NOTĂ MATEMATICĂ

ASUPRA UNOR PROBLEME DE CONCURS (III)

Corneliu Mănescu-Avram

1. Considerăm triunghiul oarecare ABC şi fie AD şi AM înălţimea, respectiv mediana corespunzătoare laturii $[BC]$, iar BR bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$, unde $R \in (AC)$. Să se arate că dacă $AP = AQ$, unde $\{P\} = AD \cap BR$ şi $\{Q\} = AM \cap BR$, atunci $\frac{S_{APQ}}{S_{ABC}} \leq \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}$. Să se precizeze când are loc egalitatea.

(25 – 31.01.2010, *Cristina Paula Nica, Nicolae Nica*)

Fie T proiecţia vârfului A pe bisectoarea BR. Dacă înlocuim condiţia $AP = AQ$ din ipoteză cu $PT = kTQ$, $k \in (0, \infty)$, iar restul ipotezei rămâne neschimbată, atunci se obţine concluzia

$\frac{S_{APQ}}{S_{ABC}} \leq \frac{(\sqrt{2}-1)^2(k+1)}{4}$. Demonstraţia este asemănătoare :

Alegem un reper cartezian cu originea în punctul B şi dreapta BR ca axă a absciselor. Dacă $m \in (0, \infty)$ este coeficientul unghiular al dreptei AB, atunci ecuaţia dreptei AB este $y = mx$, ecuaţia dreptei BC este $y = -mx$, deci $A(a, ma)$, $C(2c, -2mc)$, unde $a, c \in (0, \infty)$. Rezultă $M(c, -mc)$. Să determinăm abscisele punctelor P şi Q. Coeficientul unghiular al unei perpendiculare pe dreapta BC este egal cu $\frac{1}{m}$, deci ecuaţia dreptei AD este $y - ma = \frac{1}{m}(x - a)$, de unde, pentru $y = 0$ se obţine $x_P = (1 - m^2)a$. Ecuaţia dreptei AM este $\frac{y - y_M}{y_A - y_M} = \frac{x - x_M}{x_A - x_M}$, deci $\frac{y+mc}{ma+mc} = \frac{x-c}{a-c}$. Pentru $y = 0$ se obţine $x_Q = \frac{2ac}{a+c}$ (deci poziţia punctului Q nu depinde de mărimea unghiului $\widehat{B}$).

Punctul $T(a, 0)$ satisface $PT = kTQ$ dacă şi numai dacă $x_P + kx_Q = (1 + k)x_T$. Se obţine $m^2 = \frac{(c-a)k}{c+a}$ (1) . E clar că trebuie să avem $c > a$, deci $0 < m < \sqrt{k}$.

Ariile celor două triunghiuri sunt, ţinând cont şi de (1) :

$$S_{APQ} = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & ma & 1 \\ (1-m^2)a & 0 & 1 \\ \frac{2ac}{a+c} & 0 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{ma^2(c-a)(k+1)}{2(a+c)},$$

$$S_{ABC} = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & ma & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2c & -2mc & 1 \end{vmatrix}\right| = 2mac.$$

Cu notaţia $\frac{a}{c} = x$ se obţine $\frac{S_{APQ}}{S_{ABC}} = \frac{x(1-x)(k+1)}{4(x+1)}$ (2).

Considerăm funcţia $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x(1-x)}{x+1}$. Dervata ei $f'(x) = -\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$ este pozitivă pe $(0, \sqrt{2}-1)$, se anulează în $x_0 = \sqrt{2}-1$ şi este negativă pe $(\sqrt{2}-1, 1)$, deci x_0 este punct de maxim al funcţiei f, astfel că în (2) valoarea maximă este $\frac{k+1}{4} f(x_0) = \frac{(\sqrt{2}-1)^2(k+1)}{4}$ ceea ce demonstrează inegalitatea din enunţ, cu egalitate numai dacă $x = x_0 = \sqrt{2}-1$.

2. Există o constantă $m \in (0, \infty)$ astfel încât inegalităţile $R \geq m\sqrt{S} \geq (1+\sqrt{2})r$ să fie adevărate în orice triunghi dreptunghic? (Notaţiile sunt cele uzuale).

(2 – 8.08.2010, *Corneliu Mănescu-Avram*)

Varianta tridimensională este următoarea :

Fie V volumul, R raza sferei circumscrise şi r raza sferei înscrise într-un tetraedru tridreptunghic. Sunt adevărate inegalităţile $R \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{6V} \geq \frac{\sqrt{3}-1}{4} r$.

Dacă $O(0, 0, 0)$, $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ sunt vârfurile tetraedrului, unde $a, b, c \in (0, \infty)$, atunci punctul $M\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ este centrul sferei circumscrise, deci $R = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$.
Din $6V = abc$ şi inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică, rezultă prima inegalitate din enunţ.

Punctul $N(r, r, r)$ este centrul sferei înscrise ; scriem că el se află la distanţa r de planul (ABC) şi obţinem

$$r = \frac{\left|\frac{r}{a}+\frac{r}{b}+\frac{r}{c}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}, \text{ deci } r = \frac{ab+bc+ca-\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{2(a+b+c)}.$$

Lăsăm cititorului demonstraţia celei de-a doua inegalităţi din enunţ.

3 Să se arate că oricum am lua $n + 2$ puncte pe o suprafaţă plană convexă S de arie n, cu n natural, $n > 1$, există cel puţin trei dintre ele care formează o suprafaţă triunghiulară de arie mai mică sau egală cu 1.

(23 – 29.08.2010, *Constantin Telteu*)

Se poate extinde această afirmaţie la spaţiul tridimensional :

Fie V o mulţime din $\mathbb{R}^3$ convexă şi mărginită de volum v şi P o mulţime de $n + 3$ puncte din V cu proprietatea că oricare trei puncte nu sunt coliniare şi oricare patru puncte nu sunt coplanare. Există atunci patru puncte în P care sunt vârfurile unui tetraedru cu volumul cel mult egal cu $\frac{v}{n}$.

Într-adevăr, mulţimea V este mărginită, deci există un plan cu proprietatea că toate punctele din P sunt de aceeaşi parte a planului. Deplasăm acest plan după o direcţie paralelă până când mai întâlneşte încă un punct din P, apoi îl rotim în jurul dreptei determinate de cele două puncte până când mai întâlneşte un al treilea punct din P. Repetăm operaţia cu alte direcţii şi obţinem în final un poliedru cu feţele triunghiulare, care are vârfurile printre punctele din P, celelalte puncte din P fiind interioare poliedrului. Acest poliedru este convex, deoarece este intersecţie de semispaţii şi este interior lui V, deci volumul lui este cel mult v.

Unim fiecare vârf al unei feţe a poliedrului cu punctul cel mai apropiat de faţa respectivă şi repetăm operaţia până când epuizăm toate punctele din P. Obţinem astfel tetraedrele $T_1, T_2, \dots, T_n$, care au vârfurile din P şi care au în comun cel mult un vârf, o muchie sau o faţă. Presupunem că volumul $\mathrm{vol}(T_i) > \frac{v}{n}$, pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Avem

$$v = \mathrm{vol}(V) \geq \mathrm{vol}(T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n) = \mathrm{vol}(T_1) + \mathrm{vol}(T_2) + \dots + \mathrm{vol}(T_n) > n \cdot \frac{v}{n} = v,$$

contradicţie. Rezultă că există $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ pentru care $\mathrm{vol}(T_i) \leq \frac{v}{n}$.

4. Să se arate că dacă $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$) sunt numere reale strict pozitive şi

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4),$$

atunci oricare trei dintre aceste numere pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

(6 – 12.09.2010, *Corneliu Mănescu-Avram*)

Proprietatea poate fi extinsă la patrulaterul inscriptibil :

Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 4$) sunt numere reale strict pozitive şi

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^2 > (n-2)(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4),$$

atunci oricare patru dintre aceste numere sunt lungimile laturilor unui patrulater inscriptibil.

