REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

ISBN 2065-6432

MARTIE 2014

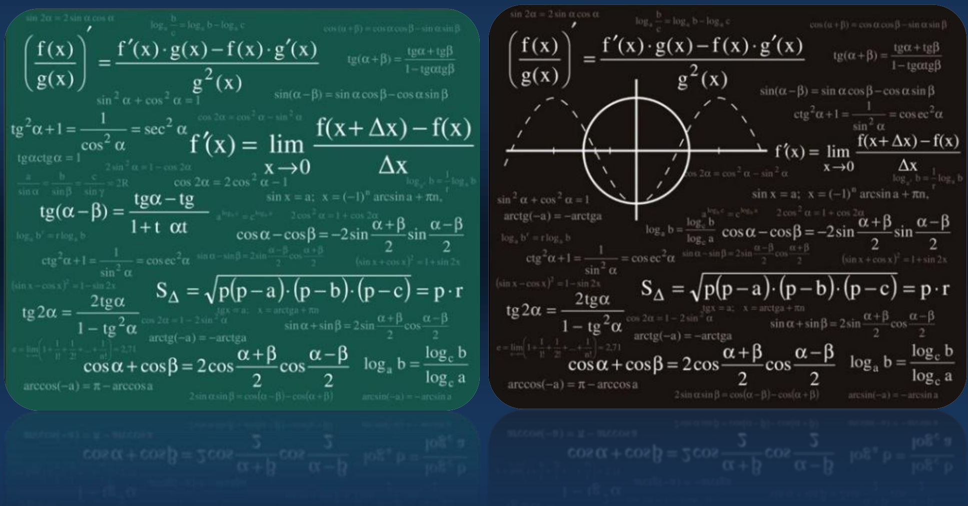
REVISTĂ CU APARIȚIE LUNARĂ

DIN FEBRUARIE 2009

DE 4 ANI ÎN FIECARE LUNĂ

WWW.MATEINFO.RO

revistaelectronica@mateinfo.ro



Articole:

1. Câteva proprietăţi ale unor clase de şiruri

de D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi
Neculai Stanciu, Buzău

1. Introducere.

Considerăm polinomul $P \in R_+[X]$, $gradP = m \in N$, $P = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + ... +$
$+ a_1 X + a_0$, $a_m \in R_+^*$ şi, şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$, $x_n, y_n \in R_+^*$, $\forall n \in N$ cu:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in R_+^*$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n(x_{n+1} - x_n)) = b \in R$

şi există $t \in R_+$ astfel încât:

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_{n+1}}{n^t y_n} = y \in R_+^*$

2. Rezultate principale.

Proprietatea 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n = e^{\frac{b}{x}}$.

Demonstraţie. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1 + \dfrac{x_{n+1} - x_n}{x_n}\right)^{\frac{x_n}{x_{n+1}-x_n}}\right)^{\frac{n(x_{n+1}-x_n)}{x_n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(x_{n+1}-x_n)}{x_n}} = e^{\frac{b}{x}}$.■

Proprietatea 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^t}{\sqrt[n]{y_n}} = \dfrac{e^t}{y}$.

Demonstraţie. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^t}{\sqrt[n]{y_n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^{nt}}{y_n}} \overset{C-D'A}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{(n+1)t}}{y_{n+1}} \cdot \dfrac{y_n}{n^{nt}} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{y_n \cdot n^t}{y_{n+1}}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n+1)t} = \frac{1}{y}\cdot e^t = \frac{e^t}{y}.■$$

Proprietatea 3. $\lim\limits_{n\to\infty}(n(P(x_{n+1}) - P(x_n))) = b \cdot P'(x)$.

Demonstraţie. Avem: $P(x_{n+1}) - P(x_n) = a_m x_{n+1}^m - a_m x_n^m + a_{m-1}x_{n+1}^{m-1} - a_{m-1}x_n^{m-1} +$
$+ a_2(x_{n+1}^2 - x_n^2) + a_1(x_{n+1} - x_n)$, $\forall n \in N^*$, adică:

$P(x_{n+1}) - P(x_n) = (x_{n+1} - x_n)(a_m(x_{n+1}^{m-1} + x_{n+1}^{m-2}x_n + ... + x_{n+1}x_n^{m-2} + x_n^{m-1}) + a_{m-1}(x_{n+1}^{m-2} +$
$+ x_{n+1}^{m-3}x_n + ... + x_{n+1}x_n^{m-3} + x_n^{m-2}) + ... + a_2(x_{n+1} + x_n) + a_1)$, $\forall n \in N^*$.

Rezultă atunci că:

$n(P(x_{n+1}) - P(x_n)) = n(x_{n+1} - x_n)(a_m(x_{n+1}^{m-1} + x_{n+1}^{m-2}x_n + ... + x_{n+1}x_n^{m-2} + x_n^{m-1}) + a_{m-1}(x_{n+1}^{m-2} +$
$+ x_{n+1}^{m-3}x_n + ... + x_{n+1}x_n^{m-3} + x_n^{m-2}) + ... + a_2(x_{n+1} + x_n) + a_1)$, $\forall n \in N^*$.

Trecând la limită cu $n \to \infty$ în ultima relaţie obţinem:

$\lim\limits_{n\to\infty}(n(P(x_{n+1})-P(x_n)))=b(a_m\cdot x^{m-1}\cdot m+a_{m-1}\cdot x^{m-2}\cdot(m-1)+...+a_2\cdot 2\cdot x)=b\cdot P'(x)$.■

Proprietatea 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{P(x_{n+1})}{P(x_n)}\right)^n=e^{\frac{P'(x)}{P(x)}}$.

Demonstraţie. Avem: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{P(x_{n+1})}{P(x_n)}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{P(x_{n+1})-P(x_n)}{P(x_n)}\right)^n=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{P(x_{n+1})-P(x_n)}{P(x_n)}\right)^{\frac{P(x_n)}{P(x_{n+1})-P(x_n)}}\right)^{\frac{n(P(x_{n+1})-P(x_n))}{P(x_n)}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(P(x_{n+1})-P(x_n))}{P(x_n)}}=e^{\frac{P'(x)}{P(x)}}.■$$

Notăm

(4) $$u_n=\frac{P(x_{n+1})}{P(x_n)}\cdot\frac{\sqrt[n+1]{y_{n+1}}}{\sqrt[n]{y_n}}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{t-1},\ \forall n\in N^*-\{1\}.$$

Proprietatea 5. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$.

Demonstraţie. Avem: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{P(x_{n+1})}{P(x_n)}\cdot\frac{\sqrt[n+1]{y_{n+1}}}{(n+1)^t}\cdot\frac{n^t}{\sqrt[n]{y_n}}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=$

$$=\frac{P(x)}{P(x)}\cdot\frac{y}{e^t}\cdot\frac{e^t}{y}\cdot 1=1.■$$

Ca consecinţă, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n}=1$.

Proprietatea 6. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n^n=e^{\frac{P(x)+P'(x)}{P(x)}}$.

Demonstraţie. Avem: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{P(x_{n+1})}{P(x_n)}\right)^n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{y_{n+1}}{y_n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{y_{n+1}}}\cdot e_n^{1-t}\right)=$

$$=e^{\frac{P'(x)}{P(x)}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_{n+1}}{n^t y_n}\cdot\frac{(n+1)^t}{\sqrt[n+1]{y_{n+1}}}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^t\cdot e_n^{1-t}\right)=$$

$$=e^{\frac{P'(x)}{P(x)}}\cdot y\cdot\frac{e^t}{y}\cdot 1\cdot e^{1-t}=e^{\frac{P'(x)}{P(x)}}\cdot e=e^{\frac{P'(x)+P(x)}{P(x)}}.■$$

În continuare, considerăm şirurile:

(5) $$v_n=\frac{P(x_{n+1})\cdot\sqrt[n+1]{y_{n+1}}}{(n+1)^{t-1}}-\frac{P(x_n)\cdot\sqrt[n]{y_n}}{n^{t-1}},\forall n\in N^*-\{1\},t\in R_+$$

(6) $$w_n=\frac{P(x_n)\cdot\sqrt[n+1]{y_{n+1}}}{(n+1)^{t-1}}-\frac{P(x_{n+1})\cdot\sqrt[n]{y_n}}{n^{t-1}},\forall n\in N^*-\{1\},t\in R_+$$

Dacă în (5) considerăm $P=1\in R_+[X]$, $y_n=n!$ şi $t=1$, atunci:

$$v_n=\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!},\forall n\in N^*-\{1\},$$

adică am obţinut şirul lui *Traian Lalescu*.

Dacă în (6) luăm $P=X\in R_+[X], y_n=n!$, $x_n=\sqrt[n]{n}$ şi $t=1$, atunci:

$$w_n=\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n+1]{n+1}\cdot\sqrt[n]{n!},\forall n\in N^*-\{1\},$$

adică am obţinut şirul din problema 25194 din Gazeta Matematică, nr. 11/2004, propusă de *Nicolaie Pavelescu*.

Proprietatea 7. $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=y\big(P(x)+P'(x)\big)e^{-t}$.

Demonstraţie. Avem: $v_n=\dfrac{P(x_{n+1})\cdot\sqrt[n+1]{y_{n+1}}}{(n+1)^{t-1}}-\dfrac{P(x_n)\cdot\sqrt[n]{y_n}}{n^{t-1}}=$

$$=\frac{P(x_n)\cdot\sqrt[n]{y_n}}{n^{t-1}}(u_n-1)=\frac{P(x_n)\cdot\sqrt[n]{y_n}}{n^{t-1}}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n=\frac{P(x_n)\cdot\sqrt[n]{y_n}}{n^{t}}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n,$$

$\forall n\in N^*-\{1\}$. Trecând la limită cu $n\to\infty$ în relaţia de mai sus obţinem:

$$\lim_{n\to\infty}v_n=\lim_{n\to\infty}\frac{P(x_n)\cdot\sqrt[n]{y_n}}{n^t}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln\left(\lim_{n\to\infty}u_n^n\right)=P(x)\cdot\frac{y}{e^t}\cdot 1\cdot\ln\left(e^{\frac{P(x)+P'(x)}{P(x)}}\right)=$$

$$=\frac{y\cdot P(x)}{e^t}\cdot\frac{P(x)+P'(x)}{P(x)}=\frac{y(P(x)+P'(x))}{e^t}.\blacksquare$$

Observaţie. În cazul particular $P=1\in R_+[X]$, $y_n=n!$, $\forall n\in N^*-\{1\}$, $t=1$, obţinem $y=1$, $P'(x)=0$ şi $v_n=\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!},\forall n\in N^*-\{1\}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=1(1+0)e^{-1}=\dfrac{1}{e}$, adică am obţinut limita şirului lui *Traian Lalescu*.

Proprietatea 8. $\lim\limits_{n\to\infty}w_n=\dfrac{y\big(P(x)-P'(x)\big)}{e^t}$.

Demonstraţie. Avem: $w_n=\dfrac{P(x_{n+1})\cdot\sqrt[n]{y_n}}{n^{t-1}}(\omega_n-1)=\dfrac{P(x_{n+1})\cdot\sqrt[n]{y_n}}{n^{t-1}}\cdot\dfrac{\omega_n-1}{\ln\omega_n}\cdot\ln\omega_n=$

$$=\frac{P(x_{n+1})\cdot\sqrt[n]{y_n}}{n^t}\cdot\frac{\omega_n-1}{\ln\omega_n}\cdot\ln\omega_n^n,\ \forall n\in N^*-\{1\},$$

unde $\omega_n=\dfrac{P(x_n)}{P(x_{n+1})}\cdot\dfrac{\sqrt[n+1]{y_{n+1}}}{\sqrt[n]{y_n}}\cdot\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{t-1}$, $\forall n\in N^*-\{1\}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n=1$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\omega_n-1}{\ln\omega_n}=1$.

