# DEZVOLTAREA APTITUDINII MATEMATICE LA ELEVI

Prof. Udma Arleziana

Colegiul Tehnic "Anghel Saligny",
Roşiorii de Vede, Teleorman

Dat fiind rolul pe care îl au aptitudinile în activitatea omului, necesităţile practice au generat încă din cele mai vechi timpuri un viu interes faţă de problema acestor particularităţi ale personalităţii. Aptitudinea este o formaţiune psihologică complexă la nivelul personalităţii, care, bazată pe un anumit nivel de organizare şi funcţionalitate al proceselor şi funcţiilor psihice – modelate sub forma unui sistem de acţiuni şi operaţii interiorizate constituit genetic conform modelului extern al unui anumit gen de activitate – şi pe o dinamică specifică a elementelor sale componente, ca urmare a interacţiunii continue cu sistemul de solicitări al activităţii, facilitează un comportament eficient al individului în cadrul acestei activităţi.

Ca orice ştiinţă, matematica a fost creată de om. Prin urmare, apariţia matematicii, chiar şi în formele sale iniţiale, a fost condiţionată de existenţa capacităţii omului de a desprinde din realitatea obiectivă anumite relaţii cantitative şi de a opera cu ele. Aptitudinea matematică reprezintă o componentă specifică a personalităţii, o substructură a acesteia, relativ independentă, formată din componente cognitive, afectiv-motivaţionale şi volitive, elaborată în ontogeneză prin adaptări succesive ale copilului şi tânărului la modelele matematicii externe, oferite de societate şi, care, pe măsura constituirii, facilitează obţinerea de performanţe şcolare, eventual şi profesionale, superioare mediei elevilor de aceeaşi vârstă sau persoanelor cu o pregătire şcolară similară. Referindu-ne la învăţarea matematicii în şcoală, constatăm că există elevi care, încă din primele etape ale învăţării aritmeticii,dau dovadă de multă uşurinţă şi rapiditate în privinţa înţelegerii şi operării cu numere şi relaţii cantitative, în timp ce alţii se descurcă mult mai greu. Dar aceasta nu înseamnă că cei din a doua categorie nu ar dispune de un minim de aptitudini pentru înţelegerea cunoştinţelor matematice cuprinse în programele şcolii primare sau chiar ale liceului şi nici că problema aptitudinilor matematice ar fi aici lipsită de conţinut specific. Metodele şi măiestria pedagogică joacă un rol hotărâtor în reuşita matematică a elevilor, însă aceasta nu explică totul. La acelaşi profesor şi în aceleaşi condiţii de şcolarizare, unii elevi obţin performanţe deosebite, adesea mult superioare mediei clasei din care fac parte, în timp ce alţii abia reuşesc să facă faţă unor cerinţe minime, deşi efortul depus poate fi la fel de substanţial. Desigur, relaţiile dintre cele două grupe de elevi, mai exact dintre factorii care determină diferenţierea lor, sunt mult mai complexe. Simplificarea făcută nu are alt scop decât de a scoate în evidenţă importanţa care trebuie acordată problemei aptitudinilor matematice şi muncii diferenţiate cu elevii.

Aptitudinea matematică nu poate exista fără matematică, deci această creaţie umană pe plan social istoric are caracter primordial. Omul poate fi înzestrat într-o măsură mai mică sau mai mare cu premisele fiziologice şi psihologice ale aptitudinii matematice, dar însăşi aptitudinea se structurează pe baza acestor premise numai în urma contactului activ cu matematica, în urma activităţii în domeniul matematicii. Matematica, în continuă dezvoltare, determină structurarea tot mai eficientă a aptitudinii matematice. „Omul nu se naşte cu aptitudini matematice. Ereditar sunt determinate doar potenţialităţile unor procese cognitive, a unor particularităţi ale proceselor de gândire. În contactul activ cu lumea obiectelor şi fenomenelor naturale, cu societatea, cu tehnica şi cultura, din aceste potenţialităţi se realizează treptat aceste funcţii psihice, cum ar fi, de exemplu, cea de analiză şi sinteză, de abstractizare şi generalizare, de raportat la variabil, capacitatea tranzitivităţii, capacitatea de a realiza grupări, serieri, etc. prin acestea se creează condiţiile subiective ale receptivităţii faţă de matematică.”

A stabili ce pondere anume au în structura aptitudinilor matematice cele două grupe de factori este, desigur, aproape imposibil. Termenii puşi în relaţie nu au conţinuturi clar distincte, iar interacţiunea lor îmbracă forme individuale de manifestare. Foarte probabil, rolul factorilor ereditari este maxim, în cazul matematicienilor de geniu şi minim sau mediu în cazul oamenilor obişnuiţi.

Eficienţa procesului de structurare a aptitudinii matematice depinde de mai mulţi factori. În primul rând depinde de gradul de dezvoltare a funcţiilor mentale necesare pentru constituirea aptitudinii matematice (analiză – sinteză, generalizare, abstractizare, capacitatea de concentrare, etc.). Bineînţeles, la rândul lor, şi aceste funcţii mentale depind de potenţialităţile ereditare şi de condiţiile în care aceste potenţialităţi se realizează.

În al doilea rând, eficienţa procesului de structurare depinde de felul contactului cu matematica, de măsura în care acest contact are un caracter activ sau pasiv, de metodele învăţământului matematic etc. Structurarea aptitudinii matematice depinde şi de factorii motivaţionali ca interesul, aspiraţiile, perseverenţa subiectului, precum şi de satisfacţiile pe care acesta le găseşte în preocupările matematice.

Un rol deosebit poate să aibă, în formarea aptitudinilor matematice, personalitatea profesorului de matematică care, prin măiestria sa pedagogică, poate să contribuie, nu numai nemijlocit, la formarea calităţilor intelectuale necesare în activitatea matematică a elevilor, ci şi mijlocit, prin crearea interesului, prin încurajare, adică prin intermediul factorilor motivaţionali.

