Revista Electronica MateInfo.ro ISSN 2065 – 6432 Martie 2011

Aplicatii ale calculului vectorial in geometria triunghiului

Prof. Andrei Dobre

Teorema (caracterizarea medianei intr-un triunghi)

Fie triunghiul ABC si $M \in (BC)$. Atunci $[AM]$ este mediana daca si numai daca

$$AM = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}.$$

Demonstratie :

$$[AM] \text{ mediana} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow AM = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}.$$

Teorema (caracterizarea liniei mijlocii intr-un triunghi)

Fie triunghiul ABC si $M \in (AB)$, $N \in (AC)$. Atunci $[MN]$ este linie mijlocie daca si numai daca $\vec{MN} = \frac{1}{2} \cdot \vec{BC}$.

Demonstratie :

„$\Rightarrow$" Fie $[MN]$ linie mijlocie $\Rightarrow$ $M =$ mijlocul lui $[AB]$ si $N =$ mijlocul lui $[AC]$ $\Rightarrow$ $\vec{AM} = \frac{1}{2} \cdot \vec{AB}$ si $\vec{AN} = \frac{1}{2} \cdot \vec{AC}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \frac{1}{2} \cdot \vec{AC} - \frac{1}{2} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{1}{2} \cdot \vec{BC}.$$

„$\Leftarrow$" $\vec{MN} = \frac{1}{2} \cdot \vec{BC}$ $\Rightarrow$ $MN \parallel BC$ si $MN = \frac{1}{2} \cdot BC$.

Fie M' mijlocul lui $[AB]$ si N' mijlocul lui $[AC]$ $\Rightarrow$ $\vec{M'N'} = \frac{1}{2} \cdot \vec{BC}$ $\Rightarrow$ $\overline{M'N'} = \overline{MN}$.

Presupunem $M \neq M'$ $\Rightarrow$ $MM'N'N$ paralelogram $\Rightarrow$ $MM' \parallel NN'$ $\Rightarrow$ $AB \parallel AC$, contradictie. Deci $M = M'$ si atunci din $\overline{M'N'} = \overline{MN}$ $\Rightarrow$ $N = N'$ $\Rightarrow$ M si N sunt mijloace $\Rightarrow$ $[MN]$ linie mijlocie.

Teorema (concurenta medianelor intr-un triunghi)

Fie triunghiul ABC si A', B', C' mijloacele laturilor $[BC], [AC]$ respectiv $[AB]$. Atunci $[AA'], [BB'], [CC']$ sunt concurente intr-un punct G si $GA = 2 \cdot GA'$, $GB = 2 \cdot GB'$, $GC = 2 \cdot GC'$.

Demonstratie :

Notam $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ si $\overrightarrow{AC} = \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \vec{v} - \vec{u}$.

Fie G' intersectia medianelor $[AA']$ si $[BB']$; notam $\dfrac{BG'}{G'B'} = k \Rightarrow \overrightarrow{AG'} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + k \cdot \overrightarrow{AB'}}{1+k}$

$$\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{2} \cdot \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{AG'} = \frac{1}{1+k} \cdot \vec{u} + \frac{k}{2(1+k)} \cdot \vec{v}$$

$\overrightarrow{AG'}$ coliniar cu $\overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AG'} = \lambda \cdot \overrightarrow{AA'}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ nenul $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{1+k} \cdot \vec{u} + \dfrac{k}{2(1+k)} \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \dfrac{\vec{u} + \vec{v}}{2}$. Dar $\vec{u}, \vec{v}$ - necoliniari $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1+k} = \dfrac{\lambda}{2}$ si $\dfrac{k}{2(1+k)} = \dfrac{\lambda}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{1+k} = \dfrac{k}{2(1+k)} \Leftrightarrow k = 2$ si $\lambda = \dfrac{2}{3} \Rightarrow G'B = 2 \cdot G'B'$

si $\overrightarrow{AG'} = \dfrac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG'} = 2 \cdot \overrightarrow{G'A'}$. Deci medianele $[AA']$ si $[BB']$ se intersecteaza intr-un punct situat la o treime de baza (A' respectiv B') si doua treimi de varf .

Analog, daca notam cu G'' intersectia medianelor $[AA']$ si $[CC']$, G'' va fi situat la o treime de baza si doua treimi de varf $\Rightarrow G'' = G'$ si deci medianele sunt concurente intr-un punct G (numit centrul de greutate al triunghiului).

Teorema (caracterizarea centrului de greutate al unui triunghi)

G este centrul de greutate al triunghiului $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Demonstratie:

„$\Rightarrow$" Fie A' mijlocul lui $[BC] \Rightarrow \overrightarrow{GA'} = \dfrac{\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}}{2}$.

G este centrul de greutate al triunghiului $\Rightarrow GA = 2\cdot GA' \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA} = -2\cdot\overrightarrow{GA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+2\cdot\dfrac{\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}}{2}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

„$\Leftarrow$" Fie G' centrul de greutate al triunghiului $\Rightarrow \overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{G'C}=\vec{0}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA}-\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{G'C}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{GG'}=\vec{0} \Leftrightarrow 3\cdot\overrightarrow{GG'}=\vec{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow G = G' \Leftrightarrow G$ este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Teorema (Triunghiuri cu acelasi centru de greutate)

Triunghiurile $A_1B_1C_1$ si $A_2B_2C_2$ au acelasi centru de greutate daca si numai daca $\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}+\overline{C_1C_2}=\vec{0}$.

Demonstratie :

Fie G_1 centrul de greutate al triunghiului $A_1B_1C_1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{A_1G_1}+\overline{B_1G_1}+\overline{C_1G_1}=\vec{0}$.

Fie G_2 centrul de greutate al triunghiului $A_2B_2C_2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{G_2A_2}+\overline{G_2B_2}+\overline{G_2C_2}=\vec{0}$.

Atunci $\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}+\overline{C_1C_2}=\vec{0} \Leftrightarrow \overline{A_1G_1}+\overline{G_1G_2}+\overline{G_2A_2}+\overline{B_1G_1}+\overline{G_1G_2}+\overline{G_2B_2}+\overline{C_1G_1}+$
$+\overline{G_1G_2}+\overline{G_2C_2}=\vec{0} \Leftrightarrow (\overline{A_1G_1}+\overline{B_1G_1}+\overline{C_1G_1})+3\cdot\overline{G_1G_2}+(\overline{G_2A_2}+\overline{G_2B_2}+\overline{G_2C_2})=\vec{0}$
$\Leftrightarrow 3\cdot\overline{G_1G_2}=\vec{0} \Leftrightarrow G_1=G_2 \Leftrightarrow$ Triunghiurile $A_1B_1C_1$ si $A_2B_2C_2$ au acelasi centru de greutate .

Observatie: Triunghiurile $A_1B_1C_1$ si $A_2B_2C_2$ au acelasi centru de greutate G daca si numai daca pentru orice punct O este adevarata relatia :

$$\overline{OA_1}+\overline{OB_1}+\overline{OC_1}=\overline{OA_2}+\overline{OB_2}+\overline{OC_2} \quad (=3\cdot\overline{OG}) .$$

Teorema (Pappus)

Fie triunghiul ABC si punctele $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$ astfel incat $\frac{DB}{DC} = \frac{EC}{EA} = \frac{FA}{FB}$. Atunci triunghiurile ABC si DEF au acelasi centru de greutate

Demonstratie :

Fie $\frac{DB}{DC} = k \Rightarrow \overline{AD} = \frac{\overline{AB} + k \cdot \overline{AC}}{1+k}$

$$\frac{EC}{EA} = k \Rightarrow \overline{BE} = \frac{\overline{BC} + k \cdot \overline{BA}}{1+k}$$

$$\frac{FA}{FB} = k \Rightarrow \overline{CF} = \frac{\overline{CA} + k \cdot \overline{CB}}{1+k}$$

$$\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \frac{\overline{AB} + k \cdot \overline{AC} + \overline{BC} + k \cdot \overline{BA} + \overline{CA} + k \cdot \overline{CB}}{1+k} = \frac{1-k}{1+k} \cdot (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) =$$

$= \frac{1-k}{1+k} \cdot \vec{AA} = \vec{0} \Rightarrow$ triunghiurile ABC si DEF au acelasi centru de greutate.

Teorema (Thales)

Fie ABC triunghi oarecare si $M \in AB$, $N \in AC$. Daca $MN \parallel BC$, atunci $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NC}$.

Demonstratie :

$MN \parallel BC \Rightarrow \overline{MN} = \lambda \cdot \overline{BC}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Fie $\frac{MA}{AB} = k_1$ si $\frac{NA}{AC} = k_2 \Rightarrow \overline{AM} = k_1 \cdot \overline{AB}$ si $\overline{AN} = k_2 \cdot \overline{AC}$

$\overline{MN} = \lambda \cdot \overline{BC} \Leftrightarrow \overline{AN} - \overline{AM} = \lambda \cdot (\overline{AC} - \overline{AB}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k_2 \cdot \overline{AC} - k_1 \cdot \overline{AB} = \lambda \cdot \overline{AC} - \lambda \cdot \overline{AB}$. Cum $\overline{AC}$ si $\overline{AB}$ sunt necoliniari $\Rightarrow k_2 = \lambda$

si $-k_1 = -\lambda \Rightarrow k_1 = k_2 \Leftrightarrow \frac{MA}{AB} = \frac{NA}{AC} \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NC}$.

Teorema (Reciproca teoremei lui Thales)

Fie triunghiul ABC si $M \in AB$, $N \in AC$ astfel incat $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NC}$. Atunci $MN \parallel BC$.

Demonstratie :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NC} \Rightarrow \frac{MA}{AB} = \frac{NA}{AC} = k \Rightarrow \overline{AM} = k \cdot \overline{AB} \text{ si } \overline{AN} = k \cdot \overline{AC} \Rightarrow \overline{MN} = \overline{AN} - \overline{AM} =$$

$$= k \cdot \overline{AC} - k \cdot \overline{AB} = k \cdot (\overline{AC} - \overline{AB}) = k \cdot \overline{BC} \Rightarrow MN \parallel BC .$$

Observatie: In demonstratia teoremei lui Thales avem : $\lambda = k_1 = k_2 \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} =$

$= \frac{AN}{AC} \Rightarrow$ triunghiurile AMN si ABC sunt asemenea $\Rightarrow$ paralela MN la latura BC determina cu celelalte doua laturi un triunghi asemenea cu cel initial (**teorema fundamentala a asemanarii**).

Teorema (teorema bisectoarei)

Fie (AD), $D \in (BC)$, bisectoarea din A in triunghiul ABC. Atunci $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Demonstratie :

Fie $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ astfel incat $ED \parallel AC$ si $FD \parallel AB$.

(AD) - bisectoarea unghiului $A \Rightarrow AEDF$ - romb $\Rightarrow$

$\Rightarrow AE = AF$ si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$.

Fie $\frac{BD}{DC} = k \Rightarrow \dot{AD} = \frac{1}{1+k} \cdot \dot{AB} + \frac{k}{1+k} \cdot \dot{AC}$

Fie $\frac{AE}{AB} = k_1$ si $\frac{AF}{AC} = k_2 \Rightarrow \overrightarrow{AE} = k_1 \cdot \overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{AF} = k_2 \cdot \overrightarrow{AC} \Rightarrow \frac{1}{1+k} \cdot \dot{AB} + \frac{k}{1+k} \cdot \dot{AC} =$

$= k_1 \cdot \overrightarrow{AB} + k_2 \cdot \overrightarrow{AC}$. Cum $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ - necoliniari $\Rightarrow k_1 = \frac{1}{1+k}$ si $k_2 = \frac{k}{1+k} \Rightarrow \frac{k_2}{k_1} = k$

$\Leftrightarrow \frac{AF}{AC} \cdot \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC}$. Dar $AE = AF \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Teorema (reciproca teoremei bisectoarei)

Fie triunghiul ABC si $D \in (BC)$. Daca $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$, atunci (AD) este bisectoarea unghiului A.

Demonstratie :

Fie $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = k > 0 \Rightarrow \dot{AD} = \frac{1}{1+k} \cdot \dot{AB} + \frac{k}{1+k} \cdot \dot{AC}$

Fie $AEDF$ paralelogram, $E \in AB$, $F \in AC \Rightarrow \overline{AD} = \overline{AE} + \overline{AF}$

Notam $\frac{AE}{AB} = k_1$ si $\frac{AF}{AC} = k_2 \Rightarrow \overline{AE} = k_1 \cdot \overline{AB}$ si $\overline{AF} = k_2 \cdot \overline{AC}$

$\Rightarrow k_1 \cdot \overline{AB} + k_2 \cdot \overline{AC} = \frac{1}{1+k} \cdot \dot{AB} + \frac{k}{1+k} \cdot \dot{AC}$. Dar $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ - necoliniari $\Rightarrow k_1 = \frac{1}{1+k}$ si

$k_2 = \frac{k}{1+k} \Rightarrow k_2 = k \cdot k_1 \Leftrightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AE}{AB} \Rightarrow AE = AF \Rightarrow AEDF$ este romb $\Rightarrow (AD)$ este bisectoarea unghiului A.

Teorema (concurenta bisectoarelor intr-un triunghi)

Intr-un triunghi bisectoarele unghiurilor sunt concurente.

Demonstratie :

Fie D, E, F picioarele bisectoarelor din A, B respectiv C in triunghiul ABC cu laturile a, b, c. Fie $AD \cap BE = \{I\}$.

In triunghiul ABE, conform teoremei bisectoarei, $\frac{BI}{IE} = \frac{AB}{AE}$.

In triunghiul ABC, $[BE]$ bisectoare $\Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{BA}{BC} = \frac{c}{a} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{c}{a+c} \Rightarrow AE = \frac{b \cdot c}{a+c} \Rightarrow \frac{BI}{IE} = \frac{AB}{AE} = \frac{c}{\frac{b \cdot c}{a+c}} = \frac{a+c}{b} \Rightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{OB} + \frac{a+c}{b} \cdot \overrightarrow{OE}}{1 + \frac{a+c}{b}} =$$

$$= \frac{b \cdot \overrightarrow{OB} + (a+c) \cdot \overrightarrow{OE}}{a+b+c} \quad (*)$$

, unde O este punct oarecare.

In triunghiul AOC, $\frac{AE}{EC}=\frac{c}{a} \Rightarrow \dot{OE}=\frac{\overrightarrow{OA}+\frac{c}{a}\cdot\overrightarrow{OC}}{1+\frac{c}{a}}=\frac{a\cdot\overrightarrow{OA}+c\cdot\overrightarrow{OC}}{a+c}$. Atunci (*) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI}=\frac{a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}}{a+b+c}.$$

Analog, fie $AD\cap CF=\{I'\} \Rightarrow \overrightarrow{OI'}=\frac{a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}}{a+b+c}=\overrightarrow{OI} \Rightarrow I'=I \Rightarrow$

$\Rightarrow AD\cap BE\cap CF=\{I\}$.

Teorema (Menelaus)

Fie triunghiul ABC si punctele $M \in AC$, $N \in AB$, $P \in BC$. Daca M, N, P sunt coliniare, atunci $\frac{MA}{MC} \cdot \frac{PC}{PB} \cdot \frac{NB}{NA} = 1$.

Demonstratie :

Fie $\frac{MA}{MC} = m$, $\frac{NB}{NA} = n$, $\frac{PC}{PB} = p$.

