Studiu privind metoda analitico-sintetică în rezolvarea problemelor de geometrie

Prof. Antohe Florin Mihai
Şcoala Nichita Stănescu Galați

1. Metoda analitico-sintetică în rezolvarea problemelor de calcul.

În practică rar se întâmplă ca o problemă să se poată rezolva numai prin metoda sintezei sau numai prin metoda analizei. În realitate se aplică ambele metode pentru rezolvarea unei probleme. În acest caz se pune întrebarea: cum procedăm? De obicei se încearcă rezolvarea problemei prin sinteză şi folosim această cale cât reuşim, după care se recurge la analiză. Dacă nu putem începe cu metoda sintezei, atunci apelăm la metoda analizei până când găsim două date care pot determina o mărime, iar pentru a doua necunoscută mai departe, calculele decurg în ordine sintetică.

Exemplu. *Laturile unui triunghi ABC sunt || AB || = c, || AC || = b, || BC || = a. O paralelă la latura || BC || a triunghiului intersectează laturile (AB)* şi *(AC), respectiv în M* şi *N. Se cere:*

1) Să se afle lungimea segmentului (MN) în aşa fel încât perimetrul triunghiului AMN să fie egal cu perimetrul trapezului BMNC;

2) Să se afle aria triunghiului AMN.

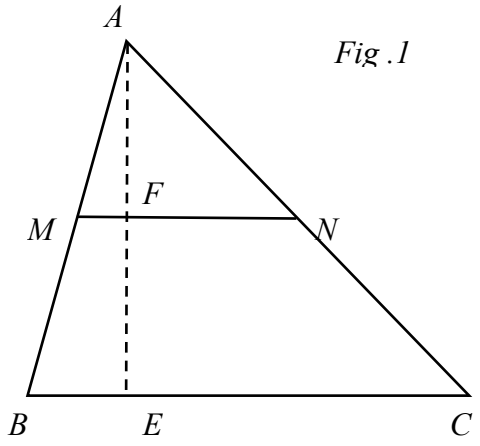


Fig .1

Rezolvare. 1) La început aplicăm metoda analizei. Plecăm de la ceea ce se cere. Presupunem că *(MN)* este segmntul paralel cu *(BC)*, care determină triunghiul *AMN* şi trapezul *BMNC*, ce au perimetrele egale.

Să vedem ce consecință se poate deduce din acestă presupunere:

$$\| AM \| + \| MN \| + \| AN \| = \| BM \| + \| BC \| + \| CN \| + \| MN \|. \quad \textbf{(1)}$$

Observăm că lungimea segmentului *(MN)* este comună celor doi membri ai egalității (1), deci se poate deduce:

$$\| AM \| + \| AN \| = \| BM \| + \| BC \| + \| CN \| \quad \textbf{(2)}$$

Analizând egalitatea (2) se poate vedea că membrul al doilea, dacă s-ar mai adăuga cantitatea $\| AM \| + \| AN \|$, atunci s-ar obține perimetrul triunghiului dat. Ca să nu se schimbe egalitatea (2) va trebui ca aceeaşi sumă să fie adunată şi în membrul stâng, deci:

$$2(\| AM \| + \| AN \|) = \| AB \| + \| BC \| + \| CA \| \quad \textbf{(3)}$$

de unde prin înlocuirea lungimilor laturilor triunghiului ABC, avem:

$$\| AM \| + \| AN \| = \frac{a + b + c}{2} \quad \textbf{(4)}$$

Dacă ținem seama că $a + b + c = 2p$, atunci egalitatea (4) devine:

$$\| AM \| + \| AN \| = p \quad \textbf{(5)}$$

În urma presupunerii făcute am găsit un adevăr indiscutabil (care ne poate duce direct) dacă ținem seama că lungimea segmentului *(MN)* intră în componența celor două perimetre.

De aici mai departe aplicăm metoda sintezei. Plecăm de la ceea ce se cunoaşte în problemă. *(MN)* fiind paralel cu *(BC)*, înseamnă că triunghiurile *AMN* şi *ABC* sunt asemenea, adică

$$\Delta AMN \sim \Delta ABC \quad \textbf{(6)}$$

Din asemănarea lor rezultă proporționalitatea laturilor:

$$\frac{\| AM \|}{\| AB \|} = \frac{\| AN \|}{\| AC \|} = \frac{\| AM \| + \| AN \|}{\| AB \| + \| AC \|} = \frac{\| MN \|}{\| BC \|} \quad \textbf{(8)}$$

Alegem proporția făcută de ultimele două rapoarte şi avem:

$$\frac{\| AM \| + \| AN \|}{\| AB \| + \| AC \|} = \frac{\| MN \|}{\| BC \|} \quad \textbf{(9)}$$

Înlocuind în egalitatea (9) segmentele cunoscute obținem:

$$\frac{p}{c + b} = \frac{\| MN \|}{a} \quad \textbf{(10)}$$

de unde

$$\| MN \| = \frac{ap}{b+c} \qquad \textbf{(11)}$$

Pentru rezolvarea punctului (2) al problemei începem cu metoda analizei. Aplicăm formula cunoscută pentru aria triunghiului, obținem pentru cazul nostru:

$$\sigma[AMN] = \frac{\| MN \| \cdot \| AF \|}{2} \qquad \textbf{(12)}$$

În membrul al doilea observăm că $\| MN \|$ este cunoscut, dar nu cunoaştem pe $\|AF\|$. De aici se vede că am redus problema aflării ariei triunghiului *AMN* la aflarea lungimii segmentului *(AF)* care este înălțimea în acest triunghi. Mai departe rezolvarea se desfăşoară pe calea sintezei. Cunoscând laturile triunghiului *ABC*, lungimea înălțimii *AE* este dată de formula:

$$\| AE \| = h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad \textbf{(13)}$$

Pentru simplificare notăm $\| AE \| = h$.

Din triunghiurile asemenea *AMN* şi *ABC* găsim:

$$\frac{\| AM \|}{\| AB \|} = \frac{\| AN \|}{\| AC \|} = \frac{\| MN \|}{\| BC \|} \qquad \textbf{(14)}$$

Din asemănarea triunghiurilor *AMF* şi *ABE*:

$$\frac{\| AM \|}{\| AB \|} = \frac{\| AF \|}{\| AE \|} = \frac{\| MF \|}{\| BE \|} \qquad \textbf{(15)}$$

Comparând şirurile de rapoarte egale de la (14) şi (15) deducem că toate aceste rapoarte sunt egale. Din egalitatea:

$$\frac{\| AF \|}{\| AE \|} = \frac{\| MN \|}{\| BC \|}$$

calculăm $\| AF \| = \dfrac{hp}{b+c}$

şi apoi $\sigma[AMN] = \dfrac{ahp^2}{2(b+c)^2}$

2 Metoda analitico-sintetică în rezolvarea problemelor de demonstrație.

În studiul din luna ianuarie am văzut în ce constă metoda sintezei şi cum se aplică ea în rezolvarea problemelor de demonstrație, iar în cel din decembrie am urmărit acelaşi lucru pentru metoda analizei, cu scopul de a le înțelege mai bine.

În realitate, aceste două metode de raționament nu sunt separate între ele, existând o strânsă legatură, după cum am văzut şi la rezolvarea problemelor de calcul.

Într-adevăr, atunci când rezolvă, o problemă prin sinteză, plecăm de la anumite date sau de la unele cunoştințe învățate mai înainte, însă avem mereu întrebarea problemei la care trebuie să răspundem.

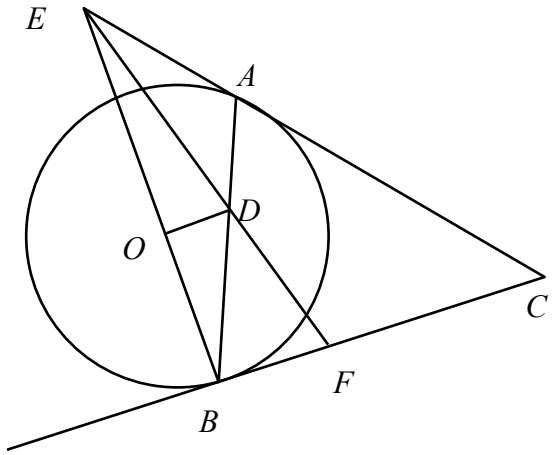
Când rezolvăm o problemă prin analiză, plecăm de la întrebarea problemei, însă trebuie să ținem seama de ceea ce cunoaştem în problemă şi de multe ori aceasta ne sugerează întrebarea pe care trebuie să o punem noii probleme, pe care o formulăm.

Practic se procedează astfel: folosind calea sintezei atât cât reuşim, după care mai departe, folosim metoda de raționament a analizei.

În unele probleme sau teoreme putem începe demonstrarea lor prin metoda analizei până găsim elementele de care trebuie să ne folosim în demonstrație, după care se aplică calea sintezei.

Se pot ivi şi cazuri când în demonstrația unei probleme suntem nevoiți să trecem de mai multe ori când la aplicarea sintezei, când la cea a analizei.

Exemplu. *Să se demonstreze că două tangente duse la un cerc* şi *coarda lor de contact formează două segmente congruente pe perpendiculara dusă dintr-un punct al coardei pe segmentul care uneşte centrul cercului cu acest punct.*



Rezolvare. Fie cercul $C(O, r)$ şi CA, CB tangentele din C la cerc, A şi B fiind punctele lor de tangență. Fie D un punct al segmentului

AB. Perpendiculara pe dreapta OD în punctul

D intersectează tangentele în E şi F.

Se cere să se demonstreze că $\| ED \| = \| DF \|$.

a) În demonstrația acestei probleme, la început se va folosi metoda analizei. Problema cere să punem în evidență că segmentele *(ED)* şi *(DF)* sunt congruente. Unim pe O cu E şi F şi examinând figura observăm că pentru a arăta că segmentele *(ED)* şi *(DF)* sunt congruente este necesar să dovedim că triunghiul OEF este isoscel.

b) Ca să dovedim că triunghiul OEF este isoscel, trebuie să arătăm că segmentele *(OF)* şi *(OE)* sunt congruente, sau că unghiurile $\sphericalangle OED$ şi $\sphericalangle OFD$ sunt congruente. Ținând seama de datele problemei, singura posibilitate este aceea de a dovedi că unghiurile $\sphericalangle OFD$ şi $\sphericalangle OED$ sunt congruente.

În felul acesta am înlocuit problema de la punctul a) care cere să se demonstreze că un triunghi este isoscel cu o altă problemă prin care se cere să punem în evidență congruența a două unghiuri.

c) Mai departe, în demonstrație ne vom folosi de metoda sintezei. Unim C cu B, observăm că patrulaterul $ODFB$ este inscriptibil pentru că:

$$m(\sphericalangle OBF) + m(\sphericalangle ODF) = 180^{o} \qquad \textbf{(1)}$$

Patrulaterul $ODFB$ fiind inscriptibil, deducem că:

$$\sphericalangle OBD \equiv \sphericalangle OFD \text{ sau } \sphericalangle OBA \equiv \sphericalangle OFE \qquad \textbf{(2)}$$

d) Triunghiul OBA fiind isoscel, rezultă că:

$$\sphericalangle OBA \equiv \sphericalangle OAB \qquad \textbf{(3)}$$

e) Pe de altă parte patrulaterul $ODAE$ este inscriptibil pentru că unghiurile $\sphericalangle OAE$ şi $\sphericalangle ODE$ sunt congruente, ambele fiind drepte, adică:

$$\sphericalangle OAE \equiv \sphericalangle ODE \qquad \textbf{(4)}$$

Din faptul că patrulaterul $ODAF$ este inscriptibil rezultă că:

$$\sphericalangle OED \equiv \sphericalangle OAD \qquad \textbf{(5)}$$

$$\sphericalangle OEF \equiv \sphericalangle OAB \qquad \textbf{(6)}$$

Comparând egalitățile (3), (4), (6) deducem că:

$$\measuredangle OEF \equiv \measuredangle OFE \qquad \textbf{(7)}$$

Din relația (7) rezultă că triunghiul *OEF* este isoscel. Cum înălțimea *OD* dusă în triunghiul *OEF* din vârful unghiului opus bazei este şi mediană, rezultă că *(DE)≡(DF)* şi problema este demonstrată.

Probleme propuse pentru olimpiada 2011

Acest material , reprezinta de fapt o colectie de zece probleme propuse pentru olimpiada de matematica –faza locala 2011 . Interesant este faptul ca toate problemele sunt legate de numarul 2011 , si am reusit sa acopar toate clasele VI-XII .

1) Clasa a VI a

Aflati cifrele a,b,c $\in N^*$ astfel incat : $\overline{aaa}+\overline{bc00}$ =2011 (Justificati unicitatea cifrelor gasite) .

Solutie :

Evident $\overline{aaa}+\overline{bc00}$ =111a+1000b+100c=2011 .

Deci 1000b<2011 $\Rightarrow$ b<3 .

Daca b=2 $\Rightarrow$ 111a+100c=11 (absurd) .

Daca b=1 $\Rightarrow$ 111a+100c=1011 $\Rightarrow$ 100c=1011-111a $\Rightarrow 100 \mid 1011-111a$.

Evident , in acest caz , obtinem a=1 . Deci 100c=900 si c=9 .

2) Clasa a VIII a

Aratati ca , numarul : $1\bullet 2\bullet 3\bullet ...\bullet 2010(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2010})$ este divizibil cu 2011 .

Solutie :

Avem : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2010}$ =(1+ $\frac{1}{2010}$)+($\frac{1}{2}+\frac{1}{2009}$)+....= $\frac{2011}{1\bullet 2010}+\frac{2011}{2\bullet 2009}$ +.....=

$=2011\bullet$ ($\frac{1}{1\bullet 2010}+\frac{1}{2\bullet 2009}$ +....) .

Atunci : $1\bullet 2\bullet 3\bullet ...\bullet 2010(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2010})$ =2011 ($\frac{1\bullet 2\bullet ...\bullet 2010}{1\bullet 2010}+\frac{1\bullet 2\bullet ...\bullet 2010}{2\bullet 2009}$ +....) .

Este evident ca expresia din paranteze este un numar natural , deci problema este demonstrata .

3) Clasa a VII a

Sa se afle doua numere prime a,b$\in N^*$, astfel incat 2^a -b=2011 .

Solutie :

Avem 2^a =2011+b $\Rightarrow$ 2^a >2011 $\Rightarrow$ a >10 .

Daca a=11 atunci 2^{11} =2048 . In acest caz b=2048-2011=37 .

Dar 11 si 37 sunt numere prime deci , problema este rezolvata .

4) Clasa a VII a

Aflati trei numere naturale prime a<b<c , astfel incat : $a \bullet b^4 + c^2 = 2011$.

Solutie :

Daca a,b,c ar fi toate trei impare , se va obtine o contradictie (impar+impar=2011) .

Deoarece singurul numar prim par este 2 $\Rightarrow$ a=2 . Atunci $b \geq 3$ si $c \geq 5$.

Daca luam b=3 $\Rightarrow 2 \bullet 81 + c^2 = 2011 \Rightarrow c^2 = 2011 - 162 = 1849 \Rightarrow c = 43$.

Deci a=2 , b=3 si c=43 .

5) Clasa a IX a

a) Aratati ca functia : f: [0, $+\infty$] $\rightarrow R^*$, f(x)= $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, este strict descrescatoare .

b) Demonstrati ca : $\sqrt{2010} > \dfrac{\sqrt{2009} + \sqrt{2011}}{2}$.

Solutie :

a) Fie x,y $\in$ [0, $+\infty$] cu x $\neq$ y .

Atunci :

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-\sqrt{y+1}+\sqrt{y}}{x-y}=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1})-(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

Se observa ca raportul de mai sus , este strict negativ , deci f este strict descrescatoare .

b) Avem 2009<2010 $\Rightarrow$ f(2009)>f(2010) si obtinem :

$\sqrt{2010}-\sqrt{2009}>\sqrt{2011}-\sqrt{2010}$, de unde obtinem ca :

$$\sqrt{2010}>\frac{\sqrt{2009}+\sqrt{2011}}{2}\ .$$

6) Clasa a IX a

a) Aflati cel mai mare numar natural n$\in N^*$, astfel incat :

1+2+….+n < 2011 < 1+2+….+n+(n+1) .

b) Aflati numarul maxim de numere naturale nenule si distincte doua cate doua care au suma egala cu 2011.

Solutie :

a) Avem : $\frac{n(n+1)}{2}$ < 2011 < $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, de unde avem : n(n+1)<4022 .

Se obtine n=62 .

b) Observam ca 1+2+…+62+63=2016=2011+5 .

Asadar numarul maxim este 62 .

7) Clasa a X a

Aratati ca $\exists$ a$\in N^*$, si $\exists$ k$\in N^*$, astfel incat :

$2^k+2^{k+1}+2^{k+2}+2^{k+3}+2^{k+4}+a^a$ =2011 .

Solutie :

Observam ca a^a <2011 . Atunci a<5 .

Daca a=4 , obtinem :

2^k (1+2+ $2^2+2^3+2^4$)=2011-256=1755 (imposibil , deoarece 1755 este un numar impar) .

Daca a=3 , atunci : 2^k (1+2+ $2^2+2^3+2^4$)=2011-27=1984 $\Rightarrow$ 2^k =64$\Rightarrow$ k=6 .

8) Clasa a X a

a) Aratati ca lg 2011 $\in$ R-Q .

b) Aflati a,b$\in N^*$, doua cifre prime , cu a<b ,astfel incat :

b+lg a < lg 2011 < a+lg b+lg 7 .

Solutie :

a) Sa presupunem ca lg 2011 $\in$Q . Atunci lg 2011= $\frac{m}{n}$, cu m,n $\in N^*$.

Deci 2011=$10^{\frac{m}{n}}$ $\Leftrightarrow$ $2011^n=10^m$ (absurd , deoarece ultima cifra a numarului

2011^n este 1 si nu 0) .

b) Inegalitatea este echivalenta cu :

lg ($10^b \bullet a$) < lg 2011 < lg ($10^a \bullet b \bullet 7$) $\Leftrightarrow$ $10^b \bullet a$ < 2011 < $10^a \bullet b \bullet 7$.

Din $10^b \bullet a$ < 2011 $\Rightarrow$ b<4 .

Daca b=3 $\Rightarrow$1000a < 2011 $\Rightarrow$ a=2 .

Observam ca , in acest caz este indeplinita si inegalitatea :

2011 < $10^a \bullet b \bullet 7$ =2100 .

9) Clasa a XI a

Fie a,b,c,d$\in$R , patru numere in progresie aritmetica , si A$\in M_2(R)$, A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

a) Aratati ca det A $\leq$ 0 .

b) Aratati ca ($\exists$) doua matrici U,V $\in M_2(R)$ si r$\in$R , astfel incat A=a$\bullet$U+r$\bullet$V ,iar

U si V indeplinesc conditiile : $U^{2011} = 2\bullet U^{2010}$ si $V^{2011} = 3\bullet V^{2010} + 2\bullet V^{2009}$.

Solutie :

a) Vom lua b=a+r , c=a+2r , d=a+3r , unde r$\in$R , este ratia progresiei aritmetice .

Atunci : A=$\begin{pmatrix} a & a+r \\ a+2r & a+3r \end{pmatrix}$ si det A=a(a+3r)-(a+r)(a+2r)=-2 $r^2 \le 0$.

b) Avem : A=$\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$+$\begin{pmatrix} 0 & r \\ 2r & 3r \end{pmatrix}$=a$\bullet\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$+r$\bullet\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Sa luam U=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ si V=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Atunci $U^2 = 2\bullet U \Rightarrow U^{2011} = 2\bullet U^{2010}$.

Ecuatia caracteristica a lui V este :

$V^2 - (trV)\bullet V + (\det V)\bullet I_2 = O_2$, unde tr V=3 si det V=-2 .

Deci $V^2 - 3\bullet V - 2\bullet I_2 = O_2 \Rightarrow V^2 = 3\bullet V + 2\bullet I_2 \Rightarrow V^{2011} = 3\bullet V^{2010} + 2\bullet V^{2009}$.

10) Clasa a XII a

Notam cu Z_5 ={ $\hat{0}$, $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{4}$ } .

a) Aratati ca ($\exists$) a,b $\in Z_5$, cu a$\neq$b , astfel incat : a^{2011}=b si b^{2011}=a .

b) Rezolvati in Z_5 ecuatia : $x^{2011} = x$.

Solutie :

a) Observam ca $\hat{2}^4 = \hat{1}$ si $\hat{3}^4 = \hat{1}$.

Atunci $\hat{2}^{2011} = \hat{2}^{2008} \bullet \hat{2}^3 = \hat{3}$ si $\hat{3}^{2011} = \hat{3}^{2008} \bullet \hat{3}^3 = \hat{2}$. Deci a=$\hat{2}$ si b=$\hat{3}$.

b) Evident x= $\hat{0}$ si x= $\hat{1}$ sunt solutii ale ecuatiei .

Conform cu a) , avem ca x= $\hat{2}$ si x= $\hat{3}$ nu pot fi solutii .

Pentru x= $\hat{4}$ avem : $\hat{4}^{2011} = \hat{4}^{2010} \cdot \hat{4} = (\hat{4}^{2})^{1005} \cdot \hat{4} = \hat{1}^{1005} \cdot \hat{4} = \hat{4}$.

Deci x= $\hat{0}$, x= $\hat{1}$ si x= $\hat{4}$ sunt solutii ale ecuatiei .

Marcu Stefan Florin – professor-grad II – Grup Scolar de Transporturi Auto-Calarasi

ALTĂ ECUAŢIE DIOFANTICĂ CELEBRĂ (ECUAŢIA LUI RAMANUJAN)

NECULAI STANCIU[1]

Motto:

"Dar ştiu un lucru mai presus
De toate cîte ţi le-am spus:
Credinţa'n zilele de-apoi
E singura tărie'n noi,
Ca multe-s tari cum credem noi
Şi mâine nu-s !"

- **Sa se rezolve în numere întregi ecuaţia:**

$x^2+7=2^n$.

- ✓ **Soluţie.**

Ecuaţia a fost propusă de Ramanujan în 1913 şi rezolvată de Nagell în 1948.
Următoarea soluţie este elementară (poate cea mai elementară), ea fiind insă destul de lungă.
Presupunem cunoscut faptul că
$\mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}]$ este inel euclidian şi că
$U(\mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}])=\{\pm 1\}$.
Cazul I: n par, $n=2m \Rightarrow 7=2^{2m}-x^2=(2^m-x)(2^m+x)$.
Dar
$2^m-x,\ 2^m+x\in\mathbb{N},\ 2^m-x\leq 2^m+x \Rightarrow \begin{cases} 2^m-x=1 \\ 2^m+x=7 \end{cases} \Rightarrow 2^{m+1}=8=2^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow m+1=3 \Rightarrow m=2 \Rightarrow n=4 \Rightarrow x=\pm 3$.
Deci, $n=4,\ x=\pm 3$.

[1] Prof. , Şc."George Emil Palade", Buzău

Cazul al II-lea: n impar, x impar

$2^n \geq 1+7=8 \Rightarrow n \geq 3$

$\frac{x+i\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{x-i\sqrt{7}}{2} = 2^{n-2} = 2^y$, unde $y=n-2$, y impar, $y \geq 1$.

Dacă $n=3 \Rightarrow x=\pm 1$. Presupunem în continuare că $y \geq 3$.

$\frac{x+i\sqrt{7}}{2} = \frac{x-1}{2} + \frac{1+i\sqrt{7}}{2} \in \mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}]$ şi $\frac{x-i\sqrt{7}}{2} = \frac{x+1}{2} - \frac{1+i\sqrt{7}}{2} \in \mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}]$

$\frac{x-1}{2}, \frac{x+1}{2} \in \mathbb{Z}$ deoarece x este impar.

