Studiu privind metoda sintezei în rezolvarea problemelor de geometrie

Prof. Antohe Florin Mihai
Şcoala Nichita Stănescu Galaţi

1. Metoda sintezei în rezolvarea problemelor de calcul

Prin sinteză, o problemă de calcul se rezolvă astfel: se iau două date cunoscute ale problemei, între care există o legătură şi cu ajutorul lor se formulează o problemă care ne dă posibilitatea să calculăm valoarea unei a treia mărimi, care devine astfel cunoscută. Se iau apoi alte două cunoscute (fie date prin enunţul problemei, fie calculate anterior) şi cu ajutorul lor se formulează o problemă, care rezolvată ne dă valoarea unei noi mărimi. Se procedează în acest mod până la găsirea valorilor mărimilor ce se cer în problemă.

În cazul rezolvării avem grijă ca din două date cunoscute să calculăm valorile acelor mărimi care la rândul lor să fie legate de mărimile cunoscute din problemă şi să ne ajute, din aproape în aproape, la găsirea valorilor cerute.

2. Metoda sintezei în rezolvarea problemelor de demonstraţie

Într-o problemă de demonstraţie la geometrie se consideră o figură F, despre care se spune că posedă proprietăţile α şi se cere să se demonstreze că în acest caz mai posedă şi proprietăţile β.

Propoziţia care afirmă că figura F posedă proprietăţile α, pe care o notăm cu A, poartă numele de *ipoteză*, iar propoziţia care afirmă că figura F posedă proprietăţile β şi pe carele notăm cu B, poartă denumirea de *concluzie*. Cu alte cuvinte, într-o problemă de demonstraţie se cere să arătăm că dacă pentru o figură F este adevărată proprietatea A (ipoteza), este adevărată şi B (concluzia).

La rezolvarea unei probleme de demonstraţie se procedează astfel: se porneşte de la propoziţia A şi se caută o altă propoziţie C, pe care o implică propoziţia A. Cu alte cuvinte ţinând seama că figura F are proprietăţile α, căutăm să descoperim şi alte proprietăţi γ, iar propoziţia care afirmă că figura F are proprietăţile γ, o notăm cu C.

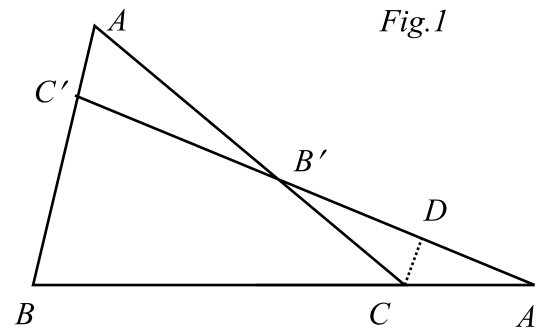
Căutăm mai departe o propoziție P, pe care s-o implice propoziția A şi C şi aşa mai departe până când propozițiile astfel găsite implică propoziția B (concluzia).

Exemplu (teorema lui Menelaus). *Fie ABC un triunghi* şi *fie A', B', C' trei puncte coliniare distincte astfel că $A'\in BC$, $B'\in AC$, $C'\in AB$. Să se arate că:*

$$\frac{\| A'B \|}{\| A'C \|}\cdot\frac{\| B'C \|}{\| B'A \|}\cdot\frac{\| C'A \|}{\| C'B \|}=1$$

(1)

Fig.1



Demonstrație. Fie triunghiul ABC şi A', B', C' punctele unede o transversală intersectează laturile lui (fig 1). Trebuie să arătăm că este adevărată relația (1).

a) Analizând figura, observăm că ipoteza nu ne dă suficiente date pentru apune în evidență relația cerută. Fiind vorba despre rapoarte şi legăturile ce trebuiesc stabilite între ele constituie o indicație că trebuie să plecăm de la cunoştințe referitoare la asemănarea treiunghiurilor. Pe figură nu sunt triunghiuri asemenea, aceasta înseamnă că trebuie să le construim. Ducând din *C* paralela *(CD)* la latura *(AB)*, observăm că s-au format mai multe triunghiuri asemenea.

b) Triunghiurile $A'CD$ şi $BA'C'$ fiind asemenea, potrivit teoremei fundamentale a asemănării, putem scrie:

$$\frac{\| A'B \|}{\| A'C \|}=\frac{\| BC' \|}{\| CD \|}$$

(2)

c) Din asemănarea triunghiurilor $CB'D$ şi $C'B'A$ putem scrie:

$$\frac{\| B'C \|}{\| B'A \|}=\frac{\| CD \|}{\| C'A \|}$$

(3)

Înmulțind egalitățile (1), (2) şi (3) membru cu membru obținem:

$$\frac{\| A'B \|}{\| A'C \|} \cdot \frac{\| B'C \|}{\| B'A \|} = \frac{\| BC' \|}{\| CB \|} \cdot \frac{\| CD \|}{\| C'A \|} = \frac{\| BC' \|}{\| C'A \|}$$

Înmulțind egalitățile (4) cu raportul $\frac{\| C'A \|}{\| BC' \|}$ obținem:

$$\frac{\| A'B \|}{\| A'C \|} \cdot \frac{\| B'C \|}{\| B'A \|} \frac{\| C'A \|}{\| C'B \|} = \frac{\| BC' \|}{\| C'A \|} \cdot \frac{\| C'A \|}{\| C'B \|} = 1$$

Folosind tranzitivitatea relației de egalitate obținem relația (1) şi teorema este demonstrată.

TREI PROBLEME DE GEOMETRIE

Corneliu Mănescu-Avram

Această notă conține soluții alternative pentru trei probleme de concurs, soluțiile originale fiind date în bibliografie [1] [2].

1. Fie *O* centrul cercului circumscris unui triunghi *ABC*, *D* mijlocul laturii *AB* şi *E* centrul de greutate al triunghiului *ACD*. Să se demonstreze că dreptele *CD* şi *OE* sunt perpendiculare dacă şi numai dacă *AB* = *AC*.

Soluție : Folosim coordonatele complexe, alegem originea în *O* şi cercul circumscris triunghiului *ABC* drept cerc unitate. Triunghiul *ABC* este isoscel (*AB* = *AC*) dacă şi numai dacă piciorul înălțimii din *A* coincide cu mijlocul laturii *BC* :

$$\frac{a+b+c-\bar{a}bc}{2} = \frac{b+c}{2},$$

unde literele mici reprezintă afixele punctelor notate cu majuscule. Se obține $a^2 = bc$ (1).

Avem şi $d = \frac{a+b}{2}$, $e = \frac{a+c+d}{3} = \frac{3a+b+2c}{6}$. Coeficientul unghiular complex al dreptei *CD* este $m_{CD} = \frac{c-d}{\bar{c}-\bar{d}} = \frac{abc(a+b-2c)}{bc+ac-2ab}$ şi similar $m_{OE} = \frac{e}{\bar{e}} = \frac{abc(3a+b+2c)}{3bc+ac+2ab}$. Dreptele *CD* şi *OE* sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $m_{CD} + m_{OE} = 0$, deci

$$\frac{abc(a+b-2c)}{bc+ac-2ab} + \frac{abc(3a+b+2c)}{3bc+ac+2ab} = 0, \qquad (2)$$

condiție care este echivalentă cu (1), ceea ce se verifică simplu efectuând calculele.