In ΔPAB, $\frac{NB}{NA} = n \Rightarrow \vec{PN} = \frac{1}{1+n} \cdot \vec{PB} + \frac{n}{1+n} \cdot \vec{PA}$

In ΔPAC, $\frac{MA}{MC} = m \Rightarrow \vec{PM} = \frac{1}{1+m} \cdot \vec{PA} + \frac{m}{1+m} \cdot \vec{PC}$

$\frac{PC}{PB} = p \Rightarrow \overline{PC} = p \cdot \overline{PB}$

P, N, M - coliniare $\Rightarrow \overline{PM} = \lambda \cdot \overline{PN}$, $\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+m} \cdot \vec{PA} + \frac{m \cdot p}{1+m} \cdot \vec{PB} = \lambda \cdot \frac{n}{1+n} \cdot \vec{PA} +$

$+ \lambda \cdot \frac{1}{1+n} \cdot \vec{PB}$. Dar $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ - necoliniari $\Rightarrow \frac{1}{1+m} = \frac{\lambda \cdot n}{1+n}$ si $\frac{m \cdot p}{1+m} = \frac{\lambda}{1+n}$. Prin impartire $\Rightarrow m \cdot p = \frac{1}{n} \Leftrightarrow m \cdot n \cdot p = 1 \Leftrightarrow \frac{MA}{MC} \cdot \frac{PC}{PB} \cdot \frac{NB}{NA} = 1$.

Teorema (Ceva)

Fie punctele D, E, F pe laturile triunghiului ABC astfel incat dreptele AD, BE, CF sunt concurente. Atunci $\frac{DB}{DC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}=1$.

Observatie: $[AD]$, $[BE]$, $[CF]$ se numesc *ceviene concurente*.

Demonstratie :

Fie $AD\cap BE\cap CF=\{T\}$

Notam $\frac{DB}{DC}=\alpha$, $\frac{EC}{EA}=\beta$, $\frac{FA}{FB}=\chi$, $\frac{TA}{TD}=k$.

B, T, E - coliniare $\Rightarrow \overrightarrow{BT}=\lambda\cdot\overrightarrow{BE}$, $\lambda\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{1+k}\cdot\overrightarrow{BA}+\frac{k}{1+k}\cdot\overrightarrow{BD}=\lambda\cdot\frac{1}{1+\beta}\cdot\overrightarrow{BC}+\lambda\cdot\frac{\beta}{1+\beta}\cdot\overrightarrow{BA}$. Dar $\frac{DB}{DC}=\alpha \Rightarrow \frac{BD}{BC}=\frac{\alpha}{1+\alpha}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BD}=\frac{\alpha}{1+\alpha}\cdot\overrightarrow{BC}$ si deci $\frac{1}{1+k}\cdot\overrightarrow{BA}+\frac{k}{1+k}\cdot\frac{\alpha}{1+\alpha}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{\lambda\cdot\beta}{1+\beta}\cdot\overrightarrow{BA}+\frac{\lambda}{1+\beta}\cdot\overrightarrow{BC}$. Cum

$\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}$ sunt necoliniari $\Rightarrow \frac{1}{1+k}=\frac{\lambda\cdot\beta}{1+\beta}$ si $\frac{k}{1+k}\cdot\frac{\alpha}{1+\alpha}=\frac{\lambda}{1+\beta}$. Prin impartire rezulta

$\frac{k\cdot\alpha}{1+\alpha}=\frac{1}{\beta} \Rightarrow \alpha\cdot\beta\cdot k=1+\alpha$ (*).

C, T, F - coliniare $\Rightarrow \overrightarrow{CT} = \mu \cdot \overrightarrow{CF}$, $\mu \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+k} \cdot \vec{CA} + \frac{k}{1+k} \cdot \vec{CD} = \mu \cdot \frac{1}{1+\chi} \cdot \vec{CA} +$

$+ \mu \cdot \frac{\chi}{1+\chi} \cdot \vec{CB}$. Dar $\frac{DB}{DC} = \alpha \Rightarrow \frac{BC}{DC} = 1+\alpha \Rightarrow \vec{DC} = \frac{1}{1+\alpha} \cdot \vec{BC}$ si deci $\frac{1}{1+k} \cdot \vec{CA} +$

$+ \frac{k}{1+k} \cdot \frac{1}{1+\alpha} \cdot \vec{CB} = \frac{\mu}{1+\chi} \cdot \vec{CA} + \frac{\mu \cdot \chi}{1+\chi} \cdot \vec{CB}$.

$\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ - necoliniari $\Rightarrow \frac{1}{1+k} = \frac{\mu}{1+\chi}$ si $\frac{k}{(1+k)\cdot(1+\alpha)} = \frac{\mu \cdot \chi}{1+\chi}$. Prin impartire rezulta

$\frac{k}{1+\alpha} = \chi \Rightarrow k = \chi \cdot (1+\alpha)$ (**). Inlocuim k in (*) $\Rightarrow \alpha \cdot \beta \cdot \chi \cdot (1+\alpha) = 1+\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \cdot \chi = 1 \Leftrightarrow \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$.

Teorema (reciproca teoremei lui Ceva)

Fie punctele D, E, F pe laturile (BC), (AC), (AB) ale triunghiului ABC astfel incat $\frac{DB}{DC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}=1$. Atunci dreptele AD, BE, CF sunt concurente.

Demonstratie :

Fie $BE\cap CF=\{T\}$ si $AT\cap BC=\{D_1\}$.

BE, CF, AD_1 - ceviene concurente $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{D_1B}{D_1C}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}=1$. Dar din ipoteza $\frac{DB}{DC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{D_1B}{D_1C}=\frac{DB}{DC} \Leftrightarrow \frac{D_1B}{BC}=\frac{DB}{BC} \Leftrightarrow D_1B=DB \Leftrightarrow D_1=D \Rightarrow AD$, BE, CF sunt concurente (in T).

Teorema (Relatia lui Van Aubel)

Fie triunghiul ABC si punctele $D \in [BC]$, $E \in [AC]$, $F \in [AB]$ astfel incat AD, BE si CF sunt concurente intr-un punct T. Atunci $\frac{EA}{EC} + \frac{FA}{FB} = \frac{TA}{TD}$.

Demonstratie :

Fie $\frac{DB}{DC} = \alpha$, $\frac{EC}{EA} = \beta$, $\frac{FA}{FB} = \chi$, $\frac{TA}{TD} = k$

Conform teoremelor anterioare,

$\alpha \cdot \beta \cdot \chi = 1$ si $k = \chi \cdot (1 + \alpha)$ (**).

Deci $k = \chi + \chi \cdot \alpha \Leftrightarrow k = \chi + \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{TA}{TD} = \frac{FA}{FB} + \frac{EA}{EC} \Leftrightarrow \frac{EA}{EC} + \frac{FA}{FB} = \frac{TA}{TD}.$$

Observatie :

Relatia este adevarata si daca punctele E si F sunt exterioare laturilor $[AB]$ respectiv $[AC]$, demonstratia fiind similara.

Teorema (a bisectoarei exterioare)

Fie triunghiul ABC si $D \in BC$ astfel incat (AD este bisectoarea unghiului exterior din A al triunghiului . Atunci $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Demonstratie :

Fie $F \in AD$ cu $CF \parallel BA$ si $E \in BA$ cu $EF \parallel AC$

$\Rightarrow AEFC$ romb $\Rightarrow AE = AC$ si $\overline{AF} = \overline{AE} + \overline{AC}$.

Fie $\frac{AB}{AC} = k_1 \Rightarrow AE = AC = \frac{1}{k_1} \cdot AB \Rightarrow \dot{AE} = -\frac{1}{k_1} \cdot \dot{AB}$.

Fie $\frac{DB}{DC} = k_2 \Rightarrow \overline{AD} = \frac{\dot{AB} - k_2 \cdot \dot{AC}}{1 - k_2}$

A, F, D - coliniare $\Rightarrow \overline{AF} = \lambda \cdot \overline{AD} \Leftrightarrow -\frac{1}{k_1} \cdot \dot{AB} + \dot{AC} = \frac{\lambda}{1-k_2} \cdot \dot{AB} + \frac{-\lambda \cdot k_2}{1-k_2} \cdot \overline{AC}$

$\overline{AB}, \overline{AC}$ necoliniari $\Rightarrow -\frac{1}{k_1} = \frac{\lambda}{1-k_2}$ si $1 = \frac{-\lambda \cdot k_2}{1-k_2} \Rightarrow \frac{\lambda}{1-k_2} = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{k_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow k_1 = k_2 \Leftrightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Teorema (a concurentei bisectoarelor exterioare si interioara)

Fie triunghiul ABC. Atunci bisectoarea interioara a unui unghi si bisectoarele exterioare ale celorlalte doua unghiuri sunt concurente.

Demonstratie :

Fie I_A punctul de intersectie dintre bisectoarea unghiului A si bisectoarea exterioara a unghiului B.

Fie $AI_A \cap BC = \{D\}$.

In ΔABC, $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow BD = \frac{a \cdot c}{b+c}$

Fie O punct oarecare din plan.

In ΔABD, (BI_A bisectoare exterioara $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{I_AD}{I_AA} = \frac{BD}{BA} = \frac{a}{b+c} \Rightarrow OI_A = \frac{\overrightarrow{OD} - \frac{a}{b+c} \cdot \overrightarrow{OA}}{1 - \frac{a}{b+c}} = \frac{(b+c) \cdot \overrightarrow{OD} - a \cdot \overrightarrow{OA}}{b+c-a}$$

$$\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b} \Rightarrow \overline{OD}=\frac{\overline{OB}+\frac{c}{b}\cdot\overline{OC}}{1+\frac{c}{b}}=\frac{b\cdot\overline{OB}+c\cdot\overline{OC}}{b+c} \Rightarrow \overline{OI_A}=\frac{-a\cdot\overline{OA}+b\cdot\overline{OB}+c\cdot\overline{OC}}{2p-2a}.$$

Analog, fie I_A' intersectia dintre bisectoarea din A si bisectoarea exterioara din C $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \overline{OI_A'}=\frac{-a\cdot\overline{OA}+b\cdot\overline{OB}+c\cdot\overline{OC}}{2p-2a}=\overline{OI_A} \Rightarrow I_A'=I_A \Rightarrow$$ cele trei bisectoare sunt

concurente in I_A si $\overline{OI_A}=\dfrac{-a\cdot\overline{OA}+b\cdot\overline{OB}+c\cdot\overline{OC}}{2(p-a)}$.

Analog, bisectoarea unghiului B si bisectoarele exterioare din A si C sunt concurente intr-un punct I_B si $\overline{OI_B}=\dfrac{a\cdot\overline{OA}-b\cdot\overline{OB}+c\cdot\overline{OC}}{2(p-b)}$, respectiv bisectoarea unghiului C si bisectoarele exterioare din A si B sunt concurente intr-un punct I_C si

$$\overline{OI_C}=\frac{a\cdot\overline{OA}+b\cdot\overline{OB}-c\cdot\overline{OC}}{2(p-c)}.$$

Observatie: I_A, I_B si I_C sunt centrele cercurilor exinscrise ale triunghiului (puncte egal departate de laturile triunghiului).

Teorema (concurenta inaltimilor; coordonatele baricentrice ale ortocentrului)

Fie triunghiul ABC si $[AD], [BE], [CF]$ inaltimile triunghiului. Atunci AD, BE, CF sunt concurente intr-un punct H si pentru orice punct O din plan,

$$\overrightarrow{OH} = \frac{tgA}{tgA+tgB+tgC}\cdot\overrightarrow{OA} + \frac{tgB}{tgA+tgB+tgC}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{tgC}{tgA+tgB+tgC}\cdot\overrightarrow{OC}.$$

Demonstratie:

Fie $\alpha = \frac{BD}{DC} = \frac{c\cdot\cos B}{b\cdot\cos C}$, $\beta = \frac{EC}{EA} = \frac{a\cdot\cos C}{c\cdot\cos A}$,

$\chi = \frac{FA}{FB} = \frac{b\cdot\cos A}{a\cdot\cos B} \Rightarrow \alpha\cdot\beta\cdot\chi = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow AD$, BE si CF sunt concurente intr-un punct H (reciproca teoremei lui Ceva).

Fie O punct arbitrar. Atunci

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\beta}{1+\beta+\beta\cdot\chi}\cdot\overrightarrow{OA} + \frac{\chi}{1+\chi+\chi\cdot\alpha}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{\alpha}{1+\alpha+\alpha\cdot\beta}\cdot\overrightarrow{OC}.$$

Dar $\dfrac{\beta}{1+\beta+\beta\cdot\chi} = \dfrac{\dfrac{a\cdot\cos C}{c\cdot\cos A}}{1+\dfrac{a\cdot\cos C}{c\cdot\cos A}+\dfrac{b\cdot\cos C}{c\cdot\cos B}} = \dfrac{\dfrac{2R\cdot\sin A\cdot\cos C}{2R\cdot\sin C\cdot\cos A}}{1+\dfrac{2R\cdot\sin A\cdot\cos C}{2R\cdot\sin C\cdot\cos A}+\dfrac{2R\cdot\sin B\cdot\cos C}{2R\cdot\sin C\cdot\cos B}} =$

$= \dfrac{\dfrac{tgA}{tgC}}{1+\dfrac{tgA}{tgC}+\dfrac{tgB}{tgC}} = \dfrac{tgA}{tgA+tgB+tgC}$ si analoagele. Prin inlocuire rezulta

$$\overrightarrow{OH} = \frac{tgA}{tgA+tgB+tgC}\cdot\overrightarrow{OA} + \frac{tgB}{tgA+tgB+tgC}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{tgC}{tgA+tgB+tgC}\cdot\overrightarrow{OC}.$$

Observatie : $\left(\dfrac{tgA}{tgA+tgB+tgC}, \dfrac{tgB}{tgA+tgB+tgC}, \dfrac{tgC}{tgA+tgB+tgC}\right)$ sunt coordonatele baricentrice ale ortocentrului relative la triunghiul ABC.

Teorema (conditie de suficienta pentru mijloacele laturilor unui triunghi)

Fie $[AD], [BE], [CF]$ ceviene concurente in triunghiul ABC. Daca $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$ pot forma un triunghi, atunci D, E, F sunt respectiv mijloacele laturilor triunghiului.

Observatie : Am demonstrat (6.8') ca aceasta conditie este si necesara.

Demonstratie :

Fie $\alpha = \dfrac{BD}{DC} \Rightarrow \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{\alpha}{1+\alpha} \Rightarrow \dot{BD} = \dfrac{\alpha}{1+\alpha} \cdot \dot{BC}$

$$\beta = \frac{EC}{EA} \Rightarrow \dot{CE} = \frac{\beta}{1+\beta} \cdot \dot{CA}$$

$$\chi = \frac{FA}{FB} \Rightarrow \dot{AF} = \frac{\chi}{1+\chi} \cdot \dot{AB}$$

$[AD], [BE], [CF]$ concurente $\Rightarrow \alpha \cdot \beta \cdot \chi = 1$ (Teorema Ceva)

$\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$ pot forma un triunghi $\Rightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} +$

$+ \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + \frac{\beta}{1+\beta} \cdot (-\overrightarrow{AC}) +$

$+ \frac{\chi}{1+\chi} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow (\frac{\alpha}{1+\alpha} - \frac{\beta}{1+\beta}) \cdot \overrightarrow{AC} + (\frac{\chi}{1+\chi} - \frac{\alpha}{1+\alpha}) \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ necoliniari $\Rightarrow \frac{\alpha}{1+\alpha} = \frac{\beta}{1+\beta} = \frac{\chi}{1+\chi} \Rightarrow \alpha = \beta = \chi$. Dar $\alpha \cdot \beta \cdot \chi = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \beta = \chi = 1 \Leftrightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{EC}{EA} = \frac{FA}{FB} = 1 \Leftrightarrow D, E, F$ sunt mijloacele laturilor .

