MateInfo.ro
MATEmatică şi INFOrmaţii din învăţământul ROmânesc
Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. februarie 2010

GENERALIZAREA UNOR INEGALITĂŢI

NECULAI STANCIU[1]

În cei 115 ani de apariţie neîntreruptă a Gazetei Matematice (1895 – 2010) în paginile acestei reviste cât şi în alte reviste din ţara noastră şi din străinătate s-au publicat mai multe inegalităţi , care permit evidenţierea unei clase (de inegalităţi)care au anumite proprietăţi commune.

În acest articol vom exemplifica utilitatea , eleganţa şi generalitatea folosirii conceptului matematic de funcţie convexă în demonstrarea unor inegalităţi.

Vom considera $f: D \to R$, o funcţie convexă pe mulţimea D.Pentru $\forall \lambda_i \in R^+$ cu $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \neq 0$ şi $a_i \in D$, $i = \overline{1,m}$ avem cunoscută inegalitatea lui *Jensen*

$$(1)\quad f\left(\frac{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j}{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j}\right) \leq \frac{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j f(a_j)}{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j}$$

care se poate demonstra uşor prin inducţie.

Dificultatea stabilirii unor inegalităţi prin folosire funcţiilor convexe constă în alegerea funcţiei convexe f şi a numerelor λ_i din inegalitatea (1).

Fie α_i, $\beta_i \in (0,\infty)$; p_i, q_i, $k_i \in R$ şi funcţiile $u_i : (0,\infty) \to R$ date de $u_i(x) = (\alpha_i x_i^{p_i} + \beta_i x_i^{q_i})^{k_i}$, $i = \overline{1,n}$.

Vom considera funcţia :

$$(2)\quad f(x) = \prod_{i=1}^{n} u_i(x)$$

Se arată prin inducţie că :

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x) u_i'(x), \text{ unde } A_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} u_j(x) \text{ şi}$$

$$f''(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x) u_i''(x) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{ij}(x) u_i'(x) u_j'(x), \text{ unde } B_{ij}(x) = \prod_{k=1, k\neq i,j} u_k(x).$$

Pe de altă parte avem :

$$u_i'(x) = k_i(\alpha_i x^{p_i} + \beta_i x^{q_i})^{k_i - 1}(\alpha_i p_i x^{p_i - 1} + \beta_i q_i x^{q_i - 1}),\ \forall i = \overline{1,n} \text{ şi}$$

$$u_i''(x) = k_i(k_i - 1)(\alpha_i x^{p_i} + \beta_i x^{q_i})^{k_i - 2}(\alpha_i p_i x^{p_i - 1} + \beta_i q_i x^{q_i - 1})^2 +$$
$$+ k_i(\alpha_i x^{p_i} + \beta_i x^{q_i})^{k_i - 1}(\alpha_i p_i (p_i - 1) x^{p_i - 2} + \beta_i q_i (q_i - 1) x^{q_i - 2}),\ \forall i = \overline{1,n}.$$

Fie

$$D = \left\{x \in (0,\infty) / (\alpha_i p_i x^{p_i - 1} + \beta_i q_i x^{q_i - 1}) > 0, (\alpha_i p_i (p_i - 1) x^{p_i - 2} + \beta_i q_i (q_i - 1) x^{q_i - 2} > 0, \forall i = \overline{1,n}\right\}$$

[1] Prof., Şc. ''George Emil Palade'' , Buzău

atunci $\forall x \in D$ rezultă că $f''(x) \geq 0$ şi prin urmare funcţia f este convexă pe D.
Din inegalitatea lui Jensen (1) se obţine:

(3) $\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i a_j^{p_i} + \beta_i a_j^{q_i})^{k_i} \geq m\prod_{i=1}^{n}\left[\alpha_i(\frac{a}{m})^{p_i} + \beta_i(\frac{a}{m})^{q_i}\right]^{k_i}$, unde $\sum_{j=1}^{m} a_j = a$ şi $\lambda_j = 1$,

$\forall \ j = \overline{1,m}$ cu $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = m$.

Dacă în inegalitatea (3) înlocuim $n = 1$, atunci $\forall \alpha, \beta \in (0, \infty)$ avem:

(4) $\sum_{j=1}^{m}(\alpha a_j^p + \beta a_j^q)^k \geq m\left[\alpha(\frac{a}{m})^p + \beta(\frac{a}{m})^q\right]^k$

Aplicaţii (ale inegalităţii (4))

În continuare, voi prezenta un set de inegalităţi din Gazeta Matematică care, au fost rezolvate la vremea respectivă prin alte metode.

1. Dacă în inegalitatea (4) înlocuim $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $k = 1$ rezultă :

(5) $\frac{\sum_{j=1}^{m} a_j^p}{m} \geq \frac{(\sum_{j=1}^{m} a_j)^p}{m^p}$, inegalitatea *Titu Andreescu*, care generalizează problema 8807 din G.M nr. 3 / 1968 autor *Iosif Bohler* şi problema 8785 din G.M nr. 3 / 1968 autor *N. Pantazi.*

2. Dacă în inegalitatea (5) $p = 2$, avem :

$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \geq \frac{a^2}{m}$, publicată în *Journal de mathematiques elementaires* în 1964 şi în G.M nr. 10 / 1964 problema 6579 .

3. Dacă în (4) înlocuim $a = 1$, $\alpha = \beta = 1$ şi $q = -1$ rezultă :

$\sum_{j=1}^{m}(a_j + \frac{1}{a_j})^k \geq \frac{(1+m^2)^k}{m^{k-1}}$, problema 8745 din G.M nr. 2 / 1968, autor *Liviu Pîrşan* (care este în legătură cu problema 7877, C.d *Skiliarski* , 1965, pag. 67)

4. Pentru $\alpha = 0$, $\beta = k = 1$, $q = -\frac{1}{s}$, $s \geq 2$, $s \in N$ obţinem:

$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt[s]{a_j}} \geq m\sqrt[s]{\frac{m}{a}}$, problema 8796 din G.M. nr. 3 / 1968 autor *Liviu Pîrşan* ,în legătură cu problemele 6641 din G.M. nr. 12 / 1964 autor *Cornel Popovici* , 8358 din G.M. nr. 7 / 1967 autor *Dan Stănescu* şi problema 8688 din G.M. nr. 1 / 1968.

În încheiere, pe baza ideilor prezentate, propunem cititorilor să rezolve următoarele probleme:

a) Fie $a_j > 0$, $\forall j = \overline{1,m}$ cu $\sum_{j=1}^{m} a_j = a$. Să se arate că :

$$\sum_{j=1}^{m} a_j^q (\alpha a_j^r + \beta) \geq \frac{a^q(\alpha a^r + \beta m^r)}{m^{q+r-1}}$$

(soluția se obține imediat dacă înlocuim în (4) $k = 1$ şi $p = q + r$)

b) Fie $a_j > 0$, $\forall j = \overline{1,m}$ cu $\sum_{j=1}^{m} a_j = a$. Să se arate că :

$$\sum_{j=1}^{m} a_j^q (a_j^r + 1) \geq \frac{a^q(a^r + m^r)}{m^{q+r-1}}$$

(soluția se obține imediat dacă înlocuim în a) $\alpha = \beta$)

c) Fie $a_j > 0$, $\forall j = \overline{1,m}$ cu $\sum_{j=1}^{m} a_j = a$. Să se arate că :

$$\sum_{j=1}^{m} a_j^q (a_j^r + 1)(a_1 a_2 ... a_m)^{-1} \geq (\frac{m}{a})^{m-q-r} + (\frac{m}{a})^{m-q}$$

(soluție. În inegalitatea a) înlocuim $\alpha = \beta = (a_1 a_2 ... a_m)^{-1}$ şi ținem seama că produsul a m numere reale strict pozitive, pentru care suma este constantă, este maxim atunci când numerele sunt egale între ele, adică

$a_1 a_2 ... a_m \leq (\frac{a}{m})^m$)

d) Fie $a_j > 0$, $\forall j = \overline{1,m}$. Să se arate că :

$\sum_{j=1}^{m} a_j^p (a_j^r + 1)(a_1 a_2 ... a_m)^{-1} \geq m^{m-q-r} + m^{m-q}$ (vezi G.M nr. 10 / 1968 , problema 9234, autor *Liviu Pîrşan*)

(soluție.rezultă imediat dacă înlocuim în d) $a = 1$).

BIBLIOGRAFIE

[1]. Gazeta matematică 1895 – 2010
*** www.gazetamatematica.net

MateInfo.ro
MATEmatică şi INFOrmaţii din învăţământul ROmânesc
Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. februarie 2010

Fibonacci numbers and nature. Divine proportion in art (architecture, music). Golden Section and human body

Roxana Mihaela Stanciu[1]

Fibonacci
(1175 -1240)

The purpose of the article is to describe connections are made between the Fibonacci numbers and the Golden Ratio, biological nature, and other examples. The contributions to Mathematics made by the thirteenh century Italian, Fibonacci is great.Unfortunately, not much is known about Fibonaccci's personal life.Representative connections are set as challenges to the reader.

We are considering both the originality and power of his methods, and the importance of his results, we are abundantly justified in ranking Leonardo of Pisa as the greatest genius in the field of number theory who appeared between the time of Diophantus and Fermat.

Fibonacci and the number of Gold

Golden ratio is an irrational number(1.618033 ...) can be defined in different ways but the most important concept associated with mathematic golden rule is Fibonacci's sequence. Dividing any number to its predecessor, is obtained about the number of gold. First they used were Egyptians, most of the pyramids being built to the number of gold. But the Greeks were the ones who called such, using

[1] **Department of IT, High School "Iolanda Bals Sötter" , Buzău, Romania**

it both in architecture and painting and sculpture. Moreover the number of gold is noted with Greek "phi" (φ),after Phidias. He built the Parthenon from this ratio gold. Let's start with an aesthetic problem. What is the "nice" division of a segment into two parts?
Ancient Greeks found an answer that they felt properly (theorists call "dynamic symmetry"). If the left segment we assign a length $u=1$, then the right will have a length $v=0.618...$ About a segment particionisati in this way say that such is divided into section, or division or the proportion of gold (divine). The idea is that: length u is the same part of length $(u+v)$, how length v is from the length u.
In other words:

$$\frac{u+v}{u}=\frac{u}{v}.$$

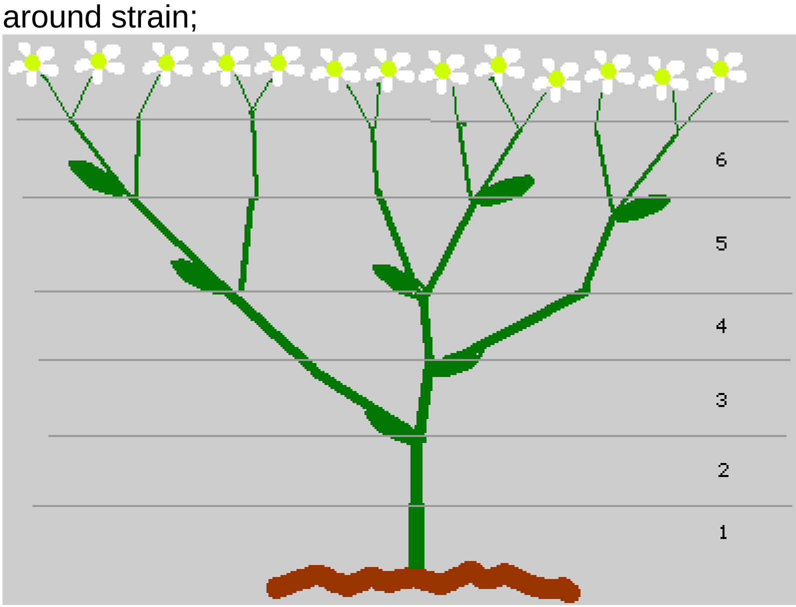
If we denoted $\varphi=\frac{u}{v}$, we see that $1+\frac{1}{\varphi}=1+\frac{v}{u}=\frac{u+v}{u}=\frac{u}{v}=\varphi$, so $\varphi^2-\varphi-1=0$.

Hence $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.6180339887...$ If suppose $u=1$, then

$v=\frac{u}{\varphi}=\frac{1}{\varphi}=\varphi-1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0.6180339887...$ Say now that, φ it is closely related to Fibonacci's sequence. This is a remarkable idea of mathematics.

Fibonacci and plants

Plants do not have to know how to Fibonacci numbers, but develops most effective.
a. many plants have leaves ordered arrangement in a Fibonacci sequence around strain;



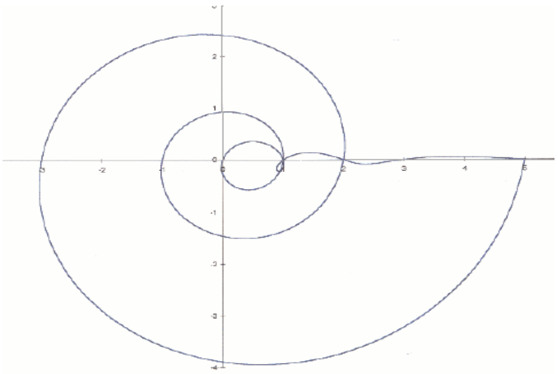
b.some pine cones comply with a disposition date of Fibonacci numbers;
c. Sunflower seeds are arranged after a Fibonacci sequence;

d. rings on the trunks of palm trees meet Fibonacci numbers
e. the petals of flowers is often a Fibonacci number sequence
- hold has 1 leaf
- Euphorbia has 2 petaled
- iris have 3 petaled
- tulips, wild rose, and the most flowers have 5 petaled
- other flowers may have 21 or 34-petaled petaled and examples are numerous

The conclusion is an optimal efficiency of a maximum.
If the sequence of Fibonacci, the leaves of plants can be arranged so as to occupy a smaller space and get as much sun. The idea of leaf arrangement in this regard to consider departing from the angle of 222.5 degrees gold; angle which divided the entire 360 degrees will result in irrational number 0.61803398 ..., known as the ration of Fibonacci' s sequence.

Snail shell, ant and Fibonacci

Snail shell design is a great spiral, a spiral not doable with the pen.
Studied in detail concluded that spiral seeks data sizes of Fibonacci sequence:
- focus on the positive:1, 2, 5, 13,…
- focus on the negative: 0, 1, 3, 8,…

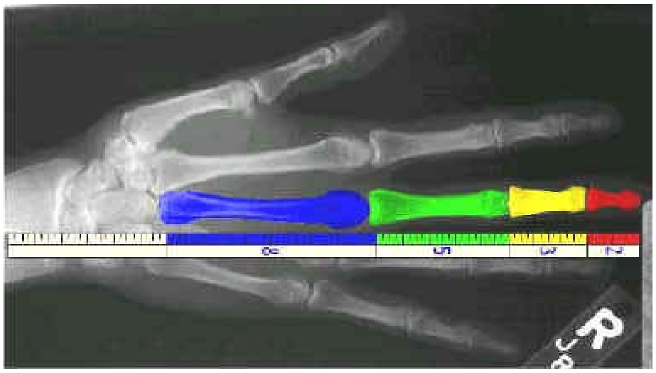


It is noted that these 2 sequences combined to give the Fibonacci numbers 1,1,2,3,5,8,13,…
And in this case the rationale and motivation for this layout is simple: this way it creates the snail shell, inside a maximum of space and safety.

Ant body are divided into three segments, the division of gold.

Fibonacci and the human body

Human face is characterized in terms of aesthetic through several dimensions: The distance between the eyes, mouth and the distance between eyes and nose and eyes, mouth size. Aesthetics in science must be assessed before that is even considered more pleasant to the eye as the size of the sequence complying Fibonaci better. For example the ratio between the distance from the smile (which combine lips) to the tip of the nose and from nose tip to the base is approximately the ratio of gold. Human hand has 5 fingers (thread Fibonacci number), each with 3 finger phalange joints separated by 2 (Fibonacci numbers).The dimension of the phalange are :2 cm, 3 cm, 5 cm.And is a continuing bone of the hand which are 8 cm.



Fibonacci , number of gold and art

If you look at the works of great artists, whether painters, architects, sculptors and photographers, it notes that many of them are based on the rule of gold.According to this, “for a whole divided into unequal parts look nice, must exist between the small and large the same relation between the large and the whole “ (Marcus Pollio Vitruvius, Roman architect). Rudolf Arnheim (psychologist, has dealt with the psychology of art) gives an explanation this way: “This report is considered very satisfactory due to the way in which the unit together with the variety .The whole and piece parts are perfectly divided , so that the whole is predominant without be threatened by a split, and the parties shall retain the same time a certain autonomy. “ (in “ Art and visual perception”). In the painting has been used mainly in the Renaissance, probably the most discussed being used in the painting of Leonardo da Vinci, "Mona Lisa". The head, like the rest of the body is composed using the divine fraction, as he said first da Vinci.In the half of past century painter Piet Mondrian used in his paintings “golden rectangle”, because the ratio of the sides having approximately 1.618 ... In fact, its only consist of such rectangles.This rectangle is considered the most harmonious geometrical shape.If we divided each side of the camera in 8 equal parts (number of thread Fibonacci) and combine the items on the opposite sides corresponding divisions 3 and 5 (string Fibonacci numbers) to obtain the so-called strong lines of the camera.The intersection points of lines are called strengths.We can divide the sides in three equal parts, the result is approximately the same.Se assumes that the subject placed on these lines or points in these results in a smooth distribution of the image so that it is neither symmetrical nor boring, not too unbalanced. For example, two photographs of Robert Doisneau, “L'accordioniste” 1951 and “The cellist”, in 1957 and the picture “ Poplar Trees” by Minor White in which all lines converge towards a strength. Ansel Adams is against the rules.He said “so-called photo rules is invalid, irrelevant and intangible, there are no rules of composition in photography, there are only good photographs”. However in his photos we observed images of the gold division (see photograph "Aspens, 1958). This means that although it was not agreeing with the rules they knew very well. All this shows the importance of this number so that all the great photographers and have taken account of it in the design of a photo. Even the music think in this golden number, it is assumed that Bach or Beethoven were taken of him in their compositions.

When you writing, instinctively go to the middle line of E (as with A, F, B, R, ...) approximately $\frac{2}{3}$ of the base (approximately the gold number).

Conclusion.
Fibonacci numbers to be considered, in fact, the counting of nature, a measurement of divinity, a link between mathematics and art.

References

1. Fauvel, J., & van Maanen, J., *History in Mathematics Education*, Boston, 2000.

2. Finch,S.R., *Mathematical Constants*, Cambridge University, 2003.

3. Knot, R., *Fibonacci Numbers and the Golden Section*, http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knot/Fibonacci/fib.html.

4. Vorobyov, N.N., *The Fibonacci Numbers*, The University of Chicago, 1966. Santos, D.A., *Number Theory for Mathematical Contests*, Boston, 2007.

5. Silvester, J.R., *Fibonacci properties by matrix methods*, The Mathematical Gazette, vol. 63 (1979), nr. 425, pp. 188 – 191.

6. Weisstein, E.W., *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, Washington, D.C., 2003.

MateInfo.ro
MATEmatică și INFOrmații din învățământul ROmânesc
Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. februarie 2010

SUBIECTE PROPUSE PENTRU EXAMENELE DE BACALAUREAT 2008 – 2009

MATEMATICĂ – M1

Corneliu Mănescu-Avram

Aceste subiecte prezintă interes pentru candidații la examenul de bacalaureat – 2010, întrucât conțin modelul propus de minister, care este extras respectiv din variantele **48**(**I**), **21**(**II**), **72**(**III**). Ele au fost postate pe site-ul ministerului la 1 martie 2008 şi au fost rezolvate în diverse culegeri, inclusiv electronice. Multe dintre aceste soluții sunt însă prea stufoase, incomplete sau chiar incorecte. Se impune de aceea reluarea şi rediscutarea unora dintre ele, ceea ce vom face în continuare.

SUBIECTUL II

VARIANTA 1

2. Se consideră $a \in \mathbb{Z}_7$ şi polinomul $f = X^6 + aX + \hat{5} \in \mathbb{Z}_7[X]$.

a) Să se verifice că pentru orice $b \in \mathbb{Z}_7$, $b \neq \hat{0}$, are loc relația $b^6 = \hat{1}$.

b) Să se arate că $x^6 + \hat{5} = (x^3 - \hat{4})(x^3 + \hat{4})$, $\forall x \in \mathbb{Z}_7$.

c) Să se demonstreze că pentru orice $a \in \mathbb{Z}_7$, polinomul f este reductibil în $\mathbb{Z}_7[X]$.

Soluție

a) Dacă $b \in \mathbb{Z}_7$, $b \neq \hat{0}$, atunci funcția $g : \mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_7$, $g(x) = bx$, este injectivă, deoarece $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$

este un corp, în particular este inel integru. Mulțimea $\mathbb{Z}_7$ este finită, deci funcția g este şi

surjectivă. Avem $g(\hat{0}) = \hat{0}$, aşadar mulțimile $\mathbb{Z}_7^*$ şi $b\mathbb{Z}_7^*$ coincid, deci produsul elementelor lor este acelaşi

$$\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \ldots \cdot \hat{6} = (b \cdot \hat{1}) \cdot (b \cdot \hat{2}) \cdot \ldots \cdot (b \cdot \hat{6}).$$

Prin simplificare, rezultă $b^6 = \hat{1}$.

b) Avem $(x^3 - \hat{4})(x^3 + \hat{4}) = x^6 - \widehat{16} = x^6 - \widehat{16} + \widehat{21} = x^6 + \hat{5}$, $\forall x \in \mathbb{Z}_7$.

c) Dacă $a = \hat{0}$, atunci $f = X^6 + \hat{5} = (X^3 - \hat{4})(X^3 + \hat{4})$ (punctul b)), deci f este reductibil în $\mathbb{Z}_7[X]$.

Dacă $a \neq \hat{0}$, atunci a este inversabil în $\mathbb{Z}_7$, deoarece $\mathbb{Z}_7$ este un corp (numărul 7 este un număr prim), deci există $b \in \mathbb{Z}_7$, $b \neq \hat{0}$, $b = a^{-1}$. Atunci $f(b) = b^6 + ab + \hat{5} = \hat{1} + \hat{1} + \hat{5} = \hat{0}$ (punctul a)). Rezultă că polinomul f se divide în $\mathbb{Z}_7[X]$ cu $X - b$, deci f este reductibil în $\mathbb{Z}_7[X]$.

Comentarii. 1) Afirmaţia de la a) este un caz particular al teoremei lui *Fermat* : *"Dacă p este un număr prim şi $a \in \mathbb{Z}_p$, $a \neq \hat{0}$, atunci $a^{p-1} = \hat{1}$"*. Demonstraţia aceste teoreme se poate face prin aceeaşi metodă.

2) Se poate arăta că dacă p este un număr prim şi $p \equiv \pm 1 \pmod 8$, atunci polinomul $f = X^{p-1} + aX - \hat{2} \in \mathbb{Z}_p[X]$ este reductibil în $\mathbb{Z}_p[X]$.

VARIANTA 6

2. Se consideră $a \in \mathbb{C}$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile ecuaţiei

$x^3 - 2x^2 + 2x - a = 0$ şi determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}$.

a) Pentru $a = 1$, să se determine x_1, x_2 şi x_3.

b) Să se arate că, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, ecuaţia are o singură rădăcină reală.

c) Să se arate că valoarea determinantului Δ nu depinde de a.

Soluţie

a) Fie $f = X^3 - 2X^2 + 2X - a \in \mathbb{C}[X]$. Pentru $a = 1$ avem descompunerea

$f = (X - 1)(X^2 - X + 1)$, deci rădăcinile lui f sunt $x_1 = 1$, $x_{2,3} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

b) Din relaţiile lui *Viète* rezultă $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) =$
$= 2^2 - 2 \cdot 2 = 0$. Dacă rădăcinile lui f sunt toate reale, atunci $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, deci $x_1 + x_2 + x_3 =$
$= 0$, absurd. Numărul rădăcinilor complexe nereale ale lui f este par, prin urmare f are o singură rădăcină reală.

c) Avem $\Delta = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$. Scriem că x_1, x_2, x_3 sunt rădăcini ale lui f, adunăm egalităţile respective şi obţinem $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1 + x_2 + x_3) + 3a =$ $= -4 + 3a$. Din $x_1x_2x_3 = a$, rezultă $\Delta = -4 + 3a - 3a = -4$, deci valoarea determinantului Δ nu depinde de a.

Notă. Dacă $a \notin \mathbb{R}$, atunci ecuaţia dată nu are rădăcini reale. Într-adevăr, dacă x_0 este o rădăcină a ecuaţiei date, atunci $a = x_0^3 - 2x_0^2 + 2x_0 \in \mathbb{R}$, absurd.

VARIANTA 8

2. Se consideră $a \in \mathbb{R}$ şi ecuaţia $x^3 - x + a + 0$, cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3.

a) Să se calculeze $(x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1)$.

b) Să se calculeze x_2, x_3, dacă $x_1 = 2$.

c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care x_1, x_2, x_3 sunt numere întregi.

Soluţie

a) Fie $f = X^3 - X + a \in \mathbb{R}[X]$. Avem $f = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$, deci $(x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1) = -f(-1) = -a$.

b) Dacă $x_1 = 2$, atunci $a = -2^3 + 2 = -6$ şi $f = (X - 2)(X^2 + 2X + 3)$, deci $x_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{2}$.

c) Fie $b \in \mathbb{Z}$ rădăcină a lui f, deci $f(b) = 0$ şi $a = -b^3 + b$. Rezultă $f = (X - b)(X^2 + bX + b^2 - 1)$. Discriminantul celui de-al doilea factor $\Delta = -3b^2 + 4 \geq 0$ dacă şi numai dacă $b \in \{-1, 0, 1\}$, deci $a = 0$.