De asemenea avem: $\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{P(x_{n+1})}{P(x_n)}\right)^n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{y_{n+1}}{y_n}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[n+1]{y_{n+1}}}\right)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}e_n^{1-t}=$

$$=e^{1-t}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{P(x_{n+1})}{P(x_n)}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_{n+1}}{n^t y_n}\cdot\frac{(n+1)^t}{\sqrt[n+1]{y_{n+1}}}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^t\right)=$$

$$=e^{1-t}\cdot y\cdot\frac{e^t}{y}\cdot 1\cdot e^{-\frac{P'(x)}{P(x)}}=e^{1-\frac{P'(x)}{P(x)}}=e^{\frac{P(x)-P'(x)}{P(x)}}.$$

Obţinem că: $\lim_{n\to\infty} w_n = P(x)\cdot y\cdot\frac{1}{e^t}\cdot\frac{P(x)-P'(x)}{P(x)}=\frac{y(P(x)-P'(x))}{e^t}$.■

Observaţie. Dacă $P=X\in R_+[X]$, $y_n=n!$, $x_n=\sqrt[n]{n}$, $\forall n\in N^*-\{1\}$ şi $t=1$, atunci obţinem că: $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n+1]{n+1}\cdot\sqrt[n]{n!}\right)=\frac{1\cdot(P(1)-P'(1))}{e}=\frac{P(1)}{e}=\frac{1}{e}$, adică rezultatul problemei 25194 din Gazeta Matematică, nr. 11/2004.

Remarcă. Cu metodele folosite mai sus se pot rezolva:

- **Problema 579**, Gazeta Matematică, Vol. VI, 1900-1901, pp. 33-38 ;
- **Problem 692**, The Pentagon, Vol. 71, No. 1, 2011, p. 54;
- **Problem 5208**, School Science and Mathematics Journal, April 2012;
- **Problem 24**, MathProblems, Vol. 1, No. 4, 2011, p. 33;
- **Problem 43**, Math Problems, Vol. 2, No. 3, 2012, p. 91;
- **Problem 67**, MathProblems, Vol. 3, No. 2, 2013, p. 140;
- **Problem 704**, The Pentagon, Vol. 71, No. 2, 2012, p.42;
- **Problem 11676**, The American Mathematical Monthly, Vol. 119, No. 9, November 2012, p. 801;
- **Problem 3713**, Crux Mathematicorum, Vol. 38, No. 2, February 2012, p.63;
- **Problem 715**, The Pentagon, Vol 72, No. 1, p. 44;
- **Problem 234**, La Gaceta de la RSME, Vol. 16, No. 3, 2013, p. 502;
- **Problem 241**, Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matematica, No. 49, 2013;
- **Problem 3764**, Crux Mathematicorum, Vol. 38, No. 7, September 2012, p.285;
- **Problem W3**, József Wildt International Mathematical Competition, The Edition XXIII, 2013, Octogon Mathematical Magazine, Vol. 21, No.1, April, 2013, p. 229;
- **Problem 75,** MathProblems, Vol. 3, No.3, 2013, p. 171, și multe alte probleme din diverse reviste de problem solving.

2. Other solutions from some Problems from La Gaceta de la RSME

By Nela Ciceu, Roșiori, Bacău, Romania
and
Roxana Mihaela Stanciu, Buzău, Romania

PROBLEMA 219. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Universidad Complutense, Madrid.*

Probar que, para $x, y > 0$ y $t > -1/4$,

$$\frac{xy(x^2+xy+y^2)}{3} \le \frac{(x^2+y^2)^2+4txy(x^2+xy+y^2)}{4+12t} \le x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4.$$

Solution.

Multiplying the following two inequalities

$$x^2+y^2 \ge 2xy \text{ and}$$

$$3(x^2+y^2) \ge 2(x^2+xy+y^2) \ (\Leftrightarrow x^2+y^2 \ge 2xy), \text{ which are true,}$$

we obtain

$$4xy(x^2+xy+y^2) \le 3(x^2+y^2)^2 \tag{1}$$

Because the denominators are positively, the left inequality becomes

$$4xy(x^2+xy+y^2)+12txy(x^2+xy+y^2) \le 3(x^2+y^2)^2+12txy(x^2+xy+y^2)$$

$\Leftrightarrow 4xy(x^2+xy+y^2) \le 3(x^2+y^2)^2$, i.e. the inequality (1).

Writing

$$x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4=(x^2+y^2)^2-xy(x^2+xy+y^2),$$

the right inequality becomes

$(x^2+y^2)^2+4txy(x^2+xy+y^2) \le 4(x^2+y^2)^2-4xy(x^2+xy+y^2)+$
$+12t(x^2+y^2)^2-12txy(x^2+xy+y^2) \Leftrightarrow 4(4t+1)xy(x^2+xy+y^2) \le 3(x^2+y^2)(4t+1)$, i.e. again the inequality (1), and the proof is complete.

PROBLEMA 220. *Propuesto por Yagub N. Aliyev, Qafqaz University, Khyrdalan, Azerbaiyán.*

Sean O, A y B tres puntos en el plano tales que $\angle AOB = \pi/2$, y sean C y D dos puntos arbitrarios situados, respectivamente, en los segmentos OA y OB. Si E es el punto de intersección de los segmentos AD y BC y $\angle DEB = \alpha$, probar que

$$|BD|^2 \cdot \cot\alpha + |AC| \cdot (|BO| + |OD|) \geq 2\sqrt{|OD| \cdot |OB| \cdot (|AC|^2 + |BD|^2)}.$$

Solution.

Denoting $OA = a, OB = b, OC = c, OD = d$, we have

$\tan\alpha = -\tan(\angle EBD + \angle BDA) =$

$$= -\tan(180^0 - \angle ADO + \angle EBD) = \tan(\angle ADO - \angle EBD) = \frac{\frac{a}{d} - \frac{c}{b}}{1 + \frac{a}{d}\cdot\frac{c}{b}} = \frac{ab - dc}{ac + bd}, \text{ so}$$

$$\cot\alpha = \frac{ac + bd}{ab - cd}.$$

The given inequality is successively written

$$(b-d)^2 \cdot \frac{ac+bd}{ab-cd} + (a-c)(b+d) \geq 2\sqrt{bd(a-c)^2 + bd(b-d)^2}$$

$$\Leftrightarrow (b-d)^4\left(\frac{ac+bd}{ab-cd}\right)^2 + (a-c)^2(b+d)^2 + 2(a-c)(b+d)(b-d)\cdot\frac{ac+bd}{ab-cd} \geq$$

$$\geq 4bd(a-c)^2 + 4bd(b-d)^2.$$

Since $(a-c)^2(b+d)^2 - 4bd(a-c)^2 = (a-c)^2(b-d)^2$, after division by $(b-d)^2$ we obtain

$$(b-d)^2\left(\frac{ac+bd}{ab-cd}\right)^2 + (a-c)^2 + 2(a-c)(b+d)\cdot\frac{ac+bd}{ab-cd} \geq 4bd$$

$$\Leftrightarrow (b^2 - 2bd + d^2)(a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd) + (a^2 - 2ac + c^2)(a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd) +$$

$$+ 2(ab + ad - bc - cd)(a^2bc - ac^2d + ab^2d - bcd^2) \geq 4bd(a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd),$$ and after some algebra the previous inequality is equivalent with

$\left(bd(b-d) - (a^2b - c^2d)\right)^2 \geq 0$, which is true, and the proof is complete.

Problema 221. *Propuesto por Panagiote Ligouras, "Leonardo da Vinci" High School, Noci, Italia.*

En un triángulo ABC denotamos por a, b y c las longitudes de los lados BC, CA y AB, respectivamente, y por p su semiperímetro. Sea D el punto de intersección de la bisectriz interior del ángulo CAB con el lado BC, y sean P y Q, respectivamente, los pies de las perpendiculares desde D a los lados AB y CA. Probar que

$$PQ = \frac{2p(p-a)}{b+c}\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{bc}}.$$

Nota. En el enunciado original de este problema se decía: "Sea D el punto de intersección de la bisectriz interior del ángulo CAB con el lado AB". Obviamente se trataba de un error puesto que debía ser "con el lado BC", como aparece en la versión que ahora presentamos. En todas las soluciones recibidas se ha observado ese error y se ha procedido a resolver el problema con el enunciado correcto.

Solution 1. Because $\angle APD + \angle DQA = 180^0$, the quadrilateral $APDQ$ is cyclic, and the diameter of this circumscrible circle is AD.
We know that

$$AD = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}, \text{ and}$$

by the Sine Law we obtain that:

$$PQ = AD\sin A = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} =$$

$$= \frac{4bc}{b+c}\cos^2\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2} = \frac{4bc}{b+c}\cdot\frac{p(p-a)}{bc}\cdot\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} =$$

$$= \frac{2p(p-a)}{b+c}\sqrt{\frac{2(p-b)\cdot 2(p-c)}{bc}} = \frac{2p(p-a)}{b+c}\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{bc}}.$$

Solution 2. Let $\{T\} = AD \cap PQ$. From the equality of triangles APD and AQD (the case hypotenuse-acute angle) yields $AP = AQ$. In isosceles triangle APQ, AT is bisector, so T is the middle of PQ. Hence:

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{AQ}{AD} \Rightarrow AQ = AD\cos\frac{A}{2} = \frac{2bc\cos^2\frac{A}{2}}{b+c} = \frac{2p(p-a)}{b+c}, \text{ and}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{TQ}{AQ} \Rightarrow PQ = 2\cdot TQ = 2AQ\cdot\sin\frac{A}{2} = \frac{4p(p-a)}{b+c}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \text{ and we are done.}$$

3. Other solutions for some problems from School Science and Mathematics

By Nela Ciceu, Roșiori, Bacău, Romania
and
Roxana Mihaela Stanciu, Buzău, Romania

- **5277:** *Proposed by Kenneth Korbin, New York, NY*

  Find x and y if a triangle with sides $(2013, 2013, x)$ has the same area and the same perimeter as a triangle with sides $(2015, 2015, y)$.

Solution.

Let $x = 2a + 2$. Since the triangles has the same perimeter yields that $y = 2a - 2$. The semiperimeter of the given triangles is $2014 + a$. Using the Heron formulas and since the triangles has the same area we obtain successively :

$$(2014 + a - 2013)^2 (2014 + a - 2a - 2) = (2014 + a - 2015)^2 (2014 + a - 2a + 2)$$

$$\Leftrightarrow (a+1)^2 (2012 - a) = (a-1)^2 (2016 - a)$$

$$\Leftrightarrow a^2 (2012 - a - 2016 + a) + 2a(2012 - a + 2016 - a) + 2012 - a - 2016 + a = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 2014a + 1 = 0.$$

Since $a > 1$, we obtain only the solution $a = \dfrac{1007 + 12\sqrt{7042}}{2}$, whih yields that $x = 1009 + 12\sqrt{7042}$ and $y = 1005 + 12\sqrt{7042}$, and we are done.

- **5278:** *Proposed by Tom Moore, Bridgewater State University, Bridgewater, MA*

  The triangular numbers $6 = (2)(3)$ and $10 = (2)(5)$ are each twice a prime number. Find all triangular numbers that are twice a prime.

Solution.

Let p a prime number; we must to determine n such that $n(n+1) = 4p$. Since n and $n+1$ are coprime we have the possibilities

(i) $n = pk$, where k is positive integer; yields $k(pk+1) = 4$ and we obtain only one solution, i.e. $k = 1, p = 3, n = 3$, i.e. the triangular number 6;

(ii) $n+1 = pk$, k is positive integer; yields $k(pk-1) = 4$ and we obtain only one solution, i.e. $k=1, p=5, n=4$, i.e. the triangular number 10.
Therefore the triangular numbers that are twice a prime are 6 and 10.

- **5279:** *Proposed by D.M. Bătinetu–Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucharest, Romania and Neculai Stanciu, "Geroge Emil Palade" General School, Buzu, Romania*

  Let $f : \Re_+ \longrightarrow \Re_+$ be a convex function on $\Re_+$, where $\Re_+$ stands for the positive real numbers. Prove that

  $$3\left(f^2(x) + f^2(y) + f^2(z)\right) - 9f^2\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq (f(x)-f(y))^2 + (f(y)-f(z))^2 + (f(z)-f(x))^2.$$

Solution.

Applying Jensen's inequality for the function f we have

$f(x)+f(y)+f(z) \geq 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$, for any $x, y, z > 0$ which yields that

$$(f(x)+f(y)+f(z))^2 \geq 9f^2\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow -3f^2\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq -\frac{(f(x)+f(y)+f(z))^2}{3} \qquad (1)$$

Considering the function $f^2 : R_+ \to R_+$, we have that $(f^2(x))' = 2f(x)f'(x)$, for any $x > 0$ and $(f^2(x))'' = 2(f'(x))^2 + 2f(x)f''(x) > 0$, for any $x > 0$. We get f^2 is convex on R_+. Using Jensen's inequality for the function f we have

$$f^2(x) + f^2(y) + f^2(z) \geq 3f^2\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \qquad (2)$$

From (1) and (2) we obtain that

$$f^2(x) + f^2(y) + f^2(z) - 3f^2\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq$$

$$\geq f^2(x) + f^2(y) + f^2(z) - \frac{(f(x)+f(y)+f(z))^2}{3} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[(f(x)-f(y))^2 + (f(y)-f(z))^2 + (f(z)-f(x))^2\right],$$

Hence

$$3\left(f^2(x) + f^2(y) + f^2(z)\right) - 9f^2\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq (f(x)-f(y))^2 + (f(y)-f(z))^2 + (f(z)-f(x))^2.$$

Q.E.D.