Teorema (Relatiile lui Sylvester)

Fie ABC un triunghi oarecare, O centrul cercului circumscris triunghiului, H ortocentrul, G centrul de greutate. Atunci:

1) $\overline{HA}+\overline{HB}+\overline{HC}=2\overline{HO}$

2) $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{OH}$.

Demonstratie:

1) Fie D mijlocul lui $[BC]$ si A' simetricul lui H fata de D $\Rightarrow$ $HBA'C$ paralelogram $\Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{HA'}=\overline{HB}+\overline{HC}$.

$BH \perp AC$, $A'C \parallel BH \Rightarrow A'C \perp AC$

$CH \perp AB$, $A'B \parallel CH \Rightarrow A'B \perp AB$

$\Rightarrow ABA'C$ - inscriptibil $\Rightarrow A'$ se afla pe cercul circumscris triunghiului ABC si $[AA']$ - diametru

O - mijlocul lui $[AA'] \Rightarrow 2\overline{HO}=\overline{HA}+\overline{HA'} \Leftrightarrow 2\overline{HO}=\overline{HA}+\overline{HB}+\overline{HC}$

2) $\overline{HA}+\overline{HB}+\overline{HC}=2\overline{HO} \Leftrightarrow \overline{HO}+\overline{OA}+\overline{HO}+\overline{OB}+\overline{HO}+\overline{OC}=2\overline{HO} \Leftrightarrow 3\overline{HO}+$
$+\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=2\overline{HO} \Leftrightarrow \overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{OH}$.

Teorema (dreapta lui Euler)

Cu notatiile cunoscute in triunghi, punctele O, G, H sunt coliniare si $OH = 3 \cdot OG$.

Demonstratie :

G - centrul de greutate al triunghiului $\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$

Conform relatiei lui Sylvester, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} \Rightarrow \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} \Rightarrow O, G, H$ sunt coliniare si $OH = 3 \cdot OG$.

Teorema (cercul lui Euler)

Intr-un triunghi ABC, picioarele inaltimilor, mijloacele laturilor si mijloacele segmentelor ce unesc ortocentrul cu varfurile triunghiului sunt puncte conciclice.

Demonstratie :

Fie A', B', C' - mijloacele laturilor,

D, E, F - picioarele inaltimilor,

A_1, B_1, C_1 - mijloacele segmentelor AH, BH, CH si Ω - mijlocul lui $[OH]$.

$$\overline{\Omega A'} = \overline{OA'} - \overline{O\Omega} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{OB}+\vec{OC}) - \frac{1}{2}\cdot\vec{OH} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(\vec{OB}+\vec{OC}) - \frac{1}{2}\cdot(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}) = -\frac{1}{2}\cdot\vec{OA}$$

$[\Omega A_1]$ - linie mijlocie in $\Delta HOA \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{\Omega A_1} = \frac{1}{2}\cdot\vec{OA} = -\overline{\Omega A'} \Rightarrow \Omega$ - mijlocul lui $[A_1A']$

Dar $\Delta A_1DA'$ - dreptunghic in $D \Rightarrow \Omega$ este centrul cercului circumscris $\Delta A_1DA' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Omega A_1 = \Omega D = \Omega A' = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}.$$

Analog Ω este centrul cercurilor circumscrise $\Delta B_1EB'$ si $\Delta C_1FC' \Rightarrow \Omega$ este situat la distanta $\frac{R}{2}$ de toate cele noua puncte A_1, B_1, C_1, A', B', C', D, E, F, adica punctele sunt conciclice.

Cercul de centru Ω si raza $\frac{R}{2}$ se mai numeste „cercul celor noua puncte”.

Bibliografie :

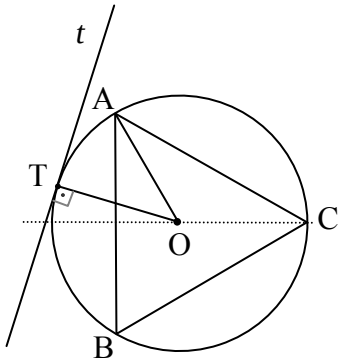
D. Branzei, A. Zanoschi - Geomerie. Probleme cu vectori, Editura 45 2004
I. D. Albu, I.D. Barchi – Geometrie vectoriala in liceu, Editura Barchi, 2004

APLICAȚII ALE ANALIZEI MATEMATICE ÎN GEOMETRIA PLANĂ**(3)**

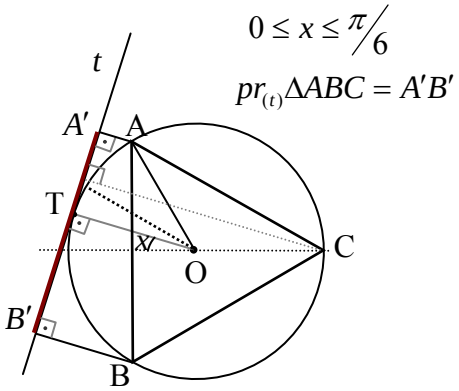
Prof. Poenaru Dan
COLEGIUL ECONOMIC „ I. POP” CLUJ-NAPOCA

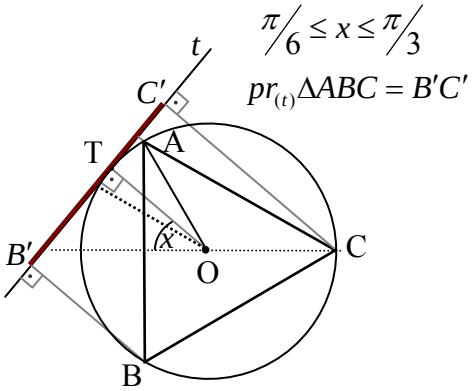
1.

Se dă un triunghi echilateral ABC de latură a înscris în cercul $C(O)$ şi o tangentă (t) la cerc într-un punct variabil T . Să se studieze variația lungimii „proiecției triunghiului ABC” pe tangenta (t) . (Prin proiecția unui triunghi pe o dreaptă se va înțelege segmentul determinat de cele mai îndepărtate două proiecții ale vârfurilor triunghiului).



SOLUȚIE: Ducând înălțimea CP a triunghiului ABC notăm cu x măsura unghiului TOP. Fie C_1 punctual diametral opus lui C. Studiul variațional al lungimii proiecției triunghiului ABC pentru T aparținând arcului mic AC_1 este suficient, rezultatele fiind identice şi pentru celelalte 5 arce de acest tip ale cercului. Comform figurii de mai jos





Se observă că pentru $x \in \left[0, \pi/6\right]$ proiecția triunghiului este segmentul $A'B'$ iar pentru $x \in \left[\pi/6, \pi/3\right]$ proiecția triunghiului este segmentul $B'C'$. Exprimând în cele două situații lungimea proiecției obținem: $pr_{(t)}\Delta ABC = \begin{cases} A'B', & 0 \le x \le \pi/6 \\ B'C', & \pi/6 < x \le \pi/3 \end{cases} =$

$$=\begin{cases} a\cos x, & 0\le x\le \pi/6 \\ a\cos\left(\pi/3 - x\right), & \pi/6 < x \le \pi/3 \end{cases}$$. Pentru exemplul numeric $a=1$ se poate construi

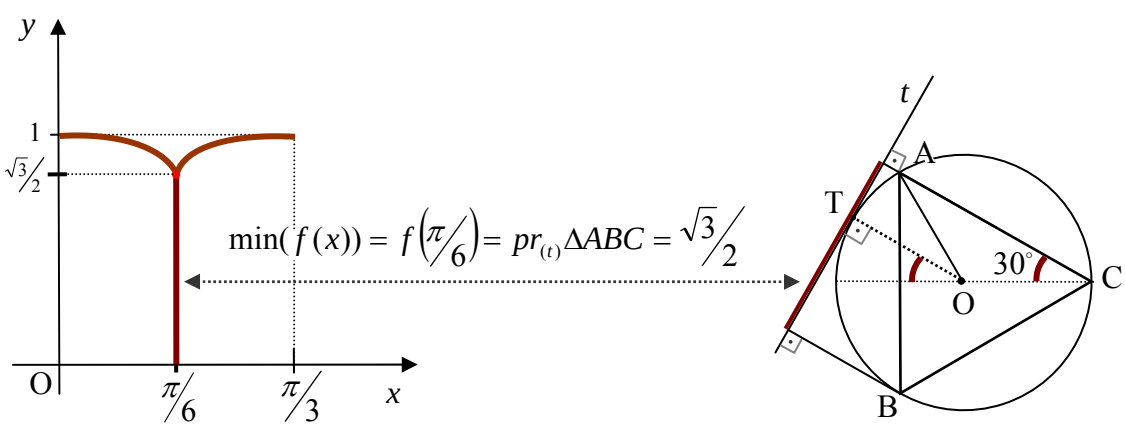
funcția: $f:\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\to R,\quad f(x)=\begin{cases} \cos x, & 0\le x\le \pi/6 \\ \cos\left(\pi/3 - x\right), & \pi/6 < x \le \pi/3 \end{cases}$

Funcția este continuă pe $\left[0,\pi/3\right]$ și derivabilă pe $\left[0,\pi/3\right]\setminus\left\{\pi/6\right\}$. Derivata funcției este

dată de $f:\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\setminus\left\{\frac{\pi}{6}\right\}\to R,\quad f(x)=\begin{cases} -\sin x, & 0\le x < \pi/6 \\ \sin\left(\pi/3 - x\right), & \pi/6 < x \le \pi/3 \end{cases}$

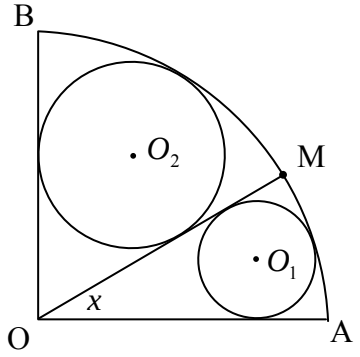
Tabelul de variație:

x	0		$\pi/6$		$\pi/3$
$f'(x)$		- - - - - - - - - - -	$-1/2$ | $1/2$	+ + + + + + +	
$f(x)$	1	↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘	$\sqrt{3}/2$	↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗	1

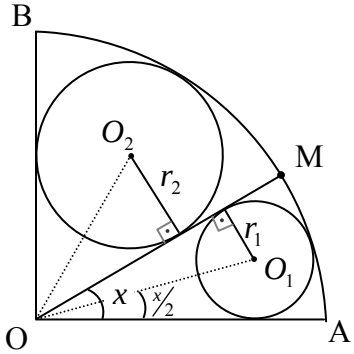


2.

Se consideră sectorul circular AOB rază $r=1$ cu $OA \perp OB$. Fie M un punct variabil pe arcul AB şi cercurile $C(O_1)$ şi $C(O_2)$ înscrise în sectoarele AOM respectiv BOM. Să se studieze variaţia sumei de arii a celor două cercuri . Stabiliţi valoarea minimă şi maximă a acestei sume.



SOLUŢIE: Poziţia punctului M este monitorizată de mărimea unghiului AOM; de aceea vom nota cu $x = m(A\hat{O}M)$ şi se vor exprima lungimile razelor r_1 şi r_2 în funcţie de x. Astfel $r_1 = \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{1+\sin\frac{x}{2}}$ şi $r_2 = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}$.



Suma ariilor cercurilor este: $S(x) = \pi(r_1^2 + r_2^2) =$

$$= \pi \cdot \left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)^2} + \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right)^2} \right)$$

ceea ce permite construcţia funcţiei:

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to R, \quad f(x) = S(x)$$

Preliminarii în studiul variaţiei funcţiei : $f(0) = \pi(3-2\sqrt{2}) = f\left(\pi/2\right)$

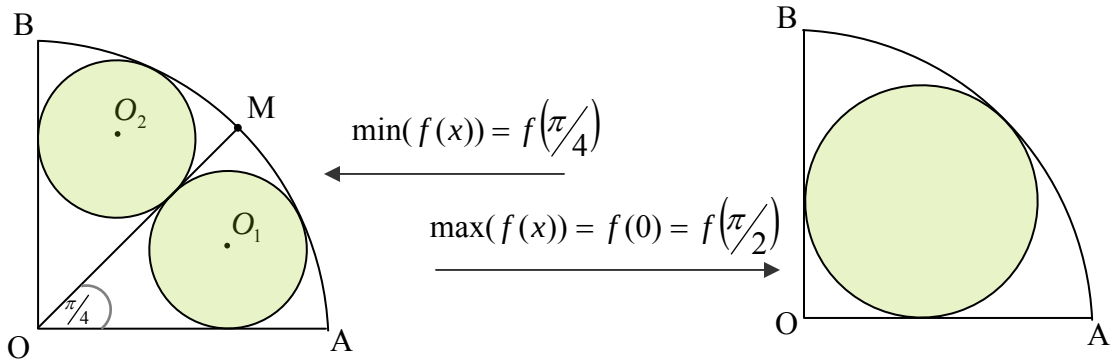
Funcţia f este continuă şi derivabilă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ iar derivata funcţiei are expresia:

$$f'(x)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sin x}{\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)^3}-\frac{\cos x}{\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right)^3}\right)$$. Ecuația $f'(x)=0$ are soluția $x_0=\frac{\pi}{4}$.

Tabelul de variație:

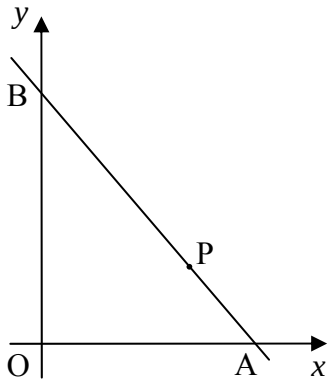
x	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$f'(x)$		- - - - - - - - -	0	+ + + + + + +	
$f(x)$	$\pi(3-2\sqrt{2})$	↘↘↘↘↘↘↘	$f\left(\pi/4\right)$	↗↗↗↗↗↗↗	$\pi(3-2\sqrt{2})$

Rezultatele finale cu ilustrațiile corespunzătoare sunt prezentate mai jos:

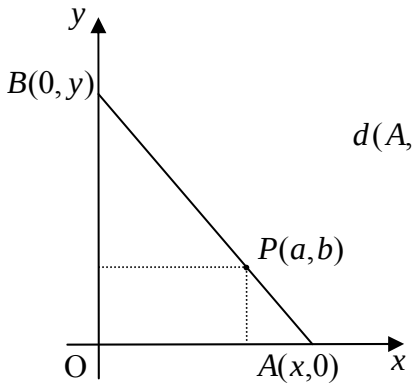


3.

Se dau dreptele perpendiculare Ox şi Oy. Fie şi punctul fix P situat în interiorul unghiului xOy. O dreaptă variabilă ce trece prin punctul P intersectează semidreptele Ox şi Oy în punctele A respectiv B. Dacă distanţele de la punctul P la dreptele Ox şi Oy sunt a respectiv b, să se studieze variaţia lungimii segmentului $[AB]$ şi să se specifice care este valoarea minimă a lungimii acestui segment .



