A NOTE ON THE DROZ – FARNY LINE

Corneliu Mănescu-Avram

In 1899, Arnold Droz-Farny (1865-1912), a Swiss science and mathematics teacher, published without proof the following

Theorem 1. If two perpendicular straight lines are drawn through the orthocent er of a triangle, they intercept a segment on each of the three sidelines. The midpoints of the three segments are collinear.

Many authors have dealt with this assertion (see below) and [4] contains, once more!, without proof the following generalization, whose proof is the object of this note:

Theorem 2. Given triangle ABC with orthocenter H. A rectangular hyperbola with center H intersects line BC in A_1 and A_2, line CA in B_1 and B_2 and line AB in C_1 and C_2. Prove that the points P, Q and R, the midpoints of A_1A_2, B_1B_2 and C_1C_2, respectively, are collinear.

Proof : Suppose that the asymptotes of the hyperbola remain fixed and the triangle rotate around the orthocenter. Choose a complex system of coordinates with the origin O in the circumcircle of the triangle ABC, the asymptotes of the rectangular hyperbola parallel to the real and imaginary axes and the vertices of the triangle on the unit circle. It follows that $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ and $H(h)$, with $a, b, c, h \in \mathbb{C}$, $|a| = |b| = |c| = 1$ and $h = a + b + c$. After the change of coordinates $z \mapsto -z + h$ (a translation followed by a point reflection), the asymptotes become axes of coordinates and the coordinates of the points are $A(b + c)$, $B(c + a)$, $C(A + b)$ and $H(0)$. It is not necessary to rotate the triangle around the orthocenter, because the vertices have been arbitrarily chosen.

In Cartesian coordinates, the equation of a rectangular hyperbola having the axes of coordinates as asymptotes is $xy = m$, with m a real nonzero constant, so that the hyperbola has in complex coordinates the equation

$$z^2 - \bar{z}^2 = n, \text{ with } n \in \mathbb{C} - \mathbb{R}. \tag{1}$$

Line BC has the equation

$$z + bc\bar{z} = a + b + c + \frac{bc}{a}. \tag{2}$$

From (1) and (2) we obtain, by the elimination of $\bar{z}$, the quadratic equation

$$(b^2c^2 - 1)z^2 + 2\left(a + b + c + \frac{bc}{a}\right)z - \left(a + b + c + \frac{bc}{a}\right)^2 - b^2c^2n = 0, \tag{3}$$

whose solutions are a_1 and a_2, the coordinates of the points A_1 and A_2 respectively. It follows that the coordinate p of the point P is

$$p = \frac{a_1+a_2}{2} = \frac{a+b+c+\frac{bc}{a}}{1-b^2c^2} \tag{4}$$

and we can obtain, by the same way, q and r, the coordinates of the points Q and R respectively.

The points P, Q, R are collinear if and only if the following determinant vanishes

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & \bar{p} & 1 \\ q & \bar{q} & 1 \\ r & \bar{r} & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Taking account of the particular form of the coordinates p, q, r, we can write the determinant Δ as a sum of four determinants

$$\Delta = |a+b+c|^2\Delta_1 + abc(a+b+c)\Delta_2 + a^2b^2c^2(ab+bc+ca)\Delta_3 + a^2b^2c^2\Delta_4 \tag{6}$$

where

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{1-b^2c^2} & \frac{-b^2c^2}{1-b^2c^2} & 1 \\ \frac{1}{1-c^2a^2} & \frac{-c^2a^2}{1-c^2a^2} & 1 \\ \frac{1}{1-a^2b^2} & \frac{-a^2b^2}{1-a^2b^2} & 1 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{1-b^2c^2} & 1 \\ \frac{1}{1-c^2a^2} & \frac{-1}{1-c^2a^2} & 1 \\ \frac{1}{1-a^2b^2} & \frac{-1}{1-a^2b^2} & 1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2(1-b^2c^2)} & \frac{-1}{a^2(1-b^2c^2)} & 1 \\ \frac{1}{b^2(1-c^2a^2)} & \frac{-1}{b^2(1-c^2a^2)} & 1 \\ \frac{1}{c^2(1-a^2b^2)} & \frac{-1}{c^2(1-a^2b^2)} & 1 \end{vmatrix}, \Delta_4 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2(1-b^2c^2)} & \frac{-1}{1-b^2c^2} & 1 \\ \frac{1}{b^2(1-c^2a^2)} & \frac{-1}{1-c^2a^2} & 1 \\ \frac{1}{c^2(1-a^2b^2)} & \frac{-1}{1-a^2b^2} & 1 \end{vmatrix}.$$

The sum of the first two columns equals the third in Δ_1 and equals zero in Δ_2 and Δ_3, so that $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Direct calculations (is easy!) show that $\Delta_4 = 0$.

We substitute these values in (6) and we obtain (5), which ends the proof of the Theorem 2.

For $n = 0$ the hyperbola degenerates in two perpendicular straight lines (the asymptotes) and we get a proof of the Theorem 1, since the points P, Q, R are the same.

References

1. Kao, S.T., Bernhart, A., Generalized Droz-Farny Transversals, www.jstor.org

2. Honsberger, R., Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry, USA, 1995

3. Grinberg, D., From the Complete Quadrilateral to the Droz-Farny Theorem, unpublished notes

4. Grinberg, D., Hyacinthos message 6268, Jan.5, 2003

5. Pohoata, C., Ta, Su Hong, A short Proof of Lamoen's generalization of the Droz-Farny Line theorem, www.cpohoata.com

6. Bogomolny, A., Droz-Farny Line Theorem, from *Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles*

7. Ayme, J.-L., A Purely Synthetic Proof of the Droz-Farny Line Theorem, Forum Geometricorum, Volume 4 (2004) 219-224

8. Ehrmann, J.-P., van Lamoen, F.M., A projective generalization of the Droz-Farny line theorem, Forum Geometricorum, Volume 4 (2004) 225-227

9. Thas, C., A note on the Droz-Farny theorem, Forum Geometricorum, Volume 6 (2006) 25-28

10. Bradley, C.J., Monk, D., Smith, G.C., On a Porism Associated with the Euler and Droz-Farny lines, Forum Geometricorum, Volume 7 (2007) 11-17

11. Mihalescu, C., The geometry of the distinguished elements, Romanian Mathematical Society, Bucharest, 2007 (in Romanian)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TRANSPORTATIONS HIGH SCHOOL, PLOIESTI , ROMANIA

E-mail : avram050652@yahoo.com

ASUPRA UNEI PROBLEME A LUI DIEUDONNÉ

Corneliu Mănescu-Avram

În lucrarea [1] Jean Dieudonné a propus următoarea problemă :

Fie u_0 arbitrar în $(0, \pi)$ şi $u_{n+1} = \sin u_n$, pentru $n = 0, 1, 2, \ldots$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, u_n$.

Soluţia acestei probleme este prezentată în lucrarea [2] (pag. 487). Aceeaşi metodă ne permite să obţinem următoarea generalizare :

Fie $a > 0$ şi funcţia $f : [0. a) \to [0, a)$ cu următoarele proprietăţi :

a) f este indefinit derivabilă.

b) $f(0) = f''(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f'''(0) < 0$.

c) $f(x) < x$, oricare ar fi $x \in (0, a)$.

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} u_n$, unde $u_{n+1} = f(u_n)$ şi $u_0 \in (0, a)$ este arbitrar.

Se consideră cunoscută următoarea proprietate a şirurilor numerice : convergenţa îin sensul lui Cauchy implică şi convergenţa în sensul lui Cesaro către aceeaşi limită, adică

dacă $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = l$.

Şirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit, $0 < u_n < a$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Şirul este descrescător, deoarece $u_{n+1} = f(u_n) < u_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Conform teoremei lui *Weierstrass*, şirul este convergent către o limită l, astfel încât $l = f(l)$. Condiţiile din ipoteză implică $l = 0$. Aceasta este o condiţie necesară pentru ca $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n u_n}$ să fie finită.

Se aplică proprietatea de convergenţă pentru şirul $a_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ şi rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n u_n^2}. \qquad (1)$$

Avem

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{f^2(u_n)} - \frac{1}{u_n^2}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{f^2(x)} - \frac{1}{x^2}\right). \qquad (2)$$

Pentru calculul ultimei limite folosim regula lui *l'Hospital* :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{f^2(x)} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{f'(x)}\right)^2 = \left(\frac{1}{f'(0)}\right)^2 = 1, \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1 + f'(x)\right) = 1 + f'(0) = 2, \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-f'(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-f''(x)}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{-f'''(x)}{6} = \frac{-f'''(0)}{6}. \tag{5}$$

Din egalităţile (1) – (5) se deduce

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}u_n = \sqrt{1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-6}{f'''(0)}} = \sqrt{\frac{-3}{f'''(0)}}.$$

Note : 1) Limita (2) pentru funcţia sinus este calculată în lucratea [2] folosind dezvoltarea în serie *Taylor* într-o vecinătate a originii.

2) Dacă $f(0) = f''(0) = 0$, o limită asemănătoare cu (5) este

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+xf''(x)-f'(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{3} = \frac{f'''(0)}{3}.$$

Pentru $f(x) = \sin x$, această limită se află în [2], pag. 398.

3) Dacă $f'(0) \neq 0$, $f''(0) = 0$ şi $f(x) < xf'(0) + f(0)$, atunci funcţia f poate fi înlocuită prin funcţia g, definită prin $g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{f'(0)}$.

Bibliografie

1. Dieudonné, J., Calcul infinitésimal, Hermann, Paris, 1962

2. (coordonator) Teodorescu, N., Probleme din *Gazeta matematică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1984

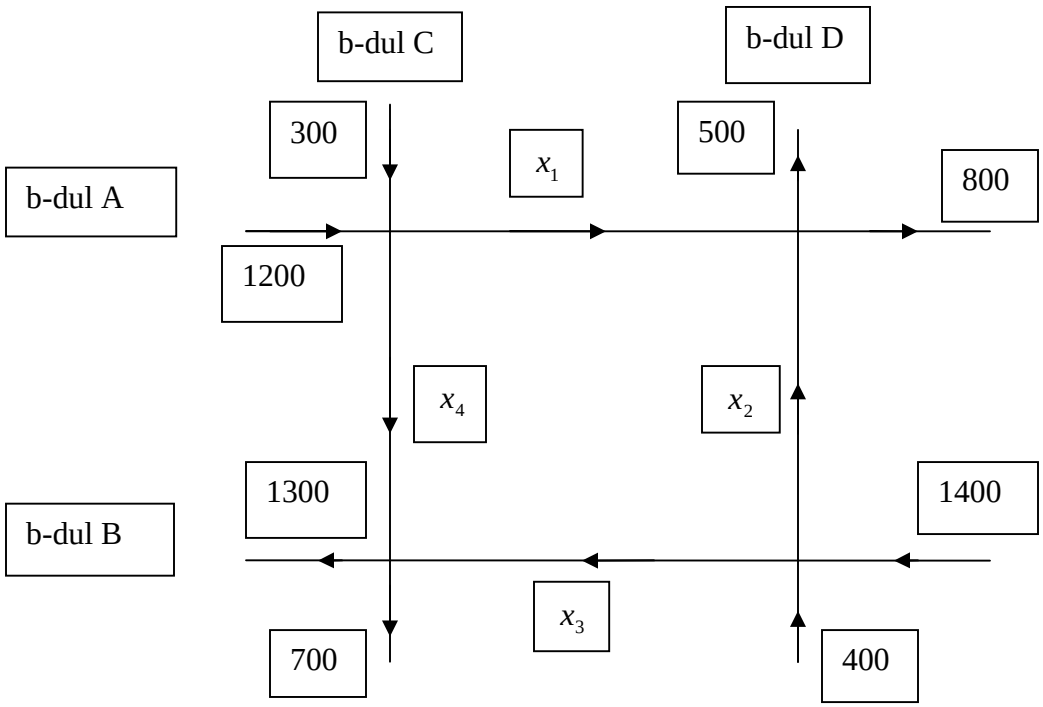
CATEDRA DE MATEMATICĂ, GRUPUL ŞCOLAR DE TRANSPORTURI – PLOIEŞTI

E-mail : avram050652@yahoo.com

Aplicaţii practice ale sistemelor liniare

Clasa a XI –a

Problema 1. În figura de mai jos este indicat traficul dintr-o anumită zonă a unui oraş.



Săgeţile indică direcţia de deplasare a maşinilor. Numerele indicate pe figură reprezintă numărul de maşini care intră sau ies din intersecţie. La fiecare din cele patru intersecţii se află semafoare care dirijează circulaţia. Pentru a evita blocajele , toate maşinile care intră într-o intersecţie trebuie să o părăsească.

a) Să se determine $x_1,\ x_2, x_3, x_4$

b) Pentru x_4=300, determinaţi $x_1,\ x_2, x_3$.

Soluţie:

a) Deoarece toate maşinile care intră într-o intersecţie trebuie să o şi părăsească, pentru fiecare intersecţie obţinem următoarele ecuaţii:

b-dul A $\bigcap$ b-dul C : $300+1200 = x_1 + x_4$

b-dul A $\bigcap$ b-dul D : $x_1 + x_2 = 500+800$

b-dul B $\bigcap$ b-dul C : $x_3 + x_4 = 1300+700$

b-dul B $\bigcap$ b-dul D : $1400+400 = x_2 + x_3$

Sistemul pe care îl avem de rezolvat este: $\begin{cases} x_1 + & & & x_4 = 1500 \\ x_1 + & x_2 & & = 1300 \\ & & x_3 + & x_4 = 2000 \\ & x_2 + & x_3 & = 1800 \end{cases}$, un sistem de patru ecuaţii liniare şi patru necunoscute.

Matricea sistemului şi matricea extinsă a sistemului sunt

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1500 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1300 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2000 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1800 \end{pmatrix}$

Cum $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$, rang(A)=3.

Fie determinantul principal $\Delta_p=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1$, deoarece determinantul caracteristic

$\Delta_c=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1500 \\ 1 & 1 & 0 & 1300 \\ 0 & 0 & 1 & 2000 \\ 0 & 1 & 1 & 1800 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1500 \\ 0 & 1 & 0 & -200 \\ 0 & 0 & 1 & 2000 \\ 0 & 1 & 1 & 1800 \end{vmatrix}=0$, înseamnă că sistemul este compatibil simplu nedeterminat cu necunoscuta secundară x_4.(Teorema lui Rouche)

Luând sistemul format din ecuaţiile principale avem:

$\begin{cases} x_1 = 1500-\alpha \\ x_1 + x_2 = 1300, \text{ unde } x_4=\alpha, \alpha \in \Re, \\ x_3 = 2000-\alpha \end{cases}$

Soluţia sistemului este: S={(1500-α ,α -200,2000-α),$\alpha \in \Re$ }.

b) x_4=300, obţinem soluţia

S={(1200, 100,1700,300)}.

Problema 2. Un teatru cu o capacitate de 300 de locuri a vândut la un spectacol toate biletele. Un bilet pentru copii costă 2 €, pentru studenţi 3 €, iar pentru adulţi 4 €. Se ştie că numărul adulţilor a fost jumătate din numărul copiilor şi studenţilor, iar la acea reprezentaţie s-au încasat 900 € . Determinaţi numărul de spectatori din fiecare categorie.

Soluţie

Notăm cu x- numărul de copii, cu y- numărul de studenţi şi cu z- numărul de adulţi.

Cu aceste notaţii, capacitatea de 300 de locuri a sălii de teatru, matematic se scrie : x+y+z= 300 , suma încasată de 900 €, 2x+3y+4z= 900, iar relaţia dintre diferitele categorii de spectatori: x+y=2z.
Aşadar sistemul ce trebuie rezolvat este următoru l:

$$\begin{cases} x+y+z=300 \\ 2x+3y+4z=900 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$$, cu soluţia unică x=y=z=100.

Problema 3. O fabrică de mobilă produce două tipuri de mese A şi B. Fiecare masă trece prin două etape: asamblare şi finisare. Capacitatea maximă a fabricii pentru asamblare este de 195 ore şi pentru finisare de 165 ore. Pentru fiecare masă A sunt necesare 4 ore la asamblare şi 3 ore la finisare, iar pentru masa B o oră la asamblare şi 2 ore la finisare. Determinaţi numărul de mese de fiecare tip care pot fi produse utilizând la maxim capacitatea fabricii.

Soluţie

Notând cu x numărul de mese tip A şi cu y numărul de mese de tip B , cele 195 de ore destinate asamblării sunt descrise de ecuaţia: 4x+y= 195,
iar cele 165 de ore utilizate la finisaj de ecuaţia: 3x+2y=165. Deci sistemul ce trebuie rezolvat este:

$$\begin{cases} 4x+y=195 \\ 3x+2y=165 \end{cases}$$ cu soluţia x= 45 şi y=15

Problema 4. Benzenul lichid arde în atmosferă. Dacă un obiect rece este pus peste benzen, atunci apa va condensa pe obiect şi se va depozita pe el negru de fum (car bon). Ecuaţia chimică pentru reacţie este de forma: $x_1C_6H_6 + x_2O_2 \to x_3C + x_4H_2O$. Determinaţi x_1, x_2, x_3, x_4 pentru a obţine balanţa ecuaţiei.

Soluţie: Pentru a obţine echilibrul (balanţa) ecuaţiei trebuie să alegem x_1, x_2, x_3, x_4 astfel încât numărul de atomi de carbon, hidrogen şi oxigen din cei doi membri să fie acelaşi.

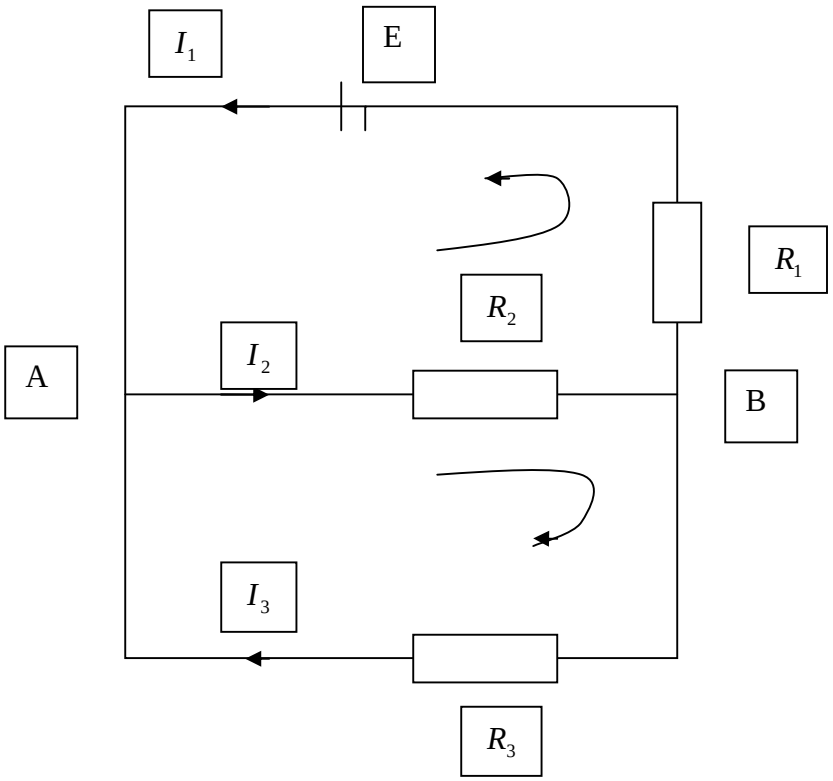
Deoarece benzenul conţine şase atomi de carbon, iar negru de fum un atom, atunci pentru egalizarea numărului de atomi de carbon trebuie să avem $6\,x_1 = x_3$. Analog, pentru atomii de hidrogen şi oxigen obţi nem ecuaţiile:$6\,x_1 = 2\,x_4$, $2\,x_2 = x_4$.

Cele trei ecuaţii conduc la sistemul : $\begin{cases} 6x_1 = x_3 \\ 6x_1 = 2x_4 \\ 2x_2 = x_4 \end{cases}$.

Soluţia sistemului este $x_1 = \frac{\alpha}{3}, x_2 = \frac{\alpha}{2}, x_3 = 2\alpha, x_4 = \alpha, \alpha \geq 0$.

Pentru $\alpha = 3$ se obţine soluţia particulară $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = 6$, $x_4 = 3$.

Problema 5. Determinaţi intensităţile curenţilor electrici d in reţeaua de mai jos, dacă se cunosc E=16V, $R_1 = R_2 = R_3 = 2\Omega$.



Soluţie:

Observăm că reţeaua are dou ă noduri (un nod este punctul de întâlnire a cel puţin trei laturi, iar o latură este porţiunea de circuit dintre două noduri), notate cu A şi B, cu trei laturi şi două ochiuri. Pentru curenţii din cele trei laturi şi pentru parcurgerea ochiurilor se aleg sensurile indicate în figură.

