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum h_a^2 \leq \frac{27R^2}{4} \leq \sum r_a^2.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

In $\triangle ABC$

$$\sum h_a^2 = \frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2}{4R^2}.$$

Lema2.

In $\triangle ABC$

$$\sum r_a^2 = (4R + r)^2 - 2p^2.$$

Folosind **Lemele** obținem:

Prima inegalitate:

$$\frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2}{4R^2} \leq \frac{27R^2}{4}$$

$$\begin{aligned}
\sum h_a^2 &= \frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2}{4R^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \\
&\stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{(4R^2 + 4Rr + 3r^2)(4R^2 + 4Rr + 3r^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2}{4R^2} = \\
&= \frac{16R^4 + 32R^2r^2 + 16Rr^3 + 16r^4}{4R^2} = \frac{4(R^4 + 2R^2r^2 + Rr^3 + r^4)}{R^2} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{4 \cdot \frac{27R^4}{16}}{R^2} = \frac{27R^2}{4}.
\end{aligned}$$

A doua inegalitate:

$$\frac{27R^2}{4} \leq (4R + r)^2 - 2p^2.$$

$$\sum r_a^2 = (4R + r)^2 - 2p^2 \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} (4R + r)^2 - 2(4R^2 + 4Rr + 3r^2) = 8R^2 - 5r^2 \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{27R^2}{4}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1336.

If $a, b, c > 0$, $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$ then

$$\sum \frac{a^2}{a+2} \leq 1.$$

RMM 5/2026, Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

Lemă.

If $a > 0$, then

$$\frac{a^2}{a+2} \leq \frac{2a^2 + a}{9}.$$

Demonstrație.

$$\frac{a^2}{a+2} \leq \frac{2a^2 + a}{9} \Leftrightarrow 2a^3 - 4a^2 + 2a \geq 0 \Leftrightarrow 2a(a-1)^2 \geq 0.$$

$$LHS = \sum \frac{a^2}{a+2} \stackrel{\text{Lema}}{\leq} \sum \frac{2a^2 + a}{9} = \frac{1}{9} (2 \sum a^2 + \sum a) \stackrel{\text{Lema}}{\leq} \frac{1}{9} (2 \sum a^2 + \sqrt{3 \sum a^2})^{\sum a^2 \leq 3}$$

$$\stackrel{\sum a^2 \leq 3}{\leq} \frac{1}{9} (2 \cdot 3 + \sqrt{3 \cdot 3}) = \frac{1}{9} (2 \cdot 3 + 3) = 1 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Remarcă.

1). If $a, b, c > 0, a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{a^2}{a + \lambda} \leq \frac{3}{\lambda + 1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lemă.

If $a > 0$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\frac{a^2}{a + \lambda} \leq \frac{\lambda a^2 + a}{(\lambda + 1)^2}.$$

Demonstrație.

$$\frac{a^2}{a + \lambda} \leq \frac{\lambda a^2 + a}{(\lambda + 1)^2} \Leftrightarrow \lambda a^3 - 2\lambda a^2 + \lambda a \geq 0 \Leftrightarrow \lambda a(a - 1)^2 \geq 0.$$

$$LHS = \sum \frac{a^2}{a + \lambda} \stackrel{Lema}{\leq} \sum \frac{\lambda a^2 + a}{(\lambda + 1)^2} = \frac{1}{(\lambda + 1)^2} (\lambda \sum a^2 + \sum a) \stackrel{Lema}{\leq} \frac{1}{(\lambda + 1)^2} (\lambda \sum a^2 + \sqrt{3 \sum a^2}) \stackrel{\sum a^2 \leq 3}{\leq}$$

$$\stackrel{\sum a^2 \leq 3}{\leq} \frac{1}{(\lambda + 1)^2} (\lambda \cdot 3 + \sqrt{3 \cdot 3}) = \frac{1}{(\lambda + 1)^2} (\lambda \cdot 3 + 3) = \frac{3}{\lambda + 1} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

2). If $a, b, c > 0, a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$ then

$$\sum \frac{a^2}{a + 5} \leq \frac{1}{2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1337.

If $a, b, c > 0, abc = 1$ then

$$a + b + c + \frac{1}{ab + bc + ca} \geq \frac{10}{3}.$$

RMM 5/2026, Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = \sum a, q = \sum ab, r = abc = 1$.

Inegalitatea se scrie $p + \frac{1}{q} \geq \frac{10}{3}$, care rezultă din $q \leq \frac{p^2}{3}$.

Rămâne să arătăm că:

$$p + \frac{3}{p^2} \geq \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3p^3 - 10p^2 + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (p-3)(3p^2 - p - 3) \geq 0, \text{ vezi } p \geq 3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Remarcă.

1). If $a, b, c > 0, abc = 1$ and $0 \leq \lambda \leq \frac{9}{2}$ then

$$a + b + c + \frac{\lambda}{ab + bc + ca} \geq \frac{\lambda + 9}{3}.$$

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = \sum a, q = \sum ab, r = abc = 1$.

Inegalitatea se scrie $p + \frac{\lambda}{q} \geq \frac{\lambda + 9}{3}$, care rezultă din $q \leq \frac{p^2}{3}$.

Rămâne să arătăm că:

$$p + \frac{3\lambda}{p^2} \geq \frac{\lambda + 9}{3} \Leftrightarrow 3p^3 - (\lambda + 9)p^2 + 9\lambda \geq 0 \Leftrightarrow (p-3)(3p^2 - \lambda p - 3\lambda) \geq 0, \text{ vezi } p \geq 3 \text{ și}$$

$$0 \leq \lambda \leq \frac{9}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Cazul $\lambda = \frac{9}{2}$.

2). If $a, b, c > 0, abc = 1$ then

$$2(a+b+c) + \frac{9}{ab+bc+ca} \geq 9.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1338.If $a, b > 0$, $ab = 1$ then

$$a+b + \frac{1}{a^2+b^2} \geq \frac{5}{2}.$$

RMM 5/2026, Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

Cu substituția $x = a+b \geq 2\sqrt{ab} = 2$ obținem $x + \frac{1}{x^2-2} \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^3 - 5x^2 - 4x + 12 \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2(2x+3) \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = 1$.**Remarcă.**If $a, b > 0$, $ab = 1$ and $\lambda \leq 1$ then

$$a+b + \frac{\lambda}{a^2+b^2} \geq \frac{\lambda+4}{2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Cu substituția $x = a+b \geq 2\sqrt{ab} = 2$ obținem:

$$x + \frac{\lambda}{x^2-2} \geq \frac{\lambda+4}{2} \Leftrightarrow 2x^3 - (\lambda+4)x^2 - 4x + 4\lambda + 8 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(2x^2 - \lambda x - 2\lambda - 4) \geq 0, \text{ vezi } x \geq 2 \text{ și } \lambda \leq 1.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = 1$.**Problema1339**If $a, b > 0$, $a^3 + b^3 = 2$ then

$$(a^2 + b^2 + 1)(a^6 + b^6 + 1) \geq \frac{27}{a+b+1}.$$

Soluție.

$$(a+b+1)(a^2+b^2+1)(a^6+b^6+1) \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \left(\sqrt[3]{a \cdot a^2 \cdot a^6} + \sqrt[3]{b \cdot b^2 \cdot b^6} + \sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot 1} \right)^3 =$$

$$= (a^3 + b^3 + 1)^3 = (2+1)^3 = 27.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = 1$.

Remarcă.

1). If $a, b > 0$, $a^3 + b^3 = 2$ and $\lambda \geq 0$ then

$$(a^2 + b^2 + \lambda)(a^6 + b^6 + \lambda) \geq \frac{(\lambda + 2)^3}{a + b + \lambda}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$(a+b+\lambda)(a^2+b^2+\lambda)(a^6+b^6+\lambda) \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \left(\sqrt[3]{a \cdot a^2 \cdot a^6} + \sqrt[3]{b \cdot b^2 \cdot b^6} + \sqrt[3]{\lambda \cdot \lambda \cdot \lambda} \right)^3 =$$

$$= (a^3 + b^3 + \lambda)^3 = (2 + \lambda)^3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = 1$.

2). If $a, b > 0$, $a^{3n} + b^{3n} = 2$, $n \in \mathbb{N}$ then

$$(a^{2n} + b^{2n} + 1)(a^{6n} + b^{6n} + 1) \geq \frac{27}{a^n + b^n + 1}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n = 0$ se obține egalitatea $27 = 27$.

În continuare fie $n \in \mathbb{N}^*$.

$$(a^n + b^n + 1)(a^{2n} + b^{2n} + 1)(a^{6n} + b^{6n} + 1) \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \left(\sqrt[3]{a^n \cdot a^{2n} \cdot a^{6n}} + \sqrt[3]{b^n \cdot b^{2n} \cdot b^{6n}} + \sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot 1} \right)^3 =$$

$$= (a^{3n} + b^{3n} + 1)^3 = (2 + 1)^3 = 27.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = 1$.

Problema 1340.

$$\text{If } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{xyz} = 1 \end{cases} \quad \text{then find } P = x^{2023} + y^{2023} + z^{2023}.$$

THCS 2/2022

Soluție.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1, x + y + z = 1 &\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y+z} - \frac{1}{z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} &= \frac{-x-y}{z(x+y+z)} \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} + \frac{x+y}{z(x+y+z)} = 0 \Leftrightarrow (x+y) \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{z(x+y+z)} \right) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz(x+y+z)} &= 0. \end{aligned}$$

Cazul 1). $x + y = 0$.

$$x + y = 0, x + y + z = 1 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow P = x^{2023} + (-x)^{2023} + 1^{2023} = 1.$$

Cazul 2). $y + z = 0$.

$$y + z = 0, x + y + z = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow P = 1^{2023} + y^{2023} + (-y)^{2023} = 1.$$

Cazul 3). $z + x = 0$.

$$z + x = 0, x + y + z = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow P = x^{2023} + 1^{2023} + (-x)^{2023} = 1.$$

Deducem că $P = 1$.

Remarcă.

$$\text{If } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \end{cases} \quad \text{then find } P = x^n + y^n + z^n, \text{ unde } n \text{ este număr natural impar.}$$

Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că $P = 1$.

Problema 1341.

If $a, b, c > 0, abc = 1$ then

$$4\left(\sum a^2\right)^2 \geq 3\sum a + 6\sum ab + 9.$$

MathAtelier 2/2026, Panagiotis Danousis, Greece

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = \sum a, q = \sum ab, r = abc = 1$.

$$\sum a^2 = 3t^2, r = 1 \Rightarrow t \geq 1.$$

Inegalitatea se scrie:

$$4(3t^2)^2 \geq 3p + 6q + 9$$

$$\left(\sum a\right)^2 \leq 3\sum a^2, \sum ab \leq \sum a^2 \Rightarrow p \leq 3t, q \leq 3t^2.$$

Este suficient să arătăm că:

$$4(3t^2)^2 \geq 3 \cdot 3t + 6 \cdot 3t^2 + 9 \Leftrightarrow 4t^4 - 2t^2 - t - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)(4t^3 + 4t^2 + 2t + 1) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 1.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Remarcă.

1). If $a, b, c > 0, abc = 1$ and $n \geq 0, k \geq 0$ then

$$\frac{4}{9}(n+k)\left(\sum a^2\right)^2 \geq n\sum a + k\sum ab + n + k.$$

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = \sum a, q = \sum ab, r = abc = 1$.

$$\sum a^2 = 3t^2, r=1 \Rightarrow t \geq 1.$$

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{4}{9}(n+k)(3t^2)^2 \geq np + kq + n + k$$

$$\left(\sum a\right)^2 \leq 3\sum a^2, \sum ab \leq \sum a^2 \Rightarrow p \leq 3t, q \leq 3t^2.$$

Este suficient să arătăm că:

$$\frac{4}{9}(n+k)(3t^2)^2 \geq n \cdot 3t + k \cdot 3t^2 + n + k \Leftrightarrow 4(n+k)t^4 - 3kt^2 - 3nt - n - k \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(t-1)(4(n+k)t^3 + 4(n+k)t^2 + (4n+k)t + n+k) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 1.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

2). If $a, b, c > 0, abc = 1$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\frac{4}{9}(\lambda+1)\left(\sum a^2\right)^2 \geq \lambda \sum a + \sum ab + \lambda + 1.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1342.

If $a_1, a_2, \dots, a_n > 0, a_1 a_2 \dots a_n = 1$ then

$$\sum \frac{a_1}{\sqrt{a_1^4 + 3}} \leq \frac{1}{2} \sum \frac{1}{a_1}.$$

Turkey NMO 2010

Soluție.

Lema.

If $a > 0$ then

$$\frac{a}{\sqrt{a^4 + 3}} \leq \frac{a}{a+1}.$$

Demonstrație.

$$\frac{a}{\sqrt{a^4 + 3}} \leq \frac{a}{a+1} \Leftrightarrow \sqrt{a^4 + 3} \geq a+1 \Leftrightarrow a^4 + 3 \geq (a+1)^2 \Leftrightarrow a^4 - a^2 - 2a + 2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2(a^2+a+2) \geq 0.$$

Considerăm funcția $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$, $f''(x) = \frac{-2}{(x+1)^3} < 0 \Rightarrow f$ este strict

crescătoare și concavă și folosim inegalitatea lui Jensen.

$$\begin{aligned} \sum \frac{a_1}{a_1+1} &= \sum f(a_1) \stackrel{\text{Jensen}}{\leq} n f\left(\frac{\sum a_1}{n}\right) = n \frac{\sum a_1}{\sum a_1 + 1} = n \frac{\sum a_1}{\sum a_1 + n} \stackrel{AG}{\leq} n \frac{\sum a_1}{n \sqrt[n]{\prod a_1} + n} = n \frac{\sum a_1}{n + n} = \\ &= n \frac{\sum a_1}{2n} = \frac{\sum a_1}{2}. \end{aligned}$$

$$\sum \frac{a_1}{\sqrt{a_1^4+3}} \stackrel{\text{Lema}}{\leq} \sum \frac{a_1}{a_1+1} \leq \frac{1}{2} \sum a_1.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$.

Remarcă.

1). If $a, b, c > 0$, $abc = 1$ then

$$\sum \frac{a}{\sqrt{a^4+3}} \leq \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $a > 0$ then

$$\frac{a}{\sqrt{a^4+3}} \leq \frac{a}{a+1}.$$

$$\sum \frac{a}{\sqrt{a^4+3}} \stackrel{\text{Lema}}{\leq} \sum \frac{a}{a+1} \leq \frac{1}{2} \sum a.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Remarcă.

If $x, y > 0$, $xy = 1$ solve

$$\frac{x}{\sqrt{x^4+3}} + \frac{y}{\sqrt{y^4+3}} = \frac{1}{2}(x+y).$$

Marin Chirciu

Soluție.**Lema.**If $a > 0$ then

$$\frac{a}{\sqrt{a^4+3}} \leq \frac{a}{a+1}.$$

$$\sum \frac{x}{\sqrt{x^4+3}} \stackrel{\text{Lema}}{\leq} \sum \frac{x}{x+1} \leq \frac{1}{2} \sum x.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = 1$.Deducem că ecuația admite soluția unică $(x, y) = (1, 1)$.**Problema 1343.**

1). Solve for reals

$$\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[6]{x^2-1}.$$

Soluție.Domeniul de definiție este $D = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.Cu substituția $(\sqrt[3]{x+1}, \sqrt[3]{x-1}) = (a, b) \Rightarrow a - b = \sqrt{ab}$ și $a^3 - b^3 = 2$.

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{ab}(a^2+ab+b^2) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{ab}((a-b)^2+3ab) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{ab}((\sqrt{ab})^2+3ab) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{ab} \cdot 4ab = 2 \Leftrightarrow 2ab\sqrt{ab} = 1 \Leftrightarrow (ab)^3 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (ab)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$(x+1)(x-1) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - 1 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pm\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Mulțimea soluțiilor ecuației este } S = \left\{ \frac{\pm\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Remarcă.

Let be $\lambda > 0$ fixed. Solve for reals

$$\sqrt[3]{x+\lambda} - \sqrt[3]{x-\lambda} = \sqrt[6]{x^2 - \lambda^2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \left\{ \frac{\pm \lambda \sqrt{5}}{2} \right\}$.

Problema 1344.

Solve for reals

$$66^x - 30^x = 36^x.$$

Ecuația admite $x = 1$ soluție unică.

Remarcă.

Let be $a, b > 1$ fixed. Solve for reals

$$(a+b)^x - b^x = a^x.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$(a+b)^x - b^x = a^x \Leftrightarrow a^x + b^x = (a+b)^x \Leftrightarrow \left(\frac{a}{a+b} \right)^x + \left(\frac{b}{a+b} \right)^x = 1.$$

Ecuația este de forma $f(x) = k$, cu f funcție strict crescătoare, deci injectivă.

O astfel de ecuație are cel mult o soluție.

Cum $f(1) = 1$, rezultă că $x = 1$ este soluția unică a ecuației.

Ecuația admite $x = 1$ soluție unică.

Problema 1345.

Solve for reals

$$\sqrt{4x-9} + \sqrt{4x+9} = 5 + \sqrt{7}.$$

Soluție.

Ecuația admite $x = 4$ soluție unică.

Remarcă.

Let be $a \geq b > 0$, $a + b = \lambda^2$, $\lambda > 0$ fixed. Solve for reals

$$\sqrt{ax-b} + \sqrt{ax+b} = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 2b}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Domeniul de definiție este $D = \left[\frac{b}{a}, \infty \right)$.

Ecuția este de forma $f(x) = k$, cu f funcție strict crescătoare, deci injectivă.

O astfel de ecuație are cel mult o soluție.

Cum $f(1) = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 2b}$, rezultă că $x = 1$ este soluția unică a ecuației.

Ecuția admite $x = 1$ soluție unică.

Problema 1346.

If $a, b, c > 0$, $\sum a^2 = 2$ then

$$\sum \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} + 1 \geq \sum ab.$$

Mathematical Inequalities 5/2026, Duy Hong, Vietnam

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} + 1 \stackrel{cs}{\geq} \frac{(\sum ab)^2}{\sum (a^2 + b^2)} + 1 = \frac{(\sum ab)^2}{2 \sum a^2} + 1 = \frac{(\sum ab)^2}{2 \cdot 2} + 1 \stackrel{(1)}{\geq} \sum ab = RHS,$$

$$\text{unde } \frac{(\sum ab)^2}{2 \cdot 2} + 1 \stackrel{(1)}{\geq} \sum ab \Leftrightarrow \frac{q^2}{4} + 1 \geq q \Leftrightarrow (q-2)^2 \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Remarcă.

1). If $a, b, c, n > 0$, $\sum a^2 = n$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{a^2 b^2}{a^2 + \lambda b^2} + \frac{n}{\lambda + 1} \geq \frac{2}{\lambda + 1} \sum ab.$$

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a^2 b^2}{a^2 + \lambda b^2} + \frac{n}{\lambda + 1} \stackrel{CS}{\geq} \frac{(\sum ab)^2}{\sum (a^2 + \lambda b^2)} + \frac{n}{\lambda + 1} = \frac{(\sum ab)^2}{(\lambda + 1) \sum a^2} + \frac{n}{\lambda + 1} =$$

$$= \frac{(\sum ab)^2}{(\lambda + 1) \cdot n} + \frac{n}{\lambda + 1} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{2}{\lambda + 1} \sum ab = RHS,$$

$$\text{unde } \frac{(\sum ab)^2}{(\lambda + 1) \cdot n} + \frac{n}{\lambda + 1} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{2}{\lambda + 1} \sum ab \Leftrightarrow \frac{q^2}{(\lambda + 1) \cdot n} + \frac{n}{\lambda + 1} \geq \frac{2}{\lambda + 1} q \Leftrightarrow \frac{q^2}{n} + n \geq 2q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (q - n)^2 \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \sqrt{\frac{n}{3}}$.

Cazul $n = \lambda$.

2). If $a, b, c, \lambda > 0, \sum a^2 = \lambda$ then

$$\sum \frac{a^2 b^2}{a^2 + \lambda b^2} + \frac{\lambda}{\lambda + 1} \geq \frac{2}{\lambda + 1} \sum ab.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema 1347.

If $x, y, z > 0, xyz = 1$ then

$$2 \sum xy - \sum x^2 \leq 3.$$

Mathematical Inequalities 5/2026, Crăciun Gheorghe

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = \sum x, q = \sum xy, r = xyz = 1$.

Inegalitatea se scrie:

$$2q - (p^2 - 2q) \leq 3 \Leftrightarrow p^2 + 3 \geq 4q, \text{ care rezultă din inegalitatea lui Schur } p^3 - 4pq + 9r \geq 0, r = 1$$

$$\Leftrightarrow p^3 - 4pq + 9 \geq 0 \Leftrightarrow 4q \leq \frac{p^3 + 9}{p}.$$

Este suficient să arătăm că:

$$p^2 + 3 \geq \frac{p^3 + 9}{p} \Leftrightarrow p \geq 3, \text{ vezi AM-GM și } r = 1.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Remarcă.

If $x, y, z > 0$, $xyz = 1$ and $1 \leq \lambda \leq 2$ then

$$\lambda \sum xy - \sum x^2 \leq 3(\lambda - 1).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim pqr -Method.

$$\text{Notăm } p = \sum x, q = \sum xy, r = xyz = 1.$$

Inegalitatea se scrie:

$$\lambda q - (p^2 - 2q) \leq 3(\lambda - 1) \Leftrightarrow p^2 + 3(\lambda - 1) \geq (\lambda + 2)q, \text{ care rezultă din inegalitatea lui Schur}$$

$$p^3 - 4pq + 9r \geq 0, r = 1 \Leftrightarrow p^3 - 4pq + 9 \geq 0 \Leftrightarrow q \leq \frac{p^3 + 9}{4p}.$$

Este suficient să arătăm că:

$$p^2 + 3(\lambda - 1) \geq (\lambda + 2) \frac{p^3 + 9}{4p} \Leftrightarrow p^3(2 - \lambda) + 12p(\lambda - 1) \geq 9(\lambda + 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p - 3)[(2 - \lambda)p^2 + 3(2 - \lambda)p + 3(2 + \lambda)] \geq 0, p \geq 3, \text{ vezi AM-GM și } r = 1.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Problema1348.

If $a, b, c, d > 0$, $a + b + c + d = 6$ then

$$\sum \frac{a}{\sqrt{b+c+d}} \geq 2\sqrt{2}.$$

Soluție.

$$\begin{aligned}
 LHS &= \sum \frac{a}{\sqrt{b+c+d}} = \sum \frac{a}{\sqrt{6-a}} = \sum f(a) \stackrel{\text{Jensen}}{\geq} 4f\left(\frac{\sum a}{4}\right) = 4f\left(\frac{6}{4}\right) = 4f\left(\frac{3}{2}\right) = \\
 &= 4 \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{6-\frac{3}{2}}} = \frac{6}{\sqrt{\frac{9}{2}}} = 2\sqrt{2} = RHS.
 \end{aligned}$$

Am folosit $f(x) = \frac{6}{\sqrt{6-x}}$, $f''(x) = \frac{1}{4}(24-x)(6-x)^{-\frac{5}{2}} > 0, 0 < x < 6$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = d = \frac{3}{2}$.

Remarcă.

If $a, b, c, d, \lambda > 0, a + b + c + d = \lambda$ then

$$\sum \frac{a}{\sqrt{b+c+d}} \geq 2\sqrt{\frac{\lambda}{3}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\begin{aligned}
 LHS &= \sum \frac{a}{\sqrt{b+c+d}} = \sum \frac{a}{\sqrt{\lambda-a}} = \sum f(a) \stackrel{\text{Jensen}}{\geq} 4f\left(\frac{\sum a}{4}\right) = 4f\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \\
 &= 4 \frac{\frac{\lambda}{4}}{\sqrt{\lambda-\frac{\lambda}{4}}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{3\lambda}{4}}} = 2\sqrt{\frac{\lambda}{3}} = RHS.
 \end{aligned}$$

Am folosit $f(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda-x}}$, $f''(x) = \frac{1}{4}(4\lambda-x)(\lambda-x)^{-\frac{5}{2}} > 0, 0 < x < \lambda$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = d = \frac{\lambda}{4}$.

Problema 1349.

If $a, b, c > 0, a + b + c = 3$ then

$$\sum \frac{a}{\sqrt{a+2b+6bc}} \geq 1.$$

Math Atelier 5/2026, Konstantinos Geronikolas, Greece

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{a}{\sqrt{a+2b+6bc}} = \sum \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a^2+2ab+6abc}} = \sum \frac{a^{\frac{3}{2}}}{(a^2+2ab+6abc)^{\frac{1}{2}}} \stackrel{\text{Radon}}{\geq} \\ &\stackrel{\text{Radon}}{\geq} \frac{(\sum a)^{\frac{3}{2}}}{(\sum (a^2+2ab+6abc))^{\frac{1}{2}}} = \frac{(\sum a)^{\frac{3}{2}}}{(\sum a^2+2\sum ab+18abc)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(\sum a)^{\frac{3}{2}}}{((\sum a)^2+18abc)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{3^{\frac{3}{2}}}{(3^2+18abc)^{\frac{1}{2}}} \stackrel{abc \leq 1}{\geq} \frac{3\sqrt{3}}{(9+18)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3\sqrt{3}}{27^{\frac{1}{2}}} = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 1 = RHS. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

If $a, b, c > 0$, $a+b+c=3$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{a}{\sqrt{a+2b+\lambda bc}} \geq \frac{3}{\sqrt{\lambda+3}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{a}{\sqrt{a+2b+\lambda bc}} = \sum \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a^2+2ab+\lambda abc}} = \sum \frac{a^{\frac{3}{2}}}{(a^2+2ab+\lambda abc)^{\frac{1}{2}}} \stackrel{\text{Radon}}{\geq} \\ &\stackrel{\text{Radon}}{\geq} \frac{(\sum a)^{\frac{3}{2}}}{(\sum (a^2+2ab+\lambda abc))^{\frac{1}{2}}} = \frac{(\sum a)^{\frac{3}{2}}}{(\sum a^2+2\sum ab+3\lambda abc)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(\sum a)^{\frac{3}{2}}}{((\sum a)^2+3\lambda abc)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{3^{\frac{3}{2}}}{(3^2+3\lambda abc)^{\frac{1}{2}}} \stackrel{abc \leq 1}{\geq} \frac{3\sqrt{3}}{(9+3\lambda)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3\lambda+9}} = \frac{3}{\sqrt{\lambda+3}} = RHS. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Problema1350.1). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{1}{3r^2} \leq \sum \frac{1}{r_a^2} \leq \frac{R^2}{12r^4}.$$

Soluție.**Lema.**In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{r_a^2} = \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{p^2 r^2}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{1}{r_a^2} = \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{p^2 r^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2(4R+r)}{p^2 r} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{1}{r^2} - \frac{2(4R+r)}{r \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}} = \frac{4R^2 - 7Rr + 4r^2}{Rr^2(4R+r)} \stackrel{\text{Euler}}{\leq}$$

$$\stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{\frac{3R^3}{4r}}{Rr^2 \cdot 9r} = \frac{R^2}{12r^4}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{r_a^2} &= \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{p^2 r^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2(4R+r)}{p^2 r} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{1}{r^2} - \frac{2(4R+r)}{r \frac{R(4R+r)^2}{R+r}} = \frac{1}{r^2} - \frac{2(R+r)}{r^2(4R+r)} = \\ &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{2R-r}{4R+r} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3r^2}. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{1}{3r^2} \leq \sum \frac{1}{h_a^2} \leq \frac{R}{6r^3}.$$

Soluție.**Lema.**In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{h_a^2} = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2p^2 r^2}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{h_a^2} &= \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2p^2 r^2} = \frac{1}{2r^2} - \frac{4R+r}{2p^2 r} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{1}{2r^2} - \frac{4R+r}{2r \cdot \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}} = \frac{1}{2r^2} - \frac{2R-r}{Rr(4R+r)} = \\ &= \frac{4R^2 - 3Rr + 2r^2}{2Rr^2(4R+r)} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{1}{2r^2} \cdot \frac{R}{3r} = \frac{R}{6r^3}. \end{aligned}$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{h_a^2} &= \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2p^2 r^2} = \frac{1}{2r^2} - \frac{4R+r}{2p^2 r} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{1}{2r^2} - \frac{4R+r}{2r \cdot \frac{r(4R+r)^2}{R+r}} = \frac{3R}{2r^2(4R+r)} \\ &= \frac{3R}{2r^2(4R+r)} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{3}{2r^2} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{3r^2}. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{h_a^2} \leq \sum \frac{1}{r_a^2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{h_a^2} = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2p^2 r^2}.$$

Lema2.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{r_a^2} = \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{p^2 r^2}.$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2p^2r^2} \leq \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{p^2r^2} \Leftrightarrow p^2 - r^2 - 4Rr \leq 2p^2 - 4r^2 - 16Rr \Leftrightarrow p^2 \geq 12Rr + 3r^2,$$

vezi inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$$16Rr - 5r^2 \geq 12Rr + 3r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r, \text{ (Euler).}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1351.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{54R^2r}{p} \leq \sum \frac{a^3}{r_a} \leq \frac{27R^3}{p}.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^3}{r_a} = \frac{2p^2(2R+3r) - 2r(4R+r)^2}{p}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum \frac{a^3}{r_a} &= \frac{2p^2(2R+3r) - 2r(4R+r)^2}{p} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{2(4R^2 + 4Rr + 3r^2)(2R+3r) - 2r(4R+r)^2}{p} = \\ &= \frac{4(4R^3 + 2R^2r + 5Rr^2 + 4r^3)}{p} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{4 \cdot \frac{27R^3}{4}}{p} = \frac{27R^3}{p}. \end{aligned}$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} \sum \frac{a^3}{r_a} &= \frac{2p^2(2R+3r) - 2r(4R+r)^2}{p} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{2(16Rr - 5r^2)(2R+3r) - 2r(4R+r)^2}{p} = \\ &= \frac{4r(8R^2 + 15Rr - 8r^2)}{p} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{4r \cdot \frac{27R^2}{2}}{p} = \frac{54R^2r}{p}. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{54R^2r}{p} \leq \sum \frac{a^3}{h_a} \leq \frac{27R^3}{p}.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^3}{h_a} = \frac{p^2(p^2 - 8Rr - 6r^2) + r^2(4R + r)^2}{pr}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum \frac{a^3}{h_a} &= \frac{p^2(p^2 - 8Rr - 6r^2) + r^2(4R + r)^2}{pr} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \\ &\stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{(4R^2 + 4Rr + 3r^2)(4R^2 + 4Rr + 3r^2 - 8Rr - 6r^2) + r^2(4R + r)^2}{pr} = \\ &= \frac{(4R^2 + 4Rr + 3r^2)(4R^2 - 4Rr - 3r^2) + r^2(4R + r)^2}{pr} = \frac{8(2R^4 - 2Rr^3 - r^4)}{pr} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \end{aligned}$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} \sum \frac{a^3}{r_a} &= \frac{2p^2(2R + 3r) - 2r(4R + r)^2}{p} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{2(16Rr - 5r^2)(2R + 3r) - 2r(4R + r)^2}{p} = \\ &= \frac{4r(8R^2 + 15Rr - 8r^2)}{p} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{4r \cdot \frac{27R^2}{2}}{p} = \frac{54R^2r}{p}. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^3}{h_a} \geq \sum \frac{a^3}{r_a}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.**Lema1.**

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^3}{h_a} = \frac{p^2(p^2 - 8Rr - 6r^2) + r^2(4R + r)^2}{pr}.$$

Lema2.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^3}{r_a} = \frac{2p^2(2R + 3r) - 2r(4R + r)^2}{p}.$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2(p^2 - 8Rr - 6r^2) + r^2(4R + r)^2}{pr} \geq \frac{2p^2(2R + 3r) - 2r(4R + r)^2}{p} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2(p^2 - 12r^2 - 12Rr) + 3r^2(4R + r)^2 \geq 0.$$

Distingem cazurile.

Cazul1). Dacă $(p^2 - 12r^2 - 12Rr) \geq 0$ inegalitatea este evidentă.

Cazul2). Dacă $(p^2 - 12r^2 - 12Rr) < 0$ inegalitatea se rescrie:

$$3r^2(4R + r)^2 \geq p^2(12Rr + 12r^2 - p^2), \text{ vezi inegalitatea lui Gerretsen}$$

$$16Rr - 5r^2 \leq p^2 \geq \frac{R(4R + r)^2}{2(2R - r)}.$$

Rămâne să arătăm că:

$$3r^2(4R + r)^2 \geq \frac{R(4R + r)^2}{2(2R - r)}(12Rr + 12r^2 - 16Rr + 5r^2) \Leftrightarrow$$

$$6r(2R - r) \geq R(-4R + 17r) \Leftrightarrow 4R^2 - 5Rr - 6r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R - 2r)(4R + 3r) \geq 0, \text{ vezi}$$

$$R \geq 2r, \text{ (Euler).}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1352.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$4 \leq \sum \frac{a^2}{r_a^2} \leq \frac{2R}{r}.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^2}{r_a^2} = \frac{2[(4R+r)^2 - p^2]}{p^2}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum \frac{a^2}{r_a^2} &= \frac{2[(4R+r)^2 - p^2]}{p^2} = 2 \left(\frac{(4R+r)^2}{p^2} - 1 \right) \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} 2 \left(\frac{(4R+r)^2}{\frac{r(4R+r)^2}{R+r}} - 1 \right) = 2 \left(\frac{R+r}{r} - 1 \right) = \\ &= 2 \left(\frac{R+r}{r} - 1 \right) = \frac{2R}{r}. \end{aligned}$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} \sum \frac{a^2}{r_a^2} &= \frac{2[(4R+r)^2 - p^2]}{p^2} = 2 \left(\frac{(4R+r)^2}{p^2} - 1 \right) \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} 2 \left(\frac{(4R+r)^2}{\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}} - 1 \right) = 2 \left(\frac{2(2R-r)}{R} - 1 \right) = \\ &= 2 \left(\frac{2(2R-r)}{R} - 1 \right) = \frac{2(3R-2r)}{R} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{2 \cdot 2R}{R} = 4. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{2R}{r} \leq \sum \frac{a^2}{h_a^2} \leq \frac{R^4}{4r^4}.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^2}{h_a^2} = \frac{p^2(p^2 - 6r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2}{2p^2r^2}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum \frac{a^2}{h_a^2} &= \frac{p^2(p^2 - 6r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2}{2p^2r^2} = \frac{p^2 - 6r^2 - 8Rr}{2r^2} + \frac{(4R + r)^2}{2p^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \\ &\stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{4R^2 + 4Rr + 3r^2 - 6r^2 - 8Rr}{2r^2} + \frac{(4R + r)^2}{2 \cdot \frac{r(4R + r)^2}{R + r}} = \frac{4R^2 - 4Rr - 3r^2}{2r^2} + \frac{R + r}{2r} = \\ &= \frac{4R^2 - 3Rr - 2r^2}{2r^2} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{R^4}{2r^2} = \frac{R^4}{4r^4}. \end{aligned}$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} \sum \frac{a^2}{h_a^2} &= \frac{p^2(p^2 - 6r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2}{2p^2r^2} = \frac{p^2 - 6r^2 - 8Rr}{2r^2} + \frac{(4R + r)^2}{2p^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \\ &\stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{16Rr - 5r^2 - 6r^2 - 8Rr}{2r^2} + \frac{(4R + r)^2}{2 \cdot \frac{R(4R + r)^2}{2(2R - r)}} = \frac{8R - 11r}{2r} + \frac{2R - r}{R} = \frac{8R^2 - 7Rr - 2r^2}{2Rr} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \\ &\stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{4R^2}{2Rr} = \frac{2R}{r}. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^2}{h_a^2} \geq \sum \frac{a^2}{r_a^2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^2}{h_a^2} = \frac{p^2(p^2 - 6r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2}{2p^2r^2}.$$

Lema2.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^2}{r_a^2} = \frac{2[(4R+r)^2 - p^2]}{p^2}.$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2(p^2 - 6r^2 - 8Rr) + r^2(4R+r)^2}{2p^2r^2} \geq \frac{2[(4R+r)^2 - p^2]}{p^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2(p^2 - 6r^2 - 8Rr) + r^2(4R+r)^2 \geq 4r^2[(4R+r)^2 - p^2] \Leftrightarrow$$

$$p^2(p^2 - 2r^2 - 8Rr) \geq 3r^2(4R+r)^2, \text{ vezi inegalitatea lui Gerretsen } p^2 \geq 16Rr - 5r^2 \geq \frac{r(4R+r)^2}{R+r}$$

Rămâne să arătăm că:

$$\frac{r(4R+r)^2}{R+r}(16Rr - 5r^2 - 2r^2 - 8Rr) \geq 3r^2(4R+r)^2 \Leftrightarrow (8R - 7r) \geq 3(R+r) \Leftrightarrow R \geq 2r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1353.