SOLUŢIE: Se consideră sistemul cartezian de axe xOy unde punctul P are coordonatele a respectiv b. Deasemenea putem alege, în comformitate cu datele problemei şi $A(x,0)$, $B(0,y)$. Distanţa de la A la B este dată de:



$$d(A,B) = PB + BA = \sqrt{(x-a)^2 + b^2} + \sqrt{(y-b)^2 + a^2} \quad (1)$$

dar $P \in AB \Rightarrow \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1 \Rightarrow y = \frac{bx}{x-a}$ (2)

înlocuind (2) în (1) obţinem:

$$d(A,B) = \sqrt{(x-a)^2 + b^2} \cdot \left(\frac{x}{|x-a|} + 1 \right) \quad (3)$$

Dacă $x \le a$ avem $B \notin Oy$ ceea ce nu convine condiţiilor problemei; astfel alegem $x > a$ şi atunci relaţia (3) devine: $d(A,B) = \frac{x}{x-a} \cdot \sqrt{(x-a)^2 + b^2}$. Se construieşte

funcţia $f : (a,+\infty) \to R$, $f(x) = \frac{x}{x-a} \cdot \sqrt{(x-a)^2 + b^2}$, $a, b \in (0,+\infty)$

Urmărim în continuare variaţia funcţiei f pentru exemplul numeric $a = 1$ şi $b = 2\sqrt{2}$

$$f : (1,+\infty) \to R, \quad f(x) = \frac{x}{x-1} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + 8}$$

Preliminarii ale tabelului de variație: $\lim\limits_{x\downarrow 1} f(x)=\infty \Rightarrow x=1$ este asimptotă verticală;

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \Rightarrow$ nu există asimptotă orizontală;

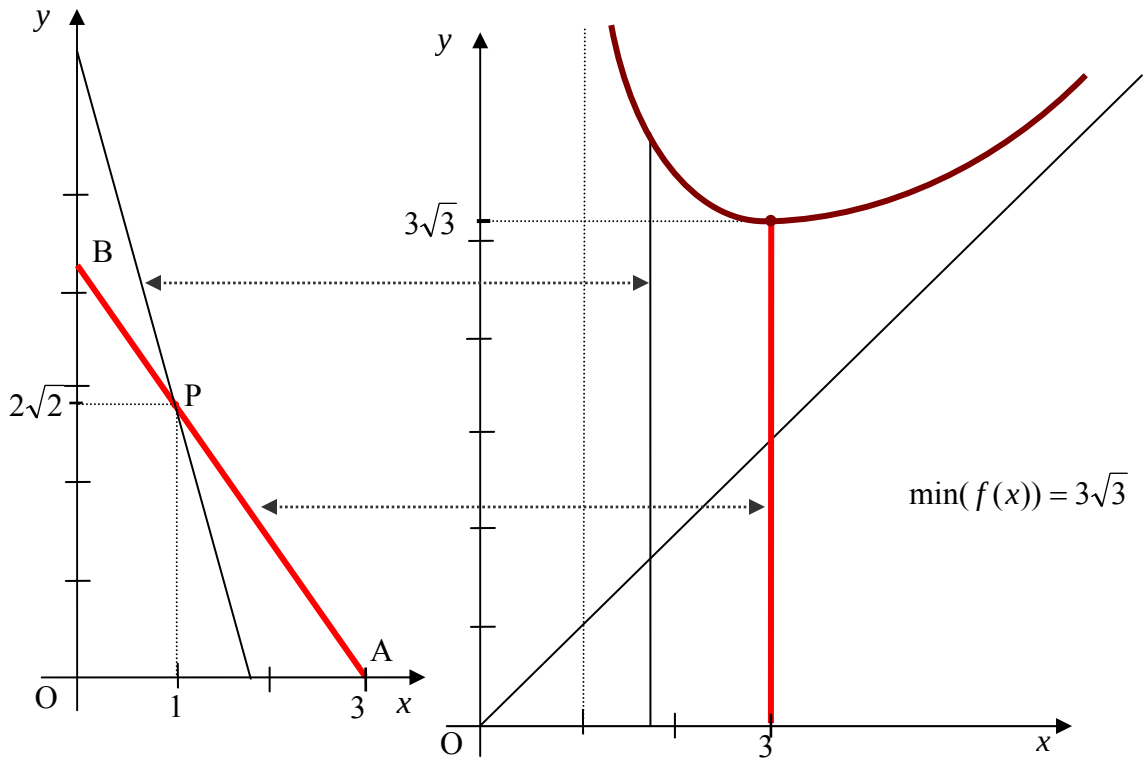
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-x\big)=0 \Rightarrow y=x$ este asimptotă oblică.

Funcția f este continuă şi derivabilă în orice $x\in(1,+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{(x-1)^3-8}{(x-1)^2\sqrt{(x-1)^2+8}}$ iar ecuația $f'(x)=0$ are soluția $x_0=3$ şi $f(3)=3\sqrt{3}$

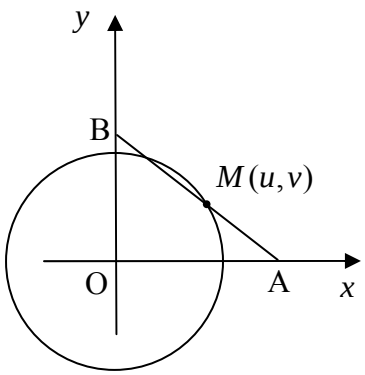
Mai jos este prezentat tabloul de variație precum şi graficul funcției ce „monitorizează” distanța variabilă AB ; ilustrația grafică sugerează conexiunile dintre lungimile segmentelor şi valorile funcției punând în evidență valoarea minimă a lungimilor respectiv valoarea minimă a funcției.

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$		- - - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + + + +	
$f(x)$	$+\infty$	↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘	$3\sqrt{3}$	↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗	$+\infty$



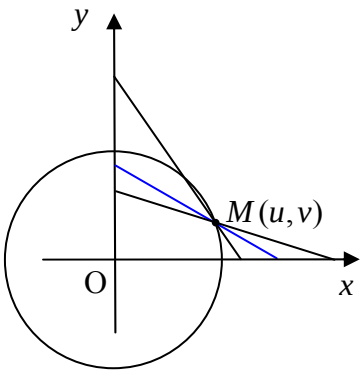
4.

Se dă cercul $C(O,r)$ cu $r=1$. Pe direcția a două diametre perpendiculare se alege sistemul cartezian de axe xOy. Fie şi punctul variabil $M(u,v)$ astfel încât $M \in \text{int}(x\hat{O}y)$ şi $M \in C(O,r)$. Dacă $[A,B]$ este un segment cu proprietățile $A \in (Ox$, $B \in (Oy$ şi $M \in C(O,r)$, să se determine valoarea maximă a mulțimii valorilor minime pe care le înregistrează distanța AB când M parcurge sfertul de cerc.



SOLUȚIE: În rezolvare vom utiliza rezultate ale problemei precedente. Astfel, funcția distanță construita la problema **3.** , se actualizează la coordonatele u şi v obținând:

$$f_{u,v}:(u,+\infty)\to R,\quad f_{u,v}(x)=\frac{x}{x-u}\sqrt{(x-u)^2+v^2}\quad \text{unde}\quad u,v\in(0,1)$$



În figura alăturată se sugerează distanța minimă pentru un punct oarecare pe cerc. Ne interesează maximul acestor valori minime, când punctul M parcurge sfertul de cerc adică

$$\max\left(\min(f_{u,v}(x))\right)$$

Din $M(u,v)\in C(O,1)\Rightarrow u^2+v^2=1\Rightarrow v=\sqrt{1-u^2}$, $(u<1)$ (1).

Funcția $f_{u,v}$ este continuă pe $(u,+\infty)$ iar $f'_{u,v}(x)=\dfrac{(x-u)^2-uv^2}{(x-u)^2\sqrt{(x-u)^2+v^2}}$

Deasemenea $f'_{u,v}(x)=0$ conduce la soluția $x_0=u+\sqrt[3]{uv^2}$ iar valoarea minimă pentru u şi v fixați este: $f_{u,v}(x_0)=\sqrt{\left(\sqrt[3]{u^2}+\sqrt[3]{v^2}\right)^3}=\min(f_{u,v}(x))$ (2).

Coroborând (1) cu (2) obținem:

$f_{u,v}(x_0) = f_u(x_0) = \sqrt{\left(\sqrt[3]{u^2} + \sqrt[3]{1-u^2}\right)^3} = \min(f_{u,v}(x)) = \min(f_u(x))$. Putem nota în

continuare $f_u(x_0) = g(u)$; astfel se poate construi funcția

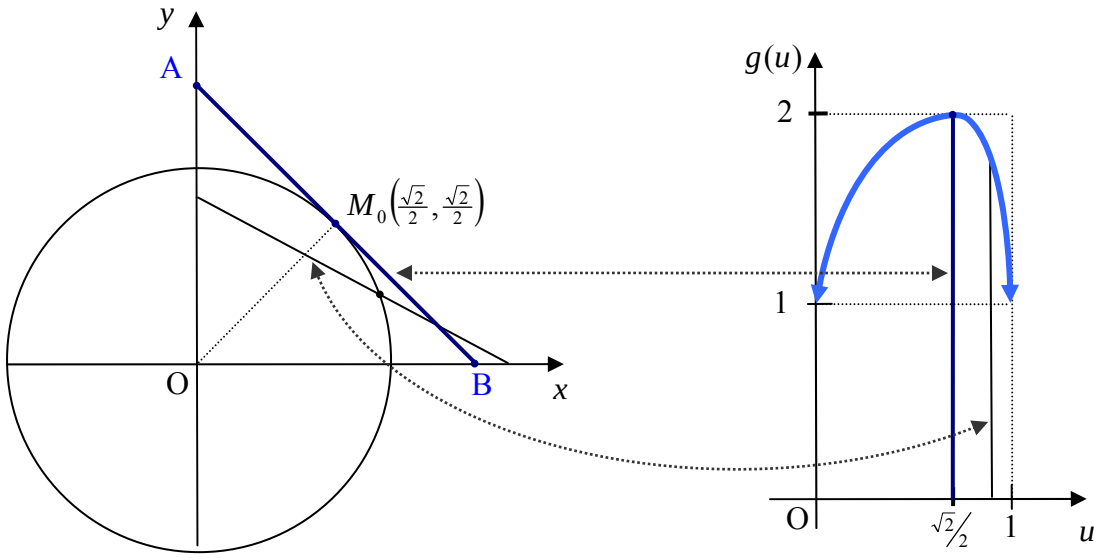
$g:(0,1) \to R, \quad g(u) = \sqrt{\left(\sqrt[3]{u^2} + \sqrt[3]{1-u^2}\right)^3}$ unde $\operatorname{Im} g$ reprezintă mulțimea tuturor

lungimilor minime AB relative la punctele de tip M ce parcurg sfertul de cerc.
„Maximul acestor minime" se poate afla studiind variația funcției g
Preliminarii: $\lim\limits_{x\downarrow 0} g(u) = 1$ şi $\lim\limits_{x\uparrow 1} g(u) = 1$, apoi

$g'(u) = \dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{u^2} + \sqrt[3]{1-u^2}}}{\sqrt[3]{u(1-u^2)^2}} \cdot \left(\sqrt[3]{(1-u)^2} - \sqrt[3]{u^4}\right)$ iar $g'(u) = 0$ are soluția $u_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Se prezintă mai jos tabelul de variație şi graficul corespunzător

u	0		$\sqrt{2}/2$		1
$g'(u)$		- - - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + + + +	
$g(u)$	1	↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗	2	↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘	1



ECUAȚII TRIGONOMETRICE

Prof. Carmen – Elena Smarandache
Colegiul Național de Agricultură şi Economie – Tecuci

Ecuațiile trigonometrice sunt ecuații transcendente. Adică, se determină o soluți eparticulară şi apoi se scrie soluția generală care se exprima în funcție de un parametru $k \in \mathbb{Z}$. şi de perioada funcției trigonometrice respective.
Ecuațiile trigonometrice sunt ecuații în care necunoscuta figurează ca argument al uneia sau mai multor funcții trigonometrice.
Exemple:

- $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
- $2(\sin x + \cos x) - \sin x \cos x = 2$;
- $\cos x = 0$.

Un număr real $x_0 \in \mathbb{R}$ se numeşte soluţie a ecuației trigonometrice dacă înlocuind x cu x_0 în ecuație se obține o egalitate.
Exemple:

- $x = \frac{\pi}{3}$ este o soluție a ecuației $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
- $x = \frac{\pi}{2}$ este o soluție a ecuației $\cos x = 0$;
- $x = 0$ este o soluție a ecuației $2(\sin x + \cos x) - \sin x \cos x = 2$.

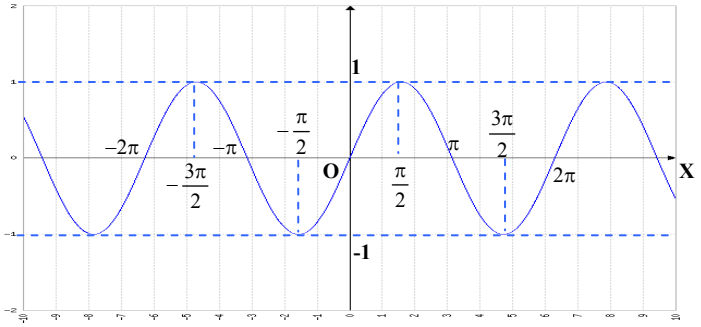
A rezolva o ecuație trigonometrică înseamnă a-i determina toate soluțiile.

Tipuri de ecuații trigonometrice

1. Ecuații trigonometrice fundamentale

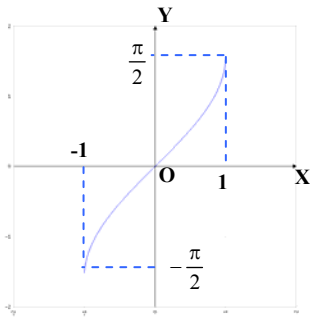
Ecuațiile trigonometrice fundamentale au următoarele forme: $\sin x = a$, $\cos x = b$, $tgx = c$, $ctgx = d$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

a. Ecuații de tipul $\sin x = a$, $a \in \mathbb{R}$.



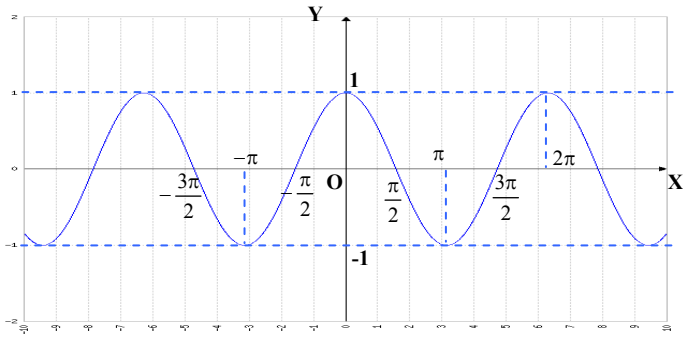
Mulțimea soluțiilor ecuației este:

- $S = \emptyset$ dacă $|a| > 1$; (1)
- $S = \{(-1)^k \arcsin a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, dacă $|a| \le 1$; (2)
- Arcsinusul numărului a, notat $\arcsin a$ este acel număr $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ pentru care $\sin x_0 = a$.