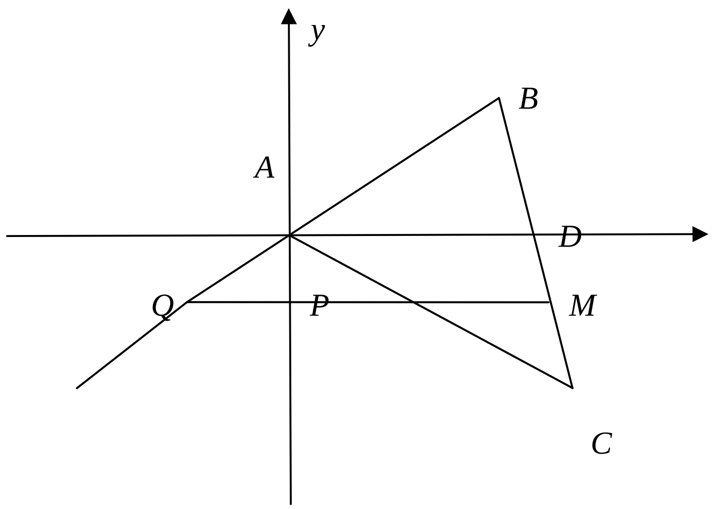
2. Fie triunghiul *ABC*, cu *AB* < *AC* şi *D* piciorul bisectoarei din *A*. Pe semidreptele (*CA* şi (*BA* luăm punctele *P*, respectiv *Q* astfel încât *CP* = *AB* şi *BQ* = *AC*. Notăm *M* intersecția dreptei *PQ* cu *BC*.

a) Arătați că dreptele *PQ* şi *AD* sunt paralele.

b) Arătați că *BD* = *MC*.

c) Arătați că *AD* este medie geometrică între *MP* şi *MQ*.

Soluție :



Alegem reperul cartezian cu originea în punctul A, bisectoarea AD ca axă a absciselor, cu D în partea pozitivă, axa ordonatelor astfel încât punctul B se află în primul cadran. Coordonatele punctelor sunt aşadar $A(0,0)$, $B(b,mb)$, $C(c,-mc)$, unde $0 < b < c$ şi $m > 0$. Euația dreptei BC este

$$(BC): \quad \frac{y+mc}{m(b+c)} = \frac{x-c}{b-c}.$$

Pentru $y = 0$ se obține $x_D = \frac{2bc}{b+c}$.

a) Dreptele PQ şi AD sunt paralele dacă şi numai dacă $y_P = y_Q$. Punctul P se află pe semidreapta (CA, deci $P(p,-mp)$, cu $p > 0$. Din $CP = AB$ se obține $(c-p)^2 = b^2$, de unde $p = c - b$. Similar, $Q(q,mq)$, cu $q < 0$ şi $(b-q)^2 = c^2$, de unde $q = b - c$. Avem aşadar $y_P = y_Q$.

b) Avem $y_M = m(b-c)$, iar din ecuația dreptei BC obținem $x_M = \frac{b^2+c^2}{b+c}$. Egalitatea $BD =$ $= MC$ are loc dacă şi numai dacă

$$\left(\frac{2bc}{b+c} - b\right)^2 + (mb)^2 = \left(\frac{b^2+c^2}{b+c} - c\right)^2 + [m(b-c)+mc]^2,$$

egalitate care este adevărată.

c) Egalitatea $AD^2 = MP \cdot MQ$ este echivalentă cu

$$\left(\frac{2bc}{b+c}\right)^2 = \left(\frac{b^2+c^2}{b+c} + b - c\right)\left(\frac{b^2+c^2}{b+c} - b + c\right),$$

care este adevărată.

3. Fie ΔABC, în care cercul înscris e tangent la BC în punctul D. Un cerc care trece prin B şi C e tangent la cercul înscris în E. Dacă I_A este centrul cercului exînscris corespunzător punctului A, arătați că D, E, I_A sunt coliniare.

Soluție : Alegem un reper cartezian cu originea în centrul cercului înscris, considerat drept cerc unitate, dreapta BC pe axa Ox şi punctul D pe axa Oy. Fie $B(b,-1)$, $C(c,-1)$, $b < 0$, $c > 0$. Dreapta AB are ecuația $y + 1 = m_1(x - b)$ (1) şi este tangentă cercului înscris $x^2 + y^2 = 1$ (2) dacă ecuația de gradul doi care se obține eliminând una dintre necunoscute (de exemplu pe y) între ecuațiile (1) şi (2)

$$x^2 + [m_1(x-b) - 1]^2 = 1$$

are rădăcină dublă, deci discriminantul ei este nul. Se deduce $m_1 = \frac{2b}{1-b^2}$ (3). Similar, ecuația dreptei AC este $y + 1 = m_2(x - c)$ (4), cu $m_2 = \frac{2c}{1-c^2}$ (5). Rezultă $A\left(\frac{b+c}{bc+1}, \frac{bc-1}{bc+1}\right)$.

Dreapta care trece prin origine şi prin punctul B (bisectoarea interioară a unghiului B) are coeficientul unghiular $\frac{-1}{b}$, deci coeficientul unghiular al bisectoarei exterioare a unghiului B este egal cu b, iar ecuația acestei bisectoare este $y + 1 = b(x - b)$. Similar, ecuația bisectoarei exterioare a unghiului C este $y + 1 = c(x - c)$, deci centrul cercului exînscris corespunzător punctului A (intersecția acestor bisectoare exterioare) este $I_A(b + c, bc - 1)$.

Un cerc oarecare prin B şi C are centrul O pe mediatoarea segmentului $[BC]$, deci $O\left(\frac{b+c}{2}, \lambda\right)$, unde λ este un parametru care se va determina din condiția ca acest cerc să fie tangent cercului înscris.

Dreapta EI_A are ecuația $y + 1 = mx$, $m = \frac{bc}{b+c}$ şi intersectează cercul înscris în punctul $D\left(\frac{2m}{m^2+1}, \frac{m^2-1}{m^2+1}\right)$. Punctul D aparține şi celui de-al doilea cerc dacă şi numai dacă $\lambda = -\frac{b^2+bc+c^2}{4bc}$. Pentru această valoare a lui λ cele două cercuri sunt tangente interior, deoarece distanța dintre centrele lor este egală cu diferența razelor. Lăsăm cititorului verificarea prin calcul a acestei afirmații.

Bibliografie

[1] (colectiv) Olimpiadele balcanice de matematică 1984 - 1994, Editura GIL, Zalău, 1996

[2] Concursul de matematică “Laurențiu Panaitopol” şi concursul IMAR, Bucureşti, 20 nov. 2010, www.concursul.info

[3] Liang-shin Hahn, Complex Numbers and Geometry, The Mathematical Association of America, 1994

Folosirea părții întregi

de ***Nicodim A. Negrea***

Regretatului institutor Gh. Ciocșan
(născut în jud.Argeș,profesor suplinitor de matematică în Apuseni,comuna Gîrda de Sus,jud.Alba, 1957-1959)

1. Problema 1.

La ce etaj (e) este situat apartamentul n , pe scara unui bloc de locuinte care are a apartamente la fiecare etaj (parterul este considerat etajul 0) ?

$Raspuns$: $e = \left[\frac{n-1}{a}\right]$,unde $[x]$ inseamna partea intreaga a lui x , $x \in R$.