VARIANTA 12

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5, f(x) = x^4 + \hat{4}x$.

a) Să se calculeze $f(\hat{0})$ şi $f(\hat{1})$.

b) Să se arate că funcţia f nu este surjectivă.

c) Să se descompună polinomul $X^4 + \hat{4}X \in \mathbb{Z}_5[X]$ în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$.

Soluție

a) Avem $f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = \hat{0}$.

b) Pătratele din $\mathbb{Z}_5$ sunt $\hat{0}, \hat{1}, \hat{4}$, puterea a patra a oricărui element din $\mathbb{Z}_5$ este $\hat{0}$ sau $\hat{1}$. Rezultă

$$f(x) = \begin{cases} \hat{0}, dacă\ x = \hat{0}, \\ \hat{1} - x,\ dacă\ x \neq \hat{0} \end{cases}$$

şi e clar că funcția f nu ia valoarea $\hat{1}$, deci f nu este surjectivă.

c) Polinomul $X^4 + \hat{4}X = X^4 - X$ se descompune peste $\mathbb{Z}_5$ astfel $X^4 + \hat{4}X =$

$= X(X - \hat{1})(X^2 + X + \hat{1})$. Factorul $X^2 + X + \hat{1} = (X + \hat{3})^2 + \hat{2}$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_5$, în caz contrar el ar avea o rădăcină în $\mathbb{Z}_5$, dar $-\hat{2} = \hat{3}$ nu este pătrat în $\mathbb{Z}_5$, contradicție.

VARIANTA 17

2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ şi $g = X^2 - 1$.

a) Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul g.

b) Să se calculeze $(1 - x_1)\cdot(1 - x_2)\cdot(1 - x_3)\cdot(1 - x_4)$.

c) Să se calculeze $g(x_1)\cdot g(x_2)\cdot g(x_3)\cdot g(x_4)$.

Soluție

a) $f = gq + mX + n$, $q \in \mathbb{Q}[X]$, $m, n \in \mathbb{Q}$, deoarece gradul restului este mai mic decât gradul împărțitorului.. Avem $m + n = f(1) = 5$, $-m + n = f(-1) = 1$, de unde $m = 2$, $n = 3$, aşadar restul este $r = 2X + 3$.

b) Din $f = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)$, rezultă $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4) = f(1) = 5$.

c) Avem şi $f(-1) = 1$, deci $g(x_1)\cdot g(x_2)\cdot g(x_3)\cdot g(x_4) = f(1)\cdot f(-1) = 5\cdot 1 = 5$.

VARIANTA 18

2. Se consideră $a, b \in \mathbb{R}$ şi polinomul $f = X^3 + 4aX^2 + 20X + b$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Să se determine x_1, x_2, x_3 în cazul $a = 2$, $b = 0$.

b) Să se demonstreze că $(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 = 8(4a^2 - 15)$.

c) Să se determine a, b astfel încât polinomul f să aibă o rădăcină dublă egală cu $-a$.

Soluție

a) Dacă $a = 2$ şi $b = 0$, polinomul devine $f = X^3 + 8X^2 + 20X = X(X^2 + 8X + 20)$, cu rădăcinile $x_1 = 0$, $x_{2,3} = -4 \pm 2i$.

b) Folosim relațiile lui *Viète* : $x_1 + x_2 + x_3 = -4a$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 20$, de unde

$(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) =$

$= 2(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 6(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 8(4a^2 - 15)$.

c) Din $x_1 = x_2 = -a$ şi $x_1 + x_2 + x_3 = -4a$, rezultă $x_3 = -2a$ şi polinomul devine $f = (X + a)^2(X + 2a) = X^3 + 4aX^2 + 5a^2X + 2a^3$. Prin identificarea coeficienților se obțin egalitățile $5a^2 = 20$, $2a^3 = b$, de unde rezultă soluțiile $a = 2$, $b = 16$ şi $a = -2$, $b = -16$.

VARIANTA 22

2. Se consideră şirul de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cu $a_0 = 0$ şi $a_{n+1} = a_n^2 + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi polinomul

$f \in \mathbb{R}[X]$, cu $f(0) = 0$ şi cu proprietatea că $f(x^2 + 1) = (f(x))^2 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $f(5)$.

b) Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n) = a_n$.

c) Să se arate că $f = X$.

Soluție

a) Se dau lui x valorile 0, 1, 2 şi se obțin egalitățile $f(1) = (f(0))^2 + 1 = 1$, $f(2) = (f(1))^2 + 1 = 2$, $f(5) = (f(2))^2 + 1 = 5$.

b) Demonstrăm egalitatea $f(a_\mathrm{n}) = a_n$ prin inducție matematică. Am verificat la punctul a) egalitatea pentru $n \in \{0, 1, 2\}$. Presupunem că egalitatea este adevărată pentru n şi o demonstrăm pentru $n + 1$: dacă $f(a_n) = a_n$, atunci $f(a_{n+1}) = f(a_n^2 + 1) = f(a_n)^2 + 1 = a_n^2 + 1 =$ $= a_{n+1}$.

c) Aplicăm următoarea *Teoremă. Numărul rădăcinilor unui polinom cu coeficienți îint-un corp comutativ este cel mult egal cu gradul polinomului.* Rezultă că dacă un polinom cu coeficienți reali are o infinitate de rădăcini reale, atunci el este polinomul nul. Considerăm polinomul $g = f - \mathrm{X} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Avem $g(a_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci g este polinomul nul, de unde rezultă $f = \mathrm{X}$.

VARIANTA 23

2. Se consideră $a \in \mathbb{Z}_3$ şi polinomul $f = \mathrm{X}^3 + \hat{2}\,\mathrm{X}^2 + a \in \mathbb{Z}_3[\mathrm{X}]$.

a) Să se calculeze $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2})$.

b) Pentru $a = \hat{2}$, să se determine rădăcinile din $\mathbb{Z}_3$ ale polinomului f.

c) Să se determine $a \in \mathbb{Z}_3$ pentru care polinomul f este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[\mathrm{X}]$.

Soluție

a) $f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = a, f(\hat{2}) = \hat{1} + a$, deci $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = \hat{1} + \hat{3}a = \hat{1}$.

b) Pentru $a = \hat{2}$, avem $f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = \hat{2}$, $f(\hat{2}) = \hat{1} + \hat{2} = \hat{0}$, deci singura rădăcină din $\mathbb{Z}_3$ a polinomului f este $x = \hat{2}$.

c) Dacă $a = \hat{0}$, atunci $f = \mathrm{X}^3 + \hat{2}\mathrm{X}^2 = \mathrm{X}^2(\mathrm{X} + \hat{2})$ este reductibil în $\mathbb{Z}_3[\mathrm{X}]$.

Dacă $a = \hat{2}$, atunci $f = \mathrm{X}^3 + \hat{2}\mathrm{X}^2 + \hat{2} = (\mathrm{X} + \hat{1})(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + \hat{2})$ este reductibil în $\mathbb{Z}_3[\mathrm{X}]$.

Dacă $a = \hat{1}$, atunci f nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_3$ (punctul a)), deci f este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[\mathrm{X}]$ (dacă un polinom de gradul 3 cu coeficienți într-un corp comutativ este reductibil, atunci el are o rădăcină în corpul coeficienților).

Comentariu. Polinomul $f = \mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + a \in \mathbb{Z}_p[\mathrm{X}]$, p număr prim, este reductibil în $\mathbb{Z}_p[\mathrm{X}]$, dacă $a \in \{\hat{0}, \hat{2}\}$.

VARIANTA 26

2. Se consideră $a \in \mathbb{R}$ şi polinomul $f = 3\mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X} + \mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} - 1 \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

a) Să se calculeze $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$, unde $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f.

b) Să se determine restul împărțirii polinomului f la $(\mathrm{X} - 1)^2$.

c) Să se demonstreze că f nu are toate rădăcinile reale.

Soluţie

a) Rădăcinile complexe y_1, y_2, y_3, y_4 ale polinomului $g = X^4 - aX^3 - X^2 + 2X - 3$ sunt inversele rădăcinilor lui f (am inversat ordinea coeficienţilor şi am schimbat semnele), deci

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = a.$$

b) Se împarte polinomul f la polinomul $(X - 1)^2 = X^2 - 2X + 1$ şi se obţine restul $r = (a + 8)X - 7$.

c) $f(0) = -1$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, deci f are cel puţin două rădăcini reale. Din $f''(x) = 36x^2 - 12x + 2 > 0$ pe $\mathbb{R}$, rezultă că f' este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci f' are o singură rădăcină reală (întrucât f' este o funcţie polinomială de gradul 3), prin urmare f are cel mult două rădăcini reale. Rezultă că f are exact două rădăcini reale şi două rădăcini complexe nereale.

VARIANTA 29

2. Se consideră mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$, submulţimea

$$G = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3) \,\middle|\, X = \begin{pmatrix} a & \hat{2}b \\ b & a \end{pmatrix} \right\} \text{ şi matricele } O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \text{ şi } I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}.$$

a) Să se verifice că dacă $x, y \in \mathbb{Z}_3$, atunci $x^2 + y^2 = \hat{0}$ dacă şi numai dacă $x = y = \hat{0}$.

b) Să se arate că mulţimea $H = G \setminus \{O_2\}$ este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$.

c) Să se rezolve ecuaţia $X^2 = I_2$, $X \in G$.

Soluţie

a) Pătratele din $\mathbb{Z}_3$ sunt $\hat{0}$ şi $\hat{1}$. Avem $\hat{0} + \hat{0} = \hat{0}$, $\hat{0} + \hat{1} = \hat{1} + \hat{0} = \hat{1}$, $\hat{1} + \hat{1} = \hat{2}$, aşadar $x^2 + y^2 = \hat{0}$ dacă şi numai dacă $x = y = \hat{0}$.

b) O submulţime H a unui grup finit G este subgrup al lui G dacă şi numai dacă $xy \in H$, oricare ar fi $x, y \in H$. Matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ este inversabilă dacă şi numai dacă $\det(X) \neq \hat{0}$. Avem $\det(X) = a^2 - \hat{2}b^2 = a^2 + b^2 = \hat{0}$ dacă şi numai dacă $a = b = \hat{0}$ (punctul a)). Este suficient deci să demonstrăm că $H = G \setminus \{O_2\}$ este parte stabilă față de înmulțirea obişnuită a matricelor. Produsul a două matrice inversabile este o matrice inversabilă. Dacă

$$X_1 = \begin{pmatrix} a_1 & \hat{2}b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \in H, \quad X_2 = \begin{pmatrix} a_2 & \hat{2}b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \in H,$$

atunci

$$X_1X_2 = \begin{pmatrix} a_1a_2 + \hat{2}b_1b_2 & \hat{2}(a_1b_2 + a_2b_1) \\ a_1b_2 + a_2b_1 & a_1a_2 + \hat{2}b_1b_2 \end{pmatrix} \in H.$$

c) Fie $X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{Z}_3$. Din $X^2 = I_2$ rezultă $\begin{cases} a^2 - b^2 = \hat{1} \\ \hat{2}ab = \hat{0} \end{cases}$. Dacă $a = \hat{0}$, atunci $b^2 = \hat{2}$, imposibil. Dacă $b = \hat{0}$, atunci $a = \hat{1}$ sau $a = \hat{2}$. Se obțin soluțiile $X_1 = I_2$, $X_2 = -I_2$.

Comentariu. Dacă p este un număr prim şi $p \equiv 3 \pmod 4$, $X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_p)$, atunci singurele soluții ale ecuației $X^2 = I_2$ sunt $X_1 = I_2$ şi $X_2 = -I_2$.

VARIANTA 30

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$ şi mulțimea

$G = \{X(a) = I_2 + aA \mid a \in \mathbb{R}\}$.

a) Să se arate că $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $X(a)X(0) = X(a)$ şi $X(a)X(b) = X(a + b - 10ab)$.

b) Să se arate că mulțimea $H = \{X(a) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{10}\right\}\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

c) Să se rezolve ecuația $X^2 = I_2$, $X \in G$.

Soluție

a) Se verifică prin calcul că $A^2 = -10A$. Atunci $X(a)X(0) = X(a)I_2 = X(a)$, $X(a)X(b) =$
$= (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 + (a + b)A + abA^2 = I_2 + (a + b - 10ab)A = X(a + b - 10ab)$,
$\forall a, b \in \mathbb{R}$.

b) Egalitatea $a + b - 10ab = \frac{1}{10} - 10(a - \frac{1}{10})(b - \frac{1}{10})$ arată că dacă $a \neq \frac{1}{10}$ şi $b \neq \frac{1}{10}$, atunci $a + b - 10ab \neq \frac{1}{10}$. Din $X(a)X(b) = X(a + b - 10ab)$ rezultă că H este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

c) Din $X(a)X(a) = X(2a - 10a^2) = X(0) = I_2$, rezultă $2a - 10a^2 = 0$, cu soluțiile $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{5}$.

Se obţin matricele $X_1 = I_2$ şi $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \end{pmatrix}$.

VARIANTA 35

2. Se consideră mulțimea $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, funcția $f : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Z}, f(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2, \forall a, b \in \mathbb{Z}$ şi mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \mid f(x) = -1\}$.

a) Să se verifice dacă $7 + 5\sqrt{2} \in A$.

b) Să se arate că pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $f(xy) = f(x)f(y)$.

c) Să se arate că mulțimea A este infinită.

Soluție

a) $f(7 + 5\sqrt{2}) = 7^2 - 2\cdot5^2 = -1$, deci $7 + 5\sqrt{2} \in A$.

b) $x = a + b\sqrt{2}, y = c + d\sqrt{2}, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(xy) = (ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2 =$
$= (a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2) = f(x)f(y)$.

c) Dacă $x = 7 + 5\sqrt{2}$ şi $n \in \mathbb{N}$ este impar, atunci $f(x^n) = (f(x))^n = (-1)^n = -1$, deci A conține mulțimea infinită $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ impar}\}$, astfel că A este mulțime infinită.

Comentariu. Dacă se înlocuieşte 2 cu un întreg de forma $m^2 + 1$, $m \in \mathbb{N}^*$, atunci găsim $x = 4m^3 + 3m + (4m^2 + 1)\sqrt{m^2 + 1} \in A$, deci mulțimea A este infinită.

VARIANTA 37

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + pX^2 + qX + r$, cu $p, q, r \in (0, \infty)$ şi cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Să se demonstreze că f nu are rădăcini în intervalul $[0, \infty)$.

b) Să se calculeze $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ în funcție de p, q şi r.

c) Să se demonstreze că dacă a, b, c sunt trei numere reale astfel încât $a + b + c < 0$, $ab + bc + ca > 0$ şi $abc < 0$, atunci $a, b, c \in (-\infty, 0)$.

Soluție

a) Dacă $x > 0$, atunci $f(x) > 0$ (este o sumă de numere strict pozitive); avem şi $f(0) = r > 0$, deci f nu se anulează pe $[0, \infty)$.

b) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -p(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - q(x_1 + x_2 + x_3) - 3r =$
$= -p[(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)] - q(x_1 + x_2 + x_3) - 3r = -p(p^2 - 2q) + pq - 3r =$

$= -p^3 + 3pq - 3r$.

c) Dacă a, b, c sunt rădăcinile lui f, atunci $a + b + c = -p > 0$, $ab + bc + ca = q > 0$, $abc = -r > 0$ şi deci $a, b, c \in (-\infty, 0)$ (punctul a)).

Comentariu. Mai general, dacă $f \in \mathbb{R}[X]$ are toți coeficienții pozitivi şi $f(0) > 0$, atunci toate rădăcinile reale ale lui f sunt strict negative.

VARIANTA 38

2. Se consideră polinomul $f = aX^4 + bX + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

a) Să se arate că numărul $f(3) - f(1)$ este număr par.

b) Să se arate că, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$, numărul $f(x) - f(y)$ este divizibil cu $x - y$.

c) Să se determine coeficienții polinomului f ştiind că $f(1) = 4$ şi $f(b) = 3$.

Soluție

a) $f(3) - f(1) = a(3^4 - 1^4) + b(3 - 1)$ se divide cu $3 - 1 = 2$, deci este un număr par.

b) $f(x) - f(y) = a(x^4 - y^4) + b(x - y) = (x - y)[a(x + y)(x^2 + y^2) + b]$ se divide cu $x - y$.

c) $f(1) - f(b) = 4 - 3 = 1$ se divide cu $1 - b$, deci $1 - b \in \{-1, 1\}$, astfel că $b \in \{0, 2\}$. Dacă $b = 0$, atunci $a = 1$, $c = 3$. Dacă $b = 2$, atunci $a = -\frac{1}{15} \notin \mathbb{Z}$.

Comentariu. Dacă $f = aX^n + bX + c \in \mathbb{Z}[X]$ şi $f(1) = c + 1$, $f(b) = c$, atunci $a = 1$, $b = 0$.

VARIANTA 39

2. Se consideră mulţimea $M = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 5b^2 = 1\}$.

a) Să se arate că $x = 9 + 4\sqrt{5} \in M$.

b) Să se demonstreze că M este grup în raport cu înmulţirea numerelor reale.

c) Să se demonstreze că nulţimea M are o infinitate de elemente.

Soluţie

a) $9^2 - 5\cdot 4^2 = 1$, deci $x = 9 + 4\sqrt{5} \in M$.

b) Mulţimea M este parte stabilă în raport cu înmulţirea numerelor reale : dacă $a_1 + b_1\sqrt{5}$, $a_2 + b_2\sqrt{5} \in M$, atunci $(a_1 + b_1\sqrt{5})(a_2 + b_2\sqrt{5}) = a_1a_2 + 5b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{5}$, deoarece $(a_1a_2 + 5b_1b_2)^2 - 5(a_1b_2 + a_2b_1)^2 = (a_1^2 - 5b_1^2)(a_2^2 - 5b_2^2) = 1$, Înmulţirea numerelor reale este asociativă şi comutativă, în particular aceste proprietăţi se păstrează pe M, elementul neutru $1 = 1 + 0\cdot\sqrt{5} \in M$, inversul unui element $a + b\sqrt{5} \in M$ este $(a + b\sqrt{5})^{-1} = a - b\sqrt{5} \in M$, deoarece $a^2 - 5(-b)^2 = 1$. Rezultă că $(M, \cdot)$ este un grup abelian.

c) Mulţimea M conţine submulţimea infinită $\{(9 + 4\sqrt{5})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, deci M este o mulţime infinită.

Comentariu. Dacă numărul 5 se înlocuieşte cu $m^2 + 1$, $m \in \mathbb{N}^*$, atunci

$2m^2 + 1 + 2m\sqrt{m^2 + 1} \in M$ şi toate proprietăţile se păstrează.

VARIANTA 41

2. Se consideră inelul $(A, +, \cdot)$, unde $A = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_5\right\}$.

a) Să se determine numărul elementelor mulţimii A.

b) Să se rezolve în mulţimea A ecuaţia $X^2 = I_2$.

c) Să se arate că $(A, +, \cdot)$ nu este corp.

Soluție

a) Elementele a, b au câte 5 valori posibile, deci mulțimea A are $5 \cdot 5 = 25$ de elemente.

b) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in A$. Atunci $X^2 = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & \hat{2}ab \\ -\hat{2}ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ dacă şi numai dacă $a^2 - b^2 = \hat{1}$ şi $ab = \hat{0}$. Dacă $a = \hat{0}$, atunci $b^2 = -\hat{1} = \hat{4}$, deci $b \in \{\hat{2}, \hat{3}\}$. Dacă $b = \hat{0}$, atunci $a^2 = \hat{1}$, deci $a \in \{\hat{1}, \hat{4}\}$. Se obțin soluțiile $X_1 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $X_4 = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{4} \end{pmatrix}$.

c) Matricea $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{4} & \hat{2} \end{pmatrix} \in A$ este nenulă şi neinversabilă (determinantul ei este egal cu $\hat{0}$), deci $(A, +, \cdot)$ nu este corp.

Comentariu. Dacă p este un număr prim, $p \equiv 1 \pmod 4$ şi $a = \left(\frac{p-1}{2}\right)!$, atunci matricea $\begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{a} \end{pmatrix} \in A$ este nenulă şi neinversabilă.

VARIANTA 44

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + 4X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{C}$ astfel încât polinomul f să se divide cu $X + 1$.

b) Să se arate că polinomul $g = X^4 + 4X^2 + aX + 1$ are rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4}$.

c) Să se arate că, pentru orice $a \in \mathbb{C}$, polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

Soluție

a) f se divide cu $X + 1$ dacă şi numai dacă $f(-1) = 1 - a + 4 + 1 = 0$, deci $a = 6$.

b) Polinomul g are aceiaşi coeficienți ca şi polinomul f, dar scrişi în ordine inversă, deci rădăcinile lui g sunt inversele rădăcinilor lui f.

c) Dacă $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, atunci polinomul f nu are nicio rădăcină reală. Într-adevăr, fie $x_0 \in \mathbb{R}$ cu $f(x_0) = 0$. Atunci evident $x_0 \neq 0$ şi $a = -\frac{x_0^4 + 4x_0^2 + 1}{x_0^3} \in \mathbb{R}$, contradicție.

Dacă $a \in \mathbb{R}$, avem $g''(x) = 12x^2 + 8 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci g' este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Funcția g' este funcție polinomială de gradul 3 şi este injectivă pe $\mathbb{R}$, deci are o singură rădăcină reală, astfel că g are cel mult două rădăcini reale (*Rolle*). Rezultă că f are cel mult două rădăcini reale.

VARIANTA 45

2. Se consideră mulțimea $G = (-1, 1)$, funcția $f : G \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ şi corespondența

$(x, y) \to x * y$, unde $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$, $\forall x, y \in G$.

a) Să se arate că această corespondență definește o lege de compoziție pe G.

b) Să se arate că $\forall x, y \in G$, $f(x * y) = f(x) f(y)$.

c) Ştiind că operația "$*$" este asociativă, să se calculeze $\dfrac{1}{2} * \dfrac{1}{3} * \ldots * \dfrac{1}{9}$.

Soluție

a) Demonstrăm că dacă $x, y \in G$, atunci $x*y \in G$. Avem $\dfrac{x+y}{1+xy} + 1 = \dfrac{(1+x)(1+y)}{1+xy} > 0$,

$1 - \dfrac{x+y}{1+xy} = \dfrac{(1-x)(1-y)}{1+xy} > 0$, dacă $x, y \in (-1, 1)$.

b) $f(x*y) = \dfrac{1-x*y}{1+x*y} = \dfrac{1+xy-x-y}{1+xy+x+y} = \dfrac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)} = f(x)\cdot f(y)$.

c) $f\left(\dfrac{1}{2} * \dfrac{1}{3} * \ldots * \dfrac{1}{9}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot f\left(\dfrac{1}{3}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(\dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{4} \cdot \dfrac{3}{5} \cdot \ldots \cdot \dfrac{8}{10} = \dfrac{1}{45}$. Dar $f^{-1} = f$, deci $\dfrac{1}{2} * \dfrac{1}{3} * \ldots * \dfrac{1}{9} = f^{-1}\left(\dfrac{1}{45}\right) = f\left(\dfrac{1}{45}\right) = \dfrac{44}{46} = \dfrac{22}{23}$.

Notă. Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, atunci $\dfrac{1}{2} * \dfrac{1}{3} * \ldots * \dfrac{1}{n} = \dfrac{n^2+n-2}{n^2+n+2}$.

VARIANTA 54

2. Se consideră şirul $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $\forall n \geq 1$ şi polinoamele $P, Q_n \in \mathbb{Z}[X]$, $P = X^2 - X - 1$, $Q_n = X^n - F_nX - F_{n-1}$, $\forall n \geq 2$.

a) Să se arate că polinomul $X^3 - 2X - 1$ este divizibil cu P.

b) Să se determine rădăcinile reale ale polinomului Q_3.

c) Să se arate că, pentru orice $n \geq 2$, polinomul Q_n este divizibil cu P.

Soluție

a) $X^3 - 2X - 1 = P\cdot(X + 1)$.

b) $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, deci $Q_3 = X^3 - 2X - 1$ are rădăcinile $x_1 = -1$, $x_{2,3} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

c) Demonstrăm proprietatea prin inducție matematică. Polinomul $Q_2 = P$ se divide cu P, iar la punctul a) am arătat că polinomul Q_3 se divide cu P. Presupunem că polinoamele Q_{n-2} şi Q_{n-1}, $n \geq 4$, se divid cu P şi demonstrăm că polinomul Q_n se divide cu P. Acest fapt rezultă simplu din egalitatea $Q_n - Q_{n-1} - Q_{n-2} = X^{n-2}P$.

VARIANTA 63

2. Se consideră polinoamele $f = X^3 + 2X^2 + 3X + 45 \in \mathbb{Z}[X]$ şi $\hat{f} = X^3 + X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_2[X]$.

a) Să se arate că rădăcinile $\mathbb{C}$ din ale polinomului f nu sunt toate reale.

b) Să se arate că polinomul $\hat{f}$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_2$.

c) Să se demonstreze că polinomul f nu poate fi scris ca produs de două polinoame neconstante cu coeficienți întregi.