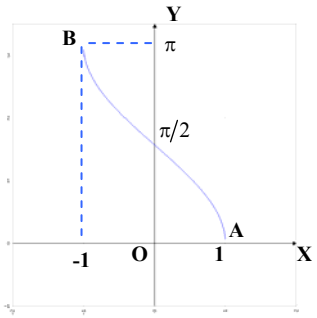
Exemplu: Să se rezolve ecuația: $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Cum $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right| \le 1$ conform (1) soluțiile ecuației sunt: $x = (-1)^k \cdot \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$. Dar $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ ceea ce implică: $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dacă k este par $k = 2p,\ \ p \in \mathbb{Z}$ atunci $x = \frac{\pi}{3} + 2p\pi$. Dacă k este impar $k = 2p+1,\ \ p \in \mathbb{Z}$ atunci $x = -\frac{\pi}{3} + (2p+1)\pi,\ \ p \in \mathbb{Z}$.

b. Ecuații de tipul $\cos x = b,\ \ b \in \mathbb{R}$.



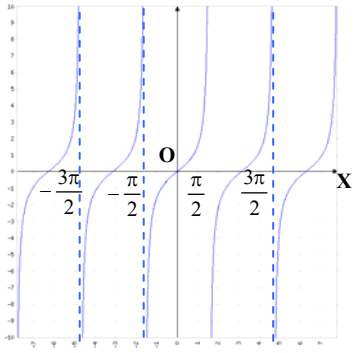
Mulțimea soluțiilor ecuației este:

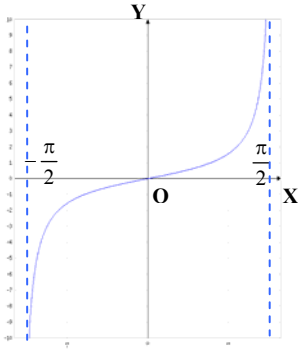
- $S = \emptyset$ dacă $|b| > 1; (3)$
- $S = \{\pm \arccos b + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, dacă $|b| \le 1; (4)$
- Arccosinusul numărului b, notat $\arccos b$ este acel număr $x_0 \in [0, \pi]$ pentru care $\cos x_0 = b$.



Exemplu: Să se rezolve ecuația: $\cos x = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$. Cum $\left|\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right| > 1$ conform (3) ecuația nu are soluții.

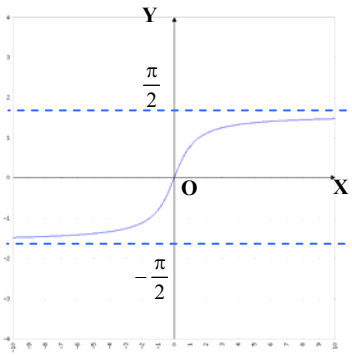
c. Ecuații de tipul $tgx = c$.





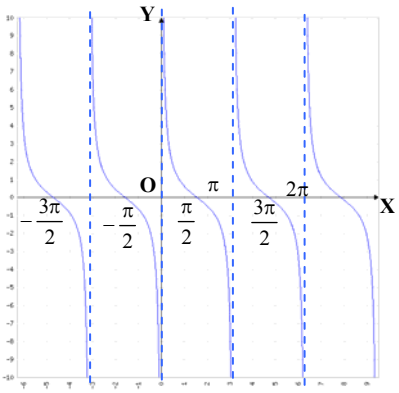
Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{arctgc + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. (5)

Arctangenta numărului c, notată arctgc este acel număr $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $tgx_0 = c$.



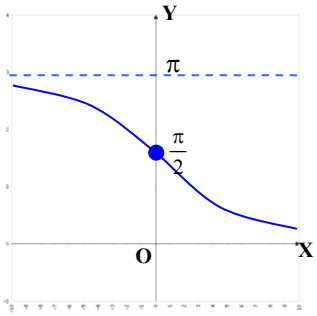
Exemplu: Să se rezolve ecuația: $tgx = -2$. Conform (5) soluțiile ecuației sunt: $x = arctg(-2) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

d. Ecuații de tipul $ctgx = d$.



Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{arcctgd + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. (6)

Arccotangenta numărului d, notată arcctgd este acel număr $x_0 \in (0, \pi)$ pentru care $ctgx_0 = d$.



Exemplu: Să se rezolve ecuația: $\text{ctg}x = -1$. Conform (6) soluțiile ecuației sunt: $x = \text{arcctg}(-1) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Dar $\text{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$ ceea ce implică: $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

2. Ecuații care conțin funcții de acelaşi nume

Ecuațiile trigonometrice care conțin funcții de acelaşi nume au următoarele forme:

- $\sin\alpha x = \sin\beta x;$
- $\sin\alpha x = \cos\beta x \Leftrightarrow \sin\alpha x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta x\right);$
- $\sin\alpha x = -\sin\beta x \Leftrightarrow \sin\alpha x = \sin(-\beta x);$
- $\cos\alpha x = \cos\beta x;$
- $\cos\alpha x = -\cos\beta x \Leftrightarrow \cos\alpha x = \cos(\pi - \beta x);$
- $\text{tg}\alpha x = \text{tg}\beta x$, unde $\cos\alpha x \neq 0$ şi $\cos\beta x \neq 0;$
- $\text{ctg}\alpha x = \text{ctg}\beta x$, unde $\sin\alpha x \neq 0$, $\sin\beta x \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

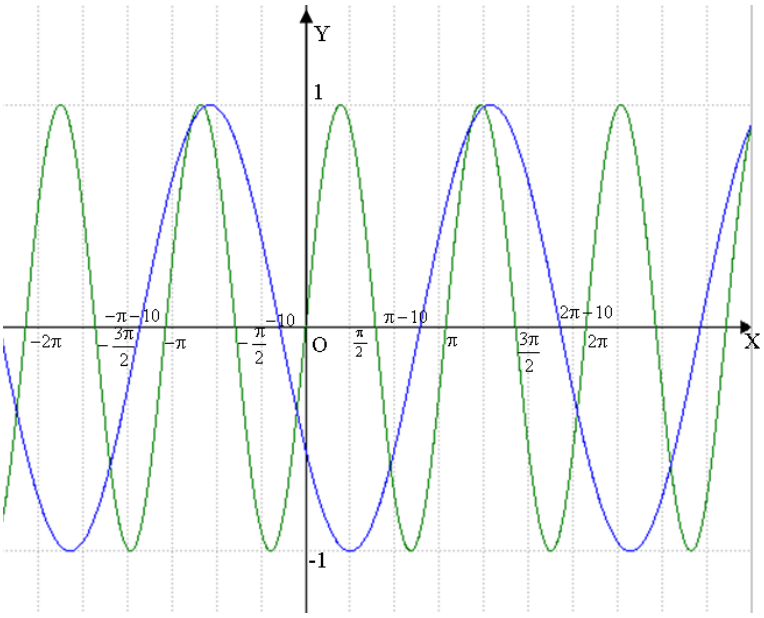
a. Ecuații de tipul $\sin\alpha x = \sin\beta x;$

Formula de rezolvare este $\alpha x = \{(-1)^k \beta x + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$; (7)

Exemplu:

Să se determine punctele de intersecție ale graficelor funcțiilor: $f_1 : R \to [-1, 1]$, $f_1(x) = \sin(2x)$ şi $f_2 : R \to [-1, 1]$, $f_2(x) = \sin(x + 10)$.

Reprezentăm grafic funcțiile: cu verde funcția $f_1(x) = \sin(2x)$ iar cu albastru funcția $f_2(x) = \sin(x + 10)$.



Pentru a determina punctele de intersecție ale celor două grafice rezolvăm ecuația $f_1(x) = f_2(x)$, adică $\sin(2x) = \sin(x + 10)$. Conform (7) soluțiile ecuației sunt: $2x = (-1)^k \cdot (x + 10) + kx,\ k \in \mathbb{Z}$.

Dacă k este par $k = 2p$, unde $p \in \mathbb{Z}$ atunci $2x = x + 10 + 2p\pi \Leftrightarrow x = 10 + 2p\pi,\ p \in \mathbb{Z}$.

Dacă k este impar $k = 2p + 1$, unde $p \in \mathbb{Z}$ atunci $2x = -x - 10 + (2p + 1)\pi \Leftrightarrow$ $3x = -10 + (2p + 1)\pi \Leftrightarrow x = -\frac{10}{3} + \frac{(2p + 1)\pi}{3},\ p \in \mathbb{Z}$.

b. Ecuații de tipul $\cos\alpha x = \cos\beta x$;
Formula de rezolvare este $\alpha x = \{\pm\beta x + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (8)
Exemplu: Să se rezolve ecuația: $\cos x = \cos(2x)$. Conform (8) soluțiile ecuației sunt: $x = \pm 2x + 2k\pi \;\; k \in \mathbb{Z}$. De aici rezultă $x = \frac{2}{3}k\pi$ sau $x = -2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$.

c. Ecuații de tipul $\mathrm{tg}\alpha x = \mathrm{tg}\beta x$, unde $\cos\alpha x \neq 0$ şi $\cos\beta x \neq 0$;
Formula de rezolvare este $\alpha x = \{\beta x + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (9)
Exemplu: Să se rezolve ecuația: $\mathrm{tg}4x = \mathrm{tg}(x+1)$, $\cos 4x \neq 0$, $\cos(x+1) \neq 0$. Conform (9) soluțiile ecuației sunt: $4x = (x+1) + k\pi \Rightarrow x = \frac{1+k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

d. Ecuații de tipul $\mathrm{ctg}\alpha x = \mathrm{ctg}\beta x$, unde $\sin\alpha x \neq 0$, $\sin\beta x \neq 0$.
Formula de rezolvare este $\alpha x = \{\beta x + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (10)
Exemplu: Să se rezolve ecuația: $\mathrm{ctg}5x = \mathrm{ctg}(x-1)$, $\sin 5x \neq 0$, $\sin x - 1 \neq 0$. Conform (10) soluțiile ecuației sunt: $5x = (x-1) + k\pi \Rightarrow x = \frac{-1+k\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Ecuații trigonometrice care se reduc la ecuații algebrice

Ecuațiile trigonometrice care se reduc la ecuații algebrice au următoarele forme: $f(\sin\alpha x) = 0$, $f(\cos\alpha x) = 0$, $f(\mathrm{tg}\alpha x) = 0$, $f(\mathrm{ctg}\alpha x) = 0$. Se notează (substituție) $t = \sin\alpha x$ $(t = \cos\alpha x,\ t = \mathrm{tg}\alpha x,\ t = \mathrm{ctg}\alpha x)$ şi se obține o ecuație algebrică cu soluțiile $t_1, t_2, \ldots$. Se revine la substituție şi se rezolvă ecuațiile trigonometrice simple $t_1 = \sin\alpha x$, $t_2 = \sin\alpha x$, … .

Exemplu: Să se rezolve ecuația: $\mathrm{tg}^2 x + 3\mathrm{tg}x - 4 = 0$. Facem substituția $\mathrm{tg}x = t$ şi ecuația devine: $t^2 + 3t - 4 = 0$ cu soluțiile $t_1 = -4$, $t_2 = 1$. Se rezolvă ecuațiile $\mathrm{tg}x = -4$, $\mathrm{tg}x = 1$.
Ecuația $\mathrm{tg}x = -4$ are soluțiile $x = \{-\mathrm{arctg}4 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = S_1$. Ecuația $\mathrm{tg}x = 1$ are soluțiile $x = \{\mathrm{arctg}1 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = S_2$. Mulțimea de soluții a ecuației date este: $S = S_1 \cup S_2$.

4. Ecuații omogene de gradul doi în sinx şi cosx

Ecuațiile omogene de gradul doi în $\sin x$ şi $\cos x$ au următoarea formă: $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$.

- Dacă: $\cos x = 0$, atunci rezultă ecuația $a\sin^2 x = 0$. Dacă $a = 0$, atunci $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sunt soluții ale ecuației date. Dacă $a \neq 0$, atunci $\sin x = 0$, ceea ce e imposibil deoarece $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
- Dacă $\cos x \neq 0$, se împarte ecuația prin $\cos^2 x$ obținându-se o ecuație în $\mathrm{tg}x$, care e ecuație de tipul 2.

Exemplu: Să se rezolve ecuația: $\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$.

- Dacă: $\cos x = 0$, atunci rezultă ecuația $\sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$, ceea ce e imposibil deoarece $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
- Dacă $\cos x \neq 0$, se împarte ecuația prin $\cos^2 x$ şi se obține $\mathrm{tg}^2 x - 2\mathrm{tg}x - 3 = 0$. Facem substituția $\mathrm{tg}x = t$ şi ecuația devine: $t^2 - 2t - 3 = 0$ cu soluțiile $t_1 = 3$, $t_2 = -1$. Se rezolvă ecuațiile $\mathrm{tg}x = 3$, $\mathrm{tg}x = -1$.

Ecuația $tgx = 3$ are soluțiile $x = \{arctg3 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = S_1$. Ecuația $tgx = 1$ are soluțiile $x = \{arctg1 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = S_2$. Mulțimea de soluții a ecuației date este: $S = S_1 \cup S_2$.

5. Ecuații liniare în sinx şi cosx

Ecuațiile liniare în $\sin x$ şi $\cos x$ au următoarea formă: $a\sin x + b\cos x = c,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ ab \neq 0$.

- **Metoda unghiului auxiliar** Se împarte ecuația prin a şi se obține: $\sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}$. Există un unghi $\lambda \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ cu proprietatea $tg\lambda = \frac{b}{a}$. (λ se numeşte **unghi auxiliar**).

Ecuația devine:

$$\sin x + tg\lambda\cos x = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \sin x + \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\cos x = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \sin x\cos\lambda + \sin\lambda\cos x = \frac{c}{a}\cos\lambda \Leftrightarrow$$

$$\sin(x+\lambda) = \frac{c}{a}\cos\lambda.$$

- Dacă: $\left|\frac{c}{a}\cos\lambda\right| \leq 1$ atunci soluțiile ecuației sunt $x = -\lambda + (-1)^k \arcsin\left(\frac{c}{a}\cos\lambda\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- Dacă $\left|\frac{c}{a}\cos\lambda\right| > 1$, ecuația nu are soluții.

Exemplu: Să se rezolve ecuația: $\sin x + \cos x = 1$. Se scrie ecuația echivalent: $\sin x + tg\frac{\pi}{4}\cos x = 1$

$$\Leftrightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos x = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = (-1)^k\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Metoda substituției universale. Notăm $tg\frac{x}{2} = t$ pentru $x \neq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Atunci $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ şi $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ şi ecuația devine: $(c-b)t^2 + 2at + b + c = 0$ cu soluțiile reale $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ (dacă $\Delta \geq 0$). Se rezolvă ecuațiile trigonometrice $tg\frac{x}{2} = t_1$ şi $tg\frac{x}{2} = t_2$ şi se face reuniunea soluțiilor acestor ecuații.

Exemplu:

1. Determinați măsura unghiurilor $\hat{A}, \hat{B} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ştiind că:

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{B} = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{B}} = \sqrt{3} \end{cases}.$$

Din prima ecuație rezultă $\hat{B}=\frac{\pi}{2}-\hat{A}$ (1). Înlocuim relația (1) în a doua ecuație a sistemului obținem: $\frac{\sin\hat{A}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\hat{A}\right)}=\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\sin\hat{A}}{\cos\hat{A}}=\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\hat{A}-\sqrt{3}\cos\hat{A}=0$

Folosim substituția $\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}=t,\ \hat{A}\neq(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, ecuația devine $\frac{2t}{1+t^2}-\sqrt{3}\frac{1-t^2}{1+t^2}=0 \Leftrightarrow$ $\sqrt{3}t^2+2t-\sqrt{3}=0$ cu soluțiile $t_1=-\sqrt{3},\ t_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Ecuația $\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}=-\sqrt{3}$ are soluțiile $\hat{A}=\left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. Dar $\hat{A}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ceea ce înseamnă că $\frac{1}{6}<k<\frac{1}{2}$. Nu convine deoarece k este număr întreg.