1). If $x, y, z > 0$, $xy + yz + zx = 1$ then

$$\sum \frac{x^2 y^2}{z(x+y)} \geq \frac{1}{2}.$$

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{x^2 y^2}{z(x+y)} \stackrel{CS}{\geq} \frac{(\sum xy)^2}{\sum z(x+y)} = \frac{(\sum xy)^2}{2\sum xy} = \frac{\sum xy}{2} = \frac{1}{2} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2). If $x, y, z > 0$, $xy + yz + zx = 1$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{x^2 y^2}{z(x+\lambda y)} \geq \frac{1}{\lambda+1}.$$

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{x^2 y^2}{z(x + \lambda y)} \stackrel{CS}{\geq} \frac{(\sum xy)^2}{\sum z(x + \lambda y)} = \frac{(\sum xy)^2}{(\lambda + 1) \sum xy} = \frac{\sum xy}{\lambda + 1} = \frac{1}{\lambda + 1} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3) In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{\tan^2 \frac{A}{2} \tan^2 \frac{B}{2}}{\tan \frac{C}{2} \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} \right)} \geq \frac{1}{2}.$$

Lemă.

If $x, y, z > 0$, $xy + yz + zx = 1$ then

$$\sum \frac{x^2 y^2}{z(x + y)} \geq \frac{1}{2}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\tan \frac{A}{2}, \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2} \right)$ inegalitatea se scrie:

$$\sum \frac{\tan^2 \frac{A}{2} \tan^2 \frac{B}{2}}{\tan \frac{C}{2} \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} \right)} \geq \frac{1}{2}.$$

4). In acute $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{\cot^2 A \cot^2 B}{\cot C (\cot A + \cot B)} \geq \frac{1}{2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Lemă.

If $x, y, z > 0$, $xy + yz + zx = 1$ then

$$\sum \frac{x^2 y^2}{z(x+y)} \geq \frac{1}{2}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \cot A \cot B = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = (\cot A, \cot B, \cot C)$ inegalitatea se scrie:

$$\sum \frac{\cot^2 A \cot^2 B}{\cot C (\cot A + \cot B)} \geq \frac{1}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1354.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$\sum xy - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

Octogon- April 2007, Mihaly Bencze, Braşov

Soluție.

Folosim *pqr* -Method.

Notăm $p = \sum x = 1, q = \sum xy, r = abc$.

Inegalitatea se scrie:

$$q - 2r \leq \frac{7}{27}, \text{ care rezultă din inegalitatea lui Schur } p^3 - 4pq + 9r \geq 0, p = 1 \Leftrightarrow 1 - 4q + 9r \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$r \geq \frac{4q - 1}{9}.$$

Este suficient să arătăm că:

$$q - 2 \cdot \frac{4q - 1}{9} \leq \frac{7}{27} \Leftrightarrow 3q \leq 1, \text{ vezi } 1 = p^2 = (x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) = 3q.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Remarcă.

1). If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ and $\lambda \leq \frac{9}{4}$ then

$$\sum xy - \lambda xyz \leq \frac{9-\lambda}{27}.$$

Marin Chirciu

Soluție.Folosim pqr -Method.Notăm $p = \sum x = 1, q = \sum xy, r = abc$.

Inegalitatea se scrie:

$$q - 2r \leq \frac{7}{27}, \text{ care rezultă din inegalitatea lui Schur } p^3 - 4pq + 9r \geq 0, p = 1 \Leftrightarrow 1 - 4q + 9r \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$r \geq \frac{4q-1}{9}.$$

Este suficient să arătăm că:

$$q - \lambda \cdot \frac{4q-1}{9} \leq \frac{9-\lambda}{27} \Leftrightarrow 3q(9-4\lambda) \leq (9-4\lambda) \Leftrightarrow 3q \leq 1, \text{ vezi}$$

$$1 = p^2 = (x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) = 3q.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

$$\text{Cazul } \lambda = \frac{9}{4}.$$

2). If $x, y, z > 0, x + y + z = 1$ then

$$\sum xy - \frac{9}{4}xyz \leq \frac{1}{4}.$$

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{r_a r_b} \leq \frac{7}{27r^2} + \frac{2}{p^2}.$$

Lemă.If $x, y, z > 0, x + y + z = 1$ then

$$\sum xy - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{r_a}, \frac{r}{r_b}, \frac{r}{r_c}\right)$ inegalitatea se scrie:

$$\begin{aligned} \sum \frac{r}{r_a} \cdot \frac{r}{r_b} - 2 \frac{r}{r_a} \cdot \frac{r}{r_b} \cdot \frac{r}{r_c} &\leq \frac{7}{27} \Leftrightarrow \sum \frac{r^2}{r_a r_b} - 2 \frac{r^3}{r_a r_b r_c} \leq \frac{7}{27} \Leftrightarrow \sum \frac{r^2}{r_a r_b} - 2 \frac{r^3}{r p^2} \leq \frac{7}{27} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum \frac{r^2}{r_a r_b} - \frac{2r^2}{p^2} &\leq \frac{7}{27} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{r_a r_b} - \frac{2}{p^2} \leq \frac{7}{27r^2} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{r_a r_b} \leq \frac{7}{27r^2} + \frac{2}{p^2}. \end{aligned}$$

4). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r^2}{h_a h_b} \leq \frac{7}{27} + \frac{Rr}{p^2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Lemă.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$\sum xy - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{h_a} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{h_a}, \frac{r}{h_b}, \frac{r}{h_c}\right)$ inegalitatea se scrie:

$$\begin{aligned} \sum \frac{r}{h_a} \cdot \frac{r}{h_b} - 2 \frac{r}{h_a} \cdot \frac{r}{h_b} \cdot \frac{r}{h_c} &\leq \frac{7}{27} \Leftrightarrow \sum \frac{r^2}{h_a h_b} - 2 \frac{r^3}{h_a h_b h_c} \leq \frac{7}{27} \Leftrightarrow \sum \frac{r^2}{h_a h_b} - 2 \cdot \frac{r^3}{\frac{2r^2 p^2}{R}} \leq \frac{7}{27} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum \frac{r^2}{h_a h_b} - \frac{Rr}{p^2} &\leq \frac{7}{27} \Leftrightarrow \sum \frac{r^2}{h_a h_b} \leq \frac{7}{27} + \frac{Rr}{p^2}. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1355.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{\sec \frac{A}{2}}{a} \leq \frac{R}{2r^2}.$$

Mathematical Inequalities, George Apostolopoulos, Greece

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{\sec \frac{A}{2}}{a} \stackrel{CBS}{\leq} \sqrt{\sum \frac{1}{a^2} \sum \sec^2 \frac{A}{2}} \leq \sqrt{\frac{1}{4r^2} \cdot \left(2 + \frac{R}{r}\right)} = \frac{1}{2r} \sqrt{\left(2 + \frac{R}{r}\right)} \stackrel{Euler}{\leq} \frac{R}{2r^2} = RHS.$$

Am folosit mai sus: $\sum \frac{1}{a^2} \leq \frac{1}{4r^2}$ și $\sum \sec^2 \frac{A}{2} \leq 2 + \frac{R}{r}$, vezi:

$$\sum \sec^2 \frac{A}{2} = \sum \frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}} = 1 + \frac{(4R+r)^2}{p^2} \stackrel{Gerretsen}{\leq} 1 + \frac{(4R+r)^2}{\frac{r(4R+r)^2}{R+r}} = 1 + \frac{R+r}{r} = 2 + \frac{R}{r}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{2}{R} \leq \sum \frac{\sec \frac{A}{2}}{a} \leq \frac{1}{2r} \sqrt{2 + \frac{R}{r}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{\sec \frac{A}{2}}{a} \stackrel{CBS}{\leq} \sqrt{\sum \frac{1}{a^2} \sum \sec^2 \frac{A}{2}} \leq \sqrt{\frac{1}{4r^2} \cdot \left(2 + \frac{R}{r}\right)} = \frac{1}{2r} \sqrt{2 + \frac{R}{r}}.$$

Am folosit mai sus: $\sum \frac{1}{a^2} \leq \frac{1}{4r^2}$ și $\sum \sec^2 \frac{A}{2} \leq 2 + \frac{R}{r}$, vezi:

$$\sum \sec^2 \frac{A}{2} = \sum \frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}} = 1 + \frac{(4R+r)^2}{p^2} \stackrel{Gerretsen}{\leq} 1 + \frac{(4R+r)^2}{\frac{r(4R+r)^2}{R+r}} = 1 + \frac{R+r}{r} = 2 + \frac{R}{r}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned}
\sum \frac{\sec \frac{A}{2}}{a} &\stackrel{AG}{\geq} 3 \sqrt[3]{\prod \frac{\sec \frac{A}{2}}{a}} = 3 \sqrt[3]{\frac{\prod \sec \frac{A}{2}}{abc}} = 3 \sqrt[3]{\frac{1}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \cdot 4Rrp}} = 3 \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{p}{4R} \cdot 4Rrp}} = 3 \sqrt[3]{\frac{4R}{4Rrp}} = 3 \sqrt[3]{\frac{4R}{p}} = \\
&= 3 \sqrt[3]{\frac{1}{rp^2}} \stackrel{\text{Euler \& Mitrinovic}}{\geq} 3 \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{R}{2} \cdot \frac{27R^2}{4}}} = 3 \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{27R^3}{8}}} = 3 \cdot \frac{2}{3R} = \frac{2}{R}.
\end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \sqrt{\frac{\sec \frac{A}{2}}{a}} \leq \frac{1}{r} \sqrt{\frac{3R}{2}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \sqrt{\frac{\sec \frac{A}{2}}{a}} \stackrel{CBS}{\leq} \sqrt{3 \sum \frac{\sec \frac{A}{2}}{a}} \stackrel{\text{Lema}}{\leq} \sqrt{3 \cdot \frac{R}{2r^2}} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{3R}{2}} = RHS.$$

Lema.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{\sec \frac{A}{2}}{a} \leq \frac{R}{2r^2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1356.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{3p}{2} \leq \sum \frac{r_b r_c}{a} \leq \frac{3R^2 p}{8r^2}.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r_b r_c}{a} = \frac{p(p^2 + r^2 - 8Rr)}{4Rr}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum \frac{r_b r_c}{a} &= \frac{p(p^2 + r^2 - 8Rr)}{4Rr} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{p(4R^2 + 4Rr + 3r^2 + r^2 - 8Rr)}{4Rr} = \frac{p(4R^2 - 4Rr + 4r^2)}{4Rr} = \\ &= \frac{p(R^2 - Rr + r^2)}{Rr} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{p \cdot \frac{3R^3}{8r}}{Rr} = \frac{3R^2 p}{8r^2}. \end{aligned}$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} \sum \frac{r_b r_c}{a} &= \frac{p(p^2 + r^2 - 8Rr)}{4Rr} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{p(16Rr - 5r^2 + r^2 - 8Rr)}{4Rr} = \frac{p(8Rr - 4r^2)}{4Rr} = \\ &= \frac{p(2R - r)}{R} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{p \cdot \frac{3R}{2}}{R} = \frac{3p}{2}. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{9r^2 \sqrt{3}}{R} \leq \sum \frac{h_b h_c}{a} \leq \frac{9r \sqrt{3}}{2}.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_b h_c}{a} = \frac{3pr}{R}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{h_b h_c}{a} = \frac{3pr}{R} \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\leq} \frac{3r \cdot \frac{3R\sqrt{3}}{2}}{R} = \frac{9r\sqrt{3}}{2}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{h_b h_c}{a} = \frac{3pr}{R} \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\geq} \frac{3r \cdot 3r\sqrt{3}}{R} = \frac{9r^2 \sqrt{3}}{R}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_b h_c}{a} \leq \sum \frac{r_b r_c}{a}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_b h_c}{a} = \frac{3pr}{R}.$$

Lema2.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r_b r_c}{a} = \frac{p(p^2 + r^2 - 8Rr)}{4Rr}.$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$\frac{3pr}{R} \leq \frac{p(p^2 + r^2 - 8Rr)}{4Rr} \Leftrightarrow p^2 \geq 8Rr + 11r^2, \text{ vezi inegalitatea lui Gerretsen } p^2 \geq 16Rr - 5r^2.$$

Rămâne să arătăm că:

$$16Rr - 5r^2 \geq 8Rr + 11r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r, \text{ (Euler).}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1357.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$\sum \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{9}{10}.$$

Octogon- April 2007, Mihaly Bencze, Braşov

Soluție.

$$\text{Considerăm funcția } f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, x \in (0, 1), f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}, f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ este concavă și aplicăm inegalitatea lui Jensen:

$$LHS = \sum \frac{x}{x^2 + 1} = \sum f(x) \stackrel{\text{Jensen}}{\leq} 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = 3f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{9}{10} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Remarcă.

1). If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ and $\lambda \geq \frac{1}{3}$ then

$$\sum \frac{x}{x^2 + \lambda} \leq \frac{9}{9\lambda + 1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Considerăm funcția $f(x) = \frac{x}{x^2 + \lambda}$, $x \in (0, 1)$, $f'(x) = \frac{\lambda - x^2}{(x^2 + \lambda)^2}$, $f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3\lambda)}{(x^2 + \lambda)^3} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ este concavă și aplicăm inegalitatea lui Jensen:

$$LHS = \sum \frac{x}{x^2 + \lambda} = \sum f(x) \stackrel{\text{Jensen}}{\leq} 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = 3f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \frac{\frac{1}{3}}{\lambda + \frac{1}{9}} = \frac{9}{9\lambda + 1} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Cazul $\lambda = \frac{1}{3}$

2). If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$\sum \frac{x}{3x^2 + 1} \leq \frac{3}{4}.$$

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r_a}{r_a^2 + r^2} \leq \frac{9}{10r}.$$

Lemă.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$\sum \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{9}{10}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{r_a}, \frac{r}{r_b}, \frac{r}{r_c}\right)$ inegalitatea se scrie:

$$\sum \frac{\frac{r}{r_a}}{\left(\frac{r}{r_a}\right)^2 + 1} \leq \frac{9}{10} \Leftrightarrow \sum \frac{\frac{r}{r_a}}{\frac{r^2}{r_a^2} + 1} \leq \frac{9}{10} \Leftrightarrow \sum \frac{r_a}{r_a^2 + r^2} \leq \frac{9}{10r}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

4). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_a}{h_a^2 + r^2} \leq \frac{9}{10r}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Lemă.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$\sum \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{9}{10}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{h_a} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{h_a}, \frac{r}{h_b}, \frac{r}{h_c}\right)$ inegalitatea se scrie:

$$\sum \frac{\frac{r}{h_a}}{\left(\frac{r}{h_a}\right)^2 + 1} \leq \frac{9}{10} \Leftrightarrow \sum \frac{\frac{r}{h_a}}{\frac{r^2}{h_a^2} + 1} \leq \frac{9}{10} \Leftrightarrow \sum \frac{h_a}{h_a^2 + r^2} \leq \frac{9}{10r}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1358.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{3}{4r} \leq \sum \frac{r_a}{bc} \leq \frac{1}{r} - \frac{1}{2R}.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r_a}{bc} = \frac{2R - r}{2Rr}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{r_a}{bc} = \frac{2R - r}{2Rr} = \frac{1}{r} - \frac{1}{2R}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{r_a}{bc} = \frac{2R - r}{2Rr} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{\frac{3R}{2}}{2Rr} = \frac{3}{4r}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{3}{4r} \leq \sum \frac{h_a}{bc} \leq \frac{3}{4r}.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_a}{bc} = \frac{3}{2R}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{h_a}{bc} = \frac{3}{2R} \leq \frac{3}{2 \cdot 2r} = \frac{3}{4r}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{h_a}{bc} = \frac{3}{2R} \geq \frac{3}{2R}.$$

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_a}{bc} \leq \sum \frac{r_a}{bc}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_a}{bc} = \frac{3}{2R}.$$

Lema2.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r_a}{bc} = \frac{2R-r}{2Rr}.$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$\frac{3}{2R} \leq \frac{2R-r}{2Rr} \Leftrightarrow R \geq 2r, \text{ (Euler).}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1359

1). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{9r}{2R} \leq \sum \frac{r_b r_c}{bc} \leq \frac{9}{4}.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r_b r_c}{bc} = \frac{4R+r}{2R}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{r_b r_c}{bc} = \frac{4R+r}{2R} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{4R+\frac{R}{2}}{2R} = \frac{9}{4}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{r_b r_c}{bc} = \frac{4R+r}{2R} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{4 \cdot 2r+r}{2R} = \frac{9r}{2R}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{9r}{2R} \leq \sum \frac{h_b h_c}{bc} \leq \frac{9}{4}.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_b h_c}{bc} = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2R^2}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum \frac{h_b h_c}{bc} &= \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2R^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{4R^2 + 4Rr + 3r^2 - r^2 - 4Rr}{2R^2} = \frac{4R^2 + 2r^2}{2R^2} = \\ &= \frac{2R^2 + r^2}{R^2} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{2R^2 + \frac{R^2}{4}}{R^2} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} \sum \frac{h_b h_c}{bc} &= \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2R^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{16Rr - 5r^2 - r^2 - 4Rr}{2R^2} = \frac{12Rr - 6r^2}{2R^2} = \\ &= \frac{3r(2R-r)}{R^2} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{3r \cdot \frac{3R}{2}}{R^2} = \frac{9r}{2R}. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_b h_c}{bc} \leq \sum \frac{r_b r_c}{bc}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.**Lema1.**In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_b h_c}{bc} = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2R^2}.$$

Lema2.In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r_b r_c}{bc} = \frac{4R + r}{2R}.$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2R^2} \leq \frac{4R + r}{2R} \Leftrightarrow p^2 - r^2 - 4Rr \leq R(4R + r) \Leftrightarrow p^2 \leq 4R^2 + 5Rr + r^2, \text{ vezi inegalitatea}$$

lui Gerretsen: $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$$4R^2 + 4Rr + 3r^2 \leq 4R^2 + 5Rr + r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r, \text{ (Euler).}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1360.1). In $\triangle ABC$ holds

$$108r^2(R-r) \leq \sum a^2 r_a \leq 27R^2(R-r).$$

Soluție.**Lema.**In $\triangle ABC$ holds

$$\sum a^2 r_a = 4p^2(R-r).$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum a^2 r_a = 4p^2(R-r) \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\leq} 4 \cdot \frac{27R^2}{4}(R-r) = 27R^2(R-r).$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum a^2 r_a = 4p^2 (R-r) \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\geq} 4 \cdot 27r^2 (R-r) = 108r^2 (R-r).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$108r^3 \leq \sum a^2 h_a \leq 27R^2 r.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum a^2 h_a = 4p^2 r.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum a^2 h_a = 4p^2 r \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\leq} 4 \cdot \frac{27R^2}{4} r = 27R^2 r.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum a^2 h_a = 4p^2 r \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\geq} 4 \cdot 27r^2 \cdot r = 108r^3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum a^2 h_a \leq \sum a^2 r_a.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

$$\sum a^2 h_a = 4p^2 r.$$

Lema2.

$$\sum a^2 r_a = 4p^2 (R-r).$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$4p^2r \leq 4p^2(R-r) \Leftrightarrow R \geq 2r, \text{ (Euler).}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1361.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$\sum x^2 + 2\sqrt{3xyz} \leq 1.$$

Octogon- April 2007, Mihaly Bencze, Braşov

Soluție.

$$\sum x^2 + 2\sqrt{3xyz} \leq 1 \Leftrightarrow \left(\sum x\right)^2 - 2\sum xy + 2\sqrt{3xyz} \leq 1 \Leftrightarrow 1^2 - 2\sum xy + 2\sqrt{3xyz} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sum xy \geq 2\sqrt{3xyz} \Leftrightarrow \sum xy \geq \sqrt{3xyz}, \text{ care rezultă din } pqr\text{-Method.}$$

Notăm $p = \sum x = 1, q = \sum xy, r = xyz$.

Inegalitatea $\sum xy \geq \sqrt{3xyz}$ se scrie $q \geq \sqrt{3r} \Leftrightarrow q^2 \geq 3r$, vezi $q^2 \geq 3pr$, $p = 1 \Leftrightarrow q^2 \geq 3r$

Am folosit $q^2 \geq 3pr$, vezi $q^2 = \left(\sum xy\right)^2 \geq 3xyz \sum x = 3pr$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Remarcă.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r^2}{r_a^2} + \frac{2\sqrt{3}r}{p} \leq 1.$$

Soluție.

Lemă.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$\sum x^2 + 2\sqrt{3xyz} \leq 1.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{r_a}, \frac{r}{r_b}, \frac{r}{r_c}\right)$ inegalitatea se scrie:

$$\begin{aligned} \sum \left(\frac{r}{r_a}\right)^2 + 2\sqrt{3\frac{r}{r_a} \cdot \frac{r}{r_b} \cdot \frac{r}{r_c}} &\leq 1 \Leftrightarrow \sum \frac{r^2}{r_a^2} + 2\sqrt{\frac{3r^3}{r_a r_b r_c}} \leq 1 \Leftrightarrow \sum \frac{r^2}{r_a^2} + 2\sqrt{\frac{3r^3}{rp^2}} \leq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum \frac{r^2}{r_a^2} + 2\sqrt{\frac{3r^2}{p^2}} &\leq 1 \Leftrightarrow \sum \frac{r^2}{r_a^2} + \frac{2\sqrt{3}r}{p} \leq 1. \end{aligned}$$

2). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r^2}{h_a^2} + \sqrt{\frac{6Rr}{p^2}} \leq 1.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lemă.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$\sum x^2 + 2\sqrt{3xyz} \leq 1.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{h_a} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{h_a}, \frac{r}{h_b}, \frac{r}{h_c}\right)$ inegalitatea se scrie:

$$\begin{aligned} \sum \left(\frac{r}{h_a}\right)^2 + 2\sqrt{3\frac{r}{h_a} \cdot \frac{r}{h_b} \cdot \frac{r}{h_c}} &\leq 1 \Leftrightarrow \sum \frac{r^2}{h_a^2} + 2\sqrt{\frac{3r^3}{h_a h_b h_c}} \leq 1 \Leftrightarrow \sum \frac{r^2}{h_a^2} + 2\sqrt{\frac{3r^3}{2r^2 p^2}} \leq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum \frac{r^2}{h_a^2} + 2\sqrt{\frac{3Rr}{2p^2}} &\leq 1 \Leftrightarrow \sum \frac{r^2}{h_a^2} + \sqrt{\frac{6Rr}{p^2}} \leq 1 \Leftrightarrow \sum \frac{r^2}{h_a^2} + \sqrt{\frac{6Rr}{p^2}} \leq 1 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1362.

Solve for $x \in (0^\circ, 90^\circ)$

$$\tan x = \frac{2 - (1 + \tan 13^\circ)^2}{2 - (1 - \tan 13^\circ)^2}.$$

Math 5/2026, CS Cheong

Soluție.

Deducem că soluția ecuației este $x = 19^\circ$.

Remarcă.

1). Let be $a \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}\right)$ fixed. Solve for $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\tan x = \frac{2 - (1 + \tan a)^2}{2 - (1 - \tan a)^2}.$$

Soluție.

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{2 - (1 + \tan a)^2}{2 - (1 - \tan a)^2} = \frac{2 - 1 - 2 \tan a - \tan^2 a}{2 - 1 + 2 \tan a - \tan^2 a} = \frac{1 - \tan^2 a - 2 \tan a}{1 - \tan^2 a + 2 \tan a} = \\ &= \frac{(1 - \tan^2 a) \left(1 - \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}\right)}{(1 - \tan^2 a) \left(1 + \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}\right)} = \frac{1 - \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}}{1 + \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}} = \frac{1 - \tan 2a}{1 + \tan 2a} = \frac{\tan 45^\circ - \tan 2a}{1 + \tan 45^\circ \tan 2a} = \\ &= \tan \left(\frac{\pi}{4} - 2a\right). \end{aligned}$$

$$\text{Din } \tan x = \tan \left(\frac{\pi}{4} - 2a\right), x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} - 2a.$$

Deducem că soluția ecuației este $x = \frac{\pi}{4} - 2a$.

Remarcă.

Cazul $a = 18^\circ$.

2). Solve for $x \in (0^\circ, 90^\circ)$.

$$\tan x = \frac{2 - (1 + \tan 18^\circ)^2}{2 - (1 - \tan 18^\circ)^2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că soluția ecuației este $x = 9^\circ$.

Problema1363.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$24r \leq \sum \frac{a(b+c)}{r_a} \leq 12R.$$

Soluție.**Lema.**

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a(b+c)}{r_a} = 12R.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{a(b+c)}{r_a} = 12R \leq 12R.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{a(b+c)}{r_a} = 12R \stackrel{Euler}{\geq} 24r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$12R \leq \sum \frac{a(b+c)}{h_a} \leq \frac{6R^2}{r}.$$

Soluție.**Lema.**

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a(b+c)}{h_a} = \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{r}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned}\sum \frac{a(b+c)}{h_a} &= \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{r} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{4R^2 + 4Rr + 3r^2 + r^2 - 2Rr}{r} = \\ &= \frac{4R^2 + 2Rr + 4r^2}{r} = \frac{2(2R^2 + Rr + 2r^2)}{r} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{2 \cdot 3R^2}{r} = \frac{6R^2}{r}.\end{aligned}$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned}\sum \frac{a(b+c)}{h_a} &= \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{r} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{16Rr - 5r^2 + r^2 - 2Rr}{r} = \frac{14Rr - 4r^2}{r} = \\ &= 2(7R - 2r) \stackrel{\text{Euler}}{\geq} 2 \cdot 6R = 12R.\end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a(b+c)}{h_a} \geq \sum \frac{a(b+c)}{r_a}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a(b+c)}{h_a} = \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{r}.$$

Lema2.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a(b+c)}{r_a} = 12R.$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$\begin{aligned}\frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{r} \geq 12R &\Leftrightarrow p^2 + r^2 - 2Rr \geq 12Rr \Leftrightarrow p^2 \geq 14Rr - r^2, \text{ vezi inegalitatea lui Gerretsen} \\ p^2 &\geq 16Rr - 5r^2.\end{aligned}$$

Rămâne să arătăm că:

$$16Rr - 5r^2 \geq 14Rr - r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r, \text{ (Euler).}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1364.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$324r^4 \leq \sum bcr_b r_c \leq \frac{81R^5}{8r}.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum bcr_b r_c = p^2 (p^2 + r^2 - 8Rr).$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum bcr_b r_c &= p^2 (p^2 + r^2 - 8Rr) \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{27R^2}{4} (4R^2 + 4Rr + 3r^2 + r^2 - 8Rr) = \\ &= \frac{27R^2}{4} (4R^2 - 4Rr + 4r^2) = 27R^2 (R^2 - Rr + r^2) \stackrel{\text{Euler}}{\leq} 27R^2 \frac{3R^3}{8r} = \frac{81R^5}{8r}. \end{aligned}$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} \sum bcr_b r_c &= p^2 (p^2 + r^2 - 8Rr) \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} 27r^2 (16Rr - 5r^2 + r^2 - 8Rr) = \\ &= 27r^2 (8Rr - 4r^2) = 108r^3 (2R - r) \stackrel{\text{Euler}}{\geq} 108r^3 \cdot 3r = 324r^4 \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$324r^4 \leq \sum bch_b h_c \leq 81R^2 r^2.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum bch_b h_c = 12p^2 r^2.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum bch_b h_c = 12p^2 r^2 \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\leq} 12 \frac{27R^2}{4} r^2 = 81R^2 r^2.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum bch_b h_c = 12p^2 r^2 \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\geq} 12 \cdot 27r^2 r^2 = 324r^4.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum bch_b h_c \leq \sum bcr_b r_c.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum bch_b h_c = 12p^2 r^2.$$

Lema2.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum bcr_b r_c = p^2 (p^2 + r^2 - 8Rr).$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$12p^2 r^2 \leq p^2 (p^2 + r^2 - 8Rr) \Leftrightarrow 12r^2 \leq p^2 + r^2 - 8Rr \Leftrightarrow p^2 \geq 8Rr + 11r^2, \text{ vezi inegalitatea lui Gerretsen } p^2 \geq 16Rr - 5r^2.$$

Rămâne să arătăm că:

$$16Rr - 5r^2 \geq 8Rr + 11r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r, \text{ (Euler).}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1365.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{2R}{r} \leq \sum \frac{a^2}{r_b r_c} \leq 4 \left(\frac{R}{r} - 1 \right).$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^2}{r_b r_c} = \frac{4(R-r)}{r}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{a^2}{r_b r_c} = \frac{4(R-r)}{r} = 4\left(\frac{R}{r} - 1\right).$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{a^2}{r_b r_c} = \frac{4(R-r)}{r} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{4 \cdot \frac{R}{2}}{r} = \frac{2R}{r}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$4 \leq \sum \frac{a^2}{h_b h_c} \leq \frac{2R}{r}.$$

Soluție.**Lema.**

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^2}{h_b h_c} = \frac{2R}{r}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{a^2}{h_b h_c} = \frac{2R}{r} \leq \frac{2R}{r}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{a^2}{h_b h_c} = \frac{2R}{r} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{2 \cdot 2r}{r} = 4.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^2}{h_b h_c} \leq \sum \frac{a^2}{r_b r_c}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^2}{h_b h_c} = \frac{2R}{r}.$$

Lema2.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^2}{r_b r_c} = \frac{4(R-r)}{r}.$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$\frac{2R}{r} \leq \frac{4(R-r)}{r} \Leftrightarrow R \geq 2r, \text{ (Euler).}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1366.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$18r^2 p \leq \sum ar_b r_c \leq 9Rrp.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum ar_b r_c = 2pr(4R+r).$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum ar_b r_c = 2pr(4R+r) \stackrel{\text{Euler}}{\leq} 2pr\left(4R + \frac{R}{2}\right) = 9Rrp.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum ar_b r_c = 2pr(4R+r) \stackrel{\text{Euler}}{\geq} 2pr(4 \cdot 2r + r) = 18r^2 p.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$18r^2 p \leq \sum ah_b h_c \leq 9Rrp.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum ah_b h_c = \frac{2pr(p^2 - r^2 - 4Rr)}{R}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum ah_b h_c &= \frac{2pr(p^2 - r^2 - 4Rr)}{R} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{2pr(4R^2 + 4Rr + 3r^2 - r^2 - 4Rr)}{R} = \\ &= \frac{2pr(4R^2 + 2r^2)}{R} = \frac{4pr(2R^2 + r^2)}{R} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{4pr\left(2R^2 + \frac{R^2}{4}\right)}{R} = 9Rrp \end{aligned}$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} \sum ah_b h_c &= \frac{2pr(p^2 - r^2 - 4Rr)}{R} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{2pr(16Rr - 5r^2 - r^2 - 4Rr)}{R} = \frac{2pr(12Rr - 6r^2)}{R} = \\ &= \frac{12pr^2(2R - r)}{R} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{12pr^2 \cdot \frac{3R}{2}}{R} = 18pr^2. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum ah_b h_c \leq \sum ar_b r_c.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum ah_b h_c = \frac{2pr(p^2 - r^2 - 4Rr)}{R}.$$

Lema2.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum ar_b r_c = 2pr(4R + r).$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$\frac{2pr(p^2 - r^2 - 4Rr)}{R} \leq 2pr(4R + r) \Leftrightarrow p^2 - r^2 - 4Rr \leq R(4R + r) \Leftrightarrow p^2 \leq 4R^2 + 5Rr + r^2, \text{ vezi}$$

inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$$4R^2 + 4Rr + 3r^2 \leq 4R^2 + 5Rr + r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r, \text{ (Euler).}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1367.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$3\sqrt{3} \leq \sum \frac{r_b + r_c}{a} \leq \frac{3R\sqrt{3}}{2r}.$$

Soluție.**Lema.**

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r_b + r_c}{a} = \frac{p}{r}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{r_b + r_c}{a} = \frac{p}{r} \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\leq} \frac{\frac{3R\sqrt{3}}{2}}{r} = \frac{3R\sqrt{3}}{2r}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{r_b + r_c}{a} = \frac{p}{r} \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\geq} \frac{3r\sqrt{3}}{r} = 3\sqrt{3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$6\sqrt{3} \leq \sum \frac{h_b + h_c}{a} \leq \frac{3R\sqrt{3}}{r}.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_b + h_c}{a} = \frac{2p}{R}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{h_b + h_c}{a} = \frac{2p}{R} \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\leq} \frac{2 \cdot \frac{3R\sqrt{3}}{2}}{r} = \frac{3R\sqrt{3}}{r}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{h_b + h_c}{a} = \frac{2p}{R} \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\geq} \frac{2 \cdot 3r\sqrt{3}}{r} = 6\sqrt{3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_b + h_c}{a} \leq \sum \frac{r_b + r_c}{a}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_b + h_c}{a} = \frac{2p}{R}.$$

Lema2.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r_b + r_c}{a} = \frac{p}{r}.$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{4r^2} \geq 3 \Leftrightarrow p^2 \geq 8Rr + 11r^2, \text{ vezi inegalitatea lui Gerretsen } p^2 \geq 16Rr - 5r^2.$$

Rămâne să arătăm că:

$$\frac{2p}{R} \leq \frac{p}{r} \Leftrightarrow R \geq 2r, \text{ (Euler).}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1368.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{p(p-a)}{r_b r_c} = 3.$$

Soluție.

$$\sum \frac{p(p-a)}{r_b r_c} = \sum \frac{\frac{p(p-a)}{S} \cdot \frac{S}{p-b} \cdot \frac{S}{p-c}}{S} = \frac{1}{S^2} \sum p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{1}{S^2} \cdot 3S^2 = 3.$$

2). In $\triangle ABC$ holds

$$3 \leq \sum \frac{p(p-a)}{h_b h_c} \leq \frac{3R^3}{8r^3}.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{p(p-a)}{h_b h_c} = \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{r^2}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{p(p-a)}{h_b h_c} = \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{4r^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{4R^2 + 4Rr + 3r^2 + r^2 - 8Rr}{4r^2} = \frac{4R^2 - 4Rr + 4r^2}{4r^2} \stackrel{\text{Euler}}{\leq}$$

$$\stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{4 \cdot \frac{3R^3}{8r}}{4r^2} = \frac{3R^3}{8r^3}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{p(p-a)}{h_b h_c} = \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{4r^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{16Rr - 5r^2 + r^2 - 8Rr}{4r^2} = \frac{8Rr - 4r^2}{4r^2} = \frac{4(2R - r)}{4r} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \\ \geq \frac{4(2 \cdot 2r - r)}{4r} = 3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{p(p-a)}{h_b h_c} \geq \sum \frac{p(p-a)}{r_b r_c}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{p(p-a)}{h_b h_c} = \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{4r^2}.$$

Lema2.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{p(p-a)}{r_b r_c} = 3.$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{4r^2} \geq 3 \Leftrightarrow p^2 \geq 8Rr + 11r^2, \text{ vezi inegalitatea lui Gerretsen } p^2 \geq 16Rr - 5r^2.$$

Rămâne să arătăm că:

$$16Rr - 5r^2 \geq 8Rr + 11r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r, \text{ (Euler).}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1369.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$12r \leq \sum \frac{a(b+c)}{r_b + r_c} \leq 6R.$$

Soluție.**Lema.**In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a(b+c)}{r_b + r_c} = 4(R+r).$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{a(b+c)}{r_b + r_c} = 4(R+r) \stackrel{\text{Euler}}{\leq} 4\left(R + \frac{R}{2}\right) = 4 \cdot \frac{3R}{2} = 6R.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{a(b+c)}{r_b + r_c} = 4(R+r) \stackrel{\text{Euler}}{\geq} 4(2r+r) = 12r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$12r \leq \sum \frac{a(b+c)}{h_b + h_c} \leq 6R.$$

Soluție.**Lema.**In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a(b+c)}{h_b + h_c} = 6R.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{a(b+c)}{h_b + h_c} = 6R \leq 6R.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{a(b+c)}{h_b + h_c} = 6R \stackrel{\text{Euler}}{\geq} 6 \cdot 2r = 12r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a(b+c)}{h_b+h_c} \geq \sum \frac{a(b+c)}{r_b+r_c}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a(b+c)}{h_b+h_c} = 6R.$$

Lema2.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a(b+c)}{r_b+r_c} = 4(R+r).$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$6R \geq 4(R+r) \Leftrightarrow R \geq 2r, \text{ (Euler).}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1370.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$6\sqrt{3} \leq \sum \frac{a \cdot r_a}{(p-b)(p-c)} \leq \frac{3R\sqrt{3}}{r}.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a \cdot r_a}{(p-b)(p-c)} = \frac{2p}{r}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{a \cdot r_a}{(p-b)(p-c)} = \frac{2p}{r} \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\leq} \frac{2 \cdot \frac{3R\sqrt{3}}{2}}{r} = \frac{3R\sqrt{3}}{r},$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{a \cdot r_a}{(p-b)(p-c)} = \frac{2p}{r} \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\geq} \frac{2 \cdot 3r\sqrt{3}}{r} = 6\sqrt{3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$6\sqrt{3} \leq \sum \frac{a \cdot h_a}{(p-b)(p-c)} \leq \frac{3R\sqrt{3}}{r}.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a \cdot h_a}{(p-b)(p-c)} = \frac{2p}{r}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{a \cdot r_a}{(p-b)(p-c)} = \frac{2p}{r} \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\leq} \frac{2 \cdot \frac{3R\sqrt{3}}{2}}{r} = \frac{3R\sqrt{3}}{r},$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{a \cdot r_a}{(p-b)(p-c)} = \frac{2p}{r} \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\geq} \frac{2 \cdot 3r\sqrt{3}}{r} = 6\sqrt{3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a \cdot h_a}{(p-b)(p-c)} = \sum \frac{a \cdot h_a}{(p-b)(p-c)}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a \cdot h_a}{(p-b)(p-c)} = \frac{2p}{r}.$$

Lema2.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a \cdot r_a}{(p-b)(p-c)} = \frac{2p}{r}.$$

Folosind **Lemele** obținem concluzia.