$2 = \frac{1+i\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{1-i\sqrt{7}}{2}$

Arat că $\frac{1+i\sqrt{7}}{2}, \frac{1-i\sqrt{7}}{2}$ sunt prime în $\mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}]$ şi că $\frac{1+i\sqrt{7}}{2}, \frac{1-i\sqrt{7}}{2}$ nu sunt asociate în divizibilitate.

Fie $\frac{1+i\sqrt{7}}{2} = \alpha \cdot \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}]$

Inelul $\mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}]$ este euclidian cu funcţia φ, unde $\varphi(z) = z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

$2 = \varphi(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}) = \varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta) \Rightarrow \varphi(\alpha) = 1$ sau $\varphi(\beta) = 1$

Dacă $\varphi(\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha \in U(\mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}])$.

Dacă $\varphi(\beta) = 1 \Rightarrow \beta \in U(\mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}])$.

Deci, $\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$ este prim în $\mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}]$. Analog se arată că $\frac{1-i\sqrt{7}}{2}$ este prim în $\mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}]$.

Avem că $\frac{x+i\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{x-i\sqrt{7}}{2} = (\frac{1+i\sqrt{7}}{2})^y \cdot (\frac{1-\sqrt{7}}{2})^y$.

Fie $d = (\frac{x+i\sqrt{7}}{2}, \frac{x-i\sqrt{7}}{2})$. Arătăm că $d=1$.

Rezultă că $d \mid \frac{x+i\sqrt{7}}{2} - \frac{x-i\sqrt{7}}{2} = i\sqrt{7} \Rightarrow d \mid i\sqrt{7}$.

Se arată ca mai sus că $i\sqrt{7}$ este prim (ireductibil) în $\mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}] \Rightarrow d=1$, sau $i\sqrt{7}$.

Deoarece

$d \mid 2^y \Rightarrow d \neq i\sqrt{7} \Rightarrow d=1$

şi avem urmatoarele egalitati:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{x+i\sqrt{7}}{2} = \pm(\frac{1+i\sqrt{7}}{2})^y \\ \frac{x-i\sqrt{7}}{2} = \pm(\frac{1-i\sqrt{7}}{2})^y \end{cases}$$

sau

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{x+i\sqrt{7}}{2}=\pm(\frac{1-i\sqrt{7}}{2})^y \\ \frac{x-i\sqrt{7}}{2}=\pm(\frac{1+i\sqrt{7}}{2})^y \end{cases}$$

Scădem relaţiile din (1) şi obţinem: $\pm i\sqrt{7}=(\frac{1+i\sqrt{7}}{2})^y-(\frac{1-i\sqrt{7}}{2})^y$.
Scădem relaţiile din (2) şi obţinem:
$\pm i\sqrt{7}=(\frac{1-i\sqrt{7}}{2})^y-(\frac{1+i\sqrt{7}}{2})^y$.
Notăm $a=\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$ si $b=\frac{1-i\sqrt{7}}{2}$.
Rezultă că
$a-b=i\sqrt{7}$, $a+b=1$, $a\cdot b=2$, $a^y-b^y=\pm i\sqrt{7}=\pm(a-b)$.
Arătăm că semnul este "_".
Presupunem că $a^y-b^y=a-b$.
Avem că
$a^2=(1-b)^2\equiv 1-2b=1-ab^2\equiv 1 \pmod{b^2}$.
Deoarece y este impar, $y\geq 3\Rightarrow a^y=a\cdot(a^2)^{\frac{y-1}{2}}\equiv a \pmod{b^2}$.
Avem că
$a-b=a^y-b^y\equiv a+0=a \pmod{b^2}\Rightarrow a\equiv a-b \pmod{b^2}\Rightarrow b\equiv 0 \pmod{b^2}\Rightarrow b^2 \mid b$
ceea ce este în contradicţie cu faptul ca b este prim.
Deci, $a^y-b^y=-(a-b)=b-a$.
$-i\sqrt{7}=(\frac{1+i\sqrt{7}}{2})^y-(\frac{1-i\sqrt{7}}{2})^y=\frac{2[C_y^1 i\sqrt{7}+C_y^3(i\sqrt{7})^3+C_y^5(i\sqrt{7})^5+...]}{2^y}\Rightarrow$
$\Rightarrow -2^{y-1}=C_y^1-7C_y^3+7^2C_y^5-7^3C_y^7+...\Rightarrow -2^{y-1}\equiv y \pmod 7$.
Puterile lui 2 modulo 7 sunt: 1,2,4 (se repeta din 3 in 3). Ţinând cont şi de faptul că $y\equiv 1 \pmod 2$ obţinem:
$y=3k\Rightarrow y\equiv 3 \pmod 7\Rightarrow y\equiv 3 \pmod{21}\Rightarrow y\equiv 3 \pmod{42}$
$y=3k+1\Rightarrow y\equiv -1 \pmod 7\Rightarrow y\equiv 13 \pmod{21}\Rightarrow y\equiv 13 \pmod{42}$
$y=3k+2\Rightarrow y\equiv 5 \pmod 7\Rightarrow y\equiv 5 \pmod{21}\Rightarrow y\equiv 5 \pmod{42}$
Deci,
$y\equiv 3,5,13 \pmod{42}$.
Ultimul pas este următorul: dacă y, y_1 sunt soluţii ale ecuaţiei şi $y\equiv y_1 \pmod{42}\Rightarrow y=y_1$.
Avem $\frac{x^2+7}{4}=2^y$, $\frac{x_1^2+7}{4}=2^{y_1}$, $y,y_1\geq 3$ şi impare.
Presupunem că $y-y_1\neq 0\Rightarrow(\exists)\ l\in\mathbb{N}^*$ a.i. $7^l \parallel y-y_1$. Existenţa lui $l\in\mathbb{N}^*$ reiese din $y\equiv y_1 \pmod{42}\Rightarrow 7 \mid 42 \mid y-y_1$.
De asemenea, $a^y-b^y=a^{y_1}-b^{y_1}=b-a$, $a=\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$.
Arătăm că

$a^{y-y_1} \equiv (1+i\sqrt{7})^{y-y_1} \pmod{7^{l+1}}$.

Mai întâi arătăm prin inducţie după l că $(1+7\beta)^{7^l} \equiv 1 \pmod{7^{l+1}}$.

Pentru $l=0$ este evident. Presupunem adevărat pentru l (pasul inductiv), i.e. $(1+7\beta)^{7^l} = 1+7^{l+1}\gamma$.

$(1+7\beta)^{7^{l+1}} = (1+7^{l+1}\gamma)^7 = 1+C_7^1 7^{l+1}\gamma + \ldots \equiv 1+C_7^1 7^{l+1}\gamma = 1+7^{l+2}\gamma \equiv 1 \pmod{7^{l+2}}$.

Dar,

$7^{2(l+1)} \vdots 7^{l+2}$, $(2(l+1) \geq l+2)$, $\frac{y-y_1}{6} = 7^l \cdot t$.

Rezultă că

$2^{y-y_1} = (2^6)^{\frac{y-y_1}{6}} = (1+7\cdot 9)^{7^l \cdot t} = [(1+7\cdot 9)^{7^l}]^t \equiv 1^t = 1 \pmod{7^{l+1}}$.

Deci,

$a^{y-y_1} \equiv (1+i\sqrt{7})^{y-y_1} \pmod{7^{l+1}}$.

În continuare, arătăm prin inducţie dupa l că

$(1+i\sqrt{7})^{7^l} \equiv 1+7^l i\sqrt{7} \pmod{7^{l+1}}$.

Pentru $l=0$, avem că $1+i\sqrt{7} \equiv 1+i\sqrt{7} \pmod 7$.

Presupunem adevarată relaţia pentru l şi o demonstrăm pentru $l+1$.

$(1+i\sqrt{7})^{7^l} \equiv 1+7^l i\sqrt{7} \Leftrightarrow (1+i\sqrt{7})^{7^l} = 1+7^l i\sqrt{7} + \alpha 7^{l+1}$.

$(1+i\sqrt{7})^{7^{l+1}} = (1+7^l i\sqrt{7}+\alpha 7^{l+1})^7 \equiv (1+7^l i\sqrt{7})^7 + C_7^1(1+7^l i\sqrt{7})^6 \cdot \alpha 7^{l+1} \equiv$

$\equiv (1+7^l i\sqrt{7})^7 \equiv 1+C_7^1 7^l i\sqrt{7} + C_7^2(7^l i\sqrt{7})^2 + \ldots \equiv 1+C_7^1 7^l i\sqrt{7} = 1+7^{l+1} i\sqrt{7} \pmod{7^{l+2}}$

Considerând $y_1 - y = 7^l \cdot t$ şi ridicand la puterea t membrii din congruenţa $(1+i\sqrt{7})^{7^l} = 1+7^l i\sqrt{7} \pmod{7^{l+1}}$, obţinem:

$(1+i\sqrt{7})^{y_1-y} = (1+i\sqrt{7})^{7^l \cdot t} \equiv (1+7^l i\sqrt{7})^t = 1+C_t^1 7^l i\sqrt{7} + C_t^2(7^l i\sqrt{7})^2 + \ldots =$

$= 1+C_t^1 7^l i\sqrt{7} + 7^{2l+1}(\ldots) \equiv 1+C_t^1 7^l i\sqrt{7} = 1+t7^l i\sqrt{7} = 1+(y_1-y)i\sqrt{7} \pmod{7^{l+1}}$.

Deci, $1+(y_1-y)i\sqrt{7} \equiv a^{y_1-y} \equiv (1+i\sqrt{7})^{y_1-y} \pmod{7^{l+1}}$.

Folosind $y_1 - y = 7^l \cdot t$ si $a^y \equiv \frac{1+yi\sqrt{7}}{2^y} \pmod 7 \Leftrightarrow a^y = \frac{1+yi\sqrt{7}}{2^y} + 7\cdot\alpha$,

obţinem:

$a^{y_1} = a^{y_1-y} \cdot a^y \equiv [1+(y_1-y)i\sqrt{7}]a^y = a^y + a^y(y_1-y)i\sqrt{7} \equiv a^y + \frac{1+yi\sqrt{7}}{2^y}(y_1-y)i\sqrt{7} \pmod{7^{l+1}}$.

Am folosit mai sus

$\frac{1+yi\sqrt{7}}{2^y}(y_1-y) \equiv a^y(y_1-y) = \frac{1+yi\sqrt{7}}{2^y}(y_1-y) + (y_1-y)7\alpha \pmod{7^{l+1}}$ si

$(y_1-y)7\alpha \vdots 7^{l+1}$.

Avem că

$b^{y_1} \equiv [1+(y-y_1)i\sqrt{7}]b^y \equiv b^y + \frac{(y-y_1)i\sqrt{7}(1-yi\sqrt{7})}{2^y} \pmod{7^{l+1}}$,

deoarece $b = \frac{1-i\sqrt{7}}{2}$, $b^{y_1-y} \equiv (1-i\sqrt{7})^{y_1-y} \equiv 1+(y-y_1)i\sqrt{7} \pmod{7^{l+1}}$ şi

$b^y \equiv \frac{1-yi\sqrt{7}}{2^y}$.

Aşadar,

$$\frac{(y-y_1)i\sqrt{7}(1-yi\sqrt{7})}{2^y} \equiv b^{y_1}-b^y = a^{y_1}-a^y \equiv \frac{(y_1-y)i\sqrt{7}(1+yi\sqrt{7})}{2^y} \pmod{7^{l+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1+yi\sqrt{7}}{2^y}(y_1-y)i\sqrt{7} \equiv \frac{-1+yi\sqrt{7}}{2^y}(y_1-y)i\sqrt{7} \pmod{7^{l+1}} \Rightarrow (y_1-y)i\sqrt{7} \equiv 0 \pmod{7^{l+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y_1-y)i\sqrt{7} = 7^{l+1}\cdot\gamma,\ \gamma \in \mathbb{Z}[\tfrac{1+i\sqrt{7}}{2}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y_1-y)^2\cdot 7 = \varphi((y_1-y)i\sqrt{7}) = 7^{2(l+1)}\cdot\varphi(\gamma) \Rightarrow (y_1-y) \vdots 7^{2l+1}.$$

Dar, $7^l \parallel y_1-y \Rightarrow 7^{2l} \parallel (y_1-y)^2 \Rightarrow (y_1-y)^2 \not\equiv 0 \pmod{7^{2l+1}}$ ceea ce reprezintă o contradicţie $\Rightarrow y_1 = y$.

Deci, pentru y impar, $y \geq 3$ avem $y \in \{3,5,13\}$.

Dar, $n = y+2 \Rightarrow n \in \{5,7,15\} \Rightarrow x \in \{\pm 5, \pm 11, \pm 181\}$.

Aşadar, soluţiile ecuaţiei lui Ramanujan în $\mathbb{Z}$ sunt:

$(x,n) \in \{(\pm 1,3),(\pm 3,4),(\pm 5,5),(\pm 11,7),(\pm 181,15)\}$.

Remarcă. *În soluţia dată de Nagell se folosea ecuaţia Pell:*

$x^2+7 = 2^{2n+1} \Leftrightarrow x^2 - 2^{2n+1} = -7 \Leftrightarrow x^2 - 2y^2 = -7$.

BIBLIOGRAFIE:

***www.mateforum.ro

ECUAȚII DIFERENȚIALE

Prof. Carmen – Elena Smarandache
Colegiul Național de Agricultură şi Economie – Tecuci

În multe probleme de fizică, mecanică, tehnică sunt întâlnite procese de evoluție care depind de factori, care din punct de vedere matematic sunt caracterizați prin prezența unor funcții de forma $y = f(x),\ x \in I,\ I \subset R$ împreună cu una sau mai multe dintre derivatele sale de diferite ordine: $y',\ y'', \ldots, y^{(n)}$, în raport cu variabila x.

Astfel de relații verificate de funcția y şi de derivatele sale $y',\ y'', \ldots, y^{(n)}$ se numesc **ecuații diferențiale de ordinul n.**

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL I

Definiție: O ecuație diferențială de ordinul I este o relație de forma: $y'(x) = f(x, y(x))$, (1) unde $y : I \to R$ este o funcție derivabilă pe I, $I \subset R$ cu derivata $y' : I \to R$, iar f este o funcție definită pe o mulțime de forma JxK, unde J şi K sunt intervale de numere reale.

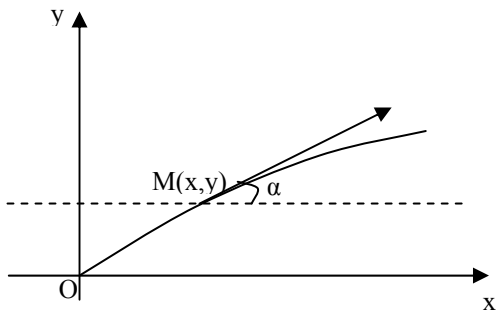
Se numeşte **soluție** a ecuației diferențiale o funcție derivabilă $y : I \to R,\ I \subset J$ astfel încât pentru orice $x \in I$ să avem $y(x) \in K$ şi $y'(x) = f(x, y(x))$.

Dacă se cere găsirea unei soluții y care într-un punct $x_0 \in I$ ia o valoare dată y_0, se spune că soluția y satisface **condiția inițială** $y(x_0) = y_0$. (Problema lui Cauchy).

Interpretarea geometrică

Rezolvarea ecuației diferențiale (1) revine la găsirea curbelor de ecuație $y = y(x)$ pentru care panta tangentei în punctul $M(x, y(x))$ este $tg\alpha = f(x, y(x))$, α fiind unghiul tangentei cu axa Ox. (figura de mai jos).

Curbele $y = y(x)$ se numesc **curbe integrale.**



Clase de ecuații diferențiale de ordinul I

1. **Ecuații de forma** $y' = f(x)$, unde f este o funcție continuă pe un interval I. Această ecuație se obține din ecuația diferențială $y'(x) = f(x, y(x))$ considerând că funcția $f(x, y)$ nu depinde de variabila y. Soluția ecuației $y' = f(x)$, $x \in I$ reprezintă mulțimea primitivelor funcției f: $y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + c$, unde $c \in R$ este o constantă arbitrară, $x, x_0 \in I$ şi $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ este o primitivă a funcției f.

   Exemple: Să se rezolve ecuațiile diferențiale:

1) $y'(x) = 2x^4 + 5^x - \frac{1}{x}, \quad x > 0.$

$$y(x) = \int_{x_0}^{x}\left(2t^4 + 5^t - \frac{1}{t}\right)dt = 2\frac{t^5}{5}\Big|_{x_0}^{x} + \frac{5^t}{\ln 5}\Big|_{x_0}^{x} - \ln|t|\Big|_{x_0}^{x} + c =$$

$$2\frac{x^5}{5} + \frac{5^x}{\ln 5} - \ln|x| + \left(-2\frac{x_0^5}{5} - \frac{5^{x_0}}{\ln 5} + \ln|x_0| + c\right) = \frac{2}{5}x^5 + \frac{5^x}{\ln 5} - \ln|x| + c_0.$$

Soluția ecuației diferențiale este: $y(x) = \frac{2}{5}x^5 + \frac{5^x}{\ln 5} - \ln|x| + c_0.$

2) $y'(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}, \quad x > 0.$

$$y(x) = \int_{x_0}^{x}\frac{1}{t^2 + 3t + 2}dt = \int_{x_0}^{x}\frac{1}{(t+1)(t+2)}dt = \int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}\right)dt =$$

$$\ln|t+1|\Big|_{x_0}^{x} - \ln|t+2|\Big|_{x_0}^{x} + c = \ln|x+1| - \ln|x+2| - \ln|x_0+1| + \ln|x_0+2| + c =$$

$\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + c_0$. Soluția ecuației derivabile este: $y(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + c_0.$

2. Ecuații diferențiale cu variabile separabile de ordinul I

O ecuație diferențială de ordinul I este **cu variabile separabile** dacă are forma

$$y'(x) = P(x)Q(y(x)), \qquad (2)$$

unde $P: J \to R$, $Q: K \to R$ sunt funcții continue pe intervalele $J, K \subset R$ şi $Q(y) \neq 0, \ \forall y \in K.$ Pentru rezolvarea ecuației se împart ambii termeni ai ecuației cu factorul $Q(y)$, presupus nenul şi se obține:

$$\frac{y'(x)}{Q(y(x))} = P(x). \qquad (3)$$

Fie g_1 o primitivă pe intervalul K a funcției din primul membru al ecuației (3) şi g_2 o primitivă pe intervalul J a funcției din membrul al doilea al egalității (3). Aceste funcții având derivatele egale, diferă printr-o constantă, adică:

$$g_1(y(x)) = g_2(y(x)) + c_0, \ \forall x \in J. \quad (4)$$

Constanta c_0 va fi unic determinată dacă funcția y satisface condiția inițială $y(x_0) = y_0$.

Cazuri particulare ale ecuației diferențiale cu variabile separabile de ordinul I

a. Ecuația diferențială liniară omogenă de ordinul I

Forma generală a **ecuației diferențiale liniară omogenă de ordinul I** este $y'(x) = P(x) \cdot y(x)$, iar soluția generală este $y(x) = c \cdot e^{\int_{x_0}^{x} P(t)dt}$, c fiind o constantă arbitrară.

Exemple: Să se rezolve ecuațiile diferențiale:

1) $y'(x) = x^4 \cdot y^2(x)$ care verifică condiția inițială $y(1) = 2.$

Considerăm $P(x) = x^4, \ x \in R, \ Q(y(x)) = y^2(x) \in (0, \infty).$

Ecuația dată se scrie sub forma: $\frac{y'(x)}{y^2(x)} = x^4$.

Primitivele funcției $g_1(x) = \frac{y'(x)}{y^2(x)}$ sunt: $\int \frac{y'(x)}{y^2(x)} = -\frac{1}{y(x)} + c$.

Primitivele funcției $g_2(x) = x^4$ sunt: $\int x^4 = \frac{1}{5}x^5 + c$.

Soluția generală a ecuației se scrie: $-\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{5}x^5 + c$ de unde rezultă soluția generală a ecuației diferențiale este: $-\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{5}x^5 + c_0 \Rightarrow y(x) = -\frac{5}{x^5 + 5c_0}$. Din condiția inițială $y(1) = 2$, rezultă $y(1) = -\frac{5}{1^5 + 5c_0} = 2 \Rightarrow 2 + 10c_0 = -5 \Rightarrow c_0 = -\frac{7}{10}$.

Soluția particulară a ecuației diferențiale este: $y(x) = -\frac{5}{x^5 - \frac{7}{2}} = -10 \cdot \frac{1}{2x^5 - 7}$

Verificare: $y'(x) = -10 \cdot \left(-\frac{10x^4}{(2x^5 - 7)^2} \right) = \frac{100x^4}{(2x^5 - 7)^2}$ (*)

şi $x^4 y^2(x) = x^4 \frac{100}{(2x^5 - 7)^2} = \frac{100x^4}{(2x^5 - 7)^2}$ (**). Deoarece (*)=(**) rezultă că soluția ecuației este corectă.

2) $(1 + e^x)y'(x) = e^x \cdot y(x)$ care verifică condiția inițială $y(0) = 1$.

Ecuația se scrie: $y'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \cdot y(x)$

Considerăm $P(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$, $x \in R$, $Q(y(x)) = y(x)$.

Ecuația dată se scrie sub forma: $\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{e^x}{1 + e^x}$.

Primitivele funcției $g_1(x) = \frac{y'(x)}{y(x)}$ sunt: $\int \frac{y'(x)}{y(x)} = \ln|y(x)| + c$.

Primitivele funcției $g_2(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ sunt: $\int \frac{e^x}{e^x + 1} = \ln(e^x + 1) + c$.

Soluția generală a ecuației se scrie: $\ln|y(x)| = \ln(e^x + 1) + c_0$ de unde rezultă soluția generală a ecuației se scrie: $y(x) = e^{\ln(e^x + 1) + c_0}$

Din condiția inițială $y(0) = 1$ rezultă $y(0) = e^{\ln 2 + c_0} = 1$ de unde reiese că $c_0 = -\ln 2$.

Soluția particulară a ecuației diferențiale este: $y(x) = e^{\ln(e^x + 1) - \ln 2}$.

Verificare: $y'(x) = e^{\ln(e^x + 1) - \ln 2} \cdot \frac{e^x}{e^x + 1}$ (*)

şi $\frac{e^x}{e^x + 1} \cdot y(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} e^{\ln(e^x + 1) - \ln 2}$ (**). Deoarece (*)=(**) rezultă că soluția ecuației este corectă.

b. Ecuația diferențială liniară şi omogenă de ordinul I cu coeficienți constanți

Forma generală a **ecuației diferențiale liniară şi omogenă de ordinul I cu coeficienți constanți** este $y'(x) = a \cdot y(x)$, unde a este o constantă reală.

Soluția generală este: $y(x) = c \cdot e^{ax}$, $x \in R$, unde c este o constantă arbitrară.

Exemple: Să se rezolve următoarele ecuații diferențiale liniare şi omogene de ordinul I cu coeficienți constanți:

1) $y'(x) = 10y(x)$, care verifică condiția inițială $y(0) = e^2$.

Ecuația se mai scrie $\frac{y'(x)}{y(x)} = 10$

Primitivele funcției $g_1(x) = \frac{y'(x)}{y(x)}$ sunt: $\int \frac{y'(x)}{y(x)} = \ln|y(x)| + c$.

Primitivele funcției $g_2(x) = 10$ sunt: $\int 10dx = 10x + c$.