Aplicând prima teoremă a lui Kirchoff: "Suma algebrică a intensit ăţilor curenţilor din laturile legate într-un nod al unei reţele este nulă", adică $\sum I_k = 0$,unde I_k este intensitatea curentului din latura k, considerată cu semnul "+" dacă sensul curentului este orientat dinspre nod şi cu semnul "-" dacă sensul curentului este orientat spre nod, obţinem în nodul A ecuaţia : $-I_1 + I_2 - I_3 = 0$, iar în nodul B: $I_1 - I_2 + I_3 = 0$.

Aplicând a doua teoremă a lui Kirchoff: "Suma algebrică a tensiunilor electromotoare (imprimate) dintr-un ochi al unei reţele este egală cu suma căderilor de tensiune din laturile ochiului ", adică $\sum E_k = \sum R_k I_k$,(căderea de tensiune într-o latură

se consideră pozitivă dacă sensul de parcurgere al unei laturi coincide cu cel ales pentru curentul respectiv , regulă valabilă şi pentru tensiunea electromotoare), obţinem în nodurile A, respectiv B, ecuaţiile: $2I_1 + 2I_2 = 16$, respectiv $2I_2 + 2I_3 = 0$.

Ca atare sistemul propus spre rezolvare este : $\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ 2I_1 + 2I_2 = 16 \\ 2I_2 + 2I_3 = 0 \end{cases}$ .Soluţia sistemului este:

$I_1 = \frac{16}{3} A, I_2 = \frac{8}{3} A, I_3 = \frac{8}{3} A$, deoarece se consideră valorile absolute (sensul lui I_3 fiind invers celui reprezentat în schemă se obţine pentru I_3 o valoare negativă).

Bibliografie: Mircea Ganga- Matematică, manual pentru clas a a XI-a

Prof. Bulgăr Delia –Liceul Teoretic „Trian Vuia” Făget, jud. Timiş

Revista Electronică MateInfo.ro ISSN 2065 – 6432 Nr. Aprilie 2010
www.mateinfo.ro

DEMONSTRAŢII ALE TEOREMEI LUI PITAGORA

PROPUNĂTOR:
PROF. IGNĂTESCU VIOREL OVIDIU
ŞCOALA CU CLASELE I-VIII MĂTEŞTI
COM. SĂPOCA, JUD. BUZĂU

“Matematica este calea de înţelegere a UNIVERSULUI. Numărul este măsura tuturor lucrurilor.”
(Pitagora)

În realizarea obiectivelor predării geometriei un loc important îl ocupă studiul Teoremei lui Pitagora, ale cărei aplicaţii se folosesc începând cu clasa a Vll-a în toate celelalte nivele de instruire. Pitagora a fost unul dintre primii deschizători de drumuri în matematica elină. El a realizat legătura dintre mărimi şi numere, arătând cum relaţiile între mărimile unei figuri geometrice se exprimă prin relaţii între numere. Legătura dintre aritmetică şi geometrie iniţiată de Pitagora şi cultivată în continuare de câteva generaţii în şcoala ce-i poartă numele, a fost încheiată cu succes de Euclid şi consemnată pentru totdeauna în celebrele sale "Elemente". Nu vom putea pătrunde adevărurile matematice contemporane în cele mai mici detalii dacă nu vom cunoaşte în mod temeinic rezultatele matematicii antice. Acestea sunt doar câteva dintre motivele pentru care am ales să studiez această figură a matematicii antice şi în principal Teorema ce-i poartă numele şi pe care oricare om, indiferent de nivelul de instruire a auzit-o, a enunţat-o, a folosit-o.

În această prezentare am evidenţiat câteva rezultate, care prin tradiţie aparţin lui Pitagora şi mai ales Şcolii pitagoreice, pe al cărei frontispiciu era scrisă deviza "Numerele guvernează lumea". Dar acest edificiu pitagoreic bazat pe numere a început după scurt timp să se clatine şi apoi să se prăbuşească, atunci când s-a constatat că există mărimi geometrice ce nu pot fi exprimate cu ajutorul numerelor (naturale sau raţionale). Este interesant că aceste mărimi au fost găsite chiar cu ajutorul teoremei ce i se atribuie lui Pitagora.

De asemenea am prezentat cele mai reprezentative demonstraţii ale Teoremei lui Pitagora atribuite lui Pitagora, Euclid, Bhaskara, Pisano, Leonardo da Vinci şi nu ăn ultimul rând, câteva aplicaţii ale Teoremei lui Pitagora.

Începând cu Pitagora (582-500 î.e.n.) şi vestita lui şcoală în care discipolii săi au fost primii care au folosit cuvântul MATEMATICĂ cu înţeles de aritmetică şi geometrie, continuând cu Euclid (330-275 î.e.n.), Zenodor (sec. II î.e.n.), Heron din Alexandria (sec. I-II î.e.n.), Ptolemeu (sec. II), Papus din Alexandria (sec. III) şi mulţi alţi matematicieni celebri, ajungem în prezent constatând că interesul oamenilor pentru Matematică a rămas acelaşi, în permanenţă descoperindu-se câte ceva nou. **Pitagora din Samos** se presupune că a fost unul dintre primii matematicieni puri, reprezentând o figură extrem de importantă în dezvoltarea Matematicii. Puţine sunt documentele şi informaţiile sigure asupra vieţii sale, totul pierzându-se în legendă, neexistând printre lucrările matematicienilor greci, lucrări scrise care să conţină rezultate ale studiilor acestuia în domeniul matematicii, iar pentru a recunoaşte măiestria gândirii lui este necesar să ne îndreptăm asupra scrierilor discipolilor lui. Egiptenii antici cunoşteau tehnici de preparare a cărămizilor şi de construire a edificiilor cu ajutorul acestora, de unde Pitagora a câştigat cunoştinţe despre forma, dimensiunea, volumul corpurilor, despre tehnicile de măsurare şi sistemul zecimal de calcul. Tot egiptenii cunoşteau că triunghiul având laturile cu lungimi de 3, 4, 5 unităţi este dreptunghic şi câteva noţiuni elementare de trigonometrie.

Numerele erau pentru Pitagora ceva mistic, misterios, fascinant şi tocmai din cauza acestei corespondenţe ele posedau o realitate proprie de o perfecţiune şi o armonie universale. Pitagora s-a dedicat studiului geometriei, dându-i o formă de educaţie liberală, căutând principii şi investigând teoreme din punct de vedere conceptual şi teoretic, fiind primul care a stabilit incomensurabilitatea numerelor, observând că pentru diagonala unui pătrat lungimea nu poate fi exprimată printr-un număr întreg. Pitagoreicii reprezentau numerele sub forma unor puncte aşezate în diverse moduri, obţinând astfel unele figuri geometrice. Astfel apare noţiunea de numere figurative, realizându-se pentru prima oară o legătură între aritmetică şi geometrie. Fiecare punct simbolizează o unitate, un atom material, este înconjurat de un câmp gol şi nu admite nici o fracţiune. Figurile geometrice se nasc, se compun şi se descompun numai cu ajutorul numerelor întregi.

După modul cum sunt aşezate, numerele pot fi: liniare, plane sau solide, obţinând astfel geometria pe o dreaptă, geometria plană sau geometria în spaţiu. Cele mai simple numere liniare, plane sau solide sunt numerele 2, 3 şi 4. Numărul 2 determină poziţia unei **drepte**, numărul 3 determină cea mai simplă figură plană, **triunghiul**, iar 4 determină cel mai simplu corp din spaţiu: **tetraedrul.**

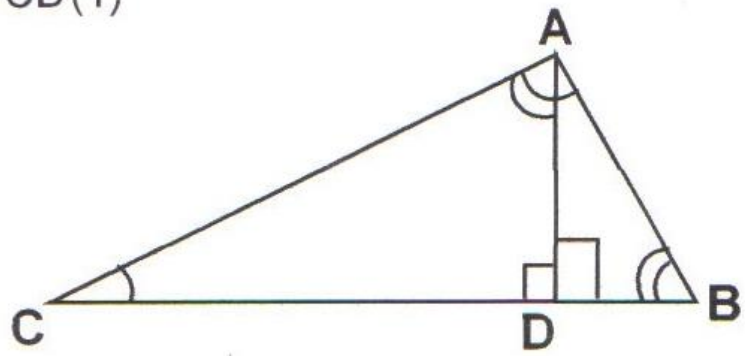
CELE MAI INTERESANTE LE VOI PREZENTA ÎN CELE CE URMEAZĂ:

V.1.Demonstrația atribuită lui Pitagora

Se presupune că una din demostrațiile acestei teoreme este atribuită lui Pitagora şi se bazează pe teoria proporțiilor.

$\Delta ADC \sim \Delta ABC$; $m(\sphericalangle ADC) = m(\sphericalangle BAC) = 90^o$, $m(\sphericalangle ACD) = m(\sphericalangle ACB)$;

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC} \Leftrightarrow AC^2 = BC \cdot CD \,(1)$$



$\Delta ABD \sim \Delta ABC$; $m(\sphericalangle ADB) = m(\sphericalangle BAC) = 90^o$, $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ABD)$;

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DB}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = BC \cdot DB. \,(2)$$

Din (1) şi (2) prin adunare se obține:

$$AB^2 + AC^2 = BC \cdot DB + BC \cdot CD = BC(DB+CD) = BC \cdot BC = BC^2$$

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2} \qquad \text{(c.c.t.d)}$$

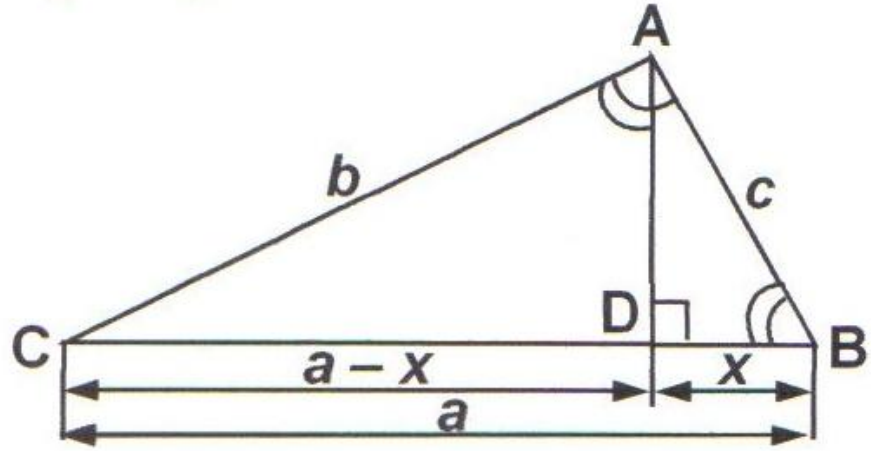
V.2. O demonstrație bazată tot pe teoria proporțiilor este dată în lucrarea *"Ingeniozitate şi surpriză în matematică"* de Ion Ionescu în anul 1895.

$$\Delta ABC \sim \Delta ABD \Rightarrow \frac{x}{c} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow c^2 = ax \qquad (3)$$

$$\Delta ACD \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{a-x}{b} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow b^2 = a^2 - ax \qquad (4)$$

Se adună relațiile (3) şi (4):

$$\boxed{b^2 + c^2 = a^2} \quad \text{(c.c.t.d)}$$



V.3. Demonstrația dată de Euclid în cartea I-a, teorema 47 din ELEMENTE, bazată pe echivalență de arii.

$S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} BE \cdot BN = \frac{1}{2} S_{BEMN}$; $S_{\triangle BCI} = \frac{1}{2} BI \cdot AB = \frac{1}{2} S_{AHIB}$

Cum $\Delta ABE \equiv \Delta BCI$; ($BC = BE$; $AB = BI$; $m(\sphericalangle ABE) = m(\sphericalangle IBC) = 90^o + m(\sphericalangle ABC)$).

$S_{BEMN} = S_{AHIB}$. (5)

$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} CD \cdot CN = \frac{1}{2} S_{CDMN}$

$S_{\triangle BCF} = \frac{1}{2} CF \cdot CA = \frac{1}{2} S_{CFGA}$

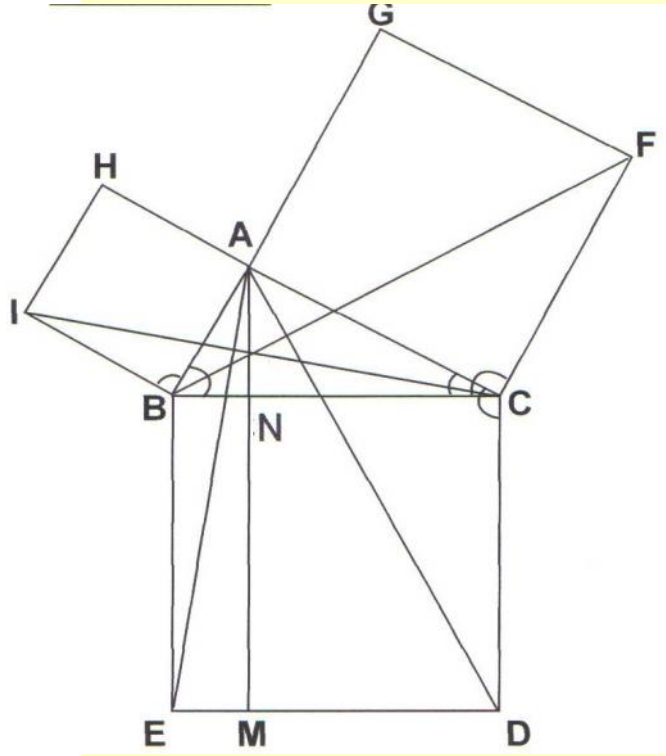
Cum $\Delta BCF \equiv \Delta ACD$; ($AC=CF$; $BC=CD$; $m(\sphericalangle BCF) = m(\sphericalangle ACD) = 90^o + m(\sphericalangle ACB)$).

$S_{CDMN} = S_{CFGA}$. (6)

Adunând relațiile (5) şi (6) obținem:

$S_{(AHIB + CFGA)} = S_{(BEMN+CDMN)} = S_{BCDE}$.

$\boxed{AB^2 + AC^2 = BC^2}$ (c.c.t.d).



V.4. Demonstrația dată de Bhaskara Aciarya (1114-1178) în cartea lui Ciu-Pei-Suan.

Se consideră două pătrate egale ABCD şi A'B'C'D', de latură

$$AB = A'B' = b + c.$$

Primul pătrat se descompune în:

- două dreptunghiuri egale de arie $b \cdot c$;
- două pătrate de arii b^2 şi c^2;

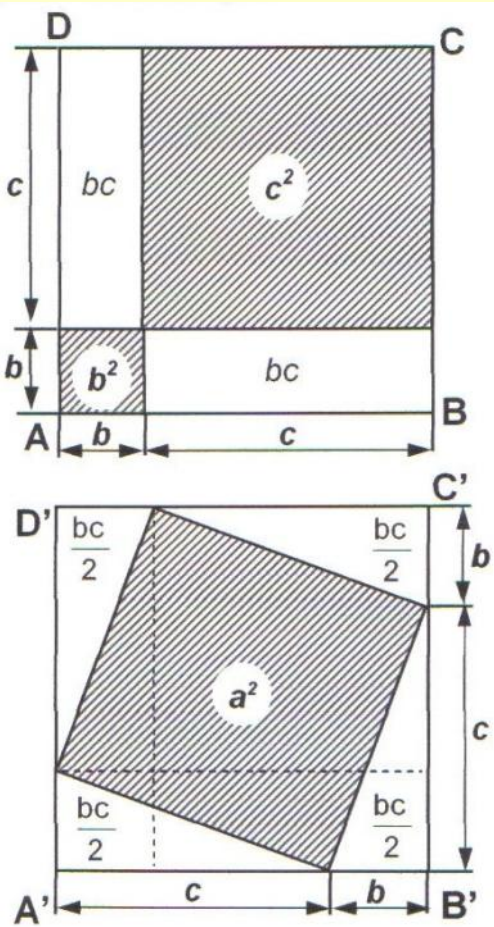
Al doilea pătrat se descompune în:

- patru triunghiuri dreptunghice de arie $\frac{bc}{2}$.
- un pătrat de arie a^2 construit pe ipotenuza triunghiului dreptunghic de catete b şi c.

Cum cele două pătrate au laturile egale, ariile lor sunt egale:

$$S_{ABCD} = S_{A'B'C'D'}. \qquad b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + 4\,\frac{bc}{2}$$

$$\boxed{b^2 + c^2 = a^2} \qquad \text{(c.c.t.d.)}$$



V.6. Demonstrația dată de Leonardo da Vinci (1452 -1519).

Construim pătratul BCDE pe ipotenuza BC a triunghiului dreptunghic ABC (AB = c, AC = b, BC = a),apoi ducem DB'⊥AC; EC'⊥DB' şi AA'⊥EC'. Pătratul BCDE construit pe ipotenuza BC se descompune astfel în patru triunghiuri congruente cu triunghiul dat ABC de catete b,c şi în pătratul AB'C'A' de latură AB' = AC - B'C = b - c.

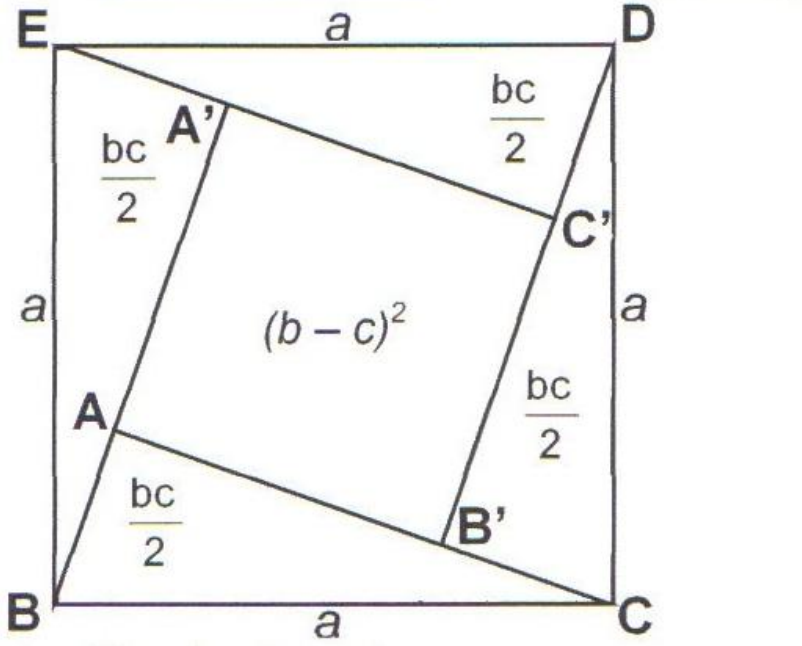
$$S_{AB'C'A'} = AB'^2 = (b - c)^2$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle CDB'} = S_{\triangle DC'E} = S_{\triangle EA'B} = \frac{bc}{2} \qquad S_{BCDE} = S_{AB'C'A'} + 4S_{\triangle ABC}$$

$$a^2 = (b - c)^2 + 4\frac{bc}{2} = b^2 - 2bc + c^2 + 2bc$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

(c.c.t.d.)



V.10. Demonstrația folosind metoda vectorială.