Problema1371.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{9r}{2p} \leq \sum \frac{(p-b)(p-c)}{a \cdot r_a} \leq \frac{9R}{4p}.$$

Soluție.**Lema.**

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{(p-b)(p-c)}{a \cdot r_a} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4Rp}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum \frac{(p-b)(p-c)}{a \cdot r_a} &= \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4Rp} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{4R^2 + 4Rr + 3r^2 + r^2 + 4Rr}{4Rp} = \frac{4R^2 + 8Rr + 4r^2}{4Rp} = \\ &= \frac{R^2 + 2Rr + r^2}{Rp} = \frac{(R+r)^2}{Rp} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{\left(R + \frac{R}{2}\right)^2}{Rp} = \frac{\left(\frac{3R}{2}\right)^2}{Rp} = \frac{9R}{4p}. \end{aligned}$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} \sum \frac{(p-b)(p-c)}{a \cdot r_a} &= \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4Rp} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{16Rr - 5r^2 + r^2 + 4Rr}{4Rp} = \frac{20Rr - 4r^2}{4Rp} = \frac{5Rr - r^2}{Rp} = \\ &= \frac{r \cdot (5R - r)}{Rp} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{r \cdot \frac{r}{2}}{Rp} = \frac{9r}{2p}. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{9r}{2p} \leq \sum \frac{(p-b)(p-c)}{a \cdot h_a} \leq \frac{9R}{4p}.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{(p-b)(p-c)}{a \cdot h_a} = \frac{4R+r}{2p}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{(p-b)(p-c)}{a \cdot h_a} = \frac{4R+r}{2p} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{4R + \frac{R}{2}}{2p} = \frac{\frac{9R}{2}}{2p} = \frac{9R}{4p}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} \sum \frac{(p-b)(p-c)}{a \cdot h_a} &= \frac{4R+r}{2p} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{4 \cdot 2r + r}{2p} = \frac{9r}{2p} \\ &= \frac{r \cdot (5R-r)}{Rp} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{r \cdot \frac{9R}{2}}{Rp} = \frac{9r}{2p}. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{(p-b)(p-c)}{a \cdot h_a} \leq \sum \frac{(p-b)(p-c)}{a \cdot r_a}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{(p-b)(p-c)}{a \cdot h_a} = \frac{4R+r}{2p}.$$

Lema2.In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{(p-b)(p-c)}{a \cdot r_a} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4Rp}.$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4Rp} \leq \frac{4R+r}{2p} \Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4Rr \leq 2R(4R+r) \Leftrightarrow p^2 \leq 8R^2 - 2Rr - r^2,$$

vezi inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$$4R^2 + 4Rr + 3r^2 \leq 8R^2 - 2Rr - r^2 \Leftrightarrow 2R^2 - 3Rr - 2r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(2R+r) \geq 0, \text{ vezi } R \geq 2r, \text{ (Euler).}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1372.1). In $\triangle ABC$ holds

$$9 \leq \sum \frac{r_a^2}{(p-b)(p-c)} \leq \frac{9R}{2r}.$$

Soluție.**Lema.**In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{r_a^2}{(p-b)(p-c)} = \frac{4R+r}{r}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{r_a^2}{(p-b)(p-c)} = \frac{4R+r}{r} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{4R + \frac{R}{2}}{r} = \frac{9R}{2r}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{r_a^2}{(p-b)(p-c)} = \frac{4R+r}{r} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{4 \cdot 2r + r}{r} = 9.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$4\left(2 - \frac{r}{R}\right)^2 \leq \sum \frac{h_a^2}{(p-b)(p-c)} \leq 9\left(\frac{R}{2r}\right)^3.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{h_a^2}{(p-b)(p-c)} = \frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 12Rr) + r^3(4R + r)}{4R^2r^2}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum \frac{h_a^2}{(p-b)(p-c)} &= \frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 12Rr) + r^3(4R + r)}{4R^2r^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \\ &\stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{(4R^2 + 4Rr + 3r^2)(4R^2 + 4Rr + 3r^2 + 2r^2 - 12Rr) + r^3(4R + r)}{4R^2r^2} = \\ &= \frac{(4R^2 + 4Rr + 3r^2)(4R^2 - 8Rr + 5r^2) + r^3(4R + r)}{4R^2r^2} = \frac{16R^4 - 16R^3r + 16r^4}{4R^2r^2} = \\ &= \frac{16(R^4 - R^3r + r^4)}{4R^2r^2} = \frac{4(R^4 - R^3r + r^4)}{R^2r^2} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{4 \cdot \frac{9R^5}{32r}}{R^2r^2} = \frac{9R^3}{8r^3} = 9\left(\frac{R}{2r}\right)^3. \end{aligned}$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} \sum \frac{h_a^2}{(p-b)(p-c)} &= \frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 12Rr) + r^3(4R + r)}{4R^2r^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \\ &\stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{(16Rr - 5r^2)(16Rr - 5r^2 + 2r^2 - 12Rr) + r^3(4R + r)}{4R^2r^2} = \\ &= \frac{(16Rr - 5r^2)(4Rr - 3r^2) + r^3(4R + r)}{4R^2r^2} = \frac{(16R - 5r)(4R - 3r) + r(4R + r)}{4R^2} = \\ &= \frac{64R^2 - 64Rr + 16r^2}{4R^2} = \frac{4(4R^2 - 4Rr + r^2)}{R^2} = \frac{4(2R - r)^2}{R^2} = 4\left(2 - \frac{r}{R}\right)^2. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_a^2}{(p-b)(p-c)} \geq \frac{2r}{R} \sum \frac{r_a^2}{(p-b)(p-c)}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{h_a^2}{(p-b)(p-c)} = \frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 12Rr) + r^3(4R + r)}{4R^2r^2}.$$

Lema2.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{r_a^2}{(p-b)(p-c)} = \frac{4R + r}{r}.$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 12Rr) + r^3(4R + r)}{4R^2r^2} \leq \frac{2r}{R} \cdot \frac{4R + r}{r} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2(p^2 + 2r^2 - 12Rr) + r^3(4R + r) \geq 8Rr^2(4R + r),$$

vezi inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$.

Rămâne să arătăm că.

$$(16Rr - 5r^2)(16Rr - 5r^2 + 2r^2 - 12Rr) + r^3(4R + r) \geq 8Rr^2(4R + r) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (16R - 5r)(4R - 3r) + r(4R + r) \geq 8R(4R + r) \Leftrightarrow 4R^2 - 9Rr + 2r^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (R - 2r)(4R - r) \geq 0, \text{ vezi } R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1373.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$4\left(\frac{R}{r}-1\right) \leq \sum \frac{bc}{r_a^2} \leq 4\left(\frac{R}{r}-1\right)^2.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{bc}{r_a^2} = \frac{p^2 + r^2 - 12Rr}{r^2}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum \frac{bc}{r_a^2} &= \frac{p^2 + r^2 - 12Rr}{r^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{4R^2 + 4Rr + 3r^2 + r^2 - 12Rr}{r^2} = \frac{4R^2 - 8Rr + 4r^2}{r^2} = \\ &= \frac{4(R^2 - 2Rr + r^2)}{r^2} = \frac{4(R-r)^2}{r^2} = 4\left(\frac{R}{r}-1\right)^2. \end{aligned}$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{bc}{r_a^2} = \frac{p^2 + r^2 - 12Rr}{r^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{16Rr - 5r^2 + r^2 - 12Rr}{r^2} = \frac{4Rr - 4r^2}{r^2} = \frac{4(R-r)}{r} = 4\left(\frac{R}{r}-1\right).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$4 \leq \sum \frac{bc}{h_a^2} \leq \frac{2R}{r}.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{bc}{h_a^2} = \frac{2R}{r}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{bc}{h_a^2} = \frac{2R}{r} \leq \frac{2R}{r}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{bc}{h_a^2} = \frac{2R^{Euler}}{r} \geq 4.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{bc}{h_a^2} \leq \sum \frac{bc}{r_a^2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Lema1.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{bc}{h_a^2} = \frac{2R}{r}.$$

Lema2.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{bc}{r_a^2} = \frac{p^2 + r^2 - 12Rr}{r^2}.$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$\frac{2R}{r} \leq \frac{p^2 + r^2 - 12Rr}{r^2} \Leftrightarrow 2Rr \leq p^2 + r^2 - 12Rr \Leftrightarrow p^2 \geq 14Rr - r^2,$$

vezi inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$.

Rămâne să arătăm că.

$$16Rr - 5r^2 \geq 14Rr - r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1374.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{p}{R} \left(\frac{R}{r} - 1 \right) \leq \sum \frac{r_b r_c}{ar_a} \leq \frac{p}{R} \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2.$$

Soluție.

Lema.In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{r_b r_c}{a r_a} = \frac{p(p^2 + r^2 - 12Rr)}{4Rr^2}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum \frac{r_b r_c}{a r_a} &= \frac{p(p^2 + r^2 - 12Rr)}{4Rr^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{p(4R^2 + 4Rr + 3r^2 + r^2 - 12Rr)}{4Rr^2} = \\ &= \frac{p(4R^2 - 8Rr + 4r^2)}{4Rr^2} = \frac{p(R^2 - 2Rr + r^2)}{Rr^2} = \frac{p(R-r)^2}{Rr^2} = \frac{p}{R} \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2. \end{aligned}$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} \sum \frac{r_b r_c}{a r_a} &= \frac{p(p^2 + r^2 - 12Rr)}{4Rr^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{p(16Rr - 5r^2 + r^2 - 12Rr)}{4Rr^2} = \frac{p(4Rr - 4r^2)}{4Rr^2} = \\ &= \frac{p(R-r)}{Rr} = \frac{p}{R} \left(\frac{R}{r} - 1 \right). \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$3\sqrt{3} \cdot \frac{r}{R} \leq \sum \frac{h_b h_c}{a h_a} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Soluție.**Lema.**In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{h_b h_c}{a h_a} = \frac{p}{R}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{h_b h_c}{a h_a} = \frac{p}{R} \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\leq} \frac{\frac{3R\sqrt{3}}{2}}{R} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{h_b h_c}{ah_a} = \frac{p}{R} \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\geq} \frac{3r\sqrt{3}}{R}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_b h_c}{ah_a} \leq \sum \frac{r_b r_c}{ar_a}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{h_b h_c}{ah_a} = \frac{p}{R}.$$

Lema2.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{r_b r_c}{ar_a} = \frac{p(p^2 + r^2 - 12Rr)}{4Rr^2}.$$

Am folosit mai sus:
$$\sum \frac{p-a}{a(p-b)(p-c)} = \frac{p^2 + r^2 - 12Rr}{4Rr^3}.$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$\frac{p}{R} \leq \frac{p(p^2 + r^2 - 12Rr)}{4Rr^2} \Leftrightarrow 4r^2 \leq p^2 + r^2 - 12Rr \Leftrightarrow p^2 \geq 12Rr + 3r^2,$$

vezi inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$.

Rămâne să arătăm că.

$$16Rr - 5r^2 \geq 12Rr + 3r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1375.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{3}{2} \leq \sum \frac{r_a - r}{r_a + r} \leq 2 - \frac{r}{R}.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{r_a - r}{r_a + r} = \sum \frac{a}{b + c} = \frac{2(p^2 - r^2 - Rr)}{p^2 + r^2 + 2Rr}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\frac{2(p^2 - r^2 - Rr)}{p^2 + r^2 + 2Rr} \leq 2 - \frac{r}{R} \Leftrightarrow p^2 \leq 6R^2 + 2Rr - r^2, \text{ vezi inegalitatea lui Gerretsen}$$

$$p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2.$$

Rămâne să arătăm că:

$$4R^2 + 4Rr + 3r^2 \leq 6R^2 + 2Rr - r^2 \Leftrightarrow R^2 - Rr - 2r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R - 2r)(R + r) \geq 0, \text{ vezi } R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{r_a - r}{r_a + r} = \sum \frac{a}{b + c} \stackrel{\text{Nesbitt}}{\geq} \frac{3}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{3}{2} \leq \sum \frac{h_a - r}{h_a + r} \leq 2 - \frac{r}{R}.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{h_a - r}{h_a + r} = \frac{15p^2 - r^2 - 10Rr}{9p^2 + r^2 + 6Rr}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{h_a - r}{h_a + r} = \frac{15p^2 - r^2 - 10Rr}{9p^2 + r^2 + 6Rr} \stackrel{(1)}{\leq} 2 - \frac{r}{R},$$

$$\text{unde } \frac{15p^2 - r^2 - 10Rr}{9p^2 + r^2 + 6Rr} \leq 2 - \frac{r}{R} \Leftrightarrow 3p^2(R - 3r) + r(22R^2 - 3Rr - r^2) \geq 0.$$

Distingem cazurile:

Cazul1). Dacă $(R - 3r) \geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul2). Dacă $(R - 3r) < 0$, inegalitatea se rescrie:

$$r(22R^2 - 3Rr - r^2) \geq 3p^2(3r - R), \text{ vezi inegalitatea lui Gerretsen: } p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2.$$

Rămâne să arătăm că:

$$r(22R^2 - 3Rr - r^2) \geq 3(4R^2 + 4Rr + 3r^2)(3r - R) \Leftrightarrow 6R^3 - R^2r - 15Rr^2 - 14r^3 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (R - 2r)(6R^2 + 11Rr + 7r^2) \geq 0, \text{ vezi } R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{h_a - r}{h_a + r} = \frac{15p^2 - r^2 - 10Rr}{9p^2 + r^2 + 6Rr} \stackrel{(2)}{\geq} \frac{3}{2},$$

$$\text{unde } \frac{15p^2 - r^2 - 10Rr}{9p^2 + r^2 + 6Rr} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(15p^2 - r^2 - 10Rr) \geq 3(9p^2 + r^2 + 6Rr) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3p^2 \geq 38Rr + 5r^2, \text{ vezi inegalitatea lui Gerretsen } p^2 \geq 16Rr - 5r^2.$$

Rămâne să arătăm că:

$$3(16Rr - 5r^2) \geq 38Rr + 5r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_a - r}{h_a + r} \leq \sum \frac{r_a - r}{r_a + r}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{h_a - r}{h_a + r} = \frac{15p^2 - r^2 - 10Rr}{9p^2 + r^2 + 6Rr}.$$

Lema2.In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{r_a - r}{r_a + r} = \frac{2(p^2 - r^2 - Rr)}{p^2 + r^2 + 2Rr}.$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$\frac{15p^2 - r^2 - 10Rr}{9p^2 + r^2 + 6Rr} \leq \frac{2(p^2 - r^2 - Rr)}{p^2 + r^2 + 2Rr} \Leftrightarrow p^2(3p^2 - 30r^2 - 26Rr) + r^2(8R^2 - 2Rr - r^2) \geq 0.$$

Distingem cazurile.

Cazul1). Dacă $(3p^2 - 30r^2 - 26Rr) \geq 0$ inegalitatea este evidentă.Cazul2). Dacă $(3p^2 - 30r^2 - 26Rr) < 0$ inegalitatea se rescrie:

$$r^2(8R^2 - 14Rr - r^2) \geq p^2(26Rr + 30r^2 - 3p^2), \text{ care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen}$$

$$16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2.$$

$$r^2(8R^2 - 2Rr - r^2) \geq p^2(26Rr + 30r^2 - 3p^2)$$

Rămâne să arătăm că:

$$r^2(8R^2 - 2Rr - r^2) \geq (4R^2 + 4Rr + 3r^2)(26Rr + 30r^2 - 3(16Rr - 5r^2)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 22R^3 - 21R^2r - 28Rr^2 - 34r^3 \geq 0 \Leftrightarrow (R - 2r)(22R^2 + 23Rr + 17r^2) \geq 0,$$

vezi $R \geq 2r$, (Euler).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1376.

Solve for integers

$$2^{x+1} = x^2 + x + 1$$

Soluție.

1). Dacă $x \leq -2 \Rightarrow 2^{x+1} \leq 2^{-1} = \frac{1}{2} < x^2 + x + 1 \Rightarrow$ fals.

2). $x = -1$ este soluție.

3). $x = 0$ nu convine.

4). $x = 1$ este soluție.

5). Dacă $x > 1 \Rightarrow 2^{x+1} > x^2 + x + 1$, inducție matematică.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{-1, 1\}$.

Problema1377.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{1}{2R} \leq \sum \frac{2R - r_a}{bc} \leq \frac{1}{4r}.$$

Soluție.**Lema.**

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{2R - r_a}{bc} = \frac{1}{2R}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{2R - r_a}{bc} = \frac{1}{2R} \leq \frac{1}{4r}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{2R - r_a}{bc} = \frac{1}{2R} \geq \frac{1}{2R}.$$

Remarcă.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{1}{4r} \leq \sum \frac{2R - h_a}{bc} \leq \frac{2R - 3r}{4r^2}.$$

Soluție.

Lema.In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{2R - h_a}{bc} = \frac{2R - 3r}{2Rr}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{2R - h_a}{bc} = \frac{2R - 3r}{2Rr} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{2R - 3r}{4r^2}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{2R - h_a}{bc} = \frac{2R - 3r}{2Rr} \geq \frac{2 \cdot 2r - 3r}{4r^2} = \frac{r}{4r^2} = \frac{1}{4r}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{2R - h_a}{bc} \geq \sum \frac{2R - r_a}{bc}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.**Lema1.**In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{2R - h_a}{bc} = \frac{2R - 3r}{2Rr}.$$

Lema2.In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{2R - r_a}{bc} = \frac{1}{2R}.$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$\frac{2R - 3r}{2Rr} \geq \frac{1}{2R} \Leftrightarrow R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1378.

If $a, b, c > 0$, $a + b + c = 1$ then

$$7\sum ab \leq 2 + 9abc.$$

April Octogon 2007, Mihaly Bencze, Braşov

Soluție.

Folosim pqr -Method.

$$\text{Notăm } p = \sum a = 1, q = \sum ab, r = abc.$$

Inegalitatea se scrie: $7q \leq 2 + 9r$, care rezultă din inegalitatea lui Schur $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$, $p = 1 \Leftrightarrow 1 - 4q + 9r \geq 0 \Leftrightarrow 9r \geq 4q - 1$.

Este suficient să arătăm că:

$$7q \leq 2 + 4q - 1 \Leftrightarrow 3q \leq 1, \text{ vezi } 1 = p^2 \geq 3q \Rightarrow 3q \leq 1.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Remarcă.

1), If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ and $4k \geq n \geq 0$ then

$$n\sum ab \leq k + 9(n - 3k)abc.$$

Soluție.

Folosim pqr -Method.

$$\text{Notăm } p = \sum a = 1, q = \sum ab, r = abc.$$

Inegalitatea se scrie: $nq \leq k + 9(n - 3k)r$, care rezultă din inegalitatea lui Schur $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$, $p = 1 \Leftrightarrow 1 - 4q + 9r \geq 0 \Leftrightarrow 9r \geq 4q - 1$.

Este suficient să arătăm că:

$$nq \leq k + (n - 3k)(4q - 1) \Leftrightarrow 3q(4k - n) \leq (4k - n) \Leftrightarrow 3q \leq 1, \text{ vezi } 1 = p^2 \geq 3q \Rightarrow 3q \leq 1.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \frac{1}{3}$.

2). If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ and $0 \leq \lambda \leq 4$ then

$$\lambda \sum ab \leq 1 + 9(\lambda - 3)abc.$$

Soluție.

Folosim pqr -Method.

$$\text{Notăm } p = \sum a = 1, q = \sum ab, r = abc.$$

Inegalitatea se scrie: $\lambda q \leq 1 + 9(\lambda - 3)r$, care rezultă din inegalitatea lui Schur $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$,
 $p = 1 \Leftrightarrow 1 - 4q + 9r \geq 0 \Leftrightarrow 9r \geq 4q - 1$.

Este suficient să arătăm că:

$$\lambda q \leq 1 + (\lambda - 3)(4q - 1) \Leftrightarrow 3q(4 - \lambda) \leq (4 - \lambda) \Leftrightarrow 3q \leq 1, \text{ vezi } 1 = p^2 \geq 3q \Rightarrow 3q \leq 1.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Cazul $\lambda = 4$.

3). If $x, y, z > 0, x + y + z = 1$ then

$$4 \sum ab \leq 1 + 9abc.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1379.

In $\triangle ABC$ then

$$\sum a^2 \cos A \leq \frac{9R^2}{2}.$$

RMM 5/2026, Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.**Lema.**

In $\triangle ABC$ then

$$\sum a^2 \cos A = \frac{r}{R} (3p^2 - r^2 - 6Rr - 8R^2).$$

$$\begin{aligned} LHS &= \sum a^2 \cos A = \frac{r}{R} (3p^2 - r^2 - 6Rr - 8R^2) \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{r}{R} (3(4R^2 + 4Rr + 3r^2) - r^2 - 6Rr - 8R^2) = \\ &= \frac{r}{R} (4R^2 + 6Rr + 8r^2) = \frac{2r}{R} (2R^2 + 3Rr + 4r^2) \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{2r}{R} \cdot \frac{9R^2}{2} = 9Rr \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{9R^2}{2} = RHS. \end{aligned}$$

Remarcă.

1). In $\triangle ABC$ then

$$\frac{4r}{R}(17r^2 - 2R^2) \leq \sum a^2 \cos A \leq 9Rr.$$

Soluție.**Lema.**

In $\triangle ABC$ then

$$\sum a^2 \cos A = \frac{r}{R}(3p^2 - r^2 - 6Rr - 8R^2).$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum a^2 \cos A &= \frac{r}{R}(3p^2 - r^2 - 6Rr - 8R^2) \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{r}{R}(3(4R^2 + 4Rr + 3r^2) - r^2 - 6Rr - 8R^2) = \\ &= \frac{r}{R}(4R^2 + 6Rr + 8r^2) = \frac{2r}{R}(2R^2 + 3Rr + 4r^2) \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{2r}{R} \cdot \frac{9R^2}{2} = 9Rr \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{9R^2}{2}. \end{aligned}$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} \sum a^2 \cos A &= \frac{r}{R}(3p^2 - r^2 - 6Rr - 8R^2) \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{r}{R}(3(16Rr - 5r^2) - r^2 - 6Rr - 8R^2) = \\ &= \frac{r}{R}(-8R^2 + 42Rr - 16r^2) = \frac{2r}{R}(-4R^2 + 21Rr - 8r^2) \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{2r}{R}(-4R^2 + 34r^2) = \frac{4r}{R}(17r^2 - 2R^2). \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ then

$$6pr \leq \sum a^2 \sin A \leq 2p(2R - r).$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.**Lema.**

In $\triangle ABC$ then

$$\sum a^2 \sin A = \frac{p}{R}(p^2 - 3r^2 - 6Rr).$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum a^2 \sin A = \frac{p}{R} (p^2 - 3r^2 - 6Rr) \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{p}{R} (4R^2 + 4Rr + 3r^2 - 3r^2 - 6Rr) = \frac{p}{R} (4R^2 - 2Rr) =$$

$$= 2p(2R - r).$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum a^2 \sin A = \frac{p}{R} (p^2 - 3r^2 - 6Rr) \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{p}{R} (16Rr - 5r^2 - 3r^2 - 6Rr) = \frac{p}{R} (10Rr - 8r^2) =$$

$$= \frac{2pr}{R} (5R - 4r) \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{2pr}{R} \cdot 3R = 6pr.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1380.

If $a, b, c > 0$ then

$$\sum \frac{1}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4 \sum a^2}.$$

MathAtelier 5/2026, Konstantinos Geronikolas, Greece

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{1}{(a+b)^2} \stackrel{CS}{\geq} \frac{9}{\sum (a+b)^2} = \frac{9}{\sum 2(a^2 + b^2)} = \frac{9}{4 \sum a^2} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.

Remarcă.

1). If $a, b, c > 0$ then

$$\sum \frac{1}{(a+b)^3} \geq \frac{9}{8 \sum a^3}.$$

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{1}{(a+b)^3} \stackrel{CS}{\geq} \frac{9}{\sum (a+b)^3} \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{9}{\sum 4(a^3 + b^3)} = \frac{9}{8 \sum a^3} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.

2). If $a, b, c > 0$ then

$$\sum \frac{1}{(a+b)^4} \geq \frac{9}{16 \sum a^3}.$$

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{1}{(a+b)^4} \stackrel{CS}{\geq} \frac{9}{\sum (a+b)^4} \stackrel{Holder}{\geq} \frac{9}{\sum 8(a^4+b^4)} = \frac{9}{16 \sum a^4} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.

3). If $a, b, c > 0$ and $n \in \mathbb{N}$ then

$$\sum \frac{1}{(a+b)^n} \geq \frac{9}{2^n \sum a^n}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n = 0$ se obține egalitatea $3 = 3$.

Pentru $n = 1$ avem $\sum \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2 \sum a}$, vezi inegalitatea lui Bergstrom.

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum \frac{1}{(a+b)^n} \stackrel{CS}{\geq} \frac{9}{\sum (a+b)^n} \stackrel{Holder}{\geq} \frac{9}{\sum 2^{n-1}(a^n+b^n)} = \frac{9}{2^n \sum a^n} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.

Problema 1381.

If $a, b, c > 0$, $a + b + c = 1$ then

$$\sum \sqrt{a} \geq 3\sqrt{3} \sum ab.$$

Rahim Shahbazov, Azerbaijan, RFO-final

Soluție.

Cu substituția $(a, b, c) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3}\right)$ problema se reformulează.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 3$ then

$$\sum \sqrt{x} \geq \sum xy.$$

Demonstrație.**Lema.**

If $x > 0$ then

$$x^2 + 2\sqrt{x} \geq 3x.$$

Demonstrație.

$$x^2 + 2\sqrt{x} = x^2 + \sqrt{x} + \sqrt{x} \stackrel{AG}{\geq} 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = 3x, \text{ cu egal pentru } x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1.$$

Scriind și celelalte două inegalități analoage și adunînd obținem:

$$\begin{aligned} \sum x^2 + 2\sum \sqrt{x} &\geq 3\sum x = 3 \cdot 3 = 9 \Rightarrow \sum x^2 + 2\sum \sqrt{x} \geq 9 \Leftrightarrow (\sum x)^2 - 2\sum xy + 2\sum \sqrt{x} \geq 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3^2 - 2\sum xy + 2\sum \sqrt{x} \geq 9 \Leftrightarrow -2\sum xy + 2\sum \sqrt{x} \geq 0 \quad \sum \sqrt{x} \geq \sum xy. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$.

Remarcă.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{\sqrt{r_a}} \geq 3r\sqrt{3r} \sum \frac{1}{r_a r_b}.$$

Soluție.**Lema.**

If $x, y, z > 0, x + y + z = 3$ then

$$\sum \sqrt{x} \geq \sum xy.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a} = 1 \Leftrightarrow \sum \frac{3r}{r_a} = 3$.

Aplicând **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{3r}{r_a}, \frac{3r}{r_b}, \frac{3r}{r_c}\right)$ obținem:

$$\sum \sqrt{\frac{3r}{r_a}} \geq \sum \frac{3r}{r_a} \cdot \frac{3r}{r_b} \Leftrightarrow \sum \sqrt{\frac{3r}{r_a}} \geq \sum \frac{9r^2}{r_a r_b} \Leftrightarrow \sum \sqrt{\frac{1}{r_a}} \geq \frac{9r^2}{\sqrt{3r}} \sum \frac{1}{r_a r_b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{1}{\sqrt{r_a}} \geq 3r\sqrt{3r} \sum \frac{1}{r_a r_b}.$$

2). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{\sqrt{h_a}} \geq 3r\sqrt{3r} \sum \frac{1}{h_a h_b}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x, y, z > 0, x + y + z = 3$ then

$$\sum \sqrt{x} \geq \sum xy.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{h_a} = 1 \Leftrightarrow \sum \frac{3r}{h_a} = 3.$

Aplicând **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{3r}{h_a}, \frac{3r}{h_b}, \frac{3r}{h_c}\right)$ obținem:

$$\sum \sqrt{\frac{3r}{h_a}} \geq \sum \frac{3r}{h_a} \cdot \frac{3r}{h_b} \Leftrightarrow \sum \sqrt{\frac{3r}{h_a}} \geq \sum \frac{9r^2}{h_a h_b} \Leftrightarrow \sum \sqrt{\frac{1}{h_a}} \geq \frac{9r^2}{\sqrt{3r}} \sum \frac{1}{h_a h_b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{1}{\sqrt{h_a}} \geq 3r\sqrt{3r} \sum \frac{1}{h_a h_b}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1382.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$216r^3 \leq \prod (r_b + r_c) \leq 27R^3.$$

Soluție.

Lema

In $\triangle ABC$ holds

$$\prod (r_b + r_c) = 4Rp^2.$$

.Inegalitatea din dreapta.

$$\prod(r_b + r_c) = 4Rp^2 \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\leq} 4R \frac{27R^2}{4} = 27R^3.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\prod(r_b + r_c) = 4Rp^2 \stackrel{\text{Euler \& Mitrinovic}}{\geq} 4 \cdot 2r \cdot 27r^2 = 216r^3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$216r^3 \leq \prod(h_b + h_c) \leq 27R^3.$$

Soluție.

Lema

In $\triangle ABC$ holds

$$\prod(h_b + h_c) = \frac{rp^2(p^2 + r^2 + 2Rr)}{R^2}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \prod(h_b + h_c) &= \frac{rp^2(p^2 + r^2 + 2Rr)}{R^2} \stackrel{\text{Mitrinovic \& Gerretsen}}{\leq} \frac{r \cdot \frac{27R^2}{4} (4R^2 + 4Rr + 3r^2 + r^2 + 2Rr)}{R^2} = \\ &= \frac{27r}{4} (4R^2 + 6Rr + 4r^2) = \frac{27r}{2} (2R^2 + 3Rr + 2r^2) \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{27 \cdot \frac{R}{2}}{2} \cdot 4R^2 = 27R^3. \end{aligned}$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} \prod(h_b + h_c) &= \frac{rp^2(p^2 + r^2 + 2Rr)}{R^2} \stackrel{\text{Turtoi \& Gerretsen}}{\leq} \frac{r \cdot \frac{27Rr}{2} (16Rr - 5r^2 + r^2 + 2Rr)}{R^2} = \\ &= \frac{r \cdot \frac{27r}{2} (18Rr - 4r^2)}{R} = \frac{r \cdot \frac{27r}{2} \cdot 2r (9R - 2r)}{R} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{r \cdot \frac{27r}{2} \cdot 2r \cdot 8R}{R} = 216r^3. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\prod(h_b + h_c) \leq \prod(r_b + r_c).$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.**Lema1**

In $\triangle ABC$ holds

$$\prod (h_b + h_c) = \frac{rp^2(p^2 + r^2 + 2Rr)}{R^2}.$$

Lema2.