Ecuația $\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ are soluțiile $\hat{A}=\left\{2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\} \Leftrightarrow \hat{A}=\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ Dar $\hat{A}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow -\frac{1}{3}<k<\frac{1}{2}$, dar $k\in\mathbb{Z}, \Rightarrow k=0 \Rightarrow \hat{A}=\frac{\pi}{3}$. (2). Înlocuind (2) în (1) obținem $\hat{B}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$. Soluțiile sistemului sunt: $\hat{A}=\frac{\pi}{3},\ \hat{B}=\frac{\pi}{6}$.

2. Să se rezolve ecuația: $\sqrt{3}\sin x+\cos x=1$. Punând $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\ x\neq(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, ecuația devine $\sqrt{3}\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}=1 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}t-2t^2=0$ cu soluțiile $t_1=0,\ t_2=\sqrt{3}$. Ecuația $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{3}$ are soluțiile $x=\left\{\frac{2\pi}{3}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}=S_1$. Ecuația $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$ are soluțiile $x=\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}=S_2$. Mulțimea de soluții a ecuației date este: $S=S_1\cup S_2$.

Metoda omogenizării Se utilizează formulele: $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$. Se aduce ecuația la forma: $2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+b\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=c\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)$, aceasta fiind o ecuație omogenă iar rezolvarea ei s-a discutat mai sus.

Exemplu: Să se rezolve ecuația: $\sqrt{3}\sin x+\cos x=1$. Se omogenizează ecuația şi avem: $2\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=0.$

- Dacă $\cos\frac{x}{2}=0$, atunci rezultă ecuația $\sin^2\frac{x}{2}=0 \Rightarrow \sin\frac{x}{2}=0$ ceea ce e imposibil deoarece $\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=1$.
- Dacă $\cos\frac{x}{2}\neq 0$, se împarte ecuația prin $\cos^2\frac{x}{2}$ şi se obține: $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow$ $\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{3}\right)=0$ cu soluțiile $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$ sau $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{3}$. Ecuația $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{3}$ are soluțiile

$x=\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi \middle| k\in Z\right\}=S_1$. Ecuația $tg\frac{x}{2}=0$ are soluțiile $x=\{2k\pi|k\in Z\}=S_2$. Mulțimea de soluții a ecuației date este: $S=S_1\cup S_2$.

Metoda ridicării la pătrat Se aduce ecuația la forma: $a\sin x=c-b\cos x$ şi se ridică la pătrat ambii membrii ai ecuației. **Se obține o ecuație neechivalentă cu cea dată:** $a^2\sin^2 x=c^2-2b\cos x+b^2\cos^2 x$, în care se înlocuieşte $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ rezultând o ecuație în $\cos x$ care se reduce la o ecuație algebrică dacă folosim substituția $y=\cos x$.

Exemplu: Să se rezolve ecuația: $\sin x+7\cos x=5$. Scriem ecuația sub forma: $\sin x=5-7\cos x$ şi ridicăm apoi la pătrat obținând ecuația $\sin^2 x=25-70\cos x+49\cos^2 x$ sau înlocuind $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ se obține ecuația în $\cos x$: $50\cos^2 x-70\cos x+24=0$, cu soluțiile $\cos x=\frac{3}{5}$ şi $\cos x=\frac{4}{5}$.

Ecuația $\cos x=\frac{3}{5}$ are soluțiile $S=\left\{\pm\arccos\left(\frac{3}{5}\right)+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}=S_1$. Ecuația $\cos x=\frac{4}{5}$ are soluțiile $S=\left\{\pm\arccos\left(\frac{4}{5}\right)+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}=S_2$. Mulțimea de soluții a ecuației date este: $S=S_1\cup S_2$.

6. Ecuații simetrice în sinx şi cosx

Ecuațiile simetrice în $\sin x$ şi $\cos x$ au următoarea formă: $a(\sin x+\cos x)+b\sin x\cos x=c$. Ecuația este simetrică în $\sin x$ şi $\cos x$ deoarece înlocuind $\sin x$ prin $\cos x$ şi $\cos x$ prin $\sin x$ ecuația rămâne neschimbată. Se notează $y=\sin x+\cos x$. Se ridică la pătrat şi rezultă: $y^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x \Leftrightarrow y^2=1+2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{y^2-1}{2}$. Cu aceste notații ecuația inițială devine: $ay+b\frac{y^2-1}{2}=c$, care în general, are soluțiile reale y_1 şi y_2. Se rezolvă ecuațiile $y_{1,2}=\sin x+\cos x=\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{2x-\frac{\pi}{4}}{2}=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. De aici rezultă că ecuațiile de mai sus $y_{1,2}=\sin x+\cos x$ au soluții dacă $|\sin x+\cos x|\le\sqrt{2}$.

Exemplu: Să se rezolve ecuația: $\sin x+\cos x+\sin x\cos x=1$. Notăm $\sin x+\cos x=y$ şi prin ridicarea la pătrat se obține ecuația $\sin x\cos x=\frac{y^2-1}{2}$. Ecuația devine $y+\frac{y^2-1}{2}=1 \Leftrightarrow y^2+2y-3=0$, cu soluțiile $y_1=-3$ şi $y_2=1$.

Ecuația $\sin x+\cos x=1$ o rezolvăm prin metoda unghiului auxiliar. Se scrie ecuația echivalent: $\sin x+tg\frac{\pi}{4}\cos x=1 \Leftrightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos x=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=(-1)^k\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Dacă $k = 2p$, (număr par), $p \in \mathbb{Z}$ avem $x = 2p\pi$ iar pentru $k = 2p+1$, (număr impar), $p \in \mathbb{Z}$ avem $x = -\frac{\pi}{2} + (2p+1)\pi = \frac{\pi}{2} + 2p\pi.$

Ecuația $\sin x + \cos x = -3$ nu are soluții pentru că $|\sin x + \cos x| \le \sqrt{2}$. Soluția finală este: Dacă $k = 2p$, (număr par), $p \in \mathbb{Z}$ avem $x = 2p\pi$ iar pentru $k = 2p+1$, (număr impar), $p \in \mathbb{Z}$ avem $x = -\frac{\pi}{2} + (2p+1)\pi = \frac{\pi}{2} + 2p\pi.$

7. Ecuații care conțin sume de sinusuri sau cosinusuri

Se grupează convenabil termenii şi se transformă sumele de sinusuri sau cosinusuri în produse în ideea de a da factor comun şi de a scrie ecuația ca un produs de factori egal cu 0. Utilizăm următoarele formule:

- $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$;
- $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$;
- $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$;
- $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$;

Exemplu: Să se rezolve ecuația: $\sin 3x - \cos 2x - \sin x = 0$. Se scrie ecuația sub forma $(\sin 3x - \sin x) - \cos 2x = 0$ şi se transformă diferența de sinusuri în produs obținând ecuația echivalentă $2\sin x\cos 2x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(2\sin x - 1) = 0$. Ecuația anterioară are soluțiile $\cos 2x = 0$ sau $2\sin x - 1 = 0$. Ecuația $\cos 2x = 0$ are soluțiile $x = \left\{\pm\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = S_1$. Ecuația $2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ are soluțiile $x = \left\{(-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = S_2$. Mulțimea de soluții a ecuației date este: $S = S_1 \cup S_2$.

Exemplu: Să se rezolve ecuația: $\cos 5x + \cos 7x = \sin 2x$. Se scrie ecuația sub forma $(\cos 5x + \cos 7x) - 2\sin x\cos x = 0$ şi se transformă suma de cosinusuri în produs obținând ecuația echivalentă $2\cos 6x\cos x - 2\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x(\cos 6x - \sin x) = 0$. Ecuația anterioară are soluțiile $\cos x = 0$ sau $\cos 6x - \sin x = 0$. Ecuația $\cos x = 0$ are soluțiile $x = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = S_1$.

Ecuația $\cos 6x - \sin x = 0. \Leftrightarrow \cos 6x = \sin x \Leftrightarrow \cos 6x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Ultima ecuație are soluțiile $6x = \left\{\pm\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \Rightarrow x = \left\{\pm\left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{6}\right) + \frac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = S_2$. Mulțimea de soluții a ecuației date este: $S = S_1 \cup S_2$.

8. Alte ecuații trigonometrice particulare

- **Ecuații care conțin pătrate de sinusuri sau (și) cosinusuri**

Se trece de la pătrate de sinusuri și cosinusuri la cosinusuri de arce duble după formulele: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ și $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

Exemplu: Să se rezolve ecuația: $\cos^2 3x + \cos^2 4x = 1$. Se trece de la pătrate de sinusuri și cosinusuri la cosinusuri de arce duble după formulele: $\cos^2 3x = \frac{1+\cos 6x}{2}$ și $\cos^2 4x = \frac{1+\cos 8x}{2}$.

Ecuația devine $\frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos 6x + \cos 8x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 7x \cos x = 0$ cu soluțiile $\cos 7x = 0$ sau $\cos x = 0$.

Ecuația $\cos 7x = 0$ are soluțiile $x = \left\{\pm\frac{\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = S_1$. Ecuația $\cos x = 0$ are soluțiile $x = \left\{\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = S_2$. Mulțimea de soluții a ecuației date este: $S = S_1 \cup S_2$.

- **Ecuații care conțin produse de sinusuri sau (și) cosinusuri.**

Se transformă echivalent ecuațiile înlocuind produsele prin sume după formulele:

$\sin x \cdot \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$;

$\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$;

$\sin x \cdot \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$;

Exemplu: Să se rezolve ecuația: $\cos 4x \cos 8x - \cos 5x \cos 9x = 0$. Se transformă produsele de cosinusuri în sume (conform formulelor de mai sus) și ecuația devine $\frac{1}{2}(\cos 12x + \cos 4x) - \frac{1}{2}(\cos 14x + \cos 4x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 12x - \cos 14x) = 0 \Leftrightarrow \cos 12x = \cos 14x$ $\Rightarrow 14x = \pm 12x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ecuația $14x = 12x + 2k\pi$ are soluțiile $x = \left\{\frac{k\pi}{13} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = S_1$. Ecuația $14x = -12x + 2k\pi$ are soluțiile $x = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = S_2$. Mulțimea de soluții a ecuației date este: $S = S_1 \cup S_2 = S_1$.

- **Ecuații care conțin sume de forma** $\sin^{2n} x + \cos^{2n} x,\ n \in \mathbb{N}^*$.

Se exprimă sumele respective în funcție de $\sin 2x$ cu ajutorul relației fundamentale $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ care se ridică la puteri convenabile.

De exemplu dacă ridicăm relația fundamentală la pătrat obținem: $\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x = 1$ $\Rightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2}$.

Exemplu: Rezolvați ecuația: $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$.

Ridicăm relația fundamentală $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ la puterea a 3-a și obținem: $\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^4 x \cos^2 x + 3\sin^2 x \cos^4 x = 1$. Înlocuind $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$ în relația

precedentă obținem $\frac{1}{4}+3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=1 \Rightarrow 12\sin^2 x\cos^2 x=3 \Rightarrow$ $4\sin^2 x\cos^2 x=1 \Rightarrow \sin^2 2x=1 \Rightarrow \sin 2x=1$ sau $\sin 2x=-1$.

Ecuația $\sin 2x=1$ are soluțiile $2x=(-1)^k \arcsin 1+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=\frac{\frac{\pi}{2}(-1)^k+k\pi}{2}$.

Dacă k este par $k=2p$, unde $p\in\mathbb{Z}$ atunci $x=\frac{\pi}{4}+p\pi,\ p\in\mathbb{Z}$.

Dacă k este impar $k=2p+1$, unde $p\in\mathbb{Z}$ atunci $x=-\frac{\pi}{4}+\frac{(2p+1)\pi}{2},\ p\in\mathbb{Z}$.

BIBLIOGRAFIE:

1. Ganga Mircea Matematică: Manual pentru clasa a X-a, TC+CD, Editura Mathpress, 2005;
2. Dumitru Savulescu . Trigonometrie si Geometrie - clasele IX-XII, Editura Meteor Press, 2006

TREI GENII ÎN VIAȚĂ (RETROSPECTIVA UNOR CONJECTURI REZOLVATE)

NECULAI STANCIU[1]

Motto:

Şi-oricât de-amărâţi să fim
Nu-i bine să ne dezlipim
De cel ce vieţile le-a dat !
O fi viaţa chin răbdat,
Dar una ştiu: ea ni s'a dat
Ca s'o trăim !''

George Coşbuc

Abstract
The international Company Creators Synetics composed in October of 2007, the top 100 living geniuses in science, politics, art and business. On top are two mathematicians *Grigory Perelman* (Russia) and *Andrew Wiles* (UK). The present article describes to briefly the landmarks in the history of the work on *Catalan's* problem and outlines *Mihăilescu's* brilliant solution.
Mathematics Subject Classification: MSC 01A05, 11Dxx
Keywords: History of Mathematics, Catalan's conjecture, Diophantine equation.

Compania internaţională Creators Synetics a alcătuit în octombrie 2007, topul celor 100 de genii în viaţă din domeniul ştiinţei, politicii, artei şi din mediul de afaceri. Primul loc a fost împărţit de inventatorul Internetului, *Sir Tim Berners-Lee* şi chimistul elveţian, *Albert Hofmann* - descoperitorul proprietăţilor halucinogene ale LSD. Pe ultimul loc figurează numele regizorului american *Quentin Tarantino*. În total, pe listă sunt 24 de britanici şi 43 de americani. Doar 15 dintre cele 100 de genii sunt femei. Cele 100 de genii au fost alese în funcţie de 5 factori - rolul jucat în schimbarea sistemului de viziune asupra lumii, recunoaşterea publică, forţa intelectului, succesele şi importanţa culturală.
În acest top sunt şi doi matematicieni *Grigory Perelman* (Rusia) şi *Andrew Wiles* (Marea Britanie). Meritele celor doi sunt demonstrarea a două conjecturi celebre. Termenul de conjectură a fost introdus de *David Hilbert*[2], în formularea celor 23 de probleme supuse spre

[1] Prof., Şc. "George Emil Palade", Buzău
[2] (n.23 ianuarie 1862, Königsberg, în Prusia, (acum Kaliningrad, Rusia) – d.14 februarie 1943) a fost un matematician german . Prin profunzimea ideilor şi a modului de exprimare, „Bazele geometriei" lui Hilbert a devenit cartea de temelie a matematicilor moderne şi metoda axiomatizării în sensul Hilbert a fost generalizată

rezolvare comunității internaționale a matematicienilor la al II-lea „Congres internațional al matematicienilor” din 1900 de la Paris. În mod obișnuit, prin conjectură se înțelege orice explicație presupusă a unui fenomen (eveniment) constituită fără certitudine și în afara oricărei dovezi (probe) plecând de la aparențe sau presupuneri. În acord cu Hilbert (autorul termenului de conjectură) se înțelege prin conjectură acea problemă deschisă care poate furniza arhitectura unei teorii în matematică (sau o direcție nouă) sau avansarea unui nou domeniu.

Pierre de Fermat[3]	**vs.**	**Sir Andrew John Wiles**[4]
(n.17 august 1601, Montauban, Franța - d.12 ianuarie 1665, Castres, Franța)		(n. 11 aprilie 1953, Cambridge, England Residence United Kingdom)

Pierre Fermat (părintele teoriei numerelor) a produs 48 conjecturi (trei s-au dovedit false) care au reprezentat probleme de cercetare pentru mulți matematicieni (*Gauss*[5], *Cauchy*[6], *Riemann*[7], etc). Ultima conjectură a lui *Fermat* (cunoscută ca Marea teoremă a lui Fermat) a fost că ecuația $x^n + y^n = z^n$ pentru n≥3 nu are soluții în Z \{0}.