Considerăm vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ aşezați pe laturile triunghiului dreptunghic ABC $m(\sphericalangle A) = 90°$

Se ştie că suma a trei vectori care închid un triunghi este nulă:

$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = 0$$

$$\vec{b} + \vec{c} - \vec{a} = 0$$

$$\vec{b} + \vec{c} = \vec{a} \qquad (1)$$

Ridicând la pătrat în ambii membri obținem:

$$(\vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{a}^2$$

$$\vec{b}^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}^2 = \vec{a}^2 \quad (2)$$

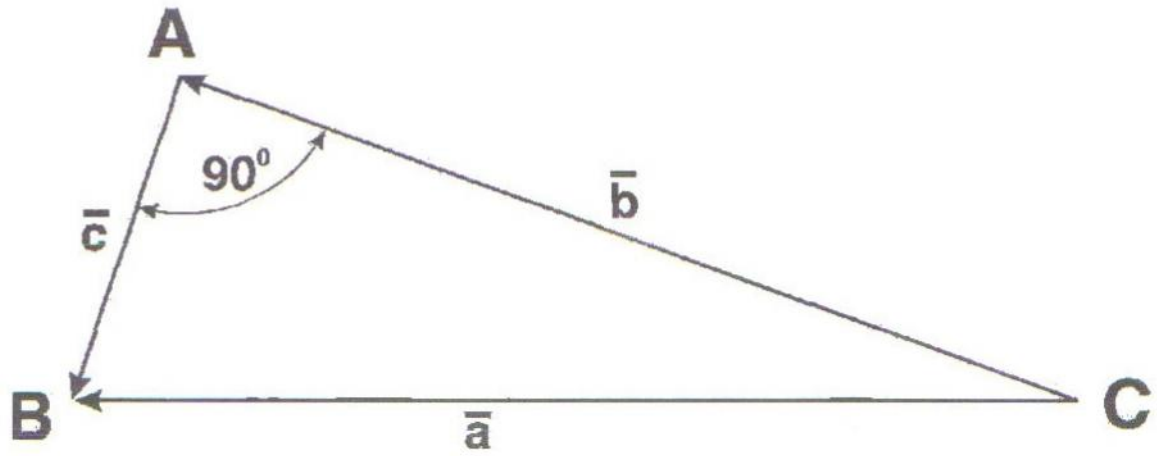
Cum produsul scalar a doi vectori $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ este:

$$\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2} = |\overrightarrow{v_1}|\cdot|\overrightarrow{v_2}|\cos(\widehat{v_1,v_2}) = v_1\cdot v_2\cos(\widehat{v_1,v_2})$$

Relația (2) devine:

$$b\cdot b + 2\cdot b\cdot c\cos 90° + c\cdot c = a\cdot a$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2} \qquad \text{(c.c.t.d)}$$

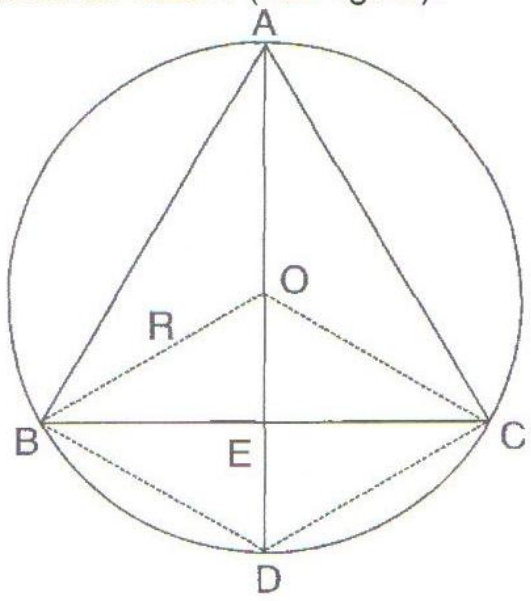


Dintre aplicaţiile Teoremei lui Pitagora, le-am ales pe cele mai des întâlnite în gimnaziu: latura şi apotema poligoanelor regulate înscrise în cerc şi puterea punctului faţă de cerc.

10. Latura şi apotema triunghiului echilateral înscris în cerc.

Fie ABC un triunghi echilateral înscris în cercul da rază R.

Se împarte cercul în 6 părți cu ajutorul razei, apoi unim punctele de diviziune din două în două. Se obține astfel triunghiul echilateral ABC înscris în cercul de rază R (vezi figura).



Dacă notăm $AB = l_3$, $AD = 2R$, $BD = R$, $OE = a_3$, teorema lui **Pitagora** aplicată în triunghiul ABD ($A\hat{B}D = 90°$) ne dă:

$$AB^2 = AD^2 - BD^2,$$

$$l_3^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2,$$

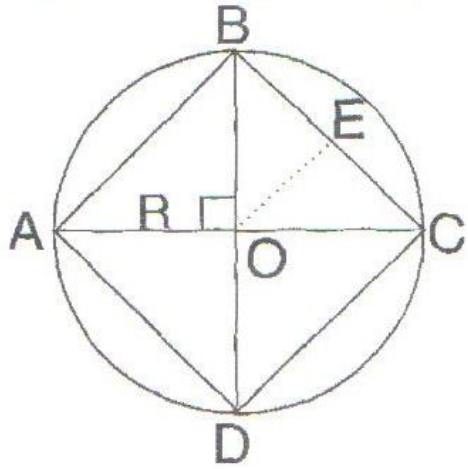
$$l_3 = R\sqrt{3}.$$

Patrulaterul OBDC fiind romb având laturile egale cu raza (OB = CO = BD = CD), diagonalele se taie în părți egale, şi deci

$$OE = \frac{1}{2}\,OD,\ a_3 = \frac{R}{2}.$$

11. Latura şi apotema pătratului înscris în cerc.

În cercul cu centrul O se duc două diametre perpendiculare ($AC \perp BD$).
Dacă notăm $AB = l_4$, $OE = a_4$,
în triunghiul AOB (din figura alăturată)
teorema lui **Pitagora** ne dă:

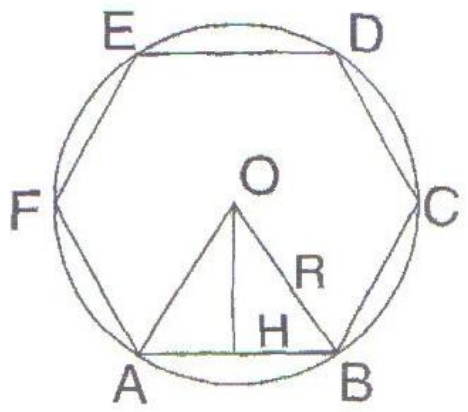


$$AB^2 = AO^2 + OB^2,\ l_4^2 = R^2 + R^2 = 2R^2,\ l_4 = r\sqrt{2}$$

$$OE = \frac{1}{2}DC,\ a_4 = \frac{l_4}{2};\ a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

12. Latura şi apotema hexagonului regulat înscris în cerc.

Din figura alăturată se constată că $m(A\hat{O}B) = 60°$;
$m(O\hat{A}B) = m(O\hat{B}A) = 60°$.
Triunghiul AOB este echilateral şi
deci $AB = AO = BO = R$, $l_6 = R$.



Dacă ducem $OH \perp AB$,
din triunghiul AOH ($A\hat{H}O = 90°$),

teorema lui **Pitagora** ne dă:

$$OH^2 = OA^2 - AH^2,\ a_6^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4},\ a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

CONCLUZII

Teorema lui Pitagora este una din cele mai frumoase lecţii de geometrie. Elevii sunt stimulaţi de forma clară, concisă a teoremei, uşor de reţinut şi de aplicat, fiind una din teoremele pe care şi le amintesc peste ani. Totodată, aplicaţiile ce folosesc această teoremă pot fi de un grad de dificultate foarte variat plecând de la simplu la complex şi având un caracter practic ridicat, ceea ce contribuie la o bună înţelegere de către un număr mare de elevi.

Din punct de vedere metodic, Teorema lui Pitagora permite o abordare atât clasică, dar şi prin perspectiva metodelor moderne. Din experienţa de la clasă, am constatat că alternarea metodelor tradiţionale de predare cu metodele interactive, duce la creşterea randamentului elevilor. Aceleaşi conţinuturi, prezentate într-o formă mai atractivă, favorizează participarea activă la lecţie şi o bună socializare în colectivul clasei, ducând la asumarea rolurilor şi valorizarea potenţialului fiecărui elev, indiferent de nivelul de pregătire. Dintre metodele interactive ce se pretează a fi aplicate în predarea lecţiei “Teorema lui Pitagora” sunt: mozaicul, cubul, ciorchinele, ştiu-vreau să ştiu-am învăţat, e.t.c.

BIBLIOGRAFIE

1. Diogenes Laerţios

Despre vieţile şi doctrinele filozofilor (vol. I;II) – Editura Minerva, Bucureşti, 1997

2. Mica enciclopedie matematică

Editura Tehnică, Bucureşti, 1990

3. N. Mihăileanu

Istoria matematicii – Editura Enciclopedică Română, Bucureşti, 1974

4. Ion Purcaru; Octavian Bască

Oameni, idei, fapte din istoria matematicii – Editura Economică, 1996

5. **Dana Radu; Eugen Radu**

Matematică – Manual pentru clasa a VII-a, Editura Teora

DESPRE VALORILE UNUI POLINOM – DETERMINANTUL CICLIC DE ORDIN n.

OLÁH CSABA, GRUP SCOLAR „LIVIU REBREANU”, BALAN

Fie funcţia polinomială $g(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+...2x+1,\ \ n\in N, n\geq 2$, $\varepsilon_i\ i=\overline{1,n-1}$ rădăcinile de unitate de ordin n ($\varepsilon^n=1,\ \ \varepsilon^k\neq 1, k=\overline{1,n-1}$). Să determinăm valoarea produsului

$$P=g(\varepsilon_0)\cdot g(\varepsilon_1)\cdot....\cdot g(\varepsilon_{n-1})$$

Determinarea acestei valori o vom face în două trepte:

a) în prima treaptă vom demonstra – dacă $C_n=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ a_n & a_1 & ... & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$, $a_1,a_2,...,a_n\in C$, atunci $\det(C_n)=f(\varepsilon_0)\cdot f(\varepsilon_1)\cdot....\cdot f(\varepsilon_{n-1})$, unde $f(x)=a_1+a_2x+...+a_{n-1}x^{n-2}+a_nx^{n-1}$, $\varepsilon_i\ i=\overline{0,n-1}$.

b) în a doua treaptă vom demonstra egalitatea următoare:

$$\det(M)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot n^{n-2},\ n\in N\ \ n\geq 1.$$

a) Să începem cu prima treaptă – luăm matricea determinantului *Vandermonde* de ordinul n:

$$V_n\left(\varepsilon_0,\varepsilon_1,...,\varepsilon_{n-1}\right)=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varepsilon_0^{n-1} & \varepsilon_1^{n-1} & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-1}\end{bmatrix}.$$

Atunci

$$C_n\cdot V_n\left(\varepsilon_0,\varepsilon_1,...,\varepsilon_{n-1}\right)=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & ... & a_n\\ a_n & a_1 & ... & a_{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varepsilon_0^{n-1} & \varepsilon_1^{n-1} & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-1}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}a_1+a_2\varepsilon_0+...a_n\varepsilon_0^{n-1} & a_1+a_2\varepsilon_1+...a_n\varepsilon_1^{n-1} & \cdots & a_1+a_2\varepsilon_{n-1}+...a_n\varepsilon_{n-1}^{n-1}\\ a_n+a_1\varepsilon_0+...a_{n-1}\varepsilon_0^{n-1} & a_n+a_1\varepsilon_1+...a_{n-1}\varepsilon_1^{n-1} & \cdots & a_n+a_1\varepsilon_{n-1}+...a_{n-1}\varepsilon_{n-1}^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_2+a_3\varepsilon_0+...a_1\varepsilon_0^{n-1} & a_2+a_3\varepsilon_1+...a_1\varepsilon_1^{n-1} & \cdots & a_2+a_3\varepsilon_{n-1}+...a_1\varepsilon_{n-1}^{n-1}\end{bmatrix}=T.$$

Să luam elementele acestei matrice T după rânduri – observăm că primul rând conţine $f\left(\varepsilon_0\right), f\left(\varepsilon_1\right),...,f\left(\varepsilon_{n-1}\right)$ (în această ordine). Elementele din rândul doi înmulţim cu ε_i^n, după indice, unde $i=\overline{1,n-1}$ (valorile acestora nu se vor schimba, pentru că $\varepsilon_i^n=1$, $i=\overline{1,n-1}$). Atunci elementul din al doilea rând şi prima coloană va arăta aşa:

$$a_n\varepsilon_0^n+a_1\varepsilon_0^{n+1}+a_2\varepsilon_0^{n+2}...+a_{n-1}\varepsilon_0^{2n-1}=\varepsilon_0\left(a_n\varepsilon_0^{n-1}+a_1\varepsilon_0^n+a_2\varepsilon_0^{n+1}+...a_{n-1}\varepsilon_0^{2n-1}\right)\underset{k\in N}{\overset{\varepsilon^{n+k}=\varepsilon^n}{=}}$$

$$\underset{k\in N}{\overset{\varepsilon^{n+k}=\varepsilon^n}{=}}\varepsilon_0\left(a_1+a_2\varepsilon_0+...a_{n-1}\varepsilon_0^{n-2}+a_n\varepsilon_0^{n-1}\right)=\varepsilon_0 f\left(\varepsilon_0\right).$$

În mod similar, al doilea membru înmulţim cu ε_1^n, al treilea cu ε_2^n ş.a.m.d – în rândul al doilea obţinem $\varepsilon_0 f(\varepsilon_0), \varepsilon_1 f(\varepsilon_1), ..., \varepsilon_{n-1} f(\varepsilon_{n-1})$. Pentru fiecare rând efectuăm aceste operaţii, scoatem factorul comun corespunzător, şi matricea noastră va arăta în felul următor:

$$T = C_n \cdot V_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}) = \begin{bmatrix} f(\varepsilon_0) & f(\varepsilon_1) & \cdots & f(\varepsilon_{n-1}) \\ \varepsilon_0 f(\varepsilon_0) & \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \cdots & \varepsilon_{n-1} f(\varepsilon_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_0^{n-1} f(\varepsilon_0) & \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} f(\varepsilon_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

Să observăm că $\det T = f(\varepsilon_0) \cdot f(\varepsilon_1) \cdot ... \cdot f(\varepsilon_{n-1}) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_0^{n-1} & \varepsilon_1^{n-1} & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} =$

$= f(\varepsilon_0) \cdot f(\varepsilon_1) \cdot ... \cdot f(\varepsilon_{n-1}) \cdot \det V_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1})$ (am scos factor comun $f(\varepsilon_i)$ din coloana i).

Putem scrie $\det(C_n) \cdot \det(V_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1})) = \det(C_n \cdot V_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1})) = \det(T) =$

$= f(\varepsilon_0) \cdot f(\varepsilon_1) \cdot ... \cdot f(\varepsilon_{n-1}) \cdot \det V_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1})$, adică

$\det(C_n) \cdot \det(V_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1})) = = f(\varepsilon_0) \cdot f(\varepsilon_1) \cdot ... \cdot f(\varepsilon_{n-1}) \cdot \det V_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1})$,

împărţim egalitatea cu $\det V_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}) \neq 0$ ($\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$ pentru $i \neq j$, $i, j \in N \Rightarrow$

$\Rightarrow \det V_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}) \neq 0$)), şi obţinem

$$\det(C_n) = f(\varepsilon_0) \cdot f(\varepsilon_1) \cdot ... \cdot f(\varepsilon_{n-1})$$

b) În a doua treaptă calculăm valoarea determinantului ciclic de ordinul n

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+2+...+n & 2 & \cdots & n \\ n+1+...+n-1 & 1 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2+3+...+1 & 3 & \cdots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}}{=} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 1 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

(am scos factor comun $\frac{n(n+1)}{2}$ din prima coloana).

De aici o să reducem ordinul determinantului de la n la $n-1$, apoi la $n-2$ - prima dată scăzând rândurile câte două, începând cu ultimul rând şi continuăm până la primul (ordinal se reduce la $n-1$), după aceasta scădem prima coloană din fiecare.

$$\det M = \frac{n(n+1)}{2} \underset{n\times n}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 1 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \underset{n\times n}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \underset{(n-1)\times(n-1)}{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \underset{(n-1)\times(n-1)}{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & -n & -n & \cdots & -n & -n \\ -1 & n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & n & 0 \end{vmatrix}} =$$

$$= -\frac{n(n+1)}{2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -n & -n & -n & \cdots & -n & -n \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n & 0 \end{vmatrix}}_{(n-2)\times(n-2)} = -\frac{n(n+1)}{2} D .$$

Calculăm valoarea determinantului D - dezvoltăm după ultima coloană şi obţinem

$$D = (-1)^{1+(n-2)} \cdot (-n) \underbrace{\begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}}_{(n-3)\times(n-3)} = (-1)^{n-1} \cdot (-n) \cdot n^{n-3} = (-1)^{n} n^{n-2} .$$

Atunci $\det M = -\frac{n(n+1)}{2} D = -\frac{n(n+1)}{2} \cdot (-1)^{n} \cdot n^{n-2} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot n^{n-2}$, deci

$$\det M = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot n^{n-2} .$$

Punând la un loc rezultatele din **a)** şi **b)** , luând în

$f(x) = a_1 + a_2 x + ... + a_{n-1} x^{n-2} + a_n x^{n-1}$, $a_i = i$ (aşa obţinem g din enunţ), putem scrie:

$$P = g(\varepsilon_0) \cdot g(\varepsilon_1) \cdot ... \cdot g(\varepsilon_{n-1}) = \det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot n^{n-2}$$, deci

$g(\varepsilon_0)\cdot g(\varepsilon_1)\cdot\ldots\cdot g(\varepsilon_{n-1})=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot n^{n-2}$, ce trebuia calculat.

La sfârşit să vedem un rezultat mai general, din care, caz special, obţinem valoarea determinantului M din problema precedentă.

Generalizare – fie $(a_n)_{n\geq 1}$ progresie aritmetică, cu primul membru a_1 şi cu raţia r. Atunci să socotim valoarea determinantului Δ în funcţie de a_1 şi r, unde

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

. Metoda o să fie similară cu ce am văzut mai sus.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1+a_2+...+a_n & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1+a_2+...+a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1+a_2+...+a_n & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1+a_2+...+a_n & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ a_1+a_2+...+a_n & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} \overset{\sum_{i=1}^{n} a_i = S_n}{=} S_n \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 1 & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ 1 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} =$$

$$= S_n \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & -r & -r & \cdots & -r & -r \\ 0 & (n-1)r & -r & \cdots & -r & -r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -r & -r & \cdots & -r & -r \\ 0 & -r & -r & \cdots & (n-1)r & -r \end{vmatrix}}_{n\times n} = S_n \underbrace{\begin{vmatrix} -r & -r & \cdots & -r & -r \\ (n-1)r & -r & \cdots & -r & -r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -r & -r & \cdots & -r & -r \\ -r & -r & \cdots & (n-1)r & -r \end{vmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)} =$$

$$= S_n \cdot r^{n-1} \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 \end{vmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)}$$ (am scos factor comun r din fiecare coloană).

Să observăm că determinantul $\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 \end{vmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)}$ a aparut şi mai sus,

şi

valoarea lui este egală cu $\underline{-D = -(-1)^n n^{n-2} = (-1)^{n+1} n^{n-2}}$.

Atunci putem scrie $\Delta = S_n \cdot r^{n-1} \cdot (-1)^{n+1} n^{n-2} = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)r\right) \cdot r^{n-1} \cdot (-1)^{n+1} n^{n-2} =$

$= \frac{(-1)^{n+1}}{2} \cdot (r \cdot n)^{n-1} \cdot \left(2a_1 + (n-1)r\right)$.

Deci

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \cdot (r \cdot n)^{n-1} \cdot \left(2a_1 + (n-1)r\right)$$

unde $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetica, primul membru a_1 si cu ratia r .

Obs.: **a)** să observăm următoarele – dacă punem $a_1 = 1$ şi $r = 1$, obţinem determinatul

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot n^{n-2}$$ – verificăm rezultatul cu formula

noastră mai generală $a_1 = 1, r = 1$ obţinem $(\Delta_{\substack{a_1=1 \\ r=1}})$

$$\det M = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \cdot (1 \cdot n)^{n-1} \cdot \left(\underbrace{2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 1}_{=n+1} \right) = (-1)^{n+1} \frac{n^{n-1}(n+1)}{2} = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2}$$

adică rezultatul obţinut la problema din enunţ.

b) la scăderea rândurilor determinantului Δ am folosit $a_{n+1} - a_n = r$ şi $a_n = a_1 + (n-1)r$, $n \in N^*$.

Bibliografie

1. Marcus, A. and Szántó, Cs. (1996): Problems in General Algebra. "Babes -Bolyai" University, Cluj-Napoca. 105pp. (in Hungarian).

Numere de tip Fibonacci

de Florin Antohe

Numim şir Fibonacci şirul $(F_n)_{n\geq 1}$ definit prin $F_1 = F_2 = 1$ şi $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pentru $n \geq 2$. Acest şir de numere a fost introdus în anul 1228 de către matematicianul italian Leonardo Fibonacci pornind de la studiul înmulţirii iepurilor de casă .

Ţinând cont că ecuaţia caracteristică ataşată şirului lui Fibonacci este $x^2 - x - 1 = 0$ cu rădăcinile $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ şi $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, deducem imediat că pentru orice $n \geq 1$:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x_2{}^n - x_1{}^n\right) = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n\right].$$

Următorul rezultat conţine o serie de proprietăţi interesante ale şirului $(F_n)_{n\geq 1}$.

Propoziţie :

(i) Pentru orice $m, n \geq 2$ are loc egalitatea $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n-1}$;

(ii) Pentru orice $n \geq 1$ avem $(F_n, F_{n+1}) = 1$;

(iii) Dacă $m \mid n$, atunci $F_m \mid F_n$;

(iv) Dacă $n \geq 5$ si F_n este prim , atunci şi n este prim.

Demonstraţie :

(i) Se face inducţie matematică după m (sau n).

(ii) Presupunem prin reducere la absurd că există $m \geq 1$ astfel încât $(F_m, F_{m+1}) = d > 1$ şi îl alegem pe m minim cu această proprietate. Cum $F_{m+1} = F_m + F_{m-1}$ deducem că $d \mid F_{m-1}$ şi atunci $(F_{m-1}, F_m) \geq d > 1$, contrazicând minimalitatea lui m.