Soluție

a) Dacă toate rădăcinile lui f sunt reale, atunci suma pătratelor lor este strict pozitivă, dar $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = (-2)^2 - 2\cdot 3 = -2 < 0$, deci f are o singură rădăcină reală.

b) $\hat{f}(\hat{0}) = \hat{f}(\hat{1}) = \hat{1}$, deci $\hat{f}$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_2$.

c) Dacă f este produsul a două polinoame neconstante cu coeficienți întregi, atunci el are un factor unitar de gradul 1 (adică un factor de forma $X + a$, cu $a \in \mathbb{Z}$) , deci f are o rădăcină întreagă, de unde rezultă că $\hat{f}$ are o rădăcină în $\mathbb{Z}_2$, contradicție.

Comentariu. Din $f(-5) = -45 < 0$, $f(-4) = 1 > 0$, rezultă că singura rădăcină reală a lui f nu este întreagă, deci nici raţională, deoarece f este polinom unitar.

VARIANTA 68

2. Se consideră ecuaţia $x^3 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$ şi x_1, x_2, x_3 soluţiile complexe ale acesteia.

a) Ştiind că $p = 1$ şi $q = 0$, să se determine x_1, x_2, x_3.

b) Să se determine p şi q ştiind că $x_1 = 1 + i$.

c) Să se arate că $12(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7) = 7(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2$.

Soluţie

a) $x^3 + x = 0$, cu soluţiile $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm i$.

b) Din $x_2 = 1 - i$ şi $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, rezultă $x_3 = -2$, deci $x^3 + px + q = (x + 2)(x^2 - 2x + 2)$, de unde , prin identificarea coeficienţilor, se deduce $p = -2$, $q = 4$.

c) Fie $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Aceste sume se calculează înmulţind ecuaţia cu puteri convenabile ale lui x, substituind cu valorile rădăcinilor şi însumând. Avem $S_1 = 0$, $S_2 =$
$= S_1^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = -2p$, $S_3 = -pS_1 - 3q = -3q$, $S_4 = -pS_2 - qS_1 = 2p^2$, $S_5 =$
$= -pS_3 - qS_2 = 5pq$, $S_7 = -pS_5 - qS_4 = -7p^2q$ şi se vreifică simplu egalitatea din enunţ.

VARIANTA 72

2. Se consideră polinomul $p = X^3 - X + m$, cu $m \in \mathbb{R}$ şi cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Ştiind că $m = -6$, să se determine x_1, x_2, x_3.

b) Să se calculeze $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul p are toate rădăcinile întregi.

Soluţie

a) $p = X^3 - X - 6 = (X - 2)(X^2 + 2X + 3)$ are rădăcinile $x_1 = 2$, $x_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{2}$.

b) $S_4 = 2\cdot(-1)^2 = 2$ (a se vedea varianta 68).

c) Toate rădăcinile lui p sunt întregi dacă şi numai dacă $m = 0$ (varianta 8).

VARIANTA 75

2. Se consideră polinomul $p = X^4 - aX^3 - aX + 1$, cu $a \in \mathbb{R}$ şi cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se verifice că $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$.

b) Să se arate că polinomul p nu este divizibil cu $X^2 - 1$ pentru nicio valoare a lui a.

c) Să se arate că dacă $a = \frac{1}{2}$, atunci toate rădăcinile polinomului p au modulul 1.

Soluție

a) Polinomul p este reciproc, adică $p(X) = X^4\, p\left(\frac{1}{X}\right)$, deci dacă x este rădăcină a lui f, atunci şi $\frac{1}{x}$ este rădăcină a lui f, aşadar suma rădăcinilor coincide cu suma inverselor rădăcinilor.

b) Polinomul p este divizibil cu $X^2 - 1$ dacă şi numai dacă $p(1) = p(-1) = 0$. Avem însă $p(1) + p(-1) = 4$, deci p nu este divizibil cu $X^2 - 1$.

c) Dacă $x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$, atunci $x \neq 0$, deci $x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$. Se face substituția $x + \frac{1}{x} = t$ şi se obține ecuația $t^2 - \frac{1}{2}t - 2 = 0$, cu soluțiile $t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}$. Se verifică simplu inegalitățile $t_1^2 < 4$, $t_2^2 < 4$. Din $x + \frac{1}{x} = t$ se deduce $x^2 - tx + 1 = 0$, cu soluțiile $x_{1,2} = \frac{t \pm i\sqrt{4-t^2}}{2}$ (avem de fapt 4 soluții, câte două pentru fiecare valoare a lui t). Pentru fiecare rădăcină x a polinomului p se deduce $|x| = \sqrt{\frac{t^2}{4} + \frac{4-t^2}{4}} = 1$.

VARIANTA 86

2. Se consideră polinomul $f = \hat{2}X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_4[X]$.

a) Să se determine gradul polinomului f^2.

b) Să se arate că polinomul f este element inversabil al inelului $(\mathbb{Z}_4[X], +, \cdot)$.

c) Să se determine toate polinoamele $g \in \mathbb{Z}_4[X]$ de gradul 1 cu proprietatea că $g^2 = \hat{1}$.

Soluție

a) $f^2 = (\hat{2}X + \hat{1})^2 = \hat{4}X^2 + \hat{4}X + \hat{1} = \hat{1}$, deci grad $f^2 = 0$.

b) $f^{-1} = f$.

c) Fie $g = aX + b \in \mathbb{Z}_4[X]$, $a \neq \hat{0}$. Dacă $g^2 = \hat{1}$, atunci $a^2 = \hat{0}$, $\hat{2}ab = \hat{0}$, $b^2 = \hat{1}$. Din $a^2 = \hat{0}$ şi $a \neq \hat{0}$, rezultă $a = \hat{2}$, care satisface şi $\hat{2}ab = \hat{0}$. Din $b^2 = \hat{1}$, rezultă $b = \hat{1}$ sau $b = \hat{3}$. Se obţin polinoamele $g_1 = \hat{2}X + \hat{1}$, $g_2 = \hat{2}X + \hat{3}$.

Notă. Dacă $g = \widehat{2n}X \pm \hat{1} \in \mathbb{Z}_{4n}[X]$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $g^2 = \hat{1}$.

VARIANTA 89

2. Fie polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 5X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ şi $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile sale.

a) Să se calculeze $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$.

b) Să se arate că polinomul f nu are nicio rădăcină întreagă.

c) Să se calculeze $x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2$.

Soluție

a) $f = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$, deci $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = f(1) = 4$.

b) Dacă f ar avea rădăcini întregi, acestea s-ar găsi printre divizorii termenului liber, dar $f(1) = 4$, $f(-1) = -8$.

c) Grupăm termenii şi folosim relațiile liu *Viète* : $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 5$, $x_1x_2x_3 = -1$. Expresia este $x_1x_2(x_1 + x_2) + x_1x_3(x_1 + x_3) + x_2x_3(x_2 + x_3) = x_1x_2(3 - x_3) + x_1x_3(3 - x_2) + x_2x_3(3 - x_1) = 3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - x_1x_2x_3) = 3(5 + 1) = 18$.

VARIANTA 94

2. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ un polinom astfel încât $f(X^2 + 3X + 1) = f^2(X) + 3f(X) + 1$ şi $f(0) = 0$.

a) Să se determine $f(-1)$.

b) Să se determine restul împărţirii polinomului f la $X - 5$.

c) Să se demonstreze că $f = X$.

Soluție

a) Pentru $x = -1$ se obține $f(-1) = f^2(-1) + 3f(-1) + 1$, de unde se deduce $f(-1) = -1$.

b) Pentru $x = 0$ se obține $f(1) = f^2(0) + 3f(0) + 1 = 1$. Pentru $x = 1$ se obține $f(5) =$
$= f^2(1) + 3f(1) + 1 = 5$, deci restul împărțirii lui f la $X - 5$ este egal cu 5.

c) Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0 = 0$, $a_{n+1} = a_n^2 + 3a_n + 1$. Se demonstrează prin inducție că $f(a_n) = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Am verificat egalitatea pentru $n \in \{0, 1, 2\}$, deoarece $a_0 = 0$, $a_1 =$ $= 1$, $a_2 = 5$. Presupunem că $f(a_n) = a_n$ pentru un n natural oarecare fixat, atunci $f(a_{n+1}) =$ $= f(a_n^2 + 3a_n + 1) = f^2(a_n) + 3f(a_n) + 1 = a_n^2 + 3a_n + 1 = a_{n+1}$, ceea ce încheie demonstrația prin inducție. Şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător, deoarece $a_{n+1} - a_n = (a_n + 1)^2 > 0$. Polinomul $f -$ X are deci o infinitate de rădăcini $x = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, prin urmare el este polinomul nul, astfel că $f =$ X (a se vedea şi varianta 22).

VARIANTA 95

2. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi polinomul $f = X^3 - aX^2 + bX - c \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Să se determine a, b, c pentru care $x_1 = 2$ şi $x_2 = 1 + i$.

b) Să se arate că resturile împărțirii polinomului f la $(X - 1)^2$ şi la $(X - 2)^2$ nu pot fi egale, pentru nicio valoare a parametrilor a, b, c.

c) Să se arate că dacă toate rădăcinile polinomului f sunt reale şi a, b, c sunt strict pozitive, atunci x_1, x_2, x_3 sunt strict pozitive.

Soluție

a) $x_3 = 1 - i$, deci $f = (X - 2)(X^2 - 2X + 2) = X^3 - 4X^2 + 6X - 4$, de unde, prin identificarea coeficienților se deduce $a = 4$, $b = 6$, $c = 4$.

b) Presupunem că există $r \in \mathbb{R}[X]$ polinom de grad cel mult 1 astfel încât $f - r$ să fie divizibil cu $(X - 1)^2$ şi cu $(X - 2)^2$, polinoame care sunt prime între ele. Rezultă că $f - r$, care este polinom de gradul 3, se divide cu polinomul $(X - 1)^2(X - 2)^2$, care este de gradul 4, deci $f - r$ este polinomul nul, aşadar gradul lui $f = r$ este cel mult 1, absurd.

c) Dacă $x > 0$, atunci $f(-x) = -(x^3 + ax^2 + bx + c) < 0$, deci f nu are rădăcini negative.

VARIANTA 98

2. Fie $p \in \mathbb{R}$ şi polinomul $f = X^4 - 4X + p \in \mathbb{R}[X]$.

a) Să se determine p astfel încât polinomul f să fie divizibil cu X + 1.

b) Să se determine p astfel încât polinomul f să aibă o rădăcină reală dublă.

c) Să se arate că pentru orice $p \in \mathbb{R}$ polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

Soluție

a) $f(-1) = 5 + p = 0$, deci $p = -5$.

b) Polinomul f are o rădăcină dublă $a \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $f(a) = f'(a) = 0$,

$f''(a) \neq 0$. Din $f'(a) = 4a^3 - 4 = 4(a-1)(a^2 + a + 1) = 0$ şi $a \in \mathbb{R}$ rezultă $a = 1$. Atunci $f(1) =$

$= -3 + p = 0$, deci $p = 3$.

c) Funcția reală f' este negativă pe $(-\infty, 1)$, pozitivă pe $(1, \infty)$ şi $f'(1) = 0$, deci $x = 1$ este punct de minim (global). Dacă $f(1) = p - 3 \leq 0$, atunci f are două rădăcini reale, deoarece $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Dacă $f(1) = p - 3 > 0$, atunci f nu are rădăcini reale.

VARIANTA 100

2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ şi polinomul $f = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$.

a) Să se arate că $f(1) + f(-1)$ este număr par.

b) Să se arate că dacă $f(2)$ şi $f(3)$ sunt numere impare, atunci polinomul f nu are nicio rădăcină întreagă.

c) Să se arate că polinomul $g = X^3 - X + 3a + 1$ nu poate fi descompus în produs de două polinoame neconstante cu coeficienți întregi.

Soluție

a) $f(1) + f(-1) = 2(a_0 + a_2 + a_4 + ...)$ (suma se extinde asupra tuturor coeficienților cu indicele par).

b) Presupunem că f are o rădăcină $a \in \mathbb{Z}$. Atunci $f = (X - a)q$, cu $q \in \mathbb{Z}[X]$. Dacă $f(2) =$

$= (2 - a)q(2)$ şi $f(3) = (3 - a)q(3)$ sunt numere impare, atunci $2 - a$ şi $3 - a$ sunt numere impare, deci $3 - a - (2 - a) = 1$ este număr par, absurd.

c) Dacă g este produsul a două polinoame neconstante cu coeficienți întregi, atunci el are un factor de forma $X - b \in \mathbb{Z}[X]$, deci are o rădăcină $b \in \mathbb{Z}$. Atunci polinomul

$\hat{g} = X^3 - X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$ are rădăcina $\hat{b} \in \mathbb{Z}_3$. Avem $\hat{g}(\hat{0}) = \hat{g}(\hat{1}) = \hat{g}(\hat{2}) = \hat{1}$, deci $\hat{g}$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_3$, contradicție.

SUBIECTUL III

VARIANTA 45

2. Fie funcția $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

a) Să se calculeze $\int_{-1}^{1} x\sqrt{1 - x^2}dx$.

b) Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

c) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)dx$.

Soluție

a) Funcția $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x\sqrt{1 - x^2}$, este impară, intervalul $[-1, 1]$ este simetric față de origine, deci $\int_{-1}^{1} x\sqrt{1 - x^2}dx = 0$.

b) $V_f = \pi \int_{-1}^{1} f^2(x)dx = 2\pi \int_0^1 (1 - x^2)dx = 2\pi \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{4\pi}{3}$.

c) Avem $0 \leq f(x) \leq 1$, $\forall x \in [-1, 1]$, deci $0 \leq x^n f(x) \leq x^n$, $\forall x \in [-1, 1]$. Prin integrare se obține $0 \leq \int_0^1 x^n f(x)dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, de unde $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)dx = 0$ (criteriul cleștelui).

CATEDRA DE MATEMATICĂ, GRUPUL ŞCOLAR DE TRANSPORTURI – PLOIEŞTI

E-mail : avram050652@yahoo.com

MateInfo.ro
MATEmatică și INFOrmații din învățământul ROmânesc
Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. februarie 2010

SUFLETUL MOROMETIAN SI LOGICA MATEMATICA

1. Intr-o dimineata Moromete il trezi pe Nila si plecara in fundul gradinii intr-o valcea sa taie un salcam falnic ce crescuse langa un gard inalt de 1,50m,drept din uluci si care imprejmuia gradina lui Geaca.

Ajunsi langa salcam Moromete il intreaba pe Nila

- Ce inaltime o avea salcamul asta, stiind ca dimineata umbra sa de 20m suprapusa peste umbra gardului de 4m ating un varf comun ?

Raspuns:Moromete invatase la scoala de la invatatorul Teodorescu teorema fundamental a asemanarii ,s-i explica lui Nila:

Umbra copacului/ umbra gardului=inaltimea copacului/inaltimea gardului

$20/4=x/1,50 \Leftrightarrow x=1,50 \cdot 20/4=7,50$m, inaltimea salcamului=7,50m

2.Dupa ce a cumpãrat uluci din târg de la Mirosi ,intr-o superbã zi de primavarã Moromete, i-a pus pe copii sai Nilã,Paraschiv si Niculae sa imprejmuiasca cu un gard suprafata curtii in formã de dreptunghi cu lungimea de 40m si latimea de 30m.Pâna la amiazã ei batusera scandurile pe doua laturi consecutive ale dreptunghiului.Cum a procedat Moromete ca sa afle daca cele doua laturi formeaza un unghi drept ?

Raspuns :De la scoala el stia reciproca teoremei lui Pitagora ,asa ca a masurat diagonala si a obtinut 50m apoi a calculat:

$30^2+40^2=50^2 \Leftrightarrow 900+1600=2500 \Leftrightarrow 2500=2500$,deci copii lui procedasera corect.

3.Moromete s-a dus la Iocan cu 6 foi de tabla galvanizata sa-i confectioneze un bazin pe care sa-l folosesca pentru a uda legumele din gradina. Iocan i-a spus ca poate sa i-l faca sub forma de cub sau sfera. Dupa un timp de gandire Moromete hotaraste ca forma bazinului sa fie sferica. Cum a gandit el ?

Raspuns:Moromete si-a amintit formulele invatate la scoala si a calculat (a presupus suprafata foilor de tabla a^2) :

Pentru cub $A=6l^2 \Leftrightarrow a^2=6l^2 \Leftrightarrow l=a/\sqrt{6}$. deci $V=a^3/6\sqrt{6}$ u^3

Pentru sfera $A=4\pi R^2 \Leftrightarrow R=a/2\sqrt{\pi}$ deci $V=a^3/6\sqrt{\pi}$ u^3

V sfera > V cub , deci incap mai multi litri de apa in sfera.

Prof.Anghel Mihaita Giorgica

Scoala cu cls I-VIII,,Marin Preda'' Silistea Gumesti ,Teleorman

MateInfo.ro
MATEmatică și INFOrmații din învățământul ROmânesc

Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. februarie 2010

Opt probleme de olimpiada despre numarul 2010

-Marcu Stefan Florin-profesor-Calarasi

Problema 1 –clasa a VIII a

Aratati ca exista un numar prim p≤ 37 , si patru numere intregi a,b,c,d $\in$\{-1,1\}

astfel incat :

$\frac{1}{2010}=\frac{1}{p}\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{5}+\frac{d}{67}\right)$.

Solutie :

Se observa ca 2010=2·3·5·67

Atunci : $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{5}+\frac{d}{67}=\frac{1005a+670b+402c+30d}{2010}$

In acest caz , relatia din enunt , este echivalenta cu :

1005a+670b+402c+30d=p $\Rightarrow$ 2≤ 1005a+670b+402c+30d ≤37 (1)

Cazul I :

Daca a=1 , avem 1005+670b+402c+30d≤ 37.

Nu putem avea b=1 , altfel , indiferent de valorile lui c,d$\in$\{-1,1\}

inegalitatea (1) nu este indeplinita .

Daca b=-1 , avem : 2≤ 1005-670+402c+30d ≤ 37 $\Leftrightarrow$ 2≤ 335+402c+30d≤ 37

Se observa ca c nu poate fi egal , nici cu 1 , nici cu -1 , in caz contrar dubla inegalitate , nefiind indeplinita .

Cazul II :

Daca a=-1 $\Rightarrow$-1005+670b+402c+30d≤ 37 $\Leftrightarrow$670b+402c+30d$\leq$1042

Daca b=1 , avem 402c+30d≤ 372 .

In acest caz , se observa ca , daca c=1 si d=-1 , inegalitatea devine chiar egalitate.

Se verifica usor , faptul ca :

$\frac{1}{2010} - \frac{1}{37}(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{67})$, deci numerele cautate sunt p=37 , a=-1 , b=1 , c=1

si d=-1 .

Problema 2 – clasa a -X -a

a) Aflati cel mai mare numar natural a , si cel mai mic numar natural b , astfel incat : $2^a < 2010 < 3^b$.
b) Aratati ca : $[\log_2 2010] = [\log_3 2010] + [\log_5 2010]$.

S-a notat cu [x] , partea intreaga a numarului real x .

Solutie :

a) Se observa ca $2^{10} = 1024 \; si \; 2^{11} = 2048 > 2010$, deci a=10 .

De asemenea , observam ca : $3^6 = 729 \; si \; 3^7 = 2187 > 2010$, deci b=7.

b) Din a) , avem ca $[\log_2 2010]$=10 , deoarece $2^{10} < 2010 < 2^{11}$ si prin logaritmare in baza 2 , avem : 10<$\log_2 2010$<11 .

Deoarece $3^6 < 2010 < 3^7$, prin logaritmare in baza 3 , avem :

6<$\log_3 2010$<7 , deci $[\log_3 2010]$=6 .

Se mai observa ca 5^4=625<2010<5^5 . Deci , prin logaritmare in baza 5 ,

avem : $[\log_5 2010]$=4 . Dar 10=6+4 , deci :

$[\log_2 2010] = [\log_3 2010] + [\log_5 2010]$.

Problema 3-clasa a- X –a

a) Verificati ca : $\log 2010 = 1 + \log 201$
b) Aratati ca , orice numar natural de patru cifre , de forma $\overline{abcd}$, care verifica relatia : $\log \overline{abcd}$-$\log \overline{abc}$=1 , este divizibil cu 10 .

S-a notat cu $\log x$, logaritmul zecimal , al numarului real x .

Solutie :

a) Evident $\log 2010 = \log(201\cdot10)=\log(201)+\log 10 = 1+\log 201$.
b) Relatia din enunt , este echivalenta cu :

$\log\overline{abcd}=1+\log\overline{abc} <\!-\!> \log\overline{abcd}=\log(10\cdot\overline{abc})$

$<=> \overline{abcd}=10\cdot\overline{abc} <=>$ 1000a+100b+10c+d=10(100a+10b+c) $<=>$

1000a+100b+10c+d=1000a+100b+10c$<=> d=0$.

Deci , numarul $\overline{abcd}$ este divizibil cu 10 .

Problema 4-clasa a IX-a

a) Aflati un numar prim p $\in N^*$, p$\geq$2 , astfel incat :
$2p^7+11p^6+21p^5+18p^4+9p^3+4p^2+p=2010$.
b) Aflati , sapte numere naturale a,b,c,d,e,f,g $\in N^*$, astfel incat :
$a\cdot2^7+b\cdot2^6+c\cdot2^5+d\cdot2^4+e\cdot2^3+f\cdot2^2+g\cdot2=2010$.

Solutie :

a) Daca relatia din enunt , este indeplinita , atunci evident :
$2p^7<2010 => p^7<1005$. Daca p=3 , avem $3^7=2187>1005$.
Deci singura posibilitate , este p=2 .
Se verifica , prin calcul direct , faptul ca:
$2\cdot2^7+11\cdot2^6+21\cdot2^5+18\cdot2^4+9\cdot2^3+4\cdot2^2+2=2010$.
b) Conform punctului a) , avem : a=2 , b=11 , c=21 , d=18 , e=9 , f=4 , g=1.

Problema 5-clasa a VIII-a

Aflati trei numere naturale , prime consecutive , astfel incat ;

$a^3 \cdot b^3 \cdot c + a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 + a \cdot b \cdot c = 2010$.

(Trei numere naturale , sunt prime consecutive , daca sunt prime , si consecutive in sirul numerelor prime , de exemplu : (2,3,5) , (3,5,7)…).

Solutie :

Evident $a^3 \cdot b^3 \cdot c < 2010$. Daca a=3 , atunci , este obligatoriu ca b=5 si c=7 .

Dar $3^3 \cdot 5^3 \cdot 7$>2010 (evident) .

Atunci , singura posibilitate , este : a=2 , b=3 , c=5 .

Se verifica , faptul ca :

$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$+$2 \cdot 3 \cdot 5$=2010 .

Problema 6-clasa a -VII-a

Bunicul Stefan , are trei nepoti .Se stie ca , varstele nepotilor , sunt numere prime consecutive , iar produsul dintre varsta bunicului si varstele celor trei nepoti , este 2010. Aflati varsta bunicului si a nepotilor sai .

(Trei numere naturale , sunt prime consecutive , daca sunt prime , si consecutive in sirul numerelor prime , de exemplu : (2,3,5) , (3,5,7)…).

Solutie :

Sa notam cu a,b,c , varstele celor trei nepoti .

Observam ca 2010=2·3·5·67 .

Tinand cont , de unicitatea descompunerii unui numar in factori primi ,

obtinem ca cei trei nepoti au varstele 2,3 , respectiv 5 ani , iar bunicul are 67 ani .

Problema 7-clasa a VIII-a

Sa se afle patru numere naturale a,b,c,d $\in N^*$ cu a>b>c>d , astfel incat :

$a^2 + b^2 + c^2$+ d^2=2010 .

Solutie :

Evident $a^2 < 2010 \Rightarrow a < \sqrt{2010} \Rightarrow$ a< 45 .

Daca a=44 => $b^2 + c^2 + d^2$=2010-44^2=2010-1936=74.

Deci $b^2 < 74 \Rightarrow$ b<9 .

Daca b=8 => $c^2 + d^2$=10 . Evident , putem lua c=3 si d=1 , deoarece

$3^2 + 1^2 = 10$. Deci a=44 , b=8 , c=3 si d=1 .

Problema 8-clasa a IX-a

a) Aratati ca , ultima cifra , a unui numar natural , cub perfect , poate fi orice cifra .
b) Aflati patru numere naturale prime , a,b,c,d $\in N^*$ cu a>b>c>d , astfel incat : 2010 = $a^3 - b^3 - 2 \cdot c^3$-d^3 .

Solutie :

a) Daca notam cu u(x)=ultima cifra a numarului natural x , observam ca : $u(0^3) = 0$, $u(1^3) = 1$, $u(2^3) = 8$, $u(3^3) = 7$, $u(4^3) = 4$, $u(5^3) = 5$, $u(6^3$)=6 , $u(7^3)$=3 , u(8^3) = 2 , u(9^3) = 9 . Deci , ultima cifra poate fi oricare dintre cifrele 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 .
b) Observam ca $a^3 > 2010 \Rightarrow a > \sqrt[3]{2010}$.

   Dar , $13^3 = 2197 > 2010$, $iar\ 12^3 = 1728 < 2010$.

   Daca luam a=13 , atunci 2010=2197-$b^3 - 2 \cdot c^3$-$d^3 \Leftrightarrow$

   $b^3 + 2 \cdot c^3 + d^3 = 187$. $Deci\ b^3 < 187$.

   $Atunci$ b<$\sqrt[3]{187}$ (dar 5^3=125 , iar $6^3 = 216$).

$$Daca\ luam\ b = 5, atunci\ 125 + 2 \cdot c^3 + d^3 = 187 \Rightarrow 2 \cdot c^3 + d^3 = 62 .$$

Evident , pentru c=3 , obtinem ca d=2 .

Deci , numerele cautate sunt : a=13 , b=5 , c=3 , d=2 .

Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. februarie 2010

Asupra unor numere "extreme"

-de Marcu Stefan Florin profesor Calarasi-

Vom spune ca patru numere reale a,b,c,d sunt numere extreme daca indeplinesc conditiile

1) $a\geq 0$, $b>0$, $c>0$, $d\geq 0$
2) $\frac{a+b}{2}=\frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\sqrt{cd}$

Relatiile 2) exprima faptul ca media aritmetica dintre a si b este egala cu media armonica dintre b si c si cu media geometrica dintre c si d.

Consecinte ale definitiei:

1) $d\neq 0$
2) Daca a=0 atunci b=3c si $d=\frac{9}{4}c$

Demonstratie:

1) Daca $d=0\Rightarrow \frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=0\Leftrightarrow \frac{2bc}{b+c}=0\Rightarrow b=0$ sau c=0 (absurd), deci si $d\neq 0$
2) Daca a=0 $\Rightarrow \frac{b}{2}=\frac{2bc}{b+c}=\sqrt{cd}$ $\Rightarrow b(b+c)=4bc\Rightarrow b^2=3bc\Rightarrow b=3c$

Din $\sqrt{cd}=\frac{b}{2}=\frac{3c}{2}\Rightarrow cd=\frac{9c^2}{4}\Rightarrow$ $d=\frac{9}{4}c$.

In continuare vom prezenta o serie de proprietati remarcabile ale acestor numere si vom arata cum se pot gasi acestea.

PROPRIETATEA 1

Daca doua numere extreme sunt egale atunci toate patru sunt egale.

SOLUTIE:

Vom studia toate cazurile posibile:

1) a=d $\Rightarrow \frac{a+b}{2}=\frac{2bc}{b+c}=\sqrt{ca}\Rightarrow$ $(a+b)^2=4ca$ si (a+b)(b+c)=4bc

Evident $a+b\neq 0$ si impartind cele doua relatii obtinem :

$\frac{a+b}{b+c}=\frac{a}{b}\Rightarrow b^2=ac\Rightarrow b=\sqrt{ca}=\frac{a+b}{2}\Rightarrow a=b\Rightarrow b=c$. Deci a=b=c=d.

2) a=c $\Rightarrow \frac{a+b}{2}=\frac{2ab}{a+b}=\sqrt{ad}\Rightarrow$ a=b(deoarece daca media aritmetica a doua numere este egala cu media lor armonica cele doua numere sunt egale). Deci $a=\sqrt{ad}\Rightarrow$ a=d (daca a=0 atunci c=0 absurd) si conform cu 1) avem a=b=c=d.

3) a=b $\Rightarrow a=\frac{2ac}{a+c}=\sqrt{cd}\Rightarrow a^2=ac$ si cum $a=b\neq 0\Rightarrow a=c$ si conform cu 2) avem a=b=c=d

4) b=c $\Rightarrow \frac{a+b}{2}=\frac{2b^2}{2b}=\sqrt{bd}\Rightarrow$ a=b=d.

5) b=d $\Rightarrow \frac{a+b}{2}=\frac{2bc}{b+c}=\sqrt{cb}\Rightarrow$ b=c (deoarece media geometrica dintre b si c este egala cu media lor armonica) si din 4) avem a=b=c=d.

6) c=d $\Rightarrow \frac{a+b}{2}=\frac{2bc}{b+c}=c\Rightarrow$ b=c si a=b.

PROPRIETATEA 2

Daca a,b,c,d sunt numere extreme atunci au loc inegalitatile:

i. $a+b\leq c+d$

ii. $ab\leq cd$

iii. $a \le c$

iv. $b \ge d$

v. $c \ge \frac{a+b}{3}$

DEMONSTRATIE:

Folosind inegalitatea mediilor avem:

Din $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{cd} \ge \sqrt{ab} \Rightarrow ab \le cd$

Din $\frac{2bc}{b+c} \le \sqrt{cb} \Rightarrow \sqrt{cd} \le \sqrt{cb} \Rightarrow b \ge d$

Din $\sqrt{cd} \le \frac{c+d}{2} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \le \frac{c+d}{2} \Rightarrow a+b \le c+d$

Din $(a+b)(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=4 \Rightarrow \frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{c}=4 \Rightarrow \frac{a+b}{c}=4-\frac{a+b}{b}=3-\frac{a}{b} \le 3 \Rightarrow a+b \le 3c \Rightarrow$

$c \ge \frac{a+b}{3}$

PROPRIETATEA 3

Daca a,b,c,d numere extreme strict pozitive cu $b \ne d$ atunci:

1) $\frac{a+b}{b+c}=\frac{d}{b}$

2) $\frac{a-c}{d-b}=\frac{4c}{a+b}$

DEMONSTRATIE:

Din definitia numerelor extreme avem relatiile :

$(a+b)^2=4cd$ si $(a+b)(b+c)=4bc$

Impartind cele doua relatii avem : $\frac{a+b}{b+c}=\frac{d}{b}$

Scazand relatiile avem $(a+b)(a-c)=4c(d-b) \Rightarrow \frac{a-c}{d-b}=\frac{4c}{a+b}$

PROPRIETATEA 4

Daca a,b,c,d numere extreme strict pozitive cu c-a=b-d atunci a=b=c=d.

DEMONSTRATIE:

Din c-a=b-d avem a=c-b+d si inlocuind in definitia numerelor extreme avem:

$\frac{c-b+d+b}{2}=\frac{2bc}{b+c}=\sqrt{cd}\Rightarrow\frac{c+d}{2}=\sqrt{cd}\Rightarrow$c=d si din P1 avem a=b=c=d.

PROPRIETATEA 5

Daca a,b,c,d numere extreme strict pozitive cu c-a=2(b-d) atunci a=b=c=d.

DEMONSTRATIE:

Din P3 avem (a+b)(a-c)=4c(d-b) si din ipoteza $\Rightarrow$2(a+b)(d-b)= 4c(d-b)

$\Rightarrow$d=b sau c= $\frac{a+b}{2}=\sqrt{cd}$ $\Rightarrow$c=d. In ambele situatii din P1 $\Rightarrow$ a=b=c=d.

CONSECINTE:

1) Daca a+b=c+d sau ab=cd unde a,b,c,d numere extreme strict pozitive atunci a=b=c=d.

2)Nu exista patru numere extreme in progresie aritmetica sau geometrica.

DEMONSTRATIE:

1) Din a+b=c+d $\Rightarrow$ c-a=b-d si din P4 $\Rightarrow$ a=b=c=d

Din ab=cd si din $\frac{a+b}{2}=\sqrt{cd}=\sqrt{ab}\Rightarrow$a=b $\Rightarrow$ a=b=c=d

2)Lasam ca exercitiu aceasta demonstratie care este evidenta folosind P2.

TEOREMA

Daca a,b,c,d numere extreme strict pozitive si distincte doua cate doua atunci $(\exists)$ p,q$\in(0,+\infty)$ cu p>$\frac{4q}{3}$ si p$\neq$2q astfel incat :

a=$\frac{pq(3p-4q)}{(p-2q)^2}$ b=$\frac{p^2q}{(p-2q)^2}$ c=$\frac{p^2(p-q)}{(p-2q)^2}$ d=$\frac{4q^2(p-q)}{(p-2q)^2}$.

DEMONSTRATIE:

Din P2 avem a<c si b>d (deoarece sunt distincte)

Sa notam c-a=p si b-d=q Evident p>0 si q>0.

Se observa ca p$\neq$2q deoarece in caz contrar am avea c-a=2(b-d) si din P5 avem a=b=c=d contradictie.

Sa mai aratam si ca p>$\frac{4q}{3}$ $\Leftrightarrow$3p>4q $\Leftrightarrow$3(c-a)>4(b-d)

Din P3 stim ca $\frac{a-c}{d-b}=\frac{4c}{a+b}$

Din P2 avem c$\geq\frac{a+b}{3}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{4c}{a+b}\geq\frac{4}{3}$ si obtinem $\frac{a-c}{d-b}\geq\frac{4}{3}$ $\Leftrightarrow$3(c-a) $\geq$4(b-d)

Vom mai arata ca inegalitatea de mai sus este stricta , altfel daca 3(c-a)=4(b-d) obtinem c=$\frac{a+b}{3}$

Din (a+b)(b+c)=4bc $\Rightarrow$3c(b+c)=4bc$\Rightarrow$b=3c si cum a+b=3c am avea a=0(absurd).

In continuare avem c=a+p si b=d+q . Inlocuind pe c si b in relatiile din P3 obtinem: $\frac{a+d+q}{a+d+p+q}=\frac{d}{b}$ si prin calcul direct obtinem d=$\frac{aq+q^2}{p-q}$

Din a doua relatie din P3 avem $\frac{p}{q}=\frac{4(a+p)}{a+d+q}$ si prin calcul direct obtinem d=$\frac{a(4q-p)+3pq}{p}$ Egaland cele doua relatii obtinem a= $\frac{pq(3p-4q)}{(p-2q)^2}$

In continuare inlocuind pe a obtinem d=$\frac{4q^2(p-q)}{(p-2q)^2}$

Dar c=a+p=$\frac{p^2(p-q)}{(p-2q)^2}$ si b=d+q=$\frac{p^2 q}{(p-2q)^2}$ prin calcul direct .

OBSERVATII:

Se pot construi oricat de multe astfel de numere , de exemplu daca luam p=5 si q=3 obtinem a=45 , b=75 , c=50 , d=72.

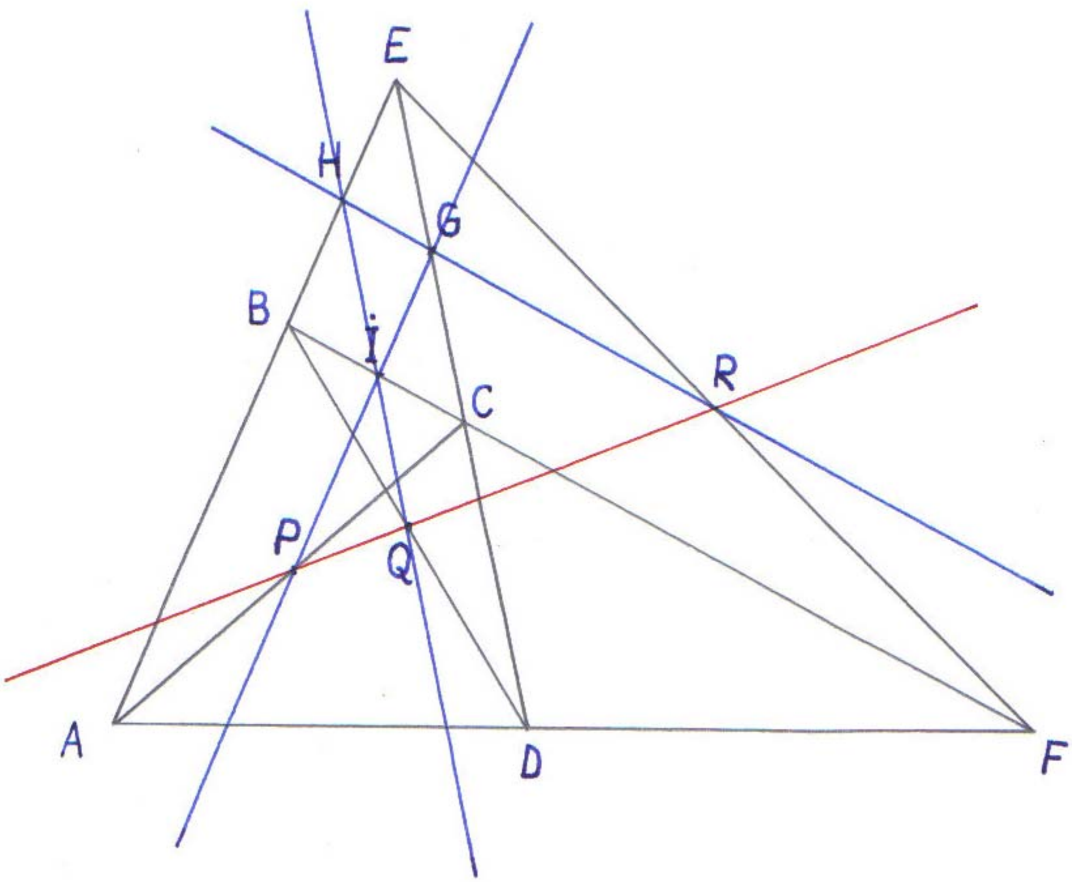
PROPUNEM CELOR INTERESATI SA GASEASCA SI ALTE PROPRIETATI INTERESANTE ALE ACESTOR NUMERE.

MateInfo.ro
MATEmatică şi INFOrmaţii din învăţământul ROmânesc
Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. februarie 2010

TEOREMA NEWTON GAUSS PENTRU PATRULATERUL COMPLET

Definiție: Se numeşte patrulater complet ABCDEF un patrulater ABCD, unde $\{E\} = AB \cap CD$ **şi** $\{F\} = BC \cap AD$**. Segmentele** $[AC],[BD],[EF]$ **se numesc diagonale ale patrulaterului complet.**

Teorema NEWTON-GAUSS: Mijloacele diagonalelor unui patrulater complet sunt coliniare.



Demonstrație:

Notăm cu P, Q, R mijloacele diagonalelor AC, BD şi EF. Vrem să demonstrăm că punctele P, Q şi R sunt coliniare.

Fie G, H, I mijloacele segmentelor CE, EB şi BC.

$$\left.\begin{array}{l}\text{În } \triangle \text{BCE, GI este linie mijlocie fiind paralelă cu BE} \\ \text{În } \triangle \text{BCA, PI este linie mijlocie fiind paralelă cu BA} \\ \text{Cum punctele A, B şi E sunt coliniare}\end{array}\right\} \Rightarrow G, I, P$$ sunt situate pe o paralelă la EA

$$\left.\begin{array}{l}\text{În } \triangle C\text{BE, HI este linie mijlocie fiind paralelă cu EC} \\ \text{În } \triangle C\text{BD, QI este linie mijlocie fiind paralelă cu CD} \\ \text{Cum punctele C, D şi E sunt coliniare}\end{array}\right\} \Rightarrow H, I, Q$$ sunt situate pe o paralelă la ED

$$\left.\begin{array}{l}\text{În } \triangle CEB\text{, GH este linie mijlocie fiind paralelă cu BC} \\ \text{În } \triangle CEF\text{, GR este linie mijlocie fiind paralelă cu CF} \\ \text{Cum punctele B, C şi F sunt coliniare}\end{array}\right\} \Rightarrow H, G, R$$ sunt situate pe o paralelă la BF

Observăm că punctele P,Q şi R sunt situate pe prelungirile laturilor triunghiului $\triangle GHI$. Vom încerca cu ajutorul Reciprocei Teoremei lui Menelaus să arătăm că acestea sunt coliniare. Avem de arătat că: $\frac{PI}{PG} \cdot \frac{RG}{RH} \cdot \frac{QH}{QI} = 1$

Pentru aceasta vom folosi linii mijlocii convenabile astfel:

$$\left.\begin{array}{l}\text{În } \triangle CAB\text{, PI este linie mijlocie} \Rightarrow \text{PI}=\frac{AB}{2} \\ \text{În } \triangle \text{CAE, PG este linie mijlocie} \Rightarrow \text{PG}=\frac{AE}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{PI}{PG} = \frac{AB}{AE} (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{În } \triangle ECF\text{, RG este linie mijlocie} \Rightarrow \text{RG}=\frac{FC}{2} \\ \text{În } \triangle EBF\text{, RH este linie mijlocie} \Rightarrow \text{RH}=\frac{FB}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{RG}{RH} = \frac{FC}{FB} (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{I}n\ \triangle BDE,\ \text{QH este linie mijlocie} \Rightarrow \text{QH}=\dfrac{DE}{2} \\ \hat{I}n\ \triangle BCD,\ \text{QI este linie mijlocie} \Rightarrow \text{QI}=\dfrac{DC}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{QH}{QI}=\frac{DE}{DC}(3)$$

Înmulţind relaţiile $(1),(2)şi(3)$ membru cu membru, obţinem:

$$\frac{PI}{PG}\cdot\frac{RG}{RH}\cdot\frac{QH}{QI}=\frac{AB}{AE}\cdot\frac{FC}{FB}\cdot\frac{DE}{DC}(4)$$

Ştim că punctele A,F şi D sunt coliniare, fiind situate pe prelungirile laturilor triunghiului $\triangle BEC$ şi conform Teoremei lui Menelaus avem:

$$\frac{AB}{AE}\cdot\frac{FC}{FB}\cdot\frac{DE}{DC}=1 \quad (5)$$

Din relaţiile (4) şi (5) $\Rightarrow \dfrac{PI}{PG}\cdot\dfrac{RG}{RH}\cdot\dfrac{QH}{QI}=1 \Rightarrow$ Conform Reciprocei Teoremei lui Menelaus, punctele P,Q şi R sunt coliniare, ceea ce trebuia să demonstrăm.

Propunător: Prof. IGNĂTESCU VIOREL OVIDIU
Şcoala cu clasele I-VIII Măteşti, com. Săpoca, jud. Buzău

Bibliografie: Mihail Megan; Gheorghe Ivan; Mircea Puta. EXAMENE ŞI CONCURSURI PENTRU PROFESORII DE MATEMATICĂ. Editura Mirton, Timişoara, 1997

Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. februarie 2010

Rezolvarea ecuațiilor şi sistemelor de ecuații neliniare

I . REZOLVAREA ECUAȚIILOR NELINIARE

1. INTRODUCERE

Prin ecuații neliniare se înțeleg ecuațiile algebrice şi transcendente, cu excepția ecuațiilor algebrice de gradul unu.

O ecuație este *algebrică* dacă funcția $f(x)=0$ este un polinom sau poate fi adusă la o formă polinomială, în urma unor transformări.

Ecuațiile: $5x^7-4x^6+12x^3+x-14=0$ şi $\sqrt{x^3-4}+15x-32=0$ sunt exemple de ecuații algebrice.

O ecuație este *transcendentă* dacă nu este algebrică.

Ecuațiile $x\cdot\sin^2(x)-e^x\tan(x)+3.8=0$, $\ln(x)+\cos(x^2)-1.48=0$ sunt ecuații transcendente.

În acest capitol ne vom ocupa de determinarea rădăcinilor reale ale ecuațiilor neliniare. Astfel, dacă α este o rădăcină reală a ecuației $f(x)=0$, graficul funcției $f(x)$ intersectează axa absciselor în punctul $x=\alpha$ (v.fig.1.1).

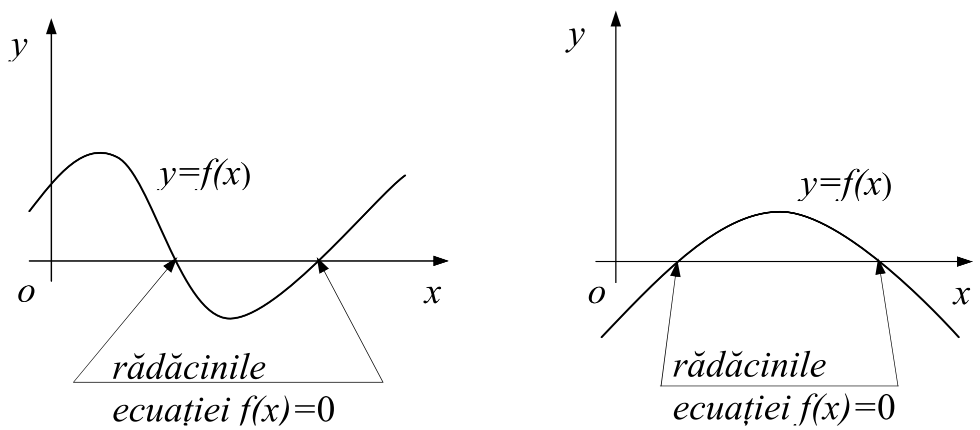


Fig.1.1. Rădăcinile ecuației $f(x)=0$

De regulă, ecuațiile neliniare se rezolvă pe cale numerică, iterativ, excepție făcând unele ecuații algebrice simple de gradul doi, trei sau patru sau unele ecuații transcendente, pentru care s-au stabilit metode exacte de rezolvare. De aceea, prin rezolvarea numerică a unei ecuații se obține o soluție aproximativă, soluție care poate fi totuşi suficient de aproape de soluția exactă, după cum se va vedea în continuare .

Fie $[a,b]$ un domeniu în care ecuația

$$f(x)=0 \tag{1.1}$$

are o soluție unică, α .

Rezolvarea numerică a ecuației (1.1), pornind de la o soluție inițială $x^{(0)}$, conduce la obținerea un şir de valori $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, …, $x^{(k)}$, care converge către soluția unică α pentru $k=\infty$, adică $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}=\alpha$.

Oprirea procesului iterativ, de găsire a soluției ecuației $f(x)=0$, se face atunci când sunt îndeplinite condițiile:

$$\begin{aligned} &\left|x^{(k)}-\alpha\right| \le \varepsilon_1; \\ &\left|f(x^{(k)}\right| \le \varepsilon_2, \end{aligned} \tag{1.2}$$

unde ε_1 şi ε_2 sunt numere pozitive foarte mici.

Cele două condiții (1.2) nu sunt echivalente, după cum se observă din figura 1.2. Astfel, dacă modulul pantei funcției $y=f(x)$, în punctul $x^{(k)}$, este mic (fig.1.2.*a*), atunci $\left|f(x^{(k)})\right|$ este suficient de mic, iar valoarea $\left|x^{(k)}-\alpha\right|$ este mare. În figura 1.2.*b*, avem $\left|f(x^{(k)})\right|$ mare şi $\left|x^{(k)}-\alpha\right|$ mic.

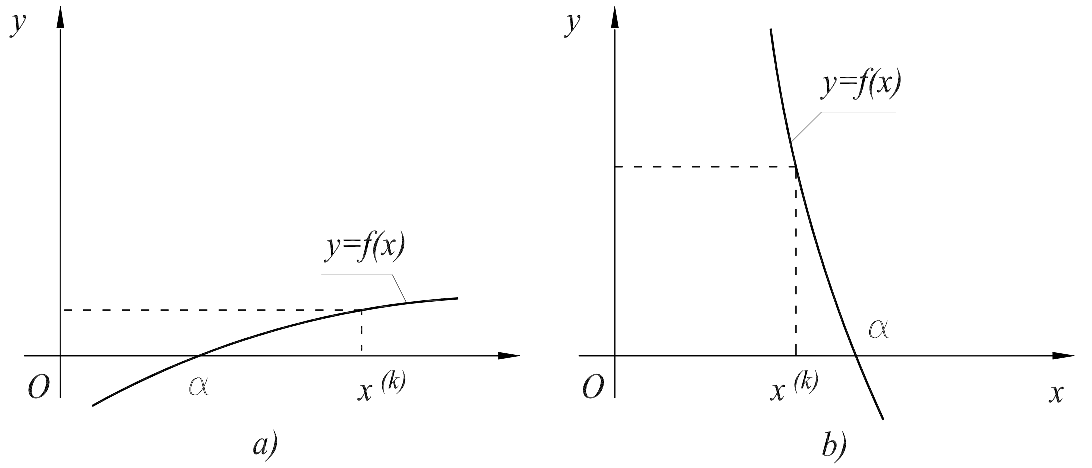


Fig.1.2. Punerea în evidență a rădăcinilor aproximative

În practică se folosesc fie ambele condiții (1.2), fie numai una dintre ele, în funcție de problema de rezolvat.

După cum s-a arătat mai înainte, în domeniul $[a,b]$ trebuie să existe o soluție unică α. De aceea, la determinarea soluțiilor reale ale ecuației $f(x)=0$ se parcurg două etape, şi anume:

a) separarea rădăcinilor ecuației (1.1);
b) determinarea aproximativă a rădăcinilor, folosind o metodă numerică adecvată.

2. METODE ITERATIVE DE REZOLVARE A ECUAŢIILOR ALGEBRICE ŞI TRANSCENDENTE

2.1. Metoda Newton-Raphson

Fie $f(x)=0$ o ecuaţie algebrică sau transcendentă, care în intervalul $[a,b]$ are o rădăcină unică α. Presupunem că derivatele $f'(x)$ şi $f''(x)$ sunt continue şi păstrează semnul constant pentru $x\in[a,b]$, unde $a<b$.

Pentru determinarea formulei de iterare, cu ajutorul căreia se obţine o aproximantă a rădăcinii reale α, se vor folosi două metode, şi anume: o metodă analitică, care foloseşte dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei $f(x)$ în jurul lui $x^{(k)}$, şi o metodă geometrică, în care se foloseşte tangenta la curba $y=f(x)$ în punctul $(x^{(k-1)}, f(x^{(k-1)})$.

1. Fie $x^{(k)}=x^{(k-1)}+\Delta x$. Dezvoltând în serie Taylor funcţia $f(x)$, în jurul lui $x^{(k)}$, rezultă:

$$\begin{aligned} f(x^{(k)}) = f(x^{(k-1)}) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x^{(k-1)}) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x^{(k-1)}) + \cdots \\ + \frac{(\Delta x)^{(k-1)}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(x^{(k-1)}) + \cdots = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Dacă se reţin primii doi termeni din relaţia (2.8), se obţine:

$$f(x^{(k-1)}) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x^{(k-1)}) \cong 0,$$

de unde rezultă:

$$x^{(k)} \cong x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)}}{f'(x^{(k-1)})}, \quad k=1,2,\cdots \tag{2.9}$$

care se numeşte *formula de iterare de ordinul doi*.