4. OPERAŢII CU VECTORI - APLICAŢII

prof. Pop Adrian

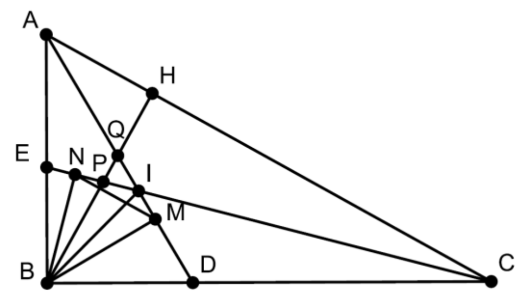
Colegiul Naţional “Gheorghe Şincai”, Baia Mare

1. Înălţimea BH dusă pe ipotenuza ΔABC intersectează bisectoarele AD şi CE în punctele Q, respectiv P. Demonstraţi că dreapta care trece prin mijloacele segmentelor [QD] şi [PE] este paralelă cu dreapta AC.

Olimpiada Naţională 2012.

Rezolvare.
Fie M mijlocul segmentului [QD] şi N mijlocul segmentului [PE]

Vom demonstra că vectorii $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{AC}$ sunt coliniari.



Din teorema catetei aplicată în ΔABC obţinem:

$$\left.\begin{array}{l} AB^2 = AH \cdot AC \Rightarrow AH = \dfrac{c^2}{b} \\ BC^2 = CH \cdot AC \Rightarrow CH = \dfrac{a^2}{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{c^2}{a^2}. \ (1)$$

Din teorema bisectoarei aplicată în ΔABC pentru bisectoarea $(AD$ deducem:

$$\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{BC}{DB} = \frac{b+c}{c}. \ (2)$$

Din teorema lui Menelaus aplicată în ΔACD cu transversala QH obţinem:

$$\frac{QD}{QA} \cdot \frac{HA}{HC} \cdot \frac{BC}{BD} = 1 \Rightarrow \frac{QA}{QD} = \frac{HA}{HC} \cdot \frac{BC}{BD}. \ (3)$$

Din relaţiile (1)-(3) deducem că

$$\frac{QA}{QD} = \frac{HA}{HC} \cdot \frac{BC}{BD} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{b+c}{c} = \frac{c^2}{b^2 - c^2} \cdot \frac{b+c}{c} = \frac{c}{b-c}$$ $\Rightarrow$ punctul Q împarte segmentul [AD]

în raportul $k = \dfrac{QA}{QD} = \dfrac{c}{b-c}$, prin urmare

$$\overrightarrow{BQ} = \frac{\overrightarrow{BA} + k\overrightarrow{BD}}{1+k} = \frac{\overrightarrow{BA} + \dfrac{c}{b-c} \cdot \overrightarrow{BD}}{1 + \dfrac{c}{b-c}} = \frac{b-c}{b} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{c}{b} \cdot \overrightarrow{BD}.$$

În ΔBDQ M este mijlocul segmentului [QD] $\Rightarrow$

$$\overrightarrow{BM}=\frac{\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{BD}}{2}=\frac{b-c}{2b}\cdot\overrightarrow{BA}+\frac{c}{2b}\cdot\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{b-c}{2b}\cdot\overrightarrow{BA}+\frac{b+c}{2b}\cdot\overrightarrow{BD}=$$
$$=\frac{b-c}{2b}\cdot\overrightarrow{BA}+\frac{b+c}{2b}\cdot\frac{c}{b+c}\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{BM}=\frac{b-c}{2b}\cdot\overrightarrow{BA}+\frac{c}{2b}\cdot\overrightarrow{BC}$$

Analog se demonstrează că:

$$\overrightarrow{BN}=\frac{b-a}{2b}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{a}{2b}\cdot\overrightarrow{BA}.$$

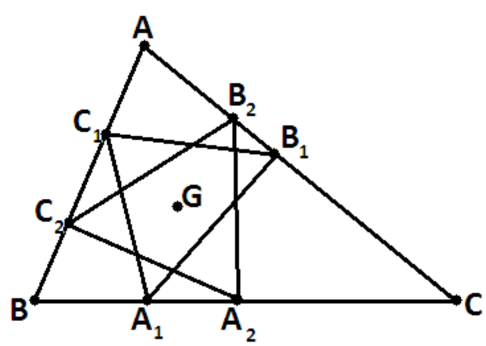
Prin urmare

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BM}=\frac{b-a}{2b}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{a}{2b}\cdot\overrightarrow{BA}-\frac{b-c}{2b}\cdot\overrightarrow{BA}-\frac{c}{2b}\cdot\overrightarrow{BC}=$$
$$=\frac{b-a-c}{2b}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{a-b+c}{2b}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{a+c-b}{2b}\cdot\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right)=\frac{a+c-b}{2b}\cdot\overrightarrow{CA}\Rightarrow$$
$$\overrightarrow{MN}=\frac{a+c-b}{2b}\cdot\overrightarrow{CA}\Rightarrow MN\parallel AC.$$

2. Pe laturile ΔABC se consideră punctele $C_1,C_2\in(AB), B_1,B_2\in(AC), A_1,A_2\in(BC)$ astfel încât $\Delta A_1B_1C_1$ şi $\Delta A_2B_2C_2$ au acelaşi centru de greutate. Arătaţi că mulţimile $[A_1B_1]\cap[A_2B_2]$, $[B_1C_1]\cap[B_2C_2]$, $[C_1A_1]\cap[C_2A_2]$ sunt nevide.

Olimpiada Naţională 2008.

Rezolvare.



Fie G centrul de greutate comun al $\Delta A_1B_1C_1$ şi $\Delta A_2B_2C_2$ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GB_1}+\overrightarrow{GC_1}=\vec{0}\\ \overrightarrow{GA_2}+\overrightarrow{GB_2}+\overrightarrow{GC_2}=\vec{0}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\overrightarrow{GA_2}-\overrightarrow{GA_1}\right)+\left(\overrightarrow{GB_2}-\overrightarrow{GB_1}\right)+\left(\overrightarrow{GC_2}-\overrightarrow{GC_1}\right)=\vec{0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\vec{0},\ (1).$$

Din $A_1,A_2\in(BC)\Rightarrow\exists\alpha\in\mathbf{R}$ *astfel încât* $\overrightarrow{A_1A_2}=\alpha\cdot\overrightarrow{BC}$

$B_1,B_2\in(AC)\Rightarrow\exists\beta\in\mathbf{R}$ *astfel încât* $\overrightarrow{B_1B_2}=\beta\cdot\overrightarrow{CA}$ (2).

$$C_1, C_2 \in (AB) \Rightarrow \exists \gamma \in \mathbf{R} \quad \textit{astfel} \quad \textit{încât} \quad \overrightarrow{C_1C_2} = \gamma \cdot \overrightarrow{AB}$$

Din relaţiile (1) şi (2) $\Rightarrow \alpha \cdot \overrightarrow{BC} + \beta \cdot \overrightarrow{CA} + \gamma \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha \cdot \overrightarrow{BC} + \beta \cdot \overrightarrow{CA} + \gamma \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} (\alpha - \gamma) \cdot \overrightarrow{BC} = (\gamma - \beta) \cdot \overrightarrow{CA} \\ Dar \quad \overrightarrow{BC} \quad si \quad \overrightarrow{CA} \quad nu \quad sunt \quad coliniari \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \gamma = 0 \\ \gamma - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma$$

Dacă $\alpha > 0$, din $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{A_1A_2} = \alpha \cdot \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{B_1B_2} = \alpha \cdot \overrightarrow{CA} \\ \overrightarrow{C_1C_2} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A_1 \in (BA_2) \\ B_1 \in (CB_2) \\ C_1 \in (AC_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{concluzia}$.

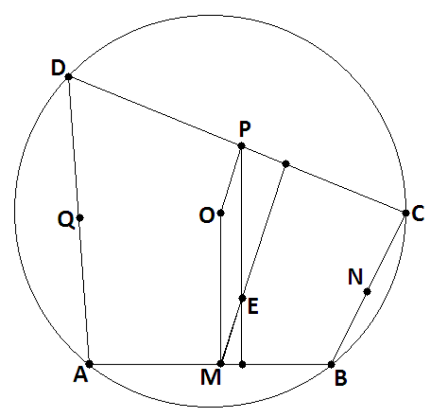
Dacă $\alpha < 0$, din $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{A_1A_2} = \alpha \cdot \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{B_1B_2} = \alpha \cdot \overrightarrow{CA} \\ \overrightarrow{C_1C_2} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A_2 \in (BA_1) \\ B_2 \in (CB_1) \\ C_2 \in (AC_1) \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{concluzia}$.

3. Fie ABCD un patrulater inscriptibil iar M, N, P, Q mijloacele laturilor (AB), (BC), (CD) respectiv (DA). Arătaţi că perpendicularele din M pe CD, din N pe DA, din P pe AB şi din Q pe BC sunt concurente.

Concurs Traian Lalescu 2003.

Rezolvare.

Fie O centrul cercului circumscris patrulaterului ABCD, iar E intersecţia dintre perpendiculara din M pe CD şi perpendiculara din P pe AB.



$$\left.\begin{array}{l} Din \left.\begin{array}{l} OM \perp AB \\ PE \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow OM \parallel PE \\ Din \left.\begin{array}{l} OP \perp CD \\ ME \perp CD \end{array}\right\} \Rightarrow OP \perp ME \end{array}\right\} \Rightarrow OMEP \quad parale\log ram \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}}{2} + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} =$$

$$= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}}{2}, \quad (1).$$

Fie F intersecţia dintre perpendiculara din N pe DA şi perpendiculara din Q pe BC$\Rightarrow$ OQFN parallelogram $\Rightarrow$

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}}{2} + \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}}{2}, \quad (2).$$

Di relaţiile (1) şi (2) $\Rightarrow \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OF} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}}{2} \Rightarrow$ E = F $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ perpendicularele din M pe CD, din N pe DA, din P pe AB şi din Q pe BC sunt concurente.

Bibliografie: www.olimpiade.ro
Olimpiada de matematică 2006-2010, Editura Sigma 2010.
Exerciţii şi probleme de matematică pentru clasa a IX-a, RMT, Editura Bîrchi

5. Another solution for problem 3708

By Daniel Văcaru, Pitești

In *Crux Mathematicorum*, 1/2012, has appear problem

3708. *Proposed by VáclavKonečný, Big Rapids, MI, USA*

Construct the isosceles trapezoid with three equal sides a, with a straightedge and a compass alone, provided that its base $b = AB$ and the angle α ($0° < \alpha < 90°$) at the base are given.

