APLICAŢII ALE **ANALIZEI MATEMATICE** ÎN **GEOMETRIA ÎN SPAŢIU (2)**

Prof. Poenaru Dan, Colegiul Economic „I.Pop” Cluj-Napoca

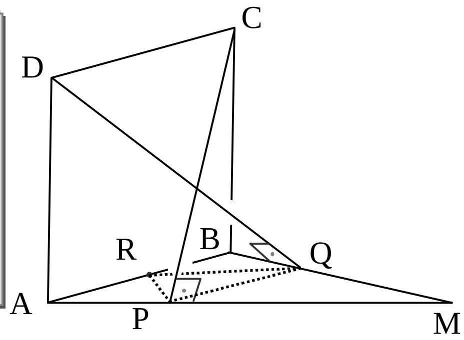
Aşa cum s-a putut urmări în articolele precedente, pentru rezolvarea unor probleme de geometrie clasică ce vizează studiul variaţiei distanţelor, ariilor, volumelor în condiţii determinate de puncte variaţionale, instrumentul de investigaţie cel mai potrivit este analiza matematică.

Consider că aplicaţia ce urmează este un exemplu elocvent în acest sens: rezolvarea problemei de geometrie conduce la construcţia unei funcţii al cărei grafic evidenţiază un număr semnificativ de ,,evenimente” matematice specifice analizei, toate studiate în cadrul programei de liceu:

- asimptotă;
- puncte de extrem local;
- punct unghiular;
- puncte de inflexiune.

Aplicaţie

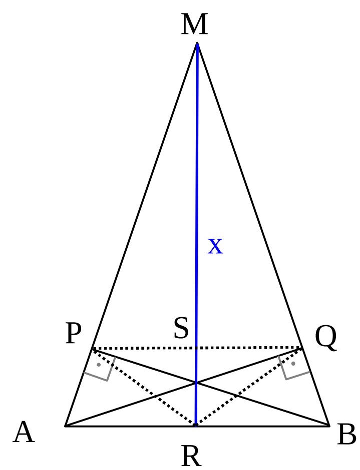
Se dau pătratul $ABCD$ de latură $AB = 2$ şi triunghiul isoscel AMB, de bază AB, situate în plane perpendiculare. Se duc perpendicularele din C pe AM în punctul P, respectiv din D pe BM în punctul Q. Fie şi R mijlocul laturii AB.
Să se studieze variaţia ariei triunghiului RPQ dacă punctul M este variabil.



SOLUŢIE: Mai întâi vom considera câteva afirmaţii adevărate ce pot fi demonstrate uşor cu ajutorul ,,tehnicilor" specifice geometriei în spaţiu cum ar fi : $[AP] \equiv [BQ]$, $[CP] \equiv [DQ]$, $PQ \parallel AB \parallel DC$, CP şi DQ sunt concurente iar BP respectiv AQ sunt înălţimi în triungiul isoscel AMB cu $[BP] \equiv [AQ]$. Deasemenea în problemă se disting

trei cazuri: **I.** $x > 1 \Rightarrow \Delta AMB$ ascuţitunghic
II. $x = 1 \Rightarrow \Delta AMB$ dreptunghic $\Rightarrow P, Q, R$ coincid $\Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta PQR} = 0$
III. $x < 1 \Rightarrow \Delta AMB$ obtuzunghic

Tratăm mai detaliat cazul **I.**
Notăm $MR = x$ şi căutăm să exprimăm aria triunghiului PQR în funcţie de x.



$$\mathcal{A}_{\Delta PQR} = \frac{PQ \cdot SR}{2} \quad (1) \quad (S = MR \cap PQ)$$

Din $PQ \parallel AB \Rightarrow \dfrac{MS}{x} = \dfrac{PQ}{2}$ (2) ; din ΔMRB dreptunghic $\Rightarrow MB = \sqrt{x^2+1}$ (3) . Calculăm aria triunghiului AMB în două moduri:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{A}_{\Delta AMB} = \dfrac{AB \cdot MR}{2} = \dfrac{2x}{2} = x \\ \mathcal{A}_{\Delta AMB} = \dfrac{PB \cdot MA}{2} = \dfrac{PB \cdot \sqrt{x^2+1}}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{PB \cdot \sqrt{x^2+1}}{2} = x$$

$\Rightarrow PB=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ (4). din ΔAPB dreptunghic $\Rightarrow AP=\sqrt{AB^2-PB^2}\overset{(4)}{=}\sqrt{4-\dfrac{4x^2}{x^2+1}}=$ $\sqrt{\dfrac{4}{x^2+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}$ (5). Înălţimea triunghiului dreptunghic APB este lungimea SR

şi este dată de $SR=\dfrac{AP\cdot PB}{AB}\overset{(4),(5)}{=}\dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}}{2}=\dfrac{2x}{x^2+1}$, astfel

$MS=MR-SR=x-\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{x^3-x}{x^2+1}$. Din $MS=\dfrac{x^3-x}{x^2+1}$ şi relaţia (2) rezultă