2. Problema 2.(problema „bucatilor de lant”)

2.1.Problema 2.1

Cate taieturi-lipituri (t) sunt necesare pentru a forma o bucata liniara de lant , daca sunt 5 bucati de lant ,cu cate 3 zale fiecare ?

Aceasta problema este „populara”(se afla in culegeri ,in forma echivalenta).

$Solutie$:

Intre 5 bucati de lant asezate liniar sunt 4 spatii libere. Cu 4 taieturi-lipituri putem forma o bucata liniara de lant. Oare acesta este cel mai mic numar de taieturi-lipituri?! Numarul ar putea fi mai mic numai daca s-ar “desfiinta”cat mai multe bucati de lant (insa toate zalele din bucatile “desfintate” sa fie taiate si apoi lipite,intre bucati “nedesfintate”),deoarece numarul de intervale dintre bucati , dupa “desfiintare”, ar fi minim. In aceasta problema “desfiintam” o bucata prin 3 taieturi si cate o za o lipim intre doua bucati “nedesfiintate”. Am obtinut o singura bucata liniara de lant prin numai 3 (nu prin 4) taieturi-lipituri. Optimizarea s-a obtinut datorita ideii “desfintarii” unor (unei) bucati de lant .

Raspuns: $t = 3$.

2.2. Problema lantului (generalizarea lui 2.1)

Cate taieturi-lipituri (t) sunt necesare pentru a forma o bucata liniara de lant , daca sunt n bucati de lant , cu cate ,respectiv, $z_1 \leq z_2 \leq \cdots \leq z_n$ zale ?

$Solutie$:

$N^* = \{n \ : \ n \in N \ si \ n \geq 1\}$, N este multimea numerelor naturale .

Exista k , $k \in N^*$, $k \leq n-1$, astfel incat : $n-k-1 \leq z_1 + z_2 + \cdots + z_k$.

Este posibila una si numai una dintre urmatoarele doua situatii :

1. Exista numarul k cu proprietatile : $k \in N^*$ si $n-k-1 = z_1 + z_2 + \cdots + z_k$.

   Obtinem,in acest caz : $t = n-k-1$.

Deorece : taiem $z_1 + z_2 + \cdots + z_k$ zale, fiind astfel „desfiintate” primele k bucati si ramanand „nedesfiintate” ultimele $n-k$ bucati,intre bucatile ramase fiind $n-k-1$ intervale ; nr. acestor intervale = nr. de zale taiate, pentru ca in fiecare interval introducem 1 (o) za ,dintre cele taiate, si o lipim .

2. Nu este posibila situatia 1. si exista numarul k, care este cel mai mic numar cu proprietatile : $k \in N^*$, $k \leq n-1$ si $n-k-1 < z_1 + z_2 + \cdots + z_k$.

   Obtinem,in acest caz : $t = n-k$.

Se analizeaza doua cazuri :

Cazul 1^0 : $k = 1$;

$n-2<z_1$; $t=n-1=n-k$.
Cazul 2^0 : $k\geq 2$;
$n-k-2>z_1+z_2+\cdots+z_{k-1}$,deoarece , nu poate fi : $n-k-2\leq z_1+z_2+\cdots+z_{k-1}$(se analizeaza separat situatia "=",apoi"<").

„Desfiintam" primele $k-1$ bucati , prin taierea fiecarei zale din aceste bucati , apoi , din bucata a k –a taiem un numar de "$n-k-(z_1+z_2+\cdots+z_{k-1})$" zale ,deci „nu desfiintam" ,in totalitate, bucata a „k"–a ; apoi cate o za ,din cele $n-k$ zale taiate, o lipim intre ultimele bucati care au ramas . Constatam ca am format astfel o singura bucata de lant liniar ,prin $n-k$ taieturi-lipituri.

2.2.1. Caz particular : $z_1=z_2=\cdots=z_n=z$.

$Solutie$:

Este posibila numai una dintre urmatoarele doua situatii :

1.Daca exista numarul k cu proprietatile : $k\in N^*$, $k\leq n-1$ si $n-k-1=z_1+z_2+\cdots+z_k=kz$, atunci :

$k=\frac{n-1}{z+1}\in N$, $t=n-k-1=n-\frac{n-1}{z+1}-1$.

2. Daca numarul k este cel mai mic numar cu proprietatile : $k\in N^*$,

$k\leq n-1$ si $n-k-1<z_1+z_2+\cdots+z_k=kz$, atunci :

$k>\frac{n-1}{z+1}$, $k=\left[\frac{n-1}{z+1}\right]+1$ si $t=n-k=n-\left[\frac{n-1}{z+1}\right]-1$,

unde $[x]$ inseamna $partea\ intreaga\ a\ lui\ x$, $x\in R$.
Nu mai exista alte situatii ! Constatam ca in 1. si 2. am obtinut acelasi rezultat.

$Raspuns\ pentru$ 2.2.1. : $t=n-1-\left[\frac{n-1}{z+1}\right]$.

2.2.2. Caz particular : $z_1=1, z_2=2,\dots,z_n=n$.

$Solutie$:

Este posibila numai una dintre urmatoarele doua situatii :

1. Daca exista numarul k cu proprietatile : $k \in N^*$ si

$n-k-1 = z_1+z_2+\cdots+z_k = 1+2+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$, atunci :

$k^2+3k-2(n-1)=0$; $\Delta = 9+8(n-1) = 8n+1$;

$k_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{8n+1}}{2}$; $k_1 = \frac{-3+\sqrt{8n+1}}{2} \in N^*$;

$t = n-k-1 = n-1-\frac{\sqrt{8n+1}-3}{2}$.

2. Daca numarul k este cel mai mic numar cu proprietatile : $k \in N^*$,

$k \le n-1$ si $n-k-1 < z_1+z_2+\cdots+z_k = \frac{k(k+1)}{2}$, atunci :

$k^2+3k-2(n-1) > 0$; $\Delta = 9+8(n-1) = 8n+1$;

$k_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{8n+1}}{2}$; $k_2 < 0$, $k_1 > 0$

k	$-\infty$	k_2	k_1	$+\infty$
$k^2+3k-2(n-1)$	+++++++++++++++	0––– –––––––	0+++++++++++++	

;

$k > k_1$; $k = [k_1]+1$; $t = n-k = n-[k_1]-1 = n-1-\left[\frac{\sqrt{8n+1}-3}{2}\right]$.

Constatam ca in 1. si 2. am obtinut acelasi rezultat.

$Raspuns\ pentru$ 2.2.2. : $t = n-1-\left[\frac{\sqrt{8n+1}-3}{2}\right]$.

3. Aproximarea si rotunjirea numerelor reale

Pentru fiecare numar real, x ,exista un singur numar intreg, m , astfel ca :

$m \le x < m+1$.

Numarul m se numeste $partea\ intreaga$ a lui x .

Se noteaza :

$E: R \to Z$, $E(x) = [x] = m$.

Se obtin :

$[x] \le x < [x]+1$;

$$x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1 \ .$$

In toate cele ce urmeaza, fixam un numar natural oarecare , b , $b \geq 2$, pe care il vom numi $baza$ si un numar intreg , n ; numarul b^n il vom numi $ordin$.

Se constata :

n poate fi negativ sau zero sau pozitiv, dar intreg ; $b \geq 2$ si b este natural ;

$$b^n > 0 \ ;$$

$$[xb^{-n}] \leq xb^{-n} < [xb^{-n}] + 1 \ ;$$

$$[xb^{-n}]b^n \leq x < [xb^{-n}]b^n + b^n \ ;$$

R este multimea numerelor reale ; Q este multimea numerelor rationale.