Soluția generală a ecuației se scrie: $\ln|y(x)| = 10x + c_0$ de unde rezultă soluția generală a ecuației se scrie: $y(x) = e^{10x+c_0}$.

Din condiția inițială $y(0) = e^2$ rezultă $y(0) = e^{0+c_0} = e^2$ de unde reiese că $c_0 = 2$.

Soluția particulară a ecuației diferențiale este: $y(x) = e^{10x+2}$.

Verificare: $y'(x) = 10e^{10x+2}$ (*)

şi $10 \cdot y(x) = 10e^{10x+2}$ (**). Deoarece (*)=(**) rezultă că soluția ecuației este corectă.

2) $y'(x) = 6^{\log_{36} 9y^2(x)}$

Schimbând baza logaritmului din 36 în 6 ecuația se mai scrie: $y'(x) = 6^{\frac{\log_6 9y^2(x)}{\log_6 36}} \Leftrightarrow y'(x) = 6^{\frac{\log_6 9y^2(x)}{2}} \Leftrightarrow y'(x) = \sqrt{6^{\log_6 9y^2(x)}} \Leftrightarrow$

$y'(x) = \sqrt{9y^2(x)} \Leftrightarrow y'(x) = 3|y(x)|$

- Dacă $y(x) > 0 \Rightarrow y(x) = Ce^{3x}$, $C > 0$;
- Dacă $y(x) < 0 \Rightarrow y(x) = Ce^{-3x}$, $C < 0$.

3. Ecuații diferențiale de ordinul I neomogene cu coeficienți constanți

Forma generală a **ecuației diferențiale de ordinul I neomogenă, cu coeficienți constanți** este: $y'(x) = ay(x) + b$, unde a şi b sunt constante reale $a \neq 0$.

Soluția generală a acestei ecuații diferențiale este de forma: $y(x) = -\frac{b}{a} + c \cdot e^{ax}$, $x \in R$ şi c o constantă reală.

Exemple: Să se rezolve următoarele ecuații diferențiale:

1) $y'(x) = 5y(x) - 10$

Se observă că această ecuație este o ecuație diferențială de ordinul I neomogenă cu coeficienți constanți, unde $a = 5$ şi $b = -10$.

Soluția generală a ecuației este: $y(x) = \frac{10}{5} + Ce^{5x}$, unde $C \in R$.

2) $4y'(x) = 2y(x) + 6$.

Se observă că această ecuație este o ecuație diferențială de ordinul I neomogenă cu coeficienți constanți, unde $a = 2$ şi $b = 6$.

Soluția generală a ecuației este: $y(x) = -\frac{6}{2} + Ce^{2x}$, unde $C \in R$.

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL II

Definiție: O ecuație diferențială de ordinal II este o relație de forma: $y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$, (1) care leagă derivata de ordinal al II-lea a funcției $y(x)$ de funcția însăşi, de derivate de ordinal I şi de variabila independentă x.

Cazuri particulare ale ecuației diferențiale de ordinul al doilea

1. Ecuația de forma $y''(x) = f(x)$. (2)

Soluția acestei ecuații se obține prin două integrări succesive. Avem succesiv: $y'(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + C_1 = g(x) + C_1$ şi $y(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt + C_1x + C_2$, (3) unde x_0 este o valoarea fixată a lui x din intervalul pe care funcția f este definită şi continuă. Se observă că soluția generală a ecuației (2) depinde de două constante arbitrare. Aceste constante pot fi determinate din condițiile inițiale (condiții Cauchy): $y(x_0) = y_0$ şi $y'(x_0) = y'_0$.

Exemple: Să se rezolve următoarele ecuații diferențiale liniare şi omogene de ordinul I cu coeficienți constanți:

1) $y''(x) = 5x^3$, $y(0) = 1$ şi $y'(0) = 2$.

Avem succesiv:

$$y'(x) = \int_0^x 5t^3dt + C_1 = \frac{5}{4}t^4\Big|_0^x + C_1 = \frac{5}{4}x^4 + C_1 \text{ şi}$$

$$y(x) = \int_0^x \left(\frac{5}{4}t^4 + C_1\right)dt + C_2 = \left(\frac{1}{4}t^5 + C_1t\right)\Big|_0^x + C_2 = \frac{1}{4}x^5 + C_1x + C_2.$$

Din condiția inițială $y(0) = 1 \Rightarrow y(0) = C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 1$.

Din condiția inițială $y'(0) = 2 \Rightarrow y'(0) = \frac{5}{4}0^4 + C_1 = 2 \Rightarrow C_1 = 2$.

Soluția particulară a ecuației diferențială este: $y(x) = \frac{1}{4}x^5 + 2x + 1$

Verificare: $y'(x) = \frac{1}{4} \cdot 5x^4 + 2$ şi $y''(x) = \frac{5}{4} \cdot 4x^3 = 5x^3$.

2) $y''(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1}$, $x \in R$

Avem succesiv:

$$y'(x) = \int_0^x \frac{t^3 + t + 1}{t^2 + 1}dt + C_1 = \int_0^x \left(t + \frac{1}{t^2 + 1}\right)dt + C_1 = \left(\frac{t^2}{2} + \text{arctg}t\right)\Big|_0^x + C_1 = \frac{x^2}{2} + \text{arctg}x + C_1$$

şi

$$y(x) = \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} + \text{arctg}t + C_1\right)dt = \frac{t^3}{6}\Big|_0^x + \int_0^x \text{arctg}tdt + C_1x + C_2. \ (*)$$

Notăm cu $I=\int_0^x \text{arctg}t dt$. Pentru a rezolva integrala folosim metoda integrării prin părți. Fie $f(t)=\text{arctg}t$ funcție derivabilă cu derivata $f'(t)=\frac{1}{t^2+1}$ și $g'(t)=1$ funcție care admite primitivă $g(t)=t$. Aplicând metoda integrării prin părți rezultă:

$$I=t\cdot\text{arctg}t\Big|_0^x-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{2t}{t^2+1}=x\cdot\text{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right).\ (**)$$

Înlocuind (**) în (*) se obține soluția generală a ecuației diferențială:

$$y(x)=\frac{x^3}{6}+x\cdot\text{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C_1x+C_2.$$

2. Ecuații diferențiale liniare omogene de ordinul al doilea cu coeficienți constanți

Forma generală a unei ecuații liniare omogene de ordinul al doilea cu coeficienți constanți este:

$$y''(x)+ay'(x)+by(x)=0 \qquad (4)$$

Unde a şi b sunt constante reale.

Pentru rezolvarea acestei ecuații, vom căuta o soluție de forma: $y(x)=u(x)\cdot e^{rx}$, unde u este o funcție ce trebuie determinată, iar r o constantă.

Avem $y'(x)=e^{rx}\left[u'(x)+ru(x)\right]$,

$y''(x)=e^{rx}\left[u''(x)+2ru'(x)+r^2u(x)\right]$. Pentru ca $y(x)$ să verifice ecuația (4) va trebui să alegem $u(x)$ şi r astfel încât să avem egalitate:

$u''(x)+(2r+a)u'(x)+(r^2+ar+b)u(x)=0.$ (5) Cum r nu a fost impus îl alegem astfel încât: $r^2+ar+b=0$ (6). Ecuația (6) în variabila r, care cuprinde coeficienții ecuației diferențiale, se numeşte **ecuație caracteristică** ataşată ecuației diferențiale. Fie r_1 şi r_2 soluțiile ecuației caracteristice (reale sau complexe). În funcție de natura soluțiilor ecuației caracteristice, se disting trei cazuri:

a. Ecuația caracteristică admite două soluții reale şi distincte

În acest caz, discriminantul Δ al ecuației caracteristice este pozitiv şi $r_1=\frac{-a+\sqrt{\Delta}}{2}$ şi $r_2=\frac{-a-\sqrt{\Delta}}{2}$. Se observă că $2r_1+a\neq 0$ şi $2r_2+a\neq 0$. Luând $r=r_1$ sau $r=r_2$ ecuația (5) devine: $u''(x)+(2r+a)u'(x)=0$. Notând $u'(x)=v(x)$, ecuația anterioară devine o ecuație diferențială de ordinul I cu variabile separabile: $v'(x)+(2r+a)v(x)=0$, a cărei soluție generală este: $v(x)=ke^{-(2r+a)x}$, k fiind o constantă arbitrară. Rezultă că $u(x)=k\int_{x_0}^x e^{-(2r+a)t}dt=C_1e^{-(2r+a)x}+C_2$, unde C_1 şi C_2 sunt constante arbitrare. Aşadar soluția generală a ecuației (4) este: $y(x)=e^{rx}\left(C_1e^{-(2r+a)x}+C_2\right)=C_1e^{-(r+a)x}+C_2e^{rx}$. Din ecuația caracteristică (6), avem relația $r_1+r_2=-a$. Luând de exemplu $r=r_2$, atunci $r_2+a=-r_1=r+a$.

Soluția generală a ecuației (4) se rescrie în forma următoare: $y(x)=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$. (7)

Exemple: Să se rezolve următoarele ecuații diferențiale:

1) $y''(x)-y'(x)-2y(x)=0.$

Se observă că această ecuație este o ecuație diferențială liniară omogenă de ordinul al doilea cu coeficienți constanți. Ecuația caracteristică atașată acestei ecuații este $r^2 - r - 2 = 0$, cu soluțiile reale și distincte $r_1 = -1$ și $r_2 = 2$. Aplicând formula (7), care dă soluția generală a ecuației diferențiale, obținem: $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$, unde $C_1, C_2 \in R$.

2) $2y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = y''(x) + y'(x)$ care verifică condițiile $y(0) = 2$ și $y'(0) = 5$.
Aducem ecuația de mai sus la forma: $y''(x) - 5y'(x) + 4y(x) = 0$. Se observă că această ecuație este o ecuație diferențială liniară omogenă de ordinul al doilea cu coeficienți constanți. Ecuația caracteristică atașată acestei ecuații este $r^2 - 5r + 4 = 0$, cu soluțiile reale și distincte $r_1 = 4$ și $r_2 = 1$. Aplicând formula (7), care dă soluția generală a ecuației diferențiale, obținem: $y(x) = C_1e^{4x} + C_2e^{x}$. Condiția $y(0) = 2$ conduce la $C_1 + C_2 = 2$ iar $y'(0) = 5$ conduce la $4C_1 + C_2 = 5$. Se obține sistemul: $\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ 4C_1 + C_2 = 5 \end{cases}$, sistem care are soluțiile $C_1 = 1$ și $C_2 = 1$. Înlocuind aceste constante în soluția generală a ecuației diferențiale, obținem soluția particulară a ecuației diferențiale: $y(x) = e^{4x} + e^{x}$.

b. Ecuația caracteristică admite o soluție dublă

În acest caz, discriminantul Δ al ecuației caracteristice este nul și $r = r_1 = r_2 = -\frac{a}{2}$. Cu aceste precizări ecuația (5) devine $u''(x) = 0$, de unde se obține succesiv $u'(x) = C_1$, $u(x) = C_1x + C_2$. Așadar, soluția a ecuației diferențiale (4) este: $y(x) = (C_1x + C_2)e^{rx}$. (8)

Exemple: Să se rezolve următoarele ecuații diferențiale:

1) $y''(x) + 5y'(x) = y'(x) - 4y(x)$.
Aducem ecuația de mai sus la forma: $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0$.
Se observă că această ecuație este o ecuație diferențială liniară omogenă de ordinul al doilea cu coeficienți constanți. Ecuația caracteristică atașată acestei ecuații este $r^2 + 4r + 4 = 0$, cu soluțiile reale și egale $r = r_1 = r_2 = -2$. Aplicând formula (8), care dă soluția generală a ecuației diferențiale, obținem: $y(x) = (C_1x + C_2)e^{-2x}$, unde $C_1, C_2 \in R$.

2) $4y''(x) - 12y'(x) + 9y(x) = 0$ care verifică condițiile $y(0) = 2$ și $y'(0) = 1$.
Se observă că această ecuație este o ecuație diferențială liniară omogenă de ordinul al doilea cu coeficienți constanți. Ecuația caracteristică atașată acestei ecuații este $4r^2 - 12r + 9 = 0$, $\Delta = 144 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$ cu soluțiile reale și egale $r = r_1 = r_2 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$. Aplicând formula (8), care dă soluția generală a ecuației diferențiale, obținem: $y(x) = (C_1x + C_2)e^{\frac{3}{2}x}$. Condiția $y(0) = 2$ conduce la $C_2 = 2$ iar condiția $y'(0) = 5$ conduce la $C_1 = -2$. Înlocuind aceste constante în soluția generală a ecuației diferențiale, obținem soluția particulară a ecuației diferențiale $y(x) = (-2x + 2)e^{\frac{3}{2}x}$.

c. Ecuația caracteristică admite două soluții complexe conjugate

Fie $r_1 = \alpha + i\beta$ şi $r_2 = \alpha - i\beta, \beta \neq 0,$ soluţiile complexe ale ecuaţiei caracteristice. Avem $(\alpha + i\beta)^2 + a(\alpha + i\beta) + b = 0.$ Egalând cu zero partea reală şi partea imaginată, se obţine: $\alpha^2 - \beta^2 + \alpha a + b = 0$ şi $(2\alpha + a)\beta = 0.$ Cum $\beta \neq 0,$ rezultă că $2\alpha + a = 0.$ Încercăm să determinăm soluţia ecuaţiei diferenţiale (4) sub forma $y(x) = e^{\alpha x}u(x).$ Se obţine: $u''(x) + (2\alpha + a)u'(x) + (\alpha^2 + a\alpha + b)u(x) = 0.$ Folosind faptul că $2\alpha + a = 0$ şi $\alpha^2 + \alpha a + b = \beta^2$ se obţine că $u(x)$ satisface ecuaţia: $u''(x) + \beta^2 u(x) = 0.$ Se verifică faptul că $u(x)$ are următoarea formă: $u(x) = C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x.$ În consecinţă forma generală a soluţiilor ecuaţiei diferenţiale este: $y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x),\ \beta \neq 0.$ (9)

Exemple: Să se rezolve următoarele ecuaţii diferenţiale:

1) $y''(x) + 6y'(x) + 18y(x) = 0.$

Se observă că această ecuaţie este o ecuaţie diferenţială liniară omogenă de ordinul al doilea cu coeficienţi constanţi. Ecuaţia caracteristică ataşată acestei ecuaţii este $r^2 + 6r + 18 = 0,\ \Delta = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = -36.$ Ecuaţia caracteristică ataşată are soluţiile complexe conjugate $r_1 = -3 + 3i$ şi $r_2 = -3 - 3i.$ Prin urmare $\alpha = -3$ şi $\beta = 3.$ Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este conform formulei (9): $y(x) = e^{-3x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x),$ unde $C_1, C_2 \in R.$

2) $4y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 0$ care verifică condiţiile $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ şi $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

Se observă că această ecuaţie este o ecuaţie diferenţială liniară omogenă de ordinul al doilea cu coeficienţi constanţi. Ecuaţia caracteristică ataşată acestei ecuaţii este $4r^2 - 4r + 5 = 0,\ \Delta = 16 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = -64.$ Ecuaţia caracteristică ataşată are soluţiile complexe conjugate $r_1 = \frac{1}{2} + i$ şi $r_1 = \frac{1}{2} - i.$ Prin urmare $\alpha = \frac{1}{2}$ şi $\beta = 1.$ Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este conform relaţiei (9): $y(x) = e^{\frac{1}{2}x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$ Condiţia $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ conduce la $C_2 = 0.$ Se observă că $y'(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{C_1}{2}\cos x - C_1 \sin x\right).$ Condiţia $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ conduce la $e^{\frac{\pi}{4}}(-C_1) = 1 \Rightarrow C_1 = -e^{-\frac{\pi}{4}}.$

Înlocuind constantele C_1 şi C_2 obţinem soluţia particulară a ecuaţiei diferenţiale date: $y(x) = e^{\frac{2x-\pi}{4}} \cos x.$

BIBLIOGRAFIE:

1. Nicolae Teodorescu, Valter Ovidiu. Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale. Editura Tehnică, 1978.
2. Ana Niţa. Ecuaţii diferenţiale. Editura Matrixrom.
3. Ioan Bacalu. Ecuaţii diferenţiale. Teorie calitativă. Stabilitate

Inegalitatea lui Tiberiu Popoviciu

Nicuşor Zlota [1)]

Domnul prof. dr. Tiberiu Popoviciu a fost un mare specialist în Analiza matematică, Teoria aproximării, Teoria convexităţii, Analiza numerică, Teoria ecuaţiilor funcţionale, Aritmetică, Teoria numerelor şi Teoria calculului.

În anul 1965 , prof. Tiberiu Popoviciu arată ca daca f:[a,b]→R este o funcţie convexă pe [a,b], atunci este adevarata inegalitatea :

$$\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}+f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\geq\frac{2}{3}\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(\frac{y+z}{2}\right)+f\left(\frac{z+x}{2}\right)\right. \qquad (1)$$

oricare ar fi $x,y,z\in[a,b]$

Reciproca Daca f:[a,b]->R este o funcţie continuă care verifica (1), atunci f este convexă
Demonstraţie :
Având simetrie în cele trei variabile, putem presupune $x\leq y\leq z$
Avem cazurile i) $y\leq\frac{x+y+z}{3}$ ii) $y>\frac{x+y+z}{3}$

În primul caz avem $\frac{x+y+z}{3}\leq\frac{x+z}{2}\leq z$ şi $\frac{x+y+z}{3}\leq\frac{y+z}{2}\leq z$ şi avem combinaţiile convexe

$\frac{x+z}{2}=\alpha\frac{x+y+z}{3}+\beta z$, $\alpha+\beta=1$, $\frac{y+z}{2}=\gamma\frac{x+y+z}{3}+\delta z, \gamma+\delta=1$

$\frac{x+y+2z}{2}=(\alpha+\gamma)\frac{x+y+z}{3}+(2-\alpha-\gamma)z=(\alpha+\gamma)\frac{x+y-2c}{3}+2z$,

$\frac{x+y-2c}{2}=(\alpha+\gamma)\frac{x+y-2c}{3}$, rezulta ca $\alpha+\gamma=\frac{3}{2}$

Din convexitatea lui f avem :

$f\left(\frac{z+x}{2}\right)\leq\alpha f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)+(1-\alpha)f(z)$

$f\left(\frac{y+z}{2}\right)\leq\gamma f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)+(1-\gamma)f(z)$

$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq 1/2f(x)+1/2f(y)$, care prin adunare obţinem :

$f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(\frac{y+z}{2}\right)+f\left(\frac{z+x}{2}\right)\leq 1/2f(x)+1/2f(y)+3/2\, f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$

de unde prin inmulţire cu 2/3 se obţine rezultatul cerut.
Analog cazul ii)
O alta variantă de demonstraţie a inegalatităţii lui Tiberiu Popoviciu se poate gasi în G.M. Seria B NR. 1 /2005, pagina 2, autor prof. Marian Dinca ;
Inegalitaţi – idei si metode , pagina 293, autor Mihai Onucu Drimbe

Generalizarea inegalităţii lui Tiberiu Popoviciu - Alexandru Lupas

$pf(x)+qf(y)+rf(z)+(p+q+r)f(\frac{px+qy+rz}{p+q+r})\geq(p+q)f(\frac{px+qy}{p+q})+(q+r)f(\frac{qy+rz}{q+r})+(r+p)f(\frac{rz+px}{r+p})$,

unde p,q,r $> 0, f\ este\ convexa\ pe\ I\ interval, x, y, z \in I$

Aplicaţii

1.Să se arate că

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c}\geq\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}$, a, b,c >0

Rezolvare

Consideram funcţia f(x)=1/x, x >0, care este convexă

Aplicam Inegalitatea lui Tiberiu Popoviciu, avem

$\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}+f(\frac{x+y+z}{3})\geq\frac{2}{3}[f(\frac{x+y}{2})+f(\frac{y+z}{2})+f(\frac{z+x}{2})$,

înlociund x=a,y=b,z=c, obtinem inegalitatea din enut.

2.Sa se arate că :

$64abc(a+b+c)^3\leq(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$, a,b,c>0

Rezolvare

Consideram functia f(x)=-lnx, x>0

f – este convexa, atunci putem aplica inegalitatea lui Tiberiu Popoviciu,

Pentru orice a,b,c $\in(0,\infty)$, avem succesiv:

$$\ln a+\ln b+\ln c+3\ln\frac{a+b+c}{3}\leq 2\ln\frac{a+b}{2}+2\ln\frac{b+c}{2}+2\ln\frac{c+a}{2}\Leftrightarrow\ln(abc)\left(\frac{(a+b+c)^3}{27}\right)\leq\ln\frac{(a+b)^2}{4}\frac{(b+c)^2}{4}\frac{(c+a)^2}{4}\Leftrightarrow 64abc(a+b+c)^3\leq 27(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2;$$

q.e.d

3.Demonstraţi că în orice triunghi ascuţitunghic avem inegalitatea

$$\sum\sin\frac{A}{2}\geq\frac{5}{4}+\frac{r}{2R}$$

Tudorel Lupu – Constanta

Rezolvare

Fie funcţia f:$(0,\frac{\pi}{2})$->R, f(x)=cosx, care este concavă pe acest interval

Aplicam inegalitatea lui Popoviciu, avem :

CosA+cosB+cosC+3cos$\frac{A+B+C}{3} \leq 2\sum cos\frac{A+B}{2}$, deci

$\sum cosA + \frac{3}{2} \leq 2\sum sin\frac{A}{2}$, rezulta ca $\sum sin\frac{A}{2} \geq \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + 1 + \frac{r}{R})$

q.e.d

4.
Să se demonstreze că :

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + nf(\frac{S}{n}) \geq 2f(\sum_{i=1}^{n}(\frac{S-x_i}{n-1})$$

unde f este convexă pe I interval , S=$\sum_{i=1}^{n} x_i$

X_i>0, i=1,n

Rezolvare
Având in vedere ca f este convexa, putem aplica inegalitatea lui Popoviciu, anume

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + n(n-2)f(\frac{S}{n}) \geq (n-1)f(\sum_{i=1}^{n}(\frac{S-x_i}{n-1})$$

$$(n-1)\sum f(\frac{S-x_i}{n-1}) - n(n-2)f(\frac{S}{n}) \geq 2\sum f(\frac{S-x_i}{n-1}) - nf(\frac{S}{n})$$
$$\Leftrightarrow \sum f(\frac{S-x_i}{n-1}) \geq nf(\frac{S}{n})$$

$$\frac{1}{n}\sum f(\frac{S-x_i}{n-1}) \geq f(\sum \frac{S-x_i}{n(n-1)}) = f(\frac{S}{n})$$

ultima inegalitate rezulta din faptul ca f e ste convexa, deci putem aplica inegalitatea lui Jensen

5.Să se demonstreze că :

$$\prod_{i=1}^{n} x_i(\frac{S}{n})^n \leq \prod_{i=1}^{n}(\frac{S-x_i}{n-1})^2$$

unde , $S=\sum_{i=1}^{n} x_i$

$X_i>0$, i=1,n

Rezolvare

Consideram functia f:(0,∞)->R, definita prin f(x)=-lnx, pentru orice x>0 , f este convexa, putem aplica inegalitatea de mai sus, dupa efectuarea calculelor obtinem ceea ce trebuia demonstrat

Probleme propuse

Să se demonstreze inegalitatea

1) $$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{9}{\sqrt{a+b+c}}\geq\frac{4}{\sqrt{a+b}}+\frac{4}{\sqrt{b+c}}+\frac{4}{\sqrt{c+a}}$$

a,b,c>0

indicatie : Se considera functia f:(0, ∞)->R, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

Se arata ca f este convexa si se aplica inegalitatea lui Popoviciu

2)Sa se demonstreze ca :

$$\sum\cos^2 A\geq\frac{5R-4r}{4R}$$

$$\sum\sin^2 A\geq\frac{7R+4r}{4R}$$

Ind. Consideram functia $f(x)=\cos^2 x$, care este convexa pe intervalul $(0,\frac{\pi}{2})$, respectiv $f(x)=\sin^2 x$, aplicand inegalitatea lui Popoviciu si tinand cont de formulele lui Napier , dupa efectuarea calculelor obtinem c.c.t.d

Formulele lui Napier

$$\sum\sin^2\frac{A}{2}=\frac{2R-r}{2R}$$

$$\sum\cos^2\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{2R}$$

Bibliografie,

1.Inegalitati- idei si metode – Mihai Onucu Drimbe, Editura Gil, 2003
2. Asupra unei inegalitati care caracterizeaza functiile convexe, Marcel Chirita, Gazeta Matematica, Seria B, 7/1984
3.O varianta de demonstratie a inegalitatii lui Tiberiu Popoviciu, Marian Dinca, G.M. B 1/2005
[1]

[1] Profesor Colegiul Tehnic Auto " Traian Vuia " Focsani

LOCURI GEOMETRICE

Teoreme importante şi
probleme rezolvate prin mai multe metode

Autor: Prof. Andrei Octavian Dobre

I. Despre noțiunea de loc geometric

Prin *loc geometric* se întelege figura (plana) formată din multimea L a tuturor punctelor care au aceeasşi proprietate P şi numai pe aceea. Prin darea proprietații şi determinarea mulțimii tuturor punctelor care o satisfac, rezultă, implicit, noțiunea de problemă de loc geometric. Din punct de vedere al cinematicii, *locul geometric* este figura geometrică plană descrisă de un punct mobil care satisface o anumita proprietate.