In $\triangle ABC$ holds

$$\prod (r_b + r_c) = 4Rp^2.$$

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{rp^2(p^2 + r^2 + 2Rr)}{R^2} \leq 4Rp^2 \Leftrightarrow r(p^2 + r^2 + 2Rr) \leq 4R^3,$$

vezi inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$$r(4R^2 + 4Rr + 3r^2 + r^2 + 2Rr) \leq 4R^3 \Leftrightarrow r(4R^2 + 6Rr + 4r^2) \leq 4R^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r(2R^2 + 3Rr + 2r^2) \leq 2R^3 \Leftrightarrow 2R^3 - 2R^2r - 3Rr^2 - 2r^3 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (R - 2r)(2R^2 + 2Rr + r^2) \geq 0, \text{ vezi } R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1383.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{bc}{r_b r_c} \geq 4.$$

Soluție.**Lema**

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{bc}{r_b r_c} = 1 + \frac{(4R + r)^2}{p^2}.$$

$$LHS = \sum \frac{bc}{r_b r_c} = 1 + \frac{(4R+r)^2}{p^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} 1 + \frac{(4R+r)^2}{\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}} = 1 + \frac{2(2R-r)}{R} = \frac{5R-2r}{R} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} 4.$$

Remarcă.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$5 - \frac{2r}{R} \leq \sum \frac{bc}{r_b r_c} \leq \frac{2R}{r}.$$

Soluție.**Lema**

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{bc}{r_b r_c} = 1 + \frac{(4R+r)^2}{p^2}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{bc}{r_b r_c} = 1 + \frac{(4R+r)^2}{p^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} 1 + \frac{(4R+r)^2}{\frac{r(4R+r)^2}{R+r}} = 1 + \frac{R+r}{r} = \frac{R+2r}{r} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{R+R}{r} = \frac{2R}{r}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$LHS = \sum \frac{bc}{r_b r_c} = 1 + \frac{(4R+r)^2}{p^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} 1 + \frac{(4R+r)^2}{\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}} = 1 + \frac{2(2R-r)}{R} = \frac{5R-2r}{R} = 5 - \frac{2r}{R}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{2R}{r} \leq \sum \frac{bc}{h_b h_c} \leq \frac{R^2}{r^2}.$$

Soluție.**Lema**

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{bc}{h_b h_c} = \frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2}{4p^2 r^2}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum \frac{bc}{h_b h_c} &= \frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2}{4p^2 r^2} = \frac{p^2 + 2r^2 - 8Rr}{4r^2} + \frac{(4R + r)^2}{4p^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \\ &\stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{4R^2 + 4Rr + 3r^2 + 2r^2 - 8Rr}{4r^2} + \frac{(4R + r)^2}{4 \cdot \frac{r(4R + r)^2}{R + r}} = \frac{4R^2 - 4Rr + 5r^2}{4r^2} + \frac{R + r}{4r} = \\ &= \frac{4R^2 - 4Rr + 5r^2}{4r^2} + \frac{R + r}{4r} = \frac{4R^2 - 3Rr + 6r^2}{4r^2} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{4R^2}{4r^2} = \frac{R^2}{r^2} \end{aligned}$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} \sum \frac{bc}{h_b h_c} &= \frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2}{4p^2 r^2} = \frac{p^2 + 2r^2 - 8Rr}{4r^2} + \frac{(4R + r)^2}{4p^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \\ &\stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{16Rr - 5r^2 + 2r^2 - 8Rr}{4r^2} + \frac{(4R + r)^2}{4 \cdot \frac{R(4R + r)^2}{2(2R - r)}} = \frac{8R - 3r}{4r} + \frac{2R - r}{2R} = \frac{8R^2 + Rr - 2r^2}{4Rr} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \\ &\stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{8R^2}{4Rr} = \frac{2R}{r} \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{bc}{h_b h_c} \geq \sum \frac{bc}{r_b r_c}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{bc}{h_b h_c} = \frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2}{4p^2 r^2}.$$

Lema2

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{bc}{r_b r_c} = 1 + \frac{(4R+r)^2}{p^2}.$$

Inegalitatea se scrie:

$$\begin{aligned} \frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2(4R+r)^2}{4p^2r^2} &\geq 1 + \frac{(4R+r)^2}{p^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2(4R+r)^2}{4p^2r^2} &\geq \frac{p^2 + (4R+r)^2}{p^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow p^2(p^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2(4R+r)^2 &\geq 4r^2p^2 + 4r^2(4R+r)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow p^2(p^2 - 2r^2 - 8Rr) &\geq 3r^2(4R+r)^2, \text{ vezi inegalitatea lui Gerretsen:} \end{aligned}$$

$$p^2 \geq 16Rr - 5r^2 \geq \frac{r(4R+r)^2}{R+r}.$$

Este suficient să arătăm că:

$$\begin{aligned} \frac{r(4R+r)^2}{R+r}(16Rr - 5r^2 - 2r^2 - 8Rr) &\geq 3r^2(4R+r)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (8R - 7r) &\geq 3(R+r) \Leftrightarrow 5R \geq 10r \Leftrightarrow R \geq 2r, (\text{Euler}). \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1384.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r_b r_c}{a} \geq 2 - \frac{r}{R}.$$

Remarcă.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{3rp}{R} \leq \sum \frac{r_b r_c}{a} \leq \frac{3R^2 p}{8r^2}.$$

Soluție.

Lema

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r_b r_c}{a} = \frac{p(p^2 + r^2 - 8Rr)}{4Rr}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{r_b r_c}{a} = \frac{p(p^2 + r^2 - 8Rr)}{4Rr} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{p(4R^2 + 4Rr + 3r^2 + r^2 - 8Rr)}{4Rr} = \\ &= \frac{p(4R^2 - 4Rr + 4r^2)}{4Rr} = \frac{p(R^2 - Rr + r^2)}{Rr} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{p \cdot \frac{3R^3}{8r}}{Rr} = \frac{3R^2 p}{8r^2}. \end{aligned}$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{r_b r_c}{a} = \frac{p(p^2 + r^2 - 8Rr)}{4Rr} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{p(16Rr - 5r^2 + r^2 - 8Rr)}{4Rr} = \frac{p(8Rr - 4r^2)}{4Rr} = \\ &= \frac{p(2R - r)}{R} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{p(2 \cdot 2r - r)}{R} = \frac{3pr}{R}. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{3rp}{R} \leq \sum \frac{h_b h_c}{a} \leq \frac{3p}{2}.$$

Soluție.**Lema**

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_b h_c}{a} = \frac{3rp}{R}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{h_b h_c}{a} = \frac{3rp}{4R} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{3 \cdot \frac{R}{2} p}{R} = \frac{3p}{2}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{h_b h_c}{a} = \frac{3rp}{R} \geq \frac{3rp}{R}.$$

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_b h_c}{a} \leq \sum \frac{r_b r_c}{a}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_b h_c}{a} = \frac{3rp}{R}.$$

Lema2

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r_b r_c}{a} = \frac{p(p^2 + r^2 - 8Rr)}{4Rr}.$$

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{3rp}{R} \leq \frac{p(p^2 + r^2 - 8Rr)}{4Rr} \Leftrightarrow 12r^2 \leq p^2 + r^2 - 8Rr \Leftrightarrow p^2 \geq 8Rr + 11r^2,$$

vezi inegalitatea lui Gerretsen: $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$$16Rr - 5r^2 \geq 8Rr + 11r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1385.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r_b r_c}{bc} \leq \frac{9}{4}.$$

Soluție.

Lema

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r_b r_c}{bc} = \frac{4R + r}{2R}.$$

$$LHS = \sum \frac{r_b r_c}{bc} = \frac{4R + r}{2R} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{9}{4} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{9r}{2R} \leq \sum \frac{r_b r_c}{bc} \leq \frac{9}{4}.$$

Soluție.

Lema

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r_b r_c}{bc} = \frac{4R + r}{2R}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{r_b r_c}{bc} = \frac{4R + r}{2R} = 2 + \frac{r}{2R} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{9}{4}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{r_b r_c}{bc} = \frac{4R + r}{2R} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{4 \cdot 2r + r}{2R} = \frac{9r}{2R}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2), In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{9r^2}{R^2} \leq \sum \frac{h_b h_c}{bc} \leq 2 + \frac{r^2}{R^2}.$$

Soluție.

Lema

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_b h_c}{bc} = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2R^2}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{h_b h_c}{bc} = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2R^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{4R^2 + 4Rr + 3r^2 - r^2 - 4Rr}{2R^2} = \frac{4R^2 + 2r^2}{2R^2} = \frac{2R^2 + r^2}{R^2} = 2 + \frac{r^2}{R^2}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} \sum \frac{h_b h_c}{bc} &= \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2R^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{16Rr - 5r^2 - r^2 - 4Rr}{2R^2} = \frac{12Rr - 6r^2}{2R^2} = \frac{6Rr - 3r^2}{R^2} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \\ &\geq \frac{6r \cdot 2r - 3r^2}{R^2} = \frac{9r^2}{R^2}. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_b h_c}{bc} \leq \sum \frac{r_b r_c}{bc}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_b h_c}{bc} = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2R^2}.$$

Lema2

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r_b r_c}{bc} = \frac{4R + r}{2R}.$$

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2R^2} \leq \frac{4R + r}{2R} \Leftrightarrow p^2 - r^2 - 4Rr \leq 4R^2 + Rr \Leftrightarrow p^2 \leq 4R^2 + 5Rr + r^2, \text{ vezi inegalitatea}$$

lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$$4R^2 + 4Rr + 3r^2 \leq 4R^2 + 5Rr + r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1386.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$\sum \frac{1}{4 - \sqrt[4]{9xy}} \leq 1.$$

April Octogon 2007, Mihaly Bencze, Braşov

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{1}{4 - \sqrt[4]{9xy}} = \sum \frac{1}{4 - 3\sqrt[4]{x \cdot y \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}} \stackrel{AG}{\leq} \sum \frac{1}{4 - 3 \cdot \frac{x + y + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{4}} = \sum \frac{1}{4 - \frac{3}{4} \cdot \left(x + y + \frac{2}{3}\right)} = \\ &= \sum \frac{4}{14 - 3x - 3y} \stackrel{(1)}{\leq} 1 = RHS, \end{aligned}$$

$$\text{unde } \sum \frac{4}{14 - 3x - 3y} \stackrel{(1)}{\leq} 1 \Leftrightarrow \sum \frac{1}{14 - 3x - 3y} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{3x + 3y - 14} \geq \frac{-1}{4}, \text{ vezi}$$

$$\sum \frac{1}{3x + 3y - 14} \stackrel{CS}{\geq} \frac{9}{\sum (3x + 3y - 14)} = \frac{9}{6 \sum x - 42} = \frac{9}{6 \cdot 1 - 42} = \frac{9}{-36} = \frac{-1}{4}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Remarcă.

1). If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ and $\lambda > 1$ then

$$\sum \frac{1}{\lambda - \sqrt[4]{9xy}} \leq \frac{3}{\lambda - 1}.$$

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{1}{\lambda - \sqrt[4]{9xy}} = \sum \frac{1}{\lambda - 3\sqrt[4]{x \cdot y \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}} \stackrel{AG}{\leq} \sum \frac{1}{\lambda - 3 \cdot \frac{x + y + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{4}} = \sum \frac{1}{\lambda - \frac{3}{4} \cdot \left(x + y + \frac{2}{3}\right)} = \\ &= \sum \frac{1}{\lambda - \frac{3}{4} \cdot \left(x + y + \frac{2}{3}\right)} = \sum \frac{4}{4\lambda - 2 - 3x - 3y} \stackrel{(1)}{\leq} \frac{3}{\lambda - 1} = RHS, \end{aligned}$$

$$\text{unde } \sum \frac{4}{4\lambda - 2 - 3x - 3y} \stackrel{(1)}{\leq} \frac{3}{\lambda - 1} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{4\lambda - 2 - 3x - 3y} \leq \frac{3}{4(\lambda - 1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{1}{3x + 3y + 2 - 4\lambda} \geq \frac{3}{4(1 - \lambda)}, \text{ vezi}$$

$$\sum \frac{1}{3x+3y+2-4\lambda} \stackrel{CS}{\geq} \frac{9}{\sum (3x+3y+2-4\lambda)} = \frac{9}{6\sum x+3(2-4\lambda)} = \frac{9}{6 \cdot 1+3(2-4\lambda)} =$$

$$= \frac{9}{12(1-\lambda)} = \frac{3}{4(1-\lambda)}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Cazul $\lambda = 2$.

2). If $x, y, z > 0, x + y + z = 1$ then

$$\sum \frac{1}{2 - \sqrt[4]{9xy}} \leq 3.$$

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{4 - \sqrt[4]{\frac{9r^2}{r_a r_b}}} \leq 1.$$

Soluție.

Lemă.

If $x, y, z > 0, x + y + z = 1$ then

$$\sum \frac{1}{4 - \sqrt[4]{9xy}} \leq 1.$$

Soluție.

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a} = 1$

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{r_a}, \frac{r}{r_b}, \frac{r}{r_c}\right)$ obținem: $\sum \frac{1}{4 - \sqrt[4]{\frac{9r^2}{r_a r_b}}} \leq 1.$

4). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{4 - \sqrt[4]{\frac{9r^2}{h_a h_b}}} \leq 1.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.**Lemă.**

If $x, y, z > 0, x + y + z = 1$ then

$$\sum \frac{1}{4 - \sqrt[4]{9xy}} \leq 1.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{h_a} = 1$

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{h_a}, \frac{r}{h_b}, \frac{r}{h_c}\right)$ obținem: $\sum \frac{1}{4 - \sqrt[4]{\frac{9r^2}{h_a h_b}}} \leq 1.$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1387.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum a^2 r_a \geq 4pS.$$

Soluție.**Lema**

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum a^2 r_a = 4p^2 (R - r).$$

$$LHS = \sum a^2 r_a = 4p^2 (R - r) \stackrel{Euler}{\geq} 4p^2 (2r - r) = 4p^2 r = 4pS = RHS.$$

Remarcă.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$108r^3 \leq \sum a^2 r_a \leq \frac{27R^4}{4r}.$$

Soluție.**Lema**

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum a^2 r_a = 4p^2 (R - r).$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum a^2 r_a = 4p^2 (R - r) &\stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} 4(4R^2 + 4Rr + 3r^2)(R - r) = 4(4R^3 - Rr^2 - 3r^3) \stackrel{\text{Euler}}{\leq} 4 \cdot \frac{27R^4}{16r} = \\ &= \frac{27R^4}{4r}. \end{aligned}$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum a^2 r_a = 4p^2 (R - r) \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} 4(16Rr - 5r^2)(R - r) = 4r(16R - 5r)(R - r) \stackrel{\text{Euler}}{\geq} 108r^3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$108r^3 \leq \sum a^2 h_a \leq 27R^2 r.$$

Soluție.

Lema

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum a^2 h_a = 4p^2 r.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum a^2 h_a = 4p^2 r \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\leq} 4r \frac{27R^2}{4} = 27R^2 r.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum a^2 h_a = 4p^2 r \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\geq} 4r \cdot 27r^2 = 108r^3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum a^2 h_a \leq \sum a^2 r_a.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum a^2 h_a = 4p^2 r.$$

Lema2

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum a^2 r_a = 4p^2 (R - r).$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$4p^2 r \leq 4p^2 (R - r) \Leftrightarrow R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1388.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{r_a^2} \geq \frac{9}{p^2}.$$

Soluție.

Lema

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{r_a^2} = \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{p^2 r^2}.$$

$$LHS = \sum \frac{1}{r_a^2} = \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{p^2 r^2} = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2r^2 + 8Rr}{p^2} \right) \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2r^2 + 8Rr}{4R^2 + 4Rr + 3r^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{4R^2 - 4Rr + r^2}{4R^2 + 4Rr + 3r^2} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3r^2} \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\geq} \frac{9}{p^2} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{1}{3r^2} \leq \sum \frac{1}{r_a^2} \leq \frac{R}{6r^3}.$$

Soluție.

Lema

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{r_a^2} = \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{p^2 r^2}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{r_a^2} &= \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{p^2 r^2} = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2r^2 + 8Rr}{p^2} \right) \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2r^2 + 8Rr}{16Rr - 5r^2} \right) = \\ &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{8R - 7r}{16R - 5r} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{R}{6r} = \frac{R}{6r^3}. \end{aligned}$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{r_a^2} &= \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{p^2 r^2} = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2r^2 + 8Rr}{p^2} \right) \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2r^2 + 8Rr}{4R^2 + 4Rr + 3r^2} \right) = \\ &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{4R^2 - 4Rr + r^2}{4R^2 + 4Rr + 3r^2} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3r^2}. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{1}{3r^2} \leq \sum \frac{1}{h_a^2} \leq \frac{R}{6r^3}.$$

Soluție.**Lema**

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{h_a^2} = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2p^2 r^2}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{r_a^2} &= \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{p^2 r^2} = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2r^2 + 8Rr}{p^2} \right) \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2r^2 + 8Rr}{16Rr - 5r^2} \right) = \\ &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{8R - 7r}{16R - 5r} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{R}{6r} = \frac{R}{6r^3}. \end{aligned}$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned}\sum \frac{1}{r_a^2} &= \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{p^2 r^2} = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2r^2 + 8Rr}{p^2} \right) \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2r^2 + 8Rr}{4R^2 + 4Rr + 3r^2} \right) = \\ &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{4R^2 - 4Rr + r^2}{4R^2 + 4Rr + 3r^2} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3r^2}.\end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{h_a^2} \leq \sum \frac{1}{r_a^2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{h_a^2} = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2p^2 r^2}.$$

Lema2

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{r_a^2} = \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{p^2 r^2}.$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2p^2 r^2} \leq \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{p^2 r^2} \Leftrightarrow p^2 - r^2 - 4Rr \leq 2(p^2 - 2r^2 - 8Rr) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2 \geq 12Rr + 3r^2, \text{ vezi inegalitatea lui Gerretsen } p^2 \geq 16Rr - 5r^2.$$

Rămâne să arătăm că:

$$16Rr - 5r^2 \geq 12Rr + 3r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1389.

If $a, b, c, d > 0$, $a + b + c + d = 4$ and $n \geq 2$ then

$$\sum \frac{1+a^n}{\sqrt{a}} \geq 8.$$

Mathematical Inequalities, Crăciun Gheorghe

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{1+a^n}{\sqrt{a}} = \sum \frac{1}{\sqrt{a}} + \sum \frac{a^n}{\sqrt{a}} \geq 4 + 4 = 8 = RHS, \text{ vezi:}$$

$$1). \sum \frac{1}{\sqrt{a}} \stackrel{CS}{\geq} \frac{(\sum 1)^2}{\sum \sqrt{a}} \stackrel{CBS}{\geq} \frac{4^2}{\sqrt{4 \sum a}} = \frac{4^2}{\sqrt{4 \cdot 4}} = 4.$$

$$2). \sum \frac{a^n}{\sqrt{a}} = \sum a^{n-\frac{1}{2}} \stackrel{Jensen}{\geq} \frac{(\sum a)^{n-\frac{1}{2}}}{4^{\frac{n-\frac{1}{2}}{n-\frac{1}{2}+1}}} = \frac{4^{n-\frac{1}{2}}}{4^{\frac{n-\frac{1}{2}}{2}}} = 4.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = d = 1$.

Remarcă.

If $a, b, c, d > 0$, $a + b + c + d = 4$ and $n \geq 2$, $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{1+\lambda a^n}{\sqrt{a}} \geq 4(\lambda + 1).$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{1+\lambda a^n}{\sqrt{a}} = \sum \frac{1}{\sqrt{a}} + \lambda \sum \frac{a^n}{\sqrt{a}} \geq 4 + \lambda \cdot 4 = 4(\lambda + 1) = RHS, \text{ vezi:}$$

$$1). \sum \frac{1}{\sqrt{a}} \stackrel{CS}{\geq} \frac{(\sum 1)^2}{\sum \sqrt{a}} \stackrel{CBS}{\geq} \frac{4^2}{\sqrt{4 \sum a}} = \frac{4^2}{\sqrt{4 \cdot 4}} = 4.$$

$$2). \sum \frac{a^n}{\sqrt{a}} = \sum a^{n-\frac{1}{2}} \stackrel{Jensen}{\geq} \frac{(\sum a)^{n-\frac{1}{2}}}{4^{\frac{n-\frac{1}{2}}{n-\frac{1}{2}+1}}} = \frac{4^{n-\frac{1}{2}}}{4^{\frac{n-\frac{1}{2}}{2}}} = 4.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = d = 1$.

Problema1390.

Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $0 < a_1 < 1$ și $a_{n+1} = a_n^3 - a_n^2 + 1$, $\forall n \geq 1$.

Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \dots a_n) \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n.$$

OJ-1994-Argeș, Florian Dumitrel, Slatina

Soluție.

Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent (este strict crescător și mărginit $a_n \in (0, 1)$) și are limita 1.

$$\text{Avem } a_n^2 = \frac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n} \Rightarrow a_1^2 a_2^2 \dots a_n^2 = \frac{1 - a_{n+1}}{1 - a_1} \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_n = \sqrt{\frac{1 - a_{n+1}}{1 - a_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \dots a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1 - a_{n+1}}{1 - a_1}} = \sqrt{\frac{1 - 1}{1 - a_1}} = 0.$$

Deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \dots a_n) = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = (1 + (a_n - 1))^n = \left(1 + (a_n - 1)^{\frac{1}{a_n - 1}}\right)^{(a_n - 1)n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1)n} = e^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Am folosit mai sus:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1)n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n - 1}} \stackrel{\text{Stolz-Cesaro}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1 - n}{\frac{1}{a_{n+1} - 1} - \frac{1}{a_n - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{a_n^2(a_n - 1)} - \frac{1}{a_n - 1}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1 - a_n^2}{a_n(a_n - 1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-a_n}{1 + a_n} \right) = \frac{-1}{2}.$$

Deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Remarcă.

1). Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $0 < a_1 < 1$ și $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$, $\forall n \geq 1$.

Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \dots a_n) \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n.$$

Soluție.

Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent (este strict crescător și mărginit $a_n \in (0, 1)$) și are limita 1.

$$\text{Avem } a_n = \frac{1-a_{n+1}}{1-a_n} \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_n = \frac{1-a_{n+1}}{1-a_1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \dots a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-a_{n+1}}{1-a_1} = \frac{1-1}{1-a_1} = 0 \Rightarrow$$

Deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \dots a_n) = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = \left(1 + (a_n - 1)\right)^n = \left(1 + (a_n - 1) \frac{1}{a_n - 1}\right)^{(a_n - 1)n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1)n} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Am folosit mai sus:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1)n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n - 1}} \stackrel{\text{Stolz-Cesaro}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{a_{n+1}-1} - \frac{1}{a_n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{a_n(a_n-1)} - \frac{1}{a_n-1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1 - a_n}{a_n(a_n-1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -1. \end{aligned}$$

Deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = \frac{1}{e}$.

2). Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $0 < a_1 < 1$ și $a_{n+1} = a_n^4 - a_n^3 + 1, \forall n \geq 1$.

Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \dots a_n).$$

Soluție.

Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent (este strict crescător și mărginit $a_n \in (0, 1)$) și are limita 1.

$$\text{Avem } a_n^3 = \frac{1-a_{n+1}}{1-a_n} \Rightarrow a_1^3 a_2^3 \dots a_n^3 = \frac{1-a_{n+1}}{1-a_1} \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_n = \sqrt[3]{\frac{1-a_{n+1}}{1-a_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \dots a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1-a_{n+1}}{1-a_1}} = \sqrt[3]{\frac{1-1}{1-a_1}} = 0.$$

Deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \dots a_n) = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = (1 + (a_n - 1))^n = \left(1 + (a_n - 1)^{\frac{1}{a_n - 1}}\right)^{(a_n - 1)n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1)n} = e^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Am folosit mai sus:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1)n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n - 1}} \stackrel{\text{Stolz-Cesaro}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{a_{n+1}-1} - \frac{1}{a_n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{a_n(a_n-1)} - \frac{1}{a_n-1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1-a_n^3}{a_n^3(a_n-1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-a_n^3}{1+a_n+a_n^2} \right) = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Deducem c\^a } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}.$$

3). Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $0 < a_1 < 1$ și $a_{n+1} = a_n^{k+1} - a_n^k + 1, \forall n \geq 1, k \in \mathbb{N}^*$.

Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \dots a_n).$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent (este strict crescător și mărginit $a_n \in (0, 1)$) și are limita 1.

$$\text{Avem } a_n^k = \frac{1-a_{n+1}}{1-a_n} \Rightarrow a_1^k a_2^k \dots a_n^k = \frac{1-a_{n+1}}{1-a_1} \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_n = \sqrt[k]{\frac{1-a_{n+1}}{1-a_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \dots a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1-a_{n+1}}{1-a_1}} = \sqrt[k]{\frac{1-a_{n+1}}{1-a_1}} = 0.$$

$$\text{Deducem c\^a } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \dots a_n) = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = (1 + (a_n - 1))^n = \left(1 + (a_n - 1)^{\frac{1}{a_n - 1}}\right)^{(a_n - 1)n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1)n} = e^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Am folosit mai sus:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1)n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n - 1}} \stackrel{\text{Stolz-Cesaro}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{a_{n+1}-1} - \frac{1}{a_n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{a_n(a_n-1)} - \frac{1}{a_n-1}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1 - a_n^k}{a_n^k (a_n - 1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-a_n^k}{1 + a_n + a_n^2 + \dots + a_n^{k-1}} \right) = -\frac{1}{k}.$$

Deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = \frac{1}{\sqrt[k]{e}}.$

Problema 1391.

Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție care satisface relația

$$f(x+1) + f(x-1) = f(x), \forall x \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că f este periodică. Să se dea un exemplu diferit de funcție nenulă.

Concursul National "Laurențiu Duican", 10-12 Mai 2001, Brașov, Florin Pîrvănescu, Slatina

Soluție.

$$1). x \rightarrow x+1 \Rightarrow f(x+2) + f(x) = f(x+1) \Rightarrow f(x+2) + f(x) = f(x) - f(x+1) \Rightarrow f(x+2) = -f(x-1).$$

$$2). x \rightarrow x+3 \Rightarrow f(x+5) = -f(x+2) \Rightarrow f(x+5) = f(x-1).$$

$$3). x \rightarrow x+1 \Rightarrow f(x+6) = f(x).$$

$$\text{Din } f(x+6) = f(x), \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f \text{ este periodică de perioadă } T = 6.$$

$$\text{Un exemplu } f(x) = \sin \frac{\pi x}{3}.$$

Remarcă.

1). Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție care satisface relația

$$f(x+2) + f(x-2) = f(x), \forall x \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că f este periodică. Să se dea un exemplu diferit de funcție nenulă.

Soluție.

$$1). x \rightarrow x+2 \Rightarrow f(x+4) + f(x) = f(x+2) \Rightarrow f(x+4) + f(x) = f(x) - f(x-2) \Rightarrow f(x+4) = -f(x-2).$$

$$2). x \rightarrow x+6 \Rightarrow f(x+10) = -f(x+4) \Rightarrow f(x+10) = f(x-2).$$

$$3). x \rightarrow x+2 \Rightarrow f(x+12) = f(x).$$

Din $f(x+12) = f(x), \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ este periodică de perioadă $T = 12$.

Un exemplu $f(x) = \sin \frac{\pi x}{6}$.

Remarcă.

2). Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție care satisface relația

$$f(x+n) + f(x-n) = f(x), \forall x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se arate că f este periodică. Să se dea un exemplu diferit de funcție nenulă.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$1). x \rightarrow x+n \Rightarrow f(x+2n) + f(x) = f(x+n) \Rightarrow f(x+2n) + f(x) = f(x) - f(x-n) \Rightarrow f(x+2n) = -f(x-n).$$

$$2). x \rightarrow x+3n \Rightarrow f(x+5n) = -f(x+2n) \Rightarrow f(x+5n) = f(x-n).$$

$$3). x \rightarrow x+n \Rightarrow f(x+6n) = f(x).$$

Din $f(x+6n) = f(x), \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ este periodică de perioadă $T = 6n$.

Un exemplu $f(x) = \sin \frac{\pi x}{3n}$.

Problema1392.

If $x > 0$ then find min of

$$E(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 8x + 32}.$$

Concursul National "Laurențiu Duican", 2001, Brașov, Anca Luculescu, Drăgășani

Soluție.

$$E(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 8x + 32} = \sqrt{(x-1)^2 + 2^2} + \sqrt{(x-4)^2 + 4^2}.$$

Fie punctele $A(1,2), B(4,4), M(x,0) \Rightarrow E(x) = AM + MB$.

$E(x) = AM + MB$ este minimă $\Leftrightarrow$ punctele $A' - M - B$ sunt coliniare, unde A' este simetricul lui A față de axa $Ox \Rightarrow x = 2$.

Deducem că $\min E(x) = 3\sqrt{5}$.

Remarcă.

Let be $\lambda > 0$ fixed. If $x > 0$ then find min of

$$E(x) = \sqrt{x^2 - 2\lambda x + 5\lambda^2} + \sqrt{x^2 - 8\lambda x + 32\lambda^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Minkowski: $\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + y^2} \geq \sqrt{(a+b)^2 + (x+y)^2}$,

cu egal pentru $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$.

$$\begin{aligned} E(x) &= \sqrt{x^2 - 2\lambda x + 5\lambda^2} + \sqrt{x^2 - 8\lambda x + 32\lambda^2} = \sqrt{(x-\lambda)^2 + 4\lambda^2} + \sqrt{(4\lambda-x)^2 + 16\lambda^2} \geq \\ &\geq \sqrt{(x-\lambda+4\lambda-x)^2 + (2\lambda+4\lambda)^2} = \sqrt{(3\lambda)^2 + (6\lambda)^2} = \sqrt{45\lambda^2} = 3\lambda\sqrt{5}, \end{aligned}$$

cu egal pentru $\frac{x-\lambda}{4\lambda-x} = \frac{2\lambda}{4\lambda} \Leftrightarrow x = 2\lambda$.

Deducem că $\min E(x) = 3\lambda\sqrt{5}$.

Problema1393

Solve for complex numbers

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xyz = 1 \\ |x| = |y| = |z| \end{cases}.$$

Concursul National "Laurențiu Duican", 2001, Brașov, D. Gheorghiu, București

Soluție.

Avem $|x| = |y| = |z| = 1 \Rightarrow x = \cos a + i \sin a, y = \cos b + i \sin b, z = \cos c + i \sin c \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 1 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0 \\ a + b + c = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) \in \{(i, -i, 1), (i, 1, -i), (-i, i, 1), (1, i, -i), (1, -i, i), (-i, 1, i)\}.$$

Problema1394.

Solve for reals

$$x^{\log_3 2} + x = 2 + 3 \log_3 x.$$

Concursul National "Laurențiu Duican", 2001, Brașov, Virgil Nicula, București

Soluție.

Ecuția are sens pentru $x > 0$. Cu substituția $\log_3 x = t \Rightarrow x = 3^t$ și $x^{\log_3 2} = 2^{\log_3 x} = 2^t$.

Ecuția se scrie: $2^t + 3^t = 3t + 2$.

Ecuția este de forma $f(t) = g(t)$, cu f convexă și g liniară.

O astfel de ecuație are cel mult două soluții.

Cum $x \in \{1, 3\}$ verifică ecuația deducem că mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{1, 3\}$.

Remarcă.Let be $a > 1$ fixed. Solve for reals

$$x^{\log_{a+1} a} + x = 2 + (2a - 1) \log_{a+1} x.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Ecuția are sens pentru $x > 0$. Cu substituția $\log_{a+1} x = t \Rightarrow x = (a+1)^t$ și $x^{\log_{a+1} a} = a^{\log_{a+1} x} = a^t$.

Ecuția se scrie: $a^t + (a+1)^t = (2a-1)t + 2$.

Ecuția este de forma $f(t) = g(t)$, cu f convexă și g liniară.

O astfel de ecuație are cel mult două soluții. Se arată că $t = 0$ și $t = 1$ verifică ecuația

$$a^t + (a+1)^t = (2a-1)t + 2 \Rightarrow x \in \{1, a+1\} \text{ verifică ecuația } x^{\log_{a+1} a} + x = 2 + (2a-1) \log_{a+1} x.$$

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{1, a+1\}$.

Problema1395.

In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{r_a^2 + r_b^2 + r_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Soluție.

Folosind $\sum r_a^2 = (4R + r)^2 - 2p^2$ și $\sum a^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$ inegalitatea se scrie:

$$\frac{(4R + r)^2 - 2p^2}{2(p^2 - r^2 - 4Rr)} \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 32R^2 + 28Rr + 5r^2 \geq 7p^2, \text{ vezi inegalitatea lui Gerretsen}$$

$$p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2.$$

Rămâne să arătăm că:

$$32R^2 + 28Rr + 5r^2 \geq 7(4R^2 + 4Rr + 3r^2) \Leftrightarrow R^2 \geq 4r^2, \text{ vezi } R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1396.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a}{r_a^2} \geq \frac{12}{a+b+c}.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a}{r_a^2} = \frac{2(2R - r)}{pr}.$$

Folosim **Lema** obținem:

$$LHS = \sum \frac{a}{r_a^2} = \frac{2(2R - r)}{pr} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{6}{p} = RHS.$$

2). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{12}{a+b+c} \leq \sum \frac{a}{r_a^2} \leq \frac{4}{a+b+c} \left(\frac{2R}{r} - 1 \right).$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a}{r_a^2} = \frac{2(2R-r)}{pr}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{a}{r_a^2} = \frac{2(2R-r)}{pr} = \frac{2}{p} \left(\frac{2R}{r} - 1 \right).$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{a}{r_a^2} = \frac{2(2R-r)}{pr} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{6}{p}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{2}{a+b+c} \left(\frac{5R}{r} - 4 \right) \leq \sum \frac{a}{h_a^2} \leq \frac{4}{a+b+c} \frac{R}{r} \left(\frac{R}{r} - 1 \right).$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a}{h_a^2} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2pr^2}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{a}{h_a^2} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2pr^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{4R^2 + 4Rr + 3r^2 - 3r^2 - 6Rr}{2pr^2} = \frac{4R^2 - 2Rr}{2pr^2} = \frac{2}{p} \left(\frac{R^2}{r^2} - \frac{R}{r} \right).$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{a}{h_a^2} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2pr^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{16Rr - 5r^2 - 3r^2 - 6Rr}{2pr^2} = \frac{10Rr - 8r^2}{2pr^2} = \frac{5R - 4r}{pr} = \frac{1}{p} \left(\frac{5R}{r} - 4 \right).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

4). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a}{h_a^2} \geq \sum \frac{a}{r_a^2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.**Lema1.**In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a}{h_a^2} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2pr^2}.$$

Lema2.In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a}{r_a^2} = \frac{2(2R-r)}{pr}.$$

Folosim **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2pr^2} \geq \frac{2(2R-r)}{pr} \Leftrightarrow p^2 \geq 14Rr - r^2, \text{ vezi } p^2 \geq 16Rr - 5r^2, (\text{Gerretsen}).$$

Rămâne să arătăm că:

$$16Rr - 5r^2 \geq 14Rr - r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1397.In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^2}{r_a} \geq 12r.$$

Soluție.**Lema.**In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a^2}{r_a} = 4(R+r).$$

$$LHS = \sum \frac{a^2}{r_a} = 4(R+r) \stackrel{\text{Euler}}{\geq} 12r = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$12r \leq \sum \frac{a^2}{r_a} \leq 6R.$$

Soluție.**Lema.**

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a^2}{r_a} = 4(R+r).$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{a^2}{r_a} = 4(R+r) \stackrel{\text{Euler}}{\leq} 4\left(R + \frac{R}{2}\right) = 6R.$$

Inegalitatea din stânga.

$$LHS = \sum \frac{a^2}{r_a} = 4(R+r) \stackrel{\text{Euler}}{\geq} 12r = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$12r \leq \sum \frac{a^2}{h_a} \leq \frac{3R^3}{2r^2}.$$

Soluție.**Lema.**

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a^2}{h_a} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{r}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{a^2}{h_a} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{r} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{4R^2 + 4Rr + 3r^2 - 3r^2 - 6Rr}{r} = \frac{4R^2 - 2Rr}{r} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{3R^3}{2r^2}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{a^2}{h_a} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{r} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{16Rr - 5r^2 - 3r^2 - 6Rr}{r} = \frac{10Rr - 8r^2}{r} = 2(5R - 4r) \stackrel{\text{Euler}}{\geq} 12r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^2}{h_a} \geq \sum \frac{a^2}{r_a}.$$

Soluție.