Definim functiile :

$$\alpha_n : R \to Q \ , \alpha_n(x) = [xb^{-n}]b^n \ ;$$

$\alpha_n(x)$ o numim $aproximatia\ prin\ neadaus(neadaos)$ in baza b de ordinul b^n a lui x ; daca $b = 10$, $\alpha_n(x)$ o numim $aproximatia\ prin\ neadaus$ de ordinul b^n a lui x ;
functia α_n o numim $aproximarea\ prin\ neadaus$ in baza b de ordinul b^n a numerelor reale ; daca $b = 10$, α_n o numim $aproximarea\ prin\ neadaus$ de ordinul b^n a numerelor reale ;

$$A_n : R \to Q \ , A_n(x) = [xb^{-n}]b^n + b^n \ ;$$

$A_n(x)$ o numim $aproximatia\ prin\ adaus$ in baza b de ordinul b^n a lui x;
daca $b = 10$, $A_n(x)$ o numim $aproximatia\ prin\ adaus$ de ordinul b^n a lui x ;
functia A_n o numim $aproximarea\ prin\ adaus$ in baza b de ordinul b^n a numerelor reale ; daca $b = 10$, A_n o numim $aproximarea\ prin\ adaus$ de ordinul b^n a numerelor reale .

Se constata :

$$[-xb^{-n}] \leq -xb^{-n} < [-xb^{-n}] + 1 \ ;$$

$$-[-xb^{-n}]b^n - b^n < x \leq -[-xb^{-n}]b^n \ .$$

Definim functiile :

$\alpha_n{}^* : R \to Q$, $\alpha_n{}^*(x) = -[-xb^{-n}]b^n - b^n$;
$\alpha_n{}^*(x)$ o numim $aproximatia\ prin\ lipsa$ in baza b de ordinul b^n a lui x ;
daca $b = 10$,$\alpha_n{}^*(x)$ o numim $aproximatia\ prin\ lipsa$ de ordinul b^n a lui x ;
functia $\alpha_n{}^*$ o numim $aproximarea\ prin\ lipsa$ in baza b de ordinul b^n a numerelor reale ; daca $b = 10$, $\alpha_n{}^*$ o numim $aproximarea\ prin\ lipsa$ de ordinul b^n a numerelor reale ;

$A_n{}^* : R \to Q$, $A_n{}^*(x) = -[-xb^{-n}]b^n$;
$A_n{}^*(x)$ o numim $aproximatia\ prin\ nelipsa$ in baza b de ordinul b^n a lui x;
daca $b = 10$, $A_n{}^*(x)$ o numim $aproximatia\ prin\ nelipsa$ de ordinul b^n a lui x;functia $A_n{}^*$ o numim $aproximarea\ prin\ nelipsa$ in baza b de ordinul b^n a numerelor reale ; daca $b = 10$, $A_n{}^*$ o numim $aproximarea\ prin\ nelipsa$ de ordinul b^n a numerelor reale .

Definim functiile :

$\rho_n : R \to Q$, $\rho_n(x) = \alpha_n\left(x + \frac{1}{2}\right)$;
$\rho_n(x)$ o numim $rotunjimea$ in baza b de ordinul b^n a lui x ;
daca $b = 10$, $\rho_n(x)$ o numim $rotunjimea$ de ordinul b^n a lui x ;
functia ρ_n o numim $rotunjirea$ in baza b de ordinul b^n a numerelor reale ;
daca $b = 10$, ρ_n o numim $rotunjirea$ de ordinul b^n a numerelor reale ;

$\rho_n{}^* : R \to Q$, $\rho_n{}^*(x) = \alpha_n{}^*\left(x + \frac{1}{2}\right)$;
$\rho_n{}^*(x)$ o numim $rotunjimea\ duala$ in baza b de ordinul b^n a lui x ;
daca $b = 10$, $\rho_n{}^*(x)$ o numim $rotunjimea\ duala$ de ordinul b^n a lui x ;
functia $\rho_n{}^*$ o numim $rotunjirea\ duala$ in baza b de ordinul b^na numerelor reale ; daca $b = 10$, $\rho_n{}^*$ o numim $rotunjirea\ duala$ de ordinul b^n a numerelor reale .

B I B L I O G R A F I E

[1] Coman,Gh. , ***Analiză numerică***,Editura LIBRIS, Cluj , 1995

[2] Gussi,Gh. , Stănășilă,O. ,Stoica,T. **, *Elemente de analiză matematică***, Editura DIDACTICA și PEDAGOGICĂ, București,1981

[3] Năstăsescu,C. ,Niță,C. ,Rizescu,Gh. **, *ALGEBRĂ(Manual pentru clasa a IX-a),*** , Editura DIDACTICA și PEDAGOGICĂ, București,1993

[4] Negrea,N. , ***"Utilizarea părții întregi pentru aproximări în baza b ale numerelor reale cu numere rationale"***, Lucrările Seminarului "DIDACTICA MATEMATICII", volumul 15, anul 1999

Nicodim A. Negrea, pensionar,profesor de matematica,

Liceul Teoretic $Traian$, str. Titu Maiorescu, nr. 30 , DEVA .jud. HD

e-mail : negreaanic@yahoo.com

ECUAȚII EXPONENȚIALE

Prof. Iuliana Traşcă
Şc. cu cls. I-VIII „ Gh. Popescu”
Oraş Scorniceşti, jud. Olt

Prin *ecuație exponențială* se înțelege o ecuație în care necunoscuta x figurează la exponenți. Se numeşte *soluție a unei ecuații exponențiale* de necunoscută x, un număr real x_0 cu proprietatea că punând $x=x_0$ în ecuație, aceasta se verifică. *A rezolva* o ecuație exponențială înseamnă a-i determina toate soluțiile. Două ecuații exponențiale se numesc *echivalente* dacă mulțimile de soluții coincid.

1. Ecuații exponențiale de forma: $a^{f(x)} = a^{g(x)}, a>0, a\neq 1$

Dacă membrii au aceeaşi bază ecuația este echivalentă cu ecuația $f(x)=g(x)$ (egalăm exponenții). Soluțiile acestei ecuații sunt soluții ale ecuației date.