Dupa modul în care este formulată o problemă de loc geometric distingem:

1) Problema în care locul geometric este precizat prin enunț
2) Probleme în care enunțul cere şi stabilirea locului geometric.

La problemele în care nu se arată propozitia de demonstrat (categoria 2), trebuie să se găsească proprietațile cracteristice tuturor punctelor locului geometric care să reducă problema data la una cunoscută.

Dupa modul în care este definit locul geometric, avem:

1) Probleme în care punctul mobil este legat printr-una sau mai multe relații de distanță de unul sau mai multe puncte fixe.
2) Probleme în care punctul mobil este legat printr-una sau mai multe relații de distantă de una sau mai multe drepte fixe, sau combinat, atunci când relațiile de distanță se referă la puncte şi drepte fixe.
3) Probleme în care punctul mobil se aflală intersecția a doua curbe variabile, supuse la anumite condiții.

Pentru problemele de loc geometric nu exista o metoda generala de rezolvare pe cale sintetica, asa cum exista in geometria analitica, ci trebuie studiata cu atentia problema si figura corespunzatoare, pentru a desprinde elementele care pot reduce problema la unul din locurile geometrice fundamentale.

În rezolvarea problemelor de geometrie, trebuie parcurse urmatoarele etape:

1) Se construiesc puncte, eventual particulare, care au proprietatea locului geometric (cerut sau intuit), aratând în acest fel că mulțimea punctelor ce îl formează nu este vida.
2) Se observă elemente geometrice de poziție fixa sau de măsură constantă, precum şi legatura lor cu acele variabile, folosind proprietațile corespunzătoare cunoscute.

3) Pe baza celor stabilite la (2) şi folosind, eventual, locurile geometrice fundamentale, se "ghiceşte" cărei mulţimi de puncte îi aparţin punctele locului geometric.
4) Se demonstrează că:

a) Orice punct cu proprietatea locului geometric cerut aparţine mulţimi stabilite (mulţimea – loc geometric);
b) Orice punct care aparţine mulţimii stabilite are proprietatea locului geometric (cerut de problemă).

Observaţii:

1) Când locul geometric este precizat prin enunţ, se parcurge numai etapa (4).
2) Dacă în (3) s-a folosit un loc geometric fundamental, atunci nu se parcurge (4), ci se pun numai probleme de delimitare.

   Problemele de delimitare se pun atunci când locul geometric poate sa fie limitat, adică sa fie numai o parte dintr-o curbă; aceasta depinde de conditiile problemei şi cere o cercetare atentă.

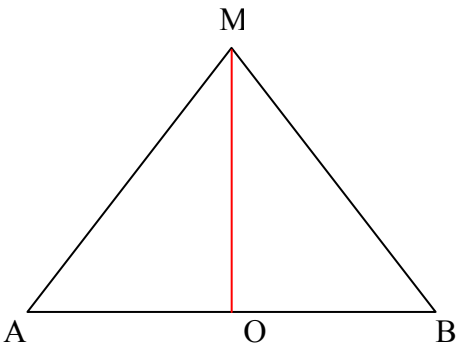
   În cele ce urmeaza voi prezenta câteva teoreme şi 10 probleme rezolvate de loc geometric .

II. Teoreme

Teorema 1: Orice punct de pe mediatoarea unui segment este egal depărtat de capetele segmentului.

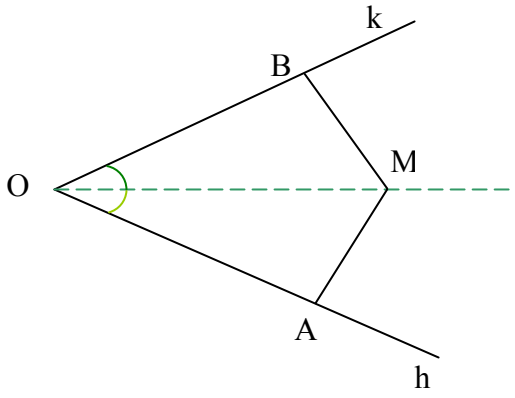
Dem.: Se consideră (AB), $O \in (AB)$, $(OA) \equiv (OB)$ şi M un punct de pe mediatoarea segmentului (AB). Dacă $M = O$, afirmaţia este evidentă. Dacă $M \neq O$, $\Delta AOM \equiv \Delta BOM$ (C.C.) şi rezultă $(AM) \equiv (BM)$, deci $AM = BM$.

Teorema 2: Orice punct egal depărtat de capetele unui segment aparţine mediatoarei segmentului.



Dem.: Se consideră (AB) şi M un punct astfel încât $(MA) \equiv (MB)$. Dacă $M \in (AB)$, atunci M este mijlocul segmentului (AB) şi aparţine mediatoarei. Dacă $M \notin AB$, fie O mijlocul segmentului (AB). $\Delta AOM \equiv \Delta BOM$ (LLL). Deci $A\hat{O}M \equiv B\hat{O}M$. Deoarece cele două unghiuri sunt şi suplementare, rezultă că $MO \perp AB$, ceea ce înseamnă că MO este mediatoarea segmentului (AB).

Teorema 3: Bisectoarea unui unghi este locul geometric al punctelor din interiorul unghiului egal depărtate de laturile unghiului, reunit cu vârful unghiului.

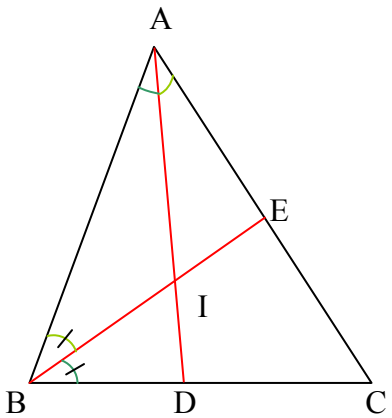


Dem.: a) Se va arăta că orice punct de pe bisectoare este egal depărtat de laturile unghiului (Fig.1.3). Fie $h\hat{O}k$, O vârful unghiului, s bisectoarea lui şi $M \in s - \{O\}$. Se notează cu A şi B picioarele perpendicularelor din M pe h şi respectiv k.
$\Delta OAM \equiv \Delta OBM$ (IU)
$\Rightarrow (MA) \equiv (MB) \Rightarrow d(M,h) = d(M,k)$.

b) Se va arăta că orice punct M egal depărtat de laturile unghiului şi se află în interiorul unghiului, aparţine bisectoarei. Se notează cu A şi B picioarele perpendicularelor duse din M pe laturile unghiului. $(MA) \equiv (MB)$, (OM) latură comună şi $M\hat{B}O \equiv M\hat{B}A = 90°$
$\Rightarrow \Delta OBM \equiv \Delta OAM$ (IC) $\Rightarrow A\hat{O}M \equiv B\hat{O}M \Rightarrow$ OM bisectoare.

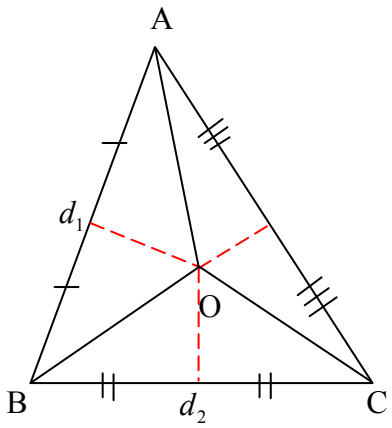
Pe baza proprietăţilor de loc geometric ale bisectoarelor şi mediatoarelor se pot demonstra următoarele două teoreme referitoare la concurenţa bisectoarelor şi mediatoarelor unui triunghi.

Teorema 4: Bisectoarele unghiurilor unui triunghi sunt concurente.



Dem.: Din teorema transversalei rezultă că bisectoarele unghiurilor A şi B intersectează pe (BC) şi (AC) în câte un punct D, respectiv E. Din aceeaşi teoremă rezultă că există puntul I, $\{I\} = (AD) \cap (BE = (BE) \cap (AD)$. Aşadar $\{I\} \in A\hat{C}B$. Din proprietatea punctelor bisectoarei unui unghi rezultă d(I,BC) = d(I,AB), d(I,AB) = d(I,AC) şi deci d(I,BC) = d(I,AC) şi pentru că $\{I\} \in A\hat{C}B$ rezultă că [CI este bisectoarea unghiului C.

Teorema 5: Mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente.



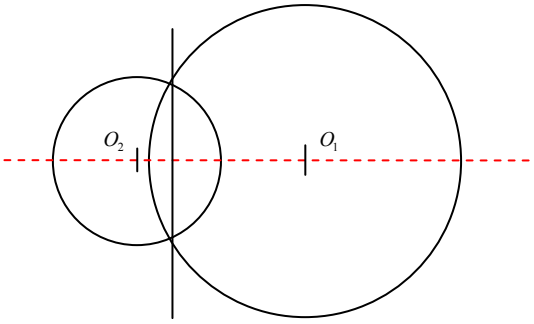
Dem.: Fie un triunghi ABC, d_1, d_2 mediatoarele segmentelor (AB) respectiv (BC), $\{O\} = d_1 \cap d_2$. Din proprietatea punctelor mediatoarei $\Rightarrow (OA) \equiv (OB), (OB) \equiv (OC)$, deci $\Rightarrow (OA) \equiv (OC) \Rightarrow$ O aparţine mediatoarei segmentului (AC).

Teorema 6: Locul geometric al punctelor care au aceeaşi putere faţă de două cercuri neconcentrice este o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor, numită axa radicală a celor două cercuri.

Demonstraţie: Fie cele două cercuri $C(O_1,r_1)$şi $C(O_2,r_2)$, $O_1 \neq O_2$. Trebuie să aflăm locul geometric al punctelor M pentru care $O_1M^2 - r_1^2 = O_2M^2 - r_2^2$. Dacă $r_1 > r_2$, atunci se poate nota $a^2 = r_1^2 - r_2^2$ şi condiţia se scrie $O_1M^2 - O_2M^2 = a^2$. Deci trebuie găsit locul geometric al punctelor pentru care diferenţa pătratelor distanţelor la două puncte fixe este constantă. Se foloseşte teorema lui Pitagora generalizată şi se ajunge la faptul că diferenţa este constantă.

Teorema 7: Fiind date trei cercuri cu centrele necoliniare, axele lor radicale, luate două câte două, sunt concurente într-un punct ce se numeşte centrul radical al celor trei cercuri.

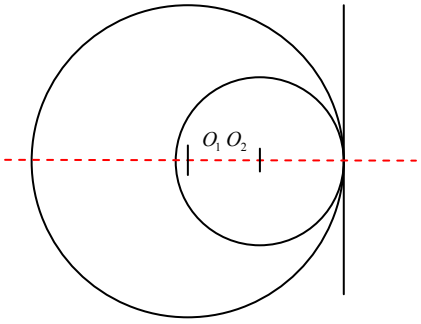
Demonstraţie: Fie $C(O_1,r_1)$, $C(O_2,r_2)$, $C(O_3,r_3)$ cele trei cercuri, iar d,d' axele radicale ale primelor, respectiv ultimelor două cercuri. Şrim că $d \perp O_1O_2$ şi $d' \perp O_2O_3$. Dacă am avea $d \parallel d'$, ar rezulta că $O_2O_1 = O_2O_3$, ceea ce nu e posibil, O_1,O_2,O_3 fiind coliniare. Rezultă că *d* şi d' se taie într-un punct *P*. deoarece *P* se găseşte pe *d* are aceeaşi putere faţă de $C(O_1,r_1)$ şi $C(O_2,r_2)$: cum *P* se găseşte şi pe d' va avea aceeaşi putere faţă de cele trei cercuri. În particular *P* va avea aceeaşi putere faţă de $C(O_1,r_1)$ şi $C(O_3,r_3)$, adică va aparţine celei de-a treia axe radicale.

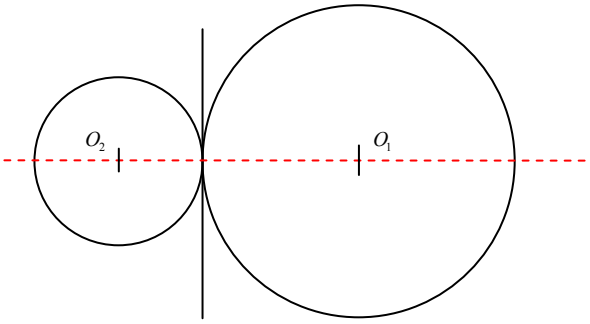


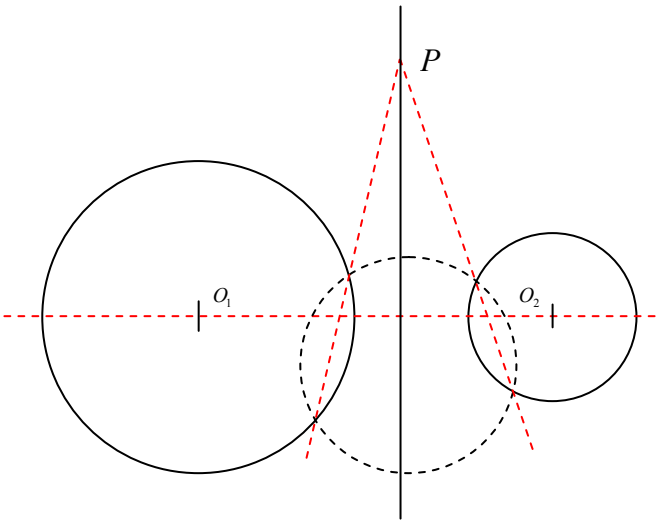
Construcţia axei radicale. Dacă două cercuri au un punct comun, axa lor radicală trece prin acest punct (căci are puterea zero faţă de ambele cercuri). Aşadar:

În cazul cercurilor secante, axa radicală este secanta comună. Dacă cele două cercuri sunt tangente, axa radicală este tangenta comună (fiind perpendiculară pe linia centrelor).

În cazul a două cercuri fără puncte comune axa radicală se construieşte în felul următor: se trasează un cerc ajutător care să fie secant cu cele două cercuri ducem axele radicale ale perechilor de cercuri şi le intersectăm în *P*. perpendiculara din *P* pe dreapta ce uneşte cele două centre ale cercurilor iniţiale este axa radical.







Teorema 8: Locul geometric al punctelor ale căror distanțe la două puncte fixe sunt într-un raport constant $k \neq 1$ este un cerc (Cercul lui Apollonius).

Demonstrație: Fie *A,B* puncte fixe şi *k>1*; atunci orice punct *M* al locului geometric este situat în semiplanul *(dB*, unde *d* este mediatoarea lui [*AB*]. Dacă M_1, M_2 sunt intersecțiile lui *AB* cu bisectoarea interioară şi cea exterioară a lui $A\hat{M}B$, atunci, în conformitatea cu teorema bisectoarei unui unghi, $\frac{AM_1}{BM_1} = \frac{AM_2}{BM_2} = \frac{AM}{BM} = k$, deci, punctele fixe M_1, M_2 aparțin locului geometric. Pe de altă parte $MM_1 \perp MM_2$, deci *M* se află pe un cerc *P* de diametru $[M_1M_2]$.

Recirpoc, orice punct $N \in P$ aparține locului geometric. Într-adevăr, notând $\frac{AN}{BN} = k_1$ avem $N \in (dB$ deci $k_1 > 1$. Din ceea ce-am arătat mai sus rezultă că *N* se află pe un cerc P_1 de diamteru $[N_1N_2]$, unde $N_1, N_2 \in AB, \frac{AN_1}{BN_1} = \frac{AN_2}{BN_2} = k_1$. Dacă $k_1 > k$ punctele N_1, N_2 sunt mai aproape de *B* decât M_1 respectiv M_2, deci $P_1 \subset IntP$, în contradicție cu $N \in P \cap P_1$. Dacă $k > k_1$, atunci $P \subset IntP_1$ şi iarăşi am ajuns la contradicție. Aşadar singurul caz probabil este $k = k_1$ şi deci *N* aparține locului geometric.

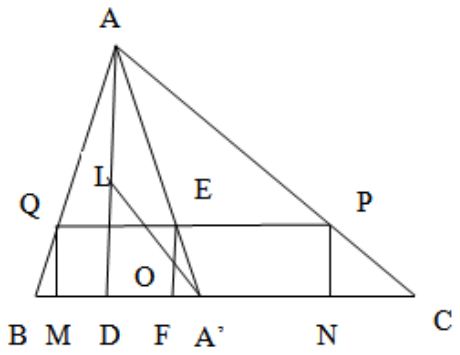
Dacă *k<1*, se schimbă rolul lui *A* şi *B* şi se obține nu cerc în semiplanul *(dA*.

În cazul *k = 1*, locul geometric este mediatoarea *d*.

III. Probleme de loc geometric rezolvate prin diferite metode

1) *Un dreptunghi variabil MNPQ are vârfurile situate pe laturile unui triunghi ABC. Să se afle locul geometric al punctelor de intersecție ale diagonalelor dreptunghiului MNPQ.*

Solutie 1:



Cazul 1: Presupunem că triunghiul ABC este ascutit unghic

Presupunem că varfurile M, N sunt situate pe latura BC, vârful P, este situat pe latura AC, iar Q pe latura AB. Notăm cu E intersecția medianei AA' cu latura PQ a dreptunghiului. (QE = EP).

Dacă F este proiecția lui E pe BC, atunci mijlocul O al segmentului EF este punctul de intersecție al diagonalelor dreptunghiului.

Fie AD, D∈BC, înălțimea triunghiului ABC dusă din A.

A'O∩AD={L}, unde L este mijlocul segmentului AD.
Rezultă că O , punctul de intersecție al diagonalelor dreptunghiului, aparține segmentului A'L, A' fiind mijlocul lui BC.

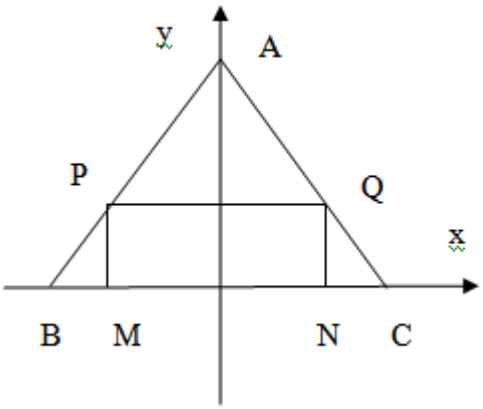
Reciproc : daca O este un punct al segmentului A'L, se construieste un triunghi inscris in triunghiul ABC,cu intersecția diagonalelor lui O (În prealabil se construieste segmentul EF)

Analog, pot fi considerate dreptunghiurile care au cate o latura asezată pe doua laturi ale triunghiurilor, AB şi AC. Prin urmare locul geometric obținut este format din reuniunea a trei segmente.

Observatie: Cele trei segmente care formează locul geometric, sunt ceviene (concurente) în triunghiul median A'B'C', format de mijloacele laturilor triunghiului dat. Pentru a justifica acest lucru, este suficient să observăm că punctul L împarte segmentul B'C' în acelaşi raport în care D împarte latura BC.

Cazul 2: Presupunem că triunghiul ABC este optuzunghic, $m(\sphericalangle A) > 90^o$. Atunuci dreptunghiurile înscrise pot avea laturile aşezate pe BC, însa nu putem avea dreptunghiurile cu doua varfuri pe laturile AC sau AB. Deci, în acest caz, locul geometric este un segment.

Solutie 2:



Fie BC = x si luam înălțimea din A axa Ox

Fie A(0, h), B(b, 0), C(c, 0), QP : y=α

Scriind ecuațiile lui AB si AC şi intersectând cu QP obtinem:

$Q(\frac{b(h-\alpha)}{h},\alpha)$, $P(\frac{c(h-\alpha)}{h},\alpha)$

Centrul dreptunghiului se afla la intersectia dreptelor:

$$y=\frac{\alpha}{2} \text{ si } x=\frac{x_D+x_E}{2}=\frac{(b+c)(h-\alpha)}{2h}$$

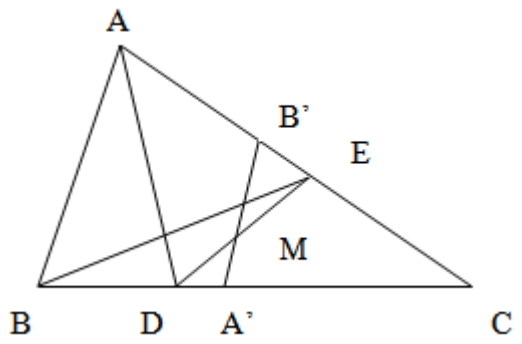
Eliminând parametrul α obținem:

$\frac{x}{\frac{b+c}{2}}+\frac{y}{\frac{h}{2}}=1$, adică o dreapta ce trece prin mijlocul lui (BC) şi mijlocul lui (OA)

Locul geometric va fi reuniunea a trei drepte ce trec prin mijlocul unei laturi şi mijlocul înălțimii corespunzatoare.

2) *Se considera triunghiul ABC si se iau pe laturile sale punctele variabile D∈BC, E∈AC. Sa se afle locul geometric al punctului M, mijlocul segmentului DE, atunci cand punctele D si E descriu(parcurg) cele doua laturi, astfel incat triunghiurile ABDsi BCE sa aiba aceeasi arie.*

Solutie:



Observăm că dacă D tinde către B, atunci E tinde către C, iar M tinde catre A' , mijlocul laturii BC.

Observăm că dacă D tinde catre C, atunci E tinde către A, iar M tinde către B' , mijlocul laturii AC.

De aceea intuim că locul geometric al punctului M este linia mijlocie A'B'.