Procesul de obţinere iterativă a soluţiei se opreşte atunci când este îndeplinită relaţia:

$$\left| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right| \le \varepsilon. \tag{2.10}$$

Dacă din dezvoltarea în serie (2.8) se reţin primii trei termeni, se obţine formula de iterare de ordinul trei. Pentru aceasta, relaţia

$$f(x^{(k-1)}) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x^{(k-1)}) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x^{(k-1)}) = 0$$

se scrie sub forma:

$$f(x^{(k-1)}) + \Delta x\left[f'(x^{(k-1)}) + \frac{\Delta x}{2} f''(x^{(k-1)})\right] = 0,$$

unde termenul Δx, din interiorul parantezei mari, se înlocuieşte cu $-\dfrac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})}$, adică cu eroarea din formula de iterare de ordinul doi. În acest caz, se obţine:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{2f(x^{(k-1)})f'(x^{(k-1)})}{2\left(f'(x^{(k-1)})\right)^2 - f(x^{(k-1)})f''(x^{(k-1)})}, \qquad (2.11)$$

care poartă numele de *formulă de iterare de ordinul trei*.

2. Cea de a doua metodă de determinare a formulei de iterare Newton-Raphson porneşte de la interpretarea geometrică a relaţiei (2.9). Astfel, dacă se consideră $x^{(0)} = b$, $f'(x^{(0)}) > 0$, $f''(x^{(0)}) > 0$ (v. fig.2.3) şi se duce tangenta la curbă în punctul $(x^{(0)}, f(x^{(0)}))$, atunci intersecţia acesteia cu axa absciselor se notează cu $x^{(1)}$ şi reprezintă o aproximantă a soluţiei reale α, căreia îi spunem: *soluţia ecuaţiei la iteraţia unu*. După cum se observă, s-a înlocuit curba $y = f(x)$ cu tangenta în punctul $(x^{(0)}, f(x^{(0)}))$. În continuare, se duce tangenta la curbă în punctul $(x^{(1)}, f(x^{(1)}))$ şi intersecţia acesteia cu axa absciselor o notăm cu $x^{(2)}$ şi reprezintă soluţia ecuaţiei la iteraţia a doua. Dacă se consideră tangenta la curbă în punctul $(x^{(k-1)}, f(x^{(k-1)}))$, se ia un punct $M(x, y)$ pe această tangentă şi se scrie ecuaţie dreptei de pantă $f'(x^{(k-1)})$, care trece prin punctul *M*, atunci se obţine:

$$\frac{y - f(x^{(k-1)})}{x - x^{(k-1)}} = f'(x^{(k-1)}).$$

Pentru $y = 0$ rezultă $x = x^{(k)}$, astfel că se obţine relaţia:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})},$$

care este formula de iterare Newton-Raphson de ordinul doi.

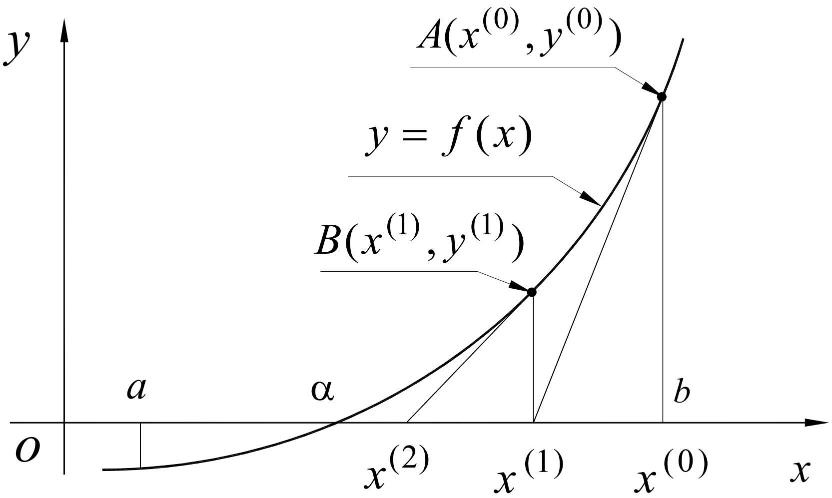


Fig. 2.2. Ilustrarea metodei Newton-Raphson

2.2. Metoda bisecţiei succesive

Fie $f(x)=0$, o ecuaţie algebrică sau transcendentă, care în intervalul $[a,b]$ are o rădăcină unică α, adică $f(a)\cdot f(b)<0$. Determinarea soluţiei ecuaţiei considerate, constă în înjumătăţirea succesivă a intervalelor de incertitudine până când se obţine o valoare care să aproximeze, cu o eroare acceptată, rădăcina α (v.fig. 2.5).

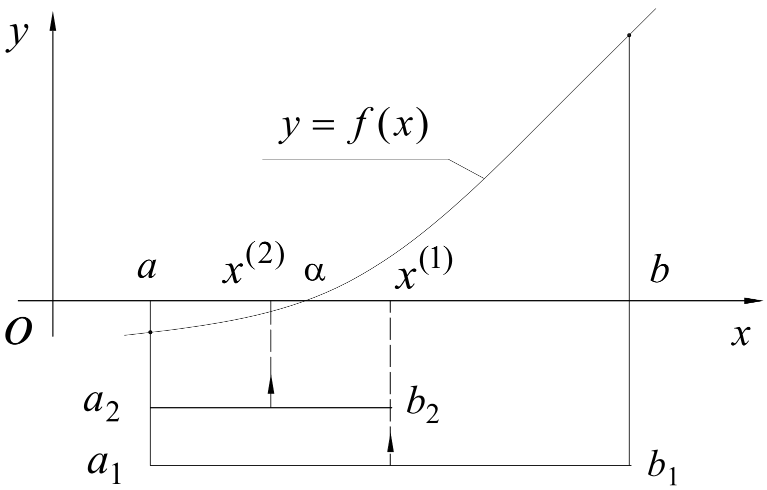


Fig. 2. Ilustrarea metodei bisecţiei

Etapele parcurse pentru determinarea unei soluţii care să aproximeze rădăcina reală α sunt:

- se fac notaţiile: $a_1=a$, $b_1=b$;
- se calculează $x^{(1)}=\dfrac{a_1+b_1}{2}$;
- dacă $f(a_1)\cdot f(x^{(1)})<0$, atunci: $a_2=a_1$, $b_2=x^{(1)}$, altfel: $a_2=x^{(1)}$, $b_2=b_1$;

- se calculează $x^{(2)} = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$;

- la etapa k avem: $x^{(k)} = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.

Procesul iterativ de calcul se oprește dacă $\left|b_k - a_k\right| \le \varepsilon$ sau $\left|f(x^{(k)})\right| \le \varepsilon$, unde ε este un număr pozitiv foarte mic.

2.3 Metoda coardei

Fie ecuația algebrică sau transcendentă $f(x) = 0$, care pe intervalul $[a,b]$ are o rădăcină reală $x = \alpha$. Pentru determinarea soluției, cu o anumită eroare impusă, se înlocuiește funcția $f(x)$ cu un polinom de interpolare de ordinul unu de forma:

$$g(x) = a_1 x + a_2, \tag{2.15}$$

astfel încât:

$$g(a) = f(a),\ g(b) = f(b). \tag{2.16}$$

Dreapta $g(x)$ intersectează axa absciselor în punctul $x^{(1)}$ (v. fig. 2.6). Pentru aflarea lui $x^{(1)}$ este necesară determinarea constantelor a_1 și a_2. Folosind relația (2.15) și condițiile 2.16), rezultă:

$$a_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},\ a_2 = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}. \tag{2.17}$$

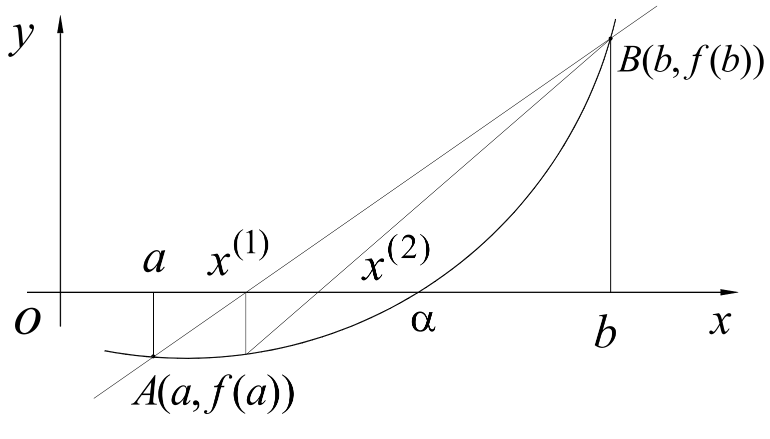


Fig. 2.6. Ilustrarea metodei coardei

După înlocuiri în relația (2.15), se obține:

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}. \tag{2.18}$$

Pentru: $x = x^{(1)}$, $a_1 = a$, $b_1 = b$, rezultă $g(x^{(1)}) = 0$, și deci:

$$x^{(1)} = \frac{a_1 f(b_1) - b_1 f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}. \quad (2.19)$$

În continuare, se testează dacă soluţia α se află în intervalul $[a, x^{(1)}]$ sau în intervalul $[x^{(1)}, b]$. Astfel, dacă $f(a) \cdot f(x^{(1)}) < 0$, se fac notaţiile: $a_2 = a_1$, $b_2 = x^{(1)}$, altfel: $a_2 = x^{(1)}$, $b_2 = b_1$, şi rezultă:

$$x^{(2)} = \frac{a_2 f(b_2) - b_2 f(a_2)}{f(b_2) - f(a_2)}.$$

La etapa k avem:

$$x^{(k)} = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}. \quad (2.20)$$

Procesul iterativ de calcul se opreşte dacă: $|b_k - a_k| \le \varepsilon$ sau $|f(x^{(k)})| \le \varepsilon$, unde ε este un număr pozitiv foarte mic.

Metoda mai poartă numele de metoda părţilor proporţionale, deoarece intervalul $[a, b]$ este împărţit în părţi proporţionale cu $f(a)$ şi $f(b)$.

Exemplu: Se consideră ecuaţia:

f(x) = 0 , f(x) = 2·tg$x$ – 10·x + 3 ,

pentru care s-a separat o soluţie în intervalul [–1, 1]. Să se determine soluţia ecuaţiei utilizând metoda bisecţiei, erorile admise fiind $\varepsilon_x = 10^{-3}$ şi $\varepsilon_f = 10^{-2}$.

Soluţie: Se parcurg etapele metodei bisecţiei:

I) Iniţializări:

$r^0 = -1$, $s^0 = 1$, $|r^0 - s^0| = 2$.

Iteraţia k = 1:

II) $x^1 = \dfrac{r^0 + s^0}{2} = 0$;

III) $f(x^1) = f(0) = 3$, $f(r^0) = f(-1) = 9.885$,

$f(x^1) \cdot f(r^0) > 0 \quad \Rightarrow \quad r^1 = x^1 = 0$, $s^1 = s^0 = 1$.

$|r^1 - s^1| = 1 > \varepsilon_x$ și $|f(x^1)| = 3 > \varepsilon_f$.

Iterația k = 2:

II) $x^2 = \dfrac{r^1 + s^1}{2} = 0.5$;

III) $f(x^2) = f(0.5) = -0.9074$, $f(r^1) = f(0) = 3$,

$f(x^2) \cdot f(r^1) < 0 \Rightarrow r^2 = r^1 = 0$, $s^2 = x^2 = 0.5$.

$|r^2 - s^2| = 0.5 > \varepsilon_x$ și $|f(x^2)| = 0.9074 > \varepsilon_f \Rightarrow$

Se trece la iterația următoare:

Iterația k = 3:

II) $x^3 = \dfrac{r^2 + s^2}{2} = 0.25$;

III) $f(x^3) = f(0.25) = 1.011$, $f(r^2) = f(0) = 3$,

$f(x^3) \cdot f(r^2) > 0 \Rightarrow r^3 = x^3 = 0.25$, $s^3 = s^2 = 0.5$.

$|r^3 - s^3| = 0.25 > \varepsilon_x$ și $|f(x^3)| = 1.011 > \varepsilon_f \Rightarrow$

Algoritmul se continuă.

Iterația k = 4:

II) $x^4 = \dfrac{r^3 + s^3}{2} = 0.375$;

III) $f(x^4) = f(0.375) = 0.037$, $f(r^3) = f(0.25) = 1.011$,

$f(x^4) \cdot f(r^3) > 0 \Rightarrow r^4 = x^4 = 0.375$, $s^4 = s^3 = 0.5$.

$|r^4 - s^4| = 0.125 > \varepsilon_x$ și $|f(x^4)| = 0.375 > \varepsilon_f$.

Erorile au scăzut, însă nu suficient de mult pentru ca cele două condiții de terminare să fie îndeplinite $\Rightarrow$ alte iterații.

II. REZOLVAREA SISTEMELOR DE ECUAȚII NELINIARE

1. INTRODUCERE

Rezolvarea sistemelor de ecuații neliniare se face, de regulă, cu ajutorul metodelor iterative. Sunt puține cazurile când se procedează la rezolvarea analitică şi aceasta numai dacă sistemele au un număr mic de ecuații, iar forma acestora este deosebit de simplă.

Metodele iterative de rezolvare a sistemelor de ecuații neliniare cer o aproximație inițială a soluției, iar această aproximație trebuie să se afle într-un domeniu restrâns al soluției căutate. După cum este cunoscut, un sistem de ecuații neliniare are mai multe soluții, de aceea, în funcție de aproximația inițială se obține soluția finală. Odată soluția finală obținută, aceasta trebuie analizată, pentru a vedea în ce măsură răspunde cerințelor procesului sau fenomenului analizat.

1. METODA NEWTON-RAPHSON

Fie $f_1, f_2, \cdots, f_n$, n funcții neliniare definite pe un domeniu $X \subset R^n$, care depind de necunoscutele $x_1, x_2, ..., x_n$ şi formează sistemul de ecuații neliniare:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Vectorial, sistemul poate fi scris sub forma:

$$f(x) = 0, \; f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}, \;\; \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^n, \; \mathbf{Y} \subset \mathbf{R}^n. \tag{1.2}$$

Presupunem că în vecinătatea $\mathbf{V} \subset \mathbf{X}$ există o soluție unică α, adică $f(\alpha) = 0$.

Rezolvarea iterativă a sistemului (1.1) presupune cunoaşterea unei aproximații inițiale a soluției finale. Fie această aproximație de forma: $x_1^{(0)}, \; x_2^{(0)}, \; \cdots, \; x_n^{(0)}$. Aproximația considerată nu verifică ecuațiile sistemului (1.1), ceea ce înseamnă că:

$$\begin{cases} f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \neq 0; \\ f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \neq 0; \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \neq 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Dacă la fiecare variabilă independentă se adaugă eroarea absolută limită, se obține: $x_1 = x_1^{(0)} + \Delta x_1$, $x_2 = x_2^{(0)} + \Delta x_2$, $\ldots$, $x_n = x_n^{(0)} + \Delta x_n$. In acest caz, funcțiile sistemului sunt verificate, adică:

$$\begin{cases} f_1(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, ..., x_n^{(0)} + \Delta x_n) = 0; \\ f_2(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, ..., x_n^{(0)} + \Delta x_n) = 0; \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ f_n(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, ..., x_n^{(0)} + \Delta x_n) = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Prin dezvoltarea în serie Taylor a funcțiile sistemului (1.4) şi eliminarea termenilor care conțin erorile absolute limită Δx_1, Δx_2, $\cdots$, Δx_n în afara celor de gradul unu, rezultă:

$$\begin{cases} f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) + \Delta x_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \Delta x_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} + \cdots + \Delta x_n \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \cong 0; \\ f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) + \Delta x_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} + \Delta x_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \Delta x_n \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \cong 0; \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)} + \Delta x_1 \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} + \Delta x_2 \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} + \cdots + \Delta x_n \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \cong 0, \end{cases} \tag{1.5}$$

ceea ce înseamnă că s-a obținut un sistem de n ecuații liniare în necunoscutele Δx_1, Δx_2, $\cdots$, Δx_n. Pentru rezolvarea sistemului (1.5) vom considera egalitatea cu zero. Matricea coeficienților sistemului de ecuații liniare (1.5) este:

$$W(x) = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{Vmatrix}, \tag{1.6}$$

şi poartă numele de matrice funcțională sau jacobianul sistemului de ecuații neliniare (1.1). Elementele matricei funcționale (1.6), se calculează cu aproximația inițială $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $\cdots$, $x_n^{(0)}$.

Matriceal sistemul (1.5) poate fi pus sub forma:

$$W(x^{(0)}) \Delta x = -f(x^{(0)}), \tag{1.7}$$

unde $x^{(0)} = \left| x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \cdots,\ x_n^{(0)} \right|^T$.

Dacă funcţiile $f_1,\ f_2,\ \cdots, f_n$, împreună cu derivatele parţiale $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $(i,\ j) = \overline{1,n}$, sunt continue pe vecinătatea $\mathbf{V} \subset \mathbf{X}$ şi $\det W(x^{(0)})\Big|_{x^{(0)} \in \mathrm{V}} \neq 0$, atunci matricea funcţională $W(x^{(0)})$ admite o inversă $W^{-1}(x^{(0)})$ şi soluţia sistemului de ecuaţii (1.7) este:

$$\Delta x = -W^{-1}(x^{0)} f(x^{(0)}). \tag{1.8}$$

Cu notaţia: $\Delta x = x^{(1)} - x^{(0)}$, se obţine soluţia sistemului de ecuaţii neliniare (1.1) la prima iteraţie, şi anume:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \mathrm{W}^{-1}(x^{(0)}) \cdot f(x^{(0)}). \tag{1.9}$$

La iteraţia k, soluţia este de forma:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \mathbf{W}^{-1}(x^{(k-1)}) \cdot f(x^{(k-1)}),\quad k = 1, 2, \cdots. \tag{1.10}$$

Procesul de calcul este iterativ şi se opreşte atunci când

$$\left| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right| \le \varepsilon, \tag{1.11}$$

unde ε este eroarea maximă admisă la calculul soluţiei sistemului dat.

1. METODA GRADIENTULUI

Fie sistemul de n ecuaţii neliniare (1.1). Se presupune că funcţiile sistemului şi derivatele parţiale ale acestora sunt continue în domeniul de definiţie.

Se consideră de asemenea o formă pătratică pozitiv definită

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2(x). \tag{1.1}$$

Soluţia x, a sistemului iniţial, anulează şi funcţia $F(x)$, astfel că are loc implicaţia

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) = 0. \tag{1.2}$$

Aceasta înseamnă că determinarea soluţiei sistemului $f(x) = 0$ este echivalentă cu determinarea minimului nul $x = \alpha$, pentru funcţia $F(x)$. Metoda gradientului constă tocmai în determinarea acestui minim nul. Relaţia de determinare iterativă a soluţiei este:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \mu_{k-1} \mathbf{W}^T (x^{(k-1)}) \cdot f(x^{(k-1)}), \tag{1.3}$$

unde:

$$\mu_{k-1} = \frac{\left[f(x^{(k-1)}), \mathbf{W}(x^{(k-1)}) \cdot \mathbf{W}^T(x^{(k-1)}) \cdot f(x^{(k-1)})\right]}{\left[\mathbf{W}(x^{(k-1)}) \cdot \mathbf{W}^T(x^{(k-1)}) \cdot f(x^{(k-1)}), \mathbf{W}(x^{(k-1)}) \cdot \mathbf{W}^T(x^{(k-1)}) \cdot f(x^{(k-1)})\right]}. \quad (1.4)$$

METODA KANI

Fie sistemul de ecuaţii neliniare (1.1). În vecinătatea soluţiei, variabilele sistemului pot fi exprimate ca funcţii de un parametru τ care variază între 0 şi 1, deci:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\tau); \\ x_2 &= x_2(\tau); \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= x_n(\tau). \end{aligned} \quad (1)$$

Pentru o aproximaţie iniţială $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$, sistemul poate fi scris sub forma:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \cdot (1-\tau); \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \cdot (1-\tau); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \cdot (1-\tau). \end{cases} \quad (2)$$

La limită, când $\tau = 1$, membrii secunzi se anulează.

Dacă se derivează funcţiile sistemului (2) în raport cu parametrul τ, se obţine:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\tau} + ... + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\frac{dx_n}{d\tau} = -f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}); \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\tau} + ... + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\frac{dx_n}{d\tau} = -f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\tau} + ... + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\frac{dx_n}{d\tau} = -f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}), \end{cases} \quad (3)$$

sau sub formă matriceală:

$$\mathbf{W}(x)\frac{dx}{d\tau} = -f(x^{(o)}). \quad (4)$$

Înmulţind la stânga cu $\mathbf{W}^{-1}(x)$, se obţine:

$$\frac{dx}{d\tau} = -\mathbf{W}^{-1}(x) \cdot f(x^{(o)}), \quad (5)$$

sau:

$$dx = -\mathbf{W}^{-1}(x) \cdot f(x^{(o)}) \cdot d\tau. \quad (6)$$

Trecând la diferențe finite, rezultă:

$$\Delta x = -\mathbf{W}^{-1}(x)\cdot f(x^{(o)})\cdot \Delta\tau\,. \tag{7}$$

Dacă se consideră $\Delta x = x^{(k)} - x^{(k-1)}$, atunci soluția sistemului se scrie sub forma

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \mathbf{W}^{-1}(x^{(k-1)})\cdot f(x^{(o)})\cdot \Delta\tau\,, \tag{8}$$

unde

$$\Delta\tau = 1/N\,,\quad k=\overline{0, N-1}\,.$$

Deci, pentru determinarea soluției sistemului de ecuații neliniare (1.1), se împarte intervalul $[0,1]$ în N subintervale egale, $\Delta\tau$, şi se integrează numeric pornind de la soluția inițială $x^{(0)}$.

Exerciții

1. Să se găsească soluția aproximativă a sistemului

$$\begin{cases} y^3 - 20x - 1 & = 0 \\ x^3 + xy - 10y + 10 & = 0 \end{cases}$$

situată în dreptunghiul D =[-1, 1]×[0, 2], folosind metoda aproximațiilor succesive.

R. Considerăm $G : D \to D$ unde $G(x,y) = \begin{pmatrix} g_1(x,y) \\ g_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{y^3-1}{20} \\ \dfrac{x^3+xy+10}{10} \end{pmatrix}$

$M = (m_{ij})_{1\le i,j\le 2} = \left(\sup\limits_{x\in D}\left|\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}\right|\right)_{1\le i,j\le 2} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{10} \end{pmatrix}$, iar $\|M\|_\infty = \dfrac{3}{5}$, deci G

este o contracție şi şirul aproximațiilor succesive $x^{(p+1)} = G(x^{(p)})$ converge la soluția sistemului.

Valorile obținute după primele 3 iterații sunt trecute în tabelul de mai jos.

Numărul iterației	0	1	2	3
x	0.5	-0.0437	0.00583	-0.000679
y	0.5	1.0375	0.99545	0.99993

2. Să se găsească soluția aproximativă a sistemului

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 6x + 3 & = 0 \\ x^3 - y^3 - 6y + 2 & = 0 \end{cases}$$

situată în dreptunghiul $D = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{6}\right] \times \left[\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}\right]$, folosind metoda aproximațiilor succesive.

R. Punem sistemul sub forma $\begin{cases} x = \dfrac{x^3+y^3}{6} + \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{x^3-y^3}{6} + \dfrac{1}{3} \end{cases}$ şi atunci

$$G(x,y)=\begin{pmatrix} g_1(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{6}+\dfrac{1}{2} \\ g_2(x,y)=\dfrac{x^3-y^3}{6}+\dfrac{1}{3}\end{pmatrix}$$ este o contracţie a lui D. Într-adevăr,

$$M=(m_{ij})_{1\le i,j\le 2}=\left(\sup_{x\in D}\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right|\right)_{1\le i,j\le 2}=\begin{pmatrix}\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\\ \left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$ iar

$\|M\|_\infty=0.47222$, deci G este o contracţie şi şirul aproximaţiilor succesive $x^{(p+1)}=G(x^{(p)})$ converge la soluţia sistemului. Considerând x_0=0.5 şi y_0=0.5 avem:

Numărul iteraţiei	0	1	2	3
x	0.5	0.54167	0.53266	0.53256
y	0.5	0.33333	0.35365	0.35115

3. Să se găsească soluţia aproximativă a ecuaţiei $e^{-x}+10x-5=0$ situată în intervalul $[0, 1]$, folosind metoda aproximaţiilor succesive.

R. Ecuaţia se poate pune sub forma $x=\dfrac{5-e^{-x}}{10}=\varphi(x)$, unde $\varphi(x)$ este o contracţie şi şirul aproximaţiilor succesive $x=\varphi(x)$ converge la soluţia ecuaţiei. Valorile obţinute după primele 5 iteraţii sunt trecute în tabelul de mai jos.

Nr. de iteraţii	0	1	2	3	4	5
x	0	0.4	0.43297	0.43514	0.43528	0.43529

$$\left|x_5-x^*\right|\le\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1-\frac{1}{3}}\left|x_1-x_0\right|=0.00525\ .$$

4. Să se găsească soluţia aproximativă din cadranul întâi pentru sistemul

$$\begin{cases} x_1+3\lg x_1-x_2^2 &=0\\ 2x_1^2-x_1x_2-5x_1+1 &=0\end{cases}$$

folosind metoda Newton.