Solution

One presume problem solved.
One has$m(\widehat{CBA}) = m(\widehat{DCE}) = \propto$. One has $\Delta ENC \approx \Delta EMB$. Therefore, one has

$$\frac{NC}{BM} = \frac{EC}{EB} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{\sin\propto}}{\frac{a}{\sin\alpha} + a} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a}{a + a\sin\alpha} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{1+\sin\alpha} = \frac{1-\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\cos^2\alpha} = \frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{1}{\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}.$$

Therefore, one obtain

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} \rightarrow a = \frac{b}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}.$$

One construct, with the straightedge, a line perpendicular over *AB* and an segment [*BM*] with *BM* = *b*. One has $m(\widehat{MBC}) = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Using compass, one construct [*BX*, angle bisector of $\widehat{MBC}$, using the property of rhombus. With the straightedge, one construct $MQ \perp MB$, where *Q* is the intersection of this perpedicular and [*BX*. Next, one construct the midpoint of *BQ*. One note this point *U*. With the straightedge, one construct perpendicular $UW \perp BX$and intersect this perpendicular with [*BC*, which is already constructed. This is the desired point, *C*. With the compass, one construct [*AD*], with support right [*AD*, already knowed. ■

6. ŞIRURI DE ARII DE SUPRAFEŢE PĂTRATICE

Prof. Văcărean Sorina

Colegiul Naţional „George Bariţiu”, Cluj-Napoca

$\boxed{1.}$ Se consideră pătratul $ABCD$. Fie $A_1 \in (AB)$, $B_1 \in (BC)$, $C_1 \in (CD)$, $D_1 \in (DA)$ astfel încât $\frac{AA_1}{AB} = \frac{BB_1}{BC} = \frac{CC_1}{CD} = \frac{DD_1}{DA} = \frac{1}{k}$, $A_2 \in (A_1B_1)$, $B_2 \in (B_1C_1)$, $C_2 \in (C_1D_1)$, $D_2 \in (D_1A_1)$ astfel încât $\frac{A_1A_2}{A_1B_1} = \frac{B_1B_2}{B_1C_1} = \frac{C_1C_2}{C_1D_1} = \frac{D_1D_2}{D_1A_1} = \frac{1}{k}$, $A_3 \in (A_2B_2)$, $B_3 \in (B_2C_2)$, $C_3 \in (C_2D_2)$, $D_3 \in (D_2A_2)$ astfel încât $\frac{A_2A_3}{A_2B_2} = \frac{B_2B_3}{B_2C_2} = \frac{C_2C_3}{C_2D_2} = \frac{D_2D_3}{D_2A_2} = \frac{1}{k}$, …, $A_n \in (A_{n-1}B_{n-1})$, $B_n \in (B_{n-1}C_{n-1})$, $C_n \in (C_{n-1}D_{n-1})$, $D_n \in (D_{n-1}A_{n-1})$ astfel încât $\frac{A_{n-1}A_n}{A_{n-1}B_{n-1}} = \frac{B_{n-1}B_n}{B_{n-1}C_{n-1}} = \frac{C_{n-1}C_n}{C_{n-1}D_{n-1}} = \frac{D_{n-1}D_n}{D_{n-1}A_{n-1}} = \frac{1}{k}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, unde $A_0 = A$, $B_0 = B$, $C_0 = C$ şi $D_0 = D$. Se notează cu s_i aria suprafeţei patrulaterului $A_iB_iC_iD_i$, $i \in \mathbb{N}$, exprimată în u^2.

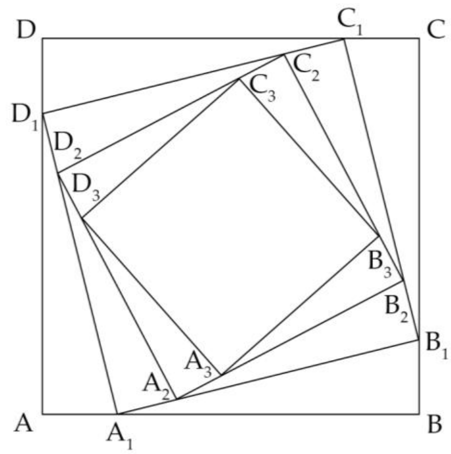
a) Calculaţi s_n în funcţie de s_0, $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

c) Calculaţi $\sum\limits_{i=0}^{n} s_i$, $n \in \mathbb{N}$.

d) Arătaţi că $s_n^{\ 2} = s_{n-1} \cdot s_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare:



a) i) Calculăm s_1 în funcţie de s_0.

Se arată că patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$ este pătrat şi că

$$A_{\triangle D_1AA_1} = A_{A_1BB_1} = A_{\triangle B_1CC_1} = A_{\triangle C_1DD_1} = \frac{k-1}{2k^2}s_0.$$

$$s_1 = A_{A_1B_1C_1D_1} = A_{ABCD} - 4A_{\triangle A_1BB_1} = s_0 - 4\cdot\frac{k-1}{2k^2}s_0 = \frac{k^2-2k+2}{k^2}s_0.$$

ii) Calculăm s_2 în funcţie de s_0.

Urmând raţionamentul de la i), $s_2 = \frac{k^2-2k+2}{k^2}s_1 = \left(\frac{k^2-2k+2}{k^2}\right)^2 s_0$.

iii) Calculăm s_3 în funcţie de s_0.

Urmând raţionamentul de la i), $s_3 = \frac{k^2-2k+2}{k^2}s_2 = \left(\frac{k^2-2k+2}{k^2}\right)^3 s_0$

iv) Calculăm s_n în funcţie de s_{n-1}, $n \in \mathbb{N}^*$.

Urmând raţionamentul de la i), obţinem formula de recurenţă ce caracterizează şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$s_n = \frac{k^2-2k+2}{k^2}s_{n-1},\ n \in \mathbb{N}^*,\ s_0 > 0.$$

v) Calculăm s_n în funcţie de s_0, $n \in \mathbb{N}$.

Pornind de la formula de recurenţă ce caracterizează şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, obţinem:

$$s_n = \left(\frac{k^2-2k+2}{k^2}\right)^n s_0,\ n \in \mathbb{N}.$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{k^2-2k+2}{k^2}\right)^n s_0 = 0$, întrucât $\frac{k^2-2k+2}{k^2} < 1,\ \forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

c) $\sum_{i=0}^{n} s_i = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{k^2 - 2k + 2}{k^2} \right)^i s_0 = \frac{k^2}{2(k-1)} \left[1 - \left(\frac{k^2 - 2k + 2}{k^2} \right)^{n+1} \right] s_0$.

d) Aplicând formula de recurenţă ce caracterizează şirul $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avem:

$$s_{n+1} \cdot s_{n-1} = \frac{k^2 - 2k + 2}{k^2} s_n \cdot s_{n-1} = s_n{}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$\boxed{2.}$ Acelaşi text ca la problema 1, în ipoteza că valoarea comună a tuturor şirurilor de rapoarte egale este $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a < b$.

Rezolvare:

a) i) Calculăm s_1 în funcţie de s_0.

Se arată că patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$ este pătrat şi că

$$A_{\triangle D_1AA_1} = A_{A_1BB_1} = A_{\triangle B_1CC_1} = A_{\triangle C_1DD_1} = \frac{a(b-a)}{2b^2} s_0.$$

$$s_1 = A_{A_1B_1C_1D_1} = A_{ABCD} - 4A_{\triangle A_1BB_1} = s_0 - 4 \cdot \frac{a(b-a)}{2b^2} s_0 = \frac{2a^2 - 2ab + b^2}{b^2} s_0.$$

ii) Calculăm s_2 în funcţie de s_0.

Urmând raţionamentul de la i), $s_2 = \frac{2a^2 - 2ab + b^2}{b^2} s_1 = \left(\frac{2a^2 - 2ab + b^2}{b^2} \right)^2 s_0$.

iii) Calculăm s_3 în funcţie de s_0.

Urmând raţionamentul de la i), $s_3 = \frac{2a^2 - 2ab + b^2}{b^2} s_2 = \left(\frac{2a^2 - 2ab + b^2}{b^2} \right)^3 s_0$

iv) Calculăm s_n în funcţie de s_{n-1}, $n \in \mathbb{N}^*$.

Urmând raţionamentul de la i), obţinem formula de recurenţă ce caracterizează şirul $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$s_n = \frac{2a^2 - 2ab + b^2}{b^2} s_{n-1},\ n \in \mathbb{N}^*,\ s_0 > 0.$$

v) Calculăm s_n în funcţie de s_0, $n \in \mathbb{N}$.

Pornind de la formula de recurenţă ce caracterizează şirul $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, obţinem:

$$s_n = \left(\frac{2a^2 - 2ab + b^2}{b^2} \right)^n s_0,\ n \in \mathbb{N}.$$

b) $\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2a^2 - 2ab + b^2}{b^2} \right)^n s_0 = 0$, întrucât $\frac{2a^2 - 2ab + b^2}{b^2} < 1$, $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$, $a < b$.

c) $\sum_{i=0}^{n} s_i = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{2a^2-2ab+b^2}{b^2} \right)^i s_0 = \frac{b^2}{2a(b-a)} \left[1 - \left(\frac{2a^2-2ab+b^2}{b^2} \right)^{n+1} \right] s_0$.

d) Aplicând formula de recurenţă ce caracterizează şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avem:

$s_{n+1} \cdot s_{n-1} = \frac{2a^2-2ab+b^2}{b^2} s_n \cdot s_{n-1} = s_n{}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

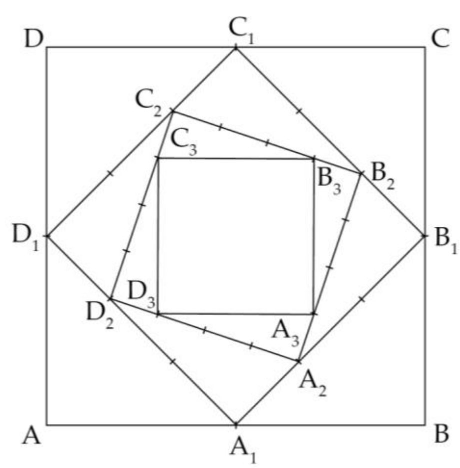
$\boxed{3.}$ Se consideră pătratul $ABCD$. Fie $A_1 \in (AB)$, $B_1 \in (BC)$, $C_1 \in (CD)$, $D_1 \in (DA)$ astfel încât $\frac{AA_1}{AB} = \frac{BB_1}{BC} = \frac{CC_1}{CD} = \frac{DD_1}{DA} = \frac{1}{2}$, $A_2 \in (A_1B_1)$, $B_2 \in (B_1C_1)$, $C_2 \in (C_1D_1)$, $D_2 \in (D_1A_1)$ astfel încât, $\frac{A_1A_2}{A_1B_1} = \frac{B_1B_2}{B_1C_1} = \frac{C_1C_2}{C_1D_1} = \frac{D_1D_2}{D_1A_1} = \frac{1}{3}$, $A_3 \in (A_2B_2)$, $B_3 \in (B_2C_2)$, $C_3 \in (C_2D_2)$, $D_3 \in (D_2A_2)$ astfel încât $\frac{A_2A_3}{A_2B_2} = \frac{B_2B_3}{B_2C_2} = \frac{C_2C_3}{C_2D_2} = \frac{D_2D_3}{D_2A_2} = \frac{1}{4}$, ..., $A_n \in (A_{n-1}B_{n-1})$, $B_n \in (B_{n-1}C_{n-1})$, $C_n \in (C_{n-1}D_{n-1})$, $D_n \in (D_{n-1}A_{n-1})$ astfel încât $\frac{A_{n-1}A_n}{A_{n-1}B_{n-1}} = \frac{B_{n-1}B_n}{B_{n-1}C_{n-1}} = \frac{C_{n-1}C_n}{C_{n-1}D_{n-1}} = \frac{D_{n-1}D_n}{D_{n-1}A_{n-1}} = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, unde $A_0 = A$, $B_0 = B$, $C_0 = C$ şi $D_0 = D$. Se notează cu s_j aria suprafeţei patrulaterului $A_jB_jC_jD_j$, $j \in \mathbb{N}$, exprimată în u^2.

a) Calculaţi s_n în funcţie de s_0, $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculaţi $\lim_{n\to\infty} s_n$.

c) Arătaţi că $s_n{}^2 < s_{n-1} \cdot s_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare:



a) Patrulaterele $A_nB_nC_nD_n$, $n\in\mathbb{N}$, sunt pătrate.
Utilizăm formula găsită la problema 1 a) iv):

$$(1)\quad s_i=\frac{k^2-2k+2}{k^2}s_{i-1},\ i\in\mathbb{N}^*,\ k\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\},\ s_0>0.$$

i) Calculăm s_1 în funcţie de s_0.

Din (1), pentru $i=1$ şi $k=2$ avem: $s_1=\frac{1}{2}s_0$.

ii) Calculăm s_2 în funcţie de s_0.

Din (1), pentru $i=2$ şi $k=3$ şi din i), avem: $s_2=\frac{5}{9}s_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}s_0$.

iii) Calculăm s_3 în funcţie de s_0.

Din (1), pentru $i=3$ şi $k=4$ şi din ii), avem: $s_3=\frac{5}{8}s_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{8}s_0$.

iv) Calculăm s_4 în funcţie de s_0.

Din (1), pentru $i=4$ şi $k=5$ şi din iii), avem: $s_4=\frac{17}{25}s_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{17}{25}s_0$.

v) Calculăm s_n în funcţie de s_{n-1}, $n\in\mathbb{N}^*$.

Din (1), pentru $i=n$ şi $k=n+1$ obţinem formula de recurenţă ce caracterizează şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$s_n=\frac{n^2+1}{(n+1)^2}s_{n-1},\ n\in\mathbb{N}^*,\ s_0>0.$$

vi) Calculăm s_n în funcţie de s_0, $n\in\mathbb{N}^*$.