(iii) Să presupunem că $m \mid n$, adică $n = mk$ cu $k \geq 1$. Cum $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x_2{}^n - x_1{}^n\right)$ şi $F_m = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x_2{}^m - x_1{}^m\right)$ avem :

$$\frac{F_n}{F_m} = \frac{x_2{}^n - x_1{}^n}{x_2{}^m - x_1{}^m} = \frac{\left(x_2{}^m\right)^k - \left(x_1{}^m\right)^k}{x_2{}^m - x_1{}^m} = x_1{}^{m(k-1)} + x_1{}^{m(k-2)}x_2{}^m + \ldots + x_2{}^{m(k-1)} = \left[x_1{}^{m(k-1)} + x_2{}^{m(k-1)}\right] +$$

$$+ \left[x_1{}^{m(k-2)}x_2{}^m + x_1{}^m x_2{}^{m(k-2)}\right] + \ldots \in Z$$

(deoarece din $x_1 + x_2 = 1$ şi $x_1 x_2 = -1$ deducem că $x_1{}^t + x_2{}^t \in \mathbf{Z}$ pentru orice $t \geq 1$.), de unde concluzia.

(iv) Să presupunem prin absurd că n nu este prim ; atunci $n = kt$ cu $k \geq 3$ şi din (i) deducem că $F_k \mid F_n$ (cu $F_k \geq 2$) contrazicând faptul că F_n este prim.

Corolar :

(i) Pentru orice $n,k \geq 1$ avem $(F_{nk-1}, F_n) = 1$
(ii) Pentru orice $m,n \geq 1$ avem $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$;
(iii) Dacă $m,n \geq 1$ şi $(m,n) = 1$, atunci $F_m F_n \mid F_{mn}$.

Demonstraţie :

(i) Fie $(F_{nk-1}, F_n) = d > 1$. Cum $F_{nk+1} = F_{nk} + F_{nk-1}$, $d \mid F_n$ si $F_n \mid F_{nk}$, deducem că $d \mid F_{nk}$ şi deci : $(F_{nk-1}, F_{nk}) \geq d > 1$ ceea ce este absurd (conform cu (ii) din propoziţia de mai sus)
(ii) Fie $d = (m,n)$. Dacă $n > m$ atunci scriind algoritmul lui Euclid :
$n = mq_1 + r_1$, $m = r_1 q_2 + r_2$, $r_1 = r_2 q_3 + r_3, ...,$ $r_{i-1} = r_i q_{i+1}$, atunci $d = r_i$. Ţinând cont de propoziţia de mai sus avem :
$(F_m, F_n) = (F_m, F_{mq_1+r_1}) = (F_m, F_{mq_1-1}F_{r_1} + F_{mq_1}F_{r_1+1}) = (F_m, F_{mq_1-1}F_{r_1}) = (F_m, F_{r_1})$.
Însă $(F_m, F_{r_1}) = (F_{r_1}, F_{r_2})$ deci $(F_m, F_n) = (F_m, F_{r_1}) = (F_{r_1}, F_{r_2}) = ... = (F_{r_i-1}, F_{r_i}) = F_{r_i} = F_d$.
(iii) Din $(m,n) = 1$ şi (ii) deducem că $(F_m, F_n) = F_1 = 1$. Din propoziţia de mai sus deducem că $F_m \mid F_{mn}$ si $F_n \mid F_{mn}$, iar cum $(F_m, F_n) = 1$ deducem că $F_m F_n \mid F_{mn}$.

Teorema 1.

Fie $p \geq 2$ un număr prim.
(i) Dacă $p = 5k \pm 1$, atunci $p \mid F_{p-1}$;
(ii) Dacă $p = 5k \pm 2$, atunci $p \mid F_{p+1}$;

Demonstraţie :

(i) Cum pentru $p = 2$, $F_3 = 2$, putem presupune $p \neq 2$ şi $p \neq 5$.
Cum $F_n = \frac{1}{2^n \sqrt{5}} \left[\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n \right]$ deducem că $2^{n-1} F_n = C_n^1 + C_n^3 5 + C_n^5 5^2 + ...$

Pentru n=p , cum $p \mid C_p^k$ pentru $1 \leq k \leq p-1$ şi $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, deducem că $F_p \equiv 5^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$.

Atunci $5^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{5}{p}\right) \bmod p$ şi deci $F_p \equiv \pm 1 \pmod p$.

Din cele de mai sus deducem imediat că $2^p F_{p+1} \equiv C_{p+1}^1 + C_{p+1}^p 5^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 + 5^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$, deci :

$2F_{p+1} \equiv 1 + 5^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$.

Din legea reciprocităţii pătratice a lui Gauss avem : $\left(\frac{5}{p}\right)\left(\frac{p}{5}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{5-1}{2}}=1$, deci $\left(\frac{5}{p}\right)=\left(\frac{p}{5}\right)$, adică : $\left(\frac{5}{p}\right)=\left(\frac{p}{5}\right)$, adică $\left(\frac{5}{p}\right)\equiv p^{\frac{5-1}{2}} \pmod p$, de unde deducem că $\left(\frac{5}{p}\right)=\left(\frac{p}{5}\right)=1$ dacă : $p=5k\pm 1$ si $\left(\frac{5}{p}\right)=\left(\frac{p}{5}\right)=-1$ dacă $p=5k\pm 2$.

În primul caz deducem că $F_p\equiv 5^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1 \pmod p$, $2F_{p+1}\equiv 1+5^{\frac{p-1}{2}}\equiv 2 \pmod p$, $F_{p+1}\equiv 1 \pmod p$, $F_{p-1}=F_{p+1}-F_p\equiv 1-1\equiv 0 \pmod p$, iar în cazul al doilea $2F_{p+1}\equiv 1+5^{\frac{p-1}{2}}\equiv 0 \pmod p$ şi atunci: $F_{p+1}\equiv 0 \pmod p$.

Teorema 2 (Zeckendorf).

Orice număr natural $n\geq 1$ se reprezintă în mod unic ca sumă de termeni distincţi şi neconsecutivi ai şirului lui Fibonacci:

$$n=\sum_{j=1}^{m}F_{i_j}, i_j-i_{j-1}\geq 2$$

Demonstraţie :

Se verifică imediat că proprietatea din enunş este adev arată pentru $n\leq F_4$=3.

Să presupunem că ea este adevarată pentru toate numerele naturale până la F_k, $k\geq 4$ şi să o demonstrăm pentru numărul n astfel încât $F_k<n\leq F_{k+1}$. Dacă $n=F_{k+1}$ totul este clar. În caz contrar, $n=F_k+(n-F_k)$ si $n-F_k<F_{k+1}-F_k=F_{k-1}$, deci conform ipotezei de inducţie :

$$n-F_k=F_{i_1}+...+F_{i_r}, i_{j+1}\leq i_j-2, i_1\leq k-2.$$

Deducem că $n=F_k+F_{i_1}+...+F_{i_r}$. Unicitatea reprezentării din enunş rezultă tot prin inducţie, observând că dacă $F_k\leq n<F_{k+1}$ atunci F_k apare obligatoriu în reprezentarea lui n. Într-adevăr, o sumă de numere Fibonacci F_{k_i} cu $k_{i+1}\leq k_i-2$, i=1,...,r-1 şi $k_r\geq 2$ este cel mult

$F_{k_1}+F_{k_1-2}+...=\left(F_{k_1+1}-F_{k_1-1}\right)+\left(F_{k_1-1}-F_{k_1-3}\right)+...=F_{k_1+1}-1.$

Deducem că dacă $n=F_k$ atunci aceasta este reprezentarea unică a lui n, iar dacă $F_k<n<F_{n+1}$ atunci reprezentarea lui n îl conţine obligatoriu pe F_k şi $n-F_k<F_{k-1}$. În continuare folosim reprezentarea unică a lui $n-F_k$.

Aplicaţii :

- Să se arate că şirul $(F_n)_{n\geq 1}$ de numere Fibonacci verifică relaţiile:

1. $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \forall n \geq 1$
2. $F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$
3. $\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$
4. $F_{2n} + F_n{}^2 = 2F_nF_{n+1}$;
5. $F_{2n} = F^2{}_{n+1} - F^2{}_{n-1}$;
6. $\sum_{k=1}^{2n-1} F_kF_{k+1} = F_{2n}{}^2$
7. $F^2{}_{n+3} - 2F^2{}_{n+2} - 2F^2{}_{n+1} + F_n{}^2 = 0$

Rezolvare :

1. Demonstrăm relaţia prin inducţie :

Evident avem : $F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right]$.

Fie $n \geq 1$ a.î. $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$. Atunci $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

$$F_{n+1} = \left\{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] - \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]\right\}$$

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

2. Din definiţia şirului $(F_n)_{n\geq 1}$ avem :

$F_1 = 1$

$F_2 = F_1 + F_0$

$F_3 = F_2 + F_1$

$F_4 = F_3 + F_2$

.....

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

Prin adunare deducem : $F_{n+2} = 1 + F_1 + F_2 + ... + F_n$.

3. Avem de arătat că :

$F_2 + F_4 + F_6 + ... + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$

Demonstrăm prin inducţie relaţia.

Verificarea propoziţiei :

P(1) : $F_2 = F_3 - 1$ ceea ce este evident.

Presupunem P(n) : $F_2 + F_4 + F_6 + ... + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$ propoziţie adevărată.

Dar P(n) $\Rightarrow$ P(n+1)

P(n+1) : $F_2 + F_4 + F_6 + ... + F_{2n} + F_{2n+2} = F_{2n+3} - 1$

Rămâne să arătăm că :

$F_{2n+1} - 1 + F_{2n+2} = F_{2n+3} - 1$ ceea ce este evident , deci P(n) propoziţie adevărată , de unde rezultă că P(n) este adevărată.

4. Arătăm relaţia prin calcul direct.

Avem de arătat că $F_{2n} + F_n^{\,2} = 2F_nF_{n+1}$

Folosim faptul că : $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right)$ unde $\alpha + \beta = 1$.

Deci : $F_{2n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{2n} - \beta^{2n}\right)$; $F_n^{\,2} = \frac{1}{5}\left(\alpha^{2n} - 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n}\right)$; $2F_nF_{n+1} = \frac{2}{5}\left(\alpha^n - \beta^n\right)\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right)$

Deci relaţia devine :

$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{2n} - \beta^{2n}\right) + \frac{1}{5}\left(\alpha^{2n} - 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n}\right) = \frac{2}{5}\left(\alpha^n - \beta^n\right)\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right)$

$\sqrt{5}\left(\alpha^{2n} - \beta^{2n}\right) + \alpha^{2n} - 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n} = 2\left[\alpha^{2n+1} - \beta\cdot(\alpha\beta)^n - \alpha\cdot(\alpha\beta)^n + \beta^{2n+1}\right]$

Deoarece $\alpha + \beta = 1$. rămâne să arătăm că :

$\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\alpha^{2n} + \left(1-\sqrt{5}\right)\cdot\beta^{2n} = 2\alpha\cdot\alpha^{2n} + 2\beta\cdot\beta^{2n}$, care este adevărată.

5. Arătăm şi această relaţie tot prin calcul direct.

$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right)$

$F_{2n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{2n} - \beta^{2n}\right)$; $F^{\,2}{}_{n+1} = \frac{1}{5}\left(\alpha^{2n+2} - 2\alpha^{n+1}\beta^{n+1} + \beta^{2n+2}\right)$

$F^2_{n-1} = \frac{1}{5}\left(\alpha^{2n-2} - 2\alpha^{n-1}\beta^{n-1} + \beta^{2n-2}\right)$

Deci avem de arătat că :

$\sqrt{5}\left(\alpha^{2n} - \beta^{2n}\right) = \alpha^{2n+2} + 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n+2} - \alpha^{2n-2} - 2\alpha^n\beta^n - \beta^{2n-2}$

$\sqrt{5}\alpha^{2n} - \sqrt{5}\beta^{2n} = \left(\alpha^2 - \frac{1}{\alpha^2}\right)\cdot\alpha^{2n} + \left(\beta^2 - \frac{1}{\beta^2}\right)\cdot\beta^{2n}$

Efectuând calculele obţinem că : $\alpha^2 - \frac{1}{\alpha^2} = \sqrt{5};\ \beta^2 - \frac{1}{\beta^2} = \sqrt{5}$

6. Vom demonstra relaţia prin inducţie matematică .

Avem de demonstrat că : $F_1F_2 + F_2F_3 + ... + F_{2n-1}F_{2n} = F^2_{2n}$.

P(2) : $F_1F_2 + F_2F_3 + F_3F_4 = F^2_4 \Leftrightarrow 1 + 2 + 6 = 9$, deci P(2) propoziţie adevărată .

Presupunem că propoziţia P(n) este adevărată .

P(n) $\Rightarrow$ P(n+1)

P(n+1) : $F_1F_2 + F_2F_3 + ... + F_{2n-1}F_{2n} + F_{2n}F_{2n+1} + F_{2n+1}F_{2n+2} = F^2_{2n+2}$

Rămâne să arătăm că : $F^2_{2n} + F_{2n}F_{2n+1} + F_{2n+1}F_{2n+2} = F^2_{2n+2}$

$F_{2n}\left(F_{2n} + F_{2n+1}\right) + F_{2n+1}F_{2n+2} = F_{2n}F_{2n+2} + F_{2n+1}F_{2n+2} = F_{2n+2}\left(F_{2n} + F_{2n+1}\right) = F^2_{2n+2}$, deci P(n) este propoziţie adevărată , ceea ce ne asigură că relaţia $\sum_{k=1}^{2n-1} F_kF_{k+1} = F_{2n}^2$ este adevărată.

- Produsul a opt numere naturale consecutive nu poate fi pătrat perfect.

Rezolvare :

Fie P= $(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$, $n \geq 4$.

Dacă $n \in \{4,5,6\}$ prin calcul direct rezultă că P nu este pătrat perfect . Pentru $n \geq 7$ avem :

P= $\left(n^2-3n\right)\left(n^2-3n+2\right)\left(n^2+5n+4\right)\left(n^2+5n+6\right) = \left[\left(n^2-3n+1\right)^2 - 1\right]\left[\left(n^2+5n+5\right)^2 - 1\right]$

Utilizând faptul că : $\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right) = (ab-1)^2 - (a-b)^2$ rezultă că :

$\left[\left(n^2-3n+1\right)\left(n^2+5n+5\right) - 2\right]^2 < P < \left[\left(n^2-3n+1\right)\left(n^2+5n+5\right) - 1\right]^2$, adică P este cuprins între două pătrate perfecte consecutive , deci nu poate fi pătrat perfect.

Bibliografie:

[1]. Buşneag D. , Chirteş F. , Piciu D. , Complemente de aritmetică şi teoria elementară a numerelor , Editura Gil , Zalău, 2007.

[2]. Cucurezeanu I. Pătrate şi cuburi perfecte de numere întregi , Editura Gil , Zalău , 2007.

profesor Şcoala "Nichita Stănescu"
str Costache Conachi nr 2 , cod 800643
Galaţi , jud Galaţi

INEGALITATEA IZOPERIMETRICĂ

ROXANA MIHAELA STANCIU [1]

1. Introducere

Teorema ce urmează îşi propune să dea răspuns la următoarea întrebare:
"Dintre toate curbele plane regulate, simple şi închise, având aceeaşi lungime L, care mărgineşte domeniul cu aria maximă?".

R = multimea numerelor reale, $R^2 = \{(x_1, x_2) / x_1 \in R, x_2 \in R\} =$

spatiu vectorial /R.

$\langle x, y \rangle =$ *produsul* scalar a doi vectori din R^2.

$E_2 = (R^2, \langle .,. \rangle) =$ *spatiul* vectorial euclidian.

Def 1. Fie $I \subset R$, interval. Se numeste curbă în spatiul E_2,

o aplicatie C^∞ - diferentiabilă

$c : I \to E_2, t \to c(t) = (x(t), y(t)) \in E_2, \forall t \in I.$

Def 2. O curbă $C : [a, b] \to E_2$ se numeste curbă regulată dacă

$c'(t) \neq 0 \ \forall t \in [a, b].$

Def 3. O curbă $C : [a, b] \to E_2$ se numeste curbă simplă dacă $\forall t_1, t_2 \in [a, b)$

cu $t_1 \neq t_2$, avem $c(t_1) \neq c(t_2)$.

Def 4. O curbă $C : [a, b] \to E_2$ se numeste curbă inchisă dacă

$c(a) = c(b)$ si $c^{(i)}(a) = c^{(i)}(b) \ \forall i \triangleright 0.$

Def 5. O curbă $C : I \to E_2$ este parametrizată canonic, dacă

$\|c'(s)\| = 1, \forall s \in I.$

Pentru a stabili prima egalitate din (1) vom folosi formula lui Green

$\int_{Imc} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$, unde P si Q sunt

functii diferentiabile definite pe D.

Daca in formula lui Green luom Q(x, y) = x si P(x, y) = -y atunci obtinem :

$$S = \iint_D dxdy = \frac{1}{2}\int_a^b [x(s)y'(s) - y(s)x'(s)]ds = \int_a^b x(s)y'(s)ds = -\int_a^b x'(s)y(s)ds.$$

[1] Prof., Liceul cu Program Sportiv "Iolanda Balaş Sotter", Buzău
e-mail: roxanastnc@yahoo.com

Teorema : Consideram o curba plana regulata, simpla si inchisa, avand lungimea L si fie S aria domeniului D marginit de curba C.Atunci (∗) $4\pi\pi \leq L^2$.

Semnul egal are loc daca si numai daca curba C este un cerc.

Inegalitatea (∗) poarta numele de inegalitatea izoperimetrica.

Demonstraţie:

Fie t_1 şi t_2 două drepte paralele, tangente la curba dată astfel încât toate punctele curbei să se găsească în regiunea cuprinsă între t_1 şi t_2 .Fie 2r distanţa între cele două drepte şi C(O,r) un cerc tangent dreptelor t_1 şi t_2.

Alegem sistemul de axe carteziene ortogonale cu originea în O şi axă a absciselor paralela la t_1 dusă prin O.

Curba consideratã este:

$C:[0,L]\to E_2, c(s)=(x(s),y(s)), \|c'(s)\|=1, \forall s\in[0,L].$

Pe cercul C(O, r) alegem ca parametru pe s.

Deci cercul C(O, r) este imaginea aplicatiei diferentiabile:

$C_1:[0,L]\to E_2, c_1(s)=(x(s),y(s)).$

Folosind formula (1) din lema anterioara, obtinem ca aria cercului este data de:

$$(2)\pi r^2=\int_0^L x(s)y'(s)ds$$

Aria S a domeniului D marginit de imaginea aplicatiei C este :

$$(3)S=-\int_0^L x'(s)y(s)ds,$$

$$\text{Din (2) si (3)} \Rightarrow \pi r^2+S=\int_0^L [x(s)y'(s)-y(s)x'(s)]ds \leq$$

$$\leq \int_0^L \sqrt{[x(s)y'(s)-y(s)x'(s)]^2}\,ds =$$

$$= \int_0^L \sqrt{[x^2(s)+y^2(s)][y'^2(s)+x'^2(s)]-[x(s)x'(s)+y(s)y'(s)]^2}\,ds =$$

$$= \int_0^L \sqrt{r^2-[x(s)x'(s)+y(s)y'(s)]^2}\,ds \leq \int_0^L \sqrt{r^2}\,ds = rL,$$

Inmultind (6) si (8) obtinem :

$$(\pi r^2 + S)\sqrt{\pi r^2 S} \le (\frac{\pi r^2 + S}{2})rL \Rightarrow \pi r^2 S \le \frac{r^2 L^2}{4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (*) 4\pi S \le L^2$ (adica tocmai inegalitatea care trebuia stabilita).

Singurul lucru pe care îl mai avem de arãtat este acela cã în (*) avem egalitate dacã şi numai dacã curba C este un cerc.

Necesitatea:

Presupunem cã curba C este un cerc de razã r, atunci avem:

$4\pi S = 4\pi \cdot \pi r^2 = (2\pi r)^2 = L^2$.