R. Şirul aproximaţiilor succesive $x^{(p+1)}=x^{(p)}-J_F^{-1}(x^{(p)})F(x^{(p)})$, $p\ge 0$

unde:

$$F(x,y)=\begin{pmatrix}x_1+3\lg x_1-x_2^2\\ 2x_1^2-x_1x_2-5x_1+1\end{pmatrix},\quad J_F(x^{(p)})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{pmatrix}.$$

Se obţin:

$$J^{-1}(x^{(0)})=\begin{pmatrix}-0.19112 & 0.25482\\ -0.31853 & 0.09137\end{pmatrix},\quad x^{(1)}=\begin{pmatrix}3.59209\\ 2.32015\end{pmatrix};$$

$$J^{-1}(x^{(1)})=\begin{pmatrix}-0.12916 & 0.16685\\ -0.25343 & 0.049\end{pmatrix} \quad , \quad x^{(2)}=\begin{pmatrix}3.49059\\ 2.26341\end{pmatrix} \quad ;$$

$$J^{-1}(x^{(2)})=\begin{pmatrix}-0.13672 & 0.1773\\ -0.26238 & 0.05379\end{pmatrix} \quad , \quad x^{(3)}=\begin{pmatrix}3.48745\\ 2.26163\end{pmatrix} \quad ;$$

$$J^{-1}(x^{(3)})=\begin{pmatrix}-0.13697 & 0.17765\\ -0.26267 & 0.05395\end{pmatrix} \quad , \quad x^{(4)}=\begin{pmatrix}3.48744\\ 2.26163\end{pmatrix}$$

$$J^{-1}(x^{(4)})=\begin{pmatrix}-0.13697 & 0.17765\\ -0.26267 & 0.05395\end{pmatrix} \quad , \quad x^{(5)}=\begin{pmatrix}3.48744\\ 2.26163\end{pmatrix} \quad \text{ş. a. m. d.}$$

5. Să se găsească soluţia aproximativă ($x>0$, $y>0$) pentru sistemul

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x^2 + y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

folosind metoda Newton.

R. Şirul aproximaţiilor $x^{(p+1)} = x^{(p)} - J_F^{-1}(x^{(p)})F(x^{(p)})$, $p \ge 0$ unde:

$$F(x,y)=\begin{pmatrix} x^2 - y \\ x^2 + y^2 - 3x \end{pmatrix} \quad , \quad J_F(x^{(p)})=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} .$$

Se obţin următoarele rezultate dacă se porneşte cu $x^{(0)}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$:

$$J^{-1}(x^{(0)})=\begin{pmatrix}0.66667 & 0.33333\\ 0.33333 & 0.66667\end{pmatrix} \quad , \quad x^{(1)}=\begin{pmatrix}1.33333\\ 1.66667\end{pmatrix} \quad ;$$

$$J^{-1}(x^{(1)})=\begin{pmatrix}0.38961 & 0.11688\\ 0.03896 & 0.31169\end{pmatrix} \quad , \quad x^{(2)}=\begin{pmatrix}1.22511\\ 1.48918\end{pmatrix} \quad ;$$

$$J^{-1}(x^{(2)})=\begin{pmatrix}0.44138 & 0.1482\\ 0.08148 & 0.36311\end{pmatrix} \quad , \quad x^{(3)}=\begin{pmatrix}1.21353\\ 1.47253\end{pmatrix} \quad ;$$

$$J^{-1}(x^{(3)})=\begin{pmatrix}0.44792 & 0.15209\\ 0.08714 & 0.36914\end{pmatrix} \quad , \quad x^{(4)}=\begin{pmatrix}1.21341\\ 1.47237\end{pmatrix}$$

$$J^{-1}(x^{(4)})=\begin{pmatrix}0.44799 & 0.15213\\ 0.0872 & 0.3692\end{pmatrix} \quad , \quad x^{(5)}=\begin{pmatrix}1.21341\\ 1.47237\end{pmatrix} \quad .$$

Bibliografie:

1. A. Chisalita, Numerical analysis, Editura UTPRES, Cluj-Napoca, 2002,
2. I Bors, Analiza numerica, Editura UTPRES, Cluj-Napoca, 2001
3. G. Coman, Analiza numerica, Ed. Libris, 1995
4. K. Atkinson, Elementary numerical analysis, John Willey&Sons, 1993

Prof. Andrei Dobre
Grupul Şcolar de Transporturi Ploieşti

Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. februarie 2010

Rezolvarea ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii neliniare

I . REZOLVAREA ECUAŢIILOR NELINIARE

1. INTRODUCERE

Prin ecuaţii neliniare se înţeleg ecuaţiile algebrice şi transcendente, cu excepţia ecuaţiilor algebrice de gradul unu.

O ecuaţie este *algebrică* dacă funcţia $f(x)=0$ este un polinom sau poate fi adusă la o formă polinomială, în urma unor transformări.

Ecuaţiile: $5x^7-4x^6+12x^3+x-14=0$ şi $\sqrt{x^3-4}+15x-32=0$ sunt exemple de ecuaţii algebrice.

O ecuaţie este *transcendentă* dacă nu este algebrică.

Ecuaţiile $x\cdot\sin^2(x)-e^x\tan(x)+3.8=0$, $\ln(x)+\cos(x^2)-1.48=0$ sunt ecuaţii transcendente.

În acest capitol ne vom ocupa de determinarea rădăcinilor reale ale ecuaţiilor neliniare. Astfel, dacă α este o rădăcină reală a ecuaţiei $f(x)=0$, graficul funcţiei $f(x)$ intersectează axa absciselor în punctul $x=\alpha$ (v.fig.1.1).

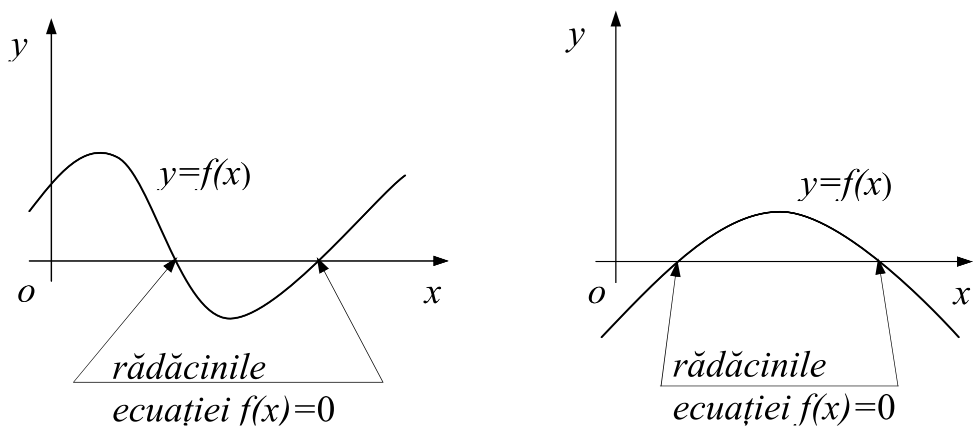


Fig.1.1. Rădăcinile ecuaţiei $f(x)=0$

De regulă, ecuaţiile neliniare se rezolvă pe cale numerică, iterativ, excepţie făcând unele ecuaţii algebrice simple de gradul doi, trei sau patru sau unele ecuaţii transcendente, pentru care s-au stabilit metode exacte de rezolvare. De aceea, prin rezolvarea numerică a unei ecuaţii se obţine o soluţie aproximativă, soluţie care poate fi totuşi suficient de aproape de soluţia exactă, după cum se va vedea în continuare .

Fie $[a,b]$ un domeniu în care ecuaţia

$$f(x)=0 \tag{1.1}$$

are o soluţie unică, α.

Rezolvarea numerică a ecuaţiei (1.1), pornind de la o soluţie iniţială $x^{(0)}$, conduce la obţinerea un şir de valori $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, …, $x^{(k)}$, care converge către soluţia unică α pentru $k=\infty$, adică $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = \alpha$.

Oprirea procesului iterativ, de găsire a soluţiei ecuaţiei $f(x)=0$, se face atunci când sunt îndeplinite condiţiile:

$$\begin{aligned} &\left|x^{(k)}-\alpha\right| \le \varepsilon_1; \\ &\left|f(x^{(k)}\right| \le \varepsilon_2, \end{aligned} \tag{1.2}$$

unde ε_1 şi ε_2 sunt numere pozitive foarte mici.

Cele două condiţii (1.2) nu sunt echivalente, după cum se observă din figura 1.2. Astfel, dacă modulul pantei funcţiei $y=f(x)$, în punctul $x^{(k)}$, este mic (fig.1.2.*a*), atunci $\left|f(x^{(k)})\right|$ este suficient de mic, iar valoarea $\left|x^{(k)}-\alpha\right|$ este mare. În figura 1.2.*b*, avem $\left|f(x^{(k)})\right|$ mare şi $\left|x^{(k)}-\alpha\right|$ mic.

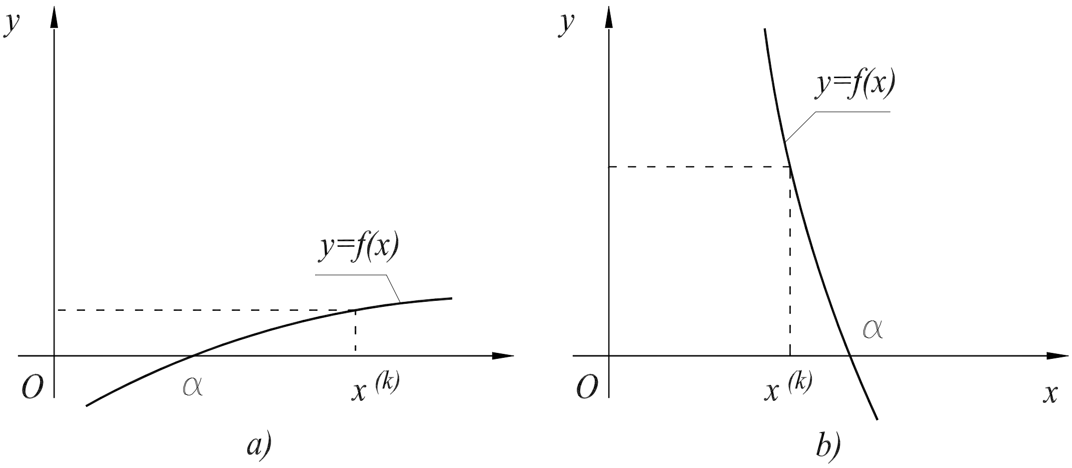


Fig.1.2. Punerea în evidenţă a rădăcinilor aproximative

În practică se folosesc fie ambele condiţii (1.2), fie numai una dintre ele, în funcţie de problema de rezolvat.

După cum s-a arătat mai înainte, în domeniul $[a,b]$ trebuie să existe o soluţie unică α. De aceea, la determinarea soluţiilor reale ale ecuaţiei $f(x)=0$ se parcurg două etape, şi anume:

a) separarea rădăcinilor ecuaţiei (1.1);
b) determinarea aproximativă a rădăcinilor, folosind o metodă numerică adecvată.

2. METODE ITERATIVE DE REZOLVARE A ECUAŢIILOR ALGEBRICE ŞI TRANSCENDENTE

2.1. Metoda Newton-Raphson

Fie $f(x)=0$ o ecuaţie algebrică sau transcendentă, care în intervalul $[a,b]$ are o rădăcină unică α. Presupunem că derivatele $f'(x)$ şi $f''(x)$ sunt continue şi păstrează semnul constant pentru $x \in [a,b]$, unde $a<b$.

Pentru determinarea formulei de iterare, cu ajutorul căreia se obţine o aproximantă a rădăcinii reale α, se vor folosi două metode, şi anume: o metodă analitică, care foloseşte dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei $f(x)$ în jurul lui $x^{(k)}$, şi o metodă geometrică, în care se foloseşte tangenta la curba $y=f(x)$ în punctul $(x^{(k-1)}, f(x^{(k-1)})$.

1. Fie $x^{(k)} = x^{(k-1)} + \Delta x$. Dezvoltând în serie Taylor funcţia $f(x)$, în jurul lui $x^{(k)}$, rezultă:

$$f(x^{(k)}) = f(x^{(k-1)}) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x^{(k-1)}) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x^{(k-1)}) + \cdots \\ + \frac{(\Delta x)^{(k-1)}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(x^{(k-1)}) + \cdots = 0 \tag{2.8}$$

Dacă se reţin primii doi termeni din relaţia (2.8), se obţine:

$$f(x^{(k-1)}) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x^{(k-1)}) \cong 0,$$

de unde rezultă:

$$x^{(k)} \cong x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)}}{f'(x^{(k-1)})}, \quad k = 1, 2, \cdots \tag{2.9}$$

care se numeşte *formula de iterare de ordinul doi*.

Procesul de obţinere iterativă a soluţiei se opreşte atunci când este îndeplinită relaţia:

$$\left| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right| \le \varepsilon. \tag{2.10}$$

Dacă din dezvoltarea în serie (2.8) se reţin primii trei termeni, se obţine formula de iterare de ordinul trei. Pentru aceasta, relaţia

$$f(x^{(k-1)}) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x^{(k-1)}) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x^{(k-1)}) = 0$$

se scrie sub forma:

$$f(x^{(k-1)})+\Delta x\left[f'(x^{(k-1)})+\frac{\Delta x}{2}f''(x^{(k-1)})\right]=0,$$

unde termenul Δx, din interiorul parantezei mari, se înlocuieşte cu $-\dfrac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})}$, adică cu eroarea din formula de iterare de ordinul doi. În acest caz, se obţine:

$$x^{(k)}=x^{(k-1)}-\frac{2f(x^{(k-1)})f'(x^{(k-1)})}{2\left(f'(x^{(k-1)})\right)^2-f(x^{(k-1)})f''(x^{(k-1)})}, \tag{2.11}$$

care poartă numele de *formulă de iterare de ordinul trei*.

2. Cea de a doua metodă de determinare a formulei de iterare Newton-Raphson porneşte de la interpretarea geometrică a relaţiei (2.9). Astfel, dacă se consideră $x^{(0)}=b$, $f'(x^{(0)})>0$, $f''(x^{(0)})>0$ (v. fig.2.3) şi se duce tangenta la curbă în punctul $(x^{(0)},f(x^{(0)}))$, atunci intersecţia acesteia cu axa absciselor se notează cu $x^{(1)}$ şi reprezintă o aproximantă a soluţiei reale α, căreia îi spunem: *soluţia ecuaţiei la iteraţia unu*. După cum se observă, s-a înlocuit curba $y=f(x)$ cu tangenta în punctul $(x^{(0)},f(x^{(0)}))$. În continuare, se duce tangenta la curbă în punctul $(x^{(1)},f(x^{(1)}))$ şi intersecţia acesteia cu axa absciselor o notăm cu $x^{(2)}$ şi reprezintă soluţia ecuaţiei la iteraţia a doua. Dacă se consideră tangenta la curbă în punctul $(x^{(k-1)},f(x^{(k-1)}))$, se ia un punct $M(x,y)$ pe această tangentă şi se scrie ecuaţie dreptei de pantă $f'(x^{(k-1)})$, care trece prin punctul *M*, atunci se obţine:

$$\frac{y-f(x^{(k-1)})}{x-x^{(k-1)}}=f'(x^{(k-1)}).$$

Pentru $y=0$ rezultă $x=x^{(k)}$, astfel că se obţine relaţia:

$$x^{(k)}=x^{(k-1)}-\frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})},$$

care este formula de iterare Newton-Raphson de ordinul doi.

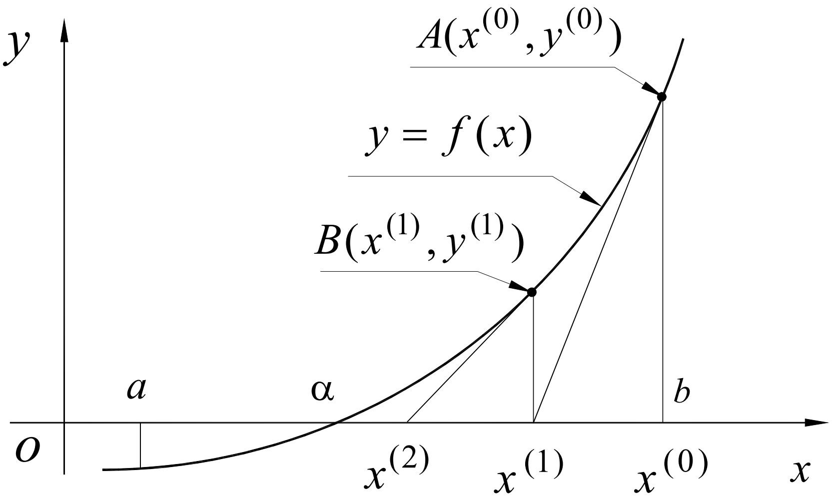


Fig. 2.2. Ilustrarea metodei Newton-Raphson

2.2. Metoda bisecției succesive

Fie $f(x) = 0$, o ecuație algebrică sau transcendentă, care în intervalul $[a,b]$ are o rădăcină unică α, adică $f(a) \cdot f(b) < 0$. Determinarea soluției ecuației considerate, constă în înjumătățirea succesivă a intervalelor de incertitudine până când se obține o valoare care să aproximeze, cu o eroare acceptată, rădăcina α (v.fig. 2.5).

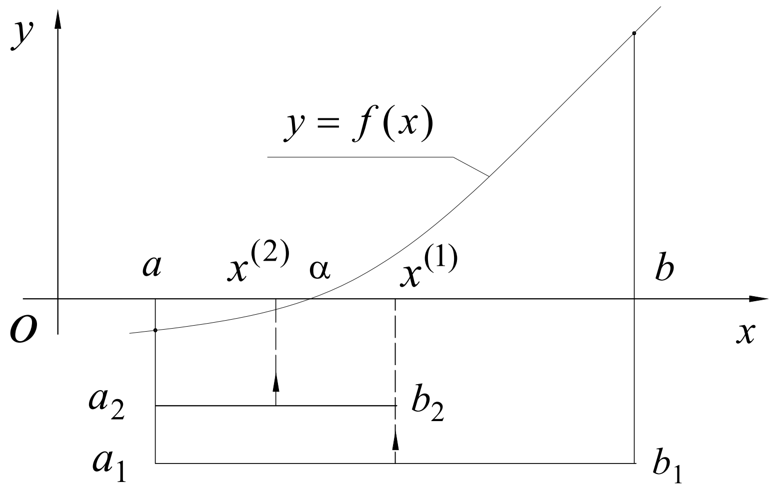


Fig. 2. Ilustrarea metodei bisecției

Etapele parcurse pentru determinarea unei soluții care să aproximeze rădăcina reală α sunt:

- se fac notațiile: $a_1 = a$, $b_1 = b$;
- se calculează $x^{(1)} = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$;
- dacă $f(a_1) \cdot f(x^{(1)}) < 0$, atunci: $a_2 = a_1$, $b_2 = x^{(1)}$, altfel: $a_2 = x^{(1)}$, $b_2 = b_1$;

- se calculează $x^{(2)} = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$;

- la etapa k avem: $x^{(k)} = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.

Procesul iterativ de calcul se opreşte dacă $|b_k - a_k| \le \varepsilon$ sau $\left|f(x^{(k)})\right| \le \varepsilon$, unde ε este un număr pozitiv foarte mic.

2.3 Metoda coardei

Fie ecuaţia algebrică sau transcendentă $f(x) = 0$, care pe intervalul $[a, b]$ are o rădăcină reală $x = \alpha$. Pentru determinarea soluţiei, cu o anumită eroare impusă, se înlocuieşte funcţia $f(x)$ cu un polinom de interpolare de ordinul unu de forma:

$$g(x) = a_1 x + a_2, \tag{2.15}$$

astfel încât:

$$g(a) = f(a),\ g(b) = f(b). \tag{2.16}$$

Dreapta $g(x)$ intersectează axa absciselor în punctul $x^{(1)}$ (v. fig. 2.6). Pentru aflarea lui $x^{(1)}$ este necesară determinarea constantelor a_1 şi a_2. Folosind relaţia (2.15) şi condiţiile 2.16), rezultă:

$$a_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},\ a_2 = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}. \tag{2.17}$$

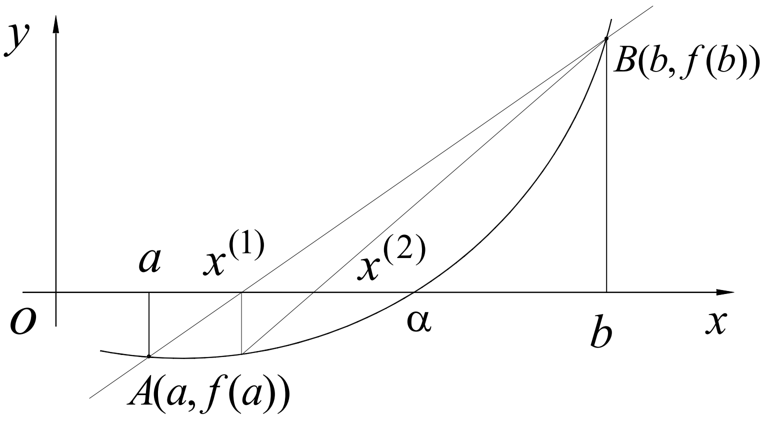


Fig. 2.6. Ilustrarea metodei coardei

După înlocuiri în relaţia (2.15), se obţine:

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}. \tag{2.18}$$

Pentru: $x = x^{(1)}$, $a_1 = a$, $b_1 = b$, rezultă $g(x^{(1)}) = 0$, şi deci:

$$x^{(1)} = \frac{a_1 f(b_1) - b_1 f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}. \tag{2.19}$$

În continuare, se testează dacă soluţia α se află în intervalul $[a, x^{(1)}]$ sau în intervalul $[x^{(1)}, b]$. Astfel, dacă $f(a) \cdot f(x^{(1)}) < 0$, se fac notaţiile: $a_2 = a_1$, $b_2 = x^{(1)}$, altfel: $a_2 = x^{(1)}$, $b_2 = b_1$, şi rezultă:

$$x^{(2)} = \frac{a_2 f(b_2) - b_2 f(a_2)}{f(b_2) - f(a_2)}.$$

La etapa k avem:

$$x^{(k)} = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}. \tag{2.20}$$

Procesul iterativ de calcul se opreşte dacă: $|b_k - a_k| \le \varepsilon$ sau $\left|f(x^{(k)})\right| \le \varepsilon$, unde ε este un număr pozitiv foarte mic.

Metoda mai poartă numele de metoda părţilor proporţionale, deoarece intervalul $[a, b]$ este împărţit în părţi proporţionale cu $f(a)$ şi $f(b)$.

Exemplu: Se consideră ecuaţia:

$f(x) = 0$, $f(x) = 2 \cdot \mathrm{tg}x - 10 \cdot x + 3$,

pentru care s-a separat o soluţie în intervalul [–1, 1]. Să se determine soluţia ecuaţiei utilizând metoda bisecţiei, erorile admise fiind $\varepsilon_x = 10^{-3}$ şi $\varepsilon_f = 10^{-2}$.

Soluţie: Se parcurg etapele metodei bisecţiei:

I) Iniţializări:

$r^0 = -1$, $s^0 = 1$, $|r^0 - s^0| = 2$.

Iteraţia k = 1:

II) $x^1 = \dfrac{r^0 + s^0}{2} = 0$;

III) $f(x^1) = f(0) = 3$, $f(r^0) = f(-1) = 9.885$,

$f(x^1) \cdot f(r^0) > 0 \quad \Rightarrow \quad r^1 = x^1 = 0$, $s^1 = s^0 = 1$.

$|r^1 - s^1| = 1 > \varepsilon_x$ şi $|f(x^1)| = 3 > \varepsilon_f$.

Iteraţia k = 2:

II) $x^2 = \dfrac{r^1 + s^1}{2} = 0.5$;

III) $f(x^2) = f(0.5) = -0.9074$, $f(r^1) = f(0) = 3$,

$f(x^2) \cdot f(r^1) < 0 \;\Rightarrow\; r^2 = r^1 = 0$, $s^2 = x^2 = 0.5$.

$|r^2 - s^2| = 0.5 > \varepsilon_x$ şi $|f(x^2)| = 0.9074 > \varepsilon_f \;\Rightarrow$

Se trece la iteraţia următoare:

Iteraţia k = 3:

II) $x^3 = \dfrac{r^2 + s^2}{2} = 0.25$;

III) $f(x^3) = f(0.25) = 1.011$, $f(r^2) = f(0) = 3$,

$f(x^3) \cdot f(r^2) > 0 \;\Rightarrow\; r^3 = x^3 = 0.25$, $s^3 = s^2 = 0.5$.

$|r^3 - s^3| = 0.25 > \varepsilon_x$ şi $|f(x^3)| = 1.011 > \varepsilon_f \;\Rightarrow$

Algoritmul se continuă.

Iteraţia k = 4:

II) $x^4 = \dfrac{r^3 + s^3}{2} = 0.375$;

III) $f(x^4) = f(0.375) = 0.037$, $f(r^3) = f(0.25) = 1.011$,

$f(x^4) \cdot f(r^3) > 0 \;\Rightarrow\; r^4 = x^4 = 0.375$, $s^4 = s^3 = 0.5$.

$|r^4 - s^4| = 0.125 > \varepsilon_x$ şi $|f(x^4)| = 0.375 > \varepsilon_f$.

Erorile au scăzut, însă nu suficient de mult pentru ca cele două condiţii de terminare să fie îndeplinite $\Rightarrow$ alte iteraţii.

II. REZOLVAREA SISTEMELOR DE ECUAŢII NELINIARE

1. INTRODUCERE

Rezolvarea sistemelor de ecuaţii neliniare se face, de regulă, cu ajutorul metodelor iterative. Sunt puţine cazurile când se procedează la rezolvarea analitică şi aceasta numai dacă sistemele au un număr mic de ecuaţii, iar forma acestora este deosebit de simplă.