$\dfrac{\dfrac{x^3-x}{x^2+1}}{x}=\dfrac{PQ}{2}$ de unde $PQ=\dfrac{2(x^2-1)}{x^2+1}$ şi revenind la relaţia (1) obţinem aria

triunghiului: $A_{\Delta PQR}=\dfrac{\dfrac{2(x^2-1)}{x^2+1}\cdot\dfrac{2x}{x^2+1}}{2}=2\cdot\dfrac{x^3-x}{(x^2+1)^2}$. Considerăm funcţia :

$$f_1:(1,+\infty)\to R,\quad f_1(x)=2\cdot\frac{x^3-x}{(x^2+1)^2}$$

Pentru cazul **III.** În urma unor deliberări asemănătoare cazului **I.** obţinem funcţia:

$$f_2:[0,1)\to R,\quad f_2(x)=2\cdot\frac{-x^3+x}{(x^2+1)^2}$$

Din cele trei cazuri funcţia corespunzătoare studiului variaţiei ariei triunghiului este:

$$f:[0,+\infty)\to R,\quad f(x)=2\cdot\frac{|x^3-x|}{(x^2+1)^2}=\begin{cases}2\cdot\dfrac{-x^3+x}{(x^2+1)^2}, & x\in[0,1)\\ 0, & x=1\\ 2\cdot\dfrac{x^3-x}{(x^2+1)^2}, & x\in(1,\infty)\end{cases}$$

Preliminarii pentru întocmirea tabloului de variaţie şi trasarea graficului:
Comportamentul funcţiei la ,,capete” este dat de $f(0)=0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0\Rightarrow y=0$

este asimptotă orizontală. Funcţia derivată a funcţiei f este:

$$f':[0,1)\cup(1,+\infty)\to R,\quad f'(x)=\begin{cases}2\cdot\dfrac{x^4-6x^2+1}{(x^2+1)^3}, & x\in[0,1)\\[2ex] 2\cdot\dfrac{-x^4+6x^2-1}{(x^2+1)^3}, & x\in(1,\infty)\end{cases}$$

Derivata funcţiei pentru $x\in[0,1)$ este $f'(x)=2\cdot\dfrac{x^4-6x^2+1}{(x^2+1)^3}$; ecuaţia $f'(x)=0$ conduce la $x^4-6x^2+1=0$. Prin rezolvarea ecuaţiei bipătrate se ajunge la unica soluţie din intervalul $[0,1)$ şi anume $x_1=\sqrt{2}-1$ iar $f(x_1)=\dfrac{1}{2}$.

Derivata funcţiei pentru $x\in(1,\infty)$ este $f'(x)=2\cdot\dfrac{-x^4+6x^2-1}{(x^2+1)^3}$; ecuaţia $f'(x)=0$ conduce la aceeaşi ecuaţie bipatrată $x^4-6x^2+1=0$ şi obţinem unica soluţie din intervalul $(1,\infty)$ şi anume $x_2=\sqrt{2}+1$ iar $f(x_2)=\dfrac{1}{2}$.

Funcţia f este continuă pe $[0,\infty)$ dar nu este derivabilă în punctul $x=1$; în acest punct derivatele laterale sunt $f'(1-0)=-1$ respectiv $f'(1+0)=1$ iar $f(1)=0$ ceea ce înseamnă că punctul $(1,0)$ este un punct de întoarcere pentru graficul funcţiei .

Din studiul derivatei a doua obţinem două puncte de inflexiune (vezi tabloul…)

Tabloul de variaţie:

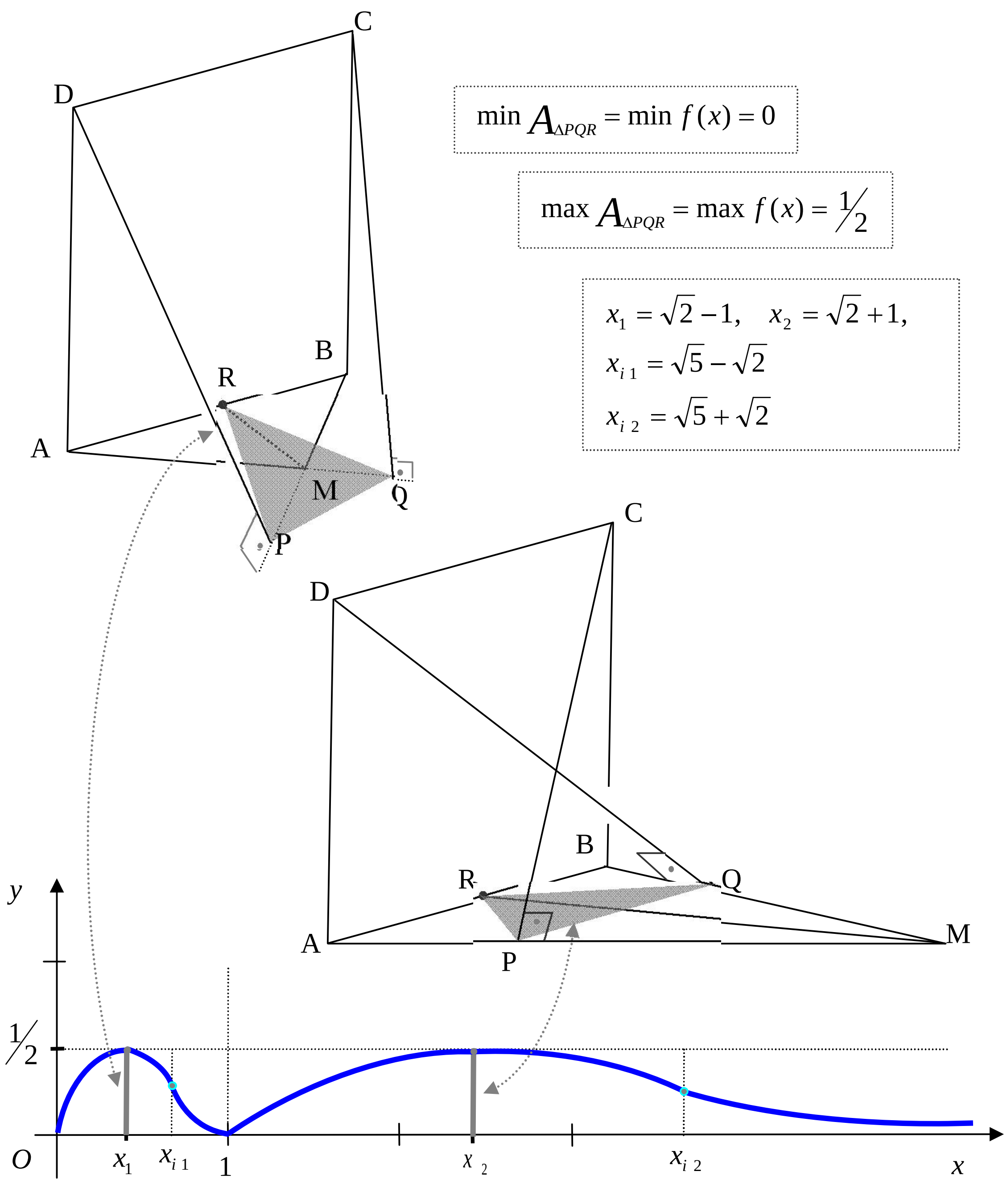
x	0		$\sqrt{2}-1$		$\sqrt{5}-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}+1$		$\sqrt{5}+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	+	+ +	0	– – – –	– – – –	– –	-1 | 1	+ + +	0	– – – –	– – – –	– – – –	
$f''(x)$	–	– – – –	– – – –	– – –	0	+ + +	|	– – – –	– – – –	– – – –	0	+ + +	
$f(x)$	0	↗ ↗	$\frac{1}{2}$	↘ ↘	$f(x_{i\,1})$	↘ ↘	0	↗ ↗ ↗	$\frac{1}{2}$	↘ ↘ ↘	$f(x_{i\,2})$	↘ ↘ ↘	0

Graficul funcţiei - conexiuni

$$\min \mathcal{A}_{\Delta PQR} = \min f(x) = 0$$

$$\max \mathcal{A}_{\Delta PQR} = \max f(x) = \tfrac{1}{2}$$

$$x_1 = \sqrt{2} - 1, \quad x_2 = \sqrt{2} + 1,$$
$$x_{i\,1} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$
$$x_{i\,2} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$$



DOUĂ APLICAŢII PRACTICE, INTERESANTE, PENTRU VACANŢĂ

NECULAI STANCIU[1]

Problema 1.
Istoria SSMR

Revista Gazeta Matematică s-a înfiinţat în anul **1895.**Apoi s-a înfiinţat şi *Societatea Gazeta Matematică*, care şi-a modificat denumirea de trei ori în anul **19AB** (*Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice*), în anul **19CA** (*Societatea de Ştiinţe Matematice*) şi de la centenarul revistei poartă denumirea de astăzi *Societatea de Ştiinţe Matematice din România*.Dacă anul acesta sărbătorim centenarul Societăţ ii şi **AB** respectiv **CA** sunt pătrate perfecte consecutive aflaţi cei patru ani în care Societatea a avut denumirile *SGM, SSMF, SSM şi SSMR.*
(prin pătrat perfect se înţelege produsul dintre două numere egale)

Soluţie.