Ecuatiile de tipul $a^{f(x)} = b^{g(x)}, a>0,\ a\neq 1,\ b>0, \mathrm{b}\neq 1$ se pot scrie astfel
$a^{f(x)} = a^{g(x)\log_a b} \Leftrightarrow f(x) = g(x)\log_{\mathrm{a}}\mathrm{b}$

Exemple:

Să se rezolve ecuațiile:

1) $5^{6x-9} = 5^{x^2}$; **2)** $7^{2x}\cdot 25^x = 1225$; **3)** $3^{\sqrt{x+2}}\cdot\sqrt[3]{27} = \sqrt{81}^{\sqrt{x+2}}$; **4)** $\sqrt{3^{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{x\cdot(x+1)}}} = 27$;
5) $4^{5x-1} = 7^{x+2}$

Soluții:

1) Ecuația este echivalentă cu $x^2 = 6x-9$ care are soluția dublă x=3
2) Ecuația este echivalentă cu $35^{2x} = 35^2 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1$
3) Se impune condiția: $\sqrt{x+2}\geq 0 \Leftrightarrow x\in[-2,\infty)$. Ecuația se transcrie astfel:
$3^{\sqrt{x+2}}\cdot 3 = 3^{2\sqrt{x+2}} \Leftrightarrow \sqrt{x+2}+1 = 2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow x=-1\in[-2,\infty)$
4) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{x\cdot(x+1)} = \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$ Ecuația dată devine: $3^{\frac{x}{2(x+1)}} = 3^3 \Leftrightarrow \frac{x}{2(x+1)} = 3 \Leftrightarrow x = -\frac{6}{5}$
5) $4^{5x-1} = 7^{x+2} \Leftrightarrow 4^{5x-1} = 4^{\log_4 7^{(x+2)}} \Leftrightarrow 5x-1 = x\log_4 7+\log_4 49 \Leftrightarrow x = \frac{\log_4 49+1}{5-\log_4 7}$

2. Ecuații exponențiale de forma:

$a^{f(x)} = b,\ a>0,\ a\neq 1$ sau $a^{f(x)}\cdot c^{g(x)} = b,\ a>0,\ a\neq 1,\ c>0,\ c\neq 1\cdot$

Dacă $b\leq 0$, ecuația nu are soluție (întotdeauna exponențiala ia numai valori strict pozitive). Dacă $b>0$, **se logaritmează** ambii membri într-o bază convenabilă. Dacă se logaritmează în baza a ecuația se scrie echivalent $f(x)=\log_a b$ şi se rezolvă această ecuație.

Exemple:

Să se rezolve ecuațiile:

1) $7^{3-x^3}=-7$; **2)** $3^{\,x+1}=15$; **3)** $\left(5^x-25\right)\left(5^x+625\right)=0$; **4)** $7^x\cdot 16^{\frac{x-1}{x}}=19208$

Soluții:

1) Cum -7<0 ecuația nu are soluții;
2) Ecuația este echivalentă cu $x+1=\log_3 15 \Leftrightarrow x=\log_3\frac{15}{3}\Leftrightarrow x=\log_3 5$
3) Ecuația este echivalentă cu rezolvarea ecuațiilor: $5^x-25=0 \Leftrightarrow x=2$ şi $5^x=-625$ care nu are soluție
4) $7^x\cdot 16^{\frac{x-1}{x}}=19208$, ecuația are soluții dacă $x\neq 0$

Se logaritmează, de exemplu, în baza 7 şi se obține:

$$x+\frac{4(x-1)}{x}\log_7 2=\log_7\left(7^4\cdot 2^3\right)\Leftrightarrow x+\frac{4(x-1)}{x}\log_7 2=4+3\log_7 2$$

de unde se obține ecuația: $x^2+x\left(\log_7 2-4\right)-4\log_7 2=0$, cu soluțiile $x_1=4,\ x_2=-\log_7 2$

3. Ecuații exponențiale de forma: $a_1^{f_1(x)}\cdot a_2^{f_2(x)}=b_1^{g_1(x)}\cdot b_2^{g_2(x)}$

Se logaritmează ambii membri ai ecuației într-o bază convenabilă şi apoi se rezolvă ecuația astfel obținută. Soluțiile acestei ecuații sunt soluțiile ecuației date.

Exemple:

Să se rezolve ecuațiile:

1) $4^{x+2}=7^{2x-3}$; 2) $4^{x+1}\cdot 5^{x-2}=7$; 3) $2^{3x}\cdot 3^{2x}=4^{5x}\cdot 5^{4x}$

Soluții:

1) Logaritmând în baza 10 avem ecuațiile echivalente:

$$\lg 4^{x+2}=\lg 7^{2x-3}\Leftrightarrow (x+2)\lg 4=(2x-3)\lg 7\Leftrightarrow x(\lg 4-2\ \lg 7)=-2\ \lg 4-3\ \lg 7\Leftrightarrow$$

$$x\ \lg\frac{4}{49}=-\lg\left(4^2\cdot 7^3\right)\Leftrightarrow x\ \lg\frac{4}{49}=\lg 1-\lg\left(4^2\cdot 7^3\right)\Leftrightarrow x\ \lg\frac{4}{49}=\lg\frac{1}{5488}\Leftrightarrow x=\frac{\lg\frac{1}{5488}}{\lg\frac{4}{49}}$$

2) Logaritmând în baza 10 avem ecuațiile echivalente: $\lg\left(4^{x+1}\cdot 5^{x-2}\right)=\lg 7\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+1)\lg 4+(x-2)\lg 5=\lg 7\Leftrightarrow x(\lg 4+\lg 5)=\lg 7-\lg 4+\lg 25\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x\cdot\lg 20=\lg\frac{175}{4}\Leftrightarrow x=\frac{\lg\frac{175}{4}}{\lg 20}$.

3) Logaritmând în baza 10 avem ecuațiile echivalente:

$3x\lg 2+2x\lg 3=5x\lg 4+4x\lg 5\Leftrightarrow x\left(3\lg 2+2\lg 3-5\lg 4-4\lg 5\right)=0\Leftrightarrow x=0$

4. Ecuații exponențiale de forma: $m\cdot a^{2f(x)}+n\cdot a^{f(x)}+p=0, a>0, a\neq 1$

Ecuațiile de acest tip se rezolvă **prin substituție**. Se notează $a^{f(x)}=y>0$ şi se obține ecuația de gradul al doilea în y cu soluțiile y_1, y_2.

Exemple:
Să se rezolve ecuațiile:

1) $9^x-10\cdot 3^x+9=0$; 2) $\frac{1}{49^x}+4\cdot 7^{-x}=77$; 3) $\frac{169^{2x}}{13}-14\cdot 13^{x-1}+1=0$

Soluții:

1) Ecuația este echivalentă cu $3^{2x}-10\cdot 3^x+9=0$, se notează $3^x=y>0$.
Ecuația devine: $y^2-10y+9=0\Leftrightarrow(y-1)(y-9)=0\Leftrightarrow y=1$ sau $3^x=1$, adică $x_1=0$ şi $y=9$ sau $3^x=9$, adică $x_2=2$.

2) $7^{-2x}+4\cdot 7^{-x}-77=0$, se notează $7^{-x}=y>0$ şi avem:
$y^2+4y-77=0\Leftrightarrow(y+11)(y-7)=0\Leftrightarrow y=-11<0$ nu convine şi $y=7$ sau $7^{-x}=7$, adică $x=-1$.

3) $\frac{169^{2x}}{13}-14\cdot 13^{x-1}+1=0\Leftrightarrow 13^{2x}-14\cdot 13^x+13=0$, se notează $13^x=y>0$.
Ecuația devine: $y^2-14y+13=0\Leftrightarrow(y-1)(y-13)=0\Leftrightarrow y=1$ sau $13^x=1$, adică $x_1=0$ şi $y=13$ sau $13^x=13$, adică $x_2=1$.

5. Ecuații exponențiale de forma:

$$m\cdot a^{f(x)}+n\cdot b^{f(x)}+p=0,\quad a,b>0,\quad a,b\neq 1,\quad a\cdot b=1$$

Este o ecuații exponențială în care figurează bazele *a, b* cu proprietatea că produsul lor este unu, $a\cdot b=1$. De aici $b=\frac{1}{a}$ iar ecuația se scrie echivalent:

$m\cdot a^{f(x)}+\frac{n}{a^{f(x)}}+p=0$. Se notează $a^{f(x)}=y>0$ şi se obține ecuația de gradul doi în

y: $m \cdot y^2 + p \cdot y + n = 0$ cu soluțiile y_1, y_2. **Se revine la substituție** şi se rezolvă ecuațiile $a^{f(x)} = y_i$, $i = \overline{1,2}$. Reuniunea acestor soluții este mulțimea soluțiilor ecuației date.