Pornind de la formula de recurenţă ce caracterizează şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, obţinem:

$$s_n=\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{i^2+1}{(i+1)^2}\right)s_0,\ n\in\mathbb{N}^*.$$

b) Din $\frac{i^2+1}{(i+1)^2}\le\frac{i}{i+1}$, $\forall i\in\mathbb{N}^*$ şi din faptul că $\frac{i^2+1}{(i+1)^2}>0$, $\frac{i}{i+1}>0$, $\forall i\in\mathbb{N}^*$, rezultă că $\prod_{i=1}^{n}\frac{i^2+1}{(i+1)^2}\le\prod_{i=1}^{n}\frac{i}{i+1}$. Cum $\prod_{i=1}^{n}\frac{i}{i+1}=\frac{1}{n+1}$, urmează că $\prod_{i=1}^{n}\frac{i^2+1}{(i+1)^2}\le\frac{1}{n+1}$, de unde $s_n<\frac{1}{n+1}s_0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Cum şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are termenii strict pozitivi şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}s_0=0$, rezultă, pe baza criteriului majorării, că $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=0$.

c) Aplicând formula de recurenţă ce caracterizează şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avem:

$$s_n^{\ 2} < s_{n-1} \cdot s_{n+1} \Leftrightarrow \left[\frac{n^2+1}{(n+1)^2}\right]^2 s_{n-1}^{\ 2} < s_{n-1} \cdot \frac{n^2+2n+2}{(n+2)^2} \cdot \frac{n^2+1}{(n+1)^2} s_{n-1} \Leftrightarrow n^2+n-1>0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow n \in \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \infty\right) \cap \mathbb{N}^* \Leftrightarrow n \in \mathbb{N}^*$, ceea ce este adevărat.

7. ŞIRURI DE ARII DE SUPRAFEŢE TRIUNGHIULARE

Prof. Văcărean Sorina, Colegiul Naţional „George Bariţiu”, Cluj-Napoca

$\boxed{1.}$ Se consideră $\triangle ABC$. Fie $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$, $C_1 \in (AB)$ astfel încât $\frac{BA_1}{BC} = \frac{CB_1}{CA} = \frac{AC_1}{AB} = \frac{1}{k}$, $A_2 \in (B_1C_1)$, $B_2 \in (C_1A_1)$, $C_2 \in (A_1B_1)$ astfel încât $\frac{B_1A_2}{B_1C_1} = \frac{C_1B_2}{C_1A_1} = \frac{A_1C_2}{A_1B_1} = \frac{1}{k}$, $A_3 \in (B_2C_2)$, $B_3 \in (C_2A_2)$, $C_3 \in (A_2B_2)$ astfel încât $\frac{B_2A_3}{B_2C_2} = \frac{C_2B_3}{C_2A_2} = \frac{A_2C_3}{A_2B_2} = \frac{1}{k}$, …, $A_n \in (B_{n-1}C_{n-1})$, $B_n \in (C_{n-1}A_{n-1})$, $C_n \in (A_{n-1}B_{n-1})$ astfel încât $\frac{B_{n-1}A_n}{B_{n-1}C_{n-1}} = \frac{C_{n-1}B_n}{C_{n-1}A_{n-1}} = \frac{A_{n-1}C_n}{A_{n-1}B_{n-1}} = \frac{1}{k}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, unde $A_0 = A$, $B_0 = B$ şi $C_0 = C$. Se notează cu s_i aria suprafeţei $\triangle A_iB_iC_i$, $i \in \mathbb{N}$, exprimată în u^2.

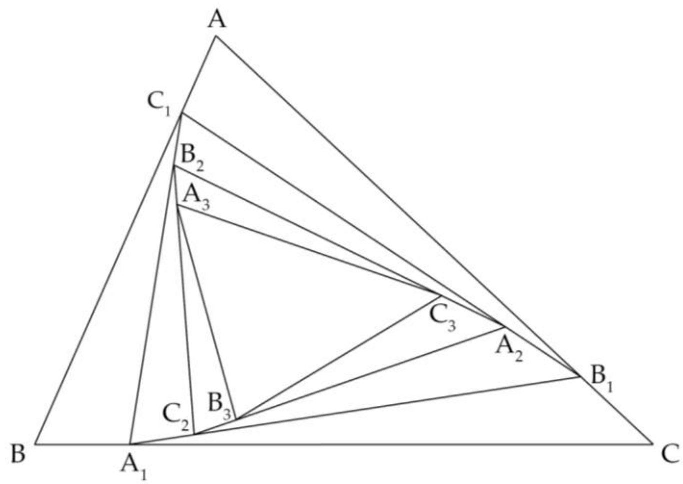
a) Calculaţi s_n în funcţie de s_0, $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

c) Calculaţi $\sum\limits_{i=0}^{n} s_i$, $n \in \mathbb{N}$.

d) Arătaţi că $s_n^{\ 2} = s_{n-1} \cdot s_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare:



a) i) Calculăm s_1 în funcţie de s_0.

Se arată că $A_{\triangle C_1BA_1} = A_{\triangle B_1A_1C} = A_{\triangle AC_1B_1} = \frac{k-1}{k^2}s_0$.

$$s_1 = A_{\triangle A_1B_1C_1} = A_{\triangle ABC} - 3A_{\triangle C_1BA_1} = s_0 - 3\cdot\frac{k-1}{k^2}s_0 = \frac{k^2-3k+3}{k^2}s_0.$$

ii) Calculăm s_2 în funcţie de s_0.

Urmând raţionamentul de la i), $s_2 = \frac{k^2-3k+3}{k^2}s_1 = \left(\frac{k^2-3k+3}{k^2}\right)^2 s_0$.

iii) Calculăm s_3 în funcţie de s_0.

Urmând raţionamentul de la i), $s_3 = \frac{k^2-3k+3}{k^2}s_2 = \left(\frac{k^2-3k+3}{k^2}\right)^3 s_0$.

iv) Calculăm s_n în funcţie de s_{n-1}, $n \in \mathbb{N}^*$.

Urmând raţionamentul de la i), obţinem formula de recurenţă ce caracterizează şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $s_n = \frac{k^2-3k+3}{k^2}s_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $s_0 > 0$.

v) Calculăm s_n în funcţie de s_0, $n \in \mathbb{N}$.

Pornind de la formula de recurenţă ce caracterizează şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, obţinem:

$$s_n = \left(\frac{k^2-3k+3}{k^2}\right)^n s_0,\ n \in \mathbb{N}.$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{k^2-3k+3}{k^2}\right)^n s_0 = 0$, întrucât $\frac{k^2-3k+3}{k^2} < 1$, $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

c) $\sum_{i=0}^{n} s_i = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{k^2-3k+3}{k^2}\right)^i s_0 = \frac{k^2}{3(k-1)}\left[1-\left(\frac{k^2-3k+3}{k^2}\right)^{n+1}\right]s_0$.

d) Aplicând formula de recurenţă ce caracterizează şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avem:

$$s_{n+1}\cdot s_{n-1} = \frac{k^2-3k+3}{k^2}s_n\cdot s_{n-1} = s_n^{\ 2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

$\boxed{2.}$ Acelaşi text ca la problema 1, în ipoteza că valoarea comună a tuturor şirurilor de rapoarte egale este $\frac{a}{b}$, $a,b\in\mathbb{N}^*$, $a<b$.

Rezolvare:

a) i) Calculăm s_1 în funcţie de s_0.

Se arată că $A_{\triangle C_1BA_1} = A_{\triangle B_1A_1C} = A_{\triangle AC_1B_1} = \frac{a(b-a)}{b^2}s_0$.

$$s_1 = A_{\triangle A_1B_1C_1} = A_{\triangle ABC} - 3A_{\triangle C_1BA_1} = s_0 - 3\cdot\frac{a(b-a)}{b^2}s_0 = \frac{3a^2-3ab+b^2}{b^2}s_0.$$

ii) Calculăm s_2 în funcţie de s_0.

Urmând raţionamentul de la i), $s_2 = \frac{3a^2-3ab+b^2}{b^2}s_1 = \left(\frac{3a^2-3ab+b^2}{b^2}\right)^2 s_0$.

iii) Calculăm s_3 în funcţie de s_0.

Urmând raţionamentul de la i), $s_3 = \frac{3a^2-3ab+b^2}{b^2}s_2 = \left(\frac{3a^2-3ab+b^2}{b^2}\right)^3 s_0$.

iv) Calculăm s_n în funcţie de s_{n-1}, $n\in\mathbb{N}^*$.

Urmând raţionamentul de la i), obţinem formula de recurenţă ce caracterizează şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $s_n = \frac{3a^2-3ab+b^2}{b^2}s_{n-1}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $s_0>0$.

v) Calculăm s_n în funcţie de s_0, $n\in\mathbb{N}$.

Pornind de la formula de recurenţă ce caracterizează şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, obţinem:

$$s_n = \left(\frac{3a^2-3ab+b^2}{b^2}\right)^n s_0,\ n\in\mathbb{N}.$$

b) $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3a^2-3ab+b^2}{b^2}\right)^n s_0 = 0$, întrucât $\frac{3a^2-3ab+b^2}{b^2}<1$, $\forall a,b\in\mathbb{N}^*$, $a<b$.

c) $\sum_{i=0}^{n} s_i = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{3a^2-3ab+b^2}{b^2}\right)^i s_0 = \frac{b^2}{3a(b-1)}\left[1-\left(\frac{3a^2-3ab+b^2}{b^2}\right)^{n+1}\right]s_0$.

d) Aplicând formula de recurenţă ce caracterizează şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avem:

$$s_{n+1}\cdot s_{n-1}=\frac{3a^2-3ab+b^2}{b^2}s_n\cdot s_{n-1}=s_n{}^2,\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

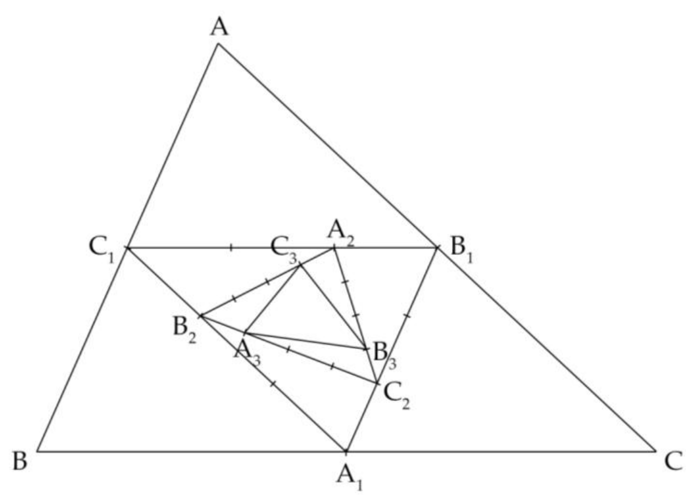
$\boxed{3.}$ Se consideră $\triangle ABC$. Fie $A_1\in(BC)$, $B_1\in(CA)$, $C_1\in(AB)$ astfel încât $\frac{BA_1}{BC}=\frac{CB_1}{CA}=\frac{AC_1}{AB}=\frac{1}{2}$, $A_2\in(B_1C_1)$, $B_2\in(C_1A_1)$, $C_2\in(A_1B_1)$ astfel încât $\frac{B_1A_2}{B_1C_1}=\frac{C_1B_2}{C_1A_1}=\frac{A_1C_2}{A_1B_1}=\frac{1}{3}$, $A_3\in(B_2C_2)$, $B_3\in(C_2A_2)$, $C_3\in(A_2B_2)$ astfel încât $\frac{B_2A_3}{B_2C_2}=\frac{C_2B_3}{C_2A_2}=\frac{A_2C_3}{A_2B_2}=\frac{1}{4}$, …, $A_n\in(B_{n-1}C_{n-1})$, $B_n\in(C_{n-1}A_{n-1})$, $C_n\in(A_{n-1}B_{n-1})$ astfel încât $\frac{B_{n-1}A_n}{B_{n-1}C_{n-1}}=\frac{C_{n-1}B_n}{C_{n-1}A_{n-1}}=\frac{A_{n-1}C_n}{A_{n-1}B_{n-1}}=\frac{1}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}^*$, unde $A_0=A$, $B_0=B$ şi $C_0=C$. Se notează cu s_j aria suprafeţei $\triangle A_jB_jC_j$, $j\in\mathbb{N}$, exprimată în u^2.

a) Calculaţi s_n în funcţie de s_0, $n\in\mathbb{N}$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

c) Arătaţi că $s_n{}^2<s_{n-1}\cdot s_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Rezolvare:



a) Utilizăm formula găsită la problema 1 a) iv):

$$(1)\quad s_i=\frac{k^2-3k+3}{k^2}s_{i-1},\ i\in\mathbb{N}^*,\ k\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\},\ s_0>0.$$

i) Calculăm s_1 în funcţie de s_0.