Din σ(ABD) = σ(BCE), rezulta $\frac{\sigma(ABD)}{\sigma(ABC)}=\frac{\sigma(BCE)}{\sigma(ABC)}$, de unde

$\frac{BD}{BC}=\frac{CE}{AC}$, adica $\frac{BD}{BA'}=\frac{CE}{B'C}$

Utilizand proportii derivate avem:

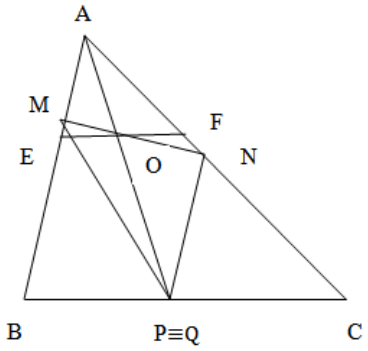
$$\frac{BA'-BD}{BA'}=\frac{B'C-CE}{B'C}$$

adică $\frac{DA'}{A'C}=\frac{B'E}{B'C}$. Atunci $\frac{A'D}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'E}\cdot\frac{ME}{MD}=1$ şi conform reciprocei teoremei lui Menelaus, rezultă că punctele A', M, B' sunt coliniare.

Deci, locul geometric al punctului M este linia mijlocie A'B'.

3) *Se dă triunghiu ABC. Să se gasească locul geometric al punctului , mijlocul segmentului MN,ştiind că M si N aparţin laturilor AB, respectiv AC şi* $\frac{AM}{AB}=\frac{CN}{AC}$.

Soluţie:



Ducem MN || AC, NQ || AB cu P si Q situate pe BC.

Avem $\frac{AM}{AB}=\frac{CP}{BC},\frac{CN}{AC}=\frac{CQ}{BC}$ si cum $\frac{AM}{AB}=\frac{CN}{AC}$ (prin ipoteza),

rezultă că $\frac{CP}{BC}=\frac{CQ}{BC}$ şi deci P≡Q.

Prin urmare, patrulaterul AMPN este paralelogram şi O este mijlocul lui AP, adică O se află pe linia mijlocie EF, unde E si F sunt mijloacele laturilor AB, respectiv AC.

Reciproc:

Fie O∈EF si AO∩BC={P}

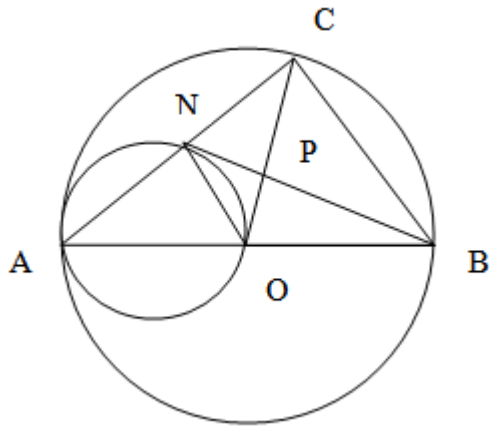
Ducem prin P dreptele PM||AC si PN||AB, cu M∈AB si N∈AC.

Deoarece AMPN este paralelogram şi AO=OP, rezultă că O este mijlocul segmentului MN. Din MP||AC si NP||AB, urmează $\frac{AM}{AB}=\frac{PC}{BC}=\frac{CN}{CA}$.

Deci, locul geometric al punctului O este linia mijlocie EF.

4) *Fie AB un diametru fix al unui cerc, C(O,r), iar M un punct mobil pe cerc. Dreapta AM intersecteaza cercul de diametru AO în N. Să se determine locul geometric al punctului P, de intersecție al dreptelor OM şi BN.*

Solutie:



Cum $m(\sphericalangle ANO)=90^0$, rezulta ca ON $\perp$ AM.

Utilizand teorema lui Menelaos în triunghiul AMO, cu transversala NPB, obținem:

$$\frac{NM}{NA}\cdot\frac{BA}{BO}\cdot\frac{PO}{PM}=1$$

Dar $\frac{NM}{NA}=1$, $\frac{PO}{OM}=\frac{1}{3}$, adica PO = $\frac{r}{3}$ si cum O este fix, urmeaza că locul geometric este cercul C(0, $\frac{r}{3}$)

5) *Se consideră un triunghi ABC şi punctele M,N aparţinând laturilor CA, AB respectiv, care impart aceste laturi în acelşi raport k.*
Dacă P este un punct fix al planului să se determine locul geometric al centrelor de greutate al triunghiului MNP, cand k este o marime variabilă.

Solutie :

Din ipoteza avem:

$$\frac{MA}{MB}=\frac{CN}{AN}=k$$

Sa notăm cu P' mijlocul segmentului MN si cu G centrul de greutate al triunghiului PMN.

Vectorul $\overrightarrow{PG}$ se exprimă cu ajutorul vectorului $\overrightarrow{PP'}$ prin relaţia : $\overrightarrow{PG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PP'}$ (1)

În triunghiul PMN segmentul de dreapta PP' este mediana şi avem:

$$\overrightarrow{PP'}=\frac{\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}}{2} \quad (2)$$

Substituim valoarea lui PP' din (2) si (1) se obţine:

$$\overrightarrow{PG}=\frac{\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}}{2} \quad (3)$$

Punctele M si N împart segmentul AB si CA în raporul k şi, prin urmare, avem:

$$\overrightarrow{PM}=\frac{\overrightarrow{PA}+k\overrightarrow{PB}}{1+k}$$
$$\overrightarrow{PN}=\frac{\overrightarrow{PC}+k\overrightarrow{PA}}{1+k} \quad (4)$$

Se înlocuiesc valorile $\overrightarrow{PM}$ si $\overrightarrow{PN}$ din (4) si (3) şi obţinem:

$$\overrightarrow{PG}=\frac{\overrightarrow{PA}(1+k)+\overrightarrow{PC}+k\overrightarrow{PB}}{3(1+k)}$$

sau

$$\overrightarrow{PG}=\frac{\overrightarrow{PA}}{3}+\frac{\overrightarrow{PC}+k\overrightarrow{PB}}{3(1+k)} \quad (5)$$

Sa notăm cu Q punctul care împarte segmentul CB în raportul k, adică:

$$\frac{QC}{QB}=k$$

Prin urmare $\overrightarrow{PQ}=\dfrac{\overrightarrow{PC}+k\overrightarrow{PB}}{1+k}$ (6)

Substituind valoarea lui $\overrightarrow{PQ}$ din (6) în (5) obținem:

$$\overrightarrow{PG}=\frac{\overrightarrow{PA}}{3}+\frac{\overrightarrow{PQ}}{3}=\frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PQ}}{3} \quad (7)$$

Sa notăm cu $\vec{u}$ versorul dreptei BC.

În triunghiul PBQ avem:

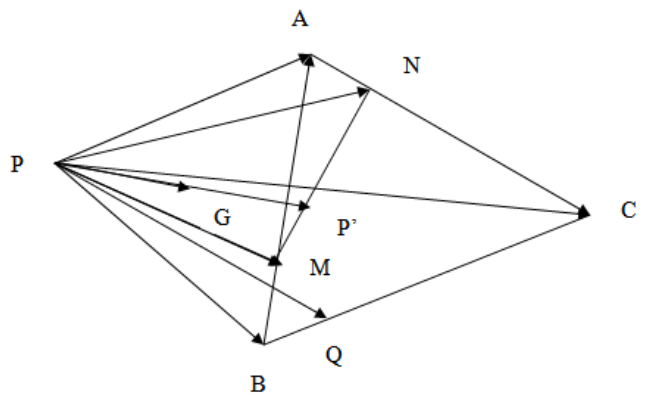
$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{PB}+\lambda\vec{u}$$

Substituind expresia vectorului $\overrightarrow{PQ}$ in 7 se obtine

$$\overrightarrow{PG}=\frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{3}+\frac{\lambda}{3}\vec{u}$$

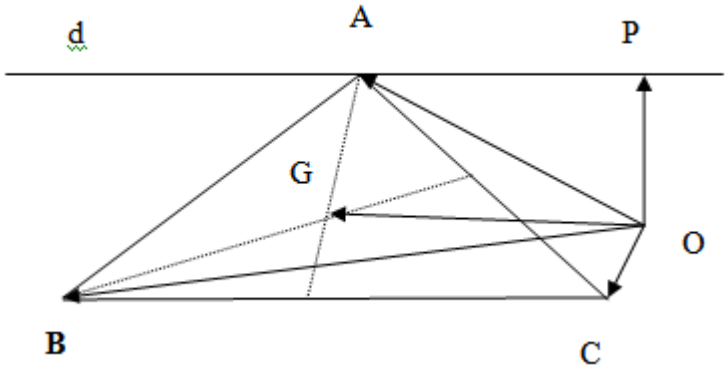
Vectorii $\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}$ şi $\vec{u}$ sunt constanti, iar λ variabila.

Locul geometric este deci o dreapta paralela cu BC



6) *Vârfurile B şi C ale triunghiului ABC sunt fixe, iar varful A se deplaseaza pe dreapta (d). Să se afle locul geometric al centrului de greutate G al triunghiului ABC.*

Solutie:



Se considera in planul triunghiului un punct fix O.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

Daca P este un punct fix pe dreapta (d) si $\vec{u}$ este versorul acestei drepte, atunci putem scrie:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{u}\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Vectorul de poziție al centrului de greutate se scrie:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \lambda\vec{u}}{3} = \vec{a} + \frac{\lambda\vec{u}}{3}$$

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

Locul geometric al punctului G este o dreaptă paralela cu D

7) *Se consideră în spatiu trei puncte necoliniare A,B,C. Să se afle locul geometric al punctelor M pentru care :*

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = constant$$

Solutie:

Notam cu G centrul de greutate al triunghiului ABC.

Avem:

$3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

Înmultim scalar ambii membrii ai acestei egalitați cu ea însăşi şi obținem:

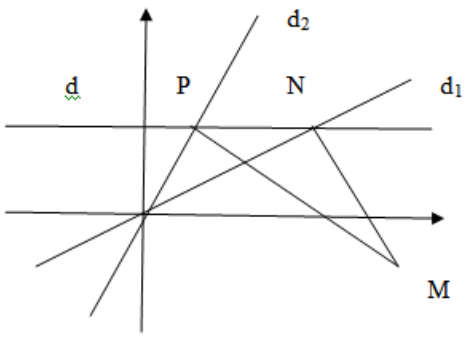
$$9MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow$$
$$9MG^2 = 2(MA^2 + MB^2 + MC^2) - (AB^2 + AC^2 + CB^2)$$

Din această relație obținem MG = constant

Locul geometric este deci o sfera de centu G si rază MG

8) *Într-un sistem de axe de coordonate xOy, se duc prin O doua drepte fixe d_1 si d_2. O dreaptă d'||Ox este mobilă şi taie d_1 si d_2 în N şi P. Perpendicularele în N şi P pe d_1 şi d_2 se taie în punctul M. Se cere locul geometric al punctului M.*

Solutie:



Fie d_1: y = mx, d_2: y=nx, d: y=α .

Atunci avem: N$(\frac{\alpha}{m},\alpha)$, P$(\frac{\alpha}{n},\alpha)$

Obținem:

NM: y-$\alpha = -\frac{1}{m}(x - \frac{\alpha}{m})$

PM: $y - \alpha = -\frac{1}{n}(x - \frac{\alpha}{n})$

Eliminând pe α rezultă $y = \frac{mn-1}{m+n}x$

Adica locul geometric este o dreapta ce trece prin origine.

9) *Fie un punct fix A∈Ox ş punctele variabile N si P pe Oy. Perpendicularele duse prin N şi P la AN si AP se taie in M. Se cere locul geometric al lui M ştiind că ON·OM = k^2*

Solutie:

Fie A(a,0), N(0, α), M(0,β) astfel încât α β=k^2

Avem MN: ax- αy+ α^2 = 0
MP: ax+ βy+ β^2=0

Atunci aβx – αβy – $\alpha^2\beta$=0
-aαx + αβy – $\alpha\beta^2$=0

ax(β-α)+ αβ(α-β)=0
Rezultă ax=α β=k^2

$x = \frac{k^2}{a}$

Locul geometric este o paralela la Oy

10) *Fie dreapta fixa d' pe care se iau punctele fixe A si B şi fie dreapta fixa d⊥d' pe care se iau punctele variabile N si P simetrice față de dreapta AB. Să se găsească locul geometric al punctului M de intersecție al dreptelor BN şi AP.*

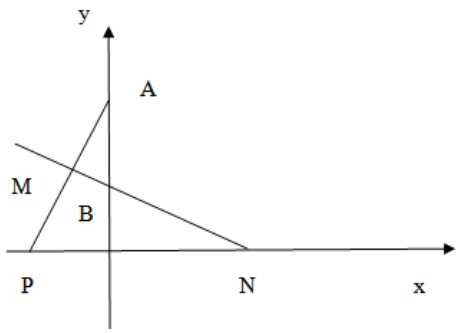
Solutie:

Fie AB = Oy, d=Ox
Avem A(0,a), B(0,b), N(α ,0),P(-α ,0)

BN: $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{b}=1$

AM: $\frac{x}{-\alpha}+\frac{y}{a}=1$

Eliminând pe α obținem y = $\frac{2ab}{a+b}$



Bibliografie :

1. **Ion Vartopeanu, Olimpia Vartopeanu,** *Geometrie Plana pentru Gimnaziu si Liceu,* Editura Sibila, Craiova 1994
2. **G. Simionescu, . Stefanescu,** *Aplicatii ale calculului vectorial in geometrie si trigonomerie*, Editura Didactica si Pedagogica, Bucuresti 1975
3. **Catalin Nechila,** *Petre Nachila, Geometrie si Trigonometrie***,** Editura Paralela 45, 2009

O CONJECTURA din 1932 A LUI DERRICK HENRY LEHMER REZOLVATA IN 2010

de NICODIM NEGREA

Pe tot parcursul , notam:

$$N_k = \{x : \quad x \text{ este numar intreg si } x \geq k\}, \qquad (1)$$

unde k este numar intreg nenegativ fixat.

Reformulam o conjectura din 1932 a lui Derrick Henry Lehmer , astfel :

CONJECTURA1.(*D. H. Lehmer*, 1932).

1.Daca $n \in N_2$ si φ este *functia (indicatorul)* lui Euler , atunci urmatoarele *trei propozitii* sunt *echivalente* :

¨ $\varphi(n)$ *divide* $n-1$. ¨ ; (P_1)

" *Exista* a , $a \in N_1$, *astfel incat* : $a\varphi(n) = n-1$. " ; (P_2)

" n *este numar prim* . " . (P_3)

2. Daca
$a\varphi(n) = n-1$, *unde* $a \in N_1$, $n \in N_2$,
atunci n *este numar prim si* $a = 1$.

.

Vom *metamorfoza* aceasta *conjectura* in *teorema*!

Urmatoarele trei leme sunt cunoscute.

LEMA 1.Daca $n \in N_2$, atunci urmatoarele *doua propozitii* sunt *echivalente*:

" $\varphi(n)$ *divide* $n-1$. " ; (P_1)

" *Exista* a , $a \in N_1$, *astfel incat* : $a\varphi(n) = n-1$. " . (P_2)

Aceasta este evidenta!

LEMA 2.Daca $n \in N_2$ si este adevarata propozitia

" n *este numar prim* . " , (P_3)

atunci sunt adevarate urmatoarele *doua propozitii* :

" $\varphi(n)$ *divide* $n-1$. " ; (P_1)

" *Exista* a , $a \in N_1$, *astfel incat* : $a\varphi(n) = n-1$. " . (P_2)

Intr-adevar, deoarece $n \in N_2$ si n *este numar prim*, obtinem ca $\varphi(n) = n-1$ si

1.$(n-1) = n-1$, deci pentru $a = 1$, $a\varphi(n) = n-1$, $a \in N_1$. Asa ca din (P_3) rezulta (P_1) si (P_2) .

LEMA 3.(*J. Wallis*, 1785 ; *L. Euler*). Daca $n \in N_2$, atunci exista si sunt unice (pentru un anumit n) urmatoarele numere , cu proprietatile alaturate lor , abstractie facand de asociativitatea si comutativitatea inmultirii numerelor din N_1 :

$$k, \ k \in N_0 ;$$

p_i, $p_i \in N_2$, p_i este $prim$, oricare ar fi i, $i \in N_1$, $i \leq k+1$;
$p_i < p_{i+1}$, oricare ar fi i, $i \in N_1$, $i \leq k$, $daca\ 1 \leq k$;

t_i, $t_i \in N_1$, oricare ar fi i, $i \in N_1$, $i \leq k+1$,

astfel incat:

$$n = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_{k+1}^{t_{k+1}}, \qquad (W)$$

pentru care :

$$\varphi(n) = p_1^{t_1-1}(p_1-1)\, p_2^{t_2-1}(p_2-1) \dots p_{k+1}^{t_{k+1}-1}(p_{k+1}-1). \qquad (E)$$

TEOREMA1.$(N.Negrea, 2010)$. . Daca $n \in N_2$,

$$n = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_{k+1}^{t_{k+1}}, \qquad (W)$$

pentru care :

$$\varphi(n) = p_1^{t_1-1}(p_1-1)\, p_2^{t_2-1}(p_2-1) \dots p_{k+1}^{t_{k+1}-1}(p_{k+1}-1), \qquad (E)$$

in conditiile din LEMA 3. , si este adevarata propozitia

" $Exista\ a, a \in N_1, astfel\ incat:\ a\varphi(n) = n-1.$ " , (P_2)

atunci sunt adevarate urmatoarele trei egalitati :

$$n = p_1 p_2 \dots p_{k+1}; \qquad (w)$$

$$\varphi(n) = (p_1-1)(p_2-1) \dots (p_{k+1}-1); \qquad (e)$$

$$a(p_1-1)(p_2-1) \dots (p_{k+1}-1) = p_1 p_2 \dots p_{k+1} - 1,\ a \in N_1. \qquad (L)$$

Demonstratie. Observam ca trebuie sa demonstram ca $t_i = 1$, oricare ar fi $i, i \in N_1, i < k+1$.

Pentru aceasta , presupunem contrariul , ca ar exista j, $j \in N_1$, $j \leq k+1$, astfel ca $t_j \neq 1$; deoarece $t_j \in N_1$, rezulta ca $t_j \in N_2$; din (W), (E) si

(P_2), privite simultan , rezulta ca p_j $divide$ 1 , care contrazice $p_j \in N_2$ $(conditie\ in\ LEMA\ 3.)$.
Rezulta ca $t_i = 1, oricare\ ar\ fi\ i, i \in N_1, i \leq k+1$. Din (W) obtinem (w) , din (E) obtinem (e) si din (P_2) obtinem (L) .

Asadar, (w) , (e) si (L) sunt conditii necesare pentru (P_2) si (P_1) . Vom demonstra ca $0 = k$ este conditie necesara pentru (L) , deci $0 = k$ va fi conditie necesara pentru (P_2) si (P_1) si vom obtine $n = p_1$, $a = 1$, unde p_1 este numar $prim$, deci n este numar $prim$. Pentru aceasta , ”largim” conditiile din LEMA 3 , pentru k fixat , $k \in N_1$, si obtinem urmatoarea $teorema$, prin care determinam toate numerele x si y_i din egalitatea (l) , obtinuta din (L) , prin inlocuirea numerelor a si p_i cu x si y_i , unde x si y_i verifica conditiile ”largite” , dupa care constatam ca a si $p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}$ nu verifica (L) , deoarece nu indeplinesc conditiile din LEMA 3. , daca $1 \leq k$.

TEOREMA2.$(N.Negrea, 2010)$. Daca numarul k este $fixat$, $k \in N_1$, si este adevarata egalitatea :

$$x(y_1 - 1)(y_2 - 1) \ldots (y_{k+1} - 1) = y_1 y_2 \ldots y_{k+1} - 1 , \qquad (l)$$

unde $x \in N_1$, $y_i \in N_2$, oricare ar fi $i, i \in N_1, i \leq k+1$,

$y_1 \leq y_2$, daca $1=k$;

$y_i < y_{i+1}$, oricare ar fi i , $i \in N_1$, $i \leq k$, daca $2 \leq k$,

atunci este adevarata egalitatea :

$$y_{k+1} = y_1 y_2 \ldots y_k . \qquad (d)$$

Demonstratie. Vom deosebi doua cazuri : $k = 1$ sau $k \geq 2$.

CAZUL $k = 1$

Din egalitatea (l), obtinem :

$$x(y_1 - 1)(y_2 - 1) = y_1 y_2 - 1 = y_1(y_2 - 1) + y_1 - 1 ;$$

$y_2 - 1$ *divide* $y_1 - 1$, deci $y_2 - 1 \leq y_1 - 1$, deoarece $y_1 - 1 \in N_1$, de unde $y_2 \leq y_1$, si, deorece $y_1 \leq y_2$, din ipoteza , rezulta $y_2 = y_1$, adica (d) . Din (l) si $y_2 = y_1$ se determina x , y_1 *si* y_2 . A rezultat (d) .

CAZUL $k \geq 2$

Acest caz se demonstreaza in *trei etape* , cu obiective alaturate .

ETAPA I. RELATII NECESARE PENTRU (l)

Din (l), obtinem :

$$x(y_1 - 1)(y_2 - 1) \dots (y_{k+1} - 1) = y_1 y_2 \dots y_{k+1} - 1 =$$
$$y_1 y_2 \dots y_k (y_{k+1} - 1) + y_1 y_2 \dots y_k - 1 ;$$

$$y_1 y_2 \dots y_k - 1 = [x(y_1 - 1)(y_2 - 1) \dots (y_k - 1) - y_1 y_2 \dots y_k](y_{k+1} - 1) .$$

Notam :

$$b_k = x(y_1 - 1)(y_2 - 1) \dots (y_k - 1) - y_1 y_2 \dots y_k . \qquad (\beta_k)$$

Obtinem :

$$y_1 y_2 \dots y_k - 1 = b_k (y_{k+1} - 1) ; \qquad (d_k)$$

$$b_k \in N_1 ; \qquad (h_k)$$

$$x(y_1 - 1)(y_2 - 1) \dots (y_k - 1) = y_1 y_2 \dots y_k + b_k . \qquad (l_k)$$

Din (l_k), obtinem :

$$x(y_1-1)(y_2-1)\ldots(y_k-1)=y_1y_2\ldots y_{k-1}(y_k-1)+y_1y_2\ldots y_{k-1}+b_k;$$

$$y_1y_2\ldots y_{k-1}+b_k=$$
$$[x(y_1-1)(y_2-1)\ldots(y_{k-1}-1)-y_1y_2\ldots y_{k-1}](y_k-1).$$

Notam :

$$b_{k-1}=x(y_1-1)(y_2-1)\ldots(y_{k-1}-1)-y_1y_2\ldots y_{k-1}. \qquad (\beta_{k-1})$$

Obtinem :

$$y_1y_2\ldots y_{k-1}+b_k=b_{k-1}(y_k-1); \qquad (d_{k-1})$$

$$b_{k-1}\in N_1; \qquad (h_{k-1})$$

$$x(y_1-1)(y_2-1)\ldots(y_{k-1}-1)=y_1y_2\ldots y_{k-1}+b_{k-1}. \qquad (l_{k-1})$$

Notam :

$$b_{k+1}=-1. \qquad (\beta_{k+1})$$

Analog , pas cu pas , pentru $i\in N_0$, $i\leq k-1$, obtinem :

Notam :

$$b_{k-i}=x(y_1-1)(y_2-1)\ldots(y_{k-i}-1)-y_1y_2\ldots y_{k-i}. \qquad (\beta_{k-i})$$

Obtinem :

$$y_1y_2\ldots y_{k-i}+b_{k-i+1}=b_{k-i}(y_{k-i+1}-1); \qquad (d_{k-i})$$

$$b_{k-i}\in N_1; \qquad (h_{k-i})$$

$$x(y_1-1)(y_2-1)\ldots(y_{k-i}-1)=y_1y_2\ldots y_{k-i}+b_{k-i}. \qquad (l_{k-i})$$

Tinand seama de (h_{k-i}) si (β_{k-i}), obtinem :

$$x(y_1-1)(y_2-1)\ldots(y_{k-i}-1)-y_1y_2\ldots y_{k-i}\geq 1, \qquad (n_{k-i})$$

oricare ar fi i, $i\in N_0$, $i\leq k-1$.