Lema1.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a^2}{h_a} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{r}.$$

Lema2.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a^2}{r_a} = 4(R + r).$$

Folosim **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{r} \geq 4(R + r) \Leftrightarrow p^2 \geq 10Rr + 7r^2, \text{ vezi inegalitatea lui Gerretsen } p^2 \geq 16Rr - 5r^2.$$

Rămâne să arătăm că:

$$16Rr - 5r^2 \geq 10Rr + 7r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1398.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{r_a}{bc} \geq \frac{3}{2R}.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{r_a}{bc} = \frac{2R-r}{2Rr}.$$

Folosim **Lema** obținem:

$$LHS = \sum \frac{r_a}{bc} = \frac{2R-r}{2Rr} \stackrel{Euler}{\geq} \frac{3}{2R} = RHS.$$

Remarcă.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{3}{2R} \leq \sum \frac{r_a}{bc} \leq \frac{1}{r} - \frac{1}{2R}.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{r_a}{bc} = \frac{2R-r}{2Rr}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{r_a}{bc} = \frac{2R-r}{2Rr} = \frac{1}{r} - \frac{1}{2R}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{r_a}{bc} = \frac{2R-r}{2Rr} \stackrel{Euler}{\geq} \frac{3}{2R}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{3}{2R} \leq \sum \frac{h_a}{bc} \leq \frac{3}{4r}.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{h_a}{bc} = \frac{3}{2R}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{h_a}{bc} = \frac{3}{2R} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{3}{4r}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{h_a}{bc} = \frac{3}{2R} \geq \frac{3}{2R}.$$

3), In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{h_a}{bc} \leq \sum \frac{r_a}{bc}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{h_a}{bc} = \frac{3}{2R}.$$

Lema2.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{r_a}{bc} = \frac{2R-r}{2Rr}.$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$\frac{3}{2R} \leq \frac{2R-r}{2Rr} \Leftrightarrow 3r \leq 2R-r \Leftrightarrow R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1399.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^2}{r_a^2} \geq 4.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a^2}{r_a^2} = 2 \left(\frac{(4R+r)^2}{p^2} - 1 \right).$$

Folosim **Lema** obținem:

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{a^2}{r_a^2} = 2 \left(\frac{(4R+r)^2}{p^2} - 1 \right) \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} 2 \left(\frac{\frac{(4R+r)^2}{R(4R+r)^2}}{\frac{2(2R-r)}{R}} - 1 \right) = 2 \left(\frac{2(2R-r)}{R} - 1 \right) = \\ &= \frac{2(3R-2r)}{R} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} 4 = RHS. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$2 \left(3 - \frac{2r}{R} \right) \leq \sum \frac{a^2}{r_a^2} \leq \frac{2R}{r}.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a^2}{r_a^2} = 2 \left(\frac{(4R+r)^2}{p^2} - 1 \right).$$

Inegalitatea din dreapta.

$$LHS = \sum \frac{a^2}{r_a^2} = 2 \left(\frac{(4R+r)^2}{p^2} - 1 \right) \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} 2 \left(\frac{\frac{(4R+r)^2}{r(4R+r)^2}}{\frac{R+r}{R+r}} - 1 \right) = 2 \left(\frac{R+r}{r} - 1 \right) = \frac{2R}{r}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$LHS = \sum \frac{a^2}{r_a^2} = 2 \left(\frac{(4R+r)^2}{p^2} - 1 \right) \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} 2 \left(\frac{\frac{(4R+r)^2}{R(4R+r)^2}}{\frac{2(2R-r)}{R}} - 1 \right) = 2 \left(\frac{2(2R-r)}{R} - 1 \right) =$$

$$= \frac{2(3R-2r)}{R} = 2\left(3 - \frac{2r}{R}\right).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{2R}{r} \leq \sum \frac{a^2}{h_a^2} \leq \frac{2R^2}{r^2} - 4.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a^2}{h_a^2} = \frac{p^2(p^2 - 8Rr - 6r^2) + r^2(4R + r)^2}{2p^2r^2}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum \frac{a^2}{h_a^2} &= \frac{p^2(p^2 - 8Rr - 6r^2) + r^2(4R + r)^2}{2p^2r^2} = \frac{p^2 - 8Rr - 6r^2}{2r^2} + \frac{(4R + r)^2}{2p^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \\ &\stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{4R^2 + 4Rr + 3r^2 - 8Rr - 6r^2}{2r^2} + \frac{(4R + r)^2}{2 \cdot \frac{r(4R + r)^2}{R + r}} = \frac{4R^2 - 4Rr - 3r^2}{2r^2} + \frac{R + r}{2r} = \\ &= \frac{4R^2 - 4Rr - 3r^2}{2r^2} + \frac{R + r}{2r} = \frac{4R^2 - 3Rr - 2r^2}{2r^2} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{4R^2 - 8r^2}{2r^2} = \frac{2R^2}{r^2} - 4. \end{aligned}$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned} \sum \frac{a^2}{h_a^2} &= \frac{p^2(p^2 - 8Rr - 6r^2) + r^2(4R + r)^2}{2p^2r^2} = \frac{p^2 - 8Rr - 6r^2}{2r^2} + \frac{(4R + r)^2}{2p^2} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \\ &\stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{16Rr - 5r^2 - 8Rr - 6r^2}{2r^2} + \frac{(4R + r)^2}{2 \cdot \frac{R(4R + r)^2}{2(2R - r)}} = \frac{8R - 11r}{2r} + \frac{2R - r}{R} = \frac{8R^2 - 7Rr - 2r^2}{2Rr} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \\ &\stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{4R^2}{2Rr} = \frac{2R}{r}. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^2}{h_a^2} \geq \frac{2R}{r} \geq \sum \frac{a^2}{r_a^2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a^2}{h_a^2} = \frac{p^2(p^2 - 8Rr - 6r^2) + r^2(4R + r)^2}{2p^2r^2}.$$

Lema2.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a^2}{r_a^2} = 2 \left(\frac{(4R + r)^2}{p^2} - 1 \right).$$

Folosim **Lemele** obținem:

$$\frac{p^2(p^2 - 8Rr - 6r^2) + r^2(4R + r)^2}{2p^2r^2} \geq \frac{2R}{r} \geq 2 \left(\frac{(4R + r)^2}{p^2} - 1 \right), \text{ vezi}$$

$$\frac{r(4R + r)^2}{R + r} \leq 16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq \frac{R(4R + r)^2}{2(2R - r)} \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1400.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^3}{r_a} \leq \frac{abc}{r}.$$

J. Andersson, 1952

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a^3}{r_a} = \frac{2[p^2(2R+3r) - r(4R+r)^2]}{p}.$$

$$LHS = \sum \frac{a^3}{r_a} = \frac{2[p^2(2R+3r) - r(4R+r)^2]}{p} \stackrel{(1)}{\leq} \frac{abc}{r} = RHS,$$

$$\text{unde } \frac{2[p^2(2R+3r) - r(4R+r)^2]}{p} \stackrel{(1)}{\leq} \frac{abc}{r} \Leftrightarrow \frac{2[p^2(2R+3r) - r(4R+r)^2]}{p} \leq \frac{4Rrp}{r} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2(2R+3r) - r(4R+r)^2 \leq 2Rp^2 \Leftrightarrow (4R+r)^2 \geq 3p^2, (\text{Doucet}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{108Rr^2}{p} \leq \sum \frac{a^3}{r_a} \leq 4Rp.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a^3}{r_a} = \frac{2[p^2(2R+3r) - r(4R+r)^2]}{p}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{a^3}{r_a} = \frac{2[p^2(2R+3r) - r(4R+r)^2]}{p} \stackrel{(1)}{\leq} 4Rp,$$

$$\text{unde } \frac{2[p^2(2R+3r) - r(4R+r)^2]}{p} \stackrel{(1)}{\leq} 4Rp \Leftrightarrow \frac{2[p^2(2R+3r) - r(4R+r)^2]}{p} \leq 4Rp \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2(2R+3r) - r(4R+r)^2 \leq 2Rp^2 \Leftrightarrow (4R+r)^2 \geq 3p^2, (\text{Doucet}).$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{a^3}{r_a} = \frac{2[p^2(2R+3r) - r(4R+r)^2]}{p} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{2[(16Rr - 5r^2)(2R+3r) - r(4R+r)^2]}{p} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2r \left[(16R - 5r)(2R + 3r) - (4R + r)^2 \right]}{p} = \frac{2r(16R^2 + 30Rr - 16r^2)}{p} = \frac{4r(8R^2 + 15Rr - 8r^2)}{p} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \\
&\geq \frac{4r \cdot 27Rr}{p} = \frac{108Rr^2}{p}.
\end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{54R^2r}{p} \leq \sum \frac{a^3}{h_a} \leq \frac{27R^5}{4r^2p}.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a^3}{h_a} = \frac{p^2(p^2 - 8Rr - 6r^2) + r^2(4R + r)^2}{pr}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned}
\sum \frac{a^3}{h_a} &= \frac{p^2(p^2 - 8Rr - 6r^2) + r^2(4R + r)^2}{pr} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \\
&\stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{(4R^2 + 4Rr + 3r^2)(4R^2 + 4Rr + 3r^2 - 8Rr - 6r^2) + r^2(4R + r)^2}{pr} = \\
&= \frac{(4R^2 + 4Rr + 3r^2)(4R^2 - 4Rr - 3r^2) + r^2(4R + r)^2}{pr} = \frac{16R^4 - 16Rr^3 - 8r^4}{pr} = \\
&= \frac{8(2R^4 - 2Rr^3 - r^4)}{pr} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{8 \cdot \frac{27R^5}{32r}}{pr} = \frac{27R^5}{4r^2p}.
\end{aligned}$$

Inegalitatea din stânga.

$$\begin{aligned}
\sum \frac{a^3}{h_a} &= \frac{p^2(p^2 - 8Rr - 6r^2) + r^2(4R + r)^2}{pr} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{(16Rr - 5r^2)(16Rr - 5r^2 - 8Rr - 6r^2) + r^2(4R + r)^2}{pr} = \\
&= \frac{(16R - 5r)(8Rr - 11r^2) + r(4R + r)^2}{p} = \frac{r((16R - 5r)(8R - 11r) + (4R + r)^2)}{p}
\end{aligned}$$

$$= \frac{r(144R^2 - 208Rr + 56r^2)}{p} = \frac{8r(18R^2 - 26Rr + 7r^2)}{p} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{8r \cdot \frac{27R^2}{4}}{p} = \frac{54R^2r}{p}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3) In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^3}{h_a} \geq \sum \frac{a^3}{r_a}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema1.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a^3}{h_a} = \frac{p^2(p^2 - 8Rr - 6r^2) + r^2(4R + r)^2}{pr}.$$

Lema2.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a^3}{r_a} = \frac{2[p^2(2R + 3r) - r(4R + r)^2]}{p}.$$

Folosim **Lemele** inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2(p^2 - 8Rr - 6r^2) + r^2(4R + r)^2}{pr} \geq \frac{2[p^2(2R + 3r) - r(4R + r)^2]}{p} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2(p^2 - 8Rr - 6r^2) + r^2(4R + r)^2 \geq 2r[p^2(2R + 3r) - r(4R + r)^2] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2(p^2 - 12Rr - 12r^2) + 3r^2(4R + r)^2 \geq 0.$$

Distingem cazurile.

Cazul1). Dacă $(p^2 - 12Rr - 12r^2) \geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul2). Dacă $(p^2 - 12Rr - 12r^2) < 0$, inegalitatea se rescrie:

$3r^2(4R + r)^2 \geq p^2(12Rr + 12r^2 - p^2)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen:

$$16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}.$$

Rămâne să arătăm că:

$$3r^2(4R+r)^2 \geq \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}(12Rr+12r^2-16Rr+5r^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3r \geq \frac{R}{2(2R-r)}(-4R+17r) \Leftrightarrow 6r(2R-r) \geq R(-4R+17r) \Leftrightarrow 4R^2 - 5Rr - 6r^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (R-2r)(4R+3r) \geq 0, \text{ vezi } R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1401.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^2}{r_b r_c} \geq 4.$$

R.R.Ianic

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a^2}{r_b r_c} = \frac{4(R-r)}{r}.$$

$$LHS = \sum \frac{a^2}{r_b r_c} = \frac{4(R-r)}{r} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{4(2r-r)}{r} = 4 = RHS$$

Remarcă.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$4\left(\frac{R}{r}-1\right) \leq \sum \frac{a^2}{r_b r_c} \leq \left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a^2}{r_b r_c} = \frac{4(R-r)}{r}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{a^2}{r_b r_c} = \frac{4(R-r)}{r} \stackrel{Euler}{\leq} \left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

Inegalitatea din stânga

$$\sum \frac{a^2}{r_b r_c} = \frac{4(R-r)}{r} \geq 4\left(\frac{R}{r} - 1\right).$$

2). In $\triangle ABC$ holds

$$4 \leq \sum \frac{a^2}{h_b h_c} \leq \frac{2R}{r}.$$

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a^2}{h_b h_c} = \frac{2R}{r}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{a^2}{r_b r_c} = \frac{2R}{r} \leq \frac{2R}{r}.$$

Inegalitatea din stânga

$$\sum \frac{a^2}{r_b r_c} = \frac{2R}{r} \geq 4.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^2}{h_b h_c} \leq \sum \frac{a^2}{r_b r_c}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.**Lema1.**In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a^2}{h_b h_c} = \frac{2R}{r}.$$

Lema2.In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{a^2}{r_b r_c} = \frac{4(R-r)}{r}.$$

Folosind **Lemele** inegalitatea se scrie

$$\frac{2R}{r} \leq \frac{4(R-r)}{r} \Leftrightarrow R \geq 2r, (\text{Euler}).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1402.If $a, b, c > 0, a + b + c = 1$ then

$$\sum a^3 b^3 + 6a^2 b^2 c^2 \geq abc \sqrt{3abc}.$$

April Octogon 2007, Mihaly Bencze, Braşov

Soluție.Folosim pqr -Method.

$$\text{Notăm } p = \sum a = 1, q = \sum ab, r = abc.$$

$$\text{Avem } \sum a^3 b^3 = q^3 - 3pqr + 3r^2, p = 1 \Leftrightarrow \sum a^3 b^3 = q^3 - 3qr + 3r^2.$$

Inegalitatea se scrie:

$$q^3 - 3qr + 3r^2 + 6r^2 \geq r\sqrt{3r} \Leftrightarrow q^3 - 3qr + 9r^2 \geq r\sqrt{3r}, \text{ care rezultă din:}$$

$$1). 3q \leq 1, \text{ vezi } 1 = p^2 \geq 3q.$$

$$2). r \geq \frac{4q-1}{9}, \text{ vezi } p^3 - 4pq + 9r \geq 0, (\text{Schur}), p = 1 \Leftrightarrow 1 - 4q + 9r \geq 0 \Leftrightarrow r \geq \frac{4q-1}{9}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Problema1403.

If $a, b \in \mathbf{C}^*$ such that $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$ then find

$$E = \left(\frac{a}{b}\right)^{2026} + \left(\frac{b}{a}\right)^{2029}.$$

Math5/2026

Soluție.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon^3 = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Calculăm } E &= \left(\frac{a}{b}\right)^{2026} + \left(\frac{b}{a}\right)^{2029} = \varepsilon^{2026} + \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2029} = \varepsilon^{2026} + \left(\frac{\varepsilon^3}{\varepsilon}\right)^{2029} = \varepsilon^{2026} + (\varepsilon^2)^{2029} = \\ &= \varepsilon^{675 \cdot 3 + 1} + \varepsilon^{1352 \cdot 3 + 2} = (\varepsilon^3)^{675} \varepsilon + (\varepsilon^3)^{1352} \varepsilon^2 = \varepsilon + \varepsilon^2 = -1. \end{aligned}$$

$$\text{Deducem că } E = \left(\frac{a}{b}\right)^{2026} + \left(\frac{b}{a}\right)^{2029} = -1.$$

Remarcă.

If $a, b \in \mathbf{C}^*$ such that $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$ then find

$$E = \left(\frac{a}{b}\right)^{3n+1} + \left(\frac{b}{a}\right)^{3n+4}, n \in \mathbf{N}.$$

Dezvoltare, Marin Chirciu

Soluție.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon^3 = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Calculăm } E &= \left(\frac{a}{b}\right)^{3n+1} + \left(\frac{b}{a}\right)^{3n+4} = \varepsilon^{3n+1} + \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{3n+4} = \varepsilon^{3n+1} + \left(\frac{\varepsilon^3}{\varepsilon}\right)^{3n+4} = \varepsilon^{3n+1} + (\varepsilon^2)^{3n+4} = \\ &= \varepsilon^{3n+1} + \varepsilon^{6n+8} = (\varepsilon^3)^n \varepsilon + (\varepsilon^3)^{2n+2} \varepsilon^2 = \varepsilon + \varepsilon^2 = -1. \end{aligned}$$

Deducem că $E = \left(\frac{a}{b}\right)^{3n+1} + \left(\frac{b}{a}\right)^{3n+4} = -1$.

Problema1404.

În $\triangle ABC$, D, E, F sunt mijloacele laturilor BC, CA, AB , respectiv.

a). Calculați $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AB}$.

b). Calculați $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{AB}$, unde $M \in (ABC)$.

Math 5/2026, DJ-5/2026

Soluție.

a). Folosim $\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$ (vectorul mediană în $\triangle ABC$) $\Rightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

b). Folosim $\overrightarrow{MD} = \frac{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}{2}$ (vectorul mediană în $\triangle MBC$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Problema1405

Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{a}{\sqrt{2}-1} \cdot x + \frac{b}{\sqrt{2}+1}$, $a, b \in \mathbf{Q}$, al cărei grafic conține punctul

$M(1+\sqrt{2}, 5)$. Determinați punctele cu ambele coordonate numere întregi, care aparțin G_f .

OL-Bistrița-Năsăud-1997

Soluție.

Din $f(1+\sqrt{2}) = 5$ și $a, b \in \mathbf{Q} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=0 \\ 3a-b-5=0 \end{cases} \Rightarrow (a,b) = (1,-2) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot x - \frac{2}{\sqrt{2}+1}$
 $\Rightarrow f(x) = (1+\sqrt{2}) \cdot x + 2(1-\sqrt{2})$.

Fie $A(m,n) \in G_f$, $m, n \in \mathbf{Z} \Rightarrow f(m) = n \Rightarrow (1+\sqrt{2}) \cdot m + 2(1-\sqrt{2}) = n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (m-n+2) + \sqrt{2}(m-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m-n+2=0 \\ m-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=4 \\ m=2 \end{cases} \Rightarrow A(2,4) \in G_f$.

Deducem că punctul $A(2,4) \in G_f$, cu proprietatea din enunț.

Problema1406.

Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, care verifică relația

$$f(2020-x) = x - f(2018), \forall x \in \mathbf{R}.$$

a). Determinați funcția f .

b). Calculați $f(0) + f(1) + \dots + f(2020)$ și $f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(2020)$.

Math 5/2026

Soluție.

a). Punând $x = 2 \Rightarrow f(2020-2) = 2 - f(2018) \Rightarrow f(2018) = 1$.

Punând $2020-x = t \Rightarrow f(t) = 2020-t-1 \Rightarrow f(t) = 2019-t$.

Deducem că $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2019-x$.

b). $f(0) + f(1) + \dots + f(2020) = 2019 + 2018 + \dots + 3 + 2 = \frac{(2019+2) \cdot 2018}{2} = 1009 \cdot 2021$.

$f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(2020) = 2018 \cdot 2017 \cdot \dots \cdot 0 \cdot 1 = 0$.

Problema 1407.

a). Determinați funcțiile $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ astfel încât:

$$\begin{cases} 2f(x+1) + g(x-1) = 2x + 14 \\ 2f(x+1) - 2g(x-1) = 6x - 18 \end{cases}, \forall x \in \mathbf{R}.$$

b). Aflați punctul de intersecție al graficelor celor două funcții.

OL-Mureș-1993

Soluție.

a). $f(x) = 2x$ și $g(x) = -2x + 8$.

b). $P(2, 4)$.

Problema 1408.

Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = ax + b$.

a). Determinați $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât punctele $M(2, 1)$ și $N(-2, 3)$ aparțin G_f .

b) Pentru a, b determinați arătați că distanța de la originea sistemului de coordonate xOy la G_f este mai mare decât 1,76.

c) Pentru a, b aflați coordonatele punctului de pe G_f care are abscisa egală cu ordonata.

OL-Dolj-1994

Soluție.

$$a). a = \frac{-1}{2}, b = 2.$$

$$b). d(O, G_f) = \frac{4}{\sqrt{5}} > 1,76.$$

$$c). P\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

Problema1409.

Se consideră funcțiile $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = ax + b, a > 0, b \in \mathbf{R}$ și $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = 5 - 4x$.

Să se determine mulțimile $A = \{x \in \mathbf{R} / f(x) > g(x)\}$ și $B = \{g(x) \in \mathbf{R} / -1 \leq x \leq 5\}$

OL-Mehedinți-1993

Soluție.

$$A = \{x \in \mathbf{R} / f(x) > g(x)\} = \left(\frac{5-b}{4+a}, \infty\right) \text{ și } B = \{g(x) \in \mathbf{R} / -1 \leq x \leq 5\} = [-15, 9].$$

Problema1410.

If $x \in \mathbf{R}$ then find min of

$$E(x) = (x-1)(x+2)(x^2+x+2)+10.$$

OL-Tulcea-2007

Soluție.

$$\begin{aligned} E(x) &= (x-1)(x+2)(x^2+x+2)+10 = (x^2+x-2)(x^2+x+2)+10 = (x^2+x)^2 - 4 + 10 = \\ &= (x^2+x)^2 + 6 \geq 6. \end{aligned}$$

Deducem că $\min E(x) = 6$ pentru $(x^2+x)^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 0\}$.

Remarcă.

Let be $\lambda \in \mathbf{R}$ fixed. If $x \in \mathbf{R}$ then find min of

$$E(x) = (x-1)(x+\lambda)(x^2 + (\lambda-1)x + \lambda) + 2\lambda^2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\begin{aligned} E(x) &= (x-1)(x+\lambda)(x^2 + (\lambda-1)x + \lambda) + 2\lambda^2 = (x^2 + (\lambda-1)x - \lambda)(x^2 + (\lambda-1)x + \lambda) + 2\lambda^2 = \\ &= (x^2 + (\lambda-1)x)^2 - \lambda^2 + 2\lambda^2 = (x^2 + (\lambda-1)x)^2 + \lambda^2 \geq \lambda^2. \end{aligned}$$

Deducem că $\min E(x) = \lambda^2$ pentru $(x^2 + (\lambda-1)x)^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 1-\lambda\}$.

Problema1246.

If $a, b \geq 1$ then

$$\sum 2a\sqrt{b-1} \leq a^2 + b^2.$$

Panagiotis Danousis, Greece, MathAtelier 1/2026.

Soluție

$$LHS = \sum 2a\sqrt{b-1} \stackrel{AG}{\leq} \sum ab = 2ab \stackrel{SOS}{\leq} a^2 + b^2 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = 2$.

Remarcă.

If $a, b \geq 1$ and $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ then

$$\sum 2a\sqrt{b-1} \leq a^n + b^n.$$

Marin Chirciu

Problema1411.

Fie expresia

$$E(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2.$$

a). Arătați că $E(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

b). Aflați $a \in \mathbf{Z}$ astfel încât $E(a)$ este pătrat perfect.

Soluție.

a). $E(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2 = (x-1)^2(x^2 + x + 2) \geq 0$, cu egal pentru $x = 1$.

b). $E(a) = (a-1)^2(a^2 + a + 2) = pp \Rightarrow a^2 + a + 2 = k^2, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4a^2 + 4a + 8 = 4k^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + 4a + 1 = 4k^2 - 7 \Leftrightarrow (2a+1)^2 = 4k^2 - 7 \Leftrightarrow (2a+1)^2 - 4k^2 = -7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2a+1-2k)(2a+1+2k) = -7 \Rightarrow$$

1). $\begin{cases} 2a+1-2k = -1 \\ 2a+1+2k = 7 \end{cases} \Rightarrow a = 1.$

2). $\begin{cases} 2a+1-2k = -7 \\ 2a+1+2k = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -2.$

Deducem că $a \in \{1, -2\}$.

Remarcă.

Fie expresia

$$E(x) = x^4 + (1-2\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 2\lambda + 2)x^2 + (\lambda^2 - 4\lambda)x + 2\lambda^2, \lambda \in \mathbb{Z}.$$

a). Arătați că $E(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b). Aflați $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $E(a)$ este pătrat perfect.

Marin Chirciu

Soluție.

a). $E(x) = x^4 + (1-2\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 2\lambda + 2)x^2 + (\lambda^2 - 4\lambda)x + 2\lambda^2 = (x-\lambda)^2(x^2 + x + 2) \geq 0,$

cu egal pentru $x = \lambda$.

b). $E(a) = (a-\lambda)^2(a^2 + a + 2) = pp \Rightarrow a^2 + a + 2 = k^2, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4a^2 + 4a + 8 = 4k^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + 4a + 1 = 4k^2 - 7 \Leftrightarrow (2a+1)^2 = 4k^2 - 7 \Leftrightarrow (2a+1)^2 - 4k^2 = -7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2a+1-2k)(2a+1+2k) = -7 \Rightarrow$$

$$1). \begin{cases} 2a+1-2k=-1 \\ 2a+1+2k=7 \end{cases} \Rightarrow a=1.$$

$$2). \begin{cases} 2a+1-2k=-7 \\ 2a+1+2k=1 \end{cases} \Rightarrow a=-2.$$

Deducem că $a \in \{1, -2\}$.

Problema1412.

If $x \in \mathbf{R}$ then find min of

$$E = 4x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 6x + 3.$$

OL-Arad-2007

Soluție.

$$E = 4x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 6x + 3 = \frac{1}{4}(2x-1)^4 + (2x-1)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}.$$

Deducem că $\min E = \frac{7}{4}$ pentru $x = \frac{1}{2}$.

Remarcă.

If $x \in \mathbf{R}$ then find min of

$$E = 4x^4 + 8x^3 + 10x^2 + 6x + \lambda.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$E = 4x^4 + 8x^3 + 10x^2 + 6x + \lambda = \frac{1}{4}(2x+1)^4 + (2x+1)^2 + \lambda \geq \lambda.$$

Deducem că $\min E = \lambda$ pentru $x = -\frac{1}{2}$.

Problema1413.

Funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ verifică relația

$$f(x) + 3f(1-x) = -6x + 5, \forall x \in \mathbf{R}.$$

a). Determinați funcția f .

b). Calculați $f(4) + f(4^2) + \dots + f(4^{10})$.

OL-Alba-2007

Soluție.

a). Punând $x \rightarrow 1-x \Rightarrow f(1-x) + 3f(x) = -6(1-x) + 5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) + 3f(1-x) = -6x + 5 \\ f(1-x) + 3f(x) = -6(1-x) + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + 3f(1-x) = -6x + 5 \\ 3f(x) + f(1-x) = 6x - 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 3x - 1.$$

Funcția cerută este $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3x - 1$.

b). $f(4) + f(4^2) + \dots + f(4^{10}) = (3 \cdot 4 - 1) + (3 \cdot 4^2 - 1) + \dots + (3 \cdot 4^{10} - 1) =$

$$= 3(4 + 4^2 + \dots + 4^{10}) - 10 = 3 \cdot \frac{4(4^{10} - 1)}{4 - 1} - 10 = 4^{11} - 14.$$

Deducem că $f(4) + f(4^2) + \dots + f(4^{10}) = 4^{11} - 14$.

Remarcă.

Funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ verifică relația

$$f(x) + af(1-x) = -2ax + 2a - 1, \forall x \in \mathbf{R}, a > 1.$$

a). Determinați funcția f .

b). Calculați $f(a+1) + f((a+1)^2) + \dots + f((a+1)^{10})$.

Marin Chirciu

Soluție.

a). Punând $x \rightarrow 1-x \Rightarrow f(1-x) + af(x) = -2a(1-x) + 2a - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) + af(1-x) = -2ax + 2a - 1 \\ f(1-x) + af(x) = -2a(1-x) + 2a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + af(1-x) = -2ax + 2a - 1 \\ af(x) + f(1-x) = 2ax - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2a}{a-1}x + \frac{3a-1}{1-a^2}.$$

Funcția cerută este $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{2a}{a-1}x + \frac{3a-1}{1-a^2}$.

$$\begin{aligned}
 \text{b). } f(a+1) + f((a+1)^2) + \dots + f((a+1)^{10}) &= \left(\frac{2a}{a-1} \cdot (a+1) - 1 \right) + \left(\frac{2a}{a-1} \cdot (a+1)^2 - 1 \right) + \\
 &+ \dots + \left(\frac{2a}{a-1} \cdot (a+1)^{10} - 1 \right) = \frac{2a}{a-1} ((a+1) + (a+1)^2 + \dots + (a+1)^{10}) - 10 = \\
 &= \frac{2a}{a-1} \cdot \frac{(a+1)((a+1)^{10} - 1)}{(a+1) - 1} - 10 = 2 \cdot \frac{(a+1)^{11} - 6a + 4}{a-1}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Deducem că } f(a+1) + f((a+1)^2) + \dots + f((a+1)^{10}) = 2 \cdot \frac{(a+1)^{11} - 6a + 4}{a-1}.$$

Problema 1414.

Solve for reals

$$2[x-3] + 16 = 7x.$$

OL-Olt-2008

Soluție.Folosind $[a] \leq a < [a] + 1$, pentru $a = x - 3$ obținem:

$$[x-3] \leq x-3 < [x-3] + 1, [x-3] = \frac{7x}{2} - 8 \Leftrightarrow \frac{7x}{2} - 8 \leq x-3 < \frac{7x}{2} - 8 + 1 \Leftrightarrow \frac{8}{5} < x \leq 2.$$

$$[x-3] = \frac{7x}{2} - 8 \in \mathbf{Z} \Rightarrow \frac{7x}{2} - 8 = k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x = \frac{2k+16}{7}, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{Din } x = \frac{2k+16}{7}, k \in \mathbf{Z} \text{ și } \frac{8}{5} < x \leq 2 \Rightarrow \frac{8}{5} < \frac{2k+16}{7} \leq 2, k \in \mathbf{Z} \Rightarrow \frac{-12}{5} < k \leq -1, k \in \mathbf{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \in \{-2, -1\} \Rightarrow x \in \left\{2, \frac{12}{7}\right\}.$$

$$\text{Mulțimea soluțiilor ecuației este } S = \left\{2, \frac{12}{7}\right\}.$$

Remarcă.

Solve for reals

$$4[x-5] + 6 = 7x.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $a - 1 < [a] \leq a$, pentru $a = x - 5$ obținem:

$$x - 6 < [x - 5] \leq x - 5, [x - 5] = \frac{7x - 6}{4} \Leftrightarrow x - 6 < \frac{7x - 6}{4} \leq x - 5 \Leftrightarrow -6 < x \leq \frac{-14}{3}, (1).$$

$$[x - 5] = \frac{7x - 6}{4} \in \mathbf{Z} \Rightarrow \frac{7x - 6}{4} = k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x = \frac{4k + 6}{7}, k \in \mathbf{Z}, (2).$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow -6 < \frac{4k + 6}{7} \leq \frac{-14}{3}, k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow -12 < k \leq \frac{-29}{3}, k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow k \in \{-11, -10\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-38}{7}, \frac{-34}{7} \right\}$$

$$\text{Mulțimea soluțiilor ecuației este } S = \left\{ \frac{-38}{7}, \frac{-34}{7} \right\}.$$

Problema 1415.

If $x, y, z \in \mathbf{R}$ then find min of

$$E = x^2 + y^2 + z^2 + 100 - 4\sqrt{3}x - 10\sqrt{2}y - 2\sqrt{30}z.$$

OL-Olt-2008

Soluție.

$$E = x^2 + y^2 + z^2 + 100 - 4\sqrt{3}x - 10\sqrt{2}y - 2\sqrt{30}z = (x - 2\sqrt{3})^2 + (y - 5\sqrt{2})^2 + (z - \sqrt{30})^2 + 8 \geq 8, \text{ cu egal pentru } (x, y, z) = (2\sqrt{3}, 5\sqrt{2}, \sqrt{30}).$$

$$\text{Deducem că } \min E = 8 \text{ pentru } (x, y, z) = (2\sqrt{3}, 5\sqrt{2}, \sqrt{30}).$$

Remarcă.

Let be $\lambda > 0$ fixed. If $x, y, z \in \mathbf{R}$ then find min of

$$E = x^2 + y^2 + z^2 + 100\lambda^2 - 4\lambda\sqrt{3}x - 10\lambda\sqrt{2}y - 2\lambda\sqrt{30}z.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$E = x^2 + y^2 + z^2 + 100\lambda^2 - 4\lambda\sqrt{3}x - 10\lambda\sqrt{2}y - 2\lambda\sqrt{30}z = (x - 2\lambda\sqrt{3})^2 + (y - 5\lambda\sqrt{2})^2 + (z - \lambda\sqrt{30})^2 +$$

$$+8\lambda^2 \geq 8\lambda^2, \text{ cu egal pentru } (x, y, z) = (2\lambda\sqrt{3}, 5\lambda\sqrt{2}, \lambda\sqrt{30}).$$

$$\text{Deducem c\^a } \min E = 8\lambda^2 \text{ pentru } (x, y, z) = (2\lambda\sqrt{3}, 5\lambda\sqrt{2}, \lambda\sqrt{30}).$$

Problema1416.

Solve for positive real numbers

$$\begin{cases} x - y = 2018 - x^2 \\ x^2 - y^2 = y - \sqrt{2018} \end{cases}.$$

Math 5/2026

Soluție.

Se studiază cazurile $x > y$ și $x < y$, care conduc la contradicție.

$$\text{Soluția sistemului este } (x, y) = (\sqrt{2018}, \sqrt{2018}).$$

Remarcă.

Let be $\lambda > 0$ fixed. Solve for positive real numbers

$$\begin{cases} x - y = \lambda - x^2 \\ x^2 - y^2 = y - \sqrt{\lambda} \end{cases}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Se studiază cazurile $x > y$ și $x < y$, care conduc la contradicție.

$$\text{Soluția sistemului este } (x, y) = (\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}).$$

Problema1417.

Fie un paralelipiped dreptunghic cu muchiile de lungimi, diagonala d și volum V .

Arătați că

$$\frac{d^4}{V} \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2.$$

Concursul "Gheorghe Țițeica" 2008

Soluție.

$$\begin{aligned}
&\text{Folosind } d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \text{ și } V = abc \Rightarrow \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{abc} \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq abc(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq (a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab})^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}, \text{ vezi } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab} \\
&.
\end{aligned}$$

Problema1418.

Rezolvați inecuația

$$4\left\{\frac{x+1}{8}\right\} \leq \frac{x-7}{2}.$$

Math 5/2026

Soluție.

$$\begin{aligned}
&\text{Cu substituția } \frac{x+1}{8} = a \Leftrightarrow x = 8a - 1 \Rightarrow 4\{a\} \leq \frac{8a-1-7}{2} \Leftrightarrow 4\{a\} \leq \frac{8a-8}{2} \Leftrightarrow \{a\} \leq a-1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow a - [a] \leq a-1 \Leftrightarrow [a] \geq 1 \Rightarrow a \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{8} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 7 \Leftrightarrow x \in [7, \infty).
\end{aligned}$$

Remarcă.Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Rezolvați inecuația

$$n\left\{\frac{x+1}{2n}\right\} \leq \frac{x-2n+1}{2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\begin{aligned}
&\text{Cu substituția } \frac{x+1}{2n} = a \Leftrightarrow x = 2na - 1 \Rightarrow n\{a\} \leq \frac{2na-1-2n+1}{2} \Leftrightarrow n\{a\} \leq \frac{2na-2n}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow n\{a\} \leq \frac{2na-2n}{2} \Leftrightarrow \{a\} \leq a-1 \Leftrightarrow \{a\} \leq a-1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow a - [a] \leq a-1 \Leftrightarrow [a] \geq 1 \Rightarrow a \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2n} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2n-1 \Leftrightarrow x \in [2n-1, \infty).
\end{aligned}$$

Problema1419.If $x, y, z \geq 0$, then

$$\sqrt{\frac{x(y+z)}{3}} + \sqrt{\frac{y(z+x)}{3}} + \sqrt{\frac{z(x+y)}{3}} \leq \frac{5}{6}(x+y+z).$$

Concursul "Trident"-Brăila-2007

Soluție.

$$\sqrt{\frac{x(y+z)}{3}} \leq \frac{x + \frac{y+z}{3}}{2} = \frac{3x+y+z}{6}, \text{ cu egal pentru } x = \frac{y+z}{3}.$$

Se scriu și celelalte două inegalități analoage și se adună .

$$\text{Egalitatea are loc dacă și numai dacă } x = \frac{y+z}{3}, y = \frac{z+x}{3}, z = \frac{x+y}{3} \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

Remarcă.If $x, y, z \geq 0$ and $\lambda > 0$ then

$$\sqrt{\frac{x(y+z)}{\lambda}} + \sqrt{\frac{y(z+x)}{\lambda}} + \sqrt{\frac{z(x+y)}{\lambda}} \leq \frac{\lambda+2}{2\lambda}(x+y+z).$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\sqrt{\frac{x(y+z)}{\lambda}} \leq \frac{x + \frac{y+z}{\lambda}}{2} = \frac{\lambda x + y + z}{2\lambda}, \text{ cu egal pentru } x = \frac{y+z}{\lambda}.$$

Se scriu și celelalte două inegalități analoage și se adună .

$$\text{Egalitatea are loc dacă și numai dacă } x = \frac{y+z}{\lambda}, y = \frac{z+x}{\lambda}, z = \frac{x+y}{\lambda} \Leftrightarrow$$

$$\lambda(x+y+z) = 2(x+y+z) \Leftrightarrow \lambda = 2, x = y = z.$$

Problema1420.If $x, y, z \in \mathbf{R}$, $x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 2(3x + 2y - 6z) + 18 = 0$ then

a). $x < y < z$.

b). $-4 \leq x + y + z \leq 0$.

c). $2 \leq -2x + 3y + z \leq 10$.