Metodele iterative de rezolvare a sistemelor de ecuaţii neliniare cer o aproximaţie iniţială a soluţiei, iar această aproximaţie trebuie să se afle într-un domeniu restrâns al soluţiei căutate. După cum este cunoscut, un sistem de ecuaţii neliniare are mai multe soluţii, de aceea, în funcţie de aproximaţia iniţială se obţine soluţia finală. Odată soluţia finală obţinută, aceasta trebuie analizată, pentru a vedea în ce măsură răspunde cerinţelor procesului sau fenomenului analizat.

1. METODA NEWTON-RAPHSON

Fie $f_1, f_2, \cdots, f_n$, n funcţii neliniare definite pe un domeniu $X \subset R^n$, care depind de necunoscutele $x_1, x_2, ..., x_n$ şi formează sistemul de ecuaţii neliniare:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Vectorial, sistemul poate fi scris sub forma:

$$f(x) = 0, \ f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}, \ \ \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^n, \ \mathbf{Y} \subset \mathbf{R}^n. \tag{1.2}$$

Presupunem că în vecinătatea $\mathbf{V} \subset \mathbf{X}$ există o soluţie unică α, adică $f(\alpha) = 0$.

Rezolvarea iterativă a sistemului (1.1) presupune cunoaşterea unei aproximaţii iniţiale a soluţiei finale. Fie această aproximaţie de forma: $x_1^{(0)}, \ x_2^{(0)}, \ \cdots, \ x_n^{(0)}$. Aproximaţia considerată nu verifică ecuaţiile sistemului (1.1), ceea ce înseamnă că:

$$\begin{cases} f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \neq 0; \\ f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \neq 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \neq 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Dacă la fiecare variabilă independentă se adaugă eroarea absolută limită, se obține: $x_1 = x_1^{(0)} + \Delta x_1$, $x_2 = x_2^{(0)} + \Delta x_2$, $\ldots$, $x_n = x_n^{(0)} + \Delta x_n$. In acest caz, funcțiile sistemului sunt verificate, adică:

$$\begin{cases} f_1(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \ldots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) = 0; \\ f_2(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \ldots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) = 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \ldots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Prin dezvoltarea în serie Taylor a funcțiile sistemului (1.4) şi eliminarea termenilor care conțin erorile absolute limită Δx_1, Δx_2, $\cdots$, Δx_n în afara celor de gradul unu, rezultă:

$$\begin{cases} f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) + \Delta x_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \Delta x_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} + \cdots + \Delta x_n \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \cong 0; \\ f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) + \Delta x_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} + \Delta x_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \Delta x_n \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \cong 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)} + \Delta x_1 \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} + \Delta x_2 \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} + \cdots + \Delta x_n \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \cong 0, \end{cases} \tag{1.5}$$

ceea ce înseamnă că s-a obținut un sistem de *n* ecuații liniare în necunoscutele Δx_1, Δx_2, $\cdots$, Δx_n. Pentru rezolvarea sistemului (1.5) vom considera egalitatea cu zero. Matricea coeficienților sistemului de ecuații liniare (1.5) este:

$$W(x) = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{Vmatrix}, \tag{1.6}$$

şi poartă numele de matrice funcțională sau jacobianul sistemului de ecuații neliniare (1.1). Elementele matricei funcționale (1.6), se calculează cu aproximația inițială $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $\cdots$, $x_n^{(0)}$.

Matriceal sistemul (1.5) poate fi pus sub forma:

$$W(x^{(0)})\Delta x = -f(x^{(0)}), \tag{1.7}$$

unde $x^{(0)} = \left| x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \cdots,\ x_n^{(0)} \right|^T$.

Dacă funcţiile $f_1,\ f_2,\ \cdots, f_n$, împreună cu derivatele parţiale $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $(i,\ j) = \overline{1,n}$, sunt continue pe vecinătatea $\mathbf{V} \subset \mathbf{X}$ şi $\det W(x^{(0)})\big|_{x^{(0)} \in \mathrm{V}} \neq 0$, atunci matricea funcţională $W(x^{(0)})$ admite o inversă $W^{-1}(x^{(0)})$ şi soluţia sistemului de ecuaţii (1.7) este:

$$\Delta x = -W^{-1}(x^{0)} f(x^{(0)}). \tag{1.8}$$

Cu notaţia: $\Delta x = x^{(1)} - x^{(0)}$, se obţine soluţia sistemului de ecuaţii neliniare (1.1) la prima iteraţie, şi anume:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \mathrm{W}^{-1}(x^{(0)}) \cdot f(x^{(0)}). \tag{1.9}$$

La iteraţia k, soluţia este de forma:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \mathbf{W}^{-1}(x^{(k-1)}) \cdot f(x^{(k-1)}),\quad k = 1, 2, \cdots. \tag{1.10}$$

Procesul de calcul este iterativ şi se opreşte atunci când

$$\left| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right| \leq \varepsilon, \tag{1.11}$$

unde ε este eroarea maximă admisă la calculul soluţiei sistemului dat.

1. METODA GRADIENTULUI

Fie sistemul de *n* ecuaţii neliniare (1.1). Se presupune că funcţiile sistemului şi derivatele parţiale ale acestora sunt continue în domeniul de definiţie.

Se consideră de asemenea o formă pătratică pozitiv definită

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2(x). \tag{1.1}$$

Soluţia *x*, a sistemului iniţial, anulează şi funcţia $F(x)$, astfel că are loc implicaţia

$$f(x) = 0 \iff F(x) = 0. \tag{1.2}$$

Aceasta înseamnă că determinarea soluţiei sistemului $f(x) = 0$ este echivalentă cu determinarea minimului nul $x = \alpha$, pentru funcţia $F(x)$. Metoda gradientului constă tocmai în determinarea acestui minim nul. Relaţia de determinare iterativă a soluţiei este:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \mu_{k-1} \mathbf{W}^T (x^{(k-1)}) \cdot f(x^{(k-1)}), \tag{1.3}$$

unde:

$$\mu_{k-1} = \frac{\left[f(x^{(k-1)}), \mathbf{W}(x^{(k-1)}) \cdot \mathbf{W}^T(x^{(k-1)}) \cdot f(x^{(k-1)})\right]}{\left[\mathbf{W}(x^{(k-1)}) \cdot \mathbf{W}^T(x^{(k-1)}) \cdot f(x^{(k-1)}), \mathbf{W}(x^{(k-1)}) \cdot \mathbf{W}^T(x^{(k-1)}) \cdot f(x^{(k-1)})\right]}. \quad (1.4)$$

METODA KANI

Fie sistemul de ecuaţii neliniare (1.1). În vecinătatea soluţiei, variabilele sistemului pot fi exprimate ca funcţii de un parametru τ care variază între 0 şi 1, deci:

$$\begin{aligned} &x_1 = x_1(\tau); \\ &x_2 = x_2(\tau); \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &x_n = x_n(\tau). \end{aligned} \quad (1)$$

Pentru o aproximaţie iniţială $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$, sistemul poate fi scris sub forma:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \cdot (1-\tau); \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \cdot (1-\tau); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \cdot (1-\tau). \end{cases} \quad (2)$$

La limită, când $\tau = 1$, membrii secunzi se anulează.

Dacă se derivează funcţiile sistemului (2) în raport cu parametrul τ, se obţine:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{d\tau} + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\dfrac{dx_2}{d\tau} + ... + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\dfrac{dx_n}{d\tau} = -f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}); \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{d\tau} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\dfrac{dx_2}{d\tau} + ... + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}\dfrac{dx_n}{d\tau} = -f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{d\tau} + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}\dfrac{dx_2}{d\tau} + ... + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\dfrac{dx_n}{d\tau} = -f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}), \end{cases} \quad (3)$$

sau sub formă matriceală:

$$\mathbf{W}(x)\frac{dx}{d\tau} = -f(x^{(o)}). \quad (4)$$

Înmulţind la stânga cu $\mathbf{W}^{-1}(x)$, se obţine:

$$\frac{dx}{d\tau} = -\mathbf{W}^{-1}(x) \cdot f(x^{(o)}), \quad (5)$$

sau:

$$dx = -\mathbf{W}^{-1}(x) \cdot f(x^{(o)}) \cdot d\tau. \quad (6)$$

Trecând la diferențe finite, rezultă:

$$\Delta x = -\mathbf{W}^{-1}(x) \cdot f(x^{(o)}) \cdot \Delta\tau . \tag{7}$$

Dacă se consideră $\Delta x = x^{(k)} - x^{(k-1)}$, atunci soluția sistemului se scrie sub forma

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \mathbf{W}^{-1}(x^{(k-1)}) \cdot f(x^{(o)}) \cdot \Delta\tau , \tag{8}$$

unde

$$\Delta\tau = 1/N , \quad k = \overline{0, N-1} .$$

Deci, pentru determinarea soluției sistemului de ecuații neliniare (1.1), se împarte intervalul $[0,1]$ în N subintervale egale, $\Delta\tau$, şi se integrează numeric pornind de la soluția inițială $x^{(0)}$.

Exerciții

1. Să se găsească soluția aproximativă a sistemului

$$\begin{cases} y^3 - 20x - 1 & = 0 \\ x^3 + xy - 10y + 10 & = 0 \end{cases}$$

situată în dreptunghiul D =[-1, 1]×[0, 2], folosind metoda aproximațiilor succesive.

R. Considerăm $G : D \to D$ unde $G(x,y) = \begin{pmatrix} g_1(x,y) \\ g_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{y^3 - 1}{20} \\ \dfrac{x^3 + xy + 10}{10} \end{pmatrix}$

$M = (m_{ij})_{1 \le i,j \le 2} = \left(\sup\limits_{x \in D} \left| \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} \right| \right)_{1 \le i,j \le 2} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{10} \end{pmatrix}$, iar $\|M\|_\infty = \dfrac{3}{5}$, deci G

este o contracție şi şirul aproximațiilor succesive $x^{(p+1)} = G(x^{(p)})$ converge la soluția sistemului.
Valorile obținute după primele 3 iterații sunt trecute în tabelul de mai jos.

Numărul iterației	0	1	2	3
x	0.5	-0.0437	0.00583	-0.000679
y	0.5	1.0375	0.99545	0.99993

2. Să se găsească soluția aproximativă a sistemului

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 6x + 3 & = 0 \\ x^3 - y^3 - 6y + 2 & = 0 \end{cases}$$

situată în dreptunghiul $D = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{6}\right] \times \left[\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}\right]$, folosind metoda aproximațiilor succesive.

R. Punem sistemul sub forma $\begin{cases} x = \dfrac{x^3 + y^3}{6} + \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{x^3 - y^3}{6} + \dfrac{1}{3} \end{cases}$ şi atunci

$$G(x,y)=\begin{pmatrix} g_1(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{6}+\dfrac{1}{2} \\ g_2(x,y)=\dfrac{x^3-y^3}{6}+\dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$ este o contracţie a lui D. Într-adevăr,

$$M=(m_{ij})_{1\le i,j\le 2}=\left(\sup_{x\in D}\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right|\right)_{1\le i,j\le 2}=\begin{pmatrix} \left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} \\ \left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$ iar

$\|M\|_\infty=0.47222$, deci G este o contracţie şi şirul aproximaţiilor succesive $x^{(p+1)} = G(x^{(p)})$ converge la soluţia sistemului. Considerând x_0=0.5 şi y_0=0.5 avem:

Numărul iteraţiei	0	1	2	3
x	0.5	0.54167	0.53266	0.53256
y	0.5	0.33333	0.35365	0.35115

3. Să se găsească soluţia aproximativă a ecuaţiei $e^{-x}+10x-5=0$ situată în intervalul [0, 1] , folosind metoda aproximaţiilor succesive.

R. Ecuaţia se poate pune sub forma $x=\dfrac{5-e^{-x}}{10}=\varphi(x)$, unde $\varphi(x)$ este o contracţie şi şirul aproximaţiilor succesive $x = \varphi(x)$ converge la soluţia ecuaţiei. Valorile obţinute după primele 5 iteraţii sunt trecute în tabelul de mai jos.

Nr. de iteraţii	0	1	2	3	4	5
x	0	0.4	0.43297	0.43514	0.43528	0.43529

$$\left|x_5-x^*\right|\le\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1-\frac{1}{3}}\left|x_1-x_0\right|=0.00525 .$$

4. Să se găsească soluţia aproximativă din cadranul întâi pentru sistemul

$$\begin{cases} x_1+3\lg x_1-x_2^2 &=0 \\ 2x_1^2-x_1x_2-5x_1+1 &=0 \end{cases}$$

folosind metoda Newton.

R. Şirul aproximaţiilor succesive $x^{(p+1)}=x^{(p)}-J_F^{-1}(x^{(p)})F(x^{(p)})$, $p\ge 0$

unde:

$$F(x,y)=\begin{pmatrix} x_1+3\lg x_1-x_2^2 \\ 2x_1^2-x_1x_2-5x_1+1 \end{pmatrix} , \quad J_F(x^{(p)})=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} .$$

Se obţin:

$$J^{-1}(x^{(0)})=\begin{pmatrix} -0.19112 & 0.25482 \\ -0.31853 & 0.09137 \end{pmatrix} , \quad x^{(1)}=\begin{pmatrix} 3.59209 \\ 2.32015 \end{pmatrix} ;$$

$$J^{-1}(x^{(1)})=\begin{pmatrix}-0.12916 & 0.16685\\ -0.25343 & 0.049\end{pmatrix}\ ,\ x^{(2)}=\begin{pmatrix}3.49059\\ 2.26341\end{pmatrix}\ ;$$

$$J^{-1}(x^{(2)})=\begin{pmatrix}-0.13672 & 0.1773\\ -0.26238 & 0.05379\end{pmatrix}\ ,\ x^{(3)}=\begin{pmatrix}3.48745\\ 2.26163\end{pmatrix}\ ;$$

$$J^{-1}(x^{(3)})=\begin{pmatrix}-0.13697 & 0.17765\\ -0.26267 & 0.05395\end{pmatrix}\ ,\ x^{(4)}=\begin{pmatrix}3.48744\\ 2.26163\end{pmatrix}$$

$$J^{-1}(x^{(4)})=\begin{pmatrix}-0.13697 & 0.17765\\ -0.26267 & 0.05395\end{pmatrix}\ ,\ x^{(5)}=\begin{pmatrix}3.48744\\ 2.26163\end{pmatrix}\ \text{ş. a. m. d.}$$

5. Să se găsească soluția aproximativă ($x>0$, $y>0$) pentru sistemul

$$\begin{cases} x^2-y & =0\\ x^2+y^2-3x & =0\end{cases}$$

folosind metoda Newton.

R. Şirul aproximațiilor $x^{(p+1)}=x^{(p)}-J_F^{-1}(x^{(p)})F(x^{(p)})$, $p\ge 0$ unde:

$$F(x,y)=\begin{pmatrix}x^2-y\\ x^2+y^2-3x\end{pmatrix}\ ,\ J_F(x^{(p)})=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{pmatrix}\ .$$

Se obțin următoarele rezultate dacă se pornește cu $x^{(0)}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$:

$$J^{-1}(x^{(0)})=\begin{pmatrix}0.66667 & 0.33333\\ 0.33333 & 0.66667\end{pmatrix}\ ,\ x^{(1)}=\begin{pmatrix}1.33333\\ 1.66667\end{pmatrix}\ ;$$

$$J^{-1}(x^{(1)})=\begin{pmatrix}0.38961 & 0.11688\\ 0.03896 & 0.31169\end{pmatrix}\ ,\ x^{(2)}=\begin{pmatrix}1.22511\\ 1.48918\end{pmatrix}\ ;$$

$$J^{-1}(x^{(2)})=\begin{pmatrix}0.44138 & 0.1482\\ 0.08148 & 0.36311\end{pmatrix}\ ,\ x^{(3)}=\begin{pmatrix}1.21353\\ 1.47253\end{pmatrix}\ ;$$

$$J^{-1}(x^{(3)})=\begin{pmatrix}0.44792 & 0.15209\\ 0.08714 & 0.36914\end{pmatrix}\ ,\ x^{(4)}=\begin{pmatrix}1.21341\\ 1.47237\end{pmatrix}$$

$$J^{-1}(x^{(4)})=\begin{pmatrix}0.44799 & 0.15213\\ 0.0872 & 0.3692\end{pmatrix}\ ,\ x^{(5)}=\begin{pmatrix}1.21341\\ 1.47237\end{pmatrix}\ .$$

Bibliografie:

1. A. Chisalita, Numerical analysis, Editura UTPRES, Cluj-Napoca, 2002,
2. I Bors, Analiza numerica, Editura UTPRES, Cluj-Napoca, 2001
3. G. Coman, Analiza numerica, Ed. Libris, 1995
4. K. Atkinson, Elementary numerical analysis, John Willey&Sons, 1993

Prof. Andrei Dobre
Grupul Şcolar de Transporturi Ploieşti

MateInfo.ro MATEmatică și INFOrmații din învățământul ROmânesc
Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. februarie 2010

Olimpiada de matematică –faza zonală - test pregătitor
Clasa a-V-a

I. a) **Să se afle elementele mulțimii A ={ a,b,c,d,e } știind că sunt ele sunt numere naturale diferite ,nenule, a<b<c<d și îndeplinesc simultan condițiile :**
   i) $e^2 = c^2 + d^2$
   ii) produsul elementelor din mulțimea A este 120
b) Arătați că numărul $X = 152^{c+d} + 563^{a+b+e} + 787^{a+b}$ **nu este pătrat perfect**
c) Ordonați crescător numerele c^{2010} , b^{3015} , d^{1506}

Soluție
a) $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e = 120 \Rightarrow 120 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ și ținând cont că $5^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow$
a= 1 , b= 2 , c=3 , d= 4 , e= 5 => A={ 1,2,3,4,5 }
b) $X = 152^{3+4} + 563^{1+2+5} + 787^{1+2} = 152^7 + 563^8 + 787^3 \Rightarrow u(X) = u(2^7) + u(3^8) + u(7^3) =$
$= u(8+1+3) = 2 \Rightarrow$ un pătrat perfect nu poate avea ultima cifră 2; 3; 7; 8.
=> X nu este p.p.
c) $c^{2010} = 3^{2010} = (3^2)^{1005} = (9)^{1005}$
$b^{3015} = 2^{3015} = (2^3)^{1005} = (8)^{1005}$
$d^{1506} = 4^{1506} = (2^2)^{1506} = (2^2)^{2 \cdot 3 \cdot 251} = (2^3)^{2 \cdot 2 \cdot 251} = (8)^{1004}$
$(8)^{1004} < (8)^{1005} < (9)^{1005} \Rightarrow d^{1506} < b^{3015} < c^{2010}$

II. Să se afle numerele naturale n pentru care avem :
$$4^{n+3} + 4^{n+2} + 4^{n+1} + 4^n \leq (4^{26} \cdot 8^{13} : 32^{17}) \cdot (3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^0)$$

Soluție $4^{n+3} + 4^{n+2} + 4^{n+1} + 4^n = 4^n(4^3 + 4^2 + 4^1 + 1) = 85 \cdot 4^n$
$4^{26} \cdot 8^{13} : 32^{17} = 2^{52} \cdot 2^{39} : 2^{85} = 2^6$
$3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^0 = 85$
$85 \cdot 4^n \leq 2^6 \cdot 85 \Rightarrow 4^n \leq 2^6 \Rightarrow 4^n \leq 4^3 \Rightarrow n \leq 3$
$n \in \{0,1,2,3\}$

III. **Fie numărul n** $= \overline{abcabc} + \overline{abc}$
a) Aflați restul împărțirii numărului $\overline{abcabc}$ **la 91**
b) Arătați că numărul n este divizibil cu 167

Soluție a) $\overline{abcabc} = 1001\ \overline{abc} = 7 \cdot 11 \cdot 13 = 11 \cdot 91 \Rightarrow r=0$
b) $n = \overline{abcabc} + \overline{abc} = 1001\ \overline{abc} + \overline{abc} = 1002\ \overline{abc} = 167 \cdot 6\ \overline{abc} \Rightarrow 167/n$

IV.Aflați două numere naturale știind că unul este mai mare decât celălalt cu 33 iar dacă împărțim triplul sumei lor la dublul diferenței lor obținem câtul 2 și restul 57 .

Soluție
Fie $a > b \Rightarrow a - b = 33 \Rightarrow 2(a - b) = 66$ = dublul diferenței
$3(a+b)$ = triplul sumei
$D = I \cdot C + R \Rightarrow 3(a+b) = 66 \cdot 2 + 57 = 189 \Rightarrow a+b = 63 \Rightarrow a=45$ si $b= 33$

Prof. Vasile Uleanu - Școala cu clasele I-VIII nr. 5 "Armand Călinescu " Curtea de Argeș

Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. februarie 2010

Izomorfism de structuri algebrice

de Florin Antohe

Există patru probleme de izomorfism:

1. Dacă mulțimile suport sunt finite , se fac tabelele legilor de compoziție şi se arată că prin suprapunere coincid, adică corespondența a două linii sau coloane omoloage se menține pe întreg tabelul.

Exemplul 1 : Fie grupurile $G_1=(\{0,1,2\},\oplus)$ cu $\oplus$ =adunarea modulo 3 şi $G_2=(\{1,\xi,\xi^2\}\bullet)$ unde $\xi=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ este o rădăcină cubică complexă a unității ($\xi^3=1$). Atunci $G_1\cong G_2$.

Soluție : Tabelele legilor de compoziție date sunt:

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\bullet$	1	ξ	ξ^2
1	1	ξ	ξ^2
ξ	ξ	ξ^2	1
ξ^2	ξ^2	1	ξ

Structurile sunt izomorfe deoarece tabelele prin suprapunere coincid. Funcția izomorfism este $f : G_1\to G_2$ definită prin $f(0)=1$, $f(1)=\xi$, $f(2)=\xi^2$ sau $f(k)=\xi^k$, $k\in G_1$.

2. Dacă mulțimile suport sunt infinite, dar cu structură specificată: perechi, numere complexe, matrice, permutări, funcții, numere iraționale de formă particulară, etc. atunci funcția izomorfism va fi aplicația ce asociază elementului general dintr-o mulțime, elementul general din cealaltă mulțime, scrise cu aceleaşi simboluri. Se arată că funcția aleasă este bijecție şi morfism.

Exemplul 2 : Fie grupurile $G_1=(\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in \mathbf{Q}\},+)$

$$G_2=\left(\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in \mathbf{Q}\right\},+\right).$$

Să se arate ca $G_1\cong G_2$

Soluție : Fie funcția $f:G_1\to G_2$, $f(a+b\sqrt{2})=\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$.

<u>Injectivitate</u> ($f(z_1)= f(z_2) \Rightarrow z_1=z_2$)

$$f(a+b\sqrt{2})=f(c+d\sqrt{2}) \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & d \\ 2d & c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases} \Rightarrow a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$$

<u>Surjectivitate</u> ($\forall\ y\in B$, $\exists\ x\in A$ aşa încât $y=f(x)$)

$\forall\ M\in G_2\ \exists\ z\in G_1$ aşa încât $f(z)=M$.

Fie $M =\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 2\beta & \alpha \end{pmatrix}\in G_2 \Rightarrow \exists\ z=\alpha+\beta\sqrt{2}\in G_2$ aşa încât $f(\alpha+\beta\sqrt{2})=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 2\beta & \alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(z)=M$

$\Rightarrow f$ este bijectivă

<u>morfism</u> $f(z_1+z_2)= f(z_1)+ f(z_2)$, $\forall\ z_1,z_2\in G_1$

$f(z_1+z_2)=f(a+b\sqrt{2}+c+d\sqrt{2})=f(a+c+\sqrt{2}(b+d))=$

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2(b+d) & a+c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & d \\ 2d & c \end{pmatrix}=f(a+b\sqrt{2})+f(c+d\sqrt{2})=f(z_1)+ f(z_2).$$

3. Dacă mulțimile suport sunt infinite, intervale ale lui R sau $\mathbf{R}^*$ funcția izomorfism va fi aplicația cea mai simplă ce realizează bijecția între cele două intervale, învățată până în clasa a-X-a inclusiv. Se arată că funcția aleasă este bijecție şi morfism.

Exemplul 3 : Fie grupurile $G_1=((0,\infty),\bullet)$ şi $G_2=(\mathbf{R},+)$. Arătați că $G_1\cong G_2$.

Soluție Fie funcția $f : (0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x) = \log_2 x$, $a>0$, $a\neq1$

Injectivitate $f(x)=f(y) \Rightarrow \log_a x=\log_a y \Rightarrow x=y$

Surjectivitate: $\forall\ y\in\mathbf{R}$, $\exists\ x\in(0,\infty)$ aşa încât $\log_a x = y \Leftrightarrow x=a^y \Rightarrow f$ este bijectivă

Morfism: $f(xy)= f(x)+ f(y)\ \forall\ x,y\in(0,\infty)$

$f(xy)=\log_a xy=\log_a x+\log_a y= f(x)+ f(y)\ \ \forall\ x,y\in(0,\infty) \Rightarrow f$ izomorfism.

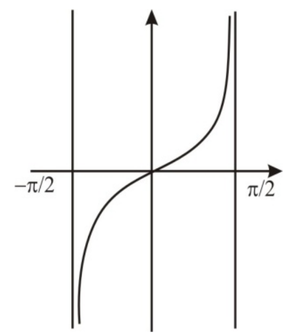
Exemplul 4: Fie grupurile $G_1=\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),*\right)$ unde $x*y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y)$ şi $G_2=(\mathbf{R},+)$. Arătați că $G_1 \cong G_2$.