Inlocuind pe $k-i$ cu s , obtinem :

$$x(y_1-1)(y_2-1)\dots(y_s-1)-y_1y_2\dots y_s \geq 1, \qquad (n_s)$$

oricare ar fi s , $s \in N_1$, $s \leq k$.
In particular ,

$$x(y_1-1)-y_1 \geq 1 . \qquad (n_1)$$

Scriem (n_1) sub forma echivalenta :

$$(x-1)y_1 \geq x+1 . \qquad (n_1')$$

Presupunem ca $x=1$. Din (n_1') , obtinem : $0 \geq 2$. Fals! Asadar, $x \neq 1$; si , deoarece , din ipoteza $x \in N_1$, rezulta ca :

$x \in N_1$ este *conditie necesara* pentru (l) , daca $1 \leq k$. $(c.n.x)$

Relatia (l) este echivalenta cu urmatoarea relatie :

$$x(y_1-1)(y_2-1)\dots(y_{k+1}-1)-y_1y_2\dots y_{k+1}=-1 . \qquad (n_{k+1})$$

ETAPA a II-a. CELE MAI MICI NUMERE y_i CARE VERIFICA (l)

Pentru x *fixat* , tinem seama de ipoteza si de $(c.n.x)$, din (n_1') rezulta :

Cel mai mic y_1 *posibil* se obtine , daca si numai daca , $b_1=1$, in (n_1') este egalitate, si in (n_1) este egalitate , adica : $x(y_1-1)-y_1=1$, care se scrie :

$$x(y_1-1) = y_1+1 \qquad (m_1)$$

si

$$y_1+1 = x(y_1-1) . \qquad (l_1')$$

Relatiile (m_1) si (l_1') sunt identice .
Inmultim ambii membri ai egalitatii (l_1') cu (y_2-1) si obtinem :

$$(y_1+1)(y_2-1)=x(y_1-1)(y_2-1).$$

Inmultim in membrul stang , apoi trecem din membrul stang in membrul drept un termen , tinem seama de (n_2) si obtinem :

$$y_2-y_1-1=x(y_1-1)(y_2-1)-y_1y_2\geq 1;$$

$$y_2\geq y_1+2.$$

Cel mai mic y_2 *posibil* se obtine , daca si numai daca , $b_2=1$, pentru care :

$$y_2=y_1+2 \qquad (m_2)$$

si

$$y_1y_2+1=x(y_1-1)(y_2-1). \qquad (l_2')$$

Inmultim ambii membri ai egalitatii (l_2') cu (y_3-1) si obtinem :

$$(y_1y_2+1)(y_3-1)=x(y_1-1)(y_2-1)(y_3-1).$$

Inmultim in membrul stang , trecem un termen in membrul drept, si obtinem:

$$y_3-y_1y_2-1=x(y_1-1)(y_2-1)(y_3-1)-y_1y_2y_3.$$

Daca $2=k$, atunci $k+1=3$, tinem seama de (l) , membrul drept se inlocuieste cu -1 si obtinem:

$y_3-y_1y_2-1=x(y_1-1)(y_2-1)(y_3-1)-y_1y_2y_3=-1$, iar din aceasta rezulta :

$$y_3=y_1y_2 \qquad (m_3)$$

si

$$y_1y_2y_2-1=x(y_1-1)(y_2-1)(y_3-1). \qquad (l_3')$$

Relatia (m_2) este echivalenta cu (d) si (l_2') este echivalenta cu (l).

Numerele x, y_1, y_2 si y_3 se determina , pe rand , din relatiile (m_1), (m_2) si (m_3). A rezultat (d). Aici se incheie!

Daca $3 \leq k$, atunci se tine seama de (n_2) si obtinem :

$$y_3 - y_1y_2 - 1 = x(y_1 - 1)(y_2 - 1)(y_3 - 1) - y_1y_2y_3 \geq 1 .$$

Din aceasta obtinem :

$$y_3 - y_1y_2 - 1 \geq 1 ;$$

$$y_3 \geq y_1y_2 + 2 .$$

Cel mai mic y_3 $posibil$ se obtine , daca si numai daca , $b_3 = 1$, pentru care:

$$y_3 = y_1y_2 + 2 \qquad (m_3)$$

si

$$y_1y_2y_3 + 1 = x(y_1 - 1)(y_2 - 1)(y_3 - 1). \qquad (l_3')$$

Analog , pas cu pas , pentru $i \in N_2, i \leq k$,
Presupunem ca :

Cel mai mic y_i $posibil$ se obtine ,daca si numai daca, $b_i = 1$, pentru care:

$$y_i = y_1y_2 \dots y_{i-1} + 2 \qquad (m_i)$$

si

$$y_1y_2 \dots y_i + 1 = x(y_1 - 1)(y_2 - 1) \dots (y_i - 1). \qquad (l_i')$$

Inmultim ambii membri ai egalitatii (l_i') cu $(y_{i+1} - 1)$ si obtinem :

$$(y_1y_2 \dots y_i + 1)(y_{i+1} - 1) = x(y_1 - 1)(y_2 - 1) \dots (y_{i+1} - 1) .$$

Daca $i+1 \leq k$, tinem seama de (n_{i+1}), si obtinem :

$$y_{i+1} - y_1 y_2 \ldots y_i - 1 = x(y_1 - 1)(y_2 - 1) \ldots (y_{i+1} - 1) - y_1 y_2 \ldots y_{i+1} \geq 1;$$

$$y_{i+1} \geq y_1 y_2 \ldots y_i + 2 .$$

Cel mai mic y_{i+1} *posibil* se obtine ,daca si numai daca, $b_{i+1} = 1$,pentru care:

$$y_{i+1} = y_1 y_2 \ldots y_i + 2 \qquad (m_{i+1})$$

si

$$y_1 y_2 \ldots y_{i+1} + 1 = x(y_1 - 1)(y_2 - 1) \ldots (y_{i+1} - 1) . \qquad (l_{i+1}')$$

In particular:

Cel mai mic y_k *posibil* se obtine ,daca si numai daca, $b_k = 1$, pentru care:

$$y_k = y_1 y_2 \ldots y_{k-1} + 2 \qquad (m_k)$$

si

$$y_1 y_2 \ldots y_k + 1 = x(y_1 - 1)(y_2 - 1) \ldots (y_k - 1). \qquad (l_k')$$

Inmultim ambii membri ai egalitatii (l_k') cu $(y_{k+1} - 1)$ si tinem seama de (l):

$$(y_1 y_2 \ldots y_k + 1)(y_{k+1} - 1) = x(y_1 - 1)(y_2 - 1) \ldots (y_{k+1} - 1);$$

$$y_{k+1} - y_1 y_2 \ldots y_k - 1 =$$
$$x(y_1 - 1)(y_2 - 1) \ldots (y_{k+1} - 1) - y_1 y_2 \ldots y_{k+1} = -1 .$$

Cel mai mic y_{k+1} *posibil* se obtine ,daca si numai daca, $b_{k+1} = -1$, pentru care:

$$y_{k+1} = y_1 y_2 \ldots y_k \qquad (m_{k+1})$$

si

$$y_1 y_2 \ldots y_{k+1} - 1 = x(y_1 - 1)(y_2 - 1) \ldots (y_{k+1} - 1) . \qquad (l_{k+1}')$$

Relatia (m_{k+1}) este echivalenta cu (d) si (l_{k+1}') este echivalenta cu (l) .

Numerele $x, y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}$ se determina ,pe rand, din relatiile $(m_1), (m_2), \ldots, (m_{k+1})$. A rezultat (d). Aici se incheie!

In ambele cazuri a rezultat (d).

ETAPA a III-a. CELE MAI MARI NUMERE y_i CARE VERIFICA (l)

Din ipoteza , (d_k) si (h_k) , apoi din (l_k), relatii din ETAPA I , rezulta :

$y_1 y_2 \ldots y_k - 1 = b_k(y_{k+1} - 1) \geq 1(y_{k+1} - 1) = y_{k+1} - 1$;

$y_{k+1} \leq y_1 y_2 \ldots y_k$.

Cel mai mare y_{k+1} *posibil* se obtine ,daca si numai daca, b_k=1,pentru care:

$$y_{k+1} = y_1 y_2 \ldots y_k \qquad (M_{k+1})$$

si

$$x(y_1 - 1)(y_2 - 1) \ldots (y_k - 1) = y_1 y_2 \ldots y_k + 1. \qquad (L_k)$$

Din (L_k), obtinem :

$$x(y_1 - 1)(y_2 - 1) \ldots (y_k - 1) = y_1 y_2 \ldots y_{k-1}(y_k - 1) + y_1 y_2 \ldots y_{k-1} + 1;$$

$$y_1 y_2 \ldots y_{k-1} + 1 = [x(y_1 - 1)(y_2 - 1) \ldots (y_{k-1} - 1) - y_1 y_2 \ldots y_{k-1}](y_k - 1).$$

Notam :

$$b_{k-1} = x(y_1 - 1)(y_2 - 1) \ldots (y_{k-1} - 1) - y_1 y_2 \ldots y_{k-1}. \qquad (\beta_{k-1}'')$$

Obtinem :

$$y_1 y_2 \ldots y_{k-1} + 1 = b_{k-1}(y_k - 1); \qquad (d_{k-1}'')$$

$$b_{k-1} \in N_1; \qquad (h_{k-1}'')$$

$x(y_1-1)(y_2-1)\ldots(y_{k-1}-1)=y_1y_2\ldots y_{k-1}+b_{k-1}$. (l_{k-1}'')

Din (d_{k-1}''),tinand seama de ipoteza si de (h_{k-1}''),apoi de (l_{k-1}'') ,obtinem:

$y_1y_2\ldots y_{k-1}+1=b_{k-1}(y_k-1)\geq 1.(y_k-1)=y_k-1$.

$y_k\leq y_1y_2\ldots y_{k-1}+2$.

Cel mai mare y_k *posibil* se obtine ,daca si numai daca, $b_{k-1}=1$,pentru care:

$y_k=y_1y_2\ldots y_{k-1}+2$ (M_k)

si

$x(y_1-1)(y_2-1)\ldots(y_{k-1}-1)=y_1y_2\ldots y_{k-1}+1$. (L_{k-1})

Analog , pas cu pas , pentru $i\in N_1$, $i\leq k-1$, obtinem :

Notam :

$b_{k-i}=x(y_1-1)(y_2-1)\ldots(y_{k-i}-1)-y_1y_2\ldots y_{k-i}$. (β_{k-i}'')

Obtinem :

$y_1y_2\ldots y_{k-i}+1=b_{k-i}(y_{k-i+1}-1)$; (d_{k-i}'')

$b_{k-i}\in N_1$; (h_{k-i}'')

$x(y_1-1)(y_2-1)\ldots(y_{k-i}-1)=y_1y_2\ldots y_{k-i}+b_{k-i}$. (l_{k-i}'')

Din ipoteza , (d_{k-i}'') si (h_{k-i}'') , obtinem :

$y_1y_2\ldots y_{k-i}+1=b_{k-i}(y_{k-i+1}-1)\geq 1.(y_{k-i+1}-1)=y_{k-i+1}-1$;

$y_{k-i+1}\leq y_1y_2\ldots y_{k-i}+2$.

Cel mai mare y_{k-i+1} *posibil* se obtine ,daca si numai daca, $b_{k-i}=1$,pentru care:

$y_{k-i+1}=y_1y_2\ldots y_{k-i}+2$ (M_{k-i+1})

si

$y_1y_2 \ldots y_{k-i} + 1 = x(y_1 - 1)(y_2 - 1) \ldots (y_{k-i} - 1)$ (L_{k-i})

In (M_{k-i+1}), inlocuim pe $k - i + 1$ cu s si obtinem :

$y_s = y_1y_2 \ldots y_{s-1} + 2$, unde $s \in N_2$, $s \leq k$. (M_s)

In (L_{k-i}) ,inlocuim pe $k - i$ cu s si obtinem :

$y_1y_2 \ldots y_s + 1 = x(y_1 - 1)(y_2 - 1) \ldots (y_s - 1)$, $s \in N_1$, $s \leq k$ (L_s)

Pentru (L_1) si (l) , mai folosim si notatiile (M_1) si ,respectiv, (L_{k+1}) , si inlocuim in (M_s) si (L_s) pe s cu i ; obtinem urmatoarele relatii :

$x(y_1 - 1) = y_1 + 1$, $x \in N_2$, $y_1 \in N_2$ (M_1)

$y_i = y_1y_2 \ldots y_{i-1} + 2$, unde $i \in N_2$, $i \leq k$, (M_i)

$y_{k+1} = y_1y_2 \ldots y_k$; (M_{k+1})

$y_1y_2 \ldots y_i + 1 = x(y_1 - 1)(y_2 - 1) \ldots (y_i - 1)$, $i \in N_1$, $i \leq k$, (L_i)

$y_1y_2 \ldots y_{k+1} - 1 = x(y_1 - 1)(y_2 - 1) \ldots (y_{k+1} - 1)$. (L_{k+1})

Din (M_1) , obtinem :

$x(y_1 - 1) = y_1 + 1 = y_1 - 1 + 2$;

$(x - 1)(y_1 - 1) = 2$; $x - 1 \in N_1$,$y_1 - 1 \in N_1$;

Sunt posibile doar *doua situatii* :

SITUATIA 1^0 : $x - 1 = 1$ *si* $y_1 - 1 = 2$, deci : $x = 2$ *si* $y_1 = 3$;

sau

SITUATIA 2^0 : $x - 1 = 2$ *si* $y_1 - 1 = 1$, deci : $x = 3$ *si* $y_1 = 2$.

Constatam ca relatiile de recurenta (M_i) si (m_i) sunt identice , oricare ar fi i , $i \in N_1$,$i \leq k + 1$,in consecinta:

cele mai mari numere y_i *care verifica* (l) *sunt identice cu cele mai mici*

numere y_i *care verifica* (l), *daca* $x = 2$ *sau* $x = 3$. Asadar, numarul $x = 2$ si numerele $y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}$ obtinute, pe rand, din $(m_1), (m_2)$, . . . , (m_{k+1}) sunt unice. Numarul $x = 3$ si numerele $y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}$ obtinute, pe rand, din $(m_1), (m_2)$, . . . , (m_{k+1}) sunt unice. Numai numerele din aceste doua *situatii* verifica (l). In fiecare dintre cele doua *situatii* este verificata egalitatea echivalenta cu (m_{k+1}), si anume :

$$y_{k+1} = y_1 y_2 \cdots y_k . \qquad (d)$$

TEOREMA 3. (*N. Negrea*, 2010).

1. Daca $n \in N_2$ si φ este *functia (indicatorul)* lui Euler, atunci urmatoarele *trei propozitii* sunt *echivalente* :

" $\varphi(n)$ *divide* $n - 1$. " ; (P_1)

" *Exista* a, $a \in N_1$, *astfel incat* : $a\varphi(n) = n - 1$. " ; (P_2)

" n *este numar prim*. " . (P_3)

2. Daca
$a\varphi(n) = n - 1$, *unde* $a \in N_1$, $n \in N_2$,
atunci n *este numar prim si* $a = 1$.

.

.

Demonstratie. Propozitiile (P_1) si (P_2) sunt echivalente, conform LEMEI 1.

Sa demonstram ca din (P_2) rezulta (P_3). Pentru aceasta, consideram :

$$n = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \ldots p_{k+1}^{t_{k+1}} , \qquad (W)$$

pentru care :

$$\varphi(n) = p_1^{t_1-1}(p_1-1)\, p_2^{t_2-1}(p_2-1)\ldots p_{k+1}^{t_{k+1}-1}(p_{k+1}-1), \qquad (E)$$

unde sunt indeplinite toate conditiile din LEMA 3. Intrucat

$$Exista\ a\ , a \in N_1\, , astfel\ incat\ :\ \ a\varphi(n) = n-1\,.\ " \qquad , \qquad (P_2)$$

atunci sunt indeplinite toate conditiile *ipotezei* TEOREMEI 1. , si ,conform *concluziei* acestei teoreme, sunt adevarate urmatoarele trei egalitati :

$$n = p_1 p_2 \ldots p_{k+1}\,; \qquad (w)$$

$$\varphi(n) = (p_1-1)(p_2-1)\ \ldots\ (p_{k+1}-1)\ \ ; \qquad (e)$$

$$a(p_1-1)(p_2-1)\ \ldots\ (p_{k+1}-1) = p_1 p_2 \ldots p_{k+1} - 1\,,\ \ a \in N_1\ . \qquad (L)$$

Presupunem $k \geq 1$, $k \in N_1$.

Pentru $x = a$, $y_i = p_i$, oricare ar fi i, $i \in N_1$, $i \leq k+1$, sunt indeplinite toate conditiile *ipotezei* TEOREMEI 2., deci este adevarata *concluzia* acestei teoreme , exprimata prin egalitatea :

$$p_{k+1} = p_1 p_2\ \ldots\ p_k\,. \qquad (d')$$

In cazul $k = 1$, din (d') rezulta $p_2 = p_1$, care contrazice $p_1 < p_2$, care este conditie in LEMA 3. Deci $k \neq 1$.

In cazul $k \in N_2$, din (d') rezulta ca p_{k+1} *nu* este numar *prim*, care contrazice o conditie din LEMA 3., ca p_{k+1} este numar *prim*. Deci $k < 2$.

Deoarece $k \in N_0$ si am demonstrat ca $1 \neq k$ si $k < 2$, rezulta ca $0 = k$,

deci sunt adevarate urmatoarele *trei egalitati* :

$$n = p_1\ , \qquad (w_1)$$

$$\varphi(n) = p_1 - 1\ , \qquad (e_1)$$

$$a(p_1-1) = p_1 - 1\,. \qquad (L_1')$$

Din conditiile LEMEI 3. , (w_1) si (L_1') rezulta ca n este numar $prim$ si ,respectiv, $a = 1$.
Am demonstrat astfel ca din (P_1) rezulta (P_2) si (P_3) .

Din (P_2) a rezultat (P_1) , conform LEMEI 1. , si din (P_2) a rezultat (P_3) , inseamna ca din (P_2) rezulta (P_1) si (P_3).

Din (P_3) au rezultat (P_1) si (P_2) , conform LEMEI 2.

S-a demonstrat ca : $daca$
$a\varphi(n) = n - 1$, $unde$ $a \in N_1$, $n \in N_2$,
$atunci$ n $este$ $numar$ $prim$ si $a = 1$
.

Am demonstrat TEOREMA 3. , care a fost obtinuta prin $metamorfozarea$ CONJECTURII 1. .

Pe parcurs am obtinut relatii de recurenta , din care obtinem un rezultat remarcabil in sine , descris in $teorema$ care urmeaza dupa $lema$ urmatoare :

LEMA 4. Daca $u \in N_1$ si $v \in N_0$, atunci :

$$\left(u^{2^v}\right)^2 = u^{2^{v+1}} ;$$

$$\left(2^{2^0} + 1\right)\left(2^{2^1} + 1\right) \dots \left(2^{2^v} + 1\right) =$$
$$\left(2^{2^0} - 1\right)\left(2^{2^0} + 1\right)\left(2^{2^1} + 1\right) \dots \left(2^{2^v} + 1\right) = 2^{2^{v+1}} - 1 ;$$

$$\left(3^{2^0} - 1\right)\left(3^{2^0} + 1\right)\left(3^{2^1} + 1\right) \dots \left(3^{2^v} + 1\right) = 3^{2^{v+1}} - 1 .$$

Fiecare dintre ultimele doua egalitati se poate demonstra prin metoda inductiei matematice.

TEOREMA 4. Daca numarul k este $fixat$, $k \in N_1$, si este adevarata egalitatea :

$$x(y_1-1)(y_2-1)\ \dots\ (y_{k+1}-1) = y_1 y_2\ \dots\ y_{k+1} - 1, \qquad (l)$$

unde $x \in N_1$, $y_i \in N_2$, oricare ar fi $i, i \in N_1, i \leq k+1$,

$y_1 \leq y_2$, daca $1=k$;

$y_i < y_{i+1}$, oricare ar fi i, $i \in N_1$, $i \leq k$, daca $2 \leq k$,

atunci una si numai una dintre urmatoarele $doua\ situatii$ este adevarata :

SITUATIA 1^0 :

$x = 2$;

$y_i = 2^{2^{i-1}} + 1$, oricare ar fi i, $i \in N_1, i \leq k$;

$y_{k+1} = 2^{2^k} - 1$.

sau

SITUATIA 2^0 :

$x = 3$;

$y_1 = 2 = 3^{2^0} - 1$;

$y_i = 3^{2^{i-2}} + 1$, oricare ar fi $i, i \in N_2$, $i < k$, daca $2 < k$;

$y_{k+1} = 3^{2^{k-1}} - 1$.

Demonstratie. Folosim relatiile de recurenta (m_i) din ETAPA a II-a .

SITUATIA 1^0 : $x = 2\ si\ y_1 = 3$.

In CAZUL $k = 1$, din (d), echivalenta cu (m_2), obtinem :

$y_2 = y_1 = 3 = 2^{2^0} + 1 = 2^{2^{1-1}} + 1 = 2^{2^1} - 1 = 2^{2^k} - 1 = y_{k+1}$.

Aceste numere verifica (l).

In CAZUL $k \geq 2$: $y_1 = 3 = 2^{2^1} - 1$. Din (m_2), obtinem: $y_2 = y_1 + 2 = 2^{2^1} + 1$.

In CAZUL $k = 2$: Din (d), echivalenta cu (m_3), obtinem: $y_3 = y_1 y_2 = (y_2 - 2)y_2 = y_2^2 - 2y_2 = y_2^2 - 2y_2 + 1 - 1 = (y_2 - 1)^2 - 1 =$

$(2^{2^1})^2 - 1 = 2^{2^2} - 1 = 2^{2^k} - 1 = y_{k+1}$.

Aceste numere verifica (l).

CAZUL $k \geq 3$:

Din (m_3), obtinem: $y_3 = y_1 y_2 + 2 = 2^{2^2} + 1$.

In CAZUL $i \in N_2, i \leq k$:

Presupunem ca $y_i = 2^{2^{i-1}} + 1$.

Din aceasta si (m_i) rezulta ca: $y_i = y_1 y_2 \dots y_{i-1} + 2 = 2^{2^{i-1}} + 1$.

Daca $i + 1 \leq k$, din cele anterioare si (m_{i+1}), obtinem:

$y_{i+1} = y_1 y_2 \dots y_i + 2 = (y_1 y_2 \dots y_{i-1})y_i + 2 = (y_i - 2)y_i + 2 =$

$(y_i - 1)^2 + 1 = \left(2^{2^{i-1}}\right)^2 + 1 = 2^{2^i} + 1 = 2^{2^{(i+1)-1}} + 1$.

In particular:

$y_k = y_1 y_2 \dots y_{k-1} + 2 = 2^{2^{k-1}} + 1$.

Din aceasta si (d), care este echivalenta cu (m_{k+1}), obtinem:

$y_{k+1} = y_1 y_2 \dots y_k = (y_1 y_2 \dots y_{k-1})y_k = (y_k - 2)y_k = y_k^2 - 2y_k =$

$y_k^2 - 2y_k + 1 - 1 = (y_k - 1)^2 - 1 = \left(2^{2^{k-1}}\right)^2 - 1 = 2^{2^k} - 1$.