Exemplu:
Să se rezolve ecuația:

$$\left(7+4\sqrt{3}\right)^x + \left(7-4\sqrt{3}\right)^x = 194$$

Soluție:

$$\left(7+4\sqrt{3}\right) \cdot \left(7-4\sqrt{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 7-4\sqrt{3} = \frac{1}{7+4\sqrt{3}}$$

Ecuația dată devine:

$$\left(7+4\sqrt{3}\right)^x + \left(\frac{1}{7+4\sqrt{3}}\right)^x = 194,\ \text{notăm}\ \left(7+4\sqrt{3}\right)^x = y > 0\ \text{şi obținem:}$$

$$y^2 - 194y + 1 = 0 \Leftrightarrow y_{1,2} = 97 \pm 56\sqrt{3} = \left(7 \pm 4\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow x_1 = 2 \text{ şi } x_2 = -2$$

6. Ecuații exponențiale de forma:

$$m_1 a^{f_1(x)} + \ldots + m_k a^{f_k(x)} = n_1 b^{g_1(x)} + \ldots + n_l b^{g_l(x)}, \quad a,b > 0, \quad a,b \neq 1$$

În ecuațiile exponențiale care conțin exponențiale cu baze diferite $a \neq b$, este indicat să **grupăm într-un membru termenii care conțin exponențiale de aceeaşi bază** a, iar în celălalt membru termenii care au în componența lor exponențiale de aceeaşi bază b. În fiecare membru se dă factor comun exponențiala de exponent cel mai mic, ajungându-se la o ecuație exponențială mai simplă.

Exemple:
Să se rezolve ecuațiile:

1) $2^x + 2^{x+3} + 2^{x+6} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 13 \cdot 3^x + 34 \cdot 2^x$;
2) $7^x + 7^{x+2} - 2^{x+3} + 9 \cdot 2^x = 7^{x+1} + 2^{x+2} + 2^x + 29 \cdot 7^x$;
3) $3^{x+1} - 3^x + 3^{x-2} = 57$;
4) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} - 3^{x+3} = 7^x - 7^{x+1}$;

Soluții:

1) $2^x + 2^{x+3} + 2^{x+6} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 13 \cdot 3^x + 34 \cdot 2^x \Leftrightarrow 2^x\left(1+2^3+2^6-34\right) = 3^x\left(1+3+3^2+13\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{26}{39} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 1$$

2)
$7^x+7^{x+2}-2^{x+3}+9\cdot 2^x=7^{x+1}+2^{x+2}+2^x+29\cdot 7^x \Leftrightarrow 7^x\left(1+7^2-7-29\right)=2^x\left(1+2^2+2^3-9\right)$

$\Leftrightarrow\left(\frac{7}{2}\right)^x=\frac{4}{14}\Leftrightarrow\left(\frac{7}{2}\right)^x=\frac{2}{7}\Leftrightarrow x=-1$

3) $3^{x+1}-3^x+3^{x-2}=57\Leftrightarrow 3^x\left(3-1+\frac{1}{9}\right)=57\Leftrightarrow 3^x\cdot\frac{19}{9}=57\Leftrightarrow 3^x=27\Leftrightarrow x=3$

4) $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}-3^{x+3}=7^x-7^{x+1}\Leftrightarrow 3^x\left(1+3+9-27\right)=7^x\left(1-7\right)\Leftrightarrow 3^x\left(-14\right)=7^x\left(-6\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\frac{3}{7}\right)^x=\frac{3}{7}\Leftrightarrow x=1$

7. Ecuații exponențiale de forma:

$m\cdot a_1^{2f(x)}+n\cdot a_2^{2f(x)}+p\cdot(a_1\cdot a_2)^{f(x)}=0,\ \ a_i>0,\ \ a_i\neq 1$

O ecuație de acest tip o numim **omogenă** deoarece fiecare termen al ecuației în a_1 şi a_2, are exponentul acelaşi *2f(x)*. Pentru a rezolva o astfel de ecuație se recomandă împărțirea ambilor membri ai ecuației prin $a_2^{2f(x)}$ când se obține ecuația echivalentă $m\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2f(x)}+p\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{f(x)}+n=0$ care este de tipul 4. Sau se poate împărți ecuația prin $(a_1a_2)^{f(x)}$ când obținem: $m\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{f(x)}+n\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{f(x)}+p=0$, care este o ecuație de tipul 5.

Exemple:
Să se rezolve ecuațiile:
1) $64\cdot 25^x-180\cdot 20^x+125\cdot 16^x=0$; 2) $125^x+2\cdot 45^x-3\cdot 27^x=0$
Soluții: 1) $64\cdot 25^x-180\cdot 20^x+125\cdot 16^x=0\ \Leftrightarrow 64\cdot 5^{2x}-180\cdot 20^x+125\cdot 4^{2x}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 64\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{2x}-180\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^x+125=0$, notăm $\left(\frac{5}{4}\right)^x=y>0$ şi avem:

$64y^2-180y+125=0\Leftrightarrow y_1=\frac{25}{16}$ şi $y_2=\frac{5}{4}$

$\left(\frac{5}{4}\right)^x=\frac{25}{16}\Leftrightarrow x_1=2$ şi $\left(\frac{5}{4}\right)^x=\frac{5}{4}\Leftrightarrow x_2=1$

2) $125^x+2\cdot 45^x-3\cdot 27^x=0\Leftrightarrow 5^{3x}+2\cdot 5^x\cdot 3^{2x}-3\cdot 3^{3x}=0\Leftrightarrow\left(\frac{5}{3}\right)^{3x}+2\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^x-3=0$.

Notăm $\left(\frac{5}{3}\right)^x = y > 0$ si avem $y^3 + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y^2 + y + 3) = 0$, ecuația $y^2 + y + 3 = 0$ nu are rădăcini reale, rămâne y-1=0, adică y=1, deci $\left(\frac{5}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

8. Ecuații exponențiale de forma:

$A(a^{2x} + a^{-2x}) + B(a^x + a^{-x}) + C = 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad A, B, C \in \mathbb{R}$.

În acest caz se notează $a^x + a^{-x} = y$ unde prin ridicare la pătrat rezultă $a^{2x} + a^{-2x} = y^2 - 2$ atunci ecuația se scrie: $Ay^2 + By + C - 2A = 0$ cu soluțiile y_1, y_2.