Concursul "Sinus"-Suceava-2007

Soluție.

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 2(3x + 2y - 6z) + 18 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 + (2y+1)^2 + (2z-3)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+3)^2 \leq 1 \\ (2y+1)^2 \leq 1 \\ (2z-3)^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+3| \leq 1 \\ |2y+1| \leq 1 \\ |2z-3| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x+3 \leq 1 \\ -1 \leq 2y+1 \leq 1 \\ -1 \leq 2z-3 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq -2 \\ -1 \leq y \leq 0 \\ 1 \leq z \leq 2 \end{cases} \Rightarrow$$

a). $x < y < z$.

b). $-4 \leq x + y + z \leq 0 \Rightarrow \min(x + y + z) = -4$, pentru $(x, y, z) = (-4, -1, 1)$ și

$\max(x + y + z) = 0$, pentru $(x, y, z) = (-2, 0, 2)$.

c). $\begin{cases} -4 \leq x \leq -2 \\ -1 \leq y \leq 0 \\ 1 \leq z \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \leq -2x \leq 8 \\ -3 \leq 3y \leq 0 \\ 1 \leq z \leq 2 \end{cases} \Rightarrow 2 \leq -2x + 3y + z \leq 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \min(-2x + 3y + z) = 2$, pentru $(x, y, z) = (-4, -1, 1)$ și

$\max(-2x + 3y + z) = 10$, pentru $(x, y, z) = (-2, 0, 2)$.

Remarcă.

If $x, y, z \in \mathbf{R}$ and $\lambda > \sqrt{2}$, $x^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 z^2 + 2((\lambda+1)x + \lambda y - \lambda(\lambda+1)z) + 2(\lambda+1)^2 = 0$, then

a). $x < y < z$.

b). $-\lambda - \frac{2}{\lambda} - 1 \leq x + y + z \leq -\lambda + \frac{2}{\lambda} + 1$.

c). $\lambda^2 - \frac{2}{\lambda} - 1 \leq -\lambda x + (\lambda+1)y + z \leq (\lambda+1)^2 + \frac{2}{\lambda}$.

Marin Chirciu

Soluție.

$$x^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 z^2 + 2((\lambda+1)x + \lambda y - \lambda(\lambda+1)z) + 2(\lambda+1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x + \lambda + 1)^2 + (\lambda y + 1)^2 + (\lambda z - 3)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+\lambda+1)^2 \leq 1 \\ (\lambda y+1)^2 \leq 1 \\ (\lambda z-\lambda-1)^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+\lambda+1| \leq 1 \\ |\lambda y+1| \leq 1 \\ |\lambda z-\lambda-1| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x+\lambda+1 \leq 1 \\ -1 \leq \lambda y+1 \leq 1 \\ -1 \leq \lambda z-\lambda-1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda-2 \leq x \leq -\lambda \\ -\frac{2}{\lambda} \leq y \leq 0 \\ 1 \leq z \leq 1+\frac{2}{\lambda} \end{cases} \Rightarrow$$

a). $x < y < z$.

b). $-\lambda - \frac{2}{\lambda} - 1 \leq x + y + z \leq -\lambda + \frac{2}{\lambda} + 1 \Rightarrow$

$$\min(x+y+z) = -\lambda - \frac{2}{\lambda} - 1, \text{ pentru } (x, y, z) = \left(-\lambda - 2, -\frac{2}{\lambda}, 1\right) \text{ și}$$

$$\max(x+y+z) = -\lambda + \frac{2}{\lambda} + 1, \text{ pentru } (x, y, z) = \left(-\lambda, 0, 1 + \frac{2}{\lambda}\right).$$

$$\text{c). } \begin{cases} -\lambda - 2 \leq x \leq -\lambda \\ -\frac{2}{\lambda} \leq y \leq 0 \\ 1 \leq z \leq 1 + \frac{2}{\lambda} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 \leq -\lambda x \leq \lambda^2 + 2\lambda \\ -\frac{2}{\lambda} - 2 \leq (\lambda + 1)y \leq 0 \\ 1 \leq z \leq 1 + \frac{2}{\lambda} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - \frac{2}{\lambda} - 1 \leq -\lambda x + (\lambda + 1)y + z \leq (\lambda + 1)^2 + \frac{2}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \min(-\lambda x + (\lambda + 1)y + z) = \lambda^2 - \frac{2}{\lambda} - 1, \text{ pentru } (x, y, z) = \left(-\lambda - 2, -\frac{2}{\lambda}, 1\right) \text{ și}$$

$$\max(-\lambda x + (\lambda + 1)y + z) = (\lambda + 1)^2 + \frac{2}{\lambda}, \text{ pentru } (x, y, z) = \left(-\lambda, 0, 1 + \frac{2}{\lambda}\right).$$

Problema 1421.

If $x, y, z \in \mathbf{R}$, $x + y + z = 1$ then

$$\sum x^2 \geq 4 \sum xy - 1.$$

OL-Iași-2008

Soluție.

$$\sum x^2 \geq 4 \sum xy - 1 \Leftrightarrow \sum x^2 \geq 4 \sum xy - (\sum x)^2 \Leftrightarrow 2 \sum x^2 \geq 2 \sum xy \Leftrightarrow \sum (x - y)^2 \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Remarcă.

If $x, y, z \in \mathbf{R}$, $x + y + z = 1$ and $n = 3k + 1, k \geq -1$ then

$$\sum x^2 \geq n \sum xy - k.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\begin{aligned} \sum x^2 \geq n \sum xy - k &\Leftrightarrow \sum x^2 \geq n \sum xy - k (\sum x)^2 \Leftrightarrow (k+1) \sum x^2 \geq (n-2k) \sum xy \Leftrightarrow \\ &(k+1) \sum (x-y)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Remarcă.

If $x, y, z \in \mathbf{R}$, $x + y + z = 1$ and $\lambda \geq -1$ then

$$\sum x^2 \geq (3\lambda + 1) \sum xy - \lambda.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\begin{aligned} \sum x^2 \geq (3\lambda + 1) \sum xy - \lambda &\Leftrightarrow \sum x^2 \geq (3\lambda + 1) \sum xy - \lambda (\sum x)^2 \Leftrightarrow (\lambda + 1) \sum x^2 \geq (\lambda + 1) \sum xy \\ &\Leftrightarrow (\lambda + 1) \sum (x-y)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$1 + \sum \frac{r^2}{r_a^2} \geq 4 \sum \frac{r^2}{r_a r_b}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x, y, z \in \mathbf{R}$, $x + y + z = 1$ then

$$\sum x^2 \geq 4 \sum xy - 1.$$

Demonstrație.

$$\sum x^2 \geq 4 \sum xy - 1 \Leftrightarrow \sum x^2 \geq 4 \sum xy - (\sum x)^2 \Leftrightarrow 2 \sum x^2 \geq 2 \sum xy \Leftrightarrow \sum (x - y)^2 \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{r_a}, \frac{r}{r_b}, \frac{r}{r_c} \right)$ obținem:

$$\sum \left(\frac{r}{r_a} \right)^2 \geq 4 \sum \frac{r}{r_a} \cdot \frac{r}{r_b} - 1 \Leftrightarrow \sum \frac{r^2}{r_a^2} \geq 4 \sum \frac{r^2}{r_a r_b} - 1 \Leftrightarrow 1 + \sum \frac{r^2}{r_a^2} \geq 4 \sum \frac{r^2}{r_a r_b}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$1 + \sum \frac{r^2}{h_a^2} \geq 4 \sum \frac{r^2}{h_a h_b}.$$

Marin Chirciu

Soluție.**Lema.**

If $x, y, z \in \mathbf{R}$, $x + y + z = 1$ then

$$\sum x^2 \geq 4 \sum xy - 1.$$

Demonstrație.

$$\sum x^2 \geq 4 \sum xy - 1 \Leftrightarrow \sum x^2 \geq 4 \sum xy - (\sum x)^2 \Leftrightarrow 2 \sum x^2 \geq 2 \sum xy \Leftrightarrow \sum (x - y)^2 \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{h_a} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{h_a}, \frac{r}{h_b}, \frac{r}{h_c}\right)$ obținem:

$$\sum \left(\frac{r}{h_a}\right)^2 \geq 4 \sum \frac{r}{h_a} \cdot \frac{r}{h_b} - 1 \Leftrightarrow \sum \frac{r^2}{h_a^2} \geq 4 \sum \frac{r^2}{h_a h_b} - 1 \Leftrightarrow 1 + \sum \frac{r^2}{h_a^2} \geq 4 \sum \frac{r^2}{h_a h_b}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1422.

Determinați primele 2018 cifre după virgulă ale numărului $(4 - \sqrt{17})^{2260}$.

OL-Iași-2008

Soluție.

Fie $x = (4 - \sqrt{17})^{2260} \in (0, 1) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \{x\} = x &= (4 - \sqrt{17})^{2260} = \frac{1}{(4 + \sqrt{17})^{2260}} < \frac{1}{8^{2260}} = \frac{1}{(2^3)^{2260}} = \frac{1}{(2^{10})^{3 \cdot 226}} = \frac{1}{(1024)^{678}} < \frac{1}{(1000)^{678}} = \\ &= \frac{1}{(10)^{3 \cdot 678}} = \frac{1}{(10)^{2034}} < \frac{1}{10^{2018}}. \end{aligned}$$

Rezultă $x < \frac{1}{10^{2018}}$.

Deducem că primele 2018 cifre după virgulă ale numărului $(4 - \sqrt{17})^{2260}$ sunt zerouri.

Remarcă.

Determinați primele 2026 cifre după virgulă ale numărului $(4 - \sqrt{17})^{2260}$.

Marin Chirciu

Soluție.

Fie $x = (4 - \sqrt{17})^{2260} \in (0, 1) \Rightarrow$

$$\{x\} = x = (4 - \sqrt{17})^{2260} = \frac{1}{(4 + \sqrt{17})^{2260}} < \frac{1}{8^{2260}} = \frac{1}{(2^3)^{2260}} = \frac{1}{(2^{10})^{3 \cdot 226}} = \frac{1}{(1024)^{678}} < \frac{1}{(1000)^{678}} =$$

$$= \frac{1}{(10)^{3 \cdot 678}} = \frac{1}{(10)^{2034}} < \frac{1}{10^{2026}}.$$

Rezultă $x < \frac{1}{10^{2026}}.$

Deducem că primele 2026 cifre după virgulă ale numărului $(4 - \sqrt{17})^{2260}$ sunt zerouri.

Problema1423.

Să se arate că ecuația

$$a^2x^2 + 2(b+c)x + 1 = 0,$$

are soluții reale și distincte, unde a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi.

OL-Olt-1996

Soluție.

$$\Delta' = (b+c)^2 - a^2 = (b+c+a)(b+c-a) > 0.$$

Remarcă.

Să se arate că ecuația

$$a^4x^2 + 2(b+c)^2x + 1 = 0,$$

are soluții reale și distincte, unde a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi.

Marin Chirciu

Soluție.

$$\Delta' = (b+c)^4 - a^4 = ((b+c)^2 + a^2)((b+c)^2 - a^2) = ((b+c)^2 + a^2)(b+c+a)(b+c-a) > 0.$$

Problema1424.

Să se rezolve ecuația

$$(x^2 - 2x + 1)^2 + (x^2 - 3x + 2)^2 + \dots + (x^2 - (n+1)x + n)^2 = 0,$$

unde $n \in \mathbf{N}^*$.

OJ-Botoșani-1996

Soluție.

$$\begin{aligned} (x^2 - 2x + 1)^2 + (x^2 - 3x + 2)^2 + \dots + (x^2 - (n+1)x + n)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ (x-1)^2(x-1)^2 + (x-1)^2(x-2)^2 + \dots + (x-1)^2(x-n)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-1)^2((x-1)^2 + (x-2)^2 + \dots + (x-n)^2) &= 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Remarcă.

Să se rezolve ecuația

$$(x^2 - 4x + 4)^2 + (x^2 - 6x + 8)^2 + \dots + (x^2 - 2(n+1)x + 4n)^2 = 0,$$

unde $n \in \mathbf{N}^*$.

Marin Chirciu

Soluție.

$$\begin{aligned} (x^2 - 4x + 4)^2 + (x^2 - 6x + 8)^2 + \dots + (x^2 - 2(n+1)x + 4n)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ (x-2)^2(x-2)^2 + (x-2)^2(x-4)^2 + \dots + (x-1)^2(x-2n)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-2)^2((x-2)^2 + (x-4)^2 + \dots + (x-2n)^2) &= 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Problema 1425.

Să se arate că ecuația

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0,$$

are soluții reale, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{R}$.

OL-Bihor-1996

Soluție.

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ca = 0.$$

$$\Delta' = (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2} \sum (a-b)^2 \geq 0.$$

Remarcă.

Să se arate că ecuația

$$\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} + \frac{c}{x-c} = 0,$$

are soluții reale, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{R}$.

Marin Chirciu

Soluție.

$$\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} + \frac{c}{x-c} = 0 \Leftrightarrow (a+b+c)x^2 - 2(ab+bc+ca)x + abc = 0.$$

$$\Delta' = (ab+bc+ca)^2 - 3abc(a+b+c) = \frac{1}{2} \sum a^2(b-c)^2 \geq 0.$$

Problema1426.

If $x \in \mathbf{R}$ then

$$x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2 \geq 0.$$

OL-Maramureș-1993

Soluție.

$$x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(1+(x-1)^2) \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = 1$.

Remarcă.

If $x \in \mathbf{R}$ and $\lambda \geq 0$ then

$$x^4 - 4x^3 + (\lambda+6)x^2 - 2(\lambda+2)x + \lambda+1 \geq 0.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$x^4 - 4x^3 + (\lambda+6)x^2 - 2(\lambda+2)x + \lambda+1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(\lambda+(x-1)^2) \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = 1$.

Problema1427.

Find $x \in \mathbf{Z}$ such that

$$\frac{x^4 + x^2 + 5x - 3}{x^2 - x + 1} \in \mathbf{Z}.$$

OL-Alba-1993

Soluție.

$$\frac{x^4 + x^2 + 5x - 3}{x^2 - x + 1} = x^2 + x + 1 + \frac{5x - 4}{x^2 - x + 1} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \frac{5x - 4}{x^2 - x + 1} \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{Avem } -5 < \frac{5x - 4}{x^2 - x + 1} < 3, \forall x \in \mathbf{Z} \Rightarrow \frac{5x - 4}{x^2 - x + 1} \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}, x \in \mathbf{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \{-1, 0, 1, 2, 5\}.$$

Problema 1428.If $x \in \mathbf{R}$ then find max of

$$E = 2018 + 4x - 4x^2.$$

Math 4/2026

Soluție.

$$E = 2018 + 4x - 4x^2 = 2022 - (x - 2)^2 \leq 2022.$$

Deducem că $\max E = 2022$ pentru $x = 2$.**Remarcă.**If $x \in \mathbf{R}$ then find max of

$$E = 2026 + 4x - 4x^2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$E = 2026 + 4x - 4x^2 = 2030 - (x - 2)^2 \leq 2030.$$

Deducem că $\max E = 2030$ pentru $x = 2$.**Remarcă.**Let be $\lambda \in \mathbf{R}$ fixed. If $x \in \mathbf{R}$ then find max of

$$E = \lambda + 4x - 4x^2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$E = \lambda + 4x - 4x^2 = \lambda + 4 - (x-2)^2 \leq \lambda + 4.$$

Deducem că $\max E = \lambda + 4$ pentru $x = 2$.

Problema1429.

Solve for integers

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 6y + 17} + \sqrt{z^2 - 2z + 2} = 3.$$

Math 4/2026

Soluție.

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 6y + 17} + \sqrt{z^2 - 2z + 2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + 4} + \sqrt{(z-1)^2 + 1} \geq 2 + 1 = 3,$$

cu egal pentru $(x-2)^2 = 0, (y+3)^2 = 0, (z-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) = (2, -3, 1)$.

Deducem că $(x, y, z) = (2, -3, 1)$ este soluția unică a ecuației.

Remarcă.

Let be $\lambda \in \mathbb{N}^*$ fixed. Solve for integers

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 4\lambda x + 6\lambda y + 17\lambda^2} + \sqrt{z^2 - 2\lambda z + 2\lambda^2} = 3\lambda.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2 - 4\lambda x + 6\lambda y + 17\lambda^2} + \sqrt{z^2 - 2\lambda z + 2\lambda^2} &= \sqrt{(x-2\lambda)^2 + (y+3\lambda)^2 + 4\lambda^2} + \\ &+ \sqrt{(z-\lambda)^2 + \lambda^2} \geq 2\lambda + \lambda = 3\lambda, \end{aligned}$$

cu egal pentru $(x-2\lambda)^2 = 0, (y+3\lambda)^2 = 0, (z-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) = (2\lambda, -3\lambda, \lambda)$.

Deducem că $(x, y, z) = (2\lambda, -3\lambda, \lambda)$ este soluția unică a ecuației.

Problema1430.

Solve for reals

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{2}{x^2 - 2x + 2} + \dots + \frac{2018}{x^2 - 2x + 2018} = 2018.$$

Soluție.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-2x+1} + \frac{2}{x^2-2x+2} + \dots + \frac{2018}{x^2-2x+2018} &= 2018 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2-2x+1} - 1 \right) + \left(\frac{2}{x^2-2x+2} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{2018}{x^2-2x+2018} - 1 \right) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{-x^2+2x}{(x-1)^2} + \frac{-x^2+2x}{(x-1)^2+1} + \dots + \frac{-x^2+2x}{(x-1)^2+2017} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (-x^2+2x) \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2+1} + \dots + \frac{1}{(x-1)^2+2017} \right) &= 0 \Leftrightarrow (-x^2+2x) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \in \{0, 2\}. \end{aligned}$$

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{0, 2\}$.

Remarcă.

Solve for reals

$$\frac{1}{x^2-2x+1} + \frac{2}{x^2-2x+2} + \dots + \frac{2026}{x^2-2x+2026} = 2026.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-2x+1} + \frac{2}{x^2-2x+2} + \dots + \frac{2026}{x^2-2x+2026} &= 2026 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2-2x+1} - 1 \right) + \left(\frac{2}{x^2-2x+2} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{2026}{x^2-2x+2026} - 1 \right) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{-x^2+2x}{(x-1)^2} + \frac{-x^2+2x}{(x-1)^2+1} + \dots + \frac{-x^2+2x}{(x-1)^2+2025} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (-x^2+2x) \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2+1} + \dots + \frac{1}{(x-1)^2+2025} \right) &= 0 \Leftrightarrow (-x^2+2x) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \in \{0, 2\}. \end{aligned}$$

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{0, 2\}$.

Remarcă.

Let be $n \in \mathbb{N}^*$ fixed. Solve for reals

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{2}{x^2 - 2x + 2} + \dots + \frac{n}{x^2 - 2x + n} = n.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{2}{x^2 - 2x + 2} + \dots + \frac{n}{x^2 - 2x + n} = n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2 - 2x + 1} - 1 \right) + \left(\frac{2}{x^2 - 2x + 2} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{n}{x^2 - 2x + n} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2} + \frac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2 + 1} + \dots + \frac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2 + n - 1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-x^2 + 2x) \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2 + 1} + \dots + \frac{1}{(x-1)^2 + n - 1} \right) = 0 \Leftrightarrow (-x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \{0, 2\}.$$

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{0, 2\}$.

Problema 1431.

If $a, b, c > 1$, $a + b + c = 9$ then

$$\sum \log_a \frac{b+c}{2} \geq \frac{3abc}{ab+bc+ca}.$$

Mathematical Inequalities, Crăciun Gheorghe

Soluție.

$$LHS = \sum \log_a \frac{b+c}{2} \stackrel{\log=\text{concava}}{\geq} \sum \frac{\log_a b + \log_a c}{2} = \sum \frac{\log_a b + \log_b a}{2} \stackrel{AG}{\geq} \sum \sqrt{\log_a b \cdot \log_b a} = .$$

$$= \sum \sqrt{1} = 3 \stackrel{(1)}{\geq} \frac{3abc}{ab+bc+ca} = RHS,$$

$$\text{unde } 3 \stackrel{(1)}{\geq} \frac{3abc}{ab+bc+ca} \Leftrightarrow ab+bc+ca \geq abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 1, \text{ vezi } (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9,$$

$$a+b+c=9 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 1.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=3$

Remarcă.

If $a, b, c > 1$ then

$$\sum \left(\log_a \frac{b+c}{2} \right)^n \geq 3, n \in \mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Pentru $n=0$ se obține egalitatea $3=3$.

Pentru $n=1$ vezi Lema.

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum \left(\log_a \frac{b+c}{2} \right)^n \stackrel{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum \log_a \frac{b+c}{2} \right)^n}{3^{n-1}} \stackrel{Lema}{\geq} \frac{3^n}{3^{n-1}} = 3 = RHS.$$

Lema.

If $a, b, c > 1$ then

$$\sum \log_a \frac{b+c}{2} \geq 3.$$

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \log_a \frac{b+c}{2} \stackrel{AG}{\geq} \sum \log_a \sqrt{bc} = \sum \frac{1}{2} \log_a bc = \sum \frac{1}{2} (\log_a b + \log_a c) \stackrel{AG}{\geq} \sum \sqrt{\log_a b \cdot \log_b a} = \\ &= \sum \sqrt{1} = 3 = RHS. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Problema1432.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{\sin^5 A} \geq \frac{32}{3\sqrt{3}}.$$

RMM 4/2026, Zaza Mzhavanadze, Georgia

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{1}{\sin^5 A} \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{1}{\sin A}\right)^5}{3^{5-1}} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{(2\sqrt{3})^5}{3^4} = \frac{32}{3\sqrt{3}} = RHS.$$

Am folosit mai sus: $\sum \frac{1}{\sin A} \geq 2\sqrt{3}$, vezi $\sum \frac{1}{\sin A} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2pr} \stackrel{\text{Gewrretsen}}{\geq} 2\sqrt{3}$.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{1}{\sin^n A} \geq 3 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n, n \in \mathbb{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n = 0$ se obține egalitatea $3 = 3$.

Pentru $n = 1$ se obține $\sum \frac{1}{\sin A} \geq 2\sqrt{3}$, vezi mai jos.

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum \frac{1}{\sin^n A} \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{1}{\sin A}\right)^n}{3^{n-1}} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{(2\sqrt{3})^n}{3^{n-1}} = 3 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n = RHS.$$

Am folosit mai sus: $\sum \frac{1}{\sin A} \geq 2\sqrt{3}$, vezi $\sum \frac{1}{\sin A} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2pr} \stackrel{\text{Gewrretsen}}{\geq} 2\sqrt{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1433.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{\csc^5 \frac{A}{2}}{a} \geq \frac{32\sqrt{3}}{R}.$$

RMM 4/2026, Zaza Mzhavanadze, Georgia

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{\csc^5 \frac{A}{2}}{a} \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{\left(\sum \csc \frac{A}{2} \right)^5}{3^{5-2} \sum a} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{6^5}{3^3 \cdot 2p} = \frac{6^5}{3^3 \cdot 3R\sqrt{3}} = \frac{32\sqrt{3}}{R} = RHS.$$

Am folosit mai sus: $\sum \csc \frac{A}{2} = \sum \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} \stackrel{\text{Jensen}}{\geq} 6.$

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{\csc^n \frac{A}{2}}{a} \geq \frac{2^n \sqrt{3}}{R}, n \in \mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n = 0$ se obține $\sum \frac{1}{a} \geq \frac{\sqrt{3}}{R}$, vezi $\sum \frac{1}{a} \stackrel{CS}{\geq} \frac{9}{\sum a} = \frac{9}{2p} \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\geq} \frac{9}{3R\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{R}.$

Pentru $n = 1$ se obține $\sum \frac{\csc \frac{A}{2}}{a} \geq \frac{2\sqrt{3}}{R}$, vezi

$$\sum \frac{\csc \frac{A}{2}}{a} \stackrel{AG}{\geq} 3 \sqrt[3]{\prod \frac{\csc \frac{A}{2}}{a}} = \frac{3}{\sqrt[3]{\prod a \sin \frac{A}{2}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{abc \prod \sin \frac{A}{2}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4Rrp \cdot \frac{r}{4R}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{r^2 p}} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{2\sqrt{3}}{R}.$$

unde $\frac{3}{\sqrt[3]{r^2 p}} \geq \frac{2\sqrt{3}}{R} \Leftrightarrow \frac{27}{r^2 p} \geq \frac{8 \cdot 3\sqrt{3}}{R^3}$, vezi inegalitatea lui Mitrinovic $p \leq \frac{3R\sqrt{3}}{2}.$

Rămâne să arătăm că:

$$\frac{27}{r^2 \cdot \frac{3R\sqrt{3}}{2}} \geq \frac{8 \cdot 3\sqrt{3}}{R^3} \Leftrightarrow R^2 \geq 4r^2, \text{ vezi inegalitatea lui Euler } R \geq 2r.$$

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum \frac{\csc^n \frac{A}{2}}{a} \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{\left(\sum \csc \frac{A}{2} \right)^n}{3^{n-2} \sum a} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{6^n}{3^{n-2} \cdot 2p} = \frac{6^n}{3^{n-2} \cdot 3R\sqrt{3}} = \frac{2^n \sqrt{3}}{R} = RHS.$$

Am folosit mai sus: $\sum \csc \frac{A}{2} = \sum \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} \stackrel{Jensen}{\geq} 6$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema 1434.

If $a, b, c, d > 0, a + b + c + d = 1$ then

$$\sum \frac{a^2 + b + c}{b + c + d} \geq 3.$$

Sanong Huayrerai

Soluție.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{a^2 + b + c}{b + c + d} = \sum \frac{a^2 + b + c}{1 - a} = \sum \left(\frac{a^2 + b + c}{1 - a} + a \right) - 1 = \sum \frac{a + b + c}{1 - a} - 1 = \\ &= \sum \frac{a + b + c}{b + c + d} - 1 \stackrel{AG}{\geq} 4 \sqrt[4]{\prod \frac{a + b + c}{b + c + d}} - 1 = 4 \sqrt[4]{1} - 1 = 3 = RHS. \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = d = \frac{1}{4}$.

Remarcă.

If $a, b, c, d > 0, a + b + c + d = 1$ and $n \in \mathbb{N}$ then

$$\sum \left(\frac{a^2 + b + c}{b + c + d} \right)^n \geq 4 \left(\frac{3}{4} \right)^n.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n = 0$ se obține egalitatea $4 = 4$.

Pentru $n = 1$ vezi Lema.

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum \left(\frac{a^2 + b + c}{b + c + d} \right)^n \stackrel{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{a^2 + b + c}{b + c + d} \right)^n}{4^{n-1}} \stackrel{Lema}{\geq} \frac{3^n}{4^{n-1}} = 4 \left(\frac{3}{4} \right)^n = RHS.$$

Lema.

If $a, b, c, d > 0, a + b + c + d = 1$ then

$$\sum \frac{a^2 + b + c}{b + c + d} \geq 3.$$

$$\sum \frac{a^2 + b + c}{b + c + d} = \sum \frac{a^2 + b + c}{1 - a} = \sum \left(\frac{a^2 + b + c}{1 - a} + a \right) - 1 = \sum \frac{a + b + c}{1 - a} - 1 =$$

$$= \sum \frac{a + b + c}{b + c + d} - 1 \stackrel{AG}{\geq} 4 \sqrt[4]{\prod \frac{a + b + c}{b + c + d}} - 1 = 4 \sqrt[4]{1} - 1 = 3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = d = \frac{1}{4}$.

Remarcă.

If $a, b, c > 0, a + b + c = 1$ then

$$\sum \frac{a^2 + b}{b + c} \geq 2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a^2 + b}{b + c} = \sum \frac{a^2 + b}{1 - a} = \sum \left(\frac{a^2 + b}{1 - a} + a \right) - 1 = \sum \frac{a + b}{1 - a} - 1 =$$

$$= \sum \frac{a + b}{b + c} - 1 \stackrel{AG}{\geq} 3 \sqrt[3]{\prod \frac{a + b}{b + c}} - 1 = 3 \sqrt[3]{1} - 1 = 2 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{(r_a^2 + rr_b)r_c}{r_a^2(r_b + r_c)} \geq 2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$\sum \frac{x^2 + y}{y + z} \geq 2.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{r_a}, \frac{r}{r_b}, \frac{r}{r_c}\right)$ obținem:

$$\sum \frac{\frac{r^2}{r_a^2} + \frac{r}{r_b}}{\frac{r}{r_b} + \frac{r}{r_c}} \geq 2 \Leftrightarrow \sum \frac{\frac{r}{r_a^2} + \frac{1}{r_b}}{\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}} \geq 2 \Leftrightarrow \sum \frac{\frac{r_a^2 + rr_b}{r_a^2 r_b}}{\frac{r_b + r_c}{r_b r_c}} \geq 2 \Leftrightarrow \sum \frac{(r_a^2 + rr_b)r_c}{r_a^2(r_b + r_c)} \geq 2.$$

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{(h_a^2 + rh_b)h_c}{h_a^2(h_b + h_c)} \geq 2.$$

Marin Chirciu

Soluție.**Lema.**

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$\sum \frac{x^2 + y}{y + z} \geq 2.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{h_a} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{h_a}, \frac{r}{h_b}, \frac{r}{h_c}\right)$ obținem:

$$\sum \frac{\frac{r^2}{h_a^2} + \frac{r}{h_b}}{\frac{r}{h_b} + \frac{r}{h_c}} \geq 2 \Leftrightarrow \sum \frac{\frac{r}{h_a^2} + \frac{1}{h_b}}{\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}} \geq 2 \Leftrightarrow \sum \frac{\frac{h_a^2 + rh_b}{h_a^2 h_b}}{\frac{h_b + h_c}{h_b h_c}} \geq 2 \Leftrightarrow \sum \frac{(h_a^2 + rh_b)h_c}{h_a^2(h_b + h_c)} \geq 2.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1435

If $a, b, c > 0$, $a + b + c = 1$ then

$$\sum \sqrt[3]{(1+6a)b} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}.$$

April Octogon 2007, Mihaly Bencze, Braşov

Soluție.

Lema.

If $a, b > 0$ then

$$\sqrt[3]{(1+6a)b} \leq \frac{6a+9b+4}{9}.$$

Soluție.

$$\sqrt[3]{(1+6a)b} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{(1+6a) \cdot 9b \cdot 3} \stackrel{AG}{\leq} \frac{1}{3} \cdot \frac{(1+6a)+9b+3}{3} = \frac{6a+9b+4}{9},$$

cu egal pentru $(1+6a) = 9b = 3 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{3}$.

$$\sum \sqrt[3]{(1+6a)b} \stackrel{Lema}{\leq} \sum \frac{6a+9b+4}{9} = \frac{15 \sum a + 12}{9} = \frac{15 \cdot 1 + 12}{9} = \frac{27}{9} = 3 \stackrel{(1)}{\leq} \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} = RHS,$$

unde $3 \stackrel{(1)}{\leq} \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{abc} \leq 1$, vezi $1 = a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow 3\sqrt[3]{abc} \leq 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Remarcă.

If $a, b, c > 0$, $a + b + c = 1$ then

$$\sum \sqrt[6]{(1+6a)b} \leq 3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \sqrt[3]{(1+6a)b} = \sum \sqrt[3]{(1+6a)b} \stackrel{CBS}{\leq} \sqrt{3 \sum \sqrt[3]{(1+6a)b}} \stackrel{Lema}{\leq} \sqrt{3 \cdot 3} = 3 = RHS.$$

Lema.If $a, b > 0$ then

$$\sum \sqrt[3]{(1+6a)b} \leq 3.$$

Demonstrație.

$$\sqrt[3]{(1+6a)b} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{(1+6a) \cdot 9b \cdot 3} \stackrel{AG}{\leq} \frac{1}{3} \cdot \frac{(1+6a) + 9b + 3}{3} = \frac{6a + 9b + 4}{9},$$

cu egal pentru $(1+6a) = 9b = 3 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{3}$.

$$\sum \sqrt[3]{(1+6a)b} \leq \sum \frac{6a + 9b + 4}{9} = \frac{15 \sum a + 12}{9} = \frac{15 \cdot 1 + 12}{9} = \frac{27}{9} = 3 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \frac{1}{3}$.**Remarcă.**In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \sqrt[3]{\left(1 + \frac{6r}{r_a}\right) \frac{r}{r_b}} \leq 3.$$

Marin Chirciu

Soluție.**Lema.**If $x, y, z > 0, x + y + z = 1$ then

$$\sum \sqrt[3]{(1+6x)y} \leq 3.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{r_a}, \frac{r}{r_b}, \frac{r}{r_c}\right)$ obținem: $\sum \sqrt[3]{\left(1 + \frac{6r}{r_a}\right) \frac{r}{r_b}} \leq 3$.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \sqrt[3]{\left(1 + \frac{6r}{h_a}\right) \frac{r}{h_b}} \leq 3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$\sum \sqrt[3]{(1 + 6x)y} \leq 3.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{h_a} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{h_a}, \frac{r}{h_b}, \frac{r}{h_c}\right)$ obținem: $\sum \sqrt[3]{\left(1 + \frac{6r}{h_a}\right) \frac{r}{h_b}} \leq 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1436.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum r_a^k \geq 3(3r)^k, k \in \mathbb{Z}.$$

OJ-1994-Argeș, Marin Stoica, Olt

Soluție.

Cazul $k < 0 \Rightarrow k = -n, n \in \mathbb{N}^*$.

$$LHS = \sum r_a^k = \sum r_a^{-n} = \sum \frac{1}{r_a^n} = \sum \frac{1}{\left(\frac{S}{p-a}\right)^n} = \frac{1}{S^n} \sum (p-a)^n \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{1}{p^n r^n} \frac{(\sum (p-a))^n}{3^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{p^n r^n} \frac{p^n}{3^{n-1}} = \frac{1}{3^{n-1} r^n} = \frac{3}{(3r)^n} = 3(3r)^{-n} = 3(3r)^k = RHS.$$

Cazul $k = 0$.

Se obține egalitatea $3 = 3$.

Cazul $k > 0$.

$$LHS = \sum r_a^k \stackrel{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum r_a\right)^k}{3^{k-1}} = \frac{(4R+r)^k}{3^{k-1}} \stackrel{Euler}{\geq} \frac{(9r)^k}{3^{k-1}} = 3(3r)^k = RHS.$$

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum h_a^k \geq 3(3r)^k, k \in \mathbf{Z}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Cazul $k < 0 \Rightarrow k = -n, n \in \mathbf{N}^*$.

$$LHS = \sum h_a^k = \sum h_a^{-n} = \sum \frac{1}{h_a^n} = \sum \frac{1}{\left(\frac{2S}{a}\right)^n} = \frac{1}{2^n S^n} \sum a^n \stackrel{Holder}{\geq} \frac{1}{2^n p^n r^n} \frac{\left(\sum a\right)^n}{3^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{2^n p^n r^n} \frac{(2p)^n}{3^{n-1}} = \frac{1}{3^{n-1} r^n} = \frac{3}{(3r)^n} = 3(3r)^{-n} = 3(3r)^k = RHS.$$

Cazul $k = 0$.