Pentru $n = 4$ afirmaţia rezultă din următoarea

Lemă. Fie a_1, a_2, a_3, a_4 numere reale strict pozitive. Următoarele afirmaţii sunt echivalente :

a) există un patrulater inscriptibil cu laturile de lungimi a_1, a_2, a_3, a_4 ;

b) $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2 + 8a_1a_2a_3a_4 > 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4)$;

c) $a_1 + a_2 > |a_3 - a_4|$, $a_3 + a_4 > |a_1 - a_2|$.

DEMONSTRAŢIE : a) $\Rightarrow$ b). Fie S aria patrulaterului inscriptibil cu laturile de lungimi a_1, a_2, a_3, a_4 şi $2p = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ perimetrul său. Din formula lui *Brahmagupta*

$$S = \sqrt{(p-a_1)(p-a_2)(p-a_3)(p-a_4)},$$

rezultă

$$16S^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2 + 8a_1a_2a_3a_4 - 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4) > 0\ ;$$

b) $\Rightarrow$ c). Avem $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2 + 8a_1a_2a_3a_4 - 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4) =$

$$= (-a_1+a_2+a_3+a_4)(a_1-a_2+a_3+a_4)(a_1+a_2-a_3+a_4)(a_1+a_2+a_3-a_4) > 0.$$

Presupunem că toţi factorii sunt negativi şi obţinem prin adunarea lor $4p < 0$, contradicţie. Presupunem că doi factori sunt negativi, de exemplu, primii doi şi obţinem prin adunarea lor

$2(a_3 + a_4) < 0$, contradicţie. Rezultă că toţi factorii sunt pozitivi, deci $a_1 + a_2 > a_3 - a_4$,

$a_1 + a_2 > a_4 - a_3$, de unde $a_1 + a_2 > |a_3 - a_4|$ şi similar se obţine cealaltă inegalitate.

c) $\Rightarrow$ a) Construim un cerc cu lungimea razei

$$R = \sqrt{\frac{(a_1a_2+a_3a_4)(a_1a_3+a_2a_4)(a_1a_4+a_2a_3)}{(-a_1+a_2+a_3+a_4)(a_1-a_2+a_3+a_4)(a_1+a_2-a_3+a_4)(a_1+a_2+a_3-a_4)}}$$

şi demonstrăm că există un patrulater înscris în acest cerc având laturile de lungimi a_1, a_2, a_3 a_4. Există un patrulater articulat (cu lunginile laturilor constante, dar cu măsurile unghiurilor variabile) cu vârfurile în punctele A, B, C, D, cu lungimile laturilor $AB = a_1$, $BC = a_2$, $CD = a_3$, *DA* = a_4 şi cu diagonala *AC* = *e* ∈ (0, $\min(a_1 + a_2, a_3 + a_4)$), conform ipotezei. Deformăm acest patrulater până când obţinem

$$e^2 = \frac{(a_1a_3+a_2a_4)(a_1a_4+a_2a_3)}{a_1a_2+a_3a_4},$$

deci $\frac{a_1^2+a_2^2-e^2}{2a_1a_2} + \frac{a_3^2+a_4^2-e^2}{2a_3a_4} = 0$, de unde cos *B* + cos *D* = 0, astfel că patrulaterul *ABCD* este inscriptibil, având două unghiuri opuse suplementare. Din cos *B* + cos *D* = 0 se obţine

$$\cos B = \frac{a_1^2+a_2^2-a_3^2-a_4^2}{2(a_1a_2+a_3a_4)},$$

iar din $e = 2R\sin B$ se obţine valoarea prescrisă a lui *R*.

Notă. Ultima implicaţie este un caz particular al unui rezultat clasic : *Dacă există poligoane cu laturile de lungimi date* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 3)$, *atunci există printre ele un poligon inscriptibil şi acesta are aria maximă* (*Gabriel Cramer*, 1704 – 1752).

Pentru $n \geq 5$ demonstrăm afirmaţia folosind inegalitatea dintre media aritmetică şi media pătratică :

$$(n-2)(a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4) < (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)^2 =$$

$$= \left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}{2} + \frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}{2} + a_5^2 + \ldots + a_n^2\right)^2 \leq$$

$$\leq (n-2)\left[\left(\frac{a_1^2+a_2^2++a_3^2+a_4^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}{2}\right)^2 + a_5^4 + \ldots + a_n^4\right].$$

Simplificăm, reducem termenii asemenea şi obţinem

$$2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4) < (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2.$$

Avem însă

$$\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2\right)^2 < \left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2\right)^2 + 8a_1a_2a_3a_4,$$

deci există, conform lemei precedente, un patrulater inscriptibil cu laturile de lungimi a_1, a_2, a_3, a_4. Cum expresiile din enunţ sunt simetrice, rezultă că proprietatea rămâne adevărată pentru oricare patru dintre numerele a_1, a_2, ..., a_n.

CATEDRA DE MATEMATICĂ, GRUPUL ŞCOLAR DE TRANSPORTURI – PLOIEŞTI

E-mail : avram050652@yahoo.com

Raportul izoperimetric

Prin raport izoperimetric al unei figuri plane (figură determinată de o curbă simplă închisă rectificabilă) se înţelege raportul $\frac{A}{L^2}$, unde A este aria figurii geometrice şi L este perimetrul figurii(lungimea conturului) . Sunt foarte multe probleme interesante legate de acest raport izoperimetric. În continuare vom calcula raportul izoperimetric pentru câteva figuri geometrice şi vom studia variaţia raportului izoperimetric al poligoanelor regulate în funcţie de numărul de laturi şi ce se întâmplă cu raportul izoperimetric atunci când numărul de laturi tinde la infinit.

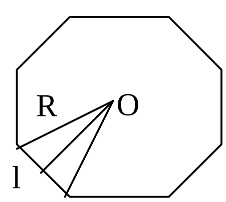
Raportul izoperimetric al cercului este $\frac{A}{L^2}=\frac{\pi R^2}{(2\pi R)^2}=\frac{1}{4\pi}$

Raportul izoperimetric al triunghiului dreptunghic isoscel : $\frac{A}{L^2}=\frac{\frac{c^2}{2}}{\left(2c+c\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{2\left(6+4\sqrt{2}\right)}$

Raportul izoperimetric al triunghiului echilateral : $\frac{A}{L^2}=\frac{\frac{l^2\sqrt{3}}{4}}{(3l)^2}=\frac{\sqrt{3}}{36}$

Raportul izoperimetric al pătratului $\frac{A}{L^2}=\frac{l^2}{(4l)^2}=\frac{1}{16}$

Raportul izoperimetric al poligonului regulat cu n laturi



$$\frac{A}{L^2}=\frac{n\cdot\frac{R^2\sin\frac{2\pi}{n}}{2}}{\left(n\cdot 2R\sin\frac{\pi}{n}\right)^2}=\frac{1}{4n}\cdot ctg\frac{\pi}{n}$$

Pentru poligonul regulat cu (n+1) laturi, raportul izoperimetric este :

$$\frac{A}{L^2}=\frac{1}{4(n+1)}\cdot ctg\frac{\pi}{n+1}$$

Considerăm funcţia $f(x) = x \cdot ctgx$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$. Avem $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2x - 2x}{\sin^2 x} < 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, rezultă că f este strict descrescătoare.

$$\frac{A_n}{L_n^2} = \frac{1}{4\pi} f\left(\frac{\pi}{n}\right) < \frac{1}{4\pi} f\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \frac{A_{n+1}}{L_{n+1}^2}$$

$\frac{A_n}{L_n^2} < \frac{A_{n+1}}{L_{n+1}^2}$, de unde rezultă că raportul izoperimetric creşte odată cu numărul de laturi ale poligonului regulat.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{L_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n} \cdot ctg\frac{\pi}{n} = \frac{1}{4\pi} \text{ (raportul izoperimetric al cercului)}.$$

Prof. grad I

Gherasă Ioan-Doru

Colegiul „Henri Coandă" Bacău

POLINOAME INVERSABILE

Prof. Antohe Florin
Şcoala Nichita Stănescu Galaţi

Definiţie : Fie A un inel. Un element x din A se numeşte nilpotent dacă există n$\in$**N** astfel încât $x^n = 0$.