Alt rol important în dezvoltarea aptitudinii matematice îl are factorul interpersonal, adică relaţiile dintre elev şi profesor, precum şi factorul emoţional. Activitatea în domeniul matematicii solicită o încordare mentală destul de serioasă şi stările de anxietate, emoţiile puternice, create în relaţiile interpersonale neadecvate dintre elev şi profesor, nu pot decât să inhibe structurarea eficientă a aptitudinii matematice.

În concluzie, aptitudinile matematice, asemănător cu celelalte aptitudini, reprezintă o structură care se realizează pe baza potenţialităţii, dar numai în cursul şi în urma activităţii, deci, ele trebuie privite ca rezultate ale dezvoltării, ale interacţiunii dintre individ şi condiţiile sale de mediu socio – economic, ştiinţific, tehnic şi cultural. Caracterul lor, mai mult sau mai puţin creator, depinde de felul în care se realizează modelarea potenţialităţilor ereditare de către factorii ambientali, de conţinutul şi caracteristicile activităţilor desfăşurate de copil – a celei de învăţare a matematicii, în primul rând. La baza înţelegerii procesului de formare şi dezvoltare a aptitudinilor matematice se află ideea că între conţinutul învăţării şi capacităţile intelectuale ale copilului există strânse raporturi de determinare, de condiţionare reciprocă. Acumularea de cunoştinţe, priceperi şi deprinderi duce la dezvoltarea şi transformarea calitativă a schemelor de cunoaştere şi acţiune matematică, iar acestea, la rândul lor, reglează cantitatea şi calitatea achiziţiilor şcolare. Efectul învăţării devine maxim când între cei doi termeni ai relaţiei se stabileşte un echilibru optim, ceea ce se poate realiza prin modul de organizare a activităţii şi prin folosirea celor mai adecvate căi şi mijloace de instruire şi educare.

Dintre metodele moderne, mai frecvent şi insistent indicate pentru cultivarea aptitudinilor matematice la elevi, menţionăm: trecerea treptată de la acţiuni concrete (cu obiecte materiale sau materializate) la operaţii abstracte, de la date şi condiţii evidente la cerinţe şi relaţii implicate, ascunse, de la necunoscute simple la nedeterminări ample, complexe; folosirea de metode şi procedee euristice; învăţarea prin cercetare-problematizare; formularea de probleme, unele cu date şi relaţii cunoscute, altele cu caracter propriu.

O preocupare de larg interes, atât pentru profesori, cât şi pentru elevi, o constituie cunoaşterea aptitudinilor matematice în activitatea de învăţare şcolară. Dintre metodele mai des folosite în acest scop menţionăm următoarele: analiza notelor şcolare, testele de aptitudini şi cunoştinţe(aplicate colectiv), observarea şi fişele de observaţie şi probele formative(aplicate individual).

*Bibliografie:*

Mitrofan, N. – Aptitudinea pedagogică, Ed. Academiei Române, Bucureşti, 1988

# TRIGONOMETRIA IN EUROPA

Profesor Ane Marie Zachiu-Bucuresti

Originea trigonometriei se consideră a fi în cultura antică din Egipt, Babilon şi Valea Indului, acum mai mult de 3000 de ani. Matematicienii indieni au fost pionerii calculului algebric, cu aplicații în astronomie şi în trigonometrie. Lagadha e unicul matematician cunoscut care a utilizat geometria şi trigonometria pentru astronomie în cartea sa Vedanga Jyotisha, cu toate că multe din lucrările sale au fost distruse de către invadatorii Indiei.

Astronomii babilonieni au păstrat înregistrări detaliate cu privire la mişcarea stelelor şi a planetelor, a eclipselor solare şi lunare, ceea ce a necesitat familiaritate cu distanțe unghiulare măsurate pe bază sferelor cereşti. În baza interpretării tăbliței cuneiforme Plimpton 322 (c. 1900 i.Hr.), există voci care au afirmat că babilonienii antici aveau un tabel de secanți.

Şi în papirusuile egiptene apar primele însemnări legate de probleme trigonometrice, cum ar fi papirusul Rhind (aprox 1650 i.Hr.) ce conține probleme legate de calcule trigonometrice folosite la construcția piramidelor.

Adevărații părinți ai trigonometriei sunt vechii greci; Hiparchus din Niceea a scris primele tabele de corespondență între valorile unui arc şi coardă pentru o serie de unghiuri. Aristarh din Samos a măsurat unghiurile mult mai exact decât predecesorii săi până la fracțiuni de unități.