Exemplu: Să se rezolve ecuația: $5\cdot(25^x + 25^{-x}) + 9\cdot(5^x + 5^{-x}) - 130 = 0$

Soluție: $5\cdot(25^x + 25^{-x}) + 9\cdot(5^x + 5^{-x}) - 130 = 0 \Leftrightarrow 5\cdot(5^{2x} + 5^{-2x}) + 9\cdot(5^x + 5^{-x}) - 130 = 0$.
Notăm $5^x + 5^{-x} = y \geq 2 \Leftrightarrow 5^{2x} + 5^{-2x} = y^2 - 2$, ecuația dată devine:
$5(y^2 - 2) + 9y - 130 = 0 \Leftrightarrow 5y^2 - y - 130 = 0$ cu soluțiile $y_1 = -5$ nu convine şi $y_2 = \frac{26}{5}$.
Deci $5^x + 5^{-x} = \frac{26}{5}$, fie $5^x = t > 0$ şi avem: $5t^2 - 26t + 5 = 0$ cu soluțiile
$t_1 = 5 \Leftrightarrow 5^x = 5 \Leftrightarrow x_1 = 1$ şi $t_2 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5^x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x_2 = -1$

9. Ecuații exponențiale de forma:

$A(a^{3x} + a^{-3x}) + B(a^x + a^{-x}) + C = 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad A, B, C \in \mathbb{R}$. În acreastă situație punem $a^x + a^{-x} = y \geq 2$. De aici prin ridicare la cub rezultă că: $a^{3x} + a^{-3x} = y^3 - 3y$, atunci ecuația se scrie: $Ay^3 + y(B - 3A) + C = 0$ cu soluțiile y_1, y_2, y_3

Exemplu: Să se rezolve ecuația: $9\cdot(27^x + 27^{-x}) - 73\cdot(3^x + 3^{-x}) = 0$
Soluție: $9\cdot(27^x + 27^{-x}) - 73\cdot(3^x + 3^{-x}) = 0 \Leftrightarrow 9\cdot(3^{3x} + 3^{-3x}) - 73\cdot(3^x + 3^{-x}) = 0$
Notăm $3^x + 3^{-x} = y \geq 2 \Leftrightarrow 3^{3x} + 3^{-3x} = y^3 - 3y$, ecuația dată devine:
$9(y^3 - 3y) - 73y \Leftrightarrow 9y^3 - 100y = 0$ cu soluțiile $y_1 = 0,\ y_2 = -\frac{10}{3},\ y_3 = \frac{10}{3}$. Convine doar soluția $y = \frac{10}{3}$. Deci $3^x + 3^{-x} = \frac{10}{3}$, fie $3^x = t > 0$ şi avem: $3t^2 - 10t + 3 = 0$ cu soluțiile
$t_1 = 3 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x_1 = 1$ şi $t_2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x_2 = -1$

10. Ecuații exponențiale cu soluție unică.

Rezolvarea acestora constă în a le aduce la forma $f(x)=c$, unde f este o funcție strict monotonă, iar c este o constantă şi observând că ecuația are o soluție x_0. Cum f este strict monotonă se deduce că f este injectivă şi deci ecuația dată are soluția unică x_0.

Exemple:
Să se rezolve ecuațiile: 1) $7^{x-2}+5^{x-2}=74$; 2) $12^x+25=13^x$; 3) $7^{x-2}=10-x$;
4) $\dfrac{(x+1)^2-2x}{x}=\sqrt[6]{2}^{5+2x-x^2}$

Soluție: 1) $7^{x-2}+5^{x-2}=74$, se observă că x=4 verifică ecuația.
Funcția f(x)= $7^{x-2}+5^{x-2}$ fiind suma a două funcții exponențiale cu baze supraunitare este strict crescătoare. Deci x=4 este soluție unică.
2) $12^x+25=13^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{12}{13}\right)^x+25\cdot\left(\dfrac{1}{13}\right)^x=1$, se observă că x=2 verifică ecuația.
Funcția f(x)= $\left(\dfrac{12}{13}\right)^x+25\cdot\left(\dfrac{1}{13}\right)^x$ fiind suma a două funcții exponențiale cu baze subunitare este strict descrescătoare. Deci x=2 este soluție unică.
3) Se observă că $x = 3$ este soluție a ecuației date. Alte soluții ecuația dată nu are, deoarece membrul din stânga reprezintă o funcție crescătoare, iar membrul din dreapta o funcție descrescătoare, şi cum graficele acestor funcții pot avea cel mult un punct comun, rezultă că $x = 3$ este unica soluție.

4) $\dfrac{(x+1)^2-2x}{x}=\sqrt[6]{2}^{5+2x-x^2} \Leftrightarrow \dfrac{x^2+1}{x}=\sqrt[6]{2}^{5+2x-x^2}$. Se observă că ecuația are soluții doar pentru $x > 0$. Atunci membrul din stânga $\dfrac{x^2+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}\geq 2$, în plus semnul egalității se obtine pentru $x = 1$, pe când membrul din dreapta ecuației primeste valoarea maximă 2 pentru $x = 1$, pentru că:

$$\sqrt[6]{2}^{5+2x-x^2}=\sqrt[6]{2}^{6-\left(x^2-2x+1\right)}=\sqrt[6]{2}^{6-(x-1)^2}\leq\sqrt[6]{2}^{6}=2.$$

Astfel unica soluție a acestei ecuații este $x = 1$.

11. Ecuații exponențiale de forma $f(x)^{g(x)}=f(x)^{h(x)}$ care conțin necunoscuta atât în bază cât şi în exponent.

Se ştie că dacă $f(x)>0$, $f(x)\neq 1$ atunci ecuația considerată este una exponențială şi se reduce la rezolvarea ecuației $g(x)=h(x)$. Vor fi soluții acele valori x pentru care $f(x)>0$ şi $f(x)\neq 1$. Dacă posibilitatea $f(x)\leq 0$ sau $f(x)=1$ nu este eliminată de la început, atunci se analizează mai multe cazuri:
a) Dacă $f(x)=1$ atunci egalitatea se verifică oricare ar fi $g(x)$, $h(x)$

b) Dacă $f(x)=-1$ atunci egalitatea devine $(-1)^{g(x)}=(-1)^{h(x)}$

c) Dacă $f(x)=0$ atunci egalitatea are loc pentru $g(x)>0,\ h(x)>0$

Exemple: Să se rezolve ecuația:1) $(x+4)^{2x+2}=(x+4)^{\frac{x-4}{3}}$; 2) $x^2\cdot 3^{x+1}-x^2\cdot 3^{-x+7}=3^{x-1}-3^{-x+5}$

Soluții:

1)Avem cazurile:

a) $x+4>0$, x+4 $\neq 1 \Leftrightarrow x\in(-4,\infty)\setminus\{-3\}$ şi avem ecuația $2x+2=\frac{x-4}{3}\Leftrightarrow x=-2$ este soluție a ecuației

b) x+4=1, adică x=-3 este soluție a ecuației

c) x+4=-1, adică x=-5 $\Rightarrow(-1)^{-8}=(-1)^{-3}\Leftrightarrow\frac{1}{(-1)^8}=\frac{1}{(-1)^3}\Leftrightarrow 1=-1$ imposibil.

d) x+4=0$\Leftrightarrow x=-4$ avem $0^{-6}=0^{-\frac{8}{3}}$, cum -6 şi $-\frac{8}{3}$ sunt negative , rezultă că $x=-4$ este soluție a ecuației.Deci ecuația are soluțiile $x_1=-2,\ x_2=-3,\ x_3=-4$

2) $x^2\cdot 3^{x+1}-x^2\cdot 3^{-x+7}=3^{x-1}-3^{-x+5}\Leftrightarrow 3^{x-1}\left(9x^2-1\right)-3^{-x+5}\left(9x^2-1\right)=0\Leftrightarrow\left(9x^2-1\right)\left(3^{x-1}-3^{-x+5}\right)=0$

cu soluțiile $x_1=\frac{1}{3},\ x_2=-\frac{1}{3},\ x_3=3$.