Definiţie : Fie A un inel. Un element x din A este inversabil dacă există y în A astfel încât xy=yx=1.

Lemă : În orice inel comutativ , suma dintre orice element inversabil şi orice element nilpotent este un element inversabil.

Demonstraţie :
Fie $a \in$A astfel încât $a^p = 0$ (p$\in$**N**).
Din $(1-a)(1+a+a^2+a^3+...+a^{p-1}) = 1-a^p$ rezultă că 1-a este inversabil.
Cum –a este nilpotent , iar 1+a=1-(-a) rezultă că 1+a este inversabil.
Fie x$\in$A un element inversabil şi y inversul său.
$x+a = x+1\cdot a = x+(xy)a = x+x(ya) = x(1+ya)$ este inversabil. (deoarece U(A) este grup).
Elementele nilpotente ale unui inel comutativ A se află printre diferenţele 1-x , x$\in$U(A).

Teoremă : Fie A un inel comutativ şi :

$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$ un polinom din A[X] , grad n≥0.

Atunci f este inversabil în A[X] dacă şi numai dacă a_0 este inversabil în A şi $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt nilpotente în A.

Demonstraţie :
Dacă a_0 este inversabil în A, el rămâne inversabil şi în A[X]. Dacă a_1 este nilpotent în A , atunci a_1X este nilpotent în A[X] , aşadar polinomul $a_0 + a_1X$ este inversabil. Dacă a_2 este nilpotent în A , atunci a_2X^2 este nilpotent în A[X] , aşadar $a_0 + a_1X + a_2X^2$ este inversabil în A[X].
Continuând raţionamentul , obţinem că dacă $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt nilpotente în A şi a_0 este inversabil în A , atunci f este inversabil.
Reciproc, presupunem că polinomul f este inversabil şi fie :

$g = b_0 + b_1X + ... + b_mX^m$ inversul său.

Din fg=1 rezultă :

$a_0 b_0 = 1$

$a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$

$a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0$

....

$a_{n-2} b_m + a_{n-1} b_{m-1} + a_n b_{m-2} = 0$

$a_{n-1} b_m + a_n b_{m-1} = 0$

$a_n b_m = 0$

Înmulţind penultima relaţie cu a_n rezultă: $a_{n-1} b_m a_n + a_n{}^2 b_{m-1} = 0$ şi de aici $a_n{}^2 b_{m-1} = 0$.

Înmulţind antepenultima relaţie cu $a_n{}^2$ obţinem: $a_n{}^3 b_{m-2} = 0$.

Continuând procedeul obţinem: $a_n{}^k b_{m-k+1} = 0$ (k≥1) şi, în final $a_n{}^{m+1} b_0 = 0$.

Înmulţind ambii membri ai acestei relaţii cu a_0 obţinem $a_n{}^{m+1} = 0$, adică a_n este nilpotent. Polinomul $a_n X^n$ fiind nilpotent, rezultă că:

$f - a_n X^n = a_0 + a_1 X + ... + a_{n-1} X^{n-1}$ este inversabil (şi are gradul mai mic decât gradul lui f).

Continuând acest raţionament inductiv ajungem la concluzia că $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1$ sunt nilpotente în A. Din $a_0 b_0 = 1$ rezultă că a_0 este inversabil în A.

Definiţie: Funcţia $\varphi_n : Z \to Z_n$ definită prin $\varphi_n(x) = \hat{x}$ se numeşte surjecţia canonică a lui Z pe inelul Z $_n$.

Teoremă: În inelul Z $_n$, n>1, elementul $\hat{x}$ este inversabil dacă şi numai dacă (x,n)=1.

Demonstraţie: Dacă (x,n)=1 şi y=x+kn, k$\in$Z, atunci (y,n)=1. Dacă $\hat{x}$ este inversabil în Z $_n$, atunci $\exists\ \hat{z} \in$ Z $_n$ astfel încât $\hat{x}\hat{z} = \hat{z}\hat{x} = \hat{1} \Rightarrow$ xz=1+kn pentru un anumit k din Z. Deci xz-kn=1 rezultă (x,n)=1.

Reciproc, dacă (x,n)=1, atunci există a,b din Z astfel încât ax+bn=1. Aplicând surjecţia canonică rezultă $\varphi(ax + bn) = \varphi(1) \Rightarrow \hat{a}\hat{x} + \hat{b}\hat{n} = \hat{1} \Rightarrow \hat{a}\hat{x} = \hat{1} \Rightarrow \hat{x}$ este inversabil în Z $_n$.

Consecinţă:

Inelul Z $_n$, n>1, conţine atâtea elemente inversabile câte numere naturale mai mici decât n şi prime cu n există, adică $\varphi(n)$ elemente, unde $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ este funcţia lui Euler.

Dacă $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, unde $p_1, p_2, ..., p_k$ sunt numere prime , atunci:

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Teoremă: Fie n$\in$**N**, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, $p_1, p_2, ..., p_k$ sunt numere prime.

Numărul elementelor nilpotente din Z_n este egal cu $\beta(n) = \dfrac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k}$.

Pentru a demonstra această teoremă se demonstrează lema urmă toare :

Lemă : Fie $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, (p_i sunt prime , distincte de α_i naturale) şi x din Z.

Următoarele afirmaţii sunt echivalente :

1) $\exists a \in \mathbf{N}$ cu $x^n \equiv 0$ (mod n) (adică $\hat{x}$ este nilpotent în Z_n).

2) x este multiplu de $p_1 p_2 ... p_k$.

Demonstraţia lemei :

$1 \Rightarrow 2$. Dacă $x^n \equiv 0$ (mod n) , atunci x^n se divide cu n şi de aici rezultă că x^n se divide cu fiecare $p_i, i = \overline{1,k}$ şi cum p_i este prim rezultă că x se divide cu p_i. Deoarece $p_1, p_2, ..., p_k$ sunt numere prime distincte, rezultă că x se divide cu produsul $p_1 p_2 ... p_k$.

$2 \Rightarrow 1$ Fie $x = s p_1 p_2 ... p_k$, $s \in \mathbf{Z}$. Notând cu $a = \max_{1 \le i \le k} a_i$ rezultă :

$x^a = s^a p_1^a ... p_k^a = n s^a p_1^{a-a_1} p_2^{a-a_2} ... p_k^{a-a_k} \Rightarrow x^a \equiv 0$ (mod n) şi astfel lema este demonstrată.

Din această lemă rezultă că numărul elementelor nilpotente din Z_n este egal cu numărul multiplilor de $p_1 p_2 ... p_k$ din mulţimea {0,1,2,...,(n-1)}, sau este egal cu numărul multiplilor de $p_1 p_2 ... p_k$ din mulţimea {1,2,...,n} , deoarece n ca şi 0 , este multiplu de $p_1 p_2 ... p_k$. Acest număr este :

$$\beta(n) = \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k} = p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 2} ... p_k^{\alpha_k - 1}$$

Aplicaţii :

1.Fie A mulţimea polinoamelor de forma :

$f = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X + ... + \hat{a}_p X^p, \hat{a}_p \neq \hat{0}$, $f \in Z_n[X]$ care au proprietatea că sunt inversabile în Z_n [X].

Atunci numărul elementelor mulţimii A este egal cu $\varphi(n)(\beta(n))^{p-1}(\beta(n) - 1)$.

2. Fie B mulţimea polinoamelor de forma :

$f = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X + ... + \hat{a}_p X^p$, $f \in Z_n[X]$, cu gradul lui f≤p şi f este inversabil în Z_n[X]. Atunci mulţimea B are un număr de elemente egal cu $\varphi(n)(\beta(n))^p$.

Soluţie : Se aplică 1 şi se observă că nu mai este necesară condiţia ca $\hat{a}_p \neq 0$, deci $\hat{a}_p$ ia $\beta(n)$ valori distincte.