Lucrările de trigonometrie din țările Islamului au pătruns în Europa mai întâi prin Spania, fiind aduse aici de mauri. Pe măsură ce Spania se elibera de stăpânirea arabă, aceste lucrări au putut fi cunoscute şi traduse în limba latină. În secolul al XII-lea, s-a tradus Almagesta, iar in secolul al XIII-lea Regele Alfons al X-lea a sprijinit traducerea din arabă în latină a multor lucrări ştiințifice şi tot sub obladuirea să, savanții curții au întocmit tabele astronomice, care curpindeau şi pe cele trigonometrice, bazându-se desigur pe calculele savanților arabi. Aceste tabele, rămase în istorie drept „Alfonsiene” au fost larg răspândite, circulând sub formă de manuscris până în 1483, când au apărut în prima ediție tipărită - ediție succesiv retipărită în variantă originală până în sec al XVI lea. Aceste tabele au stranit un viu interes în lumea ştiințifică a timpului, aceasta explicându-se prin faptul că erau absolut necesare observației astronomice propriu-zise, dar aveau şi o mare aplicație practică, în special în arta navigației care începe să prefigureze era marilor descoperiri geografice. Acum, când începe o amplă „campanie ” de explorare şi acoperire a petelor albe de pe hartă, marinarii aveau neapărat nevoie să cunoască cu precizie poziția soarelui în timpul zilei şi a stelelor în timpul nopții, pentru a putea calcula poziția navei şi direcția de mers. Tot secolul al XIII lea vede o raspndire a manuscriselor învățaților arabi, parțial favorizată de primele începuturi timide ale Reconquistei spaniole, dar mai ales de relațiile comerciale dintre creştinătate şi lumea arabă. În decursul secolelor XIII-XV, până la apariția tiparelor, ediții copiate de mână ale acestor lucrări se răspândiseră deja în marile centre universitare ale Europei. Ele erau folosite în facultățile timpului, cum erau Sorbona, Cambridge, Viena şi Padova dacă e să cităm doar pe cele mai cunoscute, iar unii profesori, pe baza lor încep să scrie lucrări noi, adaptate societatii europene a timpului.  Jordanus Nemorarius care activa la universitatea din Paris a scris o lucrare de geometrie în patru volume intitulată „Despre triunghiuri", Leon Ghershon scrie o lucrare de trigonometrie în limba ebraică, ulterior tradusă în latină iar Dominico Clavasio scrie în sec XIV „Practica geometriei", ce conține elemente de trigonometrie.

Primul profesor care a predat ca disciplină de studiu trigonometria a fost G. Peuerbach(1423-1461) care a activat la Universitatea din Viena. Lui îi aparține lucrarea „Tratat despre propozițiile lui Ptolemeu despre sinus şi coarde". Tot el a corectat şi tabelele alfonsiene şi a calculat o tabelă de sinusuri exprimate cu ajutorul fracțiilor zecimale.

Începând cu veacul al XVI lea, apar lucrările de trigonometrie în limbile naționale, în paralel cu diverşi autori corectând şi în acelaşi timp îmbogățind tabelele deja existente. Astfel, G. I. Rheticus profesor la Universitatea din Wuttenberg şi elev al lui Copernic a publicat în 1596 diverse tabele trigonometrice şi a dedus formule noi ce simplificau calculul acestora. Un impediment important pe atunci era găsirea unei formule matematice - până atunci trigononetria se baza exclusiv pe cuvinte - ce a fost depăşit odată cu introducerea notațiilor algebrice de către Viete şi Descartes.

În 1614, John Neper revoluționează trigonometria prin introducerea conceptului de Logaritm, care inițial au fost introduşi pentru simplificarea calculelor trigonometrice - prima tabelă de logaritmi fiind o tabelă de logaritmi ai sinusurilor. Abia ulterior apar primii logaritmi ai numerelor. În 1633 H Gellibrand tipăreşte lucrarea „Trigonometria britanica" în care detaliază principalele cazuri de rezolvare a triunghiurilor plane şi sferice, indicându-se formulele calculabile prin logaritmi, aplicabile în fiecare caz în parte.

## Trigonometria în Țările Române

Una din primele instituții de învățământ superior din Țările Române a fost Academia de la Cotnari, înființată de către Despot Vodă în 1562, unde s-a dorit introducerea unui curs de trigonometrie printre materiile de studiu, lucru din păcate nerealizat.

În veacul al XVII-lea, la Iaşi şi la Bucureşti au funcționat Academiile domneşti cu predare în limba greacă; în 1760 este menționat ca materie de studiu trigonometria, predata printre alții de către Neculai Cercel şi Nechifor Theotochis, profesori cu studii în Italia ce au tradus în limba greacă manualele de trigonometrie ale timpului. Tot acum apar şi primele traduceri în limba română ale unor asemenea manuale. După reforma lui Ipsilanti din 1775, ce prevedea predarea disciplinelor de învățământ şi în alte limbi europene, profesorul Manasse Eliad predă în Țara Românească trigonometria după cursul lui Vito Caravelli. Un interes deosebit îl prezintă manuscrisele şi însemnările de trigonometrie ale lui Gheorghe Asachi şi Gheorghe Lazăr, inițiatorii primelor şcoli de inginerie în limba romană. În 1818 Gheorghe Lazăr a deschis la Bucureşti Şcoala de inginerie hotarnică romanescă şi a elaborat în 1821 un manual de trigonometrie folosit în predare - o traducere a manualului de Trigonometrie plană de G.I. Metzburg.

Prima trigonometrie tipărită în româneşte a apărut în anul 1850,în tipografia Colegiului Sf Sava din Bucureşti. Această carte, având 172 de pagini şi 6 planşe cu figuri, e intitulată: „Elemente de trigonometrie drept liniata şi sferică culeasă de D. P.” Autorul,în modestia lui, nu a ţinut să-şi scrie numele altfel decât prin iniţiale, dar în istoria matematicilor româneşti strădania lui i l-a înscris întreg : Dimitrie Pavlid.

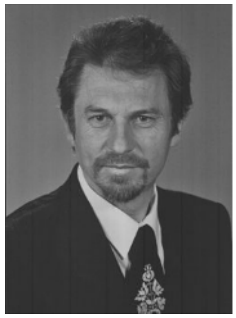
Altă carte importantă în istoria trigonometriei româneşti a apărut la Bucureşti în 1873, fiind întocmită de Spiru C. Haret ( 1851-1912 ), unul dintre renumitii noştri oameni de ştiinţă. Spiru Haret a gândit această carte încă de pe când era elev la liceu ,îndemnat fiind de faptul că nu exista nici un manual de trigonometrie, cartea lui D. P. fiind epuizată. În 1869 când a devenit student la matematică şi în acelaşi timp profesor de liceu, el a prelucrat trigonometria concepută cu câţiva ani înainte şi a tipărit-o în 1873 cu titlul: „Curs de trigonometrie „. Volumul are 333 de pagini şi cuprinde trigonometria plană şi sferică. Succesul acestei cărţi scrisă clar şi într-un stil uşor de urmărit se poate vedea din faptul că a fost folosită în învăţământ timp de 70 de ani, ajungând în 1943 la ediţia a XVII-a.