---

pentru toate ramurile noi ale matematicii. Totuși, pentru ușurarea înțelegerii geometriei afine și euclidiene, astăzi se adoptă o construcție a geometriei cu ajutorul unei axiomatizări bazate pe algebra liniară. Acest fapt este în concordanță cu schimbările determinate de noul curriculum, de noul sistem de evaluare și de noile manuale.

[3] A fost un matematician francez, precursor al calculului diferențial, geometriei analitice și calculului probabilităților. Lui îi este atribuit într-o măsură mai mică calculul modern, în special, pentru munca sa referitoare la tangente și punct staționar. El este considerat câteodată "părinte" al calculului diferențial *și* al teoriei numerelor. A avut contribuții și în geometria analitică și probabilitate.S-a născut în orașul Beaumont-de-Lomagne.Tatăl lui era un bogat negustor de piei.Sub presiunea familiei,Fermat s-a îndreptat spre o carieră în administrația civilă.În 1631 a fost numit consilier la Departamentul de Solicitări din Toulouse.În 1652 a fost afectat de o formă a ciumei,care bântuia Europa acelor ani.A întreținut o vastă corespondență cu Digby,Wallis,Mersenne.

[4]Professor de matematică la Princeton University(USA), a obținut premii notabile :Fermat Prize (1995),Wolf Prize (1995/6),Royal Medal (1996),IMU Silver Plaque (1998),Shaw Prize (2005)

[5] Carl Friedrich Gauß, latinizat *Carolo Friderico Gauss*, (n.30 aprilie 1777, Braunschweig - d. 23 februarie 1855, Göttingen) a fost un matematician, fizician și astronom german celebru

[6] Augustin Louis Cauchy (n. 21 august 1789 - d. 23 mai 1857) a fost unul dintre cei mai importanți matematicieni francezi. A demarat un proiect important de reformulare și demonstrare riguroasă a teoremelor de algebră, a fost unul dintre pionierii analizei matematice și a adus o serie de contribuții și în domeniul fizicii. Datorită perspicacității și rigurozității metodelor sale, Cauchy a avut o influență extraordinară asupra contemporanilor și predecesorilor săi. Catolic și roialist fervent, manifestă o prezență socială activă

[7] Georg Friedrich Bernhard Riemann (n. 17 septembrie 1826 – d.20 iulie 1866) a fost un matematician german cu importante contribuții în analiza matematică și geometria diferențială, unele dintre ele deschizând drumul ulterior spre teoria relativității generalizate.

Marea teoremă a lui Fermat a fost enunțată de *Pierre de Fermat* în anul 1637, iar demonstrația completă a fost găsită de-abia 357 de ani mai tîrziu, în 1994 de către matematicianul englez *Andrew Wiles***.**

Pentru n=2, enunțul nu este adevărat. Există triplete de numere naturale (x,y,z) cu care se pot forma laturile unui triunghi dreptunghic; de aici, conform teoremei lui *Pitagora*, avem $x2 + y2 = z2$. De exemplu (3,4,5) sau (5,12,13). Există chiar o infinitate de astfel de triplete, forma lor generală fiind $x=2uv, y=u^2-v^2, z=u^2+v^2$, unde u şi v sunt numere naturale oarecare.

Pentru n>2, doar cazul n=4 admite o demonstrație elementară, schițată de Fermat însuşi. Chiar şi pentru cazul n=3 demonstrația depăşeşte nivelul manualelor de liceu; primul care s-a ocupat de cazul n=3 a fost matematicianul *Leonhard Euler*[8] în 1753.

În 1825, francezii *Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet*[9] şi *Adrien-Marie Legendre*[10] tranşează cazul n=5, demonstrația având ca punct de plecare o idee mai veche a lui *Marie-Sophie Germain*[11].

După câțiva ani, este finalizată demonstrația pentru n=7,de către francezul *Père de Gabriel Léon Jean Baptiste Lamé*[12]. La mijlocul secolului XIX, Academia Franceză instituie un premiu de 3000 franci (o sumă enormă atunci) pentru o demonstrație completă a teoremei.

Demonstrații pentru numere prime mai mici ca 100 au fost date aproximativ în aceeaşi perioadă,de către matematicianul german *Ernst Eduard Kummer*[13].

În 1908, magnatul german *Paul Wolfskehl* alocă uriaşa sumă de 100.000 de mărci celui ce va demonstra teorema ('oferta' fiind valabilă până în 2007). După apariția calculatoarelor electronice,au fost abordate cazuri particulare pentru valori tot mai mari ale lui n;prin anii 1980,erau elucidate toate cazurile în care n<4.000.000.

În ultimii ani de dinaintea găsirii demonstrației complete pentru orice n>2, matematicienii erau convinşi că prin metode elementare nu se mai poate aduce nimic nou.

În anul 1983, matematicianul german *Gerd Faltings*[14] a demonstrat că există cel mult o mulțime finită de contra-exemple la marea teoremă a lui *Fermat*.

În septembrie 1994, matematicianul englez *Andrew Wiles* a dat demonstrația completă a teoremei, după ce, în 1993, propusese o altă demonstrație, care se dovedise a fi greşită.

---

[8] (n. 15 aprilie 1707, Basel, Elveția - d. 18 septembrie 1783, Sankt Petersburg, Rusia) a fost un matematician şi fizician elvețian. Leonhard Euler este considerat a fi fost forța dominantă a matematicii secolului al 18-lea şi unul dintre cei mai remarcabili matematicieni şi savanți multilaterali ai omenirii. Alături de influența considerabilă pe care a exercitat--o asupra matematicii şi matematizării ştiințelor stau atât calitatea şi profunzimea, cât şi prolificitatea extraordinară a scrierilor sale, opera sa exhausivă (dacă ar fi publicată vreodată) putând cu uşurință umple 70 - 80 de volume de dimensiuni standard.

[9] (n. 13 februarie 1805 - d. 5 mai 1859) a fost matematician german, celebru prin contribuțiile valoroase în analiza matematică şi teoria numerelor.

[10] (n. 18 septembrie 1752 - d. 10 ianuarie 1833) a fost matematician francez, cunoscut pentru contribuțiile sale în domeniile: statistică, teoria numerelor, algebră abstractă şi analiză matematică.

[11] (n. 1aprilie 1776 – d. 27 iunie 1831) a fost o matematiciană franceză cu contribuții importante în geometria diferențială şi teoria numerelor.

[12] (n. 22 iulie 1795 – d.1 mai 1870) a fost un matematician francez

[13] (n.29 ianuarie 1810 – d.14 mai 1893) a fost un matematician german.

[14] Gerd Faltings-(n. 28iulie 1954 în Gelsenkirchen-Buer, Germania) – este un matematician german

Jules Henri Poincaré[15] **vs.** **Grigori Perelman**[16]

(n.29 April 1854 – d.17 July 1912)

(n.13 iunie 1966, Sankt Petersburg, Rusia)

În anul 2000, Institutul matematic Clay (USA) a lansat în cadrul unei Conferințe aniversare a centenarului congresului internațional al matematicienilor din 1900, un număr de 7 probleme (numite *problemele mileniului trei*[17]) spre rezolvare: fiecare problemă este cotată cu un premiu de 1000000 de dolari.Printre aceste şapte probleme se află şi *Conjectura Poincare.* În 1904 , *Poincaré* enunța faimoasa sa conjectură. Enunțul ei, în cazul cel mai general, este următorul:

O varietate simplu conexă din spatiul cu n+1 dimensiuni este homeomorfa cu o sfera n-dimensionala.

Pentru cazul mai general, pentru n>4, demonstrația a fost realizată de către *Zeman*[18]*(1962)*, *Stallings*[19] *(1960)*şi *Smale*[20]*(1960),* iar pentru cazul n=4 demonstrația a fost reuşită de către *Freedman*[21] în 1982. Rămăsese de demonstrat cazul în care n=3, adică varianta, aparent, cea mai simplă.

William Thurston[22], un matematician de la Princeton, a propus, pe la începutul anilor 1970, o clasificare a varietatilor 3-dimensionale. El considera ca atât timp cât varietatile 3-dimensionale pot avea diferite forme, ele nu vor „prefera" o anumita geometrie, întocmai ca o țesătura din mătase care va lua forma manechinului pe care este aşezată. El a afirmat că fiecare dintre varietățile 3-dimensionale poate fi descompusă în unul pâna la opt componente, inclusiv una de tip sferic, în sensul topologic al cuvântului. Avem acum de-a face cu o nouă conjectură, *„Conjectura geometrizării"*, care este o generalizare a *Conjecturii lui Poincaré*.

---

[15] A fost considerat un matematician universal cu contibuții în toate domeniile matematicii

[16] Talentat la matematica, urmeaza cursurile unui prestigios liceu leningradean renumit pentru specializarea sa în fizica si matematica. Rezultatele sale nu se lasa asteptate si, în 1982, devine membru al lotului sovietic pentru Olimpiada Internationala de Matematica si obtine medalia de aur cu scorul maxim posibil: 42 de puncte.
A refuzat Medalia Fields(2006) şi premiul de 1.000.000 de dolari oferit de Clay Mathematics Institute.

[17] Cele şapte probleme ale Mileniului stabilite de *Clay Institute* din Cambrige, Massachussetts sunt următoarele:P versus NP,Conjectura lui Hodge,Ipoteza Riemann,Existența "golului de masă" Yang-Mills,Problema de existență Navier-Stokes,Conjectura lui Birch-Sinnerton-Dyer,Conjectura lui Poincaré - singura rezolvată.

[18] Zeman

[19] John Stallings(n. 22 iulie 1935- d. 24 noiembrie 2008 în Berkeley) a fost un mathematician american. A primit Medalia Fields în 1966.

[20] Stephen Smale(n. 15 iulie 1930) – este un matematician american.A primit Medalia Fields în 1966.

[21] Michael Hartley Freedman (n. 21 aprilie 1951 în Los Angeles, California, U.S.) este matematician la Microsoft Station Q.În 1986, a primit medalia Fields pentru cercetarile sale referitoare la Conjectura Poincaré

[22] William Paul Thurston (n. 30 octombrie 1946)- este un matematician american.A primit Medalia Fields în 1982.

În 1982, anul în care *Thurston* primea *Medalia Fields*[23], un alt matematician, *Richard Hamilton*[24], de la Universitatea Cornell, propunea un program de demonstrare a Conjecturii geometrizării. El pleaca de la aşa-numita Curgere Ricci. *Hamilton* îşi propune să arate că o suprafaţă simplu conexă poate fi deformată continuu astfel încât oricare punct al ei să ajungă pe suprafaţa unei sfere (sfera în sensul larg, topologic). Problema era că pe măsură ce se aplica deformarea, în timp, se întâmpla să apară zone cu singularităţi. Aceste singularităţi îl împiedicau pe *Hamilton* să realizeze deformarea continuă pe care o dorea. Aici intervine articolul genial al lui *Perelman* din 2002, care are 39 de pagini. În „The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications" *Perelman* indica o cale prin care singularităţile pot fi făcute să dispară. El aplică un procedeu prin care marimile care intervin în deformare sunt "netezite".

Lucrarea lui *Perelman* nu a reprezentat demonstrarea completă a *conjecturii Poincaré,* ci numai realizarea unui schelet de demonstraţie. După mai multe dezvoltări, demonstraţia completă a fost realizată de către *Huai-Dong Cao*[25] şi *Xi-Ping Zhu*[26]. Demonstraţia, se întinde pe 328 de pagini. *Terence Tao*[27], profesor de matematică la Universitatea din California, spune că realizarea lui *Perelman* este "cea mai frumoasă demonstraţie pe care a văzut-o în ultimii zece ani".

Înainte de a muri, *Hilbert* a fost întrebat, dacă ar învia după 500 de ani, ce întrebare ar pune, şi el a răspuns: dacă a fost rezolvată *ipoteza lui Riemann*[28].

În ceea ce priveşte topul universităţilor (2007), există un clasament realizat de Times Higher Education Supplement (THES) si firma Quacquarelli Symonds (QS) (Universitatea din Bucuresti este singura universitate din România care a intrat în topul primelor 500 din lume, pe locul 472) şi un clasament realizat de Universitatea Jiao Tong din Shanghai (şi aici topul este împânzit de universităţile americane, în primele 10 poziţii ale topului, 8 sunt din Statele Unite, iar 2 din Marea Britanie). Cele mai multe universităţi din topul Shanghai sunt americane (159), urmate ca numar de cele britanice (42), germane (40), japoneze (31) şi de cele canadiene (21). Cu ocazia congresului matematicienilor români, Institutul de Matematica "Simion Stoilow" al Academiei Române a redactat un raport în care precizeaza: "Toate universităţile de top din America au cel puţin un profesor de matematică român şi peste 300 de profesori români de matematică predau la universităţile din Statele Unite, Franţa, Noua Zeelanda, Marea Britanie, Germania, Italia".

---

[23] Medalia Fields - Medalia Fields este cea mai importantă distincţie din lumea matematicii, fiind cunoscută ca un fel de Premiu Nobel pentru matematică. Medalia este datorată matematicianului John Charles Fields (1863-1932), care a propus în 1932, în cadrul unui congres internaţional al matematicienilor care a avut loc la Toronto, înfiinţarea unei distincţii care să recompenseze realizările majore din matematică. La moartea sa, în 1932, a lăsat drept moştenire toate bunurile pentru a finanţa medalia care avea să îi poarte numele. Spre deosebire de Premiul Nobel, care se acordă anual, Medalia Fields este atribuită la fiecare 4 ani, în cadrul unui congres internaţional de matematică. De menţionat că medaliaţii Fields trebuie să aibă o vârstă mai mică de 40 de ani.

[24] Richard Streit Hamilton (n.1943) – este un matematician american. A fost ales membru în National Academy of Sciences în 1999 şi în American Academy of Arts and Sciences în 2003.A primit premiul AMS Leroy P. Steele Prize în 2009.

[25] Matematician de origine chineză – activează la Departamentul de Matematica al Universităţii, Lehigh, SUA

[26] Matematician de origine chineză – activează la Departamentul de Matematică al Universităţii Zhongshan, Guangzhou, China

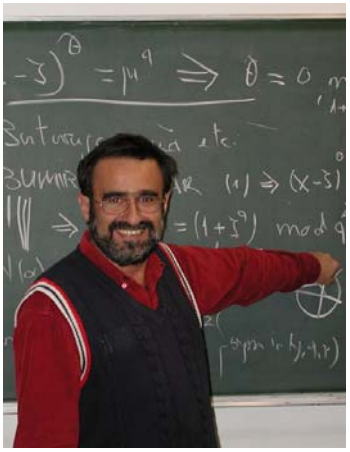
[27] Terence Chi-Shen Tao (n. 17 iulie 1975, Adelaide, South Australia) este un matematician australian (supranumit "Mozart" în matematică).În august 2006, a primit Medalia Fields, iar o lună mai târziu a primit premiul MacArthur Fellowship. A fost ales a Fellow of the Royal Society pe 18 mai 2007 şi în acest an (2009) devine member of American Academy of Arts and Sciences .Cel mai tânar profesor de matematică (24 de ani).

[28] ipoteza lui Riemann - Funcţia: $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$,unde $s\in\mathbf{C}$ are zerourile în **C** situate pe drepte $s=\frac{1}{2}+bi$ cu $b\in\mathbf{R}$.Această conjectură reprezintă cea mai importantă şi dificilă problemă a matematicii contemporane.