3. Fie p un număr prim şi k un număr natural , k≥1. Să se determine numărul polinoamelor inversabile, de grad ≤ n din inelul $Z_{p^k}[X]$.

Soluţie : Din p număr prim rezultă că numărul elementelor inversabile din Z_{p^k}. este : $\varphi(p^k) = p^k\left(1 - \frac{1}{p}\right) = p^{k-1}(p-1)$, iar numărul elementelor nilpotente este :

$$\beta\left(p^k\right) = \frac{p^k}{p} = p^{k-1}.$$

Rezultă că numărul elementelor inversabile din $Z_{p^k}[X]$ este egal cu :

$$\varphi\left(p^k\right)\left(\beta\left(p^k\right)\right)^n = p^{k-1}(p-1)\left(p^{k-1}\right)^n = (p-1)p^{(k-1)(n+1)}.$$

4. Fie M mulţimea polinoamelor f din $Z_{18}[X]$ şi f inversabil în $Z_{18}[X]$.
Să se determine numărul elementelor mulţimii dacă:

a) gradul lui f≤4 ;
b) gradul lui f=4 ;

Soluţie : Numărul elementelor inversabile din $Z_{18}[X]$ este egal cu :

$\varphi(18) = 18\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 18 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 6$.

Numărul elementelor nilpotente este : $\beta(18) = \frac{18}{2 \cdot 3} = 3$.

a) Numărul elementelor mulţimii M este egal cu $\varphi(18)(\beta(18))^4 = 486$.
b) Numărul elementelor mulţimii M este egal cu $\varphi(18)(\beta(18))^3(\beta(18) - 1) = 324$.

5. Să se determine numărul polinoamelor inversabile, de grad ≤5 , din Z_{343}[X].

Soluţie : 343= 7^3, numărul elementelor inversabile din Z_{343} este egal cu :

$$\varphi(7^3) = 7^3\left(1 - \frac{1}{7}\right) = 7^2 \cdot 6$$

Numărul elementelor nilpotente din Z_{343} este egal cu :

$$\beta(7^3) = \frac{7^3}{7} = 7^2 .$$

Rezultă că numărul polinoamelor, de grad ≤ 5, din $Z_{343}[X]$ este egal cu :

$$\varphi\left(7^3\right)\left(\beta\left(7^3\right)\right)^5 = 7^2 \cdot 6 \cdot \left(7^2\right)^5 = 6 \cdot 7^{12}$$

Bibliografie

1. C. Năstăsescu , C. Niţă, M. Brandiburu, D. Joiţa - Exerciţii şi probleme de algebră , Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1992.

2. C. Năstăsescu , M. Ţena , G. Andrei , I. Otărăşanu – Probleme de structuri algebrice, Editura Academica , 1988.

3. M. Becheanu, C. Niţă , Mirela Ştefănescu, A. Dinca, I. Purdea, I. D. Ion , N. Radu, C. Vraciu- Algebră pentru perfecţionarea profesorilor, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti.

Motto:

"Viaţa asta-i bun pierdut
Când n-o trăieşti cum ai fi vrut! "

George Coşbuc

Un algoritm general pentru ridicarea la putere a matricelor de ordinul 2

NECULAI STANCIU[1]

Abstract. Square matrices can be multiplied by themselves repeatedly in th e same way that ordinary numbers can. This repeated multiplication can be described as a power of the matrix. The article presents a method for power two of matrix.
Keywords: matrix multiplication
MSC: 15-XX, 11C20, 15A24 .

[1] Prof. , Şc."George Emil Palade", Buzău

Dacă $A \in M_n(C)$ iar $k \in N$ se pune problema de a găsi elementele matricei A^k Astfel de probleme sunt propuse adesea la examene, concursuri sau în reviste de profil.În cele ce urmează indicăm un algoritm general destinat re zolvării(rafinării) acestei probleme pentru $n = 2$.

Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, pentru găsirea elementelor matricei A^n (vezi [3],[4],[5],[6])se parcurg următoarele trei etape :

a.Se rezolvă ecuaţia caracteristică, $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + D = 0$, (unde $tr(A) = a + d, D = \det(A) = ad - bc$) şi se determină *spectrul matricei* A (*mulţimea valorilor proprii ale matricei* A), $\sigma_A = \{\lambda_1, \lambda_2\} \subset C$.

b. Se notează $v_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1}, \lambda_2 \neq \lambda_1 \\ n\lambda_1^{n-1}, \lambda_2 = \lambda_1 \end{cases}$

c. Se aplică formula (1) $A^n = v_n A - Dv_{n-1} I_2, n \in N$.

*Demonstraţie.*Se procedează prin inducţie după n.Deoarece λ_1, λ_2 (valorile proprii ale matricei A) sunt rădăcinile polinomului $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + D$, rezultă $v_0 = 0, v_1 = 1, v_2 = tr(A)$, deci formula (1) este verificată pentru $n = 1$şi de asemenea pentru $n = 2$.Presupunând că formula (1) este adevărată pentru primele n numere naturale, găsim

$$A^{n+1} = v_n A^2 - Dv_{n-1}A = v_n(tr(A)A - DI_2) - Dv_{n-1}A = (v_n tr(A) - Dv_{n-1})A - Dv_n I_2 = v_{n+1}A - Dv_n I_2$$

ceea ce completează demonstraţia formulei (1).

Urmează ca în numerele următoare ale revistei electronice MateI nfo.ro să vin cu :

- un algoritm pentru $n = 3$;
- o metodă generală relativ „nouă”, şi
- aplicaţii practice.

BIBLIOGRAFIE

[1] S. Aniţa, *Unele metode de ridicare la putere a matricilor de ordinul 3* , G.M. 1 / 1983.
[2] S. Cremarenco, *În legătură cu puterile matricilor pătratice de ordinul 3* , G.M. 6 / 1982.
[3] Gh. Ghiţă, *O metodă de ridicare la putere a matricilor* , G.M. 5-6 / 2004.
[4] L. Lupaş, A. Lupaş, *Probleme de algebră*, Editura Gil, Zalău, 2001.
[5] M.E. Panaitopol, *Ridicarea la putere a matricilor pătratice de ordinul doi* , G.M. 3 / 1975.
[6] C. Năstăsescu, M. Ţena, *Calculul puterilor unor elemente dintr-un inel necomutativ*, G.M 3 / 1983.
[7] V. Pop, ş.a, *Matematică pentru grupele de performanţă* , Editura Dacia Educaţional, Cluj-Napoca, 2004.

Câteva probleme rezolvate prin metoda analitică

Prof. Laura Radu
Colegiul Tehnic de Alimentaţie şi Turism „Dumitru Moţoc”, Galaţi