Se obține egalitatea $3 = 3$.

Cazul $k > 0$.

$$LHS = \sum h_a^k \stackrel{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum h_a\right)^k}{3^{k-1}} \stackrel{\sum h_a \geq 9r}{\geq} \frac{(9r)^k}{3^{k-1}} = 3(3r)^k = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1437.

Solve for reals

$$\begin{cases} a+b+c=5 \\ ab+bc+ca=7+a \end{cases}.$$

GM6-7-8/2012, Mihai Opincariu, Brad, Hunedoara

Soluție.

$$\begin{cases} a+b+c=5 \\ ab+bc+ca=7+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=5-a \\ bc=a^2-4a+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=5-a \\ P=a^2-4a+7 \end{cases} \Rightarrow x^2-Sx+P=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-(5-a)x+a^2-4a+7=0, \Delta=-3(a-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow b=c=2 \Rightarrow (a,b,c)=(1,2,2).$$

Deducem că sistemul admite soluția unică $(a,b,c)=(1,2,2)$.**Remarcă.**1). Let n, k be positive real numbers such that $n^2 - n + 1 = 3k$. Solve for reals

$$\begin{cases} a+b+c=n \\ ab+bc+ca=k+a \end{cases}.$$

Soluție.

$$\begin{cases} a+b+c=n \\ ab+bc+ca=k+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=n-a \\ bc=a^2+(1-n)a+k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=n-a \\ P=a^2+(1-n)a+k \end{cases} \Rightarrow x^2-Sx+P=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-(n-a)x+a^2+(1-n)a+k=0,$$

$$\Delta=-3a^2+2(n-2)a+n^2-4k=-3a^2+2(n-2)a+n^2-4 \cdot \frac{n^2-n+1}{3} =$$

$$= \frac{-9a^2+6(n-2)a-(n-2)^2}{3} = \frac{-1}{3}(3a-n+2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a = \frac{n-2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{9x^2-6(n+1)x+(n+1)^2}{9}=0 \Leftrightarrow (3x-n-1)^2=0 \Leftrightarrow x=\frac{n+1}{3} \Rightarrow b=c=\frac{n+1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a,b,c)=\left(\frac{n-2}{3}, \frac{n+1}{3}, \frac{n+1}{3}\right)$$

Deducem că sistemul admite soluția unică $(a,b,c)=\left(\frac{n-2}{3}, \frac{n+1}{3}, \frac{n+1}{3}\right)$.

2). Let λ be positive real number . Solve for reals

$$\begin{cases} a+b+c=\lambda \\ ab+bc+ca=\frac{\lambda^2-\lambda+1}{3}+a \end{cases}$$

Soluție.

Deducem că sistemul admite soluția unică $(a,b,c)=\left(\frac{\lambda-2}{3}, \frac{\lambda+1}{3}, \frac{\lambda+1}{3}\right)$.

3). Let n be positive real number . Solve for reals

$$\begin{cases} a+b+c=n \\ ab+bc+ca=\frac{n^2-n+1}{3}+a \end{cases}$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că sistemul admite soluția unică $(a,b,c)=\left(\frac{n-2}{3}, \frac{n+1}{3}, \frac{n+1}{3}\right)$.

Problema1438.

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 > 0$ și $x_{n+1} = \frac{x_n}{(1+x_n)^2}$, $n \geq 1$.

Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x_n)^n$

OL-2014-Constanța, Cătălin Zîrnă, Constanța

Soluție.

Prin inducție matematică: $x_n > 0$, $n \geq 1$.

Din $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{(1+x_n)^2} < 1 \Rightarrow$ șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător.

Deoarece șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător și $x_n > 0$, $n \geq 1 \Rightarrow$ șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

Trecând la limită în relația de recurență obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Avem $nx_n = \frac{n}{\frac{1}{x_n}}$. Cum $\frac{1}{x_n} \rightarrow +\infty$, strict crescător, aplicăm Lema Stolz-Cesaro $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{(1+x_n)^2}{x_n} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_n^2 + 2x_n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n + 2} \stackrel{x_n \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Să trecem la calculul $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x_n)^n$.

$$\text{Avem } \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x_n)^n \stackrel{(1^\infty)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left((1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} \right)^{nx_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

Deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x_n)^n = \sqrt{e}$.

Remarcă.

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 > 0$ și $x_{n+1} = \frac{x_n}{(1+x_n)^3}$, $n \geq 1$.

Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x_n)^n$

Marin Chirciu

Soluție.

Prin inducție matematică: $x_n > 0$, $n \geq 1$.

Din $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{(1+x_n)^3} < 1 \Rightarrow$ șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător.

Deoarece șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător și $x_n > 0$, $n \geq 1 \Rightarrow$ șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

Trecând la limită în relația de recurență obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Avem $nx_n = \frac{n}{\frac{1}{x_n}}$. Cum $\frac{1}{x_n} \rightarrow +\infty$, strict crescător, aplicăm Lema Stolz-Cesaro $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{(1+x_n)^3}{x_n} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_n^3 + 3x_n^2 + 3x_n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n^2 + 3x_n + 3} \stackrel{x_n \rightarrow 0}{=} \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Să trecem la calculul $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x_n)^n$.

$$\text{Avem } \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x_n)^n \stackrel{(1^\infty)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left((1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} \right)^{nx_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}.$$

Deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x_n)^n = \sqrt[3]{e}$.

Problema1439.

În reperul $(O, \vec{i}, \vec{j})$ fie punctele $A_1(1, a), A_2(2, a), \dots, A_n(n, a)$.

a) Calculați $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}$.

b) Arătați că $\sqrt{a^2+1} + \sqrt{a^2+4} + \dots + \sqrt{a^2+n^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{4} n(2a+n+1)$.

OL-2013, Mehedinți

Soluție.

$$\begin{aligned} \text{a). } \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} &= (\vec{i} + a\vec{j}) + (2\vec{i} + a\vec{j}) + \dots + (n\vec{i} + a\vec{j}) = (1+2+\dots+n)\vec{i} + na\vec{j} = \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)\vec{i} + na\vec{j}. \end{aligned}$$

$$\text{b) } |\overrightarrow{OA_1}| + |\overrightarrow{OA_2}| + \dots + |\overrightarrow{OA_n}| \geq |\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{a^2+1} + \sqrt{a^2+4} + \dots + \sqrt{a^2+n^2} \geq \sqrt{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (na)^2} = \frac{n}{2} \sqrt{(n+1)^2 + 4a^2} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{\sqrt{2}}{4} n(2a+n+1)$$

$$\text{unde } \frac{n}{2} \sqrt{(n+1)^2 + 4a^2} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{\sqrt{2}}{4} n(2a+n+1) \Leftrightarrow (n+1)^2 - 4a(n+1) + 4a^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n+1-2a)^2 \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $n+1=2a$.

Remarcă.

În reperul $(O, \vec{i}, \vec{j})$ fie punctele $A_1(1, a), A_2(3, a), \dots, A_n(2n-1, a)$.

a) Calculați $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}$.

b) Arătați că $\sqrt{a^2+1} + \sqrt{a^2+9} + \dots + \sqrt{a^2+(2n-1)^2} \geq \frac{n(n+a)}{\sqrt{2}}$.

Marin Chirciu

Soluție.

$$\begin{aligned} \text{a). } \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} &= (\vec{i} + a\vec{j}) + (3\vec{i} + a\vec{j}) + \dots + ((2n-1)\vec{i} + a\vec{j}) = \\ &= (1+3+\dots+2n-1)\vec{i} + na\vec{j} = n^2\vec{i} + na\vec{j}. \end{aligned}$$

$$\text{b) } |\overrightarrow{OA_1}| + |\overrightarrow{OA_2}| + \dots + |\overrightarrow{OA_n}| \geq |\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+1} + \sqrt{a^2+9} + \dots + \sqrt{a^2+(2n-1)^2} \geq \sqrt{n^4 + n^2 a^2}.$$

$$\sqrt{n^4 + n^2 a^2} = n\sqrt{n^2 + a^2} \stackrel{CS}{\geq} n\sqrt{\frac{(n+a)^2}{2}} = \frac{n(n+a)}{\sqrt{2}}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $n = a$.

Problem1440.

Calculați

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x\sqrt{x^2+a^2} - \sqrt{x^2+a^4}) = \frac{a^2}{2}, a \in \mathbf{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1 - \sqrt{(x+1)^2 - 3x}) = \frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1 + \sqrt{(x+1)^2 - 3x})}{x} = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1 - \sqrt{(x+1)^2 - 3x})}{x} = -2.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1 - \sqrt{(x+1)^2 - 3x})}{x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1 - \sqrt{(x+1)^2 - 3x})}{x} = \frac{3}{2}.$$

Math-4/2014

Problema 1441.

Let P be a point inside the triangle ABC and let P_a, P_b, P_c be its projections on to the sides BC, CA, AB , respectively. Prove that

$$PP_a^2 + PP_b^2 + PP_c^2 \geq \frac{4F^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Math Olympiads 4/2026, Elton Papanikolla

Soluție.

$$PP_a^2 + PP_b^2 + PP_c^2 \geq \frac{4F^2}{a^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow \sum PP_a^2 \sum a^2 \geq 4F^2, \text{ vezi inegalitatea CBS.}$$

$$\sum PP_a^2 \sum a^2 \stackrel{\text{CBS}}{\geq} \left(\sum a \cdot PP_a \right)^2 = \left(\sum 2F_1 \right)^2 = 4F^2, \text{ unde } F_1 = [PBC], F_2 = [PCA], F_3 = [PAB],$$

$$F_1 + F_2 + F_3 = F = [ABC].$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $\triangle ABC$ este echilateral și $P \equiv G$.

Remarcă.

1). Let P be a point inside the triangle ABC and let P_a, P_b, P_c be its projections on to the sides BC, CA, AB , respectively. Prove that

$$PP_a^3 + PP_b^3 + PP_c^3 \geq \frac{8F^3}{3(a^3 + b^3 + c^3)}.$$

Soluție.

$$PP_a^3 + PP_b^3 + PP_c^3 \geq \frac{8F^3}{3(a^3 + b^3 + c^3)} \Leftrightarrow 3 \sum PP_a^3 \sum a^3 \geq 8F^3, \text{ vezi inegalitatea lui Holder.}$$

$$\sum 1 \sum PP_a^3 \sum a^3 \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \left(\sum 1 \cdot a \cdot PP_a \right)^3 = \left(\sum 2F_1 \right)^3 = 8F^3, \text{ unde } F_1 = [PBC], F_2 = [PCA], F_3 = [PAB], F_1 + F_2 + F_3 = F = [ABC].$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $\triangle ABC$ este echilateral și $P \equiv G$.

2). Let P be a point inside the triangle ABC and let P_a, P_b, P_c be its projections on to the sides BC, CA, AB , respectively. Prove that

$$PP_a^4 + PP_b^4 + PP_c^4 \geq \frac{16F^4}{9(a^4 + b^4 + c^4)}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$PP_a^4 + PP_b^4 + PP_c^4 \geq \frac{16F^4}{9(a^4 + b^4 + c^4)} \Leftrightarrow 9 \sum PP_a^4 \sum a^4 \geq 16F^4, \text{ vezi inegalitatea lui Holder.}$$

$$\sum 1 \sum 1 \sum PP_a^4 \sum a^4 \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \left(\sum 1 \cdot 1 \cdot a \cdot PP_a \right)^4 = \left(\sum 2F_1 \right)^4 = 16F^4, \text{ unde } F_1 = [PBC], F_2 = [PCA], F_3 = [PAB], F_1 + F_2 + F_3 = F = [ABC].$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $\triangle ABC$ este echilateral și $P \equiv G$.

Problema1442.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{m_a^2}{bc} = \frac{9GI^2}{8Rr} + \frac{9}{4}$$

RMM4/2026, Adil Abdullayev, Azerbaijan

Soluție.

Lemă.

In $\triangle ABC$ holds

$$GI^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr).$$

$$LHS = \sum \frac{m_a^2}{bc} = \frac{p^2 + 5r^2 + 2Rr}{8Rr}.$$

$$RHS = \frac{9GI^2}{8Rr} + \frac{9}{4} = \frac{p^2 + 5r^2 - 16Rr}{8Rr} + \frac{9}{4} = \frac{p^2 + 5r^2 + 2Rr}{8Rr}.$$

Remarcă.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$\frac{9}{4} \leq \sum \frac{m_a^2}{bc} \leq \frac{9R}{8r}.$$

Soluție.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{m_a^2}{bc} = \frac{p^2 + 5r^2 + 2Rr}{8Rr}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum \frac{m_a^2}{bc} &= \frac{p^2 + 5r^2 + 2Rr}{8Rr} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} \frac{4R^2 + 4Rr + 3r^2 + 5r^2 + 2Rr}{8Rr} = \frac{4R^2 + 6Rr + 8r^2}{8Rr} = \\ &= \frac{2R^2 + 3Rr + 4r^2}{4Rr} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \frac{\frac{9R^2}{2}}{4Rr} = \frac{9R}{8r}. \end{aligned}$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{m_a^2}{bc} = \frac{p^2 + 5r^2 + 2Rr}{8Rr} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{16Rr - 5r^2 + 5r^2 + 2Rr}{8Rr} = \frac{18Rr}{8Rr} = \frac{9}{4}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{m_a}{\sqrt{bc}} \leq \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3R}{2r}}$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \sqrt{\frac{m_a^2}{bc}} \stackrel{CBS}{\leq} \sqrt{3 \sum \frac{m_a^2}{bc}} \stackrel{\text{Lema}}{\leq} \sqrt{3 \cdot \frac{9R}{8r}} = \sqrt{\frac{27R}{8r}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3R}{2r}} = RHS.$$

Lemă

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{m_a^2}{bc} \leq \frac{9R}{8r}.$$

3), In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \left(\frac{m_a^2}{bc} \right)^n \geq 3 \left(\frac{3}{4} \right)^n, n \in \mathbf{N}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n = 0$ se obține egalitatea $3 = 3$.

Pentru $n = 1$ vezi Lema.

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum \left(\frac{m_a^2}{bc} \right)^n \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{m_a^2}{bc} \right)^n}{3^{n-1}} \stackrel{\text{Lema}}{\geq} \frac{\left(\frac{9}{4} \right)^n}{3^{n-1}} = 3 \left(\frac{\frac{9}{4}}{3} \right)^n = 3 \left(\frac{3}{4} \right)^n = RHS.$$

Lemă

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{m_a^2}{bc} \geq \frac{9}{4}.$$

Problema 1443.

Să se calculeze

$$\int_0^1 \frac{x^{6n-1}}{1+x^{9n}} dx, \text{ unde } n \in \mathbf{N}^*.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{x^{6n-1}}{1+x^{9n}} dx \stackrel{x^{9n}=t}{=} \frac{1}{3n} \int_0^1 \frac{t}{1+t^3} dt = \frac{1}{3n} \int_0^1 \frac{1}{3} \left(\frac{-1}{t+1} + \frac{t+1}{t^2-t+1} \right) dt = \\ &= \frac{1}{9n} \int_0^1 \left(\frac{-1}{t+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t^2-t+1} \right) dt = \frac{1}{9n} \left(-\ln(t+1) + \frac{1}{2} \ln(t^2-t+1) + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{9n} \left(-\ln 2 + \frac{3}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} - \arctan \frac{-1}{\sqrt{3}} \right) \right) = \frac{1}{9n} \left(-\ln 2 + \frac{3}{\sqrt{3}} \left(2 \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{9n} \left(-\ln 2 + \frac{3}{\sqrt{3}} \left(2 \cdot \frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{1}{9n} \left(-\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

Notă.

Pentru $n = 1$ se obține Problema 25976 din GM3/2008.

Să se calculeze

$$\int_0^1 \frac{x^5}{1+x^9} dx.$$

Vasile Solovăstru, Feldru, Bistrița-Năsăud, Problema 25976 - GM3/2008.

Problema1440.

Să se calculeze

$$\int \frac{\cos x}{(\lambda + \sin x)(\lambda + 1 + \sin x)^3} dx, x \in \mathbf{R}, \text{unde } \lambda > 1$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$I = \int \frac{\cos x}{(\lambda + \sin x)(\lambda + 1 + \sin x)^3} dx \stackrel{\sin x = t}{=} \int \frac{1}{(\lambda + t)(\lambda + 1 + t)^3} dt.$$

$$\frac{1}{(\lambda + t)(\lambda + 1 + t)^3} = \frac{A}{\lambda + t} + \frac{B}{\lambda + 1 + t} + \frac{C}{(\lambda + 1 + t)^2} + \frac{D}{(\lambda + 1 + t)^3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(\lambda + 1 + t)^3 + B(\lambda + t)(\lambda + 1 + t)^2 + C(\lambda + t)(\lambda + 1 + t) + D(\lambda + t) = 1, \forall t.$$

Obținem:

$$(A, B, C, D) = (1, -1, -1, -1).$$

Rezultă:

$$\frac{1}{(\lambda + t)(\lambda + 1 + t)^3} = \frac{1}{\lambda + t} - \frac{1}{\lambda + 1 + t} - \frac{1}{(\lambda + 1 + t)^2} - \frac{1}{(\lambda + 1 + t)^3}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(\lambda + t)(\lambda + 1 + t)^3} dt &= \int \frac{1}{\lambda + t} dt - \int \frac{1}{\lambda + 1 + t} dt - \int \frac{1}{(\lambda + 1 + t)^2} dt - \int \frac{1}{(\lambda + 1 + t)^3} dt = \\ &= \ln(\lambda + t) - \ln(\lambda + 1 + t) + \frac{1}{\lambda + 1 + t} + \frac{1}{2(\lambda + 1 + t)^2} + C. \end{aligned}$$

Deducem că:

$$\int \frac{\cos x}{(\lambda + \sin x)(\lambda + 1 + \sin x)^3} dx = \ln \frac{\lambda + \sin x}{\lambda + 1 + \sin x} + \frac{1}{\lambda + 1 + \sin x} + \frac{1}{2(\lambda + 1 + \sin x)^2} + C.$$

Notă.

Pentru $\lambda = 2$ se obține Problema 25692 din GM12/2006.

Să se calculeze

$$\int \frac{\cos x}{(2 + \sin x)(3 + \sin x)^3} dx, x \in \mathbf{R}.$$

Alfred Eckstein și Viorel Tudoran, Arad, Problema 25692 din GM12/2006.

Problema 1441.

Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1^2} + \frac{n+2}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n+n}{n^2+n^2} \right).$$

Math 4/2026

Soluție.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= \arctan x \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 + \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{4} - 0 + \frac{1}{2} \ln 2 = \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Remarcă.

Fie $\lambda \in \mathbf{R}$ fixat. Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+\lambda}{n^2+1^2} + \frac{n+2\lambda}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n+n\lambda}{n^2+n^2} \right).$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n + \lambda k}{n^2 + k^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1 + \lambda \frac{k}{n}}{1 + \frac{k^2}{n^2}} = \int_0^1 \frac{1 + \lambda x}{1 + x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx + \int_0^1 \frac{\lambda x}{1 + x^2} dx = \\
&= \arctan x \Big|_0^1 + \frac{\lambda}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 + \frac{\lambda}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\lambda}{2} \ln 2 = \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2} \ln 2.
\end{aligned}$$

Problema 1442.

If $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, $\left| \frac{z_1 - 1}{z_1 + 2} \right| = \left| \frac{z_2 - 1}{z_2 + 2} \right| = 2$ then

$$|z_1 - z_2| \leq 4.$$

RMM 4/2026, Vasilis Demetraskos, Greece

Soluție.**Lemă.**

If $z \in \mathbf{C}$, $\left| \frac{z - 1}{z + 2} \right| = 2$ then $M(z) \in C((-3, 0), 2)$.

Demonstrație.

$$\left| \frac{z - 1}{z + 2} \right| = 2 \Leftrightarrow |z - 1| = 2|z + 2|, z = x + iy, x, y \in \mathbf{R} \Rightarrow |x + iy - 1| = 2|x + iy + 2| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x + 2)^2 + y^2} \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 4((x + 2)^2 + y^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4(x^2 + 4x + 4 + y^2) \Leftrightarrow 3x^2 + 18x + 15 + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 = 4 \Leftrightarrow (x + 3)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow M(z) \text{ se află pe cercul de centru } K(-3, 0) \text{ și rază } r = 2.$$

Folosind **Lema** și $\left| \frac{z_1 - 1}{z_1 + 2} \right| = \left| \frac{z_2 - 1}{z_2 + 2} \right| = 2 \Rightarrow A(z_1), B(z_2) \text{ se află pe cercul de centru } K(-3, 0) \text{ și rază } r = 2.$

Considerăm $\triangle KAB$, $KA = KB = 2 \Rightarrow |\overline{AB}| = |z_1 - z_2|$, $AB \leq KA + KB = 2 + 2 = 4 \Rightarrow |z_1 - z_2| \leq 4$,
cu egal dacă punctele A și B sunt diametral opuse pe cercul de centru $K(-3, 0)$ și rază $r = 2$.

Remarcă.

Dacă $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, $\left| \frac{z_1 - \lambda}{z_1 + 2\lambda} \right| = \left| \frac{z_2 - \lambda}{z_2 + 2\lambda} \right| = 2$, $\lambda > 0$ atunci

$$|z_1 - z_2| \leq 4\lambda.$$

Marin Chirciu

Soluție.**Lemă.**

Dacă $z \in \mathbf{C}$, $\left| \frac{z - \lambda}{z + 2\lambda} \right| = 2$, $\lambda > 0$ atunci $M(z) \in C((-3\lambda, 0), 2\lambda)$.

Demonstrație.

$$\left| \frac{z - \lambda}{z + 2\lambda} \right| = 2 \Leftrightarrow |z - \lambda| = 2|z + 2\lambda|, z = x + iy, x, y \in \mathbf{R} \Rightarrow |x + iy - \lambda| = 2|x + iy + 2\lambda| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x - \lambda)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x + 2\lambda)^2 + y^2} \Leftrightarrow (x - \lambda)^2 + y^2 = 4((x + 2\lambda)^2 + y^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 + y^2 = 4(x^2 + 4\lambda x + 4\lambda^2 + y^2) \Leftrightarrow 3x^2 + 18\lambda x + 15\lambda^2 + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6\lambda x + 5\lambda^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6\lambda x + 9\lambda^2 + y^2 = 4\lambda^2 \Leftrightarrow (x + 3\lambda)^2 + y^2 = 4\lambda^2 \Rightarrow M(z) \text{ se află pe cercul de centru } K(-3\lambda, 0) \text{ și rază } r = 2\lambda.$$

Folosind **Lema** și $\left| \frac{z_1 - \lambda}{z_1 + 2\lambda} \right| = \left| \frac{z_2 - \lambda}{z_2 + 2\lambda} \right| = 2 \Rightarrow A(z_1), B(z_2)$ se află pe cercul de centru $K(-3\lambda, 0)$ și rază $r = 2\lambda$.

$$\text{Considerăm } \triangle KAB, KA = KB = 2\lambda \Rightarrow |\overline{AB}| = |z_1 - z_2|, AB \leq KA + KB = 2\lambda + 2\lambda = 4\lambda \Rightarrow$$

$|z_1 - z_2| \leq 4\lambda$, cu egal dacă punctele A și B sunt diametral opuse pe cercul de centru $K(-3\lambda, 0)$ și rază $r = 2\lambda$.

Problema 1443.

Calculați

$$\int \frac{\sin x + 2 \cos^2 \frac{x}{2} + \ln x^{x+1}}{\sin x + x \ln x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Math 4/2026

Soluție.

$$I = \int \frac{\sin x + 2 \cos^2 \frac{x}{2} + \ln x^{x+1}}{\sin x + x \ln x} dx = \int \left(1 + \frac{1 + \cos x + \ln x}{\sin x + x \ln x}\right) dx = x + \ln(\sin x + x \ln x) + C.$$

Remarcă.

Calculați

$$\int \frac{\sin x + 2 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} + \ln x^{x+1}}{\sin x + x \ln x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$I = \int \frac{\sin x + 2 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} + \ln x^{x+1}}{\sin x + x \ln x} dx = \int \left(1 + \frac{1 + \cos x + \ln x}{\sin x + x \ln x}\right) dx = x + \ln(\sin x + x \ln x) + C.$$

Problema 1444.J728. If $a, b, c > 0$, $abc = 1$ then

$$\sum \frac{1}{1-a+a^2} \leq 3.$$

Mathematical Reflections 2/2026, Nguyen Viet Hung, Vietnam

Solution. We have $\sum \frac{1}{1-a+a^2} \leq 3 \Leftrightarrow \sum \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{1-a+a^2}\right) \geq 1 \Leftrightarrow \sum \frac{(2a-1)^2}{a^2-a+1} \geq 3.$

$$\sum \frac{(2a-1)^2}{a^2-a+1} \stackrel{\text{Titu-Lema}}{\geq} \frac{\left(\sum (2a-1)\right)^2}{\sum (a^2-a+1)} = \frac{(2\sum a-3)^2}{\sum a^2 - \sum a + 3} \stackrel{\text{pqr-Method}}{=} \frac{(2p-3)^2}{p^2-2q-p+3} \stackrel{(1)}{\geq} 3,$$

where $\frac{(2p-3)^2}{p^2-2q-p+3} \stackrel{(1)}{\geq} 3 \Leftrightarrow \frac{4p^2-12p+9}{p^2-2q-p+3} \geq 3 \Leftrightarrow 4p^2-12p+9 \geq 3(p^2-2q-p+3) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow p^2 + 6q \geq 9p, \text{ see } q^2 \geq 3pr, r=1 \Leftrightarrow q^2 \geq 3p.$$

$$\text{We have } p^2 + 6q = p^2 + 3q + 3q \stackrel{AM-GM}{\geq} 3\sqrt[3]{p^2 \cdot 3q \cdot 3q} = 3\sqrt[3]{9p^2 q^2} \stackrel{q^2 \geq 3p}{\geq} 3\sqrt[3]{9p^2 \cdot 3p} = 9p.$$

Equality occurs if and only if $a = b = c = 1$.

Problema1445.

O.VII.594. In $\triangle ABC$, $r = 3\text{cm}$ și $R = \frac{17}{2}\text{cm}$ then find a, b, c .

RMT 1/2026, Aurel Doboșan, Lugoj

Soluție.

Folosind $R = \frac{a}{2}$ și $r = \frac{b+c-a}{2}$ obținem:

$$R = \frac{a}{2} = \frac{17}{2} \Rightarrow a = 17.$$

$$r = \frac{b+c-a}{2} \Rightarrow 3 = \frac{b+c-17}{2} \Rightarrow b+c = 23.$$

$$\text{Din } b+c = 23 \text{ și } b^2 + c^2 = 17^2 \Rightarrow bc = 120 \Rightarrow \begin{cases} b=15 \\ c=8 \end{cases} \vee \begin{cases} b=8 \\ c=15 \end{cases}.$$

Deducem că triunghiul dreptunghic are ipotenuza de 17cm și catetele de 15cm și 8cm .

Problema1446.

O.X.434. Rezolvați în $\mathbf{R}_+^*$ sistemul

$$\begin{cases} a+b+c = 2025 \\ \frac{a^3+b^3}{ab} + \frac{b^3+c^3}{bc} + \frac{c^3+a^3}{ca} \leq 4050 \end{cases}.$$

RMT 1/2026, Mihaela Berindeanu, București

Soluție.

$$\sum \frac{a^3+b^3}{ab} \geq \sum \frac{ab(a+b)}{ab} = \sum (a+b) = 2\sum a = 2 \cdot 2023 = 4050, \text{ cu egal pentru } a=b=c=675.$$

Soluția sistemului este $(a, b, c) = (675, 675, 675)$.

Remarcă.

If $a, b, c > 0$, $a + b + c = 3$ and $n \in \mathbb{N}$ then

$$\sum \frac{a^n + b^n}{ab} \geq 6.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n = 0$ obținem $\sum \frac{1}{ab} \geq 3$, vezi $\sum \frac{1}{ab} \stackrel{CS}{\geq} \frac{9}{\sum ab} \stackrel{\sum ab \leq 3}{\geq} \frac{9}{3} = 3$.

Pentru $n = 1$ obținem $\sum \frac{a+b}{ab} \geq 6$, vezi $\sum \frac{a+b}{ab} = \sum \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) = 2 \sum \frac{1}{a} \stackrel{CS}{\geq} 2 \cdot \frac{9}{\sum a} = 2 \cdot \frac{9}{3} = 6$.

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{a^n + b^n}{ab} \stackrel{Holder}{\geq} \sum \frac{(a+b)^n}{2^{n-1}ab} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum \frac{(a+b)^n}{ab} \stackrel{Holder}{\geq} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\left(\sum (a+b) \right)^n}{3^{n-2} \sum ab} \stackrel{\sum ab \leq 3}{\geq} \\ &\stackrel{\sum ab \leq 3}{\geq} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\left(\sum (a+b) \right)^n}{3^{n-2} \cdot 3} = \frac{(2 \sum a)^n}{6^{n-1}} = \frac{(2 \cdot 3)^n}{6^{n-1}} = \frac{6^n}{6^{n-1}} = 6 = RHS. \end{aligned}$$

Am folosit mai sus $\sum ab \leq 3$, vezi $9 = (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$.

Problema 1447.

In $\triangle ABC$ holds

$$\left(\sum IA \right)^2 \leq \sum ab.$$

RMM 3/2026, Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum IA \leq \sqrt{\sum ab}.$$

Demonstrație.

$$\begin{aligned}\sum IA &= \sum \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} = \sum \frac{r}{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}} = r \sqrt{\frac{bc}{(p-b)(p-c)}} \stackrel{CBS}{\leq} r \sqrt{\sum bc \sum \frac{1}{(p-b)(p-c)}} = \\ &= r \sqrt{\sum bc \cdot \frac{1}{r^2}} = \sqrt{\sum ab}.\end{aligned}$$

Folosind **Lema** obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

1). In $\triangle ABC$ holds

$$6r \leq \sum IA \leq 2(R+r).$$

Soluție.

Inegalitatea din dreapta.

$$\begin{aligned}\sum IA &= \sum \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} = \sum \frac{r}{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}} = r \sqrt{\frac{bc}{(p-b)(p-c)}} \stackrel{CBS}{\leq} r \sqrt{\sum bc \sum \frac{1}{(p-b)(p-c)}} = \\ &= r \sqrt{\sum bc \cdot \frac{1}{r^2}} = \sqrt{\sum ab} = \sqrt{p^2 + r^2 + 4Rr} \stackrel{Gerretsen}{\leq} \sqrt{4R^2 + 4Rr + 3r^2 + r^2 + 4Rr} = \\ &= \sqrt{4R^2 + 8Rr + 4r^2} = 2(R+r).\end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

$$\sum IA = \sum \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} \stackrel{AG}{\geq} r \cdot 3 \sqrt[3]{\prod \frac{1}{\sin \frac{A}{2}}} = \frac{3r}{\sqrt[3]{\frac{r}{4R}}} = 3r \sqrt[3]{\frac{4R}{r}} \stackrel{Euler}{\geq} 3r \sqrt[3]{8} = 6r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2). In $\triangle ABC$ holds

$$12r^2 \leq \sum IA^2 \leq \frac{3R^3}{2r}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$\begin{aligned}\sum IA^2 &= \sum \frac{r^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} = \sum \frac{r^2}{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} = r^2 \sum \frac{bc}{(p-b)(p-c)} = r^2 \cdot \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{r^2} = \\ &= p^2 + r^2 - 8Rr \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} 4R^2 + 4Rr + 3r^2 + r^2 - 8Rr = 4R^2 - 4Rr + 4r^2 = 4(R^2 - Rr + r^2) \stackrel{\text{Euler}}{\leq} \\ &\stackrel{\text{Euler}}{\leq} 4 \cdot \frac{3R^3}{8r} = \frac{3R^3}{2r}\end{aligned}$$

Am folosit mai sus: $\sum \frac{bc}{(p-b)(p-c)} = \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{r^2}.$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

$$\sum IA^n \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{\left(\sum IA\right)^n}{3^{n-1}} \stackrel{\text{Lema}}{\geq} \frac{(6r)^n}{3^{n-1}} = 3(2r)^n.$$

Lema

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum IA \geq 6r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1448.

O.VIII.592. If $a, b, c > 0$ then

$$\text{a). } \sum \frac{a}{a^2 + 4} + \frac{1}{16} \sum a^2 \geq \frac{1}{4} \sum a.$$

$$\text{b). } \sum \frac{a}{b^2 + 4} + \frac{1}{16} \sum ab \geq \frac{1}{4} \sum a.$$

RMT 1/2026, Gheorghe Stoica, Petroșani

Soluție.

a).

Lema.

If $a > 0$ then

$$\frac{a}{a^2+4} + \frac{a^2}{16} \geq \frac{a}{4}.$$

Demonstrație.

$$\frac{a}{a^2+4} + \frac{a^2}{16} \geq \frac{a}{4} \Leftrightarrow a^3 - 4a^2 + 4a \geq 0 \Leftrightarrow a(a-2)^2 \geq 0, \text{ cu egal pentru } a = 2.$$

Sumând $\frac{a}{a^2+4} + \frac{a^2}{16} \geq \frac{a}{4}$ obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 2$.

b)

Lema.

If $a, b > 0$ then

$$\frac{a}{b^2+4} + \frac{ab}{16} \geq \frac{a}{4}.$$

Demonstrație.

$$\frac{a}{b^2+4} + \frac{ab}{16} \geq \frac{a}{4} \Leftrightarrow b^3 - 4b^2 + 4b \geq 0 \Leftrightarrow b(b-2)^2 \geq 0, \text{ cu egal pentru } b = 2.$$

Sumând $\frac{a}{b^2+4} + \frac{ab}{16} \geq \frac{a}{4}$ obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 2$.

Problema1449.

If $x, y, z > 0$ then

$$\sum \frac{x^2}{y} \geq \sqrt{9 \sum x^2 - 6 \sum xy}.$$

RMM 5/2020, Rahim Shahbazov, Azerbaijan

Soluție.**Lema.**

If $x, y, z > 0$ then

$$\sum \frac{x^2}{y} \geq \frac{6 \sum x^2 - (\sum x)^2}{\sum x}.$$

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = \sum x, q = \sum xy, r = xyz$.

$$LHS = \sum \frac{x^2}{y} \stackrel{\text{Lema}}{\geq} \frac{6\sum x^2 - (\sum x)^2}{\sum x} \stackrel{(1)}{\geq} \sqrt{9\sum x^2 - 6\sum xy} = RHS,$$

$$\text{unde } \frac{5p^2 - 12q}{p} \geq \sqrt{9(p^2 - 2q) - 6q} \Leftrightarrow \frac{5p^2 - 12q}{p} \geq \sqrt{9p^2 - 24q} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(5p^2 - 12q)^2}{p^2} \geq 9p^2 - 24q \Leftrightarrow p^4 + 9q^2 - 6p^2q \geq 0 \Leftrightarrow (p^2 - 3q)^2 \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z$.

Problema 1450.