Suficienţa:

Reciproc sã presupunem cã avem egalitatea:

$4\pi S = L^2$

şi sã demonstrãm cã curba C este un cerc

$(9)\ r^2 4\pi S = L^2 r^2, (9)' 2\sqrt{\pi r^2 S} = rL$

Din (8) si (6) $\Rightarrow$ $(10)\ 2\sqrt{\pi r^2 S} \le \pi r^2 + S \le rL \Rightarrow (11)\ \pi r^2 + S = rL$

Tinand seama de drumul parcurs pentru stabilirea inegalitat ii (6), egalitatea (11)

ne arata ca trebuie sa avem :

$(12) x(s)x'(s) + y(s)y'(s) = 0, \forall s \in [0, L]$

$(13) x(s)y'(s) - y(s)x'(s) \triangleright 0, \forall s \in [0, L]$

Deoarece curba C este regulata (12) poate fi scrisa sub forma (12)′ $\frac{x(s)}{y'(s)} = -\frac{y(s)}{x'(s)} = \lambda(s), unde$

$\lambda : [0, L] \to R$ este o functie diferentiabila

Din (12)′ $\Rightarrow \lambda^2(s) = \frac{x^2(s)}{y'^2(s)} = \frac{y^2(s)}{x'^2(s)} = \frac{x^2(s) + y^2(s)}{y'^2(s) + x'^2(s)} = r^2 \Rightarrow (14)\lambda(s) = \varepsilon r$, unde $\varepsilon = 1$ sau $\varepsilon = -1$

Din (12)′ si (14) $\Rightarrow (15)\begin{cases} x(s) = \varepsilon r y'(s) \\ y(s) = -\varepsilon r x'(s) \end{cases}$ Tinand seama de (15) conditia

(13) $(\varepsilon r y'^2(s) + \varepsilon r x'^2(s) \triangleright 0)$ implica $\varepsilon = 1$

Deci avem $y(s) = -r x'(s) \Rightarrow x'(s) = -\frac{y(s)}{r}$ si din $x'^2(s) + y'^2(s) = 1,$

avem $\frac{y^2(s)}{r^2} + y'^2(s) = 1 \Rightarrow \frac{y'(s)}{\sqrt{r^2 - y^2(s)}} = \pm\frac{1}{r}$ care prin integrare

duce la (16) $y(s) = r\sin(\pm\frac{s}{r} + s_0), s_0 = cons\tan ta$ .din (16) si

$y(s) = -r x'(s) \Rightarrow x'(s) = -\sin(\pm\frac{s}{r} + s_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (17) x(s) = \pm r\cos(\pm\frac{s}{r} + s_0) + a, a = cons\tan ta.$

Din (16) si (17) $\Rightarrow (18)[x(s) - a]^2 + y^2(s) = r^2$

Din $4\pi S = L^2$ si (11) $\Rightarrow (19) L = 2\pi r$

Din (18) si (19) $\Rightarrow$ curba cautata este cercul cu centrul

in punctul (a,0) si raza r, reprezentat de curba

$C : [0, L] \to E_2, c(s) = (\pm r\cos(\pm\frac{s}{r} + s_0) + a, r\sin(\pm\frac{s}{r} + s_0)).$

Observaţie: Este evident cã aria domeniului plan mãrginit de o curbã închisã şi convexã având lungimea L, este mai mare decât aria domeniului plan mãrginit de o curbã închisã neconvexã având lungimea L.Din această cauză în demonstra ţia teoremei curba C am considerat-o convexã.

2. Câteva observaţii ale ,, inegalităţii izoperimetrice”

O1. În 1827, Jacob Steiner (1796–1863) a demonstrat pentru prima oară teorema următoare:

,,Dintre toate figurile plane, convexe, izoperimetrice (adică care au aceeaşi lungime) aria maximă este realizată de cerc”.

O2. În 1916, Blaschke Wilhelm (1885-1961) demonstrează următoarea teoremă:

,,Pentru orice curbă plană, închisă, de lungime L şi arie A avem $4\pi A \leq L^2$. $4\pi A = L^2 \Leftrightarrow$ curba este un cerc”.

O3. În 1921, Carleman Torsten (1892-1949) a demonstrat inegalitatea izoperimetrică pentru curbe pe suprafeţe minimale.

O4. În 1933, E.F.Beckenbach şi F.Radó demonstrează inegalitatea izoperimetrică pen tru curbe pe suprafeţe de curbură gaussiană negativă.

3. Consecinţe ale inegalităţii izoperimetrice:

C1. Dintre toate triunghiurile izoperimetrice (care au acelaşi perimetru) aria maximă o are triunghiul echilateral (Zenodor, sec.2 î.Hr.).

Demonstraţie: Se va ţine cont de următoarea propoziţie:

Ⓟ ,, Dacă factorii unui produs au suma constantă, atunci produsul lor este maxim dacă factorii sunt egali”. Avem S = $\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$, aria triunghiului şi a+b+c = const.(din ipoteză), p = $\frac{(a+b+c)}{2}$ = const; a, b, c- variabile.

S este maximă $\Leftrightarrow S^2$ este maximă $\Leftrightarrow$produsul $(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)$ cu suma factorilor constantă este maxim $\Rightarrow$p-a = p-b = p-c $\Rightarrow$a = b = c (q.e.d.).

C2. Dintre toate patrulaterele inscriptibile, izoperimetrice, aria maximă o are pătratul **(Zenodor).**

Demonstraţie: Considerăm patrulaterul inscriptibil de laturi a, b, c, d. Din ipoteză, a+b+c+d = const. Aria patrulaterului inscriptibil, este dată de formula: S = $\sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}$, unde p = $\frac{(a+b+c+d)}{2}$= const. Avem suma: (p-a)+(p-b)+(p-c)+(p-d) constantă, şi din propoziţia Ⓟ $\Rightarrow$p-a = p-b = p-c = p-d $\Rightarrow$a=b=c=d (q.e.d.).

C3. Un poligon de laturi date, are aria maximă, dacă este inscriptibil. (enunţată de Christian Huygens (1629-1695) în 1675 şi demonstrată de Gabriel Cramer (1704 -1752) în 1752).

Demonstraţie: Fie două poligoane P şi P' formate cu aceleaşi laturi, cu P înscris într - un cerc şi P' neinscriptibil. Pe laturile poligonului P' purtăm exterior segmen te de cerc, corespunzătoare laturilor poligonului P. Obţinem astfel o linie curbă (C') izoperimetrică cu (C). Din inegalitatea izoperimetrică avem Aria (C) > Aria (C') .

Aria (C) = Aria (P) + Aria (segm. de cerc) >Aria (P') + Aria (segm. de cerc)= Ari a (C')

Deci Aria (P) > Aria (P') (q.e.d.).

C4. Dintre toate poligoanele izoperimetrice cu acelaşi număr de laturi, poligonul regulat are aria maximă. (Zenodor)

Demonstraţie: Din consecinţa 3 avem că poligonul de arie maximă este inscriptibil. Pe de altă parte, acest poligon trebuie să aibă laturile egale. În caz contrar, presupunem $AB \neq BC$ şi construim triunghiul isoscel AB'C cu acelaşi perimetru cu ΔABC. Dar Aria (AB'C) > Aria (ABC) şi obţinem un polig on izoperimetric de arie mai mare, ceea ce este contrar ipotezei. Poligonul care extremează aria, are deci toate laturile egale, şi fiind inscriptibil, este regulat.

C5. **Dintre toate poligoanele echivalente (cu aceeaşi arie), de acelaşi număr de laturi, poligonul regulat are perimetrul minim.**

Demonstraţie: Fie **P** un poligon oarecare, de arie **a** şi perimetru ℓ, şi **P', P"** două poligoane regulate de acelaşi număr de laturi cu **P**, astfel încât **P'** este echivalent cu **P (a'=a)** şi **P"** izoperimetric cu **P (**$\ell"=\ell$**).**

Deoarece **P"** este izoperimetric cu **P** şi **P"** este regulat, rezultă din C4 **a">a.**

$\begin{cases} a" > a \\ a = a' \end{cases} \Rightarrow$ **a">a'** $\Rightarrow \ell">\ell'$. Din $\ell"=\ell$ şi $\ell">\ell' \Rightarrow \ell>\ell' \Rightarrow$ **P'** are perimetrul minim (q.e.d.).

Notă: Am optat pentru aceste consecinţe deoarece, pot fi înţelese uşor de elev ii din liceu şi de cei din clasele terminale din gimnaziu.

Bibliografie:

1. N. Mihăileanu - „Istoria matematicii”, vol.1, Editura Enciclopedică Română, Bucureşti, 1974.
2. N. Mihăileanu - „Istoria matematicii”, vol. 2, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1981.
3. L. Nicolescu - „Geometrie”, Editura Universităţii Bucureşti, 1993.
4. N.Stanciu**,** *Matematică gimnaziu & liceu*, Editura ’’Rafet’’, Rm. Sărat, 2007
5. N.Stanciu, Câteva consecinţe ale „inegalităţii izoperimetrice” ’’ – Recreaţii Matematice, nr. 2 / 2005, Iaşi

Radacina patrata dintr-un polinom cu coeficienti reali

ABSTRACT. Vom prezenta un amplu material , ce prezinta un algoritm de extragere a radicalului dintr-un polinom dat , ceea ce poate constitui si o generalizare a algoritmului de extragere a radicalului dintr-un numar pozitiv dat .

Materialul se adreseaza elevilor de clasa a XII a , precum si tuturor pasionatilor de matematica.

Autori : Marcu Daniela si Marcu Stefan Florin , profesori Calarasi

Fie $A \in \mathbf{R[X]}$. Cautam un polinom $B \in \mathbf{R[X]}$ astfel incat $B^2 = A$. Daca acesta exista il vom numi radacina patrata a lui A si vom spune ca A este patrat perfect.

Operatia o vom numi extragerea radacinii patrate a lui A.

Extragerea poate fi facuta dupa puterile crescatoare sau descrescatoare ale lui X din A.

Apar 2 cazuri:

I) Extragerea radacinii dupa puterile descrescatoare ale lui X :

Fie $A = A_0X^n + A_1X^{n-1} + \ldots + A_n$.

Cautam un polinom $B \in \mathbf{R[X]}$ astfel incat $B^2 = A$ de forma:

B = a+b+c+…..+k+l , unde a, b, c,….reprezinta termenii consecutivi ai lui B avand gradele descrescatoare (gr a>gr b> gr c>….)

Avem $(a+b+c+\ldots+k+l)^2 = A$

Notam $b+c+\ldots k+l=y \Rightarrow$ gr y=gr b <gr a

Deci $(a+y)^2 = A \Leftrightarrow a^2+2ay+y^2 = A = A_0X^n + A_1X^{n-1} + \ldots + A_n$.

Termenii de grad maxim din cele doua polinoame trebuie sa fie identici. Deci $a^2 = A_0X^n$.

Luam a= $a_0X^p \Rightarrow a_0^2X^{2p} = A_0X^n \Rightarrow a_0^2 = A_0$ si 2p=n . Deci, in mod necesar gradul lui A este un numar par si gradul radacinii B va fi p=$\frac{n}{2}$

Daca A_0<0 ,problema nu are solutii.

Daca A_0>0, atunci $a_0 = \pm\sqrt{A_0}$. In acest caz vom avea solutii ale problemei doua polinoame egale si de semne contrare B si –B . Evident,daca exista B$\in$**R[X]** astfel incat B^2=A, atunci exista si -B$\in$**R[X]** cu B^2=A.

Algoritmul de extragere a radacinii patrate continua in felul urmator :

-Consideram primul rest partial R_1= A- a_0^2=2ay+ y^2 =y(2a+y) , gr R_1< gr A . Deoarece gr a> gr y , termenul de grad maxim din 2ay+ y^2 este 2ab si va fi identic cu termenul de grad maxim din R_1.

-Al doilea termen al radacinii patrate se va obtine impartind termenul de grad maxim din R_1 la dublul primului termen gasit al radacinii patrate 2a .

-in continuare , presupunem ca am gasit un numar oarecare de termeni ai radacinii patrate B si fie u=a+b+… suma acestor termeni. V om nota cu v suma restului de termeni ai radacinii patrate ce trebuie determinati .

Avem A=$(u+v)^2$ si vom nota cu R_k =A- u^2 . Vrem sa aflam primul termen al sumei necunoscute v. Stim ca R_k =$(u+v)^2$ - u^2 = 2uv+ v^2 = v(2u+v) ,gr u>gr v . Termenul din membrul al doilea al egalitatii de mai sus care contine cea mai mare putere a lui X este provenit din 2uv si se obtine prin inmultirea cu 2a a primului termen necunoscut din v (care este de grad maxim in v) . Daca notam cu g primul termen din v , atunci termenul cautat este 2ag si el este egal cu primul termen din R_k . Deci termenul necunoscut g se obtine prin impartirea primului termen din restul partial R_k la 2a (dublul primului termen al radacinii).

-Cand se incheie acest algoritm ? Dupa ce am gasit termenul g , consideram urmatorul rest partial , fie acesta R_k =A-(u+g)^2 (deoarece suma termenilor cunoscuti este acum u +g) .

Avem $R_k = R_h + u^2-(u+g)^2 = R_h - g(2u +g)$

Cel mai mare termen din polinomul g(2u +g) este 2ag si se va reduce cu primul termen din R_h , deci gr R_k <gr R_h . Deci gradele resturilor scad succesiv , iar algoritmul se va incheia atunci cand vom ajunge la un rest partial avand gradul <p =$\frac{n}{2}$(deoarece nu se mai poate efectua impartirea la 2a pentru ca gr 2a=gr a=p)

Algoritmul general de extragere a „radicalului” dintr-un polinom cu coeficienti reali poate fi exprimat in felul urmator :

1) Extragem radacina patrata din primul termen al radacinii patrate B (care poare fi luat cu + sau-)
2) Scadem din A patratul acestui prim termen (care este de fapt primul termen din A) si impartim primul termen al acestuia la dublul primului termen din B , obtinand al doilea termen al lui B .
3) Calculam suma primilor doi termeni astfel gasiti la patrat si o scadem dun A , obtinand astfel un nou rest , si impartim din nou primului termen al acestui rest la dublul primului termen al radacinii B .
4) Daca am gasit un numar oarecare de termeni ai radacinii , atunci pentru a afla urmatorul termen scadem din A patratul sumei termenilor cunoscuti si impartim primul termen al acestei diferente la 2a.
5) Algoritmul se va incheia atunci cand fie obtinem restul egal cu 0 (si in acest caa polinomul A este patrat perfect), fie restul are gradul < p (care este gradul radacinii radacinii B) si scriem A= B^2 +R cu gr A =2p , gr B =p , gr R <p .

Observatie : algoritmul poate fi exprimat si in alt mod :in momentul cand am obtinut un rest oarecare , daca notam cu u suma termenilor deja cunoscuti si cu g primul termen nou aflat (prin impartire…), atunci pentru a afla urmatorul rest partial scadem din vechiul rest produsul g(2u+g) .

Unicitatea radacinii patrate

Fiind dat un polinom $A \in \mathbf{R[X]}$ de grad 2p , exista doua polinoame B si –B de grad p astfel incat diferenta $A- B^2$ sa fie un polinom de grad mai mic decat p. Existenta a fost dovedita prin algoritmul prezentat anterior . Prin reducere la absurd, sa presupunem ca ar exista doua polinoame B si C cu proprietatile de mai sus.

Fie $A= B^2+R$ si $A= C^2+S$, unde gr B = gr C =p si gr S, gr R<p . Atunci avem $B^2 - C^2 = S- R \Leftrightarrow (B-C)(B+C)=S –R$

Fie a si a’ primii termeni din polinoamele B respectiv C (avand grad maxim) $\Rightarrow$ $a^2 = (a')^2$ = primul termen al lui A $\Rightarrow$ $a=\pm a'$ $\Rightarrow$ primii termeni din B si C sunt egali sau de semne contrare si in acest caz putem schimba C cu – C fara a restrange generalitatea problemei. Avem gr(B-C)< p si gr(B+C)=p $\Rightarrow$ gr(B-C)(B+C) $\geq$ p , iar gr(S-R)<p . <u>Contradictie.</u> Deci B=C sau B =-C .

Aplicatie

a) Sa se stabileasca daca polinomul $A = X^4 +2X^3+3X^2+2X+1$ este patrat perfect.
b) Sa se gaseasca conditiile pentru care un polinom de gradul 4 , $A \in \mathbf{R[X]}$ de forma

$A=a X^4+bX^3+cX^2+dX+e$ sa fie patrat perfect.

Solutie

a) Vom extrage radacina patrata din A.

1) Scoatem radacina din primul termen al lui A si obtinem primul termen al radacinii patrate care va fi X^2.

2)$R_1 = A-(X^2)^2 = 2X^3+3X^2+2X+1$

3)impartim primul termen din R_1 la dublul primului termen gasit care este $2X^2$ si obtinem al doilea termen al radacinii care va fi X.

4) $R_2 = A-(X^2+X)^2 = 2X^2+2X+1$

5) Impartim $2X^2$ la $2X^2$ si obtinem al treilea termen al radacinii patrate care va fi 1

6)$R_3 = A-(X^2+X+1)^2 = 0$

In acest moment algoritmul este incheiat si $A=-(X^2+X+1)^2$.

b)evident avem a>0 si extragem radacina patrata.

1) Primul termen este $\sqrt{a}X^2$

2) $R_1 = A-aX^4 = bX^3+cX^2+dX+e$

3)impartim bX^3 la $2\sqrt{a}X^2$ si obtinem al doilea termen egal cu $\frac{b}{2\sqrt{a}}X$

4) $R_2 = A-(\sqrt{a}X^2+\frac{b}{2\sqrt{a}}X)^2 = \frac{4ac-b^2}{4a}X^2+dx+e$ si notam $\Delta = 4ac-b^2$

5)impartim $\frac{\Delta}{4a}X^2$ la $2\sqrt{a}X^2$ si obtinem al treilea termen egal cu $\frac{\Delta}{8a\sqrt{a}}$

6) $R_3 = R_2 - \frac{\Delta}{8a\sqrt{a}}(2\sqrt{a}X^2+\frac{b}{\sqrt{a}}X+\frac{\Delta}{8a\sqrt{a}}) = (d-\frac{b\Delta}{8a^2})X+(e-\frac{\Delta^2}{64a^3}) \Rightarrow$

Conditiile care trebuie indeplinite pentu a avea un patrat perfect sunt :

$$d=\frac{b\Delta}{8a^2} \text{ si } e=\frac{\Delta^2}{64a^3} \quad (*)$$

In aceste conditii avem : $A=(\sqrt{a}X^2+\frac{b}{2\sqrt{a}}X+\frac{\Delta}{8a\sqrt{a}})^2$

Observatie :Se putea lucra doar in cazul real si atunci se impun doar conditiile (*)

Problema este interesanta in sensul urmator :

Fiind dat polinomul $aX^4+bX^3+cX^2$, sa se completeze la un patrat perfect.

Putem construi diverse patrate perfecte cunoscand doar primii trei coeficienti.

Pentru a=1 , b=2 , c=3 avem d=2 si e=1 , obtinand polinomul de la punctul a).

II) Extragerea radacinii dupa puterile crescatoare ale lui X

Consideram polinomul :

$A = a_0+a_1X+a_2X^2+...$ si vom presupune $a_0>0$ (pentru ca problema sa aiba solutii), iar gr A =2p numar par.

Observatie : In aceste conditii polinomul A nu este divizibil cu X . Cautam polinomul

$B= b_0+b_1X+b_2X^2+... \in \mathbf{R[X]}$ astfel incat $B^2=A$. Evident $b_0^2=a_0 \Rightarrow b_0=\pm\sqrt{a_0}$.

Deci problema poate avea doua solutii .

Cautam $R_1=A-(b_0)^2 \Rightarrow R_1$ este divizibil cu X , deci poate fi scris sub forma $R_1=XS_1$, unde $S_1 \in \mathbf{R[X]}$, gr $S_1=2p-1$

Notam cu y partea necunoscuta a radacinii . Atunci $B= b_0+y$ si y este un polinom divizibil cu X .

Avem $A=(b_0+y)^2$ si $R_1=(b_0+y)^2-(b_0)^2=2b_0y+y^2$

Termenul de grad cel mai mic din membrul al doilea este provenit din $2b_0y$ si este egal cu $2b_0b_1X$. Deci termenul al doilea al radacinii se va obtine impartind primul termen din R_1 la $2b_0 \Rightarrow R_2=X^2S_2$, gr $S_2=2p-2$

Rationand ca in primul caz, daca se cunoaste un numar oarecare de termeni ai radacinii , calculam suma lor , dupa care scadem din polinomul dat A patratul acestei sume si obtinem un rest partial , dupa care impartim primul termen al acestui rest la $2b_0$ si gasim urmatorul termen al radacinii.

$R_{k+1}=A-(b_0+b_1X+b_2X^2+...+b_kX^k)^2$ si $R_{k+1}=X^{k+1}S_{k+1}$,unde $S_{k+1} \in \mathbf{R[X]}$, gr $S_{k+1}=2p-h-1$

Deci polinomul A poate fi scris sub forma :

$A=(b_0+b_1X+b_2X^2+...+b_kX^k)^2 +X^{k+1} S_{k+1}$

Observatie

Daca A este patrat perfect atunci vom obtine un rest nul. Daca luam gr A=2p atunci pentru ca A sa fie patrat perfect trebuie ca $R_{p+1}=0$ si atunci $A=(b_0+b_1X+b_2X^2+...+b_pX^p)^2$.

In caz contrar operatia este imposibila si poate continua indefinit (gr $S_{p+1}=p-1$)

Denumim polinomul $B_k = b_0+b_1X+b_2X^2+...+b_kX^k$ ca radacina patrata aproximativa sau exacta a lui A dupa cum restul R_{k+1} este nenul sau nul.

Unicitatea radacinii patrate

Fiind dat un polinom $A \in$ **R[X]** se pot gasi doua polinoame egale si de semne contrare B si –B de grad k astfel incat diferenta $A-B^2$ sa fie divizibila cu X^{k+1}.