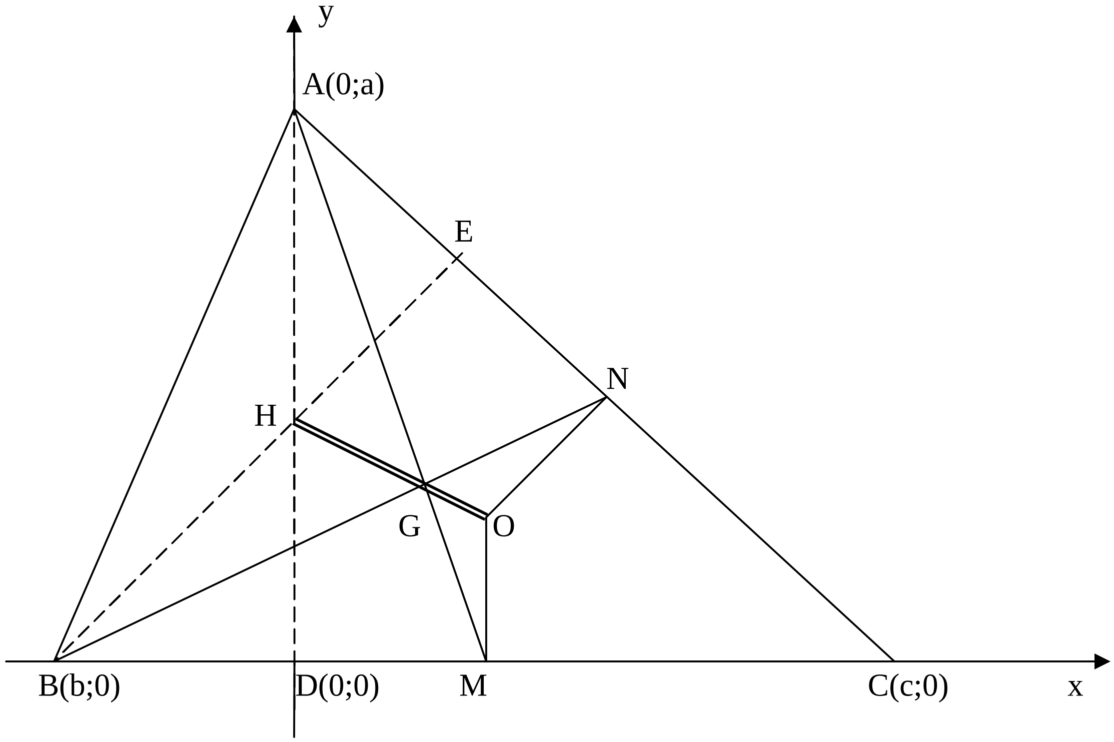
Geometria analitică sau geometria carteziană reprezintă o modalitate de abordare a geometriei cu ajutorul algebrei. Ataşând figurilor geometrice sisteme de axe de coordonate, acestea vor putea fi definite cu ajutorul ecuaţiilor sau inecuaţiilor, iar rezolvarea problemelor se va face algebric.

Problema 1

Fie ABC un triunghi oarecare. Să se arate că ortocentrul H, centrul de greutate G şi centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC sunt coliniare (dreapta lui Euler).

Demonstraţie:

Construim înălţimile AD şi BE, medianele AM şi BN şi mediatoarele segmentelor BC şi AC. În planul triunghiului fixăm un reper cartezian cu centrul în punctul D şi drept axe de coordonate se aleg dreptele BC şi AD.



Înălţimea AD are ecuaţia $x=0$. Calculăm panta dreptei AC : $m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=-\frac{a}{c}$ şi ştiind că BE ⊥ AC rezultă că $m_{BE}=\frac{c}{a}$.

Se determină ecuaţia înălţimii din B : $y-0=\frac{c}{a}(x-b) \Leftrightarrow cx-ay-bc=0$.

Se intersectează înălţimile AD şi BE şi se determină coordonatele ortocentrului .

$$\begin{cases} x=0 \\ cx-ay-bc=0 \end{cases} \Rightarrow H\left(0;-\frac{bc}{a}\right).$$

Aflăm coordonatele centrului de greutate :

$$\begin{cases} x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{b+c}{3} \\ y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{a}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{b+c}{3};\frac{a}{3}\right).$$

Aflăm coordonatele punctului O .

Coordonatele mijloacelor segmentelor BC şi AC sunt : $M\left(\frac{b+c}{2};0\right)$ si $N\left(\frac{c}{2};\frac{a}{2}\right)$.

Mediatoarea OM are ecuaţia : $x=\frac{b+c}{2}$. Ştiind că $m_{AC}=-\frac{a}{c}$, ON ⊥ AC , rezultă că $m_{ON}=\frac{c}{a}$.

Atunci ecuaţia mediatoarei ON este : $y-\frac{a}{2}=\frac{c}{a}\left(x-\frac{c}{2}\right) \Rightarrow 2cx-2ay+a^2-c^2=0$.

Intersectăm cele două mediatoare şi obţinem :

$$\begin{cases} x=\frac{b+c}{2} \\ 2cx-2ay+a^2-c^2=0 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{a^2+bc}{2a} \Rightarrow O\left(\frac{b+c}{2};\frac{a^2+bc}{2a}\right).$$

Deci , avem : $H\left(0;-\frac{bc}{a}\right)$, $G\left(\frac{b+c}{3};\frac{a}{3}\right)$ si $O\left(\frac{b+c}{2};\frac{a^2+bc}{2a}\right)$.

Deoarece

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{bc}{a} & 1 \\ \frac{b+c}{3} & \frac{a}{3} & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{a^2+bc}{2a} & 1 \end{vmatrix}=\frac{b+c}{3}\cdot\frac{a^2+bc}{2a}-\frac{bc}{a}\cdot\frac{b+c}{2}-\frac{a}{3}\cdot\frac{b+c}{2}+\frac{bc}{a}\cdot\frac{b+c}{3}=$$

$$=\frac{b+c}{2}\left(\frac{a^2+bc}{3a}-\frac{bc}{a}\right)+\frac{b+c}{3}\left(\frac{bc}{a}-\frac{a}{2}\right)=\frac{b+c}{2}\cdot\frac{a^2-2bc}{3a}+\frac{b+c}{3}\cdot\frac{2bc-a^2}{2a}=$$

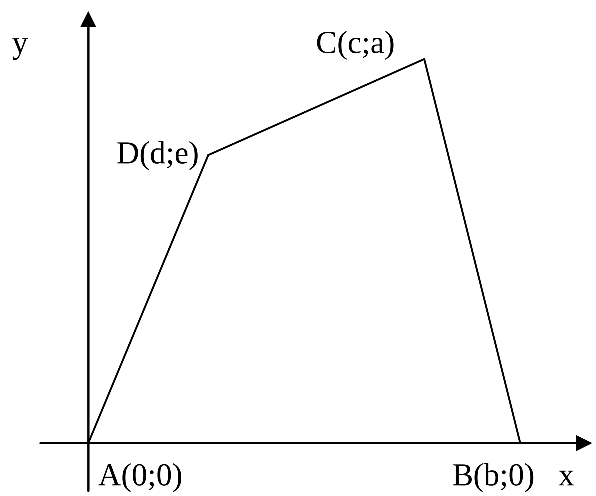
$$=\frac{(b+c)(a^2-2bc+2bc-a^2)}{6a}=0$$

rezultă că punctele H, G şi O sunt coliniare .

Problema 2

Fie ABCD un patrulater situat în planul α . Să se afle locul geometric al punctelor M din planul α cu proprietatea că MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2 . Discuţie .

Soluţie:



Considerăm un sistem de axe de coordonate în planul α , cu originea în A iar AB axa absciselor .
Avem A(0,0), B(b,0) , C(c,a) şi D(d,e) .
Fie M(x,y) un punct din planul α , punct care aparţine locului geometric .
Calculăm :

$MA^2 = x^2 + y^2$, $MB^2 = (x-b)^2 + y^2$

$MC^2 = (x-c)^2 + (y-a)^2$ şi

$MD^2 = (x-d)^2 + (y-e)^2$

Deoarece M verifică condiţia din enunţ, rezultă că :

$$x^2 + y^2 + (x-c)^2 + (y-a)^2 = (x-b)^2 + y^2 + (x-d)^2 + (y-e)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 2ay + a^2 = x^2 - 2bx + b^2 + y^2 + x^2 - 2dx + d^2 + y^2 - 2ey + e^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2(b+d-c)x + 2(e-a)y + \left(a^2 + c^2 - b^2 - d^2 - e^2\right) = 0 \ .$$

Se observă că locul geometric al punctelor M este o dreaptă .

Discuţie:

∗ Dacă $e = a$ (AB// CD) şi $b + d - c \neq 0$, atunci locul geometric este o dreaptă paralelă cu axa Oy şi are ecuaţia $x = \dfrac{b^2 + d^2 - c^2}{2(b+d-c)}$.

∗ Dacă $b + d - c = 0$ şi $e \neq a$ obţinem o dreaptă paralelă cu axa Ox şi de ecuaţie

$$y = \frac{b^2 + d^2 + e^2 - a^2 - c^2}{2(e-a)} \quad \text{sau} \quad y = \frac{(b+d)^2 - 2bd + e^2 - a^2 - c^2}{2(e-a)} \quad \text{sau} \quad y = \frac{e^2 - a^2 - 2bd}{2(e-a)} \ .$$

∗ Dacă $b + d - c = 0$ şi $e = a$ ecuaţia devine $0 = -2bd$, $b \neq 0$.
Pentru $d \neq 0$ locul geometric se reduce la mulţimea vidă .