- Dacă anul acesta serbăm centenarul soci etăţii rezultă că SGM s-a înfiinţat în **1910.**
- AB=49 $\Rightarrow$ Anul modificării denumirii în SSMF a fost **1949.**
- CA=64 $\Rightarrow$ Anul în care a luat denumirea SSM a fost **1964.**
- Deoarece centenarul revistei s-a serbat în 1995 $\Rightarrow$ anul în care a lut denumirea actuală SSMR a fost anul **1995.**

Problema 2. (de magie-matematică)

CALENDARUL PERPETUU
dedicată
pt.
DUMITRU M. BĂTINEŢU GIURGIU
&
MARCEL ŢENA

[1] Profesor, Şcoala cu clasele I-VIII „George Emil Palade”, Buzău

&

oricărei persoane care doreşte să afle în ce zi a săptămânii a picat sau va pica o anumită dată din calendar

Pentru orice dată din calendar, notată de exemplu x, avem corespondent una şi numai una din zilele Luni, Marţi, Miercuri, Joi, Vineri, Sâmbătă şi Duminică, notate de exemplu y.Rezultă că putem defini o funcţie $y = y(x)$.

Se cere:

a) să găsiţi formula $y = y(x)$;

b) să determinaţi ziua în care "pică" data de 27.01.1936 (DMB-Giurgiu), respectiv data 28.01.1951 (MŢ-redactor şef al G.M.-B);

c) să determinaţi ziua în care v-aţi născut şi să întrebaţi părinţii(sau oricine ştie, sau vezi telefonul mobil) pentru confirmare.

Soluţie.

a) Avem şapte zile(Luni, Marţi, Miercuri, Joi, Vineri, Sâmbătă şi Duminică), doisprezece luni şi mulţi ani(dintre care unii besecţi).
Formula căutată trebuie să ţină seamă de toate acestea şi unele în plus(exerciţiu!:vezi pe google, despre anii bisecţi).
Noi(poate şi alţii) am găsit următoarele două formule:

(1) $y \equiv \left(A + \left[\frac{A}{4} \right] + L + Z \right) (\bmod 7)$, pentru anii 1900,…,1999;

(2) $y \equiv \left(A + \left[\frac{A}{4} \right] + L + Z - 1 \right) (\bmod 7)$, pentru ani 2000,…,2099;

unde am notat prin $A =$ numărul natural format din ultimile două cifre ale anului căutat; $\left[\frac{A}{4} \right]$ = partea întreagă a numărulului $\frac{A}{4}$; $Z =$ numărul natural care reprezintă cifra căutată şi $L =$ cifra corespunzătoare lunii căutate(vezi tabelul (3)).

(3)

Luna	Ian	Feb	Mar	Apr	May	Iun	Iul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
L	1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6

Tabelul de mai sus se poate reţine foarte uşor: 144 - pătrat perfect; 025 – pătrat perfect; 036 – pătrat perfect; 146=144+2.

Deoarece y este congruent modulo 7, avem $y \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

Facem asocierea:

(4) $0 \rightarrow$ Sâmbătă; $1 \rightarrow$ Duminică; $2 \rightarrow$ Luni; $3 \rightarrow$ Marţi; $4 \rightarrow$ Miercuri; $5 \rightarrow$ Joi; $6 \rightarrow$ Vineri.

Remarcă. În anii bisecţi, ziua din lunile ianuarie, respectiv, februarie corespunde cifrei $y - 1$.

b) ziua corespunzătoare datei

- 27.01.1936 (an bisect)

Restul împărţirii:

$\frac{36+9+1+27}{7}=\frac{73}{7}$, este $y=3$, iar din (4) şi remarcă, rezultă, că ziua căutată este **Luni (D.M.B –Giurgiu).**

- Data 28.01.1951

  Restul împărţirii:

$\frac{51+12+1+28}{7}=\frac{92}{7}$, este $y=1$, iar asocierea (4) rezultă că redactorul şef s-a născut în ziua de **Duminică.**

c) Se aplică metoda descrisă la punctul a).

Bonus. 1.01.2012 – an bisect, luna ianuari(vezi remarca!).

Restul împărţirii:

$\frac{12+3+1+1-1}{7}=\frac{16}{7}$, este $y=2$, dar facem $y-1=1$, de unde rezultă că ziua corespunzătoare este Duminică.

Notă. Cele două formule de calcul (calendarul perpetuu) au fost date de cel mai mare geniu al omenirii - **William James Sidis(**1898 – 1944), care a vut cel mai mare IQ (între 250 şi 300).Se pare că cel mai mare IQ printre matematicieni l -a avut **Gottfried Willhelm von Leibniz – 210.**După unii se pare că IQ-ul cel mai mare dintre matematicieni l-ar fi avut **Srinivasa Ramanujan (**1887 – 1920) – numai că nu a putut fi determinat deoarece era foarte slab la orice altceva în afară de matematică.

PATRULATERE CIRCUMSCRIPTIBILE ŞI PATRULATERE COMPLETE

Prof. Gurău Cornelia, Şcoala cu clasele I - VIII nr.4
Moineşti, Bacău

PATRULATERE CIRCUMSCRIPTIBILE

Spunem că un patrulater ABCD este *circumscriptibil* dacă există un cerc **C** tangent laturilor AB, BC, CD, DA. Se mai spune că **C** este *înscris* în ABCD sau ca ABCD este *circumscris lui* **C**.

Teorema 1. *Orice patrulater circumscriptibil este convex*.

Demonstraţie.