Solutie

Existenta a fost deja demonstrata , mai ramane sa aratam unicitatea.Fie Bsi C doua polinoame de grad k astfel incat: $A= B^2 + X^{k+1}S$ si $A= C^2 + X^{k+1}T$

Datorita identitatilor de mai sus patratele termenilor liberi din cele doua polinoame B si C

trebuie sa fie egali. Sa presupunem fara a restrange generakitatea ca termenii liberi sunt egali (altfel inlocuim C cu – C). Obtinem ca $(B-C)(B+C)= X^{k+1}(T-S)$ (*)

Avem ca B-C este divizibil cu X , dar B-C nu este divizibil cu X^{k+1} deoarece aceasta diferenta are gradul cel mult k. Daca consideram $B= b_0+b_1X+b_2X^2+...+b_kX^k$ si

$C= b_0+c_1X+c_2X^2+...+c_kX^k$ si presupunand ca $b_1 \neq c_1 \Rightarrow B-C=X[(b_1- c_1)+...]$

Inlocuind in (*) si simplificand cu X obtinem : $[(b_1- c_1)+...](B+C)= X^k(T-S)$.

Pentru X=0 $\Rightarrow$ $b_1 - c_1 = 0$, deci $b_1 = c_1$, altfel avem o contradictie.Continuand acest procedeu obtinem ca B=C .

Exemplul 1

Fie $A= 1+6X+11X^2+6X^3+X^4$.

Dorim sa vedem daca A este patratul unui polinom de gradul 2 si sa aflam radacina patrata. Evident , primul termen al radacinii va fi ± 1(sa-l consideram egal cu +1)

$R_1 = A-1=6X+11X^2+6X^3+X^4$

Impartind 6X la 2 obtinem al doilea termen al radacinii egal cu 3X .

$R_2 = A-(1+3X)^2 = 2X^2+6X^3+X^4$

Impartind $2X^2$ la 2 obtinem al treilea termen al radacinii egal cu X^2.

$R_3 = A-(1+3X+ X^2)^2 = 0$ si algoritmul este incheiat , iar A este patrat perfect.

Exemplul 2

Fie $A= 1+2X+4X^2+3X^3+X^4$

Avem gr A $=2p \Rightarrow p=2$,deci algoritmul se poate opri cand calculam $R_{p+1}=R_3$

1) Primul termen al radacinii va fi +1 sau -1
2) $R_1 = A-1=2X+4X^2+3X^3+X^4$
3) 2X: 2=X va fi al doilea termen al radacinii
4) $R_2 = A-(1+X)^2 = 3X^2+3X^3+X^4$
5) $3X^2:2=\frac{3}{2}X^2$ va fi al treilea termen al radacinii si practic ultimul termen.
6) $R_3 = A-(1+X+\frac{3}{2}X^2)^2 = -\frac{5}{4}X^4 \neq 0$ si , iar A nu poate fi patrat perfect.

Observatie

Daca consideram un polinom A patrat perfect si calculam radacina sa patrata conform algoritmului anterior prezentat, notata simbolic cu $\sqrt{A}$, atunci pentru diferite valori numerice date lui x se va obtine radicalul „aritmetic” dintr-un numar real.

Exemplu: Luam A= $1+2X+3X^2+2X^3+X^4$ si calculam $\sqrt{A}$ = $1+X+X^2$.

Daca atasam acestor polinoame functiile polinomiale corespunzatoare si luam de exemplu x=10 , atunci A(10)=12321 si $\sqrt{A}$ (10)=111

Aplicatii

1) In ce conditii polinomul de doua variabile cu coeficienti reali $A=aX^2+2bXY+cY^2$ este patrat perfect ?

Se impun conditiile evidente a,c>0

Folosind algoritmul de extragere a radacinii patrate (privind polinomul in nedeterminata X cu parametrul Y) si impunand conditia ca ultimul rest partial sa fie 0 obtinem conditia $b^2=ac$ sau $b=\pm\sqrt{ac}$ si $A=(\sqrt{a}X\pm\sqrt{c}Y)^2$

2) In ce conditii polinomul de forma $A=aX^2+2bXY+cY^2-S(X^2+Y^2)$ este patrat perfect ?

Observatie : Daca S=0 0btinem 1)

Ordonand polinomul A dupa puterile descrescatoare ale lui X avem $A=(a-S)X^2+2bxy+(c-S)Y^2$

Conform cu 1) avem a-S>0 , c-S>0 $\Rightarrow$ S<min(a,c)

Deasemeni, S va fi solutia ecuatiei $b^2=(a-S)(c-S)\Leftrightarrow S^2-(a+c)S+ac-b^2=0$

Avem $\Delta=(a-c)^2+4b^2>0$, deci vom avea doua valori reale distincte ale lui S care indeplinesc conditia ceruta . Fie ele S_1 si S_2 ($S_1 < S_2$)

Daca notam $f(S)= S^2-(a+c)S+ac-b^2$ si observam ca $f(a)=-b^2<0$ si $f(c)=-b^2<0$, iar f(S)<0 pe intervalul $(S_1 , S_2) \Rightarrow a,c\in(S_1 , S_2)$, iar valoarea buna pentru S este S_1 deoarece este mai mica decat min(a,c) .

Daca notam cu R(X,Y) radacina patrata obtinuta in conditiile de mai sus , atunci avem scrierea :

$aX^2+2bXY+cY^2 = S(X^2+Y^2)+R^2(X,Y)$ (*)

Practic , $R(X,Y)=\sqrt{a-S}\,X+\sqrt{c-S}\,Y$

Un caz special este atunci cand a=c . In acest caz obtinem $S=a\pm b$.

Daca luam S= a+b , atunci este obligatoriu ca b<0 si obtinem $A=-b(X-Y)^2$ si $R(X,Y)=\sqrt{-b}\,(X+Y)$

Daca luam S= a-b , atunci b>0 , $A=-b(X+Y)^2$ si $R(X,Y)=\sqrt{b}\,(X+Y)$

Observatie :

Practic scrierea (*) reprezinta un mod de a scrie un polinom omogen de gradul 2 cu doua necunoscute ca sume sau diferente de patrate de polinoame si poate fi utila in demonstrarea unor inegalitati sau in probleme de maxim si minim.

Exemplu:

Fie polinomul $2X^2+3XY+2Y^2$ .Dorim sa-l scriem sub forma (*)

Avem a=c=2 si $b=\frac{3}{2}\Rightarrow S=\frac{7}{2}$ sau $S=\frac{1}{2}$, iar solutia buna este a doua, $S=\frac{1}{2}$.

Atunci $R(X,Y)=\sqrt{\frac{3}{2}}\,(X+Y)$ si

$2X^2+3XY+2Y^2=\frac{1}{2}(X^2+Y^2)+\frac{3}{2}(X+Y)^2$ sau

$2X^2+3XY+2Y^2=(\sqrt{\frac{1}{2}}X)^2+(\sqrt{\frac{1}{2}}Y)^2+[\sqrt{\frac{3}{2}}(X+Y)]^2$

Observatie:

Acest tip de probleme poate fi extins la polinoame omogene de grad 2 cu 3 nederminate de forma : $aX^2+bY^2+cZ^2+2dXY+2eXZ+2Fyz$

Se poare arata ca daca a, b, c >0 , atunci polinomul de mai sus este un patrat perfect daca coeficientii d, e, f reprezinta mediile geometrice ale lui (a,b) , (a,c), respectiv (b,c).

Bibliografie : Cours D'Algebre , Paris 1924 .

Par B. Niewenglowski .

ON A PROBLEM OF DIEUDONNÉ

Corneliu Mănescu-Avram

In the book [1] Jean Dieudonné has proposed the following problem :

Let u_0 be an arbitrary number in $(0, \pi)$ and $u_{n+1} = \sin u_n$, for $n = 0, 1, 2, \ldots$. Compute $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}u_n$.

The solution of this problem is presented in [2] (page 487). The same method allow us to obtain the following generalization :

Let $a > 0$ be a real number and the function $f : [0. a) \to [0, a)$ having the following properties :

a) f has derivatives of each order.

b) $f(0) = f''(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f'''(0) < 0$.

c) $f(x) < x$, for every $x \in (0, a)$.

Compute $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}u_n$, where $u_{n+1} = f(u_n)$ and $u_0 \in (0, a)$ is arbitrary.

We shall consider known the following property of the numerical sequences : the convergence in the sense of Cauchy implies the convergence in the sense of Cesaro to the same limit, namely

$$\text{if } \lim_{n\to\infty} a_n = l, \text{ then } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = l.$$

The sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded, $0 < u_n < a$, for every $n \in \mathbb{N}$. The sequence is decreasing, since $u_{n+1} = f(u_n) < u_n$, for every $n \in \mathbb{N}$. By the theorem of *Weierstrass*, the sequence converges to a limit l, such that $l = f(l)$. The conditions from the hypothesis imply that $l = 0$. This is a necessary condition for $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}u_n$ to be finite.

We apply the convergence property for the sequence $a_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ and it follows that

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nu_n^2}. \qquad (1)$$

We have

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{f^2(u_n)} - \frac{1}{u_n^2}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{f^2(x)} - \frac{1}{x^2}\right). \qquad (2)$$

For the calculation of the last limit we apply the *l'Hospital*'s rule :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{f^2(x)} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{f'(x)}\right)^2 = \left(\frac{1}{f'(0)}\right)^2 = 1, \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1 + f'(x)\right) = 1 + f'(0) = 2, \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-f'(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-f''(x)}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{-f'''(x)}{6} = \frac{-f'''(0)}{6}. \tag{5}$$

From the equalities (1) – (5) we deduce

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}u_n = \sqrt{1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-6}{f'''(0)}} = \sqrt{\frac{-3}{f'''(0)}}.$$

Notes : 1) The limit (2) for the function sinus is obtained in [2] using the expansion in *Taylor* series in a neighborhood of the origin.

2) If $f(0) = f''(0) = 0$, a limit similar to (5) is

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+xf''(x)-f'(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{3} = \frac{f'''(0)}{3}.$$

For $f(x) = \sin x$, this limit is given in [2], page 398.

3) If $f'(0) \neq 0$, $f''(0) = 0$ and $f(x) < xf'(0) + f(0)$, then the function f can be replaced by the function g, defined by $g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{f'(0)}$.

References

1. Dieudonné, J., Infinitesimal calculus, Hermann, Paris, 1962 (in French)

2. (editor) Teodorescu, N., Problems from *The Mathematical Gazette*, Technical Publishing House, Bucharest, 1984 (in Romanian)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TRANSPORTATIONS HIGH SCHOOL – PLOIEŞTI, ROMANIA

E-mail address : avram050652@yahoo.com

ON A PROBLEM OF DIEUDONNÉ

Corneliu Mănescu-Avram

In the book [1] Jean Dieudonné has proposed the following problem :

Let u_0 be an arbitrary number in $(0, \pi)$ and $u_{n+1} = \sin u_n$, for $n = 0, 1, 2, \ldots$. Compute $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}u_n$.

The solution of this problem is presented in [2] (page 487). The same method allow us to obtain the following generalization :

Let $a > 0$ be a real number and the function $f : [0. a) \to [0, a)$ having the following properties :

a) f has derivatives of each order.

b) $f(0) = f''(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f'''(0) < 0$.

c) $f(x) < x$, for every $x \in (0, a)$.

Compute $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}u_n$, where $u_{n+1} = f(u_n)$ and $u_0 \in (0, a)$ is arbitrary.

We shall consider known the following property of the numerical sequences : the convergence in the sense of Cauchy implies the convergence in the sense of Cesaro to the same limit, namely

$$\text{if } \lim_{n\to\infty} a_n = l, \text{ then } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = l.$$

The sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded, $0 < u_n < a$, for every $n \in \mathbb{N}$. The sequence is decreasing, since $u_{n+1} = f(u_n) < u_n$, for every $n \in \mathbb{N}$. By the theorem of *Weierstrass*, the sequence converges to a limit l, such that $l = f(l)$. The conditions from the hypothesis imply that $l = 0$. This is a necessary condition for $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}u_n$ to be finite.

We apply the convergence property for the sequence $a_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ and it follows that

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nu_n^2}. \qquad (1)$$

We have

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{f^2(u_n)} - \frac{1}{u_n^2}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{f^2(x)} - \frac{1}{x^2}\right). \qquad (2)$$

For the calculation of the last limit we apply the *l'Hospital*'s rule :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{f^2(x)} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{f'(x)}\right)^2 = \left(\frac{1}{f'(0)}\right)^2 = 1, \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1 + f'(x)\right) = 1 + f'(0) = 2, \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-f'(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-f''(x)}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{-f'''(x)}{6} = \frac{-f'''(0)}{6}. \tag{5}$$

From the equalities (1) – (5) we deduce

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}u_n = \sqrt{1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-6}{f'''(0)}} = \sqrt{\frac{-3}{f'''(0)}}.$$

Notes : 1) The limit (2) for the function sinus is obtained in [2] using the expansion in *Taylor* series in a neighborhood of the origin.

2) If $f(0) = f''(0) = 0$, a limit similar to (5) is

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+xf''(x)-f'(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{3} = \frac{f'''(0)}{3}.$$

For $f(x) = \sin x$, this limit is given in [2], page 398.

3) If $f'(0) \neq 0$, $f''(0) = 0$ and $f(x) < xf'(0) + f(0)$, then the function f can be replaced by the function g, defined by $g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{f'(0)}$.

References

1. Dieudonné, J., Infinitesimal calculus, Hermann, Paris, 1962 (in French)

2. (editor) Teodorescu, N., Problems from *The Mathematical Gazette*, Technical Publishing House, Bucharest, 1984 (in Romanian)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TRANSPORTATIONS HIGH SCHOOL – PLOIEŞTI, ROMANIA

E-mail address : avram050652@yahoo.com

Concurrence and collinearity using properties of pencils of lines

"Projective geometry is whole geometry"
Arthur Cayley

Neculai Stanciu[1]

Abstract.
This article is devoted to the study of two fundamental and reciprocal questions: when do three given points lie on a single line, and when do three given lines pass through a single point? The techniques we describe in this article will be augmented by more sophisticated approaches, such as the Papus's theorems, the Desargues's theorems, the Pascal's theorem and the Brianchon's theorem.

The formalism of projective geometry makes a discussion of such properties possible, and exposes some remarkable facts, such as the duality of points and lines.While technique "cross-ratio" of four points, and in the light of duality the cross-ratio of four lines can be useful on contest problems, much of the material here is considered "too advanced" for primary and secondary school education.This is a pity, as some of the most beautiful classical geometry appears only in the projective geometry.

1**. Main purpose** - of the results below is familiarizing readers with new methods *(little known even teachers of mathematics)* solving problems of concurrence and collinearity namely the techniques offered by pencils of lines properties.
We consider fig.1 where $S(a,b,c,d)$ or $S(A,B,C,D)$ represents a *convergent pencil of lines*, with its own point S and rays a,b,c,d or SA,SB,SC,SD and fig.2 where $S(a,b,c,d)$ is a *parallel pencil of lines* with rays a,b,c,d or SA,SB,SC,SD (S is *improperly point*).

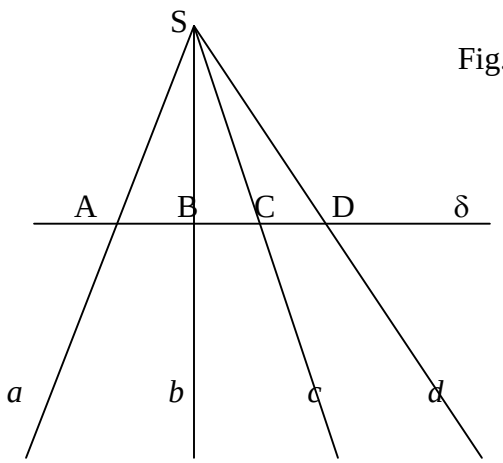


Fig.1

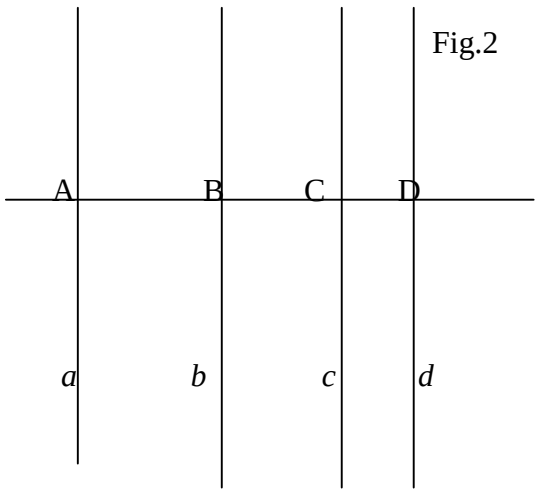


Fig.2

[1] Prof. , „George Emil Palade" Secondary School, Buzău, Romania;
e-mail:stanciuneculai@yahoo.com

If the *cross-ratio* $(ABCD)\overset{def}{=}\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}$ is *harmonic* $((ABCD)=-1)$ then the pencil attachment $S(ABCD)$ is called *harmonic pencil of lines.*

2. Cross-ratio corresponding to a convergent pencil of lines

We consider the pencil of lines $S(abcd)$ cut by line δ (you see fig.1) in the points $A=\delta\cap a, B=\delta\cap b, C=\delta\cap c, D=\delta\cap d$ .If $S(XYZ)\overset{not}{=}$ triangle area with vertices X, Y and Z , $\hat{XY}\overset{not}{=}\hat{XSY}$, $h=d(S,\delta)$, then $\frac{CA}{CB}=\frac{CA\cdot h}{CB\cdot h}=\frac{2\cdot S(CSA)}{2\cdot S(CSB)}=\frac{S(CSA)}{S(CSB)}$.

$$(ABCD)=\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}=\frac{S(CSA)}{S(CSB)}:\frac{S(DSA)}{S(DSB)}=\frac{SC\cdot SA\cdot\sin(\hat{ca})}{SC\cdot SB\cdot\sin(\hat{cb})}:\frac{SD\cdot SA\cdot\sin(\hat{da})}{SD\cdot SB\cdot\sin(\hat{db})}=$$

$$=\frac{\sin(\hat{ca})}{\sin(\hat{cb})}:\frac{\sin(\hat{da})}{\sin(\hat{db})}.$$

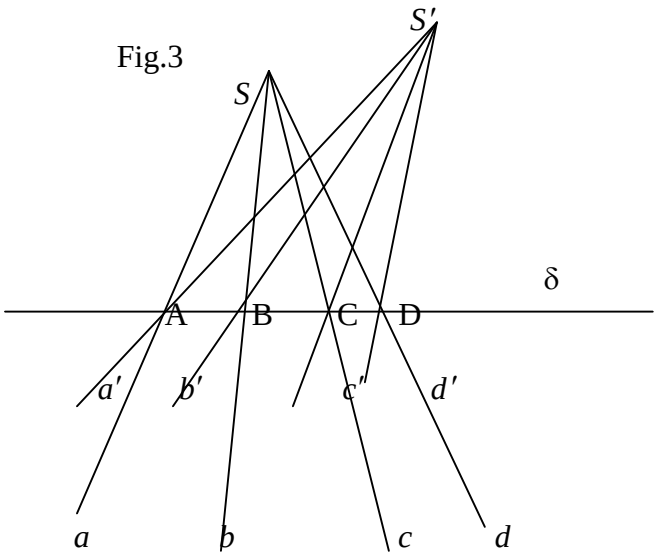
If $S(abcd)\overset{not}{=}\frac{\sin(\hat{ca})}{\sin(\hat{cb})}:\frac{\sin(\hat{da})}{\sin(\hat{db})}$, then results $(ABCD)=S(abcd)$.

3. Properties (invariant's theorems)

Theorem 1. On a line δ we consider four fixed points A,B,C,D .For any $S\notin\delta$, we denoted $a=SA, b=SB, c=SC, d=SD$. Cross-ratio corresponding to a convergent pencil of $S(abcd)$ is *invariant.*

Proof. Let $S,S'\notin\delta$, so fig.3.

Fig.3

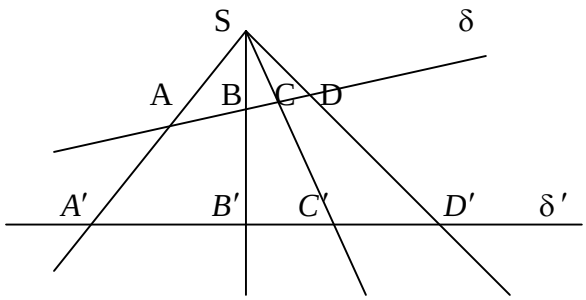


Because $S(abcd)=(ABCD)$ and $S'(a'b'c'd')=(ABCD)$ results $S(abcd)=S'(a'b'c'd')$.(q.e.d).