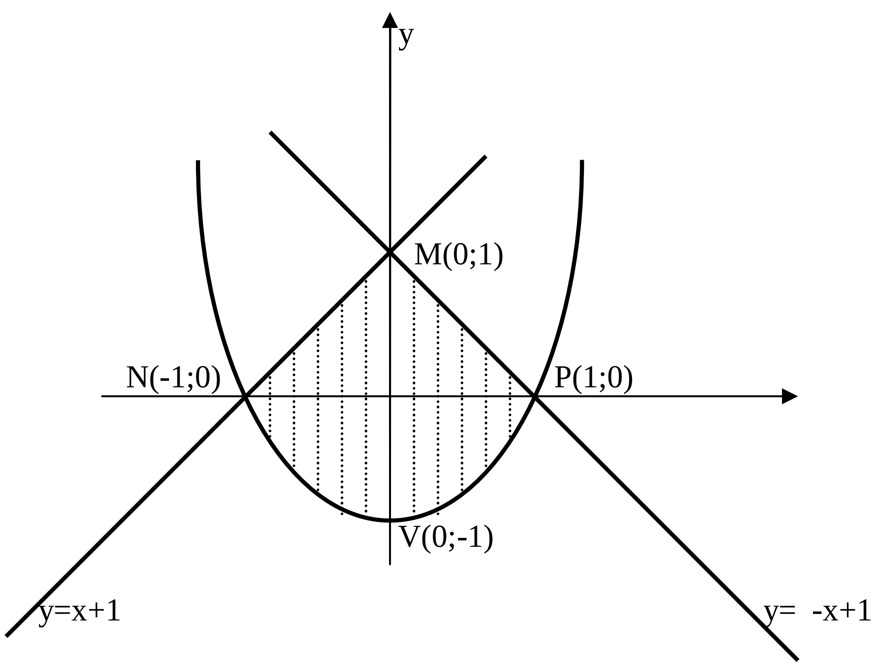
Pentru $d = 0$ rezultă $b = c$, patrulaterul ABCD va fi dreptunghi iar locul geometric căutat va fi tot planul α .

Problema 3

Fie inegalităţile $y - x \leq 1$, $y + x \leq 1$ şi $y \geq x^2 - 1$. Să se determine perechile de numere reale (x, y) pentru care y este maxim sau minim .

Soluţie:

Fie mulţimile $A = \{(x, y) \in R^2 / y - x - 1 \leq 0\}$, $B = \{(x, y) \in R^2 / y + x - 1 \leq 0\}$, $C = \{(x, y) \in R^2 / x^2 - y - 1 \leq 0\}$.
Reprezentăm grafic cele trei mulţimi .
Mulţimile A si B sunt două semiplane iar C este interiorul parabolei $y = x^2 - 1$.



Mulţimea A∩B∩C este suprafaţa bordată de segmentele MN, MP şi arcul de parabolă $y = x^2 - 1$ pentru $x \in [-1;1]$, împreună cu frontiera .
Punctul (x;y) ∈ A∩B∩C pentru care y este maxim este M(0;1) iar pentru care y este minim este V(0;-1) .

Problema 4

Se dă un cerc *C* si o dreaptă oarecare Δ. Fie M un punct mobil pe cerc şi N piciorul perpendicularei din M pe Δ. Se cere locul geometric al punctului I, mijlocul segmentului MN.

Soluţie:

Alegem centrul cercului ca origine a sistemului de axe de coordonate, perpendiculara din centru pe dreapta Δ ca axa Ox, iar ca unitate de măsură luăm raza cercului. Considerăm punctul A(2a;0) ca fii nd intersecţia dreptei Δ cu axa Ox şi x=2a va fi ecuaţia dreptei Δ.Fie M($\alpha;\beta$) punctul mobil al cercului C. Atunci avem:

$$\alpha^2+\beta^2=1. \qquad (1)$$

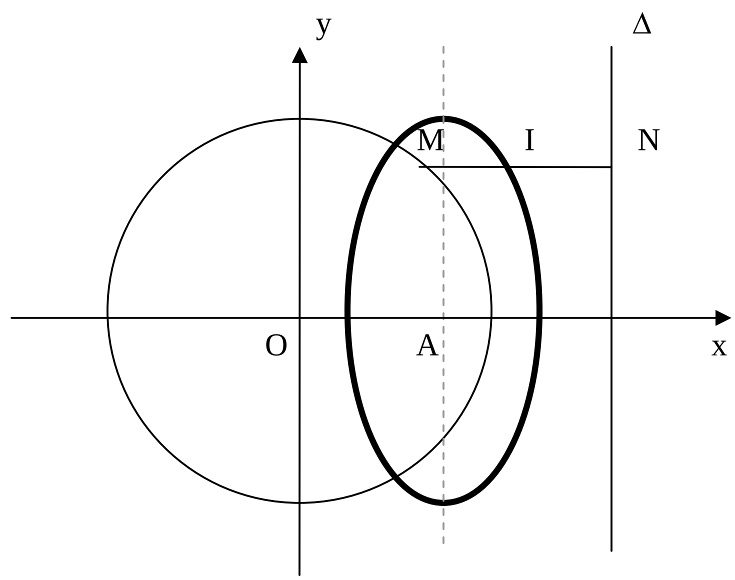
În acest caz avem N($2a,\beta$), iar coordonatele punctului I vor fi date de

$$x=\frac{2a+\alpha}{2} \text{ şi } y=\beta . \qquad (2)$$

Ecuaţia locului se obţine eliminând pe α şi β între relaţiile (1) şi (2):

$$4(x-a)^2+y^2-1=0 \qquad (3)$$

care reprezintă o elipsă cu centrul în A(a;0), axa mare paralela cu dreapta Δ şi egală cu diametrul cercului, iar axa mică jumătate din axa mare.

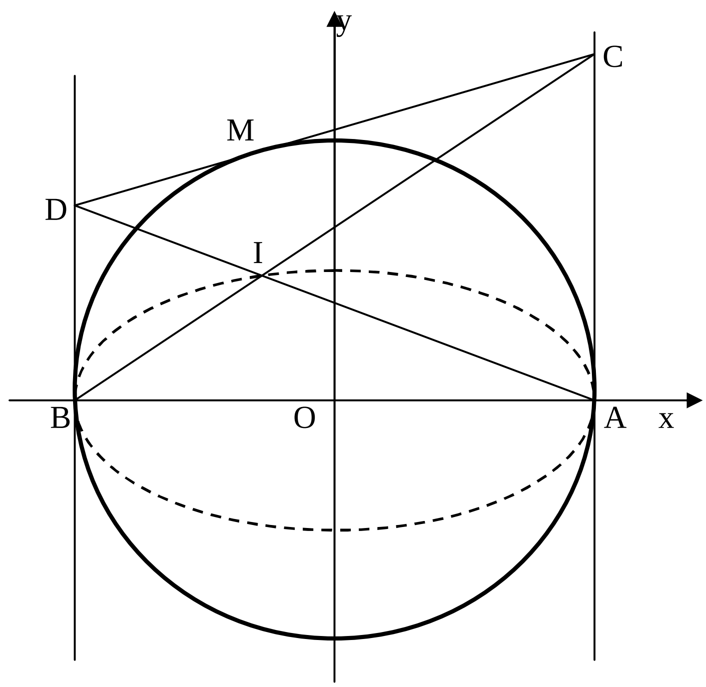


Dreapta Δ poate avea orice poziţie faţă de cerc, ea poate trece chiar şi prin centrul cercului.
Elipsa îşi păstrează forma şi mărimea , schimbându -şi numai poziţia în funcţie de distanţa dreptei Δ faţă de centrul cercului.