Din (1), pentru $i=1$ şi $k=2$ avem: $s_1=\frac{1}{4}s_0$.

ii) Calculăm s_2 în funcţie de s_0.

Din (1), pentru $i=2$ şi $k=3$ şi din i), avem: $s_2=\frac{1}{3}s_1=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}s_0$.

iii) Calculăm s_3 în funcţie de s_0.

Din (1), pentru $i=3$ şi $k=4$ şi din ii), avem: $s_3=\frac{7}{16}s_2=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{16}s_0$.

iv) Calculăm s_4 în funcţie de s_0.

Din (1), pentru $i=4$ şi $k=5$ şi di iii), avem: $s_4=\frac{13}{25}s_3=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{16}\cdot\frac{13}{25}s_0$.

v) Calculăm s_n în funcţie de s_{n-1}, $n\in\mathbb{N}^*$.

Din (1), pentru $i=n$ şi $k=n+1$ obţinem formula de recurenţă ce caracterizează şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$s_n=\frac{n^2-n+1}{(n+1)^2}s_{n-1},\ n\in\mathbb{N}^*,\ s_0>0.$$

vi) Calculăm s_n în funcţie de s_0, $n\in\mathbb{N}^*$.

Pornind de la formula de recurenţă ce caracterizează şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, obţinem:

$$s_n=\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{i^2-i+1}{(i+1)^2}\right)s_0,\ n\in\mathbb{N}^*.$$

b) Din $\frac{i^2-i+1}{(i+1)^2}<\frac{i}{i+1}$, $\forall i\in\mathbb{N}^*$ şi din faptul că $\frac{i^2-i+1}{(i+1)^2}>0$, $\frac{i}{i+1}>0$, $\forall i\in\mathbb{N}^*$, rezultă că

$\prod_{i=1}^{n}\frac{i^2-i+1}{(i+1)^2}<\prod_{i=1}^{n}\frac{i}{i+1}$. Cum $\prod_{i=1}^{n}\frac{i}{i+1}=\frac{1}{n+1}$, urmează că $\prod_{i=1}^{n}\frac{i^2-i+1}{(i+1)^2}<\frac{1}{n+1}$, de unde

$s_n<\frac{1}{n+1}s_0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Cum şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are termenii strict pozitivi şi $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}s_0=0$, rezultă, pe baza criteriului majorării, că $\lim_{n\to\infty}s_n=0$.

c) Aplicând formula de recurenţă ce caracterizează şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avem:

$$s_n^{\ 2}<s_{n-1}\cdot s_{n+1}\Leftrightarrow\left[\frac{n^2-n+1}{(n+1)^2}\right]^2 s_{n-1}^{\ 2}<s_{n-1}\cdot\frac{n^2+n+1}{(n+2)^2}\cdot\frac{n^2-n+1}{(n+1)^2}s_{n-1}\Leftrightarrow n^2+n-1>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n\in\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},\infty\right)\cap\mathbb{N}^*\Leftrightarrow n\in\mathbb{N}^*,$$ ceea ce este adevărat.

8.NUMĂRUL DE AUR ÎN EXERCIŢII ŞI PROBLEME

CONSTANTIN CIOBÎCĂ (*)

„ Lucrarea de faţă se adresează elevilor din clasele VII – XII, profesorilor de matematică (temă pentru cercurile de matematică), prezentând „numărul de aur" în diverse exerciţii şi probleme de algebră, geometrie, analiză matematică. O sinteză a proprietăţilor lui ϕ este făcută de Paul Montel în „ Revue d'esthetique".Mă mărginesc în a prezenta căteva exerciţii şi probleme în care intervine numărul de aur, exerciţii propuse şi alese de către subsemnatul :"

I. SCURT ISTORIC

Numărul de aur $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a fost studiat în şcoala lui Pitagora. Platon aminteşte în „ Dialoguri" de acest număr, iar problema a-II-a din Cartea a-II-a a Elementelor lui Euclid conduce la ϕ. Încă din antichitate o mărturie , de exemplu, atribuită lui Herodot pretinde că aria pătratului avănd ca latură înălţimea piramidei lui Keops este egală cu aria oricărei feţe laterale. În acest caz raportul dintre apotema feţei piramidei şi apotema bazei este riguros egală cu ϕ. Constatăm că şi proporţiile corpului uman ascultă în unele aspecte de numărul de aur. Numărul de aur apare în cercetarea operelor de artă, în special în domeniul artelor vizuale. În aşa numitele „ Caiete ale numărului de aur" (autor Eliza Maillard) cu ajutorul lui ϕ sunt citite opere de Botticelli , Leonardo da Vinci, le Corbusier etc….

În lumea vegetală a fost detectată prezenţa numărului de aur prima oară de către Kepler, dar numărul apare şi în cea animală. Matila Ghyka pionier a teoriei matematice a ritmului distinge între ritmurile reversibile, care se dezvoltă în durată (muzică, poezie) şi emanaţiile directe ale experienţei trăite. Cea mai importantă regularitate decelabilă în acest context este cea dată de şirul lui Fibonacci şi numărul de aur.

II. Exerciţii de „algebră":

O primă întâlnire cu acest număr se face în clasa a- VII-a , atunci cǎnd se studiază numerele iraţionale. Un exerciţiu simplu :

1.Să se arate că $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ este un număr iraţional.

Soluţie: Presupunem că $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in Q \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \in Q \Rightarrow \sqrt{5} \in Q$

atunci $\sqrt{5}=\frac{a}{b}, b\neq 0, (a,b)=1; a,b\in Z \Rightarrow \frac{a^2}{b^2}=5\Rightarrow a^2=5\cdot b^2\Rightarrow 5|a^2\Rightarrow 5|a$

şi atunci $a=5k, k\in Z\Rightarrow 25k^2=5b^2\Rightarrow 5|b\Rightarrow b=5p,\ p\in Z^*$.

Revenind la forma lui $\sqrt{5}=\frac{5k}{5p}\Rightarrow (a,b)=5$ - contradicţie.

După această primă întâlnire, „numărul de aur” îşi va face deseori cunoscută prezenţa:

2.Să se arate că : $\sqrt{1+\phi}-\sqrt{2-\phi}\in N$

Soluţie:

$$1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}; 2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}-\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\in N,\quad \sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{\frac{3}{2}+1}{2}}+\sqrt{\frac{\frac{3}{2}-1}{2}}=\sqrt{\frac{5}{4}}+\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$ -

$c^2=a^2-b=1$

formula radicalilor compuşi.

Atunci obţinem: $\sqrt{1+\phi}-\sqrt{2-\phi}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=1\in N$.

3.În clasa a-VIII-a, „numărul de aur” se obţine ca soluţie a ecuaţiei:

$x^2-x-1=0$ sau ecuaţii echivalente cu aceasta, cum ar fi ecuaţia : $\frac{x}{x+1}=\frac{1}{x}$.

Soluţie:

C.E: $x+1\neq 0$, $x\neq 0\Rightarrow x\in R/\{-1,0\}$

$$x^2=x+1\Rightarrow x^2-x-1=0,\ \Delta=5\Rightarrow \left\{ x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right.$$

4.Să se arate că :

$$S=\left(\sum_{k=0}^{n}5^k C_{2n}^{2k}\right)^2-5\left(\sum_{k=0}^{n-1}5^k C_{2n}^{2k-1}\right)^2=2^{4n}$$

Soluţie:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{2n}}{2^{2n}}=\frac{C_{2n}^{0}+C_{2n}^{1}\sqrt{5}+5C_{2n}^{2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{2^{2n}}=$$

$$\frac{\left(1+5C_{2n}^{2}+5^{2}C_{2n}^{4}+\ldots\ldots\ldots\ldots\right)+\sqrt{5}\left(C_{2n}^{1}+5C_{2n}^{3}+5^{2}C_{2n}^{5}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right)}{2^{2n}}=$$

$$=\frac{\sum_{k=0}^{n}5^{k}C_{2n}^{2k}+\sqrt{5}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}5^{k}C_{2n}^{2k+1}}{2^{2n}}.\text{ şi }\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}=\frac{\sum_{k=0}^{n}5^{k}C_{2n}^{2k}-\sqrt{5}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}5^{k}C_{2n}^{2k+1}}{2^{2n}}$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}=\frac{\left(\sum_{k=0}^{n}5^{k}C_{2n}^{2k}\right)^{2}-5\cdot\left(\sum_{k=0}^{n-1}5^{k}C_{2k}^{2k+1}\right)^{2}}{2^{4n}}\Rightarrow\left(\frac{1-5}{4}\right)^{2n}=\frac{S}{2^{4n}}\Rightarrow S=2^{4n}$$

5.Să se arate că $\{\phi\}=\phi-1$, $\{\bar{\phi}\}=2-\phi$ unde $\{\ \}$-partea fracţionară, iar $\bar{\phi}$ -conjugatul.

Soluţie:

$$x=[x]+\{x\}\Rightarrow\{x\}=x-[x]$$

$$\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]=1 \qquad \Rightarrow [\bar{\phi}]=-1$$

$$\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$$

$$1+2<1+\sqrt{5}<1+3$$

$$\frac{3}{2}<\frac{1+\sqrt{5}}{2}<2$$

$$2<\sqrt{5}<3|\cdot-1$$

$$-3<-\sqrt{5}<-2$$

$$-1<\frac{1-\sqrt{5}}{2}<-\frac{1}{2}$$

$$\{\phi\}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1=\phi-1 \qquad \{\bar{\phi}\}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=2-\phi$$

6.Să se arate că mulţimea $K=\left\{a+b\phi\ /\ a,b\in Q,\ \phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{a}{b}<0\right\}$ împreună cu operaţiile de adunare şi scădere este un corp comutativ.

Soluţie:

$$+:\ z_1+z_2=\left(a+a'\right)+\left(b+b'\right)\phi \text{ unde } z_1=a+b\phi,\ z_2=a'+b'\phi \quad ,a,b,a',b'\in Q$$

bine definită. Se verifică uşor comutativitatea, asociativitatea, elementul neutru, elementul simetrizabil.

$$\circ \begin{cases} z_1 \cdot z_2 = (a+b\phi)(a'+b'\phi) = aa' + (ba'+ab')\phi + bb'\phi^2 = * \\ : \phi^2 = \phi + 1 \\ * = aa' + bb' + (ba' + ab' + bb')\phi \in K \end{cases} \text{-bine definită.}$$

a) asociativă : $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in K$

b) comutativă: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \forall z_1, z_2 \in K$

c) elementul neutru $\exists 1 \in K$ astfel încât $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z, \forall z \in K$
$1 = 1 + 0\phi \in K$

d) element inversabil $\forall z \neq 0 \in K, \exists z^{-1} \in K$ asfel încât $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$

$$(a+b\phi)(m+n\phi) = 1 \Rightarrow am + bn + (bm + an + bn)\phi = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} am + bn = 1 & \big| \; b \\ bm + an + bn = 0 & \big| -a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} abm + b^2 n = b \\ -abm - (a^2 + ab)n = 0 \end{cases} \Rightarrow n(b^2 - a^2 - ab) = b,$$

$b^2 - a^2 - ab \neq 0$.

Dacă $b^2 - a^2 - ab = 0$ şi $b = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow z = 0$

$$b \neq 0 \text{ atunci } -\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = -\phi \Rightarrow a = -b\phi \Rightarrow z = 0$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} > 0$$

Sunt verificate : $\begin{cases} z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \\ (z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3 \end{cases} \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in K$

$\Rightarrow (K, +, \circ)$ corp comutativ.

III.Probleme de geometrie, geometrie analitică:

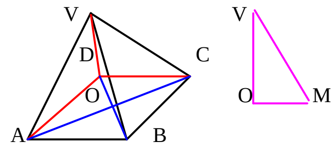
1. Fie o piramidă patrulateră regulată în care latura bazei este egală cu înălţimea piramidei. Să se arate că :

$$a_{p_b} + a_{p_P} = l \cdot \phi$$

$$\frac{A_l + A_b}{A_b} = \phi$$

unde a_{p_b} - apotema bazei, a_{p_P} - apotema piramidei.