IX.622. In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a}{3b + 3c - a} \geq \frac{3}{5}.$$

RMT 1/2026, Dan Bărbosu, Monica Huminiuc, Baia Mare

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a}{3b + 3c - a} = \sum \frac{a^2}{3ab + 3ac - a^2} \stackrel{CS}{\geq} \frac{(\sum a)^2}{\sum (3ab + 3ac - a^2)} = \frac{\sum a^2 + 2\sum ab}{6\sum ab - \sum a^2} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{3}{5} = RHS,$$

$$\text{unde } \frac{\sum a^2 + 2\sum ab}{6\sum ab - \sum a^2} \geq \frac{3}{5} \Leftrightarrow \sum a^2 \geq \sum ab \Leftrightarrow \sum (a - b)^2 \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

If $\lambda \geq 1$ then in $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a}{\lambda b + \lambda c - a} \geq \frac{3}{2\lambda - 1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a}{\lambda b + \lambda c - a} = \sum \frac{a^2}{\lambda ab + \lambda ac - a^2} \stackrel{CS}{\geq} \frac{(\sum a)^2}{\sum (\lambda ab + \lambda ac - a^2)} = \frac{\sum a^2 + 2\sum ab}{2\lambda \sum ab - \sum a^2} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{3}{2\lambda - 1} = RHS,$$

$$\text{unde } \frac{\sum a^2 + 2\sum ab}{2\lambda \sum ab - \sum a^2} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{3}{2\lambda - 1} \Leftrightarrow 2(\lambda + 1)\sum a^2 \geq 2(\lambda + 1)\sum ab \Leftrightarrow 2(\lambda + 1)\sum (a - b)^2 \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1451.

VII.628.If $a, b, c > \frac{1}{2}$ then

$$\prod \left(a^2 + \frac{1}{2b-1} \right) \geq 8.$$

RMT 1/2026, Florin Rotaru, Focșani

Soluție.

$$LHS = \prod \left(a^2 + \frac{1}{2b-1} \right) \stackrel{Medii}{\geq} \prod 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{2b-1}} = 8\prod \sqrt{\frac{a^2}{2a-1}} \stackrel{SOS}{\geq} 8\prod \sqrt{1} = 8 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Remarcă.

If $a^n, b^n, c^n > \frac{1}{2}$ and $n \in \mathbf{N}$ then

$$\prod \left(a^{2n} + \frac{1}{2b^n-1} \right) \geq 8.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n = 0$ se obține egalitatea $8 = 8$.

În continuare, fie $n \in \mathbf{N}^*$.

$$LHS = \prod \left(a^{2n} + \frac{1}{2b^n-1} \right) \stackrel{Medii}{\geq} \prod 2\sqrt{a^{2n} \cdot \frac{1}{2b^n-1}} = 8\prod \sqrt{\frac{a^{2n}}{2a^n-1}} \stackrel{SOS}{\geq} 8\prod \sqrt{1} = 8 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Problema1452.

In $\triangle ABC$ with $\max\{A, B, C\} < 120^\circ$ and T is Torricelli point of $\triangle ABC$ holds

$$(TA + TB + TC)^2 \leq ab + bc + ca.$$

RMM 3/2026, Nguyen Viet Hung, Vietnam

Soluție.**Lema.**

In $\triangle ABC$ holds

$$TA + TB + TC = \sqrt{\frac{\sum a^2 + 4S\sqrt{3}}{2}}.$$

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{\sum a^2 + 4S\sqrt{3}}{2} \leq \sum ab \Leftrightarrow \sum a^2 + 4S\sqrt{3} \leq 2\sum ab, \text{ vezi } 4S\sqrt{3} \leq \sum ab, \text{ (Gordon).}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

If T is Torricelli point of $\triangle ABC$ holds

$$(TA + TB + TC)^2 \geq 4\sqrt{3}F.$$

Marin Chirciu

Lema

In $\triangle ABC$, T -Toricelli point, then

$$\sum TB \cdot TC = \frac{4S}{\sqrt{3}}.$$

Demonstrație

In $\triangle ABC$, T -Toricelli point, then $m(\angle ATB) = m(\angle BTC) = m(\angle CTA) = 120^\circ$.

$$\text{Obținem } [ATB] = \frac{1}{2} TA \cdot TB \cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} TA \cdot TB.$$

$$\text{Avem } [ABC] = [ATB] + [BTC] + [CTA] \Leftrightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4} TA \cdot TB + \frac{\sqrt{3}}{4} TB \cdot TC + \frac{\sqrt{3}}{4} TC \cdot TA \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4S = \sqrt{3} \sum TB \cdot TC \Leftrightarrow \sum TB \cdot TC = \frac{4S}{\sqrt{3}}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț:

$$(TA + TB + TC)^2 \stackrel{SOS}{\geq} 3 \sum TB \cdot TC \stackrel{Lema}{\geq} 3 \cdot \frac{4S}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}S.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1453.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^2}{r_b + r_c} = 2[I_a I_b I_c] - 4[ABC].$$

RMM 3/2026, Mehmet Şahin, Turkey

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^2}{r_b + r_c} = 2(2R - r).$$

$$A[I_a I_b I_c] = \frac{abcF}{2r^2 p}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^2}{h_b + h_c} \leq \sum \frac{a^2}{r_b + r_c}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

In $\triangle ABC$ holds

$$\sum \frac{a^2}{h_b + h_c} = \frac{4R(p^2 - r^2 - Rr)}{p^2 + r^2 + 2Rr}.$$

$$\sum \frac{a^2}{r_b + r_c} = 2(2R - r).$$

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{4R(p^2 - r^2 - Rr)}{p^2 + r^2 + 2Rr} \leq 2(2R - r) \Leftrightarrow 2R(p^2 - r^2 - Rr) \leq (2R - r)(p^2 + r^2 + 2Rr) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2 \leq 6R^2 + 2Rr - r^2, \text{ care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen } p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2.$$

Rămâne să arătăm că:

$$4R^2 + 4Rr + 3r^2 \leq 6R^2 + 2Rr - r^2 \Leftrightarrow R^2 - Rr - 2r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R - 2r)(R + r) \geq 0, \text{ vezi } R \geq 2r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1304.

VII.623. a). Determinați $x \in \mathbb{N}$ pentru care

$$\sqrt{x(x+n^2)} \leq x+n, \forall x \geq 0.$$

b). Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

$$\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 4x} \leq 2x + 3.$$

Ionel Tudor, Călugăreni, RMT-4/2025

Soluție.

$$a). \sqrt{x(x+n^2)} \leq x+n \Leftrightarrow x(x+n^2) \leq (x+n)^2 \Leftrightarrow n(1-x) \geq -nx \Leftrightarrow n \in \{0, 1, 2\}.$$

b). Inecuația are sens pentru $x \geq 0$.

$$\text{Folosind a)} \Rightarrow \sqrt{x(x+1^2)} + \sqrt{x(x+2^2)} \leq (x+1) + (x+2) \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Deducem că $x \in [0, \infty)$ este soluția inecuației.

Problema1454.

Fie $f(x) = 1 + \cos nx, n \in \mathbb{N}^*$.

Să se calculeze:

a). $\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{1}{f(x)} dx.$

b). $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{n}}} xf(x^2) dx.$

c). Să se studieze monotonia funcției $F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, F(x) = x \int_0^{\frac{x}{n}} f(t) dt.$

Test-12C,3/2009, Marin Chirciu

Soluție.

a). $\frac{1}{n}.$

b). $\frac{\pi}{2n}.$

c). F este strict crescătoare pe $(0, \infty)$ și F este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0).$

Problema1455.

Fie $f(x) = \ln(n + \sin^2 x), n \in \mathbf{N}^*.$

Să se calculeze:

a). $\int_0^{2\pi} e^{f(x)} dx.$

b). $\int_0^{\pi} f(x) \sin x dx.$

c). derivata funcției $g: (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x} f(t) dt.$

Test-12C,3/2009, Marin Chirciu

Soluție.

a). $(2n+1)\pi.$

$$b). 2 \ln n - 4 - 2\sqrt{n+1} \ln \frac{(\sqrt{n+1}-1)^2}{2}.$$

$$c). g'(x) = \frac{\ln(n+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Problema 1456.

Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ două matrice astfel încât $AB = \begin{pmatrix} 2013 & 1 \\ 2014 & 1 \end{pmatrix}$.

Demonstrați că matricea BA este inversabilă și

$$BA - (BA)^{-1} = 2014 \cdot I_2$$

OL-2014-Dâmbovița, GM 2013

Soluție.

1). $\det(AB) = -1, \det(BA) = \det(AB) = -1 \neq 0 \Rightarrow A, B, BA$ inversabile.

2). $Tr(AB) = 2013 + 1 = 2014$. Folosim relația Hamilton-Cayley:

$$(AB)^2 - Tr(AB) \cdot (AB) + \det(AB) \cdot I_2 = O_2 \Leftrightarrow (AB)^2 - 2014 \cdot (AB) - I_2 = O_2.$$

$$(AB)^2 - 2014 \cdot (AB) - I_2 = O_2 \Leftrightarrow A^{-1} \left[(AB)^2 - 2014 \cdot (AB) - I_2 \right] B^{-1} = O_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow BA - 2014I_2 - A^{-1}B^{-1} = O_2 \text{ și } A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1} \Rightarrow BA - 2014I_2 - (BA)^{-1} = O_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow BA - (BA)^{-1} = 2014 \cdot I_2$$

Remarcă.

Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ două matrice astfel încât $AB = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda+1 & 1 \end{pmatrix}$.

Demonstrați că matricea BA este inversabilă și

$$BA - (BA)^{-1} = (\lambda+1) \cdot I_2$$

Marin Chirciu

Soluție.

1). $\det(AB) = -1, \det(BA) = \det(AB) = -1 \neq 0 \Rightarrow A, B, BA$ inversabile.

2). $Tr(AB) = \lambda + 1$. Folosim relația Hamilton-Cayley:

$$(AB)^2 - Tr(AB) \cdot (AB) + \det(AB) \cdot I_2 = O_2 \Leftrightarrow (AB)^2 - (\lambda + 1) \cdot (AB) - I_2 = O_2.$$

$$(AB)^2 - (\lambda + 1) \cdot (AB) - I_2 = O_2 \Leftrightarrow A^{-1} \left[(AB)^2 - (\lambda + 1) \cdot (AB) - I_2 \right] B^{-1} = O_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow BA - (\lambda + 1)I_2 - A^{-1}B^{-1} = O_2 \text{ și } A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1} \Rightarrow BA - (\lambda + 1)I_2 - (BA)^{-1} = O_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow BA - (BA)^{-1} = (\lambda + 1) \cdot I_2$$

Problema 1457.

Să se rezolve ecuația

$$X^3 - 4X^2 + 5X = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

în mulțimea matricelor singulare din $M_2(\mathbf{R})$.

OL-2014-Brașov, Sorina Stoian, Brașov

Soluție.

Avem $\det(X) = 0$.

Notăm $u = Tr(X) \in \mathbf{R} \Rightarrow X^2 = uX$, vezi relația Hamilton-Cayley.

Rezultă $X^3 - 4X^2 + 5X = (u^2 - 4u + 5)X$.

Ecuația se scrie:

$$(u^2 - 4u + 5)X = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \frac{1}{u^2 - 4u + 5} \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Avem } u = Tr(X) = x_{11} + x_{22} = 10 \cdot \frac{1}{u^2 - 4u + 5} + 10 \cdot \frac{1}{u^2 - 4u + 5} = \frac{20}{u^2 - 4u + 5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \frac{20}{u^2 - 4u + 5} \Leftrightarrow u(u^2 - 4u + 5) = 20 \Leftrightarrow u^3 - 4u^2 + 5u - 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (u - 4)(u^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow u = 4.$$

$$\text{Din } X = \frac{1}{u^2 - 4u + 5} \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}, u = 4 \Rightarrow X = \frac{1}{4^2 - 4 \cdot 4 + 5} \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Deducem } X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarcă.

1). Să se rezolve ecuația

$$X^3 - \lambda X^2 + (\lambda + 1)X = \begin{pmatrix} 2n & 4n \\ n & 2n \end{pmatrix}$$

în mulțimea matricelor singulare din $M_2(\mathbf{R})$, unde $\lambda > 0, 2n = \lambda(\lambda + 1)$.

Soluție.

Avem $\det(X) = 0$.

Notăm $u = \text{Tr}(X) \in \mathbf{R} \Rightarrow X^2 = uX$, vezi relația Hamilton – Cayley.

Rezultă $X^3 - \lambda X^2 + (\lambda + 1)X = (u^2 - \lambda u + \lambda + 1)X$.

Ecuația se scrie:

$$(u^2 - \lambda u + \lambda + 1)X = \begin{pmatrix} 2n & 4n \\ n & 2n \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \frac{1}{u^2 - \lambda u + \lambda + 1} \begin{pmatrix} 2n & 4n \\ n & 2n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Avem } u = \text{Tr}(X) = x_{11} + x_{22} = 2n \cdot \frac{1}{u^2 - \lambda u + \lambda + 1} + 2n \cdot \frac{1}{u^2 - \lambda u + \lambda + 1} = \frac{2n}{u^2 - \lambda u + \lambda + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \frac{2n}{u^2 - \lambda u + \lambda + 1} \Leftrightarrow u(u^2 - \lambda u + \lambda + 1) = 2n \Leftrightarrow u^3 - \lambda u^2 + (\lambda + 1)u - 2n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (u - \lambda)(u^2 + \lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow u = \lambda.$$

$$\text{Din } X = \frac{1}{u^2 - \lambda u + \lambda + 1} \begin{pmatrix} 2n & 4n \\ n & 2n \end{pmatrix}, u = \lambda \Rightarrow$$

$$X = \frac{1}{\lambda^2 - \lambda \cdot \lambda + \lambda + 1} \begin{pmatrix} 2n & 4n \\ n & 2n \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda + 1} \begin{pmatrix} 2n & 4n \\ n & 2n \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda + 1} \begin{pmatrix} \lambda(\lambda + 1) & 2\lambda(\lambda + 1) \\ \frac{1}{2}\lambda(\lambda + 1) & \lambda(\lambda + 1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda \\ \frac{1}{2}\lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{Deducem } X = \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda \\ \frac{1}{2}\lambda & \lambda \end{pmatrix}.$$

2). Să se rezolve ecuația

$$X^3 - 2\lambda X^2 + (2\lambda + 1)X = \begin{pmatrix} 2n & 4n \\ n & 2n \end{pmatrix}$$

în mulțimea matricelor singulare din $M_2(\mathbf{R})$, unde $\lambda > 0, n = \lambda(2\lambda + 1)$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Avem $\det(X) = 0$.

Notăm $u = \text{Tr}(X) \in \mathbf{R} \Rightarrow X^2 = uX$, vezi relația Hamilton–Cayley.

Rezultă $X^3 - 2\lambda X^2 + (2\lambda + 1)X = (u^2 - 2\lambda u + 2\lambda + 1)X$.

Ecuația se scrie:

$$(u^2 - 2\lambda u + 2\lambda + 1)X = \begin{pmatrix} 2n & 4n \\ n & 2n \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \frac{1}{u^2 - 2\lambda u + 2\lambda + 1} \begin{pmatrix} 2n & 4n \\ n & 2n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Avem } u = \text{Tr}(X) = x_{11} + x_{22} = 2n \cdot \frac{1}{u^2 - \lambda u + \lambda + 1} + 2n \cdot \frac{1}{u^2 - \lambda u + \lambda + 1} = \frac{2n}{u^2 - \lambda u + \lambda + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \frac{2n}{u^2 - 2\lambda u + 2\lambda + 1} \Leftrightarrow u(u^2 - 2\lambda u + 2\lambda + 1) = 2n \Leftrightarrow u^3 - 2\lambda u^2 + (2\lambda + 1)u - 2n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (u - 2\lambda)(u^2 + 2\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow u = 2\lambda.$$

$$\text{Din } X = \frac{1}{u^2 - 2\lambda u + 2\lambda + 1} \begin{pmatrix} 2n & 4n \\ n & 2n \end{pmatrix}, u = 2\lambda \Rightarrow$$

$$X = \frac{1}{4\lambda^2 - 2\lambda \cdot 2\lambda + 2\lambda + 1} \begin{pmatrix} 2n & 4n \\ n & 2n \end{pmatrix} = \frac{1}{2\lambda + 1} \begin{pmatrix} 2n & 4n \\ n & 2n \end{pmatrix} = \frac{1}{2\lambda + 1} \begin{pmatrix} 2\lambda(2\lambda + 1) & 4\lambda(2\lambda + 1) \\ \lambda(2\lambda + 1) & 2\lambda(2\lambda + 1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\lambda & 4\lambda \\ \lambda & 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{Deducem } X = \begin{pmatrix} 2\lambda & 4\lambda \\ \lambda & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Problema 1458.

Fie $A, B \in M_2(\mathbf{Q})$ astfel încât $AB = BA$, $\det A = -3$ și $\det(A + \sqrt{3} \cdot B) = 0$. Calculați

$$\det(A^2 - AB + B^2).$$

OL-Constanța-2014, GM-2013

Soluție.

Considerăm polinomul

$$\begin{aligned} P(x) &= \det(A + xB) = \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} a_{11} + xb_{11} & a_{12} + xb_{12} \\ a_{21} + xb_{21} & a_{22} + xb_{22} \end{pmatrix} = \\ &= (a_{11} + xb_{11})(a_{22} + xb_{22}) - (a_{21} + xb_{21})(a_{12} + xb_{12}) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + x^2(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = \\ &+ x(a_{11}b_{22} - b_{12}a_{21}) + x(b_{11}a_{22} - a_{12}b_{21}) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + x^2(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) + \\ &+ x(a_{11}b_{22} - b_{12}a_{21}) + x(b_{11}a_{22} - a_{12}b_{21}) = \det A + x^2 \det B + x(a_{11}b_{22} - b_{12}a_{21}) + x(b_{11}a_{22} - a_{12}b_{21}) = \\ &= x^2 - 3. \end{aligned}$$

$$\text{Fie } \varepsilon \in \mathbf{C} - \mathbf{R}, \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0 \Rightarrow \varepsilon^3 = 1.$$

$$\text{Din } AB = BA \Rightarrow A^2 - AB + B^2 = (A + \varepsilon B)(A + \varepsilon^2 B) = P(\varepsilon)P(\varepsilon^2).$$

$$P(\varepsilon)P(\varepsilon^2) = 13 \Rightarrow \det(A^2 - AB + B^2) = 13.$$

Problema 1459.

Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = \sqrt{6}$ și $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$, $n \geq 1$.

OL-2014-Buzău

Soluție.

Șirul este strict crescător și mărginit superior de 3, inducție matematică.

Deducem că șirul este convergent, deci are limită finită.

Trecând la limită în relația de recurență obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$.

Remarcă.

Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = \sqrt{\lambda}$, $\lambda > 1$ și $x_{n+1} = \sqrt{\lambda + (\lambda - 1)x_n}$, $n \geq 1$.

Marin Chirciu

Soluție.

Șirul este strict crescător și mărginit superior de λ , inducție matematică.

Deducem că șirul este convergent, deci are limită finită.

Trecând la limită în relația de recurență obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lambda$.

Problema 1460.

VIII.626. Solve for naturals

$$\frac{(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5}{(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3} = 10.$$

RMT 1/2026, Aurel Doboșan, Lugoj

Soluție.

Folosim:

$$(x+y+z)^5 = x^5 + y^5 + z^5 + 5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx) \text{ și}$$

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x).$$

Ecuția se scrie:

$$\frac{5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)}{3(x+y)(y+z)(z+x)} = 10 \Leftrightarrow \frac{5(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)}{3} = 10$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 6 \Leftrightarrow (x, y, z) = (1, 1, 1).$$

Remarcă.

1). Let be $\lambda \in \mathbb{N}^*$ fixed. Solve for naturals

$$\frac{(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5}{(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3} = 10\lambda^2.$$

Soluție.

Folosim:

$$(x+y+z)^5 = x^5 + y^5 + z^5 + 5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx) \text{ și}$$

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x).$$

Ecuația se scrie:

$$\frac{5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)}{3(x+y)(y+z)(z+x)} = 10\lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{5(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)}{3} = 10\lambda^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx = 6\lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$(x, y, z) = (\lambda, \lambda, \lambda).$$

2). Let be $\lambda \in \mathbb{N}^*$ fixed. Solve for naturals

$$\frac{(x+y)^5 - x^5 - y^5}{(x+y)^3 - x^3 - y^3} = 5\lambda^2.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$\text{Folosim: } (x+y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy(x+y)(x^2+xy+y^2) \text{ și } (x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y).$$

Ecuația se scrie:

$$\frac{5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)}{3xy(x+y)} = 5\lambda^2 \Leftrightarrow \frac{5(x^2+xy+y^2)}{3} = 5\lambda^2 \Leftrightarrow x^2+xy+y^2 = 3\lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$(x, y) = (\lambda, \lambda).$$

Problema1462.

X.623. Solve for reals

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{2x-7} + \sqrt{18-3x} = 3\sqrt{3}.$$

RMT 1/2026, Gheorghe Stoica, Petroșani

Soluție.

$$\text{Domeniul de definiție este } D = \left[\frac{7}{2}, 6 \right].$$

$$LHS = \sqrt{x-2} + \sqrt{2x-7} + \sqrt{18-3x} \stackrel{CBS}{\leq} \sqrt{3(x-2+2x-7+18-3x)} = 3\sqrt{3} = RHS,$$

cu egal pentru $x-2=2x-7=18-3x \Leftrightarrow x=5$.

Dedocem că ecuația admite soluția unică $x=5$.

Remarcă.

1). Solve for reals

$$\sqrt{x-a} + \sqrt{mx-a+k(1-m)} + \sqrt{km+2k-a-(m+1)x} = 3\sqrt{k-a}.$$

Cazul $m=2$.

2). Solve for reals

$$\sqrt{x-a} + \sqrt{2x-a-k} + \sqrt{4k-a-3x} = 3\sqrt{k-a}.$$

Cazul $m=2, a=2, k=\lambda \geq 2$.

3). Let be $\lambda \geq 2$ fixed. Solve for reals

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{2x-2-\lambda} + \sqrt{4\lambda-2-3x} = 3\sqrt{\lambda-2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că ecuația admite soluția unică $x=\lambda$.

Problema1463.

O.VIII.588. If $a, b, c \in \mathbf{R}^*$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ then

$$\frac{1}{a^{2025}} + \frac{1}{b^{2025}} + \frac{1}{c^{2025}} = \frac{1}{a^{2025} + b^{2025} + c^{2025}}.$$

RMT 1/2026, Aurel Doboșan, Lugoj

Soluție.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0.$$

$$1). \text{ Dacă } a+b=0 \Leftrightarrow b=-a \Rightarrow \frac{1}{a^{2025}} + \frac{1}{(-a)^{2025}} + \frac{1}{c^{2025}} = \frac{1}{a^{2025} + (-a)^{2025} + c^{2025}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{c^{2025}} = \frac{1}{c^{2025}}.$$

$$2). \text{ Dacă } b+c=0 \Leftrightarrow c=-b \Rightarrow \frac{1}{a^{2025}} + \frac{1}{b^{2025}} + \frac{1}{(-a)^{2025}} = \frac{1}{a^{2025} + b^{2025} + (-a)^{2025}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b^{2025}} = \frac{1}{b^{2025}}.$$

$$3). \text{ Dacă } c+a=0 \Leftrightarrow c=-a \Rightarrow \frac{1}{a^{2025}} + \frac{1}{(-a)^{2025}} + \frac{1}{c^{2025}} = \frac{1}{a^{2025} + (-a)^{2025} + c^{2025}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b^{2025}} = \frac{1}{b^{2025}}.$$

Remarcă

If $a, b, c \in \mathbf{R}^*$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ and $n \in \mathbf{N}$, n impar, then

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}.$$

Dezvoltare, Marin Chirciu

Soluție.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0.$$

$$1). \text{ Dacă } a+b=0 \Leftrightarrow b=-a \Rightarrow \frac{1}{a^n} + \frac{1}{(-a)^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + (-a)^n + c^n} \Leftrightarrow \frac{1}{c^n} = \frac{1}{c^n}.$$

$$2). \text{ Dacă } b+c=0 \Leftrightarrow c=-b \Rightarrow \frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{(-a)^n} = \frac{1}{a^n + b^n + (-a)^n} \Leftrightarrow \frac{1}{b^n} = \frac{1}{b^n}.$$

$$3). \text{ Dacă } c+a=0 \Leftrightarrow c=-a \Rightarrow \frac{1}{a^n} + \frac{1}{(-a)^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + (-a)^n + c^n} \Leftrightarrow \frac{1}{b^n} = \frac{1}{b^n}.$$

Problema1464.

P1). If $a, b, c, x, y, z > 0$ then

$$\sum (b+c)x \geq 2\sqrt{\sum bc \sum yz}.$$

Mathematical Reflections 3/2008 , Tran Quang Hung, Pham Huu Duc

Soluție.

Folosind $\sum (b+c)x = \sum a \sum x - \sum ax$ obținem

$$\begin{aligned} LHS &= \sum (b+c)x = \sum a \sum x - \sum ax = \sqrt{(\sum a)^2 (\sum x)^2} - \sum ax = \\ &= \sqrt{(\sum a^2 + 2\sum ab)(\sum x^2 + 2\sum xy)} - \sum ax \stackrel{CBS}{\geq} \sqrt{\sum a^2 \sum x^2} + \sqrt{2\sum ab \cdot 2\sum xy} - \sum ax = \\ &= \sqrt{\sum a^2 \sum x^2} - \sum ax + 2\sqrt{\sum ab \sum xy} \stackrel{CBS}{\geq} 2\sqrt{\sum ab \sum xy}. \end{aligned}$$

Remarcă.

If $a, b, c, x, y, z > 0$ then

$$\sum \frac{x}{y+z} a \geq \sqrt{3\sum bc}.$$

Soluție.

În P1 înlocuim (x, y, z) cu $\left(\frac{x}{y+z}, \frac{y}{z+x}, \frac{z}{x+y}\right)$ and $\sum \frac{yz}{(x+y)(x+z)} \geq \frac{3}{4}.$

Remarcă.

P2). Let P be a point in the plane of $\triangle ABC$, then

$$\sum \frac{PA \cdot PB}{ab} \geq 1.$$

Hayashi Inequality

Soluție.

Vezi numere complexe-Puncte remarcabile în triunghi-Ex2.14-pag50-Ed.Paralela 45.

Remarcă.

Let P be a point in the plane of $\triangle ABC$ and $x, y, z > 0$, then

$$\sum (y+z) \frac{PA}{a} \geq 2\sqrt{\sum xy}.$$

Soluție.

În P1 înlocuim (x, y, z) cu $\left(\frac{PA}{a}, \frac{PB}{b}, \frac{PC}{c}\right) \Rightarrow$

$$\sum (y+z) \frac{PA}{a} \geq 2 \sqrt{\sum xy \sum \frac{PA \cdot PB}{ab}} \stackrel{\text{Hayashi}}{\geq} 2 \sqrt{\sum xy \cdot 1} = 2 \sqrt{\sum xy}.$$

Remarcă.

1). Let P be a point in the plane of $\triangle ABC$, then

$$\sum \frac{PA}{a} \geq \sqrt{3}.$$

Soluție.

Pun $x = y = z = 1$ în $\sum (y+z) \frac{PA}{a} \geq 2 \sqrt{\sum xy}$.

2). Let P be a point in the plane of $\triangle ABC$, then

$$\sum a \cdot PA \geq 4F.$$

Soluție.

Pun $(x, y, z) = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}, \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right)$ în $\sum (y+z) \frac{PA}{a} \geq 2 \sqrt{\sum xy} \Rightarrow$

$$\sum xy = \frac{2 \sum b^2 c^2 - \sum a^4}{4} = \frac{16F^2}{4} = 4F^2.$$

Rezultă $\sum (y+z) \frac{PA}{a} = \sum a^2 \cdot \frac{PA}{a} = \sum a \cdot PA \geq 2 \sqrt{\sum xy} = 2 \sqrt{4F^2} = 4F.$

3). Let P be a point in the plane of $\triangle ABC$, then

$$\sum PA \geq 6r.$$

Soluție.

Pun $(x, y, z) = (p-a, p-b, p-c)$ în $\sum (y+z) \frac{PA}{a} \geq 2 \sqrt{\sum xy} \Rightarrow$

$$\sum xy = \sum (p-a)(p-b) = r(4R+r).$$

Rezultă

$$\sum (y+z) \frac{PA}{a} = \sum (p-b+p-c) \frac{PA}{a} = \sum a \cdot \frac{PA}{a} = \sum PA \geq 2 \sqrt{\sum xy} = 2 \sqrt{r(4R+r)} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} 6r.$$

4). Let P be a point in the plane of $\triangle ABC$ and $n \in \mathbb{N}$, then

$$\sum (PA)^n \geq 6r.$$

Soluție.

Pentru $n = 0$ se obține egalitatea $3 = 3$.

Pentru $n = 1$ vezi Lema.

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum (PA)^n \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{\left(\sum PA\right)^n}{3^{n-1}} \stackrel{\text{Lema}}{\geq} \frac{(6r)^n}{3^{n-1}} = 3 \cdot (2r)^n = RHS.$$

Lema.

Let P be a point in the plane of $\triangle ABC$, then

$$\sum PA \geq 6r.$$

Remarcă.

Let P be a point in the plane of $\triangle ABC$ and $n \in \mathbb{N}$, then

$$\sum \left(\frac{PA}{a}\right)^n \geq 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n.$$

Soluție.

Pentru $n = 0$ se obține egalitatea $3 = 3$.

Pentru $n = 1$ vezi Lema.

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum \left(\frac{PA}{a}\right)^n \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{PA}{a}\right)^n}{3^{n-1}} \stackrel{\text{Lema}}{\geq} \frac{(\sqrt{3})^n}{3^{n-1}} = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n = RHS.$$

Lema.

Let P be a point in the plane of $\triangle ABC$, then

Soluție.

$$\text{Pun } x = y = z = 1 \text{ în } \sum (y+z) \frac{PA}{a} \geq 2\sqrt{\sum xy}.$$

Remarcă.

Let P be a point in the plane of $\triangle ABC$ and $n \in \mathbb{N}$, then

$$\sum (a \cdot PA)^n \geq 3 \left(\frac{4F}{3} \right)^n.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n = 0$ se obține egalitatea $3 = 3$.

Pentru $n = 1$ vezi Lema.

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum (a \cdot PA)^n \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{\left(\sum a \cdot PA \right)^n}{3^{n-1}} \stackrel{\text{Lema}}{\geq} \frac{(4F)^n}{3^{n-1}} = 3 \left(\frac{4F}{3} \right)^n = RHS$$

Lema.

Let P be a point in the plane of $\triangle ABC$, then

$$\sum a \cdot PA \geq 4F.$$

Art10500

May 31, 2026

Bibliografie:

1. C.Năstăsescu, C.Niță, M.Brandiburu, D. Joița, Exerciții de algebră, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1992.
2. O. Bottema, R. Z. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović și P. M. Vasić, „Geometric Inequalities”, Groningen 1969, Olanda.
3. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.
4. Marin Chirciu, Inegalități cu linii importante în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2018.
5. Marin Chirciu, Inegalități cu laturi și cu raze în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2017.
6. George Apostolopoulos, Greece, Mathematical Inequalities 2/2025.
7. Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 5/2026.
8. Tapas Das, India, RMM 5/2026.
9. Nguyen Van Hoa, Vietnam, Mathematical Inequalities 5/2026.
10. Crăciun Gheorghe, Ploiești, Mathematical Inequalities 5/2026.
11. Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 5/2026.
12. Mircea Lascu, Zalău, România Mathematical Reflections 3/2026.
13. Adil Abdullayev, Azerbaijan, RMM /2026.
14. Panagiotis Danousis, Greece, Math Atelier 5/2026.

15. Zaza Mzhavanadze, Georgia, RMM 5/2026.
16. D.M. Băținețu-Giurgiu, București, RMM 47/2025.
17. Titu Zvonaru, Sclipirea Minții Nr.36/2025, Q117.
18. Mihaly Bencze, Brașov, Octogon- April 2007.
19. Sanong Huayrerai, Math 5/2026.
20. Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Inequalities 2/2026.
21. Daniel Sitaru, Romania, RMM 5/2026.
22. Elton Papanikolla, MathOlymp, 5/2026.
23. Mehmet Şahin, Turkey, RMM 5/2026.
24. Mihaela Berindeanu, București, RMT 1/2026.
25. D. M. Băținețu-Giurgiu, București, RMT-4/2025.
26. Samuel Okpako, Math 5/2026.
27. Rahim Shahbazov, Azerbaijan, RMM 5/2020.
28. Dan Bărbosu, Baia Mare, RMT 1/2026.
29. Monica Huminiuc, Baia Mare RMT 1/2026.
30. Vasile Cârtoaje, Ploiești.
31. Gheorghe Stoica, Petroșani, RMT 1/2026.
32. Chew-Seong Cheong, Math 5/2026.
33. Concursul "Laurențiu Duican", Brașov, 5-7 mai 1994.
34. Pham Hun Duc Inequality.
35. RMM 4/2026, Vasilis Demetraskos, Greece.
36. OL-Maramureș-1993
37. Sarkhan Adgozalov, Georgia, RMM 2/2026
38. Concursul Sigma-2008.
39. OL-2014-Buzău.
40. Arkady Alt, USA, MathOlymp 2/2026.
41. OJ-Botoșani-1996.
42. Virgil Nicula, București, Concursul National "Laurențiu Duican", 2001, Brașov.
43. Do Thanh Tung, Vietnam, Mathematical Inequalities, 1/2026.
44. Elton Papanikolla, Greece, Math Olymp 5/2026.
45. Alfred Eckstein, Arad, Problema 25692 din GM12/2006.
46. Viorel Tudoran, Arad, Problema 25692 din GM12/2006.
47. D. Gheorghiu, București, Concursul National "Laurențiu Duican", 2001, Brașov.
48. Mihai Opincariu, Brad, Hunedoara, GM6-7-8/2012,.
49. Marin Stoica, Olt, OJ-1994-Argeș.
50. OL-Bihor-1996.
51. Aurel Doboșan, Lugoj, RMT-2/2026.
52. Kostas Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 1/2021.
53. Florin Pîrvănescu, Slatina, Concursul National "Laurențiu Duican", Mai 2001, Brașov.
54. Duy Hong, Vietnam, Mathematical Inequalities 5/2026.
55. Titu Andreesu, USA, Mathematical Reflections Nr.1/2026.
56. Anca Luculescu, Drăgășani, Concursul National "Laurențiu Duican", 2001, Brașov.
57. Cătălin Zîrnă, Constanța, OL-2014-Constanța.
58. Zaza Mzhavanadze, Georgia, RMM 5/2026.
59. Vasile Solovăstru, Feldru, Bistrița-Năsăud, Problema 25976 - GM3/2008.
60. Florin Rotaru, Focșani, RMT 1/2026.
61. Sorina Stoian, Brașov, mOL-2014-Brașov.
62. Tran Quang Hung, Mathematical Reflections 3/2008.
63. Hoang Le Nhat Thung, Vietnam, RMM 1/2026.
64. Pham Huu Duc Mathematical Reflections 3/2008.
65. Florian Dumitrel, Slatina, OJ-1994-Argeș.
66. Hayashi Inequality.

67. Sachin Mittal , Math Olympiads 5/2025.
68. Dorinel Anca, Mathematical Inequalities 5/2026.
69. Ionel Tudor, Călugăreni, RMT-2/2026.
70. OL-Mureș-1993.
71. OL-Dolj-1994.
72. OL-Mehedinți-1993.
73. OL-Tulcea-2007.
74. OL-Nemț-2007.
75. OL-2014-Dâmbovița.
76. OL-Bistrița-Năsăud-1997.
77. OL-Arad-2007.
78. OL-Alba-2007.
79. OL-Olt-2008.
80. Concursul "Gheorghe Țițeica" 2008.
81. J. Andersson, 1952.
82. R.R. Ianic.
83. Concursul "Trident"-Brăila-2007.
84. Concursul "Sinus"-Suceava-2007.
85. OL-Iași-2008.
86. Turkey NMO 2010.
87. Marin Chirciu, Inegalități algebrice 2, de inițiere la perf, Ed. Paralela 45, Pitești, 2021.
88. Marin Chirciu, Inegalități geometrice 2, inițiere și perf, Ed. Paralela 45, Pitești, 2021.
89. Marin Chirciu, Inegalități algebrice, de la inițiere la perf, Ed. Comper, Băbana, 2025.

Art 10500

1 iunie 2026