Problema 5

Fie AB un diametru al unui cerc de centru O şi M un punct mobil pe acest cerc. Tangenta în M taie tangentele duse prin A şi B respectiv în punctele C şi D. Se cere locul geometric al punctului I care reprezintă intersecţia diagonalelor AD şi BC ale trapezului ABDC.

Soluţie:



Ataşăm cercului un sistem de axe ortogonale cu originea în centrul cercului iar axa absciselor fiind dreapta suport a segmentului AB.
Alegem ca unitate de măsură raza cercului.
Ecuaţia cercului este :

$$x^2 + y^2 = 1 \ . \qquad (1)$$

Dacă $M(\alpha, \beta)$ este punctul mobil de pe cerc , atunci avem:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1, \qquad (2)$$

iar tangenta la cerc dusă prin punctul M are ecuaţia :

$$\alpha x + \beta y - 1 = 0, \qquad (3)$$

obţinută din ecuaţia cercului prin dedublare.
Cele patru vârfuri ale trapezului vor fi:

$$A(1,0),\ B(-1,0),\ C\left(1, \frac{1-\alpha}{\beta}\right),\ D\left(-1, \frac{1+\alpha}{\beta}\right).$$

Ordonatele punctelor D şi C s-au determinat din condiţia de apartenenţă a acestora la tangenta dusă prin M la cerc (înlocuirea absciselor în relaţia (3)).
Coordonatele punctului I se obţin din intersecţia dreptelor BC şi AD.

$$\text{AD:} \quad \frac{1+\alpha}{\beta}x + 2y - \frac{1+\alpha}{\beta} = 0$$

$$\text{BC:} \quad \frac{1-\alpha}{\beta}x - 2y + \frac{1-\alpha}{\beta} = 0$$

Rezolvând sistemul format din cele două ecuaţii , obţinem $x = \alpha$ şi $y = \dfrac{1-\alpha^2}{2\beta}$. (4)

Deci $I(x, y) = I\left(\alpha, \dfrac{1-\alpha^2}{2\beta}\right)$.

Eliminând α si β din relaţiile (2) şi (4) rezultă :

$$x^2 + \left(\frac{1-x^2}{2y}\right)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2y^2 + 1 - 2x^2 + x^4 - 4y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2\left(x^2-1\right) + \left(x^2-1\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \quad (x^2-1)(4y^2+x^2-1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+4y^2-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{4}+y^2=\frac{1}{4}$, ceea ce reprezintă ecuaţia unei elipse.

Asadar, locul geometric al punctului I este elipsa de ecuaţie $\frac{x^2}{4}+y^2=\frac{1}{4}$.

Problema 6

Se dau două drepte a şi b, perpendiculare una pe alta şi două puncte A şi B situate pe dreapta b. Dintr-un punct P luat pe dreapta a se duc dreptele PA şi PB. Se cere să se afle locul punctului de intersecţie a dreptei PB cu perpendicular ape PA dusă prin punctual A, când P descrie a.

Soluţie:

Se alege dreapta b ca axă a absciselor şi dreapta a ca axă a ordonatelor, pe care luăm punctele A(a;0), B(b;0) şi P(0;λ), λ fiind un parametru variabil.
Ecuaţia dreptei PA este:

$$a(y-\lambda)+\lambda x=0, \qquad (1)$$

cea a dreptei AM, M fiind un punct al locului, este:

$$\lambda y = a(x-a) \qquad (2)$$

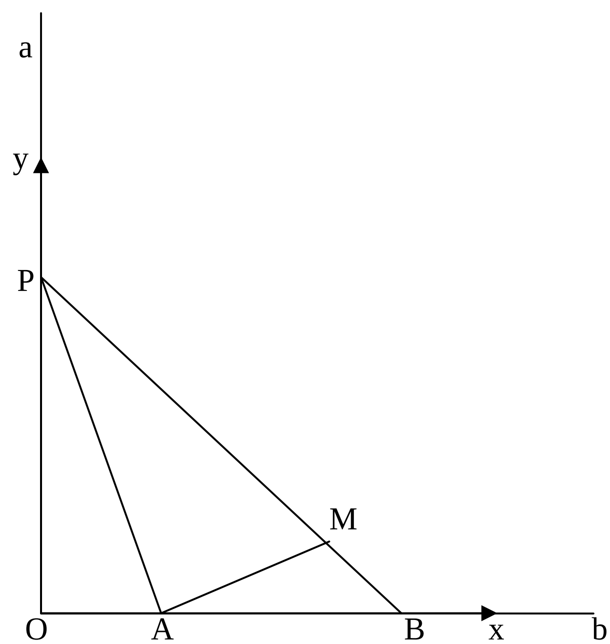
iar ecuaţia dreptei PB:

$$b(y-\lambda)+\lambda x=0. \qquad (3)$$

Eliminând parametrul λ între ecuaţiile (2) şi (3) se obţine imediat ecuaţia locului:

$$ax^2+by^2-a(a+b)x+a^2b=0. \qquad (4)$$

Această ecuaţie reprezintă o conică cu centrul în mijlocul segmentului AB şi având pe [AB] ca axă mare sau transversă, după cum conica este o elipsă sau o hiperbolă.



Ecuaţia (4) poate reprezenta:

I. Elipsă, când avem a>0, b>0 sau a<0, b<0, adică atunci când punctele A şi B sunt de aceeaşi parte a dreptei a.
II. Hiperbolă, când a>0, b<0 sau a<0, b>0, adică atunci când A şi B sunt deoparte şi de alta a dreptei a.
Caz particular: hiperbola este echilateră când a = -b, adică atunci când a trece prin mijlocul segmentului AB.
III. Parabolă, în cazul în care dreapta PB este paralelă cu axa Ox, deci b $\to \pm\infty$. Ecuaţia acestei parabole este $y^2=a(x-a)$.
IV. O dreaptă : axa Ox sau axa Oy, după cum punctul A, respectiv punctul B, coincide cu originea.

Bibliografie:
1. *Probleme din revista Gazeta Matematică* - cd.1037;
2. Suvorov I. F. , *Curs de matematici superioare* , Ed. Tehnică, 1955 .

Motto:

’’Ce urma lasa soimii'n zbor ?
Ce urma pestii'n apa lor ?
Sã fii cât muntii de voinic,
Ori cât un pumn sã fii de mic,
Cararea mea si-a tuturor
E tot nimic ! “

George Coşbuc

TEOREMA BEATTY & O EXTINDERE A UNEI PROBLEME DE CONCURS

ROXANA MIHAELA STANCIU[1]
&
NECULAI STANCIU[2]

Matematicianul american *Sam Beatty* a publicat în $[1]$ următoarea problemă: “Dacă a este un număr iraţional, atunci şirurile $m(1+a), m=1,2,...$ şi $n(1+a^{-1}), n=1,2,...$ sunt disjuncte, dar reunite conţin un număr şi numai unul din fiecare interval $(k, k+1), k=1,2,3,...$”

[1] Prof., Liceul cu Program Sportiv “Iolanda Balaş S otter”, Buzău
e-mail: roxanastnc@yahoo.com
[2] Prof., Şcoala “George Emil Palade”, Buzău

Problema a fost rezolvată de *Ostrowski* şi *Aitken* în $[3]$ iar apoi generalizată de *Lambeck* şi *Moser* în $[2]$.La adresa $[5]$se găsesc liber două variante de demonstraţie a teoremei *Beatty*.Mai târziu, a mai fost generalizată de *Holshouser* şi *Reiter* pentru şirurile de funcţii continue (vezi $[4]$).Prezentăm mai jos ultima variantă a demonstraţiei (2006) care se poate consulta liber la adresa $[6]$.

Teorema Beatty. Dacă $a,b\in R-Q$ astfel încât $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ şi $(a_n)_{n>0}=na$, $(b_n)_{n>0}=nb$ atunci exact un element din $\{(a_n)_{n>0}\}\cup\{(b_n)_{n>0}\}$ se găseşte în intervalul $(N,N+1)$.