Soluţie:

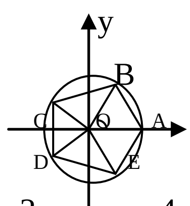


$$a_{pP}=\sqrt{l^2+\frac{l^2}{4}}=\frac{l\sqrt{5}}{2} \qquad a_{pb}=\frac{l}{2}\Rightarrow a_{pb}+a_{pP}=l\cdot\phi$$

$$A_l=l^2\sqrt{5},\quad A_b=l^2\Rightarrow\frac{A_l+A_b}{A_b}=\phi$$

2. Să se arate că $2\cdot\cos\frac{\pi}{5}=\phi$.

Soluţie:



$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\overline{0}$$

$$1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}=0 \qquad u=\cos\frac{2\pi}{5} \qquad ,\cos\frac{4\pi}{5}=2u^2-1$$

$$1+2u+2(2u^2-1)=0\Rightarrow 4u^2+2u-1=0$$

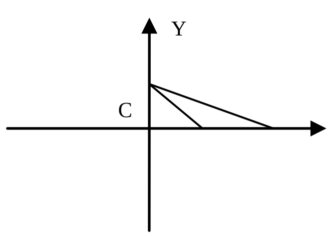
$$\Delta=20$$

$$\varphi_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\varphi_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=-\phi \qquad \Rightarrow\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}>0$$

$$\Rightarrow\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\frac{\phi}{2}$$

3. Într-un sistem ortogonal de coordonate considerăm punctele $A(\phi,0),B(\phi-1,0),C(0,1)$. Să se arate că cercul circumscris triunghiului ABC este tangent axei $y'oy$.

Soluţie:



O B M A x

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, 0\right) \Rightarrow M\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$$

m_{AB} - mediatoarea segmentului AB, are ecuaţia: $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Centrul cercului circumscris triunghiului se află pe mediatoarea segmentului AB , $C(P, r)$. Ecuaţia cercului este :

$$\left(x - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + (y - y_P)^2 = r^2, \qquad A, B, C \in C(P, r)$$

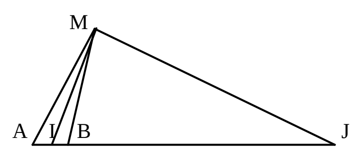
$$\Rightarrow \frac{1}{4} + y_p{}^2 = r^2, \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = r^2 \Rightarrow \frac{5}{4} + 1 - 2y_P + y_P^2 = \frac{1}{4} + y_P^2 \Rightarrow y_P = 1 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

şi atunci cercul circumscris triunghiului este tangent axei $y'oy$ în punctul C.

4. Să se determine locul geometric al punctelor din plan pentru care raportul distanţelor la două puncte fixe este $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Soluţie: Locul geometric al punctelor din plan pentru care raportul distanţelor la două puncte fixe este constant, este o problemă consacrată cunoscută sub denumirea de cercul lui Apollonius.

$A \neq B$ două puncte fixe $\qquad \frac{AM}{BM} = \phi$



MI- bisectoarea interioară, MJ- bisectoarea exterioară

$\frac{AM}{BM} = \frac{AI}{BI} = \frac{AJ}{BJ} = \phi$ atunci I,J aparţin locului geometric (şi cum IM, JM sunt perpendiculare) rezultând că punctele I,J- diametral opuse.

$$\frac{IB}{AB} = \frac{1}{\phi+1} \Rightarrow IB = \frac{AB}{\phi+1} \qquad \frac{BJ}{AB} = \frac{1}{\phi-1} \Rightarrow BJ = \frac{AB}{\phi-1}$$

$$\Rightarrow IB + JB = AB\left(\frac{\phi - 1 + \phi + 1}{\phi^2 - 1}\right) = \frac{2AB\phi}{\phi^2 - 1} = \frac{2AB\phi}{\phi + 1 - 1} = 2AB \Rightarrow r = AB$$

5. Se poate construi un paralelogram în care diagonalele să aibă lungimile de

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, iar lungimile laturilor să fie numere naturale.

Nu, deoarece din relaţia $d_1^2 + d_2^2 = 2(l^2 + L^2)$ (teorema paralelogramului), rezultă că:

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = 2(l^2 + L^2) \Rightarrow \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 3 \Rightarrow \frac{3}{2} = l^2 + L^2 \notin N$$

IV.Exerciţii şi probleme de analiză matematică:

1. Să se calculeze o valoare aproximativă a lui ϕ şi să se determine eroarea în aroximarea realizată.

Soluţie: Deoarece $\sqrt{5}$ este un număr iraţional (fracţie zecimală infinită) şi numărul ϕ este număr iraţional, depinzând de aproximarea lui $\sqrt{5}$. Vom determina deci o aproximare pentru $\sqrt{5}$, utilizând „ formula lui Taylor cu restul lui Lagrange”, pentru funcţia : $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $x_0 = 2^2$, $n = 4$ şi

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \qquad f'(2^2) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2^2}} = \frac{1}{4} \quad f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} \quad f''(2^2) = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2^6}} = -\frac{1}{32}$$

$$, f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow \quad f'''(2^2) = \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{2^{10}}} = \frac{3}{256}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16} x^{-\frac{7}{2}} \qquad f^{(4)}(2^2) = -\frac{15}{16}\frac{1}{\sqrt{2^{14}}} = -\frac{15}{2048}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{105}{32} x^{-\frac{9}{2}} \qquad f^{(5)}(2^2 + \theta(x-2^2)) = \frac{105}{32}\frac{1}{\sqrt{[2^2 + \theta(x-2^2)]^9}}$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4 + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-x_0)^5.$$

$$f(x) = \sqrt{x} = 2 + \frac{1}{4}\cdot(x-2^2) - \frac{1}{64}\cdot(x-2^2)^2 + \frac{1}{512}\cdot(x-2^2)^3 - \frac{5}{16384}\cdot(x-2^2)^4 + \frac{105}{5!\cdot 32}\cdot\frac{1}{\sqrt{[2^2 + \theta(x-2^2)]^9}}\cdot(x-2^2)^5$$

Pentru $x = 5$ obţinem:

$$\sqrt{5}=2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}+\frac{1}{512}-\frac{5}{16384}+\frac{7}{256}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(2^2+\theta\right)^9}}$$

$$\sqrt{5}\cong 2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}+\frac{1}{512}-\frac{5}{16384}=2+0{,}25-0{,}015625+0{,}0019531-0{,}0003051=2{,}2306023$$

Eroarea este :

$$\varepsilon=\frac{7}{256}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(2^2+\theta\right)^9}}<\frac{7}{256}\cdot\frac{1}{2^9}<\frac{8}{2^{17}}=\frac{1}{2^{14}}$$

Atunci $\phi=\dfrac{1+2{,}2306023}{2}=3{,}2306023\div 2=1{,}6153011$.

2. Şirul lui Fibonacci

$a_0=0$, $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$

Soluţie: Fie ecuaţia $t^2-t-1=0\Rightarrow t_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, t_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ $\quad\Rightarrow t_1+t_2=1$, $t_1\cdot t_2=-1$

$$a_{n+1}=\left(t_1+t_2\right)a_n-t_1t_2a_{n-1}$$

$$a_{n+1}-t_2a_n=t_1\left(a_n-t_2a_{n-1}\right)=t_1\left(\left(t_1+t_2\right)a_{n-1}-t_1t_2a_{n-2}-t_2a_{n-1}\right)=t_1^2\left(a_{n-1}-t_2a_{n-2}\right)=$$

$$=t_1^2\left(a_1-t_2a_0\right)=t_1^n\cdot a_1=t_1^{\,2}\Rightarrow a_{n+1}-t_1a_n=t_2^2$$

Prin scăderea celor două relaţii se ajunge la:

$$a_n\left(t_2-t_1\right)=t_2^n-t_1^2\Rightarrow a_n=\frac{t_2^n-t_1^n}{t_2-t_1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

3. Fie $f:R/\{1\}\rightarrow R$ definită prin $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ şi $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot f^{(k)}(\phi)$.

Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{\phi^3}$.

Soluţie: Determinăm formula lui $f^{(k)}$:

$f(x)=(x+1)^{-1}$ $\qquad f^{'}(x)=-(x+1)^{-2}$ $\qquad f^{''}(x)=2(x+1)^{-3}$

$$f^{(k)}(x)=(-1)^k k!(x+1)^{-k-1}=\frac{(-1)^k k!}{(x+1)^{k+1}}$$

$$f^{(k)}(\phi)=\frac{(-1)^k k!}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}=\frac{(-1)^k k!}{\phi^{2(k+1)}}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{(-1)^k k!}{\phi^{2(k+1)}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\phi^{2(k+1)}}=\frac{1}{\theta^4}+\frac{1}{\phi^6}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{\phi^{2(n+1)}}=$$

$$=\frac{1}{\phi^4}\left[1+\frac{1}{\phi^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{\phi^{2(n-1)}}\right]=\frac{\left(\frac{1}{\phi^2}\right)^n-1}{\frac{1}{\phi^2}-1}$$

$$\frac{1}{\phi^2}=\frac{2}{3+\sqrt{5}} \qquad \left(\frac{1}{\phi^2}\right)^{2n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{\phi^4}\cdot\frac{-1}{\frac{1}{\phi^2}-1}=\frac{1}{\phi^4}\cdot\frac{-\phi^2}{1-\phi^2}=\frac{1}{\phi^4}\cdot\frac{-\phi^2}{-\phi}=\frac{1}{\phi^3}$$

3.Să se arate că funcţia $f:R\to R$

$f(x)=\frac{x+\phi}{x^2-\phi x+\phi^2}-\frac{x-\phi}{x^2+\phi x+\phi^2}$ este funcţie pară şi $\lim_{x\to\phi}f(x)=\frac{2}{\phi}$.

Soluţie:

$$f(-x)=f(x)$$

$$f(-x)=\frac{-x+\phi}{x^2+\phi x+\phi^2}-\frac{-x-\phi}{x^2-\phi x+\phi^2}=-\frac{x-\phi}{x^2+\phi x+\phi^2}+\frac{x+\phi}{x^2-\phi x+\phi^2}=f(x)$$

$$\lim_{x\to\phi}f(x)=\frac{\phi+\phi}{\phi^2-\phi^2+\phi^2}-0=\frac{2\phi}{\phi^2}=\frac{2}{\phi}$$

V. BIBLIOGRAFIE

1) DAN BRÂNZEI – Măsuri în geometrie-curs. „UNIV.AL. I. CUZA”, IAŞI.
2) I. TOFAN – Elemente de bază ale „ Didacticii matematice”-curs. „ UNIV. AL. I. CUZA”, IAŞI.
3) EUGEN RUSU- Geometrie elementară. „Editura Didactică şi Pedagogică Bucureşti”-1964.
4) ANCA PRECUPANU- Bazele analizei matematice. Editura Universităţii „ AL. I. CUZA”, IAŞI.

(*) CIOBÎCĂ CONSTANTIN
profesor de matematică gr. I; Colegiul Vasile Lovinescu Falticeni

9.PROBLEME REZOLVATE PENTRU CONCURSURI

1. Dăcă α este soluţie a ecuaţiei $x = 2\sqrt{x+\frac{1}{2}}$ atunci demonstraţi:

a) $\alpha \in R/Q$

b) $[\alpha^2 - 4\alpha] = 2$, unde $[\ ]$ este partea întreagă.

c) $\{2\alpha\} - \{\alpha\} - \left\{\frac{\alpha^2}{4}\right\} = \alpha - \frac{\alpha^2}{4}$, unde $\{\ \}$ este partea fracţionară.

Prof. Ciobîcă Constantin, prof Ciobîcă Elena. FĂLTICENI

Rezolvare:

a) $x = 2\sqrt{x+\frac{1}{2}}$. Punem condiţiile de existenţă:

$x + \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$; $x \geq 0 \Rightarrow x \in [0, \infty)$. Deci avem condiţia: $x \in [0, \infty)$.