În anii care au urmat mulţi alţi matematicieni români s-au consacrat studiului trigonometriei şi au avut realizări importante însă studiul lor se bazează pe meritele acestor primi deschizători de drumuri amintiţi mai sus.

Bibliografie

1. *** - Wikipedia
2. M. Stefanescu – 15 lectii de istoria matematicii, Ed. Matrixrom, 2009
3. G. Andone – Istoria matematicii in Romania, Ed Stiintifica, 1965

# Mihály Bencze
# - un matematician prolific –



NECULAI STANCIU[1]

Motto:

*„Partidele sunt de un sectarism, de o răutate şi de o violenţă care depăşesc orice limită, deoarece instinctele crude pot să -şi dea, în sînul acestora, acoperirea unei autorităţi colective.“*

**Mihail Manoilescu**

**Abstract.** We dedicated this article to Mihály Bencze.A reply to a question about how you got your expertise is: by studying the masters and not their pupils.
**Keywords:**biographies, neutral point of view, verifiability .
**MSC:** 01A70

O ierarhie a matematicienilor este aproape imposibil de făcut.De aceia în matematică nimic nu este "bătut în cuie".Totuşi dacă fixăm câteva criterii de operare se poate alcătui un top al matematicienilor.

Creators Synetics(Companie internaţională) a alcătuit în octombrie 2007, topul celor 100 de genii în viaţă din domeniul ştiinţei, politicii, artei şi din mediul de afaceri. Pe primul loc s-au situat inventatorul Internetului, *Sir Tim Berners-Lee* şi chimistul elveţian, *Albert Hofmann* - descoperitorul proprietăţilor halucinogene ale LSD. Pe ultimul loc figurează numele regizorului american *Quentin Tarantino*. Din totalul de 100 - 43 sunt americani şi 24 sunt britanici. Numai 15 dintre cele 100 de genii sunt femei. Cele 100 de genii au fost alese în funcţie de 5 factori - rolul jucat în schimbarea sistemului de viziune asupra lumii, recunoaşterea publică, forţa intelectului, succesele şi importanţa culturală.În acest top sunt şi doi matematicieni *Grigory Perelman* (Rusia) şi *Andrew Wiles* (Marea Britanie). Meritele celor doi sunt demonstrarea a două conjecturi celebre.

[1] Profesor, Şc. Gen. "George Emil Palade", Buzău

În cazul de faţă am luat drept criterii de evaluare “cantitatea” şi “calitatea” materialelor produse de profesorii de matematică din preuniversitar din ţara noastră.

În oraşul Săcele, Jud. Braşov, Romania, s-a născut la 20 noiembrie 1954, *Bencze Mihály*, fiul lui *Bencze Mihály*(zidar de meserie) şi al *Anna* (n. *Tomos*).A urmat Şcoala generală Nr. 3, din Săcele-Cernatu (1961-1968), Liceul Teoretic din Săcele(1968-1973) şi Facultatea de Matematică la Universitatea Babeş-Bolyai din Cluj (1974-1978). *Bencze Mihály* este matematician, scriitor şi profesor. Este directorul Editurii Fulgur din Braşov, România, precum şi preşedintele Asociaţiei Ştiinţifice Wildt József.Profesorul *Bencze* este de origine maghiară şi a fost unul dintre fondatorii Colegiului Naţional Áprily Lajos, din Braşov şi a Liceului Zajzoni Rab István din Săcele. Este fondatorul Concursului de Matematică din Transilvania (lb. maghiară) - primul concurs a fost organizat la Cluj în 1977. Din 1990 Concursul este organizat în fiecare an(ultimul fiind organizat în 2010 februarie). Este fondatorul Concursului Internaţional de Matematică (în lb. maghiară), concurs fondat în 1991 la Szeged (Ungaria) şi care se organizează anual(acreditat de Ministerul Învăţământului Cercetării şi Inovării din România). A fondat Premiul Zajzoni Rab István. Este conducător de cercuri de performanţă matematică, membru în diverse redacţii(în ţară şi străinătate) şi mentorul unor reviste(din ţară şi străinătate).A publicat peste 10 lucrări şi un număr foarte mare de articole(în reviste din ţară şi străinătate).A participat la peste 250 de conferinţe naţionale şi internaţionale.

Ceea ce impresionează este numărul imens (peste 13.000) de probleme de matematică propuse în reviste din ţară şi străinătate şi premiile obţinute:

1. Man of the year – 2003 (American Biographical Institute, USA), 2003.08.22
2. Exclusive Nomination for The Contemporary Hall of Fame (American Biographical Institute, USA), 2003.10.3;
3. American Medal of Honor (Governing Board of Editors of the American Biographical Institute, USA), 2003.10.17;
4. Man of the year – 2004 (American Biographical Institute, USA), 2004.07.01;
5. Nomination as International writter of the year 2004 (International Biographical Centre, Cambridge, England), 2004.08.13;
6. International Peace Prize (United Cultural Convention, USA), 2004.12.03;
7. International Peace Prize (United Cultural Convention, USA), 2005.02.04;
8. Man of Archievement Award (American Biographical Institute, USA), 2005.07.03;
9. American Medal of Honor (Governing Board of Editors of the American Biographical Institute, USA), 2005.07.24;
10. Nomination as International Professional of the year – 2005 (International Biographical Centre, Cambridge, England), 2005.08.19;
11. Man of the year – 2005 (American Biographical Institute, USA), 2005;
12. Top 100 Communications 2006 (International Centre, Cambridge, England), 2005.11.04;
13. Diploma (110 ani de apariţie neîntreruptă a Gazetei Matematice din România), 2005;
14. Ezüstgyopár díj (Romániai Magyar Pedagógusok Szövetsége, Teleki Oktatási Központ, Szováta, Románia), 2005.10.15;
15. The Global Year of Excellence – 2006 (International Centre, Cambridge, England), 2006.07.09;
16. 2000 Outstanding Intellectuals of the 20's Century (International Centre, Cambridge, England), 2006.10.06;