Theorem 2. We consider fixed pencil of lines with vertix S and rays a,b,c,d .For any secant line δ which intersect the rays of pencil in $A=a\cap\delta, B=b\cap\delta, C=c\cap\delta,$ and $D=d\cap\delta$, Double-ratio corresponding to division $(ABCD)$ este *invariant.*

Proof. Let δ and δ' two some secant lines (you see fig.4), which intersect the rays of the pencil of lines in the points A,B,C,D and A',B',C',D' .

Fig.4

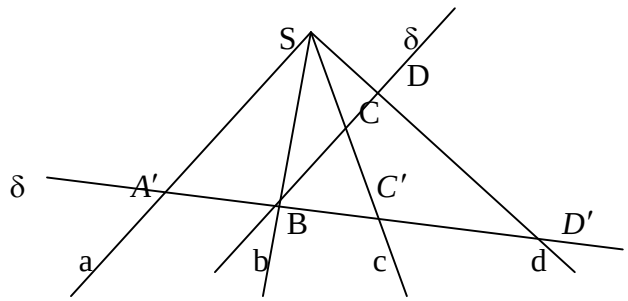


We have $(ABCD)=S(abcd)$ and $(A'B'C'D')=S(abcd)$ .Hence $(ABCD)=(A'B'C'D')$.(q.e.d.).

Pencil of lines cut by a secant paralell with one of the rays.

Let $S(abcd)$ be a pencil of lines and $\delta\parallel a$ (you see fig.5).

Fig.5



$(1)\ S(abcd)=(A'BC'D')=\dfrac{C'A'}{C'B}:\dfrac{D'A'}{D'B}$,$(2)\ \Delta C'A'S\approx\Delta C'BC\Rightarrow\dfrac{C'A'}{C'B}=\dfrac{SA'}{CB}$,

$(3)\ \Delta D'A'S\approx\Delta D'BD\Rightarrow\dfrac{D'A'}{D'B}=\dfrac{SA'}{DB}$.Under (1),(2) and (3) results :

$$S(abcd)=\frac{SA'}{CB}:\frac{SA'}{DB}=\frac{1}{CB}:\frac{1}{DB}=(A'BC'D').$$

We have the following "mnemotehnical" rule for writing the double-ratio $\dfrac{1}{CB}:\dfrac{1}{DB}$.

So $\delta\parallel a$ scriem $\delta\cap a=A_i$ (improperly point on the direction parallels $\delta\parallel a$),

$S(abcd)=\dfrac{CA_i}{CB}:\dfrac{DA_i}{DB}$ and we take $CA_i:DA_i=1$ (switching to limit $A'\to A_i$).

$S(abcd)=\frac{1}{CB}:\frac{1}{DB}$.

Corollary. Let B,C,D be the fixed points on a line δ, $a\|\delta, S\in a, SB=b, SC=c, SD=d$. Then $\forall S\in a, S(abcd)$ is invariant.

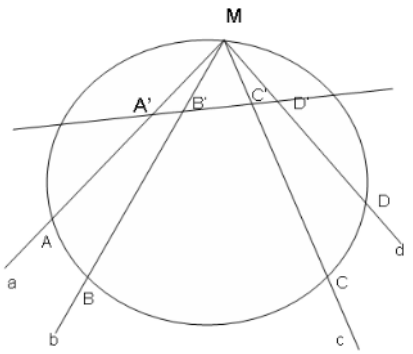
Proof. Let $A_i=\delta\cap a$. $S(abcd)=(A_iBCD)=\frac{CA_i}{CB}:\frac{DA_i}{DB}=\frac{1}{CB}:\frac{1}{DB}$=constant.

Theorem 3. Let A,B,C,D be the fixed points on $C(O;R)$ and $M\in C(O;R)$ (you see fig.6).If $MA=a, MB=b, MC=c, MD=d$ then , $\forall M\in C(O;R)$ $M(abcd)$ is invariant.

Proof. $M(abcd)=\frac{\sin(\hat{ca})}{\sin(\hat{cb})}:\frac{\sin(\hat{da})}{\sin(\hat{db})}$=constant, because A,B,C,D are fixed points and

$\hat{ca}=\frac{C\overset{\frown}{B}A}{2R}$=ct., $\hat{cb}=\frac{\overset{\frown}{CB}}{2R}$=ct., $\hat{da}=\frac{\overset{\frown}{DCBA}}{2R}$=ct., $\hat{db}=\frac{\overset{\frown}{DCB}}{2R}$=ct.

Fig.6



Observation. You see figure 6, results $M(ABCD)=M(A'B'C'D')$.

Theorem 4. Let A,B,C,D be fixed points on $C(O;R)$ and , a,b,c,d the tangents in the four points at circle $C(O;R)$ .Then whatever tangent t to the circle $C(O;R)$ in point $T\in C(O;R)$, the points $A_1=a\cap t, B_1=b\cap t, C_1=c\cap t$ şi $D_1=d\cap t$ formed a invariant division $(A_1B_1C_1D_1)$.

Proof. We have figure 7

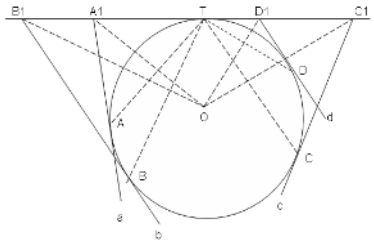


Fig.7

$(A_1B_1C_1D_1) = O(A_1B_1C_1D_1)$.We consider the pencil of lines with vertix T and the rays $TA \perp OA_1$, $TB \perp OB_1$, $TC \perp OC_1$, $TD \perp OD_1$ .So $T(ABCD) = O(A_1B_1C_1D_1)$.

We get $(A_1B_1C_1D_1) = T(ABCD) = (\sin\frac{\overset{\frown}{CBA}}{2R} : \sin\frac{\overset{\frown}{CB}}{2R}) : (\sin\frac{\overset{\frown}{DA}}{2R} : \sin\frac{\overset{\frown}{BCD}}{2R})$ =constant.

Theorem 5. On circle $C(O;R)$ consider distinct points A,B,C,D and tangent a,b,c,d in these points at the circle (you see fig.8).We have:
$A(aBCD) = B(AbCD) = C(ABcD) = D(ABCd)$.

Proof. $A(aBCD) = (\sin \hat{CAa} : \sin \hat{CAB}) : (\sin \hat{DAa} : \sin \hat{DAB}) =$

$= (\sin\frac{\overset{\frown}{CDA}}{2R} : \sin\frac{\overset{\frown}{BC}}{2R}) : (\sin\frac{\overset{\frown}{DA}}{2R} : \sin\frac{\overset{\frown}{BCD}}{2R}) = r = \text{constant}=$

$= B(AbCD) = C(ABcD) = D(ABCd)$ (from the equalities of sines).

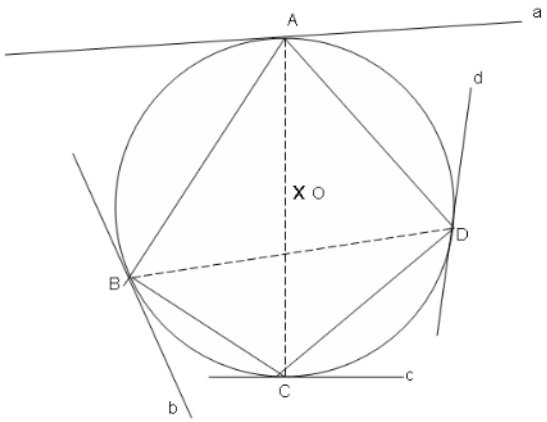


Fig. 8

Observation. *Theorem 5* represents the limit case *of the theorem 3* – the point M on the $C(O;R)$ is one of the points A,B,C or D.

Teorema 6. On circle $C(O;R)$ we consider the distinct points A,B,C,D and the tangents at the circle in these points a,b,c,d (you see fig.9).

If denoted $E = a \cap b, F = b \cap c, G = c \cap d, H = d \cap a, I = b \cap d$ and $J = a \cap c,$ then we have the equalities : $(AEJH) = (EBFI) = (JFCG) = (HIGD)$.

Proof. We consider the pencil of lines with vertex O and rays OA, OE, OJ, OH

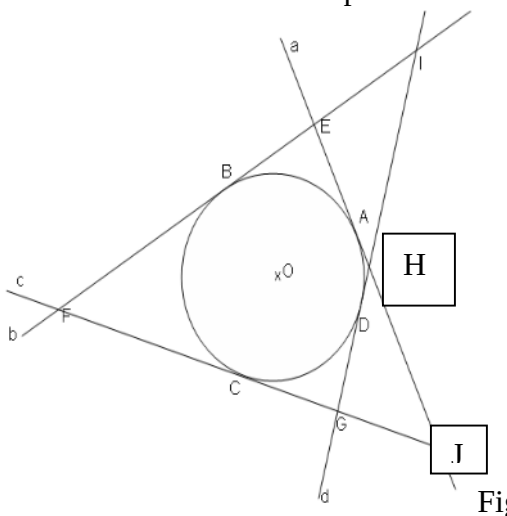


Fig.9

$OAEJH$, then the pencil of lines with vertex in A and the rays perpendiculars on the rays of previously pencil of lines : $a \perp OA, AB \perp OE, AC \perp OJ$, $AD \perp OH$, $A(aBCD)$ and we have

$(AEJH) = O(AEJH) = A(aBCD)$.
The same is obtained the equalities:
$(EBFI) = O(EBFI) = B(AbCD)$;
$(JFCG) = O(JFCG) = C(ABcD)$;
$(HIGD) = O(HIGD) = D(ABCd)$.
Now we use the equalities:

$\hat{CAa} = \hat{CBA} = \hat{cCA} = \frac{\overset{\frown}{CDA}}{2R}$ şi $\hat{CDA} = \frac{\overset{\frown}{ABC}}{2R} = \pi - \frac{\overset{\frown}{CDA}}{2R}$, and results:

$\sin(\hat{CAa}) = \sin(\hat{CBA}) = \sin(\hat{cCA}) = \sin(\hat{CDA}) = \sin(\frac{\overset{\frown}{CDA}}{2R})$.

The same is obtained the equalities:

$\sin(\hat{CAB}) = \sin(\hat{CBb}) = \sin(\hat{cCB}) = \sin(\hat{CDB}) = \sin(\frac{\overset{\frown}{CB}}{2R})$

$\sin(\hat{DAa}) = \sin(\hat{DBA}) = \sin(\hat{DCA}) = \sin(\hat{dDA}) = \sin(\frac{\overset{\frown}{DA}}{2R})$

$\sin(\hat{DAB}) = \sin(\hat{DBb}) = \sin(\hat{DCB}) = \sin(\hat{dDB}) = \sin(\frac{\overset{\frown}{DAB}}{2R})$.

Given these values can write:

$$A(aBCD) = B(AbCD) = C(ABcD) = D(ABCd) = (\sin\frac{\overset{\frown}{CDA}}{2R} : \sin\frac{\overset{\frown}{CB}}{2R}) : (\sin\frac{\overset{\frown}{DA}}{2R} : \sin\frac{\overset{\frown}{DAB}}{2R})$$

(q.e.d.).

Observation. *Theorem 6* represents the limit case of *theorem 4* - the tangenta t at the circle $C(O;R)$ is one of the tangents a,b,c,d .

4. Theorems on concurrence and collinearty

Theorem 7. If $(ABCD) = (AB'C'D')$ - have a *common point* A, then the lines BB', CC', DD' are concurrence.

Proof. We have the fig.10.

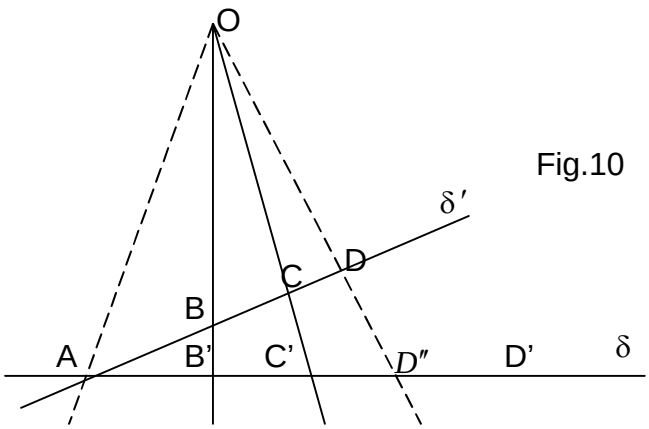
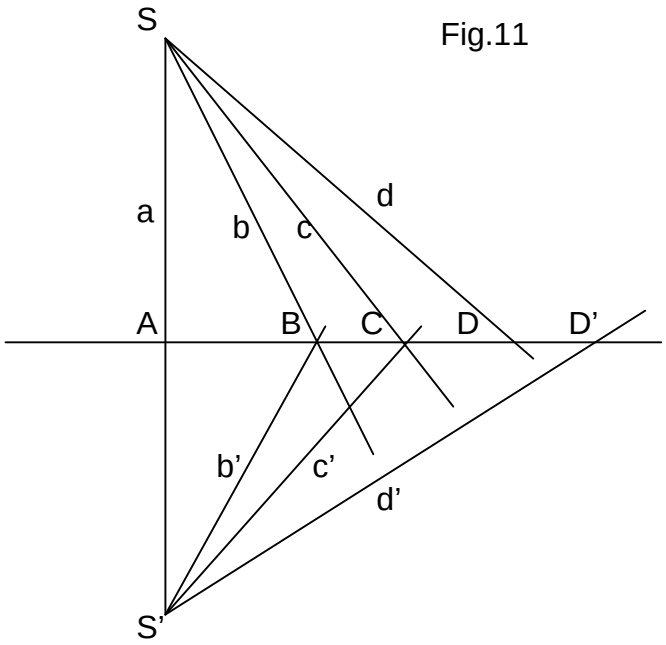


Fig.10

Let $O = BB' \cap CC'$ and $D'' = OD \cap \delta'$. We use the *theorem 2* and results $(ABCD) = (AB'C'D'')$, now use the hypothesis and we have $(ABCD) = (AB'C'D')$. Hence $(AB'C'D'') = (AB'C'D')$, then $D'' = D'$.(q.e.d.).

Theorem 8. If $S(abcd) = S'(ab'c'd')$ - *common ray* $SS' = a$, then the points of intersection of the three pairs of rays correspondent: $B = b \cap b', C = c \cap c', D = d \cap d'$ are collinear.

Fig.11



Proof.

Let $A = BC \cap a, D = BC \cap d$, $D' = DC \cap d'$ (fig.11).

From the hypothesis we get (1) $S(abcd) = S'(ab'c'd')$ .We intersect the pencil of lines $S(abcd)$ with BC and results (2) $S(abcd) = (ABCD)$ .We intersect the pencil of lines $S'(ab'c'd')$ with BC and results (3) $S'(ab'c'd') = (ABCD')$ .From this three relations we get $(ABCD) = (ABCD')$, then $D = D'$.(q.e.d.).

5. At the end - I propose some classical theorems that can be attacked with pencils of lines techniques***(theorem 7 and theorem 8)***.

Teorema 9. Pappus's theorem

If A, B and C are three points on one line , D, E and F are three points on another line , and AE meets BD at X , AF meets CD at Y , and BF meets CE at Z , then the three points X, Y and Z are collinear.

Teorema 10.Desargues's theorem.

In a projective space, two triangles are in perspective *axially* if and only if they are in perspective *centrally*.

To understand this, denote the three vertices of one triangle by (lower-case) *a*, *b*, and *c*, and those of the other by (capital) *A*, *B*, and *C*. Axial perspectivity is the condition satisfied if and only if the point of intersection of *ab* with *AB*, and that of intersection of *ac* with *AC*, and that of intersection of *bc* with *BC*, are collinear, on a line called the *axis of perspectivity*. Central perspectivity is the condition satisfied if and only if the three lines *Aa*, *Bb*, and *Cc* are concurrent, at a point called the *center of perspectivity*.

Theorem 11. Pascal's theorem (The dual of Brianchon's theorem)**.**

Given a (not necessarily regular, or even convex) hexagon inscribed in a conic section, the three pairs of the continuations of opposite sides meet on a straight line, called the "Pascal line".

Theorem 12. Brianchon's theorem (The dual of Pascal's theorem)**.**

Given a hexagon circumscribed on a conic section, the lines joining opposite polygon vertices (polygon diagonals) meet in a single point.

REFERENCES

[1] Nicolescu, L., Boskoff, W., Probleme practice de geometrie, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1990.
[2] Mihăileanu, N. N., Complemente de geometrie sintetică, E.D.P., Bucureşti, 1965.
[3] http://www.nct.anth.org.uk/
[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Projective_geometry
[5] http://robotics.stanford.edu/~birch/projective/
[6] http://www.math.poly.edu/courses/projective_geometry/
[7] http://www.cs.elte.hu/geometry/csikos/proj/proj.html
[8] http://www.geometer.org/mathcircles/projective.pdf

„Inelul $(Z_n,+,\cdot)$- aplicații interesante”

prof.VICTORIA POPA,
Colegiul Tehnic „ Ion Mincu”, Timisoara

Algoritmul lui Gauss de aflare a datei Duminicii Paştelui

- Fie *n* anul în care se caută prima zi de Paşte, zi notată cu x..

- Se determină următoarele resturi:

$a \equiv n(\mathrm{mod}\,19)$

$b \equiv n(\mathrm{mod}\,4)$

$c \equiv n(\mathrm{mod}\,7)$

$d \equiv (19a+15)(\mathrm{mod}\,30)$

$e \equiv (2b+4c+6d+6)(\mathrm{mod}\,7)$

- Se calculează $x = d+e+4$

- Dacă $x \le 30$, atunci x se referă la o dată din aprilie, dacă $x > 30$, atunci x reprezintă o duminică din mai.

Exemplu:Vom calcula data primei zi de Paşte în anul 2009, astfel:

$n = 2009$
$a \equiv 2009(\mathrm{mod}19) \Rightarrow a = 14$
$b \equiv 2009(\mathrm{mod}\,4) \Rightarrow b = 1$
$c \equiv 2009(\mathrm{mod}\,7) \Rightarrow c = 0$
$d \equiv (19 \cdot 14 + 15)(\mathrm{mod}\,30) \Rightarrow d = 11$
$e \equiv (2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 6 \cdot 11 + 6)(\mathrm{mod}\,7) \Rightarrow e = 4$
$x = d + e + 4 \Rightarrow x = 19$

Deci, prima zi de Paşte în anul 2009 va fi duminică, 19 aprilie.

Introducere în problematica securității informațiilor

Tehnicile de securizare a datelor au fost folosite încă de pe vremea vechilor egipteni. În cele două războaie mondiale ele au jucat un rol esențial. Până la mijlocul secolului XX principalii beneficiari ai unor asemenea tehnici au fost militarii, serviciile diplomatice şi guvernele în general, ele fiind utilizate ca instrumente de protecție a strategiilor şi a secretelor naționale.

Din 1960, odată cu proliferarea calculatoarelor şi a comunicațiilor în domeniul privat, a apărut necesitatea protecției informațiilor în formă digitală. Începând cu 1997, datorită lucrărilor lui Fiestel la IBM, în SUA se adoptă un standard de criptare a informațiilor neclasificate – DES (Data Encryption Standard) care este, dealtfel cel mai cunoscut sistem de securizare pentru comerțul electronic şi în marile instituții financiare din lume.

În 1976 Diffie şi Hellman introduc comerțul major de criptare în cheie publică, – metodă ingenioasă de schimb de chei- securizarea fiind bazată pe dificultatea inversării funcției logaritm discret, dar nu indică o tehnică de realizare practică. Acest lucru a fost făcut în 1978 de către Rivest, Shamir şi Adleman, care indică prima schemă practică de criptare în cheie publică şi de semnătură digitală – schemă folosită şi acum şi numită RSA. Schema RSA se foloseşte de o altă problemă matematică dificilă: factorizarea întregilor mari. Progrese aduc anii `80 când se pun în evidență cazuri când schema RSA este vulnerabilă. De asemenea, în 1985, El Gamal pune în evidență o clasă de scheme puternice în cheie publică folosind, de asemenea dificultatea înversării logaritmului discret. În anul 1991 apare primul standard internațional pentru semnătura digitală, provenit din schema RSA

(ISO/IEC 9796). În SUA guvernul adoptă în 1994 un standard de semnătură digitală bazat pe schemele de cheie publică El Gamal.

Între timp au apărut noi scheme de securitate a datelor, toate având ca suport probleme de matematică computațională.

De-a lungul timpului s-au elaborat protocoale şi mecanisme cu scopul securizării informației, atunci când informația este transportată prin documente fizice. Adesea obiectivele securității informației nu pot fi soluționate doar prin algoritmi matematici şi protocoale; sunt necesare şi tehnici procedurale precum şi respectarea regulilor (oficiale sau neoficiale) de acțiune în vederea atingerii scopului vizat. De exemplu confidențialitatea unei scrisori este asigurată de plicul livrat de un serviciu poştal acceptat. Securitatea fizică a plicului este, practic, limitată şi astfel apar legi emise cu scopul de a preveni deschiderea acestuia de către persoane neautorizate.