Soluție : Fie $f=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to \mathbf{R}$, $f(x)=\operatorname{tg}x$

Injectivitate: $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}>0 \Rightarrow f$ este strict crescătore pe $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f$ este injectivă (orice funcție strict monotonă este injectivă).

Surjectivitate f este continuă, deci face proprietatea lui Darboux

$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg}x=\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{2}\\ x>-\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg}x=-\infty \Rightarrow \operatorname{Im}f=\mathbf{R} \Rightarrow f$ surjectivă $\Rightarrow f$ este bijectivă.



Morfism : Să arătăm că $f(x*y)=f(x)+f(y)$, $\forall x,y \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ $f(x*y)=\operatorname{tg}(x*y)=$ $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y))=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=f(x)+f(y) \Rightarrow f$ izomorfism.

4. Se dă funcția izomorfism, depinzând eventual de un parametru, şi se cere să se demonstreze că este izomorfism. Parametrul se determină din condiția $f(e)=e'$, apoi se arată că f este bijecție şi morfism.

Exemplul 5 : Fie grupurile $G_1=((0,\infty),\bullet)$ şi $G_2=((-1,1),*)$ unde $x*y=\frac{x+y}{1+xy}$ şi funcția $f:(0,\infty)\to(-1,1)$, definită prin $f(x)=\frac{x+a}{x+1}$, unde $a\in\mathbf{R}$ este un parametru ce se va determina. Să se arate că f este izomorfism de grupuri.

Soluție : Parametrul a se determină din condiția $f(e)=e'$.In cazul nostru $e_{G_1}=1$ şi $e_{G_2}=0 \Rightarrow f(1)=0 \Leftrightarrow \frac{1+a}{2}=0 \Leftrightarrow a=-1 \Rightarrow f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

Injectivitate : f(x)= f(y) $\Rightarrow \dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{y-1}{y+1} \Leftrightarrow$ xy-y+x-1=xy-x+y-1 $\Leftrightarrow$ 2x=2y $\Leftrightarrow$x=y .

Surjectivitate : $\forall$y$\in$(-1,1),$\exists$x$\in$(0,∞) aşa încât f(x)=y $\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+1}=y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-1=xy+y \Leftrightarrow x=\dfrac{1+y}{1-y}$.

Cum y$\in$(-1,1) $\left[\begin{array}{l} y<1 \Rightarrow y-1\neq 0 \Rightarrow \exists x \\ -1<y<1 \Rightarrow \begin{cases} 1+y>0 \\ 1-y>0 \end{cases} \Rightarrow x>0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ f este bijectivă .

f morfism : $\Leftrightarrow$ f(xy)= f(x)$*$ f(y) $\forall$ x,y$\in$(0,∞)

f(xy)= $\dfrac{xy-1}{xy+1} \Leftrightarrow$ f(x)$*$ f(y)= $\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}=\dfrac{\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{y-1}{y+1}}{1+\dfrac{x-1}{x+1}\cdot\dfrac{y-1}{y+1}}=$

$=\dfrac{xy-y+x-1+xy-x+y-1}{xy+x+y+1+xy-x-y+1}=\dfrac{2(xy-1)}{2(xy+1)}=\dfrac{xy-1}{xy+1}\Rightarrow$ f este izomorfism.

Bibliografie :

[1]. C. Năstăsescu , C. Niță , Bazele algebrei –E.D.P. 1986.

[2]. Gh. Andrei , C. Caragea , V. Ene- Culegere de probleme.

profesor , Şcoala Gimnazială “Nichita Stănescu

str. Costache Conachi nr 2,cod 800643

Galați, judetul Galați

Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. februarie 2010

ALGEBRÃ

STUDIUL NUMERELOR REALE

1.FORME DE SCRİERE A UNUİ NUMÃR RAȚİONAL
2.FRACȚİİ ZECİMALE PERIODICE

LICEUL TEORETIC CALLATIS MANGALIA

1. FORME DE SCRİERE A UNUİ NUMÃR RAȚİONAL

Orice număr rațional nenegativ $\frac{m}{n}$,poate fi reprezentat sub forma unei fracții zecimale infinite:

$$\frac{m}{n} = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots$$

Numărul a_0 se numeşte *partea întreagă* a lui $\frac{m}{n}$,iar

$0, a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots$ ***partea fracționară* *a sa.Numerele* $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ *sunt cuprinse între 0 si 9,adică* $0 \le a_i \le 9$*,pentru i=1,2,3,…..***

EXEMPLU

Pentru numărul $\frac{5}{33} = 0{,}151\ldots\ldots$,0 este partea întreagă,iar 0,151…..este partea fracționară a sa.

$a_0 = 0$
$a_1 = 1;$
$a_2 = 5;$
$a_3 = 1;$
....

Numerele raționale negative au şi ele o astfel de reprezentare.Partea întreagă a unui număr negativ se trece cu semnul minus deasupra.

EXEMPLU

Numărul $-\frac{5}{2}=-3+\frac{1}{2}$ se poate scrie sub forma $\bar{3},5000\ldots$

Analog $-0,321=-1+0,679000\ldots=\bar{1},679000\ldots$

TEMÃ

Să se formeze echipe de 2 sau 3 elevi şi să se rezolve în grupe exercițiul:

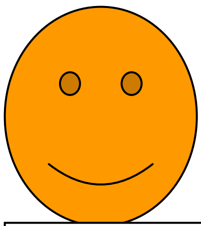
Să se scrie sub formă de fracție zecimală infinită,numerele:

- $\frac{15}{8}$;
- $\frac{1}{4}$;
- $-\frac{1}{4}$;
- $-\frac{2}{5}$;
- $-\frac{29}{11}$;
- $-\frac{121}{16}$.

Să se precizeze partea întreagă şi partea fracționară a fiecărui număr.

TİMP DE LUCRU 10 MİNUTE.

2. FRACȚİİ ZECİMALE PERİODİCE



DESCOPERĂ

DEFİNİTİE.O fracție zecimală infinită

$$a_0,a_1a_2a_3\cdots\cdots$$

se numeşte *periodică*,dacă există numerele naturale k şi p astfel încât $a_{n+p}=a_n$,pentru orice n$\leq$k.

O fracție zecimală periodică se notează,pe scurt,prin

$$a_0,a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{k-1}(a_ka_{k+1}\cdots a_{k+p-1})$$

Mulțimea cifrelor scrise în această ordine în paranteză se numeşte *perioada fracției zecimale*.

Daca k=1,adică perioada începe imediat după virgulă,avem de-a face cu *o fracție zecimală periodică simplă*;în caz contrar avem de-a face cu *o fracție zecimală periodică mixtă*.

EXEMPLU

Pentru 0,333… avem k=1,p=1 si $a_{n+1}=a_n=3$,pentru orice n$\geq$1.

Scriem 0,333…=0,(3),aceasta fiind o fracție zecimală periodică simplă.

Fracțiile zecimale finite,după cum am observat pot fi considerate ca fracții zecimale infinite(prin adăugare de zerouri)sunt periodice.

EXEMPLU

Avem 0.25000…=0.25(0);

0,625,000…=0,625(0).

Acestea sunt fracții periodice mixte.

TEMĂ

Să se rezolve în grupele formate exercițiul:

Să se scrie sub formă de fracție zecimală infinită periodică,numerele:

-2/3	-29/11	-12/17	25/13	43/15

Să se precizeze partea întreagă şi partea fracționară a fiecărui număr.

TİMP DE LUCRU 10 MİNUTE.

TEOREMA 1. **Orice număr rațional se reprezintă sub forma de fracție zecimală infinită periodică,care nu are perioada (9).**

TEOREMA 2. **Orice fracție zecimală periodică,care are perioada diferită de (9), reprezintă un anumit număr rațional,din care se obține prin algoritmul de împărțire.**

1.Dacă k=1,adică fracția este periodică simplă,avem:

$$a_0,(a_1a_2\cdots a_p)=a_0+\frac{a_1a_2\cdots a_p}{\underbrace{99...9}_{p\,ori}};$$

2.Dacă k>1,adică fracția este periodică mixtă,avem:

$$a_0,a_1a_2\cdots a_{k-1}(a_k a_{k+1}\cdots a_{k+p-1}) = a_0 + \frac{a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k a_{k+1}\cdots a_{k+p-1} - a_1a_2\ldots a_{k-1}}{\underbrace{99...9}_{p\,ori}\underbrace{00...0}_{(k-1)\,ori}};$$

EXEMPLE

0,(43)=43/99;

$$1,2(75) = 1 + \frac{275-2}{990} = 1 + \frac{273}{990} = 1 + \frac{91}{330} = \frac{421}{330};$$

sau

1,2(75)=(1275-12) /990=1263/990=421/330;

$$-5,0(3) = -(5 + \frac{3}{90}) = -(5 + \frac{1}{30}) = -\frac{151}{30};$$

sau

-5,0(3)=-(503-50)/90=-453/90=-151/30.

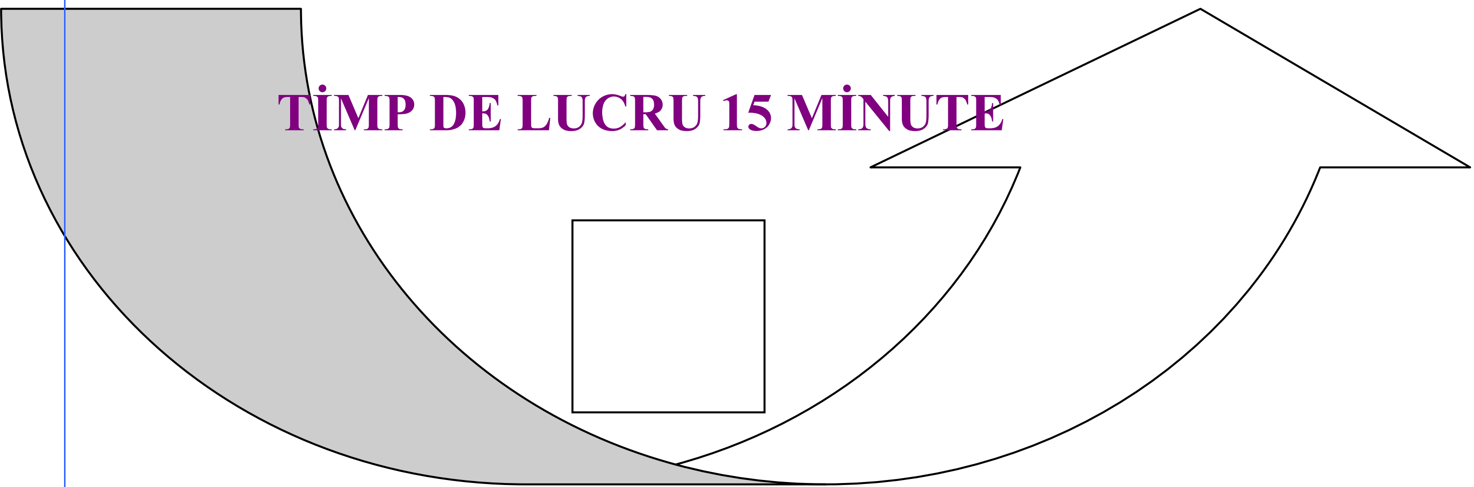
OBSERVAȚIE:0,(9)=1=1,000…=1,(0)

TEMĂ

Să se rezolve individual exercițiul:

Să se scrie sub forma de fracție ordinară,numerele:

- **0,(3);**
- **2,45(3);**
- **0,027(45);**
- **-1,12(23);**
- **-31,(35).**



NUMERE REALE CA FRACȚİİ ZECİMALE İNFİNİTE

1 **Nu există nici un număr rațional al cărui pătrat să fie 2.**

Presupunem prin absurd că există un număr rațional $\frac{m}{n}$ **astfel încât** $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$**.Putem presupune că fracția** $\frac{m}{n}$ **este ireductibilă,adică m şi n sunt numere întregi prime între**

ele.Din $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$ **rezultă** $m^2=2n^2$**.Cum** $2n^2$ **este par,atunci şi** m^2 **este număr par şi deci m este par.Fie m=2k,k un număr întreg.Înlocuind pe m=2k în relaţia precedentă ,rezultă** $4k^2=2n^2$**,de unde** $2k^2=n^2$**,adică n este par.Deci m şi n sunt numere întregi pare ,ceea ce contrazice ireductibilitatea fracţiei** $\frac{m}{n}$**.Prin urmare presupunerea noastră că** $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$**. este falsă şi deci ecuaţia cu coeficienţi întregi** $x^2-2=0$ **nu are,ca soluţii,numere raţionale.**

TEMĂ

Să se rezolve individual exerciţiul:

Nu există nici un număr raţional al cărui pătrat să fie 3.

TİMP DE LUCRU 5 MİNUTE

2

Fie un triunghi dreptunghic isoscel ABC(fig.1)Fie AB=1.

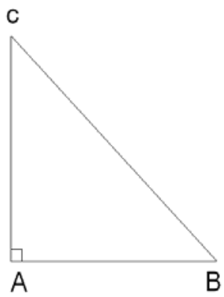


Figura 1

Să se demonstreze că nu există un număr raţional $\frac{m}{n}$ care să reprezinte lungimea lui BC,adică a n-a parte din AB să se cuprindă de m ori în BC.

Daca BC=a,rezultă că a este o rădăcină a ecuaţiei $x^2-2=0$.Notăm $a=\sqrt{2}$,care reprezintă lungimea ipotenuzei.

Am văzut că a nu este un număr raţional,deci el va fi un număr de natură nouă.Un astfel de număr,care nu este raţional îl numim *iraţional*.În acelaşi mod numerele $\sqrt{3};\sqrt{5}$ s.a. care sunt rădăcini ale ecuaţiilor $x^2-3=0$; $x^2-5=0$ s.a. sunt numere iraţionale.(există şi numere iraţionale care nu sunt rădăcini ale unor ecuaţii,de exemplu numărul π care este egal cu raportul dintre lungimea unui cerc şi diametrul său.).

***Mulţimea numerelor raţionale împreună cu mulţimea numerelor iraţionale formează mulţimea R a numerelor reale*.Deoarece $\sqrt{2}$ este număr iraţional rezultă că fracţia zecimală care-l reprezintă este o fracţie zecimală infinită neperiodică.**

Astfel orice număr real a se reprezintă printr-o fracţie zecimală infinită $a_0,a_1a_2a_3$.......

Ordonarea numerelor reale

Fie a=$a_0,a_1a_2a_3$.......şi b=$b_0,b_1b_2b_3$.......două numere reale,unde fracţiile $a_0,a_1a_2a_3$.......şi $b_0,b_1b_2b_3$.......nu au perioada (9).
Spunem că două numere sunt egale dacă oricare ar fi i=0,1,2... avem $a_i=b_i$.

DEFİNİȚİE **Spunem că numărul real** $a = a_0, a_1 a_2 a_3 ....$ **este mai mic decât numărul real** $b = b_0, b_1 b_2 b_3 ....$ **şi scriem a<b dacă există un număr natural** $k \geq 0$**,astfel încât** $a_{ki} = b_k$ **şi** $a_i = b_i$ **pentru orice i<k.**

În acest caz se mai spune că b este mai mare decât a şi se scrie b>a.

EXEMPLE

1. **3,9014…<4,1735…,pentru că 3<4;**
2. **3,45170…<3,45181…,pentru că 7<8;**
3. $\overline{20},432 < 1,720..$**,pentru că -20<1;**
4. $\overline{4},232... > \overline{4},193...$**,deoarece 2>1.;**
5. **3,173…>3,165…,pentru că 7>6.**

Dacă a<0 se spune că numărul real a este negativ,iar dacă a>0 atunci a se numeşte pozitiv.

LEGEA DE TRİCOTOMİE

Dacă a şi b sunt două numere reale,atunci este adevărată una şi numai una din relațiile:

a>b, a=b, a<b.

DEFİNİȚİE

Se spune că numărul real a este mai mic sau egal cu numărul real b şi scriem $a \leq b$ **dacă a<b sau a=b.**

Relația $"\leq"$ **este o relație de ordine pe mulțimea numerelor reale:**

1. $a \leq a$ **(reflexivă);**

2.dacă $a \leq b$ **şi** $b \leq a$ **atunci a=b (antisimetria);**

3.dacă $a \le b$ şi $b \le c$ atunci $a \le c$(tranzitivitatea).

APROXİMĂRİ ZECİMALE ALE NUMERELOR REALE

Fie a un număr real oarecare reprezentat sub formă de fracţie zecimală infinită.*Aproximările (valorile aproximative) zecimale prin lipsă* ale numărului a se definesc ca fiind numerele care se obţin prin înlăturarea succesivă a tuturor cifrelor sale care stau după virgulă,începând cu prima cifră,apoi cu cea de-a doua,după aceea cu cea de-a treia ş.a.m.d.

EXEMPLU

Pentru numărul a=2,173256…,aproximările zecimale prin lipsă vor fi:2;2,1;2,17;2,173;2,1732;2,17325;..

Dacă la ultimul număr de după virgulă al fiecărei aproximări zecimale prin lipsă a numărului a se adaugă 1,atunci se obţin *aproximările(valorile aproximative)zecimale prin adaos ale numărului a.*

EXEMPLU

Pentru numărul a=2,173256… aproximările zecimale prin adaos vor fi:3;2,2;2,18;2,174;2,1733;2,17326….

Având în vedere relaţia de ordine pe mulţimea numerelor reale,primele cinci aproximări zecimale ale lui a se pot ilustra în următorul tabel:

$$2 \le a < 3$$
$$2,1 \le a < 2,2$$
$$2,17 \le a < 2,18$$
$$2,173 \le a < 2,174$$

$2{,}1732 \leq a < 2{,}1733$.

Cum numărul a este cuprins între:

1) 2 si 3 şi 3-2=1;
2) 2,1 şi 2,2 şi 2,2-2,1=0,1;
3) 2,17 si 2,18 si 2,18-2,17=0,01 ş.a.m.d.

aceste aproximări zecimale sunt,respectiv,cu o eroare mai mică decât $1; 0{,}1 = 10^{-1}; 0{,}01 = 10^{-2};$ **ş.a.m.d.**

În general,pentru numărul a=$a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots$ **aproximările zecimale cu o eroare mai mică decât** 10^{-n} **sunt:**

I. ***prin lipsă :*** $a_n^{'} = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n,$
II. ***prin adaos :*** $a_n^{''} = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n + 10^{-n}$.

Avem:

$a_0^{'} \leq a < a_0^{''}$***(cu o eroare mai mică decat 1)***
$a_1^{'} \leq a < a_1^{''}$***(cu o eroare mai mică decat 0,1)***
$a_2^{'} \leq a < a_2^{''}$***(cu o eroare mai mică decât 0,01)……………………………………………...***
……………………………………………...

Observaţie.Este foarte important de semnalat pentru cele ce urmează că aproximările zecimale prin lipsă şi prin adaos ale unui număr real a,sunt întotdeauna numere raţionale.

ADUNAREA ŞI ÎNMULŢIREA NUMERELOR REALE

Adunarea şi înmulţirea numerelor reale se definesc folosind reprezentarea lor zecimală.
Fiind date două numere reale a şi b să considerăm aproximările zecimale prin lipsă şi adaos cu o eroare mai mică decât 10^{-n}***.Atunci pentru orice n avem:***

$a_n \le a < a_n''$,
$b_n \le b < b_n''$.

DEFİNİȚİE

Se numeşte suma numerelor reale a şi b un număr real c,care pentru orice număr natural n,satisface inegalitățile:

$$a_n' + b_n' \le c < a_n'' + b_n''.$$

Se poate demonstra că acest număr există şi este unic.

EXEMPLU

Să calculăm primele patru cifre după virgulă pentru suma numerelor $a = \sqrt{2}$ **;** $b = \sqrt{5}$ **.**

$1 \le \sqrt{2} < 2,$	$2 \le \sqrt{5} < 3,$
$1{,}4 \le \sqrt{2} < 1{,}5,$	$2{,}2 \le \sqrt{5} < 2{,}3,$
$1{,}41 \le \sqrt{2} < 1{,}42,$	$2{,}23 \le \sqrt{5} < 2{,}24,$
$1{,}414 \le \sqrt{2} < 1{,}415,$	$2{,}236 \le \sqrt{5} < 2{,}237,$
$1{,}4142 \le \sqrt{2} < 1{,}4143,$	$2{,}2360 \le \sqrt{5} < 2{,}23601$
$1{,}41421 \le \sqrt{2} < 1{,}41422$	$2{,}23606 \le \sqrt{5} < 2{,}23607$

Atunci $\sqrt{2} + \sqrt{5} = 3{,}6502...$

DEFİNİȚİE

Se numeşte produsul numerelor reale nenegative a şi b,un număr real d,care pentru orice număr natural n,satisface inegalitățile:

$$a_n' b_n' \le d < a_n'' b_n''.$$

Se poate demonstra că un astfel de număr d există şi este unic.Dacă unul sau ambele numere sunt negative,atunci se înmulțesc valorile lor absolute şi apoi se ține seama de cunoscuta regulă a semnelor şi anume:

1) **produsul este pozitiv dacă ambii factori au acelaşi semn şi atunci:**

$$ab=|a|\,|b|;$$

2) **produsul este negativ dacă semnele factorilor sunt diferite şi atunci:**

ab=-|a| |b|.

EXEMPLU

Să se găsească trei cifre după virgulă pentru produsul numerelor $a=\frac{1}{3}$ **şi** $b=\sqrt{2}$.

Avem a=0,3333333…şi b=1,41421…Atunci

$0 \le a < 1$	$1 \le b < 2$
$0{,}3 \le a < 0{,}4$	$1{,}4 \le b < 1{,}5$
$0{,}33 \le a < 0{,}34$	$1{,}41 \le b < 1{,}42$
$0{,}333 \le a < 0{,}334$	$1{,}414 \le b < 1{,}415$
$0{,}3333 \le a < 0{,}3334$	$1{,}4142 \le b < 1{,}4143$

Deci

$$0 \le ab < 2$$
$$0{,}42 \le ab < 0{,}6$$
$$0{,}4653 \le ab < 0{,}4828$$
$$0{,}47062 \le ab < 0{,}47261$$
$$0{,}47135286 \le ab < 0{,}47152762$$

Astfel am obținut:

ab=0,471…

Proprietățile adunării şi înmulțirii numerelor reale.Proprietățile inegalităților

Adunarea pe mulțimea R a numerelor reale are proprietățile:

1. este comutativă:

$$a+b=b+a, \forall a,b \in R$$

2. este asociativă:

$$(a+b)+c=a+(b+c), \forall a,b,c \in R$$

3. numărul 0 este element neutru pentru adunare,adică:

$$a+0=0+a=a, \forall a \in R$$

4. orice număr real a are un opus,care este –a,adică:

$$a+(-a)=(-a)+a=0, \forall a \in R$$

Observație.În loc de a+(-b) vom scrie a-b.

Înmulțirea numerelor reale are proprietățile:

1. este comutativă:

$$ab=ba, \forall a,b \in R$$

2.este asociativă:

$$(ab)c=a(bc), \forall a,b,c \in R$$

3.numărul 1 este element neutru pentru înmulțire,adică:

$$a1=1a=a, \forall a \in R$$

4.orice număr real a diferit de zero are un invers,care este a^{-1},adică:

$$a a^{-1} = a^{-1} a = 1 ;$$

5.este distributivă față de adunare,adică:

$$a(b+c)=ab+ac$$

$$(a+b)c=ac+bc$$

Proprietăți ale inegalităților

1. dacă $a<b$ atunci $a+c<b+c$,oricare c număr real;

2. dacă $a<b$ şi $c>0$,atunci $ac<bc$;

3. dacă $a<b$ şi $c<0$,atunci $ac>bc$;
4. dacă $a<b$ şi $c<d$,atunci $a+c<b+d$ şi $a-d<b-c$;
5. dacă $a,b,c,d>0$ astfel încât $a<c$ şi $c<d$,atunci $ac<bd$.În aceleaşi condiţii avem şi $\frac{a}{d}<\frac{b}{c}$.

Acelea şi proprietăţi sunt valabile şi pentru relaţia $\leq$.

İNTERPRETAREA GEOMETRİCA A NUMERELOR REALE

Fie d o dreaptă oarecare pe care fixăm un punct O numit origine şi sensul pozitiv de la stânga la dreapta.Originea împarte dreapta d în două semidrepte (Ox semiaxa pozitivă şi (Ox' semiaxa negativă.Fie 1=OU ca unitate de măsură.

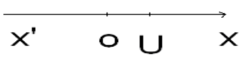
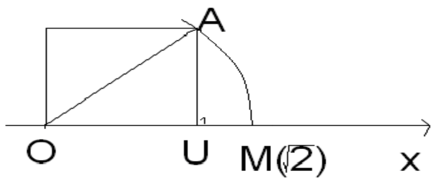


figura 2

Există astfel o funcție bijectivă care asociază oricărui număr real un unic punct pe dreaptă.

Exercițiu.Să se construiască pe dreapta d,cu ajutorul riglei şi compasului,numărul $\sqrt{2}$ **.**
Soluție:
Se construieşte pătratul de latură OU=1.Conform teoremei lui Pitagora,$OA^2 = OU^2 + AU^2$**=1+1=2.Deci** $OA = \sqrt{2}$ **.Cu ajutorul compasului se construieşte** $OM = OA = \sqrt{2}$ **.**



Figură 3

Bibliografie

1. Manuale alternative 2002-2009
2. Nastasescu, Nita-Exercitii de matematica pentru liceu, EDP 2003