17.Man of the year – 2006 (American Biographical Institute, USA), 2006;
18.The World Medal of Freedom (American Biographical Institute, U SA), 2006.08.10;
19.Gold Medal for Romania (American Biographical Institute, USA), 2006.12.15;
20.Farkas Gyula-emlékérem (Kolozsvár – Csíkszereda, Sapientia Egyetem, Románia), 2006.11.25;
21.Apáczai–díj (Romániai Magyar Pedagógusok Szövetsége, Teleki Oktatási Központ, Szováta – Csíkszereda, Románia), 2006.12.12;
22.Gheorghe Lazăr-diploma, I. fokozat, 2007;
23.International Peace Prize 2007 (The United Cultural Convention of USA) ;
24.Premiul Beke Manó (Bolyai János Matematikai Társaság, Budapest, Ungaria), 2008.
25.Menţiunea Apáczai (Uniunea Democrată a Pedagogilor Maghiari din România, Centrul Teleki, Sovata, Miercurea Ciuc), 18.10.2008.

Din cele de mai sus rezultă că orice profesor de matematică din preuniversitar din România ar pune în top ten pe profesorul *Mihály Bencze*.

Mergând mai departe - dacă cineva din lume ar alcătui un top ten al profesorilor de matematică din preuniversitar având drept criteriu publicarea de articole şi probleme probabil că profesorul *Mihály Bencze* s-ar situa pe primul loc.

## BIBLIOGRAFIE:

[1] http://ro.wikipedia.org/wiki/Mih%C3%A1ly_Bencze

# Vedere de ansamblu asupra problemelor date la examenul de bacalaureat in Europa de-a lungul timpului

PROFESOR ANE MARIE ZACHIU

LICEUL BILINGV DECEBAL BUCURESTI

Dragi elevi,

Cum se apropie emoţiile examenului de bacalaureat, am încercat să vă dau în cele de mai jos o viziune de ansamblu asupra unor probleme date la examenul de bacalaureat de-a lungul timpului în câteva ţări din Europa.

Un candidat trebuie să tragă 3 bilete de oral din cele 25 pregătite de examinator, care cuprind: 10 bilete de algebră, 7 de analiză şi 5 de trigonometrie. Candidatul trage succesiv 3 bilete, fără a pune înapoi în urnă biletul tras.

1. Care este probabilitatea ca cele 3 bilete să fie de algebră?
2. Care este probabilitatea ca numai un bilet să fie de algebră?
3. Care este probabilitatea de a trage în ordine un bilet de algebră, unul de analiză şi unul de trigonometrie?

Bacalaureat – Paris 1966

Într-o urnă se găsesc 10 bile, unele albe iar altele roşii. Numărul de bile albe este notat cu x, şi presupunem că $2 \le x \le 8$. Numărul de bile roşii este notat cu y.

1. Să se calculeze în funcţie de x şi de y, iar apoi în funcţie numai x, probabilitatea P pentru ca trăgând simultan şi la întâmplare 2 bile din urnă, ele să fie amândouă de aceeaşi culoare. Aplicaţie numerică x=4.
2. Care trebuie să fie numărul N al bilelor albe pentru ca această probabilitate să fie minimă, şi care este acest minim?
3. Să se verifice că formula care-l exprimă pe P funcţie de x, este valabilă şi pentru x=0 şi pentru x=1. Să se spună fără a se efectua calcule de ce este valabilă şi pentru x=9 şi pentru x=10.

Bacalaureat – Nissa, 1967

Se consideră ecuaţia diferenţială $y''-2y'+5y=2e^x(2x^2-8x+9)$.

1. Să se verifice că $f(x)=(x-2)^2e^x$ este o soluţie particulară a ecuaţiei.
2. Să se gasescă soluţia generală a ecuaţiei.

Bacalaureat Franta –Caen 1971

Se consideră funcţia f definită prin $f(x)=e^{x}+3e^{-x}-4$.

1. Să se studieze variaţia acestei funcţii, să se traseze graficul precizându-se axa de simetrie.
2. Să se calculeze aria domeniului plan mărginit de graficul funcţiei şi axa Ox situat in semiplanul $x\leq 0$.
3. Să se rezolve ecuaţia diferenţială $y''+y'=2e^{x}$ şi să se determine soluţia particulară care pentru x=0 ia valoarea 0 şi pentru derivată -2.

Bacalaureat Franta Nancy 1971

Fie ABCD un trapez cu AB || CD. Pe latura AD se ia punctul P iar pe latura BC punctul Q astfel incat AQ || CP. Să se arate ca PB||DQ.

Bacalaureat Olanda 1971

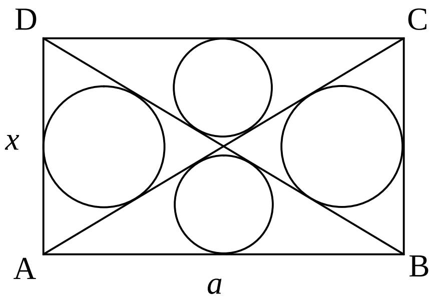
# APLICAŢII ALE **ANALIZEI MATEMATICE** ÎN **GEOMETRIA PLANĂ (5)**

Prof. Poenaru Dan, Colegiul Economic „I.Pop” Cluj -Napoca

## Aplicaţia nr.1

Se dă dreptunghiul $ABCD$ de laturi $AB = a$ şi $AD = x$. Se consideră cercurile înscrise în cele patru triunghiuri determinate de diagonalele dreptunghiului.