Demonstraţie: Observăm că $a_n\neq b_m$(în caz contrar $na=mb\Rightarrow b=1+\frac{n}{m}\in Q$, contradicţie).Vom demonstra că $\forall N\geq 1$, exact un element din $\{(a_n)_{n>0}\}\cup\{(b_n)_{n>0}\}$ se găseşte în intervalul $(N,N+1)$.Fie $N\geq 1$ şi notăm cu $S(N)$ numărul elementelor din $\{a_n\}\cup\{b_n\}$ mai mici decât N .

$a_n<N\Leftrightarrow na<N\Leftrightarrow n<\frac{N}{a}$.Deci există $\left[\frac{N}{a}\right]$ elemente din $\{a_n\}$ mai mici ca N şi analog $\left[\frac{N}{b}\right]$ elemente din $\{b_n\}$.Din relaţiile:

$$\begin{cases}\frac{N}{a}-1<\left[\frac{N}{a}\right]<\frac{N}{a}\\ \frac{N}{b}-1<\left[\frac{N}{b}\right]<\frac{N}{b}\end{cases}$$

adunate membru cu membru obţinem :

$N-2<S(N)<N\Rightarrow S(N)=N-1$.Rezultă că numărul elementelor din $\{a_n\}\cup\{b_n\}$ aflate în intervalul $(N,N+1)$ este $S(N+1)-S(N)=1$.

Teorema Beatty.O variantă($[5]$**).**

Dacă $r,s\in R-Q$ astfel încât $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$ şi $A=[nr]_{n\geq 1}$, $B=[ns]_{n\geq 1}$, atunci A şi B realizează o partiţie a mulţimii N^*.

Demonstraţie.

I.presupunem prin reducere la absurd că $\exists j>0, j\in N, k,m\in N^*$ astfel încât $j\in A\cap B\Rightarrow\begin{cases}j\leq kr<j+1\\ j\leq ms\leq j+1\end{cases}\underset{j\neq 0}{\overset{r,s\in R-Q}{\Rightarrow}}$ că nu avem egalităţi, deci

$\begin{cases}j<kr<j+1\\ j<ms\leq j+1\end{cases}\Rightarrow\frac{j}{r}<k<\frac{j+1}{r}$ şi $\frac{j}{s}<m<\frac{j+1}{s}$ care adunate membru cu membru dau $j<k+m<j+1$, contradicţie(nu putem avea un număr natural între două numere naturale consecutive).

II.presupunem prin reducere la absurd $j\notin A$ şi $j\notin B$.Deci $\exists j>0, j\in N, k,m\in N^*$

astfel incât $\begin{cases} kr < j \\ j+1 \le (k+1)r \\ ms < j \\ j+1 \le (m+1)s \end{cases}$, deorece $j \neq 0$, iar $r,s \in R-Q$ - în precedentele nu avem egalităţi.Rezultă:

$$\begin{cases} kr < j \\ j+1 < (k+1)r \\ ms < j \\ j+1 < (m+1)s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < \frac{j}{r} \\ \frac{j+1}{r} < k+1 \\ m < \frac{j}{s} \\ \frac{j+1}{s} < m+1 \end{cases}$$ care adunate membru cu membru dau $k+m < j$ şi $j+1 < k+m+2$ .Rezultă $k+m < j < k+m+1$, iarăşi contradicţie.

Din I. şi II. teorema este demonstrată.

Teorema Beatty.Altă variantă($[5]$).

Dacă $r,s \in R-Q$ astfel încât $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$ şi $A=[nr]_{n\ge1}$, $B=[ns]_{n\ge1}$, atunci A şi B realizează o partiţie a mulţimii N^*.

Demonstraţie.

Se determină poziţia acupată de fracţiile $\frac{j}{r}$ şi $\frac{k}{s}$ ($j,k \in N^*$) aşezate în ordine crescătoare pe axa numerelor reale pozitive.

Se observă că $\frac{j}{r} \neq \frac{k}{s}$.

În caz contrar $\exists j,k \in N^*$ astfel încât $\frac{j}{r}=\frac{k}{s} \Rightarrow \frac{r}{s}=\frac{j}{k}, \frac{r}{s}=r(1-\frac{1}{r})=r-1 \in R-Q$, iar $\frac{j}{k} \in Q_+^\circ$, ceea ce este imposibil.Deci nu există două numere care să ocupe aceiaşi poziţie.

Pentru orice $\frac{j}{r}$, $\exists j$ numere astfel încât $\frac{1}{r} \le \frac{j}{r}$ şi $\left[\frac{js}{r}\right]$ numere astfel încât $\frac{k}{s} \le \frac{j}{r}$.Rezultă deci că poziţia lui $\frac{j}{r}$ în şir este $j+\left[\frac{js}{r}\right] = j+[j(s-1)]=[js]$.

Analog se obţine faptul că poziţia lui $\frac{k}{s}$ în şir este $[kr]$.Rezultă că orice număr natural nenul ocupă numai o poziţie în şir fiind de forma $[nr]$ sau $[ns]$ dar nu sub ambele forme.

Remarcă. Reciproca teoremei *Beatty* :

Dacă p şi q sunt două numere reale astfel încât $[np]$ şi $[nq]$ ocupă poziţii diferite(apar o singură dată în unul şi numai unul din şirurile $[np]_{n\geq 1}$ respectiv $[nq]_{n\geq 1}$) atunci p şi q sunt iraţionale şi verifică relaţia $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; este de asemenea adevărată.

Ţinând cont de teorema Beatty, Problema 2(autori Dan Ştefan Marinescu şi Viorel Cornea) – dată la concursul interjudeţean "Nicolae Păun" –Râmnicu Vâlcea, 2009 şi publicată în RMT, nr. 1 / 2010, pag 43 cu numărul O.IX.195([7]*) se poate extinde astfel:*

Dacă $a,b\in R-Q$ notăm cu $M(a,b)=\left\{[na]\cup[nb]\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1, n\in N^*\right.\right\}$.

a) Să se determine mulţimea $[n\varphi]$, mulţimea $[n\varphi^2]$ şi mulţimea $[n\varphi]\cup[n\varphi^2]$(unde φ este "numărul de aur").

b) Să se arate că $M(a,b)$ este infinită.

Soluţie.

a) Se obţine $[n\varphi]=\{1,3,4,6,8,9,11,12,14,16,17,19,...\}$- care se numeşte şirul *Wythoff* inferior, respectiv $[n\varphi^2]=\{2,5,7,10,13,15,18,20,23,26,28,31,34,36,39,41,44,47,...\}$- şirul *Wythoff* superior.Observăm că $[n\varphi]$ şi $[n\varphi^2]$ realizează o partiţie a mulţimii N^* (deoarece se verifică ipotezele teoremei *Beatty*: $\varphi,\varphi^2\in R-Q$, $\frac{1}{\varphi}+\frac{1}{\varphi^2}=1$).

$[n\varphi]\cup[n\varphi^2]=N^*$.

b) conform *Teoremei Beatty* mulţimile $\{[a],[2a],[3a],...\}$, $\{[b],[2b],[3b],...\}$ conţin fiecare număr natural o singură dată.Deci $M(a,b)=N^*$.

BIBLIOGRAFIE

[1] **Sam Beatty**, *Problema 3173*, American Mathematical Monthly, vol. 33, 1926, pag.159

[2] **J. Lambek şi L. Moser**, "*Inverse and Complementary Sequences o Natural Numbers*", American Mathematical Monthly, vol. 61, 1954, pag. 454

[3] **Ostrowski şi Aitken**, *Soluţia Problemei 3173*, American Mathematical Monthly, vol. 34, 1926, pag. 159

[4] **Holshouser, Arthur; Reiter, Harold** (2001). *"A generalization of Beatty's Theorem"*, Southwest Journal of Pure and Applied Mathematics vol. 2: pag. 24–29.

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Beatty_sequence

[6] http://planetmath.org/encyclopedia/ProofOfBeattysTheorem.html

[7] *Problema O.IX.195*, Revista de Matematică din Timişoara, nr. 1/2010, pag.43