Cu aceste numere constatam:

$x(y_1-1)(y_2-1)\ \dots\ (y_{k+1}-1)=$

$2.\left(2^{2^0}+1-1\right)\left(2^{2^1}+1-1\right)\ \dots\ \left(2^{2^{k-1}}+1-1\right)\left(2^{2^k}-1-1\right)=$

$2.2^{2^0}2^{2^1}\ \dots\ 2^{2^{k-1}}\left(2^{2^k}-2\right)=2^1\,.\,2^{2^0+2^1+\dots+2^{k-1}}\,.\left(2^{2^k}-2\right)=$

$=2^1.2^{2^k-1}.\left(2^{2^k}-2\right)=2^{2^k}.\left(2^{2^k}-2\right)=2^{2^{k+1}}-2^{2^k+1}$.

Tinem seama de (d) si obtinem :

$y_1y_2\ \dots\ y_{k+1}-1=(y_1y_2\ \dots\ y_k)y_{k+1}-1=y_{k+1}{}^2-1=$
$\left(2^{2^k}-1\right)^2-1$

$=\left(2^{2^k}\right)^2-2.\,2^{2^k}+1-1=2^{2^{k+1}}-2^{2^k+1}$.

Numerele din SITUATIA 1^0 au verificat (l).

SITUATIA 2^0 : $x=3\ si\ y_1=2$.

Procedam analog!

In CAZUL $k=1$,
$k+1=2$ si $y_1=y_2=2=3^{2^0}-1$.

Aceste numere verifica (l). Aici se incheie!

In CAZUL $k\geq 2$, obtinem : $y_1=2$; $y_2=y_1+2=4=3^{2^0}+1$;

In CAZUL $k=2$, obtinem : $y_3=y_1y_2=(y_2-2)y_2=y_2{}^2-2y_2=$
$y_2{}^2-2y_2+1-1=(y_2-1)^2-1=3^{2^1}-1=3^{2^{k-1}}-1=y_{k+1}$.

Aceste numere verifica (l). Aici se incheie!

In CAZUL $k\geq 3$, obtinem : $y_3=y_1y_2+2=3^{2^1}+1$.

Presupunem ca $y_i = 3^{2^{i-2}} + 1$, unde $i \in N_2$, $i \leq k$.

Din aceasta si (m_i) rezulta ca : $y_i = y_1 y_2 \dots y_{i-1} + 2 = 3^{2^{i-2}} + 1$.

Daca $i + 1 \leq k$, din cele anterioare si (m_{i+1}), obtinem :

$y_{i+1} = y_1 y_2 \dots y_i + 2 = (y_1 y_2 \dots y_{i-1}) y_i + 2 = (y_i - 2) y_i + 2 =$

$(y_i - 1)^2 + 1 = \left(3^{2^{i-2}}\right)^2 + 1 = 3^{2^{i-1}} + 1 = 2^{2^{(i+1)-2}} + 1$.

In particular : $y_k = y_1 y_2 \dots y_{k-1} + 2 = 3^{2^{k-2}} + 1$.

Din aceasta si (d), care este echivalenta cu (m_{k+1}), obtinem :

$y_{k+1} = y_1 y_2 \dots y_k = (y_1 y_2 \dots y_{k-1}) y_k = (y_k - 2) y_k = {y_k}^2 - 2y_k =$

${y_k}^2 - 2y_k + 1 - 1 = (y_k - 1)^2 - 1 = \left(3^{2^{k-2}}\right)^2 - 1 = 3^{2^{k-1}} - 1$.

Cu aceste numere , constatam :

$x(y_1 - 1)(y_2 - 1) \dots (y_{k+1} - 1) =$

$3.(2 - 1)(3^{2^0} + 1 - 1) \dots \left(3^{2^{k-2}} + 1 - 1\right)\left(3^{2^{k-1}} - 1 - 1\right) =$

$3.1.3^{2^0} \dots 3^{2^{k-2}}\left(3^{2^{k-1}} - 2\right) = 3^1 . 3^{2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k-2}} . \left(3^{2^{k-1}} - 2\right) =$

$= 3^1 . 3^{2^{k-1} - 1} . \left(3^{2^{k-1}} - 2\right) = 3^{2^{k-1}} . \left(3^{2^{k-1}} - 2\right) = 3^{2^k} - 2.3^{2^{k-1}}$.

Tinaem seama de (d) si obtinem :

$y_1 y_2 \dots y_{k+1} - 1 = (y_1 y_2 \dots y_k) y_{k+1} - 1 = {y_{k+1}}^2 - 1 =$
$\left(3^{2^{k-1}} - 1\right)^2 - 1$

$= \left(3^{2^{k-1}}\right)^2 - 2.3^{2^{k-1}} + 1 - 1 = 3^{2^k} - 2.3^{2^{k-1}}$.

Numerele din SITUATIA 2^0 au verificat (l).

Aici se termina!

Am reusit ceva incredibil! Am determinat toate solutiile ecuatiei (l), in conditiile precizate , care sunt $doar\ doua$, cu toate ca aceasta ecuatie are $k+2$ necunoscute!

BIBLIOGRAFIE

[1] V. Bobancu , *Dictionar de matematici generale* , Editura enciclopedica romana , Bucuresti , 1974 .

[2] M. Deaconescu , *ON THE EQUATION* $m-1=a\emptyset(m)$, INTEGERS ELECTRONIC JOURNAL OF …,2006-*emis. ams. org* .

[3] G. Polya , *Cum sa rezolvam o problema*, Editura Stiintifica , Bucuresti , 1965 .

[4] John Renze ,
Computational Evidence for Lehmer's Totient Conjecture .

E-mail : negreaanic@yahoo.com .

APLICAȚII ALE **ANALIZEI MATEMATICE** ÎN **GEOMETRIA PLANĂ**

Prof. gr.I Poenaru Dan , Colegiul Economic „I.Pop" Cluj- Napoca

Analiza matematică s-a impus în cadrul matematicii ca o ramură de bază a acesteia, oferind mijloace de lucru şi investigaţie pentru cele mai diverse domenii ale activităţii ştiinţifice. În acest sens, analiza matematică îşi găseşte aplicabilitate în primul rând în celelalte ramuri ale matematicii.

În liceu, algebra beneficiază de aportul analizei matematice în rezolvarea unor ecuaţii sau inecuaţii ce nu-şi găsesc rezolvări convenabile prin metode specifice algebrei. De asemenea studiul calculului integral la nivelul clasei a XII-a creează posibilităţi de calcul a unor suprafeţe plane, volume şi arii a suprafeţelor de rotaţie. Cât priveşte studiul calculului diferenţial din clasa a XI-a, aceasta nu se finalizează printr-un capitol bine conturat de aplicaţii în geometrie în special în geometria plană şi în spaţiu studiată de elevi în clasele anterioare.

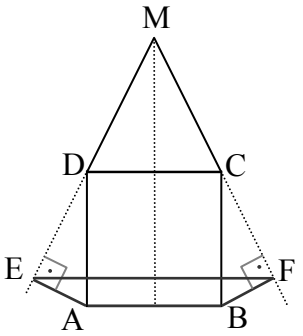
Lucrarea de faţă doreşte să demonstreze că utilizarea rezultatelor analizei matematice de clasa a XI-a la anumite probleme de geometrie clasică, oferă atât rigurozitate cât şi suplețe în redactarea soluţiilor. De asemenea realizarea unui capitol de aplicaţii ale calculului diferenţial în geometrie oferă posibilităţi metodice multiple în efortul de formare a gândirii matematice la elevi. Dacă întocmirea tabelului de variaţie şi trasarea graficului unei funcţii este realizat pe baza unui algoritm ce este deja utilizat de unele limbaje de programare pe calculator, construcţia unei funcţii în conformitate cu datele şi cerintele unei probleme variaţionale de geometrie clasică, stimulează spiritul de investigaţie, imaginaţia şi creativitatea, deziderate atât de preţioase ale predării matematicii în şcoală.

În prezentul articol se prezintă două exemple suficient de sugestive în sensul celor de mai sus.

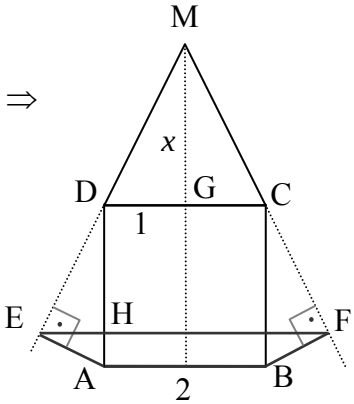
Aplicația nr. 1

Se dă pătratul $ABCD$ cu $AB = 2$. În afara pătratului, se construieşte triunghiul isoscel MDC cu baza $[DC]$ iar M este punct variabil pe mediatoarea segmentului $[DC]$. Fie E piciorul perpendicularei din A pe $[MD$ şi F piciorul perpendicularei din B pe $[MC$.

Să se studieze variația perimetrului patrulaterului $ABFE$ indicând poziția punctului M pentru care acest perimetru este maxim.



SOLUȚIE: Se demonstrează uşor că patrulaterul $ABFE$ este un trapez isoscel. Fie şi $H = AD \cap EF$ şi G mijlocul laturii $[DC]$.



Din $\Delta AED \approx \Delta DGM \Rightarrow \dfrac{AE}{DG} = \dfrac{AD}{DM} \Leftrightarrow \dfrac{AE}{1} = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow$

$$AE = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} \ (1).$$

Utilizând teorema catetei în triunghiul AED obținem $AH = \dfrac{2}{x^2+1}$ iar apoi, aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul $AHE \Rightarrow EH = \dfrac{2x}{x^2+1}$. Calculând EF, obținem: $EF = 2EH + 2 = \dfrac{2(x+1)^2}{x^2+1}$ (2). În final, ținând cont de (1) şi (2), se obține perimetrul triunghiului: $P_{ABFE} = 2 + \dfrac{2(x+1)^2}{x^2+1} + \dfrac{4}{\sqrt{x^2+1}}$. Se construieşte în continuare funcția corespunzătoare :

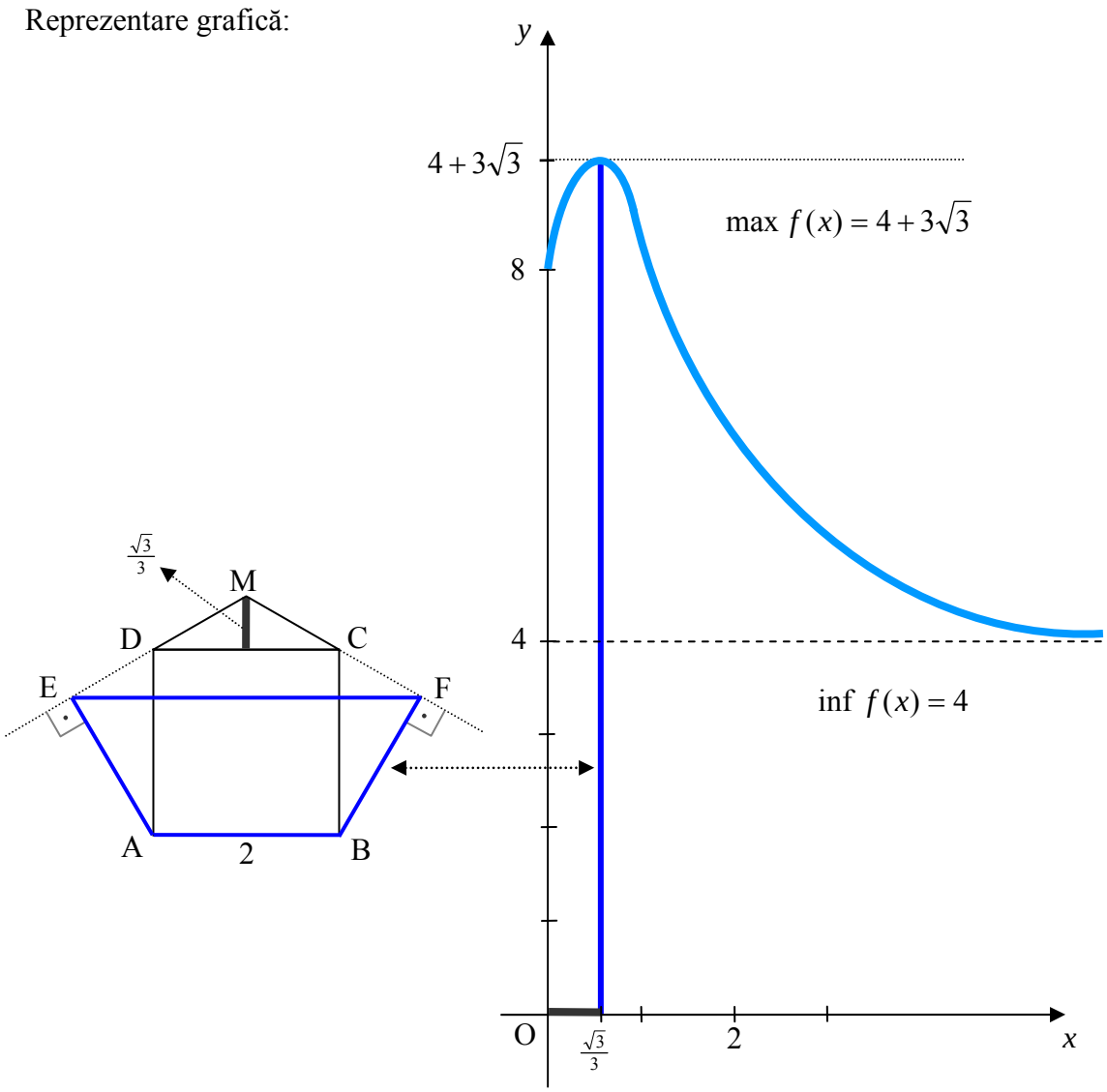
$$f : (0,+\infty) \to R, \quad f(x) = 2 + \frac{2(x+1)^2}{x^2+1} + \frac{4}{\sqrt{x^2+1}}$$

Derivata funcției este $f'(x) = \dfrac{4}{x^2+1} \cdot \left(\dfrac{-x^2+1}{x^2+1} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right)$

Tabloul de variație:

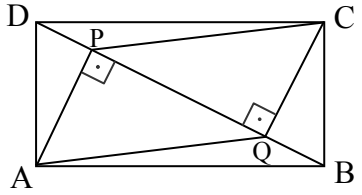
x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+++++++++++$	0	$----------$	
$f(x)$	8	$\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$	$4+3\sqrt{3}$	$\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow$	4

Reprezentare grafică:

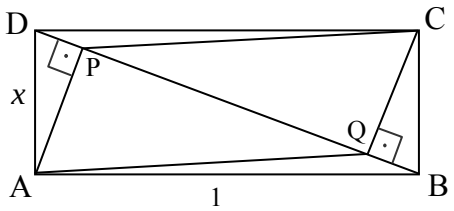


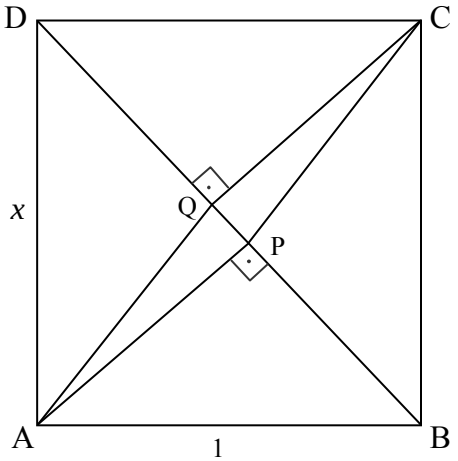
Aplicația nr. 2

Se dă un dreptunghi $ABCD$ cu $AB = 1$ și latura $[AD]$ de lungime variabilă. Din A și C se duc perpendiculare pe BD în P respectiv Q. Să se studieze variația ariei patrulaterului $APCQ$.



SOLUȚIE: Din $AP \parallel CQ$ și $[AP] \equiv [CQ] \Rightarrow AQCP$ este un paralelogram format din două triunghiuri dreptunghice congruente ($\Delta PAQ \equiv \Delta QCP$). Se notează $AD = x$ iar apoi, în funcție de x, obținem:





$BD = \sqrt{x^2+1}$, $AP = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $PQ = \dfrac{-x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ pentru cazul $x \in [0,1)$ și

$BD = \sqrt{x^2+1}$, $AP = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $PQ = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+1}}$ pentru cazul $x \in [0,1)$; facem observația că pentru $x = 1$, dreptunghiul $ABCD$ este un pătrat și astfel $PQ = 0$. Aria paralelogramului $AQCP$, în primul caz, este dublul ariei triunghiului dreptunghic APQ astfel încât aria patrulaterului $AQCP$ se poate calcula după cum urmează:

$A_{AQCP} = 2 \cdot A_{\Delta APQ} = PQ \cdot AP = \dfrac{-x^3+x}{x^2+1}$ iar pentru cazul al doilea, în mod analog avem : $A_{APCQ} = \dfrac{x^3-x}{x^2+1}$. Ținând cont de cele două situații este posibilă

construcția funcției : $f:(0,+\infty)\to R,\quad f(x)=\dfrac{|x^3-x|}{x^2+1}=\begin{cases}\dfrac{-x^3+x}{x^2+1}, & x\in[0,1)\\ 0, & x=1\\ \dfrac{x^3-x}{x^2+1}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$

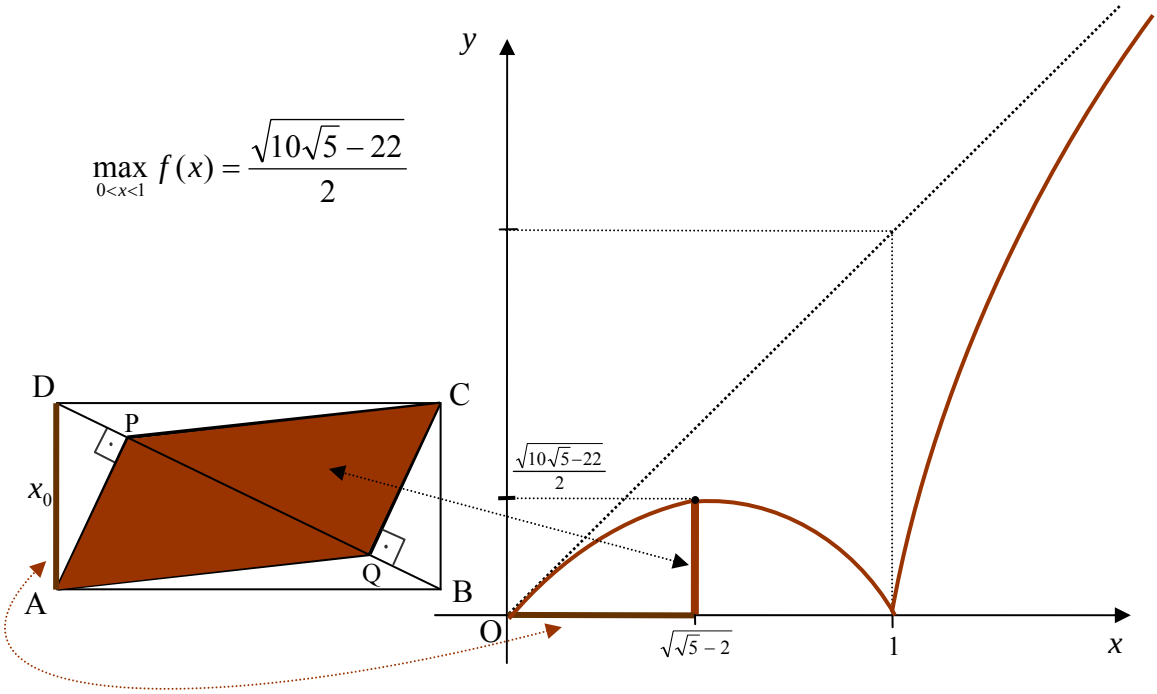
Funcția este continuă pe $[0,+\infty)$ şi este derivabilă pe $[0,+\infty)\setminus\{1\}$. Expresia derivatei

este $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^4+4x^2-1}{(x^2+1)^2}, & x\in[0,1)\\ \dfrac{x^4+4x^2-1}{(x^2+1)^2}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$; $f'(x)=0$ are soluția $x_0=\sqrt{\sqrt{5}-2}\in(0,1)$

De asemenea funcția admite asimptota oblică : $y=x$. Prezentăm mai jos tabloul de variație precum şi ilustrația grafică a funcției în care semnificația punctului de extrem local este evidentă.

x	0		$\sqrt{\sqrt{5}-2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+++++$	0	$+++$ |	$++$	- - - - - - - - - -	
$f(x)$	0	$\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{10\sqrt{5}-22}}{2}$	$\searrow\searrow\searrow\searrow$	0	$\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$	$+\infty$

$$\max_{0<x<1} f(x)=\frac{\sqrt{10\sqrt{5}-22}}{2}$$



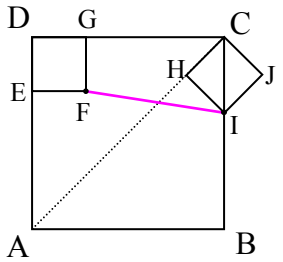
APLICAȚII ALE **ANALIZEI MATEMATICE** ÎN **GEOMETRIA PLANĂ (2)**

Prof. Poenaru Dan , Colegiul Economic „I.Pop” Cluj- Napoca

Aplicația nr. 1

Relativ la pătratul $ABCD$ cu $AB = 1$ se construiesc pătratele $DEFG$ $E \in [DA], G \in [DC]$ şi $CHIJ$, $H \in [AC], I \in [CB]$ astfel încât $[DE] \equiv [CH]$.

Să se studieze variația lungimii segmentului $[FI]$ dacă E este un punct mobil pe $[DA]$.



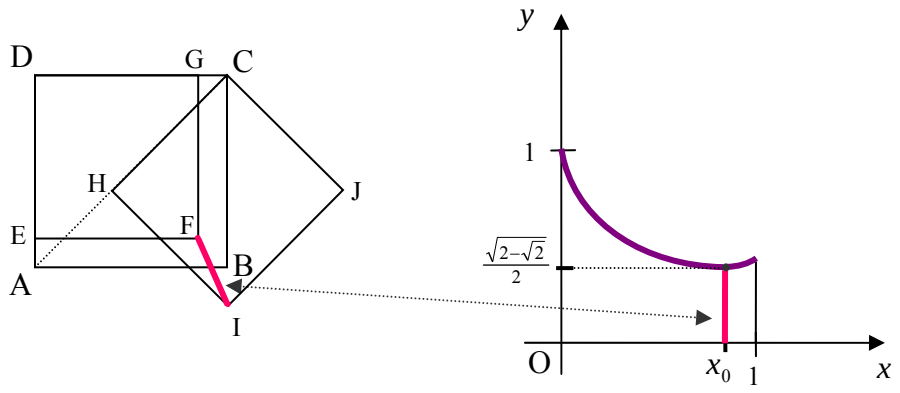
SOLUȚIE: Se notează $DE = x$. Prin proiecția punctului F pe BC segmentul $[FI]$ devine ipotenuză într-un triunghi dreptunghic a cărui catete au lugimile $1 - x$ respectiv $x\sqrt{2} - x$; astfel $FI = \sqrt{(1-x)^2 + (x\sqrt{2} - x)^2} = \sqrt{2x^2(2-\sqrt{2}) - 2x + 1}$ ceea ce permite construcția funcției:

$$f : [0,1] \to R, \quad f(x) = \sqrt{2x^2(2-\sqrt{2}) - 2x + 1}$$

Derivata funcției este $f'(x) = \dfrac{2x(2-\sqrt{2}) - 1}{\sqrt{2x^2(2-\sqrt{2}) - 2x + 1}}$; ecuația $f'(x) = 0$ are soluția $x_0 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ iar valoarea funcției în acest punct este $f(x_0) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Se întocmește tabloul de variație:

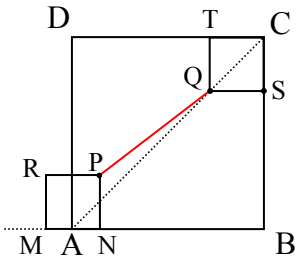
x	0		$\frac{2+\sqrt{2}}{4}$		1
$f'(x)$		- - - - - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + + +	
$f(x)$	1	↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗	$\sqrt{2}-1$

Reprezentarea grafică de mai jos ilustrează variația distanței FI în condițiile problemei punând în evidență valoarea minimă a acesteia



Aplicația nr. 2

Se dă pătratul $ABCD$ de latura $AB = 1$. Pe dreapta AB se iau punctele M şi N astfel încât $MA = AN$ şi se considera pătratul $MNPR$ ($P \in \text{int}(ABCD)$). Se construieşte pătratul $CSQT$ unde $S \in [BC]$, $Q \in [AC]$ şi $[CS] \equiv [MN]$. Să se studieze variația distanței dintre punctele P şi Q dacă S este un punct variabil al segmentului $[BC]$.