Să se studieze variaţia sumei ariilor celor patru cercuri dacă latura $AD$ are lungime variabilă.




SOLUŢIE:

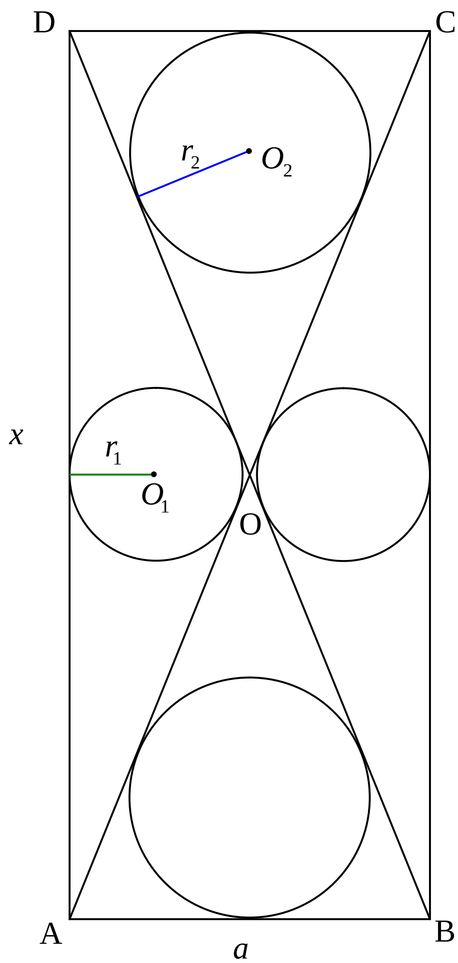
Mai întîi vom avea o abordare intuitivă a problemei şi anume:

Cercul $\mathcal{C}_{(O_1)}$, înscris în triunghiul $AOD$, are raza $r_1 < \frac{a}{4}$ iar unghiul $AOD$ tinde să devină, pentru valori cât mai mari ale lui $x$, un unghi cu laturi în prelungire, aşadar cercul $\mathcal{C}_{(O_1)}$ are aria $\pi r_1^2 < \frac{\pi a^2}{16}$ şi astfel suma ariilor celor două cercuri,,de acelaşi tip” este

$$S_1 = 2\pi r_1^2 < \frac{\pi a^2}{8} \quad (1)$$

Deasemenea cercul $\mathcal{C}_{(O_2)}$, înscris în triunghiul $DOC$, are raza $r_2 < \frac{a}{2}$ iar unghiurile din $D$ şi C tind să devină unghiuri drepte; astfel cercul $\mathcal{C}_{(O_2)}$ are aria $\pi r_2^2 < \frac{\pi a^2}{4}$ şi astfel obţinem:

$$S_2 = 2\pi r_1^2 < \frac{\pi a^2}{2} \quad (2)$$



Notând cu $S$ suma ariilor celor patru cercuri şi utilizând relaţiile (1) şi (2) intuim că această sumă creşte pe măsură ce latura $AD = x$ ia valori tot mai mari având un supremum sugerat de relaţia :

$$S = S_1 + S_2 = 2\pi r_1^2 + 2\pi r_2^2 = 2\pi(r_1^2 + r_2^2) < \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi a^2}{2} = \frac{5\pi a^2}{8}$$

$$\sup(S) = \frac{5\pi a^2}{8} \quad (?)$$

Rezultatul astfel obţinut riscă să rămână o conjectură dacă acesta nu este susţinuţ de o demonstraţie ; în acest sens consider că elementele de analiză matematică oferă posibilitatea unei demonstraţii corecte care confirmă făr ă echivoc rezultatul obţinut pe cale intuitivă.

Lungimea variabilă $AD = x \in [0,+\infty)$ va reprezenta variabila funcţiei ce urmează a fi construită. Exprimăm razele cercurilor în funcţie de $x$ utilizând relaţiile ce există într-un triunghi dintre arie, semiperimetru şi raza cercului înscris. Oţinem astfel două relaţii distincte:

$$r_1 = \frac{S_1}{p_1} = \frac{\frac{ax}{4}}{\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{2}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}+x} \quad \text{şi}$$

$$r_2 = \frac{S_2}{p_2} = \frac{\frac{ax}{4}}{\frac{\sqrt{x^2+a^2}+a}{2}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}+a} \quad \text{iar aria celor patru cercuri este:}$$

$$S = 2\pi r_1^2 + 2\pi r_2^2 = 2\pi(r_1^2 + r_2^2) = \frac{\pi a^2}{2} \cdot x^2 \cdot \left( \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)^2} + \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+a^2}+a\right)^2} \right)$$

Construim funcţia:

$$f : [0,+\infty) \to R, \quad f(x) = \frac{\pi a^2}{2} \cdot x^2 \cdot \left( \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)^2} + \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+a^2}+a\right)^2} \right)$$

Funcţia $f$ este continuă şi derivabilă. Pentru demonstrarea monotoniei funcţiei $f$ vom ocoli calculul deloc fezabil al derivatei acestei funcţii şi procedăm astfel: aducem

funcţia $f$ la forma $f(x)=\frac{\pi a^2}{2}\cdot\left(\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}+x}\right)^2+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}+a}\right)^2\right)$