Într-adevăr, dacă ABCD este circumscris unui cerc **C**, dreapta AB este tangentă lui **C** şi lasă de o parte o anumită parte a ei, H, cercul **C**(mai puţin punctul de tangenţă) deci şi punctele de contact cu celelalte laturi. Urmează că BC şi AD sunt incluse în H, apoi că C, D sunt în H.

Teorema 2. *(Pithot). Patrulaterul convex ABCD este circumscriptibil dacă şi numai dacă AB + CD = AD + BC (sumele lungimilor laturilor opuse sunt egale).*

Demonstraţie.

Fie ABCD circumscris cercului **C**, punctele de contact pentru AB, BC, CD, DA fiind notate prin M, N, P, Q (fig. 1).

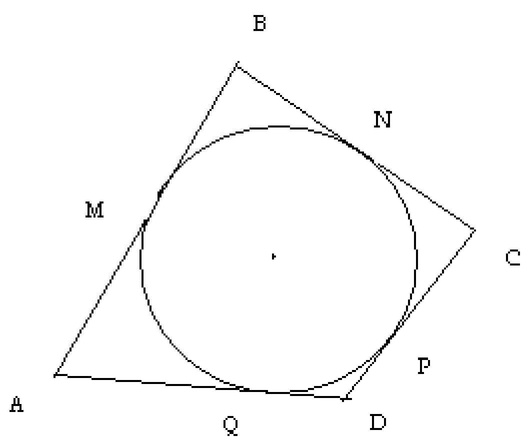


Fig.1

Au loc următoarele egalităţi de tangente din diverse puncte la cercul **C**: AM = AQ, BM = BN, CN =CP, DP = DQ. Urmează imediat:

AB + CD = (AM + MB) + (CP + PD) = AQ +BN + CN + DQ =

=(AQ + QD) + (BN + CN) = AD + BC.

Să presupunem acum că are loc egalitatea AB + CD = AD + BC. Vom considera că dreptele suport ale două laturi opuse, de exemplu AD cu BC, sunt secante în E. Mai presupunem că notarea vârfurilor asigură că are loc A – D – E, deci B – C – E. Fie **C** cercul înscris în triunghiul ABE. Presupunem prin absurd că CD nu este tangentă lui **C**. Există două tangente la **C** paralele cu CD; alegem acea paralelă $C'D'$ la CD ce separă punctele cercului **C** şi E în semiplane distincte. Deoarece $ABC'D'$ este ciurcmscriptibil rezultă $AB + C'D' = AD' + BC'$. Scăzând această egalitate membru cu membru din ipoteza adoptată obţinem(pentru cazul din fig. 2)

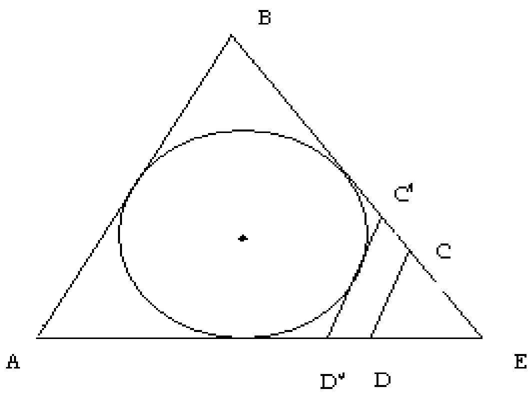


Fig.2

$CD - C'D' = D'D + C'C$. Ar urma segmentul CD să aibă lungime egală cu a liniei frânte de aceleaşi extremităţi $CC'D'D$, absurd.

Observaţie. Condiţia de convexitate a patrulaterului ABCD intervine în demonstraţie suficient de subtil, poate insuficient de clar scos în evidenţă de schiţa de demonstraţie prezentată. Fig. 3 înfăţişează un patrulater în care AB $\equiv$ AD, BC $\equiv$ CD, deci are loc $AB + CD = AD + BC$ fără a fi circumscriptibil.

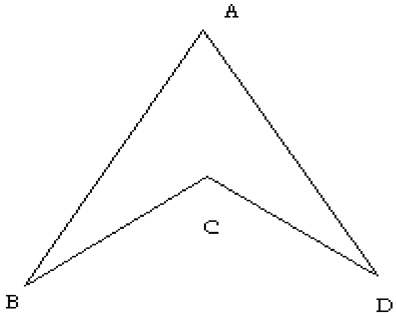


Fig.3

Teorema 3. *Bisectoarele interioare ale unui patrulater ABCD sunt concurente dacă şi numai dacă ABCD este circumscriptibil.*

Demonstraţia este imediată. Dacă cele patru bisectoare sunt concurente într-un punct I ce se proiectează ortogonal pe laturi în punctele M, N, P, Q are loc $IM \equiv IN \equiv IP \equiv IQ$ şi cercul **C**(I, IM) va fi tangent tuturor „laturilor de unghiuri" adică laturilor patrulaterului. Dacă ABCD este circumscris cercului **C**(I,r), cele patru bisectoare interioare concură în I.