Modul de înregistrare a informaţiei s-a schimbat esenţial. Iniţial, datele erau stocate pe hârtie şi transmise prin plicuri. Acum informaţia se stochează pe suport magnetic sau optic şi se transmite prin diferite sisteme de telecomunicaţii, tot mai des fără fir. S-a schimbat, deasemenea, radical abilitatea de copiere ori alterare a informaţiei. Se pot face mii de copii a unei părţi de informaţie stocată electronic şi acestea nu pot fi autentificate faţă de original. Prin urmare, într-o societate în care informaţia este stocată şi transmisă electronic, este necesară asigurarea securităţii datelor independent de mediul fizic de înregistrare ori de transport.

Un instrument fundamental utilizat în securizarea datelor este semnătura. Exista blocuri informaționale care asigură şi alte servicii ca nonrepudierea, autentificarea originii datelor, identificare ori atestarea. Semnătura, pe lângă alte cerințe, trebuie să fie unic ataşată unei entități şi serveşte la indentificare, autorizare şi validare.

Deasemenea, sunt necesare analoagele protocoalelor scrise pe hârtie în variantă electonică; astfel de protocoale sunt fără îndoială mai bune decât cele clasice.

Realizarea securității informației în această perioadă impune un intrumentar vast de tehnici legale ingenioase; acestea sunt oferite de *criptografie* – înțeleasă aici ca studiul procedeelor matematice legate de aspecte ale securității informațiilor cum ar fi: *integritatea datelor, confidențialitatea, autentificarea entităților, autentificarea originii datelor.*

Criptarea şi decriptarea mesajelor cu cifrul lui Cezar

Una dintre cele mai cunoscute tehnici de criptare este cifrul lui Cezar, care foloseşte o permutare circulară pe literele alfabetului latin cu o cheie $k \in [0,25]$ în mulțimea Z_{26} :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

Pentru criptarea mesajului este folosită o funcție bijectivă $e_k(\alpha) = (\alpha + k)(\mathrm{mod}\,26)$, unde k reprezintă cheia de criptare, $k \in [0,25]$, iar α reprezintă numărul corespunzător literei din mesajul care va fi criptat.

Pentru exemplificare, vom cripta mesajul **„SIMPOZION”** cu cheia k=11. Vom calcula:

$e_{11}(S) = (11+18)(\mathrm{mod}\,26) = 3 \Rightarrow D$
$e_{11}(I) = (11+8)(\mathrm{mod}\,26) = 19 \Rightarrow T$
$e_{11}(M) = (11+12)(\mathrm{mod}\,26) = 23 \Rightarrow X$
$e_{11}(P) = (11+15)(\mathrm{mod}\,26) = 0 \Rightarrow A$
$e_{11}(O) = (11+14)(\mathrm{mod}\,26) = 25 \Rightarrow Z$
$e_{11}(Z) = (11+25)(\mathrm{mod}\,26) = 10 \Rightarrow K$
$e_{11}(N) = (11+13)(\mathrm{mod}\,26) = 24 \Rightarrow Y$

Astfel, mesajul criptat devine : „**DTXAZKTZY**”

Pentru decriptarea mesajului, se foloseşte funcția $d_k(\beta) = (\beta - k)(\mathrm{mod}\,26)$, unde k reprezintă cheia de decriptare, iar β reprezintă numărul corespunzător literei din mesajul de decriptat.

Pentru exemplificare, vom decripta mesajul „**DTXAZKTZY**” cu cheia k=11.

$d_{11}(D)=(3-11)(\text{mod }26)=(3+15)(\text{mod }26)=18\Rightarrow S$
$d_{11}(T)=(19-11)(\text{mod }26)=(19+15)(\text{mod }26)=8\Rightarrow I$
$d_{11}(X)=(23-11)(\text{mod }26)=(23+15)(\text{mod }26)=12\Rightarrow M$
$d_{11}(A)=(0-11)(\text{mod }26)=(0+15)(\text{mod }26)=15\Rightarrow P$
$d_{11}(Z)=(25-11)(\text{mod }26)=(25+15)(\text{mod }26)=14\Rightarrow O$
$d_{11}(K)=(10-11)(\text{mod }26)=(10+15)(\text{mod }26)=25\Rightarrow Z$
$d_{11}(Y)=(24-11)(\text{mod }26)=(24+15)(\text{mod }26)=13\Rightarrow N$

Astfel, mesajul decriptat devine : „**SIMPOZION**”.

Criptarea şi decriptarea mesajelor cu sistemul Cardano

Sistemul Cardano este un sistem de criptare autosincronizabil cu cheie fluidă. Un sistem de criptare se numeşte autosincronizabil, dacă un caracter al cheii fluide se construieşte nu numai cu ajutorul cheii k, ci şi cu ajutorul unui număr fixat de cactere criptate în prealabil.Sistemul Cardano foloseşte pentru criptare o cheie fluidă $z_1=k, z_{i+1}=y_i, i\geq 1$, unde y reprezintă mesajul criptat (literele obținute în urma criptării), iar x reprezintă mesajul clar (ce urmează a fi criptat).

Pentru exemplificare, vom cripta cu cheia fluidă $z_1=15=k$ mesajul „MONOID”. Utilizăm literele alfabetului latin, iar operațiile se efectuează în Z_{26}. De fiecare dată, se adună mesajul criptat obținut anterior, ca mai jos:

	M	O	N	O	I	D
x	12	14	13	14	8	3
z=15	15	1	15	2	16	24
y	1	15	2	16	24	1
	B	P	C	Q	Y	B

Pentru decriptare, se foloseşte $x_1 = y_1 - k, x_i = y_i - y_{i-1}, i \geq 1$. Pentru exemplificare, vom decripta mesajul „ BPCQYB”, utilizând scăderea ca adunarea cu opusul în Z_{26}. Prin calcul, obținem următoarele date, pe care le ataşăm schemei de decriptare de mai jos.

$x_1 = (1-15)(\mathrm{mod}\,26) = 1+11 = 12$
$x_2 = y_2 - y_1 = (15-1)(\mathrm{mod}\,26) = 15+25 = 14$
$x_3 = y_3 - y_2 = (2-15)(\mathrm{mod}\,26) = 2+11 = 13$
$x_4 = y_4 - y_3 = (16-2)(\mathrm{mod}\,26) = 16+24 = 14$
$x_5 = y_5 - y_4 = (24-16)(\mathrm{mod}\,26) = 24+10 = 8$
$x_6 = y_6 - y_5 = (1-24)(\mathrm{mod}\,26) = 1+2 = 3$

	B	P	C	Q	Y	B
y	1	15	2	16	24	1
k=15	15	1	15	2	16	24
x	12	14	13	14	8	3
	M	O	N	O	I	D

Am obținut mesajul decriptat „ MONOID”.

Bibliografie

D. Săvulescu ş.a.- Manual matematică, cls. a XII-a, Ed. Art

L. Niculescu ş.a.- Manual matematică, cls. a XII-a, Ed. Cardinal

D. Dăianu- „Bazele matematice ale securității în tehnologia informației”, Ed. Politehnica, 2006

D. Dăianu- „Bazele matematice ale securității în tehnologia informației”-suport de curs master „Algoritmi avansați de matematică cu aplicații în inginerie şi economie”, Universitatea Politehnica Timişoara

Aplicaţii ale matematicii în viaţa cotidiană

Prof. Sorin Borodi

1.(clasa a 7-a)

Petronel vrea să compună o problemă pentru concursul de la http://www.mateinfo.ro/.
El constată că poate forma o proporţie cu numerele ce reprezintă vârsta sa,a fratelui său şi a părinţilor.În momentul în care vrea,pentru a găsi alte proprietăţi interesante, să calculeze produsul acestor vârste,este chemat la masă.Are timp să arunce o privire peste ultima cifră a rezultatului.În timp ce servesc masa, Petronel începe să destăinuie din preocupările sale,dar constată că nu -şi aminteşte precis ultima cifră a produsului;e sigur,totuşi,că era 2, 3,5 sau 7.

a) Care putea fi ultima cifră a produsului ?

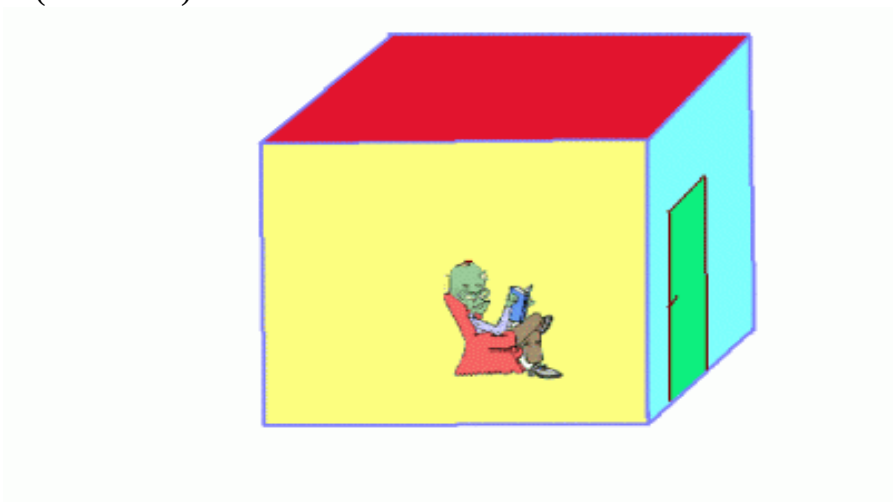
b) Tatăl său,aflând preocupările fiului,îi spune;'Ştiu chiar şi penultima cifră a produsului !' Petronel rămâne perplex şi cât pe-aci să-şi scape lingura în ciorba. Care este penultima cifră a produsului ?

Solutie

a) a/b=c/d,deci ac=bd,deci abcd=$(ac)^2$,deci abcd este patrat perfect.Asadar,ultima cifra poate fi doar 5.
b) Daca patratul perfect are ultima cifra 5,penultima cifra este 2.

---

2. (clasa a 8-a)



Puţin cunoscutul arhitect Cubick,al cărui dicton în viaţă este 'De ce să te complici ?',este mare specialist în proiectarea garsonierelor compuse dintr-o cameră în formă de cub,cu muchia exprimată printr-un număr întreg de metri.Popescu,beneficiar al unui proiect al arhitectului,stă în mijlocul camerei şi meditează :'Dacă muchia camerei mele ar fi fost cu un metru mai mare,aş fi câştigat 61 m^3 la volum'. Cât este muchia camerei lui Popescu ?

Solutie

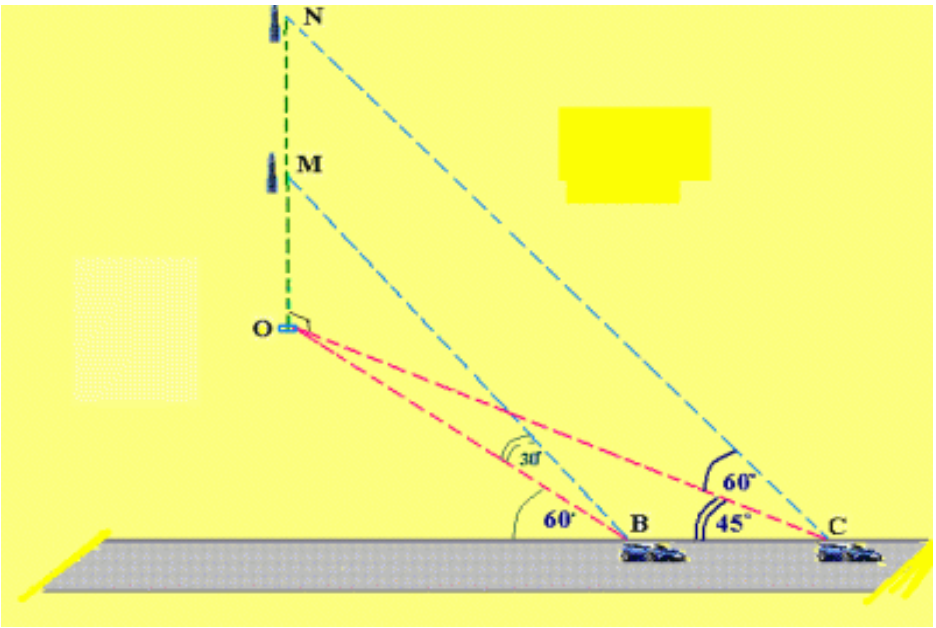
Din datele problemei se poate forma ecuatia $x^3+61=(x+1)^3$,care conduce la $x^2+x-20=0$. $(x+5)(x-4)=0$,cu solutiile –5 si 4.Convine doar x=4..Muchia este 4 m.

---

3. (clasa a 8-a)

Un automobil se deplasează cu 72 km/h pe o şosea ce trece prin apropierea unui cosmodrom,de la care tocmai a fost lansată o rachetă,,perfect vertical,rampa de lansare fiind în O.În automobil există un aparat performant de determinare a unghiu rilor.Când automobilul era in B,racheta era în M.Peste 15 secunde, automobilul era în C,iar racheta în N.

a) La ce distanţă se află cosmodromul de şosea ?
b) Care a fost viteza medie a rachetei pe parcursul observaţiilor ?



Solutie

a) 72 km/h=20 m/sec
Deoarece din B în C timpul de parcurgere este 15 sec,obtinem BC=300 m.
Fie T piciorul perpendicularei din O pe şosea.
ΔOTC este dr. isoscel,fie cateta sa x.
TB=x-300,OT=x

tg<OTB=tg30°=(x-300)/x,de unde x= $\frac{300\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \approx 709,8$ m.

b) BO≈819,6 m.In Δ dr.BOM, tg30°=OM/BO,de unde OM ≈473,19 m
OC= $x\sqrt{2}$ ≈1003,8 m.
In Δ dr.COM,tg60°=ON/CO,de unde ON ≈1738,63 m.
Deci MN=1738,63=473,19=1265,44 m
Asadar,racheta a parcurs 1265,44 m in 15 sec,ceea ce corespunde unei viteze de 303 ,7 km/h

ASUPRA DREPTEI LUI DROZ – FARNY

Corneliu Mănescu-Avram

În 1899, Arnold Droz-Farny (1865-1912), un profesor elveţian de matematică şi ştiinţe, a publicat fără demonstraţie următoarea

Teorema 1. Două drepte perpendiculare duse prin ortocentrul unui triunghi interceptează câte un segment pe fiecare latură a triunghiului. Mijloacele celor trei segmente sunt coliniare.

Numeroşi autori s-au ocupat de această problemă (a se vedea bibliografia) şi (4) conţine, din nou!, fără demonstraţie următoarea generalizare, a cărei demonstraţie face obiectul prezentei note :

Teorema 2. Se consideră triunghiul ABC cu ortocentrul H. O hiperbolă echilateră cu centrul în H intersectează dreapta BC în A_1 şi A_2, dreapta CA în B_1 şi B_2 şi dreapta AB în C_1 şi C_2. Să se demonstreze că punctele P, Q şi R, mijloacele segmentelor $[A_1A_2]$, $[B_1B_2]$ şi $[C_1C_2]$, respectiv, sunt coliniare.

Demonstraţie : Presupunem că asimptotele hiperbolei rămân fixe şi triunghiul se roteşte în jurul ortocentrului. Se alege un sistem complex de coordonate cu originea O în central cercului circumscris triunghiului ABC, asimptotele hiperbolei echilatere paralele cu axa reală şi axa imaginară şi vârfurile triunghiului pe cercul unitate. Rezultă că $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ şi $H(h)$, cu $a, b, c, h \in \mathbb{C}$, $|a| = |b| = |c| = 1$ şi $h = a + b + c$. După transformarea $z \mapsto -z + h$ (o translaţie urmată de simetria faţă de un punct), asimptotele devin axe de coordonate şi coordonatele punctelor sunt $A(b + c)$, $B(c + a)$, $C(a + b)$ şi $H(0)$. Nu este necesar să rotim triunghiul în jurul ortocentrului, deoarece vârfurile au fost alese arbitrar .

În coordonate carteziene, ecuaţia unei hiperbole echilatere este $xy = m$, cu m o constantă reală nenulă, astfel că hiperbola are în coordonate complexe ecuaţia

$$z^2 - \bar{z}^2 = n, \text{ cu } n \in \mathbb{C} - \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Dreapta BC are ecuaţia

$$z + bc\bar{z} = a + b + c + \frac{bc}{a}. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) obţinem, prin eliminarea lui $\bar{z}$, ecuaţia de gradul al doilea

$$(b^2c^2 - 1)z^2 + 2\left(a + b + c + \frac{bc}{a}\right)z - \left(a + b + c + \frac{bc}{a}\right)^2 - b^2c^2n = 0, \qquad (3)$$

ale cărei soluţii sunt a_1 şi a_2, coordonatele punctelor A_1 şi A_2 respectiv. Rezultă că p, coordonata punctului P este

$$p = \frac{a_1+a_2}{2} = \frac{a+b+c+\frac{bc}{a}}{1-b^2c^2} \tag{4}$$

şi putem obţine asemănător, q şi r, coordonatele punctelor Q şi R respectiv.

Punctele P, Q, R sunt coliniare dacă şi numai dacă se anulează următorul determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & \bar{p} & 1 \\ q & \bar{q} & 1 \\ r & \bar{r} & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Având în vedere forma particulară a coordonatelor p, q, r, putem scrie determinantul Δ ca o sumă de patru determinanţi

$$\Delta = |a+b+c|^2\Delta_1 + abc(a+b+c)\Delta_2 + a^2b^2c^2(ab+bc+ca)\Delta_3 + a^2b^2c^2\Delta_4 \tag{6}$$

unde

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -b^2c^2 & 1 \\ 1-b^2c^2 & 1-b^2c^2 & \\ \frac{1}{1-c^2a^2} & \frac{-c^2a^2}{1-c^2a^2} & 1 \\ \frac{1}{1-a^2b^2} & \frac{-a^2b^2}{1-a^2b^2} & 1 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1-b^2c^2 & 1-b^2c^2 & \\ \frac{1}{1-c^2a^2} & \frac{-1}{1-c^2a^2} & 1 \\ 1 & -1 & \\ 1-a^2b^2 & 1-a^2b^2 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2(1-b^2c^2)} & \frac{-1}{a^2(1-b^2c^2)} & 1 \\ \frac{1}{b^2(1-c^2a^2)} & \frac{-1}{b^2(1-c^2a^2)} & 1 \\ \frac{1}{c^2(1-a^2b^2)} & \frac{-1}{c^2(1-a^2b^2)} & 1 \end{vmatrix}, \Delta_4 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2(1-b^2c^2)} & \frac{-1}{1-b^2c^2} & 1 \\ \frac{1}{b^2(1-c^2a^2)} & \frac{-1}{1-c^2a^2} & 1 \\ \frac{1}{c^2(1-a^2b^2)} & \frac{-1}{1-a^2b^2} & 1 \end{vmatrix}.$$

Suma primelor două coloane este egală cu a treia c oloană în Δ_1 şi este egală cu 0 în Δ_2 şi Δ_3 astfel că $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Calcule directe (e simplu!) arată că $\Delta_4 = 0$.

Înlocuim aceste valori în (6) şi obţinem (5), ceea ce încheie demonstraţia Teoremei 2.

Pentru $n = 0$ hiperbola degenerează în două drepte perpendiculare (asimptotele ei) şi obţinem o demonstraţie a Teoremei 1, deoarece punctele P, Q, R sunt aceleaşi.

Bibliografie

1. Kao, S.T., Bernhart, A., Generalized Droz-Farny Transversals, www.jstor.org

2. Honsberger, R., Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry, USA, 1995

3. Grinberg, D., From the Complete Quadrilateral to the Droz-Farny Theorem, unpublished notes

4. Grinberg, D., Hyacinthos message 6268, Jan.5, 2003

5. Pohoata, C., Ta, Su Hong, A short Proof of Lamoen's generalization of the Droz-Farny Line theorem, www.cpohoata.com

6. Bogomolny, A., Droz-Farny Line Theorem, from *Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles*

7. Ayme, J.-L., A Purely Synthetic Proof of the Droz-Farny Line Theorem, Forum Geometricorum, Volume 4 (2004) 219-224

8. Ehrmann, J.-P., van Lamoen, F.M., A projective generalization of the Droz-Farny line theorem, Forum Geometricorum, Volume 4 (2004) 225-227

9. Thas, C., A note on the Droz-Farny theorem, Forum Geometricorum, Volume 6 (2006) 25-28

10. Bradley, C.J., Monk, D., Smith, G.C., On a Porism Associated with the Euler and Droz-Farny lines, Forum Geometricorum, Volume 7 (2007) 11-17

11. Mihalescu, C., Geometria elementelor remarcabile, Societatea de Ştiinţe Matematice din România, Bucureşti, 2007

CATEDRA DE MATEMATICĂ, GRUPUL ŞCOLAR DE TRANSPORTURI, PLOIESTI, ROMANIA

E-mail : avram050652@yahoo.com