Notăm $f_1(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}+x}$ şi $f_2(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}+a}$ ; calculul derivatelor acestor funcţii conduce la $f_1'(x)>0$ şi $f_2'(x)>0 \Rightarrow f_1$ şi $f_2$ sunt funcţii crescătoare pozitive $\Rightarrow f_1^2$ şi $f_2^2$ sunt crescătoare $\Rightarrow f=\frac{\pi a^2}{2}\cdot\left(f_1^2+f_2^2\right)$ este funcţie crescătoare.

monoton

$f(0)=0$ iar ,,comportamentul" funcţiei la $+\infty$ este dat de calculul limitei:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=$

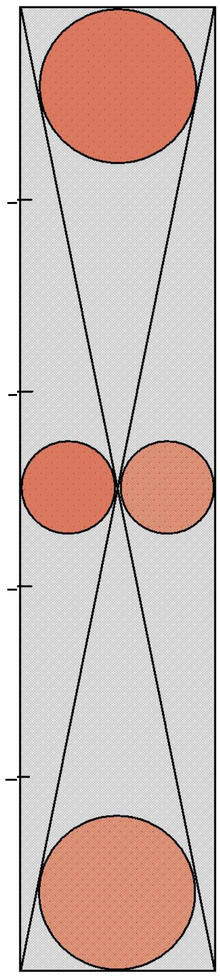
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi a^2}{2}\cdot x^2\cdot\left(\frac{1}{x^2\left(\sqrt{1+\frac{a^2}{x^2}}+1\right)^2}+\frac{1}{x^2\left(\sqrt{1+\frac{a^2}{x^2}}+\frac{a}{x}\right)^2}\right)=\frac{\pi a^2}{2}\left(\frac{1}{4}+1\right)=\frac{5\pi a^2}{8}$$

ceea ce înseamnă că dreapta $y=\frac{5\pi a^2}{8}$ este asimptotă orizontală iar funcţia $f$ fiind crescătoare, urmează că $\sup f(x)=\frac{5\pi a^2}{8}$ .

În continuare sunt prezentate tabloul de variaţi e şi graficul funcţiei pentru cazul particular $a=1$.

Funcţia este:

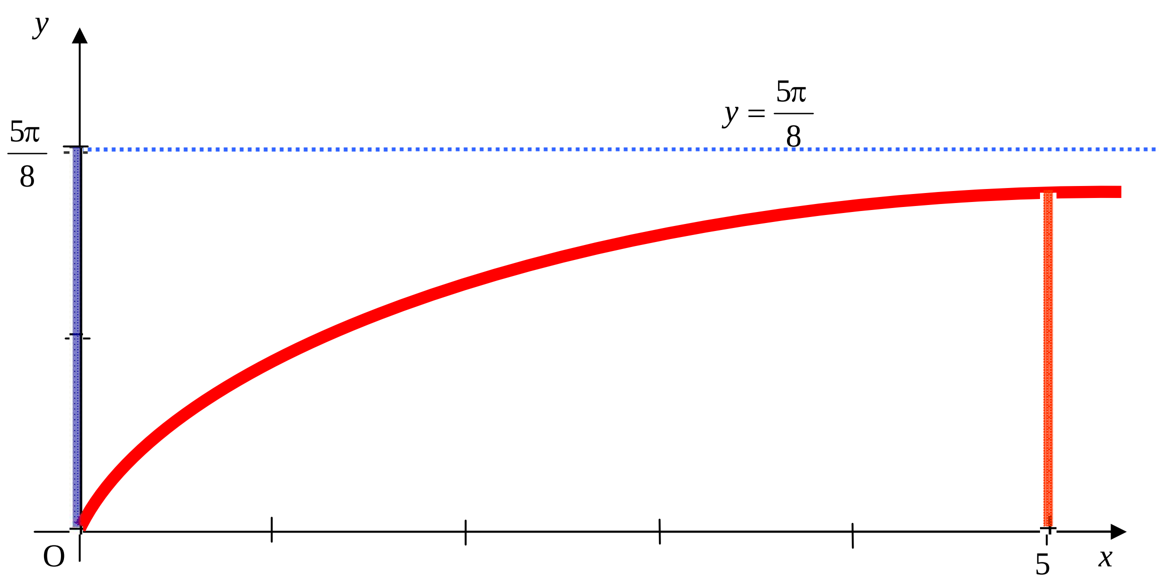
$$f:[0,+\infty)\to R,\quad f(x)=\frac{\pi}{2}\cdot x^2\cdot\left(\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)^2}\right)$$



| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
| --- | --- | --- |
| $f'(x)$ | + + + + + + + + + + + + + + + + + + + + | |
| $f(x)$ | $0$ ↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗ | $\frac{5\pi}{8}$ |

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{5\pi}{8} = \sup f(x)$$

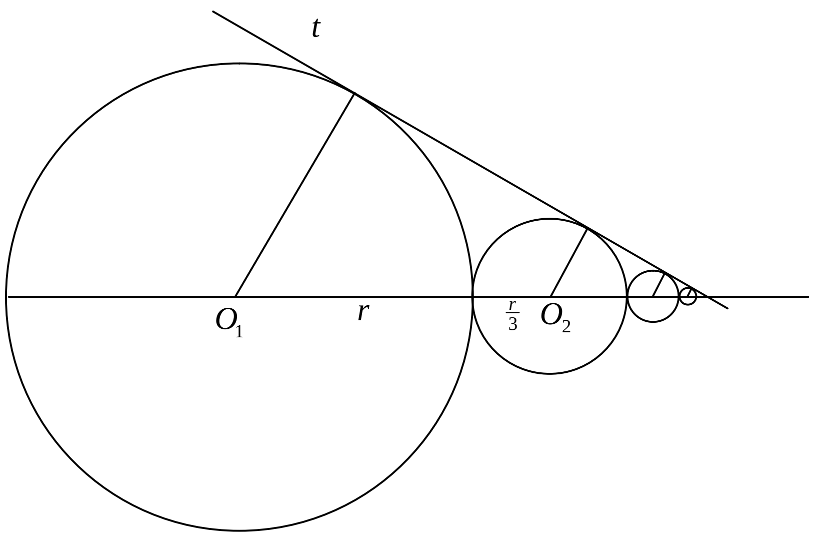
Desenul pune în evidenţă o valoare particulară a ariei cercurilor ( $x = 5$)