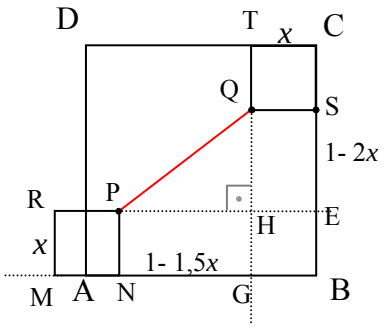


SOLUȚIE: Notăm cu x lungimea laturii celor două pătrate ($NP = x = QS$). Prelungind laturile RP şi TQ obținem: $RP \cap BC = E$, $TQ \cap AB = G$ şi $RP \cap TQ = H$.

Se formează triunghiul dreptunghic HQP unde $PH = 1 - \frac{3}{2}$ şi $QH = 1 - 2x$, astfel

$$PQ = \sqrt{PH^2 + QH^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{3x}{2}\right)^2 + (1-2x)^2}$$

Se obține $PQ = \frac{1}{2}\sqrt{25x^2 - 28x + 8}$



Construim funcția $f:[0,1]\to R$, $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{25x^2-28x+8}$

Preliminarii în construcția graficului:

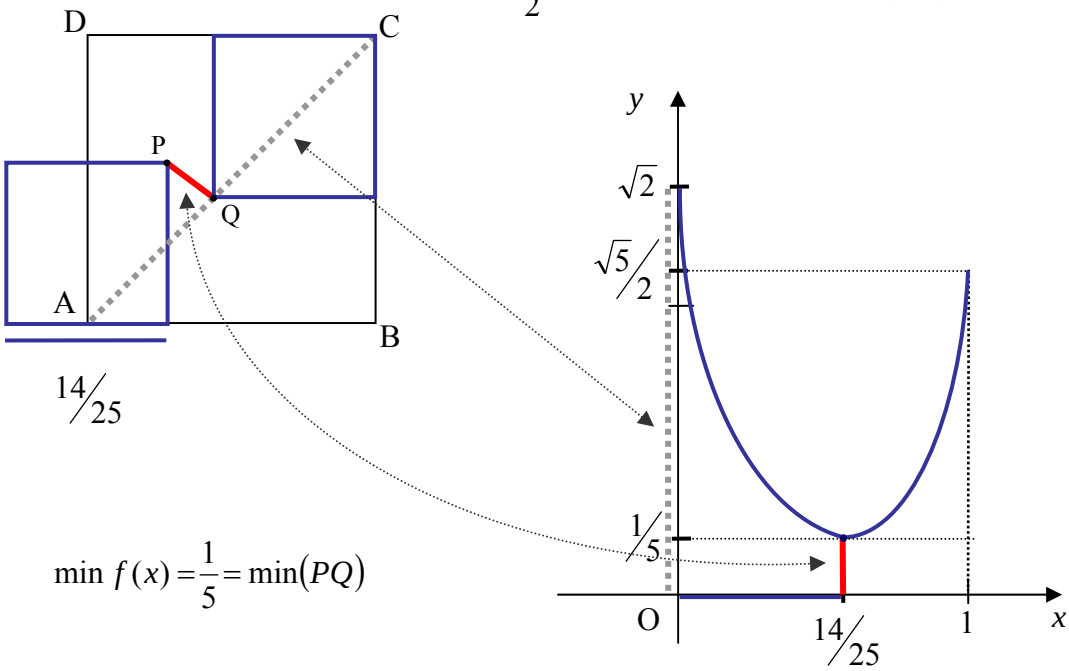
$\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x)=\sqrt{2}$, $\lim\limits_{x\uparrow 1} f(x)=\frac{\sqrt{5}}{2}$ iar dervata funcției este dată de

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{25x-14}{\sqrt{25x^2-28x+8}}\ ;\quad f'(x)=0 \text{ pentru } x_0=\frac{14}{25} \text{ iar } f(x_0)=\frac{1}{5}$$

Urmează tabelul de variație şi graficul funcției sugerând şi valoarea variabilei x pentru care se obține valoarea minimă a distanței PQ

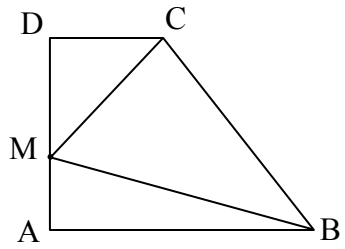
x	0		$14/25$		1
$f'(x)$		- - - - - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + + + +	
$f(x)$	$\sqrt{2}$	↘↘↘↘↘↘↘	$1/5$	↗↗↗↗↗↗↗	$\sqrt{5}/2$

$$\sqrt{2}>\frac{\sqrt{5}}{2}\Rightarrow \max f(x)=\sqrt{2}=\max(PQ)=AC$$



$$\min f(x)=\frac{1}{5}=\min(PQ)$$

Aplicația nr. 3



În trapezul dreptunghic $ABCD$ $(m(\hat{A}) = m(\hat{D}) = 90^\circ)$ se dau $AB = b$, $DC = c$ şi $AD = a$. Fie M un punct variabil pe [AD]. Să se studieze variația sumei distanțelor de la M la punctele B şi C.

SOLUȚIE: Se notează $AM = x$. Obținem $MB^2 = x^2 + b^2$ şi $MC^2 = c^2 + (a-x)^2$.
Suma distanțelor este $MB + MC = \sqrt{x^2+b^2} + \sqrt{c^2+(a-x)^2}$ ceea ce permite construcția funcției:

$$f:[0,a] \to R, \quad f(x) = \sqrt{x^2+b^2} + \sqrt{c^2+(a-x)^2}$$ a cărei derivată este:

$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+b^2}} + \dfrac{x-a}{\sqrt{c^2+(a-x)^2}}$. Ecuația $f'(x) = 0$ are soluția $x_0 = \dfrac{ab}{b+c}$ iar valoarea funcției în acest punct este $f(x_0) = \sqrt{a^2+(b+c)^2}$. În vederea ilustrării grafice a variației funcției considerăm cazul numeric $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$.

Funcția este

$$f:[0,2] \to R, \quad f(x) = \sqrt{x^2+9} + \sqrt{1+(2-x)^2}$$

Preliminarii în determinarea graficului:

$\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = 3 + \sqrt{5}$ şi $\lim\limits_{x \uparrow 2} f(x) = \sqrt{13} + 1$

$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} + \dfrac{x-2}{\sqrt{1+(2-x)^2}}$ iar $f'(x) = 0$ conduce la $x_0 = \dfrac{3}{2}$ şi $f(x_0) = 2\sqrt{5}$.

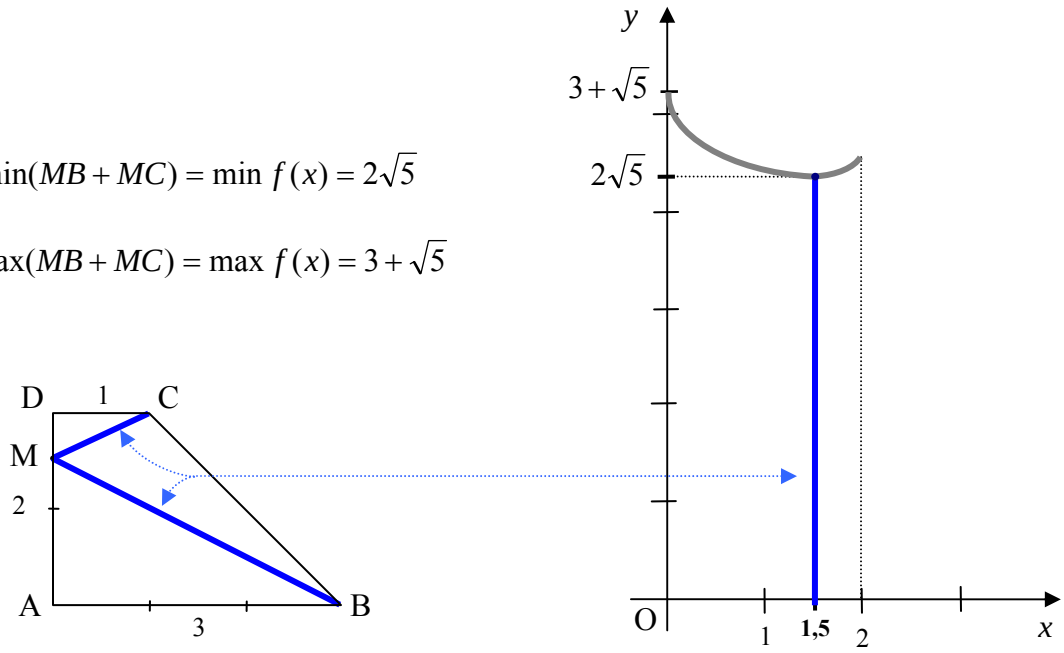
tabloul de variație

x	0		$\frac{3}{2}$		2
$f'(x)$		- - - - - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + + +	
$f(x)$	$3+\sqrt{5}$	↘↘↘↘↘↘↘↘	$2\sqrt{5}$	↗↗↗↗↗↗↗	$\sqrt{13}+1$

Se prezintă mai jos graficul funcției alături de figura geometrică ce surprinde poziția punctului M pe $[AD]$ pentru care suma distanțelor MB şi MC este minimă.

$$\min(MB+MC)=\min f(x)=2\sqrt{5}$$

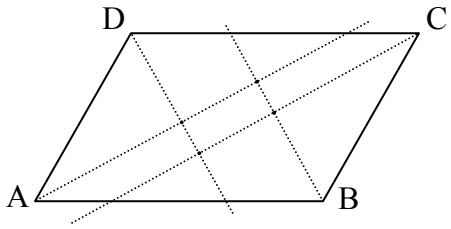
$$\max(MB+MC)=\max f(x)=3+\sqrt{5}$$



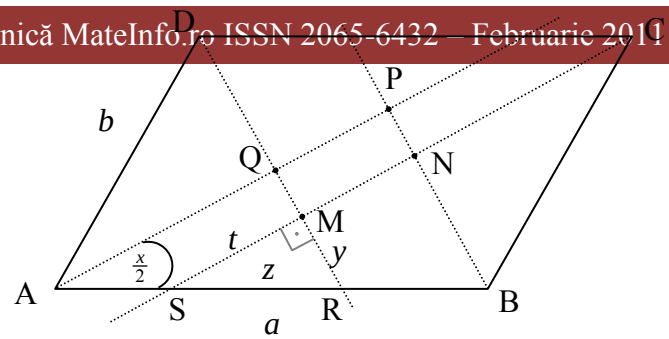
Aplicația nr. 4

Într-un paralelogram $ABCD$ cu $AB=a$ şi $AD=b$ se consideră măsura unghiurilor variabilă ($m(\hat{A})\le 90^\circ$).

Să se studieze variația perimetrului patrulaterului determinat de punctele de intersecție ale bisectoarelor paralelogramului.



SOLUȚIE: Notând patrulaterul cu $MNPQ$ ca în figura de mai jos, se demonstrează uşor că $MNPQ$ este un dreptunghi. Notăm $m(\hat{A})=x$. Pentru aflarea dimensiunilor dreptunghiului $MNPQ$ este necesar calculul laturilor triunghiului dreptunghic MSR pe care le putem nota $y=MR$, $z=SR$ şi $t=SM$. Ştiind că triunghiurile ARD şi BSC sunt isoscele, obținem că $z=2b-a$, apoi din asemănarea triunghiurilor AQR şi SMR



obținem $\frac{y}{QR}=\frac{z}{b}\Rightarrow y=\frac{z\cdot QR}{b}=\frac{(2b-a)\cdot b\sin\frac{x}{2}}{b}=(2b-a)\sin\frac{x}{2}$ (în triunghiul dreptunghic AQR , $QR=b\sin\frac{x}{2}$). Astfel mărimea lățimii dreptunghiului este dată de $\boldsymbol{l}=QR-y=b\sin\frac{x}{2}-(2b-a)\sin\frac{x}{2}=(a-b)\sin\frac{x}{2}$ (*). Într-un mod asemănător se obține şi $\boldsymbol{L}=(a-b)\cos\frac{x}{2}$ (**). În final din (*) şi (**) perimetrul dreptunghiului este dat de $P_{MNPQ}=2(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{l})=2(a-b)\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)$ cea ce permite construcția funcției

$$f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to R,\quad f(x)=2(a-b)\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)$$

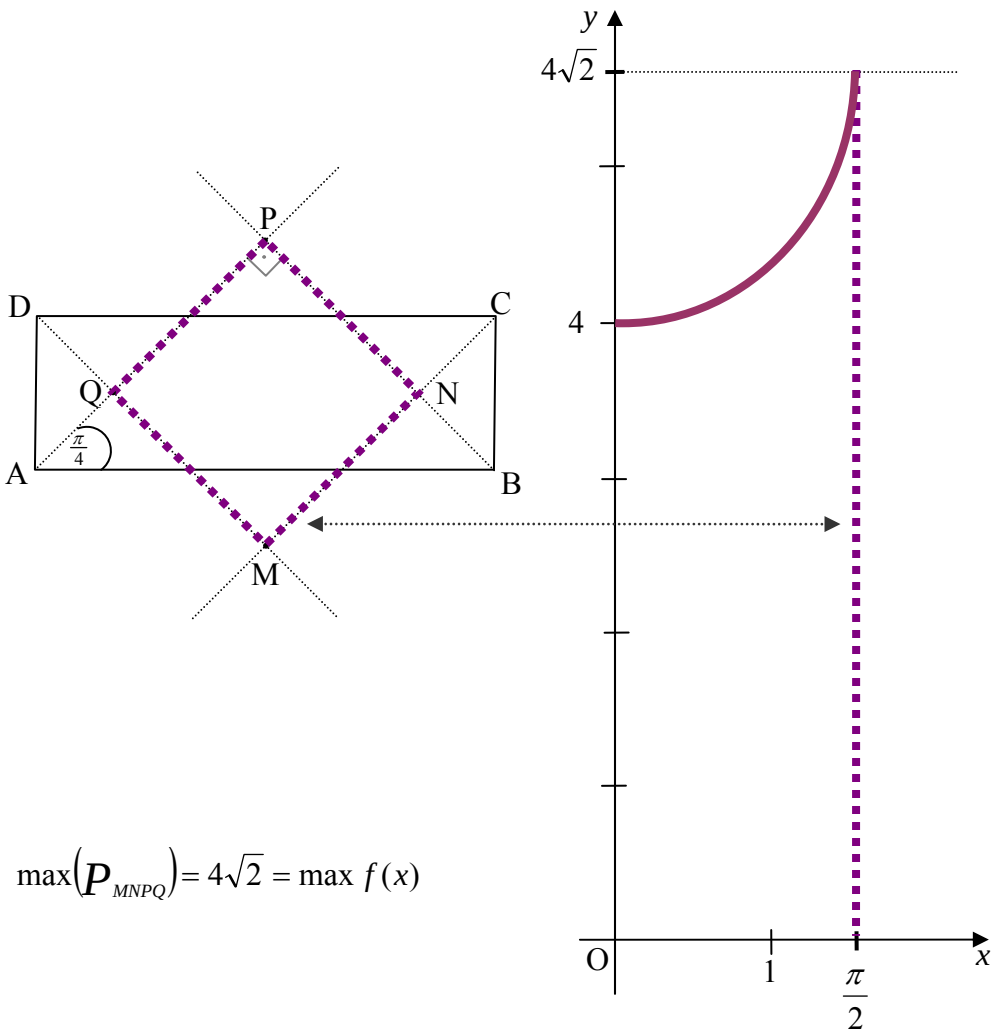
În vederea studiului variației funcției vom considera un caz numeric şi anume paralelogramul are dimensiunile $a=3$ şi $b=1$; se obține astfel funcția:

$$f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to R,\quad f(x)=4\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)$$

Pe parcursul studiului acestei funcții obținem $\lim\limits_{x\downarrow 0}f(x)=4$, $\lim\limits_{x\uparrow\frac{\pi}{2}}f(x)=4\sqrt{2}$ iar derivata funcției este $f'(x)=2\cdot\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)$ iar $f'(x)=0$ pentru $x_0=\frac{\pi}{2}$.

Prezentăm în continuare tabelul de variație precum şi graficul funcției:

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$+ + + + + + + + + + + + + + + + + + +$		
$f(x)$	4	$\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$	$4\sqrt{2}$

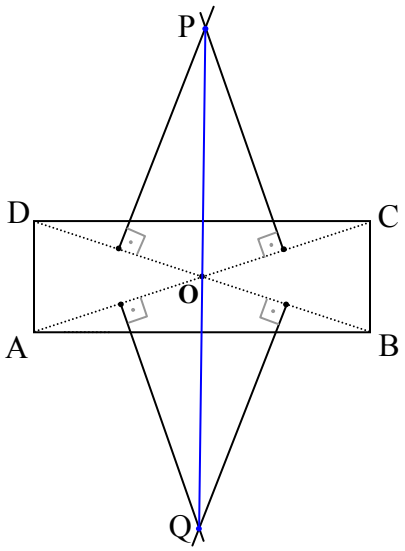


$$\max\left(P_{MNPQ}\right) = 4\sqrt{2} = \max f(x)$$

Aplicația nr. 5

Se dă dreptunghiul $ABCD$ (A,C vârfuri opuse) de laturi $AB = 1$ şi AD de mărime variabilă. Fie şi $O = AC \cap BD$. Mediatoarele segmentelor $[OC]$ şi $[OD]$ se intersectează în punctul P iar mediatoarele segmentelor $[OA]$ şi $[OB]$ se intersectează în Q.

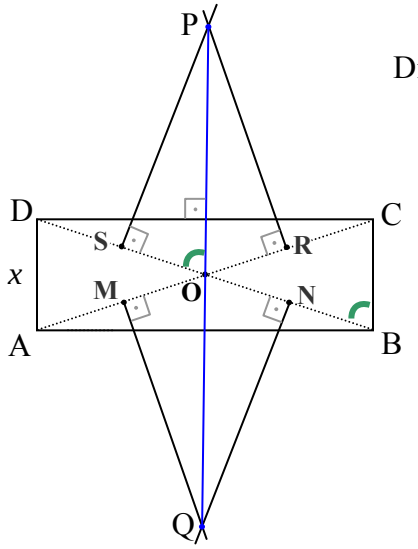
Să se studieze variația distanței PQ



SOLUȚIE: Notăm cu x lungimea laturii variabile AD

În triunghiul dreptunghic ABD , aplicând teorema lui Pitagora, obținem $BD = \sqrt{x^2+1}$. Triunghiurile dreptunghice PSO şi DCB au unghiurile ascuțite din O respectiv B congruente, aşadar sunt asemenea.

$$\text{Din } \Delta PSO \sim \Delta DCB \Rightarrow \frac{SO}{BC} = \frac{PO}{DB} \Rightarrow PO = \frac{DB \cdot SO}{BC} = \frac{\sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2+1}{x}$$



Din P, O,Q coliniare şi $[PO] \equiv [OQ] \Rightarrow PQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2+1}{x}$

Construim funcția

$$f : [0,+\infty) \to R, \quad f(x) = \frac{x^2+1}{2x}$$

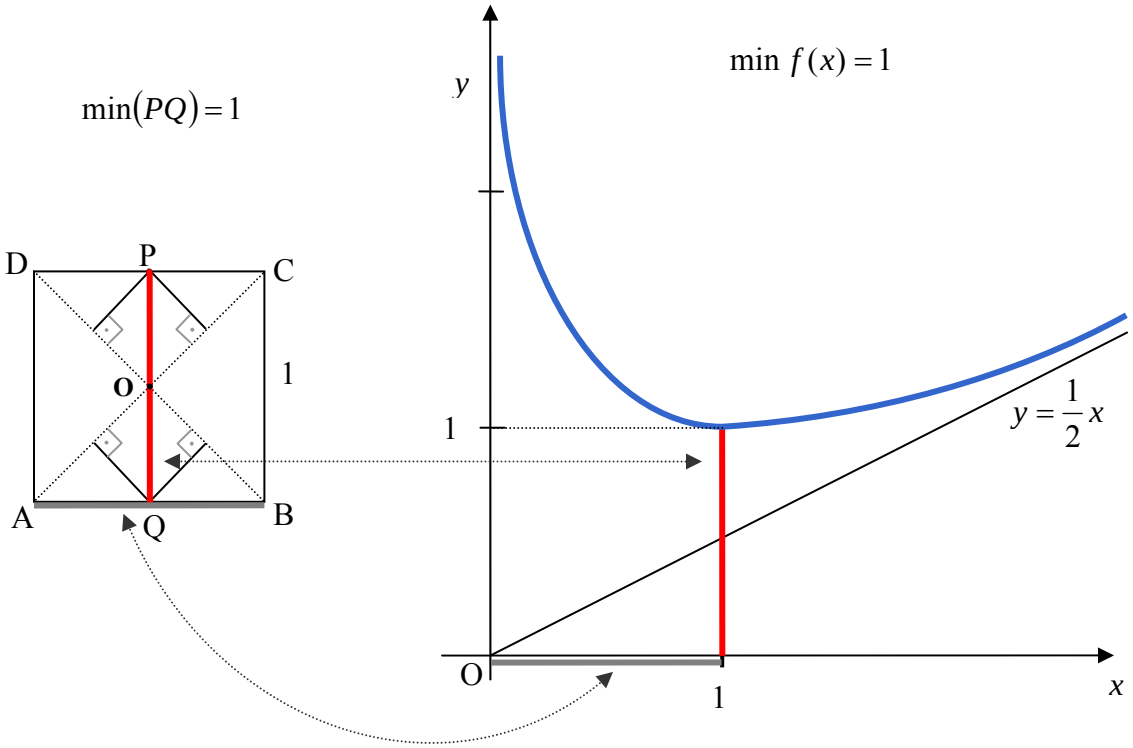
Pentru întocmirea tabloului de variație şi trasarea graficului funcției avem nevoie de următoarele elemente specifice:

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = +\infty \ , \ \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty ;$$

nu avem asimptotă orizontală dar există asimptotă oblică $y = \frac{1}{2}x$.

Derivata funcției este dată de : $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2-1}{x^2}$; rezolvarea ecuației $f'(x) = 0$ conduce la soluția $x_0 = 1$ iar $f(1) = 1$. Este prezentat în continuare tabloul de variație:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		- - - - - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + + +	
$f(x)$	$+\infty$	↘↘↘↘↘↘↘↘	1	↗↗↗↗↗↗↗↗	$+\infty$



Distanța minimă este 1 şi aceasta se obține pentru $x = 1$; în acest caz dreptunghiul *ABCD* este un pătrat.