Soluţiile ecuaţiei $x^2 - 4x - 2 = 0$ sunt: $\alpha = 2 + \sqrt{6} \in [0, \infty)$ şi $x_2 = 2 - \sqrt{6} < 0$

$2 + \sqrt{6} \in R/Q \Rightarrow \sqrt{6} \in R/Q$. Demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem că

$\sqrt{6} \in Q \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{a}{b}; a, b \in Z; b \neq 0, \quad (a,b) = 1$

$\frac{a^2}{b^2} = 6 \Rightarrow a^2 = 6b^2 \Rightarrow 6/a \Rightarrow \exists k \in Z^* cu\ a = 6k$

$36k^2 = 6b^2 \Rightarrow 6k^2 = b^2 \Rightarrow 6/b \Rightarrow \exists p \in Z^* cu\ b = 6p$

$\frac{a}{b} = \frac{6k}{6p} \quad absurd$.

b) α soluţie a ecuaţiei $x = 2\sqrt{x+\frac{1}{2}} \Rightarrow \alpha = 2\sqrt{\alpha+\frac{1}{2}} \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha = 2$, iar de aici avem :

$[\alpha^2 - 4\alpha] = [2] = 2$

c) Din identitatea lui Hermite: $[y] + \left[y + \frac{1}{2}\right] = [2y], \forall y \in R$

Înlocuim pe y cu $\alpha \Rightarrow [\alpha] + \left[\alpha + \frac{1}{2}\right] = [2\alpha]$

Înlocuind apoi formulele : $[\alpha] = \alpha - \{\alpha\}$, $\left[\frac{\alpha^2}{4}\right] = \frac{\alpha^2}{4} - \left\{\frac{\alpha^2}{4}\right\}$,

$[2\alpha] = 2\alpha - \{2\alpha\}$, obţinem:

$$\alpha - \{\alpha\} + \frac{\alpha^2}{4} - \left\{\frac{\alpha^2}{4}\right\} = 2\alpha - \{2\alpha\} \Rightarrow$$
$$\{2\alpha\} - \{\alpha\} - \left\{\frac{\alpha^2}{4}\right\} = \alpha - \frac{\alpha^2}{4}$$

2. Fie β soluţie a ecuaţiei $3\sqrt{x+\frac{2}{3}} = x$.

a) Demonstraţi $\{\beta^2 - 9\beta\} = 0$, unde $\{\ \}$ este partea fracţionară.

b) Demonstraţi $[\beta] + \left[\frac{\beta^2-3}{9}\right] + \left[\frac{\beta^2}{9}\right] = [3\beta]$, unde $[\ ]$ este partea intreagă.

Prof. Ciobîcă Constantin, prof Ciobîcă Elena. FĂLTICENI

Rezolvare:

Rezolvăm ecuaţia să-l identificăm pe β.

Condiţii de existenţă: $x \geq 0,\ x + \frac{2}{3} \geq 0 \Rightarrow x \in [0, \infty)$.

$$9\left(x + \frac{2}{3}\right) = x^2 \Rightarrow 9x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 9x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 105$$

$$x_1 = \frac{9+\sqrt{105}}{2} > 0, \quad x_2 = \frac{9-\sqrt{105}}{2} < 0 \Rightarrow \beta = x_1$$

Cum β este soluţie a ecuaţiei $\Rightarrow \beta^2 - 9\beta - 6 = 0$

$\Rightarrow \beta^2 - 9\beta = 6 \Rightarrow \{\beta^2 - 9\beta\} = \{6\} = 0$

b) Avem identitatea lui Hermite:

$[y] + \left[y + \frac{1}{3}\right] + \left[y + \frac{2}{3}\right] = [3y], \forall y \in R$. Luam $y = \beta$ şi avem:

$$[\beta] + \left[\beta + \frac{1}{3}\right] + \left[\beta + \frac{2}{3}\right] = [3\beta]$$

$$x + \frac{2}{3} = \frac{x^2}{9} \Rightarrow \beta + \frac{2}{3} = \frac{\beta^2}{9} \Rightarrow \beta + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{\beta^2}{9}$$

$\Rightarrow \beta + \frac{1}{3} = \frac{\beta^2 - 3}{9}$. Înlocuind obţinem:

$$[\beta] + \left[\frac{\beta^2-3}{9}\right] + \left[\frac{\beta^2}{9}\right] = [3\beta]$$

3. Demonstraţi:

a)

$$\left[\sqrt{4n^2+4n+3}\right]=2n+1,\ \forall n\in N$$

$$\left[\sqrt{4n^2+12n+11}\right]=2n+3,\ \forall n\in N$$

b)

c) $$\frac{1}{[\sqrt{11}]\cdot[\sqrt{27}]}+\frac{1}{[\sqrt{27}]\cdot[\sqrt{51}]}+\ldots+\frac{1}{\left[\sqrt{4n^2+4n+3}\right]\left[\sqrt{4n^2+12n+3}\right]}==\frac{2n}{3(2n+3)}\quad \forall n\in N^*$$ unde

[ ]

este partea întreagă.

Prof.Ciobica Constantin. Prof. Ciobica Elena . Colegiul Vasile Lovinescu Falticeni

Rezolvare:

$$4n^2+4n+1<4n^2+4n+3<4n^2+8n+4\quad \forall n\in N$$

a) $$(2n+1)^2<4n^2+4n+3<(2n+2)^2$$

$$2n+1<\sqrt{4n^2+4n+3}<2n+2\Rightarrow\left[\sqrt{4n^2+4n+3}\right]=2n+1$$

b) $$4n^2+12n+9<4n^2+12n+11<4n^2+16n+16,\quad \forall n\in N$$

$$(2n+3)^2<4n^2+12n+11<(2n+4)^2$$

$$2n+3<\sqrt{4n^2+12n+11}<2n+4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\sqrt{4n^2+12n+11}\right]=2n+3$$

c) $$\frac{1}{[\sqrt{11}]\cdot[\sqrt{27}]}+\frac{1}{[\sqrt{27}]\cdot[\sqrt{51}]}+\ldots+\frac{1}{\left[\sqrt{4n^2+4n+3}\right]\cdot\left[\sqrt{4n^2+12n+11}\right]}=$$

$$=\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

$$+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}=\frac{2n}{3(2n+3)}$$

4. Demonstraţi că:

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left[i+\sqrt{3}\right]\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[i+1+\sqrt{3}\right]}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left[i+\sqrt{3}\right]}-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left[i+1+\sqrt{3}\right]}\right),\forall n\in N^{*}$$

, unde $[\ ]$ este partea întreagă.

Ciobica Constantin , Ciobica Elena ,COLEGIUL VASILE LOVINESCU FALTICENI

Rezolvare:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[i+\sqrt{3}\right]=\sum_{i=1}^{n}(i+1),\quad \sum_{i=1}^{n}\left[i+1+\sqrt{3}\right]=\sum_{i=1}^{n}(i+2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(i+2)-\sum_{i=1}^{n}(i+1)=n+2-2=n$$

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left[i+\sqrt{3}\right]\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[i+1+\sqrt{3}\right]}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left[i+\sqrt{3}\right]}-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left[i+1+\sqrt{3}\right]}\right),\forall n\in N^{*}$$

b) Demonstraţi că:

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left[i+\sqrt{3}\right]\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[i+1+\sqrt{3}\right]}+\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left[i+1+\sqrt{3}\right]\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[i+2+\sqrt{3}\right]}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left[i+k+\sqrt{3}\right]\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[i+1+k+\sqrt{3}\right]}=\frac{k+1}{\sum_{i=1}^{n}\left[i+\sqrt{3}\right]\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[i+1+k+\sqrt{3}\right]}$$

$\forall n\in N^{*},\forall k\in N$ unde $[\ ]$ este partea întreagă.

Ciobica Constantin , Ciobica Elena ,COLEGIUL VASILE LOVINESCU FALTICENI

Rezolvare:

$$S_1=\sum_{i=1}^{n}\left[i+\sqrt{3}\right]=\sum_{i=1}^{n}(i+1),\quad S_2=\sum_{i=1}^{n}\left[i+1+\sqrt{3}\right]=\sum_{i=1}^{n}(i+2)$$

$$S_2-S_1=\sum_{i=1}^{n}(i+2)-\sum_{i=1}^{n}(i+1)=n+2-2=n$$

$$\frac{1}{S_1\cdot S_2}=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right),\quad S_3=\sum_{i=1}^{n}\left[i+2+\sqrt{3}\right]=\sum_{i=1}^{n}(i+3)$$

$$S_3 - S_2 = \sum_{i=1}^{n}(i+3) - \sum_{i=1}^{n}(i+2) = n+3-3 = n$$

$$\frac{1}{S_2 \cdot S_3} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3}\right), \quad S_4 = \sum_{i=1}^{n}\left[i+k+\sqrt{3}\right] = \sum_{i=1}^{n}(i+k+1)$$

$$S_5 = \sum_{i=1}^{n}\left[i+k+1+\sqrt{3}\right] = \sum_{i=1}^{n}(i+k+2)$$

$$S_5 - S_4 = \sum_{i=1}^{n}(i+k+2) - \sum_{i=1}^{n}(i+k+1) = n+k+2-k-2 = n$$

$$\frac{1}{S_4 \cdot S_5} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{S_4} - \frac{1}{S_5}\right) \Rightarrow S = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3} + \ldots + \frac{1}{S_4} - \frac{1}{S_5}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_5}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{S_5 - S_1}{S_1 \cdot S_5} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(i+k+2) - \sum_{i=1}^{n}(i+1)}{n \cdot S_1 \cdot S_5}$$

$$\frac{k+3+k+4+\ldots+n+k+2-2-3-\ldots-(n+1)}{n \cdot S_1 \cdot S_5} =$$

$$= \frac{\underbrace{k+1+k+1+\ldots+k+1}_{de\, n\, ori}}{n \cdot S_1 \cdot S_5} = \frac{n(k+1)}{n \cdot S_1 \cdot S_5} = \frac{k+1}{S_1 \cdot S_5}$$

5. Demonstraţi că:

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left[i+\sqrt{2}\right] \cdot \sum_{i=1}^{n}\left[i+1+\sqrt{2}\right]} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left[i+1+\sqrt{2}\right] \cdot \sum_{i=1}^{n}\left[i+2+\sqrt{2}\right]} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left[i+k+\sqrt{2}\right] \cdot \sum_{i=1}^{n}\left[i+1+k+\sqrt{2}\right]} = \frac{k+1}{\sum_{i=1}^{n}\left[i+\sqrt{2}\right] \cdot \sum_{i=1}^{n}\left[i+1+k+\sqrt{2}\right]}$$

$\forall n \in N^*, k \in N$

Prof.Ciobîcă C Constantin

Rezolvare:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n}\left[i+\sqrt{2}\right] = \sum_{i=1}^{n}(i+1), S_2 = \sum_{i=1}^{n}\left[i+1+\sqrt{2}\right] = \sum_{i=1}^{n}(i+2)$$

$S_2 - S_1 = \sum_{i=1}^{n}(i+2) - \sum_{i=1}^{n}(i+1) = n+2-2 = n$. Rezultă că:

$$\frac{1}{S_1 \cdot S_2} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2} \right). \quad S_3 = \sum_{i=1}^{n} \left[i + 2 + \sqrt{2} \right] = \sum_{i=1}^{n} (i+3)$$

$$S_3 - S_2 = \sum_{i=1}^{n} (i+3) - \sum_{i=1}^{n} (i+2) = n + 3 - 3 = n$$

Rezultă că:

$$\frac{1}{S_2 \cdot S_3} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3} \right), \quad S_4 = \sum_{i=1}^{n} \left[i + k + \sqrt{2} \right] = \sum_{i=1}^{n} (i+k+1)$$

$$S_5 = \sum_{i=1}^{n} \left[i + 1 + k + \sqrt{2} \right] = \sum_{i=1}^{n} (i+k+2)$$

$$S_5 - S_4 = \sum_{i=1}^{n} (i+k+2) - \sum_{i=1}^{n} (i+k+1) = n + 2 + k - k - 2 = n$$

Atunci avem relaţia: $\dfrac{1}{S_4 \cdot S_5} = \dfrac{1}{n} \cdot \left(\dfrac{1}{S_4} - \dfrac{1}{S_5} \right)$.

$$S = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3} + \ldots + \frac{1}{S_4} - \frac{1}{S_5} \right) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_5} \right) =$$

$$= \frac{S_5 - S_1}{n \cdot S_1 \cdot S_5} = \frac{\sum_{i-1}^{n} (i+k+2) - \sum_{i=1}^{n} (i+1)}{n \cdot S_1 \cdot S_5} =$$

$$\frac{k + 3 + k + 4 + \ldots + n + k + 2 - 2 - 3 - \ldots. - n - 1}{n \cdot S_1 \cdot S_5} =$$

$$\frac{\underbrace{k+1+k+1+\ldots k+1}_{de\, n\, ori}}{n \cdot S_1 \cdot S_5} = \frac{n(k+1)}{n \cdot S_1 \cdot S_5} = \frac{k+1}{S_1 \cdot S_5}$$