**Aplicaţa nr.2**

Se dă şirul infinit de cercuri $C_1(O_1, r_1), C_2(O_2, r_2), \ldots, C_n(O_n, r_n), \ldots$ astfel încât cercurile $C_k$ şi $C_{k+1}$ să fie tangente exterior $\forall k \in N^*$, centrele $O_k$ să fie coliniare şi $r_{k+1} = \frac{r_k}{3}, \forall k \in N^*$. Fie şi $t$ o tangentă comună cercurilor $C_k$.

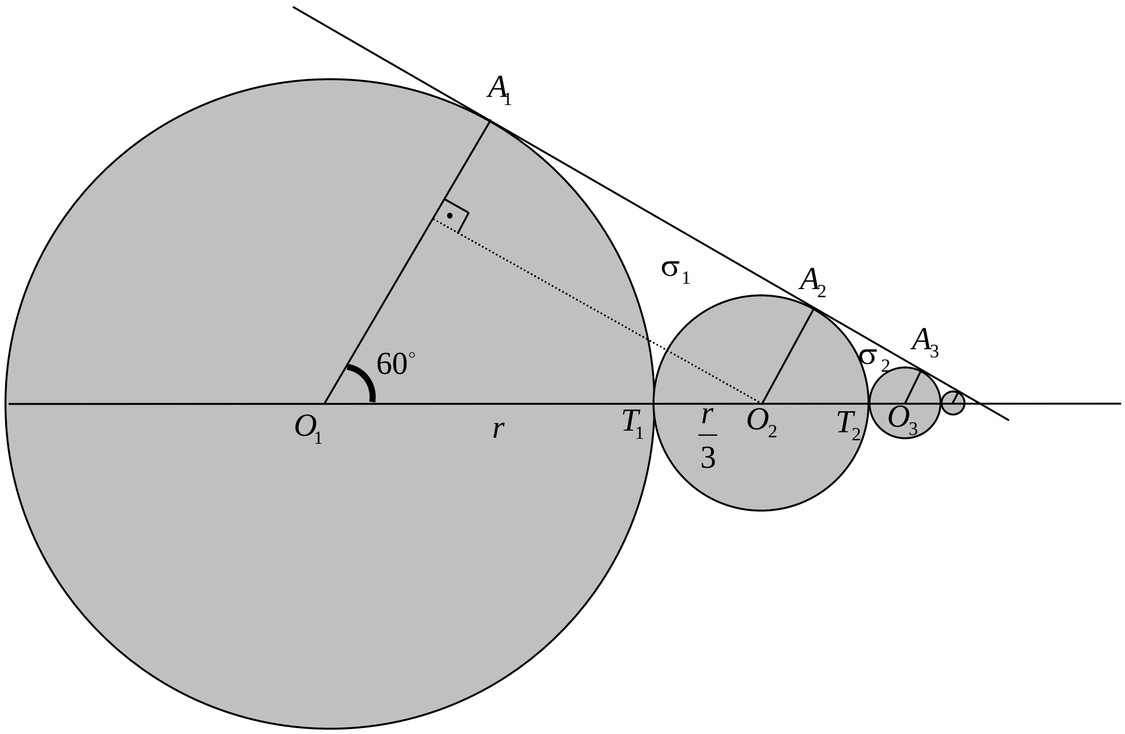
Să se calculeze aria cuprinsă între tangenta $t$ şi cercurile $C_k$.




SOLUŢIE:

Fie $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ punctele de intersecţie ale cercurilor şi $T_1, T_2, \ldots, T_k, \ldots$ punctele de tangenţă ale cercurilor cu tangenta $(t)$. Aria cerută este suma ariilor "triunghiurilor curbilinii" $A_1A_2T_1$, $A_2A_3T_2$, … pe care le notăm $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_k, \ldots$ (fig. de mai jos).

Mai întâi aria $\sigma_1$ se poate calcula efectuând diferenţa dintre aria trapezului $A_1O_1O_2A_2$ şi suma ariilor sectoarelor circulare determinate de unghiurile $A_1\hat{O}_1T_1$ şi $A_2\hat{O}_2T_1$. Se obţine $\sigma_1 = \dfrac{r^2(24\sqrt{3} - 11\pi)}{54}$ ( am notat $r_1 = r$ ).




Se obţine uşor formula generală $\sigma_k = \dfrac{r_k^{\,2}(24\sqrt{3} - 11\pi)}{54}$, $\forall k \in N^*$.

Calculăm $\sum_{k=1}^{n} \sigma_k = \dfrac{24\sqrt{3} - 11\pi}{54} \cdot \sum_{k=1}^{n} r_k^2$. Dacă notăm $\lambda = \dfrac{24\sqrt{3} - 11\pi}{54}$ şi ţinând cont de $r_{k+1} = \dfrac{r_k}{3}$ obţinem:

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma_k = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} r_k^2 = \lambda r^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^{2k-2}} = \lambda r^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{9^{k-1}} = \lambda r^2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{9^n}}{1 - \frac{1}{9}}.$$

Aria cerută este supremumul acestei sume :

$$\sup\left(\sum_{k=1}^{n} \sigma_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k = \lim_{n\to\infty} \lambda r^2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{9^n}}{1 - \frac{1}{9}} = \lambda r^2 \cdot \frac{9}{8} = \frac{r^2(24\sqrt{3} - 11\pi)}{48}.$$