Statistica elaborată de Institutul de Matematică, arată în continuare: "În domeniul matematicii sunt mai puţin de 500 de absolvenţi de studii superioare anual, din care 10-20 intră în cercetarea matematică. De ani buni se manifestă o migraţie aproape totală a "supercreierelor" din domeniu spre universităţile din SUA şi Europa de Vest încă din primii ani de după facultate sau chiar după liceu”.

Un astfel de matematician român (după unii specialişti cel mai bine cotat tânăr matematician român) este *Daniel Tătaru*[29]. Matematicianul , a fost un pretendent român la “Nobelul matematicii”. Chiar dacă l-a ratat, Tătaru rămîne un candidat serios la recunoaşterea mondială. În 2002 a primit prestigiosul Premiu Bocher, distincţie acordată la fel de greu, o dată la trei ani, în acelaşi timp cu *Terence Tao*, cel cu care a făcut echipă în cercetare la Princeton între 1995 şi 1997.

Eugène Charles Catalan[30] **Vs.** **Preda Mihăilescu**[31]



’’Dacă o luăm băbeşte, în vara lui 1999 am aflat de conjectura lui *Catalan* şi m-am dumirit - printr-un prim rezultat parţial, care a făcut un oarecare impact - că mă poate interesa. În toamna lui 2001 o terminasem, deci doi ani. ’’

Preda Mihăilescu

(din interviul luat pentru Evenimentul Zilei de *Dan Arsenie* la data de 16 decembrie 2009)

Teoremă.

Ecuaţia

$$x^u - y^v = 1, \qquad (1)$$

are în mulţimea numerelor naturale soluţia unică $(x, y; u, v) = (3,2;2,3)$.

---

[29] (n. 6 mai 1967, Piatra Neamţ). La Princeton, unde Daniel Tătaru a efectuat studiile postdoctorale, lucrează englezul *Andrew Wiles* şi a lucrat începînd din 1993 şi rusul *Grigori Perelman* .

[30] S-a născut în Bruges (acum oraş Belgian) la data de 30 mai 1814 şi a decedat în oraşul belgian Liège la data de 14 februarie 1894.Studiază matematica în Paris la École Polytechnique avându-i ca profesori favoriţi pe *Joseph Liouville*(1809 – 1882) şi pe *Jacques Charles François Sturm*(1803 – 1855).Obţine doctoratul în matematică în 1841.Studentul său preferat a fost *Ernesto Cesàro*(1859 – 1906) cu care a corespondat pe tot parcursul vieţii(a trimis între 1890-1894, 52 de scrisori şi a primit de la *Cesàro* 7 răspunsuri)

[31] S-a născut în Bucureşti (23 mai 1955).În 1973 a părăsit România şi s-a stabilit în Elveţia.Studiază matematica şi informatica la Universitatea Eidgenössische Technische Hochschule din Zürich. Obţine doctoratul în 1997 cu lucrarea *Cyclotomy of Rings and Primality Testing*, scrisă sub îndrumarea matematicienilor *Erwin Engeler*(1930-)şi *Hendrik Lenstra*(1949-).Pentru o perioadă, a fost cercetător la Universitatea din Paderborn, Germania. Din 2005 este profesor la Universitatea *Georg August* din Göttingen.

Ecuația din teoremă a fost demonstrată în cazul special $x = 3, y = 2$, de către *Gersonides*[32], în anul 1343.Aproximativ cu 100 de ani înainte de *Catalan*, *Leonhard Euler* (1707-1783) rezolvă ecuația diofantică

$$x^3 - y^2 = \pm 1 \qquad (x > 0, y > 0) \qquad (2)$$

Ecuația (2) a fost recent rezolvată şi cu ajutorul metodelor de teorie algebrică a numerelor.În 1844, *August Leopold Crelle*(1780–1855), editorul *Crelle's Journal* , prestigioasa revistă (apare în limbile germană-engleză-franceză) cunoscută astăzi ca *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (în engleză: *Journal for Pure and Applied Mathematics*), primeşte de la *Catalan* o scrisoare "*…I beg you, sir, to please announce in your journal the following theorem that I believe true although I have not yet succeeded in completely proving it; perhaps others will be more successful. Two consecutive whole numbers, other than* 8 *and* 9, *cannot be consecutive powers; otherwise said, the equation* $x^m - y^n = 1$ *in which the unknowns are positive integers only admits a single solution...".*Editorul publică nota în [1] devenind o faimoasă conjectură.Fiind o provocare pentru matematicieni, au început să apară rezultate interesante pentru anumite cazuri particulare.Mai întâi s-a observat că ecuația este echivalentă cu

$$x^p - y^q = 1 \qquad (x > 0, y > 0)\text{, iar } p \text{ şi } q \text{ sunt numere prime} \qquad (3)$$

Cazul $q = 2$, a fost rezolvat de către matematicianul *V.A. Lebesgue* în 1850([7]).
După peste 100 de ani, în 1964, *Chao Ko*(1910-2002), rezolvă cazul $p = 2$ ([2]).
De aici înainte ecuația de rezolvat se consideră

$$x^p - y^q = 1 \qquad (xy \neq 0,\text{ iar } p \text{ şi } q \text{ numere prime impare}) \qquad (4)$$

J.W.S Cassels(1922-)consideră ecuația (4) de forma

$$(x-1)\frac{x^p - 1}{x-1} = y^q \qquad (5)$$

şi observă că cel mai mare divizor comun ai celor doi factori din membrul stâng poate fi 1 (*cazul I*) sau p (*cazul II).*În 1960 ([3]), demonstrează faptul că ecuația (4) nu are soluții în *cazul I* (deoarece sistemul $x - 1 = a^q, \frac{x^p - 1}{x-1} = b^q, y = ab$ nu are soluție).

În continuare se studiază numărul soluțiilor (x, y) pentru p şi q fixați.Se merge pe o ideie a lui *Alan Baker*(1939-) [33] de aproximare a logaritmilor şi *Robert Tijdeman*(1943-) în [11] demonstrează că ecuația (4) are cel mult un număr finit de soluții(pentru $p < 7 \cdot 10^{11}$ şi $q < 7 \cdot 10^{16}$, când $p < q$).Avem deci de la *Tijdeman* margini superioare pentru p şi q .
S-au căutat mai departe condiții noi pentru p şi q şi s-au găsit şi margini inferioare ([6]).Se arată că $p, q > 10^6$, apoi $p, q > 3 \cdot 10^8$ şi în [8] se determină $\max(p, q) \approx 8 \cdot 10^{16}$ respectiv $\min(p, q) > 10^7$ (pentru determinarea marginilor inferioare s-a utilizat *condițiile Wieferich*[34]).În [9], *Preda Mihăilescu*, demonstrează că congruențele *Wieferich*[35] au loc fără condiții de clasă.Crucial pentru demonstrația finală, care foloseşte rezultate din teoria grupurilor *Galois* şi a corpurilor ciclotomice ([10]) a fost estimarea $|x| > q^p$ ([4] şi [5]).Scrisoarea trimisă de *Catalan* primeşte un răspuns de la *Mihăilescu* şi în *Journal für die*

---

[32] *Rabbi Levi Ben Gershon*(1288—1344) - astronom spaniol de origine evreească

[33] primeşte medalia Fields în 1970 la vârsta de 31 de ani

[34] $p^{q-1} \equiv 1 (\bmod q^2); q^{p-1} \equiv 1 (\bmod p^2)$

[35] *Arthur Josef Alwin Wieferich* (1884-1954) –matematician german

reine und angewandte Mathematic(Crelles Journal) în 2004 (volume 2004, Issue 572, pages 167-195).Schița demonstrației se poate găsi liber pe internet la adresa [12].

Remarcă. La începutul lui 2010 *Preda Mihăilescu* aşteaptă finalizarea procesului de revizie a demonstrației conjecturei *Leopoldt* [36]([15],[16]) al cărei schiță de demonstrație(încă nevalidată) se găseşte gratuit la adresa [17] respectiv cu explicații la adresa [18].
Şi nu se va opri aici:
'' ...lucrez la o teorie care în matematica va prinde foarte bine, va fi utilă şi binevenită. Este în curs de verificare şi specialiştii îşi iau timp să o înțeleagă. Dacă lucrurile sunt cum le văd eu, se va produce o profundă şi aşteptată simplificare, care pe specialişti îi va bucura cu siguranță. Dar mai multe voi putea împărtăşi peste un an."

Preda Mihăilescu

(din interviul luat pentru Evenimentul Zilei de *Dan Arsenie* la data de 16 decembrie 2009)

BIBLIOGRAFIE[37]

[1] E. Catalan, *Note extraite d'une lettre adressée à l'éditeur*, J. Reine Angew. Math. **27** (1844), 192.
[2] Chao Ko, *On the Diophantine equation* $x^2 = y^n + 1, xy \neq 0$, Sci. Sinica (Notes) **14**(1964), 457-460.
[3] J.W.S. Cassels, *On the equation* $a^x - b^y = 1$, *II*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **56** (1960), 97-103.
[4] S. Hyyrö, *Über das Catalansche Problem*, Ann. Univ. Turku, Ser. A I no. 79 (1964), 8 pp.
[5] S. Hyyrö, *Überdie Gleichung* $ax^n - by^n = z$ *und das Catalansche Problem,* Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A no. 355(1964), 50 pp.
[6]K. Inkeri, *On Catalan's conjecture*, J. Number Theory **34** (1990), 142-152.
[7] V.A. Lebesgue, *Sur l'impossibilité en nombres entiers de l'équation* $x^m = y^2 + 1$, Nouv. Ann. Math. **9** (1850), 178-181.
[8] M. Mignotte, *Catalan's equation just before 2000*, Number Theory (Turku, 1999), de Gruyter, Berlin, 2001, pp. 247-254
[9]P. Mihăilescu, *A class number free criterion for Catalan's conjecture*, J. Number Theory **99** (2003), 225-231.
[10] P. Mihăilescu, *Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture*, prprint (September 2, 2002), submitted.
[11] R. Tijdeman, *On the equation of Catalan*, Acta Arith. **29** (1976), 197-209.
[12] http://www.dpmms.cam.ac.uk/Seminars/Kuwait/abstracts/L30.pdf

[36] *Heinrich-Wolfgang Leopoldt* (1927-) -matematician german

[37] Pentru detalii mai complete se poate studia şi bibliografia din [13], respectiv [14]

[13] T. Metsänkylä, *Catalan's conjectur: another old diophantine problem solved,* Bulletin of the American Mathematical Society **41** (1): 43–57. http://www.ams.org/bull/2004-41-01/S0273-0979-03-00993-5/S0273-0979-03-00993-5.pdf.
[14] Y. F. Bilu, *Catalan's conjecture (after Mihăilescu)*, Sém. Bourbaki, **55**ème année, nr. 909 (2002/03), 24 pp.

[15]http://londonnumbertheory.wordpress.com/2009/11/08/leopoldts-conjecture/
[16] http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0905/0905.1274v3.pdf
[17]http://londonnumbertheory.files.wordpress.com/2009/11/mihailescu.pdf
[18] http://londonnumbertheory.files.wordpress.com/2009/12/mihailescu2.pdf
*** www.mateinfo.ro
*** Wikipedia, enciclopedia liberă

SUFLETUL MOROMETIAN SI LOGICA MATEMATICA

Prof. Anghel Aurora

Scoala cu cls I-VIII,,Marin Preda'' Silistea Gumesti

MOTTO

. ***,,*** *Începutul* si *Sfarsitul* sunt intr-o armonioasa logica matematica''

1.Marin Preda, marele prozator al secolului XX, a fost întotdeauna interesat si de politică. El a ajuns deputat in M.A.N avand astfel ocazia de a practica şi cel de-al doilea lucru ce-l pasiona,politica. Aflați anul în care a fost ales deputat, ştiind că este divizibil cu 15, şi că cifrele unităților şi zecilor sunt consecutive

2. Casa in care s-a nascut ***Marin Preda*** avea o curte foarte pioreasca sub forma unui trapez dreptunghic cu baza mare de 40m,baza mica de 30m si un unghi de 120^0.După moartea lui, ***Iliaca,*** singura sora ramasa in viata, a cultivat pamantul astfel: 1/3 lucerna, 0,5 ari gradina cu legume.Stiind ca suprafata ocupata de casa era de $40m^2$, care este suprafata curtii ramasa necultivata ca batatura?

3.Toamna, ***Catanoiu***, om gospodar al satului, isi aranja fanul cules de pe camp in capite sub forma unui con cu generatoara de 10m si unghiul de la varf de 120^0. Stiind ca intr-un an el a avut 5 capite de fan de acelasi fel si trei vaci; o vaca consumand in medie $0,5m^3$ de fan pe zi, cate zile putea hrani el vacile pe care le avea?

4.In acei ani insa se intoarse intr-o zi in sat un general''**(** M*orometii* vol. II pag 377) Generalul este ***Dragnea Marin,*** fost coleg de scoala generala cu Marin Preda,care de la o varsta frageda s-a inrolat copil de trupa in armata. Aflati la ce varsta a devenit copil de trupa stiind ca aceasta reprezinta suma numerelor consecutive pitagoreice

5. " ***Niculae*** ii dadea acum cuie lui ***Paraschiv*** . Inr-o vreme nu se stie ce vazu el la fratele sau ca in loc sa tie cuiele cu virful in jos,cum le tinuse pina atunci, le intoarse si zimbind viclean ,le tinu in asa fel ca Paraschiv cind intinse mina se intepa in

ele.”(*Morometii* vol.I pag 194)Presupunem ca ei faceau un gard iar pina la amiaza batusera 120 de uluci ceea cereprezenta 2\3 din totalul ulucilor ce trebuiau batute si pina seara au terminat gardul iar pentru o uluca foloseau 4 cuie, cite cuie au folosit ei ?

6.La Premilitara, ***Toderici*** avea o mare dilema. Cand ii aseza pe recruti cate doi in banca, ramaneau 5 in picioare, iar daca ii grupa cate trei in banci, ramaneau doua banci goale.Cati recruti si cate banci erau?

7.’’In cancelarie era strins intreg corpul didactic al scolii. Parohul ***Petre Provinceanu*** si parohul ***Andrei Balan*** ,dintre care primul cu sotia , invatatoare in sat ,erau si ei aici. Preoteasa era numita doamna Lily . Apoi tinerii invatatori ***Badila Aurel*** si ***Enachescu Adrian*** ,dintre care al doilea cu sotia ,tot invatatoare. Ea era numita doamna lui dom’ invatator ***Enâchescu’’***.(*Morometii* vol. I pag 225)Presupunem ca numarul cadrelor didactice este dat de un numar natural format din doua cifre ,iar cifra unitatilor este un numar prim par si succesoarea cifrei zecilor ,cite cadre didactice erau in cancelarie ?

8.Cocosila si ***Tugurlan*** au impreuna oi si rate, in total 60 de capete si 180 de picioare.Cate oi si cate rate au ei impreuna ?

9.In ***Poiana lui Iocan*** se facea politica, iar forma poienii era ca un romb cu latura de 12m si un unghi de 60^0 Ce suprafata avea aceea poiana?

10.In ***Poiana lui Iocan***,Iocan potcovea caii din comuna Silistea Gumesti si de prin alte sate Presupunand ca el potcovea intr-o zi 1 cal iar in fiecare zi dublul zilei precedente in cite zile ar fi potcovit el toti caii din tara (sa zicem 4 194 303 cai)sau toti caii de pe Pamint (sa zicem 1 073 741 823 cai) ?