PATRULATERE COMPLETE

Menţionăm utilizarea denumirii de *patrulater complet* ABCDEF pentru un patrulater ABCD, unde $\{E\} = AB \cap CD$, $\{F\} = BC \cap AD$. Segmentele AC, BD, EF se numesc *diagonale* ale patrulaterului complet(fig. 4).

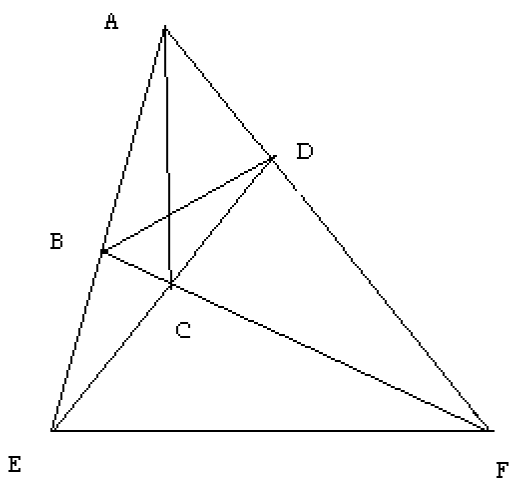


Fig.4

Teorema Newton-Gauss. *Mijloacele P, Q, R ale diagonalelor AC, BD, EF unui patrulater complet sunt coliniare.*

Demonstraţie. Fie G, H, I mijloacele segmentelor CE, EB, BC. Punctele G, I, P sunt pe o paralelă la EBA; H, I, Q pe o paralelă la ECD, iar H, G, R pe o paralelă la BCF. Deci, P, Q, R sunt pe prelungirile laturilor triunghiului GHI. Conform teoremei lui Menelaos coliniaritatea punctelor P, Q, R este echivalentă cu îndeplinirea egalităţi

$$(1)\quad \frac{\overline{PI}}{\overline{PG}} \cdot \frac{\overline{RG}}{\overline{RH}} \cdot \frac{\overline{QH}}{\overline{QI}} = 1.$$

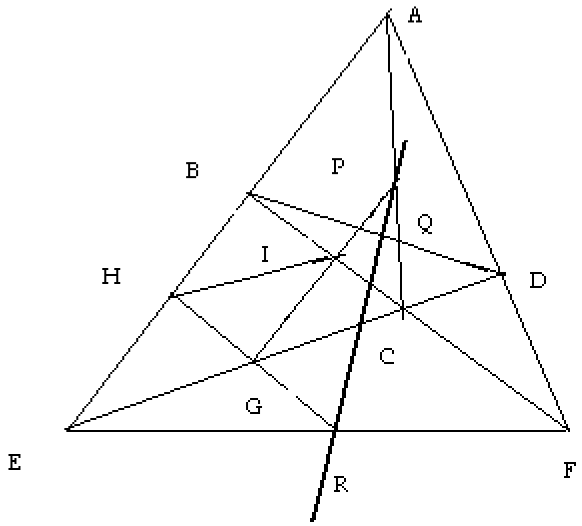
Folosind linii mijlocii convenabile vom constata însă uşor:

$$\frac{\overline{PI}}{\overline{PG}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}},\ \frac{\overline{RG}}{\overline{RH}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{FB}},\ \frac{\overline{QH}}{\overline{QI}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DC}}.$$

Cu aceste egalităţi, relaţia (1) este echivalentă cu

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{DE}}{\overline{DC}} = 1.$$

Ultima egalitate constituie relaţia lui Menelaos pentru triunghiul BEC şi punctele coliniare A, D, F, deci este adevărată (fig.5).



Observaţie. Dreapta PQ se numeşte dreapta Newton -Gauss a patrulaterului complet ABCDEF.

Bibliografie

Bazele raţionamentului geometric, Dan Brânzei, Eugen Onofraş, Sebastian Aniţa, Gheorghe Isvoranu, Editura Academiei, Bucureşti, 1983.

CONCURSUL PENTRU TITULARIZARE

13 IULIE 2011

Proba scrisă la MATEMATICĂ

Corneliu Mănescu-Avram

Această notă conţine soluţii alternative şi generalizări ale subiectelor. Problemele şi soluţiile originale sunt date în anexe.

SUBIECTUL I.

1. Fie $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ o progresie aritmetică de numere naturale, $S_n = b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2$ şi $a_n = u(S_n)$, unde $u(m)$ este ultima cifră a numărului natural m.

a) Arătaţi că $S_n = n\left[b_1 b_n + \frac{(n-1)(2n-1)r^2}{6}\right], \forall n \geq 1$.

b) Calculaţi a_7.

c) Arătaţi că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este periodic de perioadă 20.

d) Calculaţi a_m pentru $m = 2011^{2011}$.

2. Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC şi A', B' respectiv C' mijloacele arcelor mici $\overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}$ respectiv $\overset{\frown}{AB}$ ale cercului circumscris triunghiului ABC. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

a) Demonstraţi că dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente.

b) Arătaţi că triunghiul BIA' este isoscel.

c) Demonstraţi că punctul I este ortocentrul triunghiului $A'B'C'$.

d) Demonstraţi că $AI = IA'$ dacă şi numai dacă $r = R(1 - \cos A)$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC, iar R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea

1. Fie $m \in \mathbb{N}^*$, $d = m^2 + 1$, $x = a + b\sqrt{d}$ şi $N(x) = a^2 - db^2$.

a) Verificaţi dacă $\sqrt{d+1+2\sqrt{d}} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

b) Arătați că dacă *x, y* $\in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, atunci $x+y-xy \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

c) Demonstraţi că $x \in U(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$ dacă şi numai dacă $|N(x)| = 1$.

d) Arătaţi că mulţimile $U_+ = \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}] | N(x) = 1\}$ şi $U_- = \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}] | N(x) = -1\}$ sunt infinite.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{a+\cos x}$, unde $a \in (1, \infty)$ este o constantă.

a) Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Calculaţi $\int f(x) \sin x \, dx$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Demonstraţi că funcţia f nu are limită la $+\infty$.

d) Calculaţi $\int_0^{2\pi} f(x) dx$.

Soluţii :

I. **1**. **a)** Demonstrăm egalitatea prin inducţie după n.

Dacă $n = 1$, atunci $S_1 = b_1^2 = b_1 \cdot b_1$

Presupunem că egalitatea este adevărată pentru n şi o demonstrăm pentru $n + 1$. Acest fapt revine la verificarea identităţii

$$n\left[b_1 b_n + \frac{(n-1)(2n-1)r^2}{6}\right] + b_{n+1}^2 = (n+1)\left[b_1 b_{n+1} + \frac{n(2n+1)r^2}{6}\right], \; n \geq 1,$$

ceea ce se poate face cu uşurinţă, exprimând b_n şi b_{n+1} în funcţie de b_1 şi r.

b) Avem $S_7 = 7(b_1 b_7 + 13r^2) \equiv 7(b_1^2 + 6b_1 r - 7r^2) \equiv 7b_0 b_8$ (mod 10), deci $a_7 = u(7b_0 b_8)$, unde $b_0 = b_1 - r$.

c) Calculăm $S_{n+20} - S_n = b_{n+1}^2 + b_{n+2}^2 + ... + b_{n+20}^2$ observând că putem aplica formula de la **a)** pentru o progresie aritmetică de 20 de termeni., cu primul termen b_{n+1} şi raţia r. Rezultă

$S_{n+20} - S_n = 10(2a_{n+1}a_{n+20} + 13 \cdot 19r^2)$, aşadar $a_{n+20} = u(S_{n+20}) = u(S_n) = a_n$.

d) Din $2011^{2011} \equiv 11$ (mod 20) rezultă $a_m = a_{11} = u(S_{11}) = u(b_1 b_{11} + 5r^2) = u(b_6^2)$.

2. a) Folosim coordonatele complexe şi presupunem că ΔABC este înscris în cercul unitate. Fie a^2, b^2, c^2 afixele vârfurilor A, B, C respectiv. Schimbând eventual semnele numerelor a, b, c deducem [2] că afixele mijloacelor arcelor $\overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}, \overset{\frown}{AB}$ sunt respectiv $-bc, -ca, -ab$. Ecuaţiile bisectoarelor sunt

$$z - a^2bc\bar{z} = a^2 - bc,\quad z - b^2ca\bar{z} = b^2 - ca,\quad z - c^2ab\bar{z} = c^2 - ab,$$

deci afixul punctului I este $-ab - bc - ca$. Cu notaţiile

$$\sigma_1 = a + b + c,\qquad \sigma_2 = ab + bc + ca,\qquad \sigma_3 = abc,$$

deducem $I(-\sigma_2)$.

b) Avem $A'B = |bc + b^2| = |b + c|$, $A'I = |-bc + \sigma_2| = |ab + ac| = |b + c|$, deci $A'B = A'I$, aşadar triunghiul BIA' este isoscel.

c) Dreapta $B'C'$ are ecuaţia $z + a^2bc\bar{z} = -ab - ca$, deci este perpendiculară pe bisectoarea AA', astfel că ortocentrul triunghiului $A'B'C'$ se află pe această bisectoare. Cum latura triunghiului $A'B'C'$ a fost aleasă arbitrar, deducem că acest ortocentru coincide cu punctul I.

d) Avem $AI = |a^2 + \sigma_2| = |(a+b)(a+c)|$, $IA' = |\sigma_2 + bc| = |ab + ac| = |b + c|$, deci egalitatea $AI = IA'$ este echivalentă cu $|(a+b)(a+c)| = |b+c|$ (1).

Calculăm lungimea r a razei cercului înscris în triunghiul ABC : ecuaţia dreptei BC este

$$z + b^2c^2\bar{z} = b^2 + c^2,$$

ecuaţia perpendicularei din I pe BC este

$$z - b^2c^2\bar{z} = -\sigma_2 + \frac{bc\sigma_1}{a},$$

deci piciorul acestei perpendiculare are afixul

$$z = \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - \sigma_2 + \frac{bc\sigma_1}{a}\right).$$

Rezultă

$$r = \left|\frac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - \sigma_2 + \frac{bc\sigma_1}{a}\right) + \sigma_2\right| = \frac{1}{2}|a(b^2 + c^2) + a\sigma_2 + bc\sigma\sigma_1| =$$

$$= \frac{1}{2}|(a+b)(b+c)(c+a)| = \frac{1}{2}|\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3|.$$

Triunghiul ABC este înscris în cercul unitate, deci $R = 1$. Calculăm

$$1 - \cos A = 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}A'B^2 = \frac{1}{2}\left|b^2 + bc\right|^2 = \frac{1}{2}|b + c|^2.$$

Egalitatea $r = R(1-\cos A)$ este deci echivalentă cu

$$\frac{1}{2}\left|(a+b)(b+c)(c+a)\right| = \frac{1}{2}|b+c|^2,$$

care este echivalentă cu (1), deoarece triunghiul ABC este ascuţitunghic, deci $b+c \neq 0$.

II. 1. a) Avem $\sqrt{d+1+2\sqrt{d}} = \sqrt{\left(1+\sqrt{d}\right)^2} = 1+\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

b) Se ştie că $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ are o structură de inel comutativ şi unitar faţă de adunarea şi înmulţirea obişnuite din $\mathbb{R}$, deci în particular este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ faţă de aceste operaţii.

c) Dacă $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, atunci $N(xy) = N(x)N(y)$ (funcţia "normă" este multiplicativă) şi

$N(1) = 1$. Rezultă că x este inversabil în $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ dacă şi numai dacă $N(x)$ este inversabil în $\mathbb{Z}$, deci dacă şi numai dacă $|N(x)| = 1$.

d) Se verifică simplu că $x = m + \sqrt{d} \in U_-$, deci $x^{2n+1} \in U_-$ şi $x^{2n} \in U_+$ pentru orice număr natural n, aşadar cele două mulţimi sunt infinite.

Notă. Toate afirmaţiile rămân adevărate în cazul general ($d > 1$ număr natural liber de pătrate), cu excepţia faptului că dacă unitatea fundamentală a corpului pătratic $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ este de normă 1, atunci $U_- = \varnothing$. Un astfel de exemplu este [3] $d = a^2 + a - 1$, $a \equiv 2 \pmod 5$, pentru care unitatea fundamentală este $\varepsilon = 4ab + 4a + 2b + 1 + 4(b+1)\sqrt{d}$, $b = \dfrac{2a-4}{5}$ şi $N(\varepsilon) = 1$.

2. a) Funcţia f ia numai valori strict pozitive pe $\mathbb{R}$, deci orice primitivă a ei este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ (funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primitive pe $\mathbb{R}$).

b) Avem $\displaystyle\int \frac{\sin x\, dx}{a+\cos x} = -\int (\ln(a+\cos x))'\, dx = -\ln(a+\cos x) + C$.

c) Funcţia f este o funcţie periodică neconstantă, deci nu are limită la $+\infty$.

d) Se face schimbarea de variabilă $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, dar aceasta nu este definită pentru $x = \pi$. Pe intervalele $[0,\pi)$ şi $(\pi, 2\pi]$ o primitivă a funcţiei f este

$$F_1(x) = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\, tg\frac{x}{2}\right)$$

(calcule elementare), deci o primitivă oarecare a funcţiei f pe intervalul $[0,2\pi]$ este

$$F(x)=\begin{cases} F_1(x)+C_1, x\in[0,\pi) \\ C_2, x=\pi \\ F_1(x)+C_3, x\in(\pi,2\pi] \end{cases}.$$

Din condiţia de continuitate a funcţiei F în punctul $x=\pi$ se obţine

$$\lim_{x\nearrow\pi} F(x) = F(\pi) = \lim_{x\searrow\pi} F(x),$$

de unde

$$C_1=C, \quad C_2=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}+C, \quad C_3=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}+C.$$

Funcţia F obţinută astfel este derivabilă în punctul $x=\pi$ şi $F'(\pi)=f(\pi)=\frac{1}{a-1}$ (calcule elementare). Integrala definită poate fi calculată acum cu formula *Leibniz-Newton* :

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = F(2\pi)-F(0)=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Bibliografie

[1] (colectiv) *Culegere de probleme rezolvate pentru admiterea în învăţământul superior*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1989

[2] Hahn, Liang-shin, *Complex Numbers and Geometry*, The Mathematical Association of America, 1994

[3] Mănescu-Avram, C., *O clasă de iraţionale pătratice cu perioada fracţiei continue de lungime 4*, Revista Mateinfo.ro, iunie 2011

CATEDRA DE MATEMATICĂ, GRUPUL ŞCOLAR DE TRANSPORTURI – PLOIEŞTI

E-mail : avram050652@yahoo.com