12. Ecuații exponențiale cu parametru.

<u>Exemplu:</u> Să se determine $m\in\mathbb{R}$ a.î. $9^x-m\cdot 3^x-m+8=0$ are o singură soluție. <u>Soluție:</u> Notând $3^x=y>0$, ecuația devine $y^2-my-m+8=0$. Ecuația dată are o singură soluție dacă şi numai dacă ecuația în y are o singură rădăcină pozitivă. Condițiile care se impun sunt: ($\Delta>0$ şi $P=y_1y_2=-m+8<0$) sau ($\Delta=0$ şi $S=y_1+y_2=m>0$).

$$\begin{cases}(m-4)(m+8)>0\\ 8-m<0\end{cases}\cup\begin{cases}(m-4)(m+8)=0\\ m>0\end{cases}\Rightarrow m\in\{4\}\cup(8,\infty)$$

BIBLIOGRAFIE

1. P. Cojuhari, A. Corlat. Ecuatii si inecuatii algebrice. Mica bibilioteca a elevului. Seria matematica si informatica. Editura ASRM. Chisinau, 1995.
2. В.А. Вишеньский и др. Збірник задач з математики. Киів, "Либіді", 1993.
3. Manual pentru clasa a X-a - Ganga M. - Editura: MathPress

Aplicaţii ale funcţiilor trigonometrice inverse

Prof. Nicuşor Zlota

Colegiul Tehnic Auto " Traian Vuia" Focşani

1.Definirea funcţiilor inverse

1.1 arcsin:[-1,1]->[-π/2,π/2], definită prin arcsinx=a $\Leftrightarrow$, $x\in$ [-1,1], $a\in$ [-π/2,π/2], sinx=a

1.2 arccos :[-1,1]->[0,π], definită prin arccosx=a $\Leftrightarrow$, $x\in$ [-1,1], $a\in$ [0,π], cosx=a

1.3 arctg:R->(-π/2,π/2), definită prin arctgx=a $\Leftrightarrow$ $x\in R$, $a\in$ (-π/2,π/2), tgx=a

1.4 arcctg:R->(0,π), definită prin arcctgx=a $\Leftrightarrow$ $x\in R$, $a\in$ (0,π), ctgx=a

2.Proprietăţi

2.1 sin(arcsinx)=x , $x\in$ [-1,1]

2.2 arcsin(sinx)=x , $x\in$ [-π/2,π/2]

2.3 arccos(-x)=π-arcos(x), $x\in$ [-1,1]
2.4 cos(arccosx)=x , $x\in$ [-1,1]
2.5 arccos(cosx)=x , $x\in$ [0,π]
2.6 tg(arctgx)=x, $x\in R$
2.7 arctg(tgx)=x, , $x\in$ (-π/2,π/2)
2.8 ctg(arcctgx)=x, $x\in R$
2.9 arcctg(ctgx)=x, $x\in$ (0,π)
2.10 arctg(-x)=-arctgx , $x\in R$
2.11 arcctg(-x)=π-arcctgx, $x\in R$

Aplicaţii

A1. Să se afle valoarea funcţiilor

sin(arcsin3/5+arcsin8/17)

Rezolvare

Notând arcsin3/5=u, arsin8/17=v, expresia devine sin(u+v) =sinucosv+sinvcosu şi ţinând seama de sinu=sin(arcsin3/5)=3/5 si sinv=sin(arcsin8/ 17)=8/17
Rezulta $\cos^2u=1-\sin^2u=(4/5)^2$, $\cos^2v=1-\sin^2v=(15/17)^2$

Avem : sin(arcsin3/5+arcsin8/17)=3/5*15/17+4/5*8/17=77/85

A2.Să se arate că :

arctg1+arctg2+arctg3=π

Rezolvare

Notăm arctg1=a, arctg2=b, arctg3=c, atunci avem a+b+c= π

Aplicând acestei egalitaţi tangenta , avem :

tg(a+b+c)=tg π

Sau

$\frac{tga+tgb+tgc-tga*tgb*tgc}{1-tga*tgb-tgb*tgc-tgc*tga}$=0, de unde rezultă că tga+tgb+tgc-tga*tgb*tgc=0

Înlociund obţinem : 1+2+3-1*2*3=0, adică q.e.d

A3.Să se afle valorile lui x pentru care există funcţia;

f(x)=arccos$\frac{2x}{1+x}$

Rezolvare

Aplicând definiţia 1.2, avem $\frac{2x}{x+1} \in [-1,1]$

Avem succesiv : $\frac{2x}{x+1}-1\leq 0$

$\frac{2x}{x+1}+1\geq 0$

Deducem că :$-\frac{1}{3}\leq x\leq 1$

A4. Să se afle x pentru care

arctg$\frac{1}{4}$+2*arctg$\frac{1}{5}$+arctg$\frac{1}{x}$=$\frac{\pi}{4}$

rezolvare

Notăm arctg1/4=a, arctg1/5=b, arctg1/x=c, atunci ecuaţia devine : a+2*b+c=$\frac{\pi}{4}$

Sau a+b+c=$\frac{\pi}{4}$-b şi aplicând tangenta în ambii membrii , obţinem :

Tg(a+b+c)=tg($\frac{\pi}{4}$-b)

$\frac{tga+tgb+tgc-tga*tgb*tgc}{1-tga*tgb-tgb*tgc-tgc*tga}=\frac{1-tgb}{1+tgb}$

înlociund obţinem ecuaţia : $\frac{9x+19}{19x-9}=\frac{4}{6}$,după efectuarea calculelor obţinem soluţia x=$\frac{75}{11}$

A5.Să se rezolve ecuaţia :

arctg(x-1)+arctgx+arctg(x+1)=arctg3*x
Rezolvare

Notăm arctg(x-1)=a, atunci tga=x-1
Arctgx=b, atunci tgb=x
Arctg(x+1)=c, atunci tgc=x+1,
Arctg3*x=d, atunci tgd=3*x
Ecuaţia devine a+b+c=d
Aplicând tangenta în ambele parţi, avem succesiv : tg(a+b+c)=tgd

$\frac{tga+tgb+tgc-tga*tgb*tgc}{1-tga*tgb-tgb*tgc-tgc*tga}$=tgd

înlocuind cu notaţiile facute şi, după efectuarea calculelor, avem

$\frac{3x-x(x-1)(x+1)}{1-x(x-1)-x(x+1)-(x-1)(x+1)}$=3x, sau x(8x^2-2)=0, care are soluţiile x_1=0, x_2=1/2, x_3=-1/2

A6. Să se arate că :

cos(arccosx)=x
cos(2arccosx)=2x^2-1
cos(3arccos)=4x^3-3x

Rezolvare

în general notăm arccosx=a, de unde x=cosa şi ţinând seama de faptul că
cos(na)=cos^{n}a-C_n^2cos^{n-2}a*sin^{2}a+……….

şi sina=$\sqrt{1-cos^2a}$=$\sqrt{1-x^2}$
,
Rezulta ca cos(narccosx)=x^n-C_n^2x^{n-2}(1-x^2)+C_n^4x^{n-4}(1-x^2)^2-……..

Aceste plonoame poartă numele de polinoame Cebîşev şi joaca un rol foarte important în diferite domenii ale matematicii pure sau aplicate

A7. Să se arate ca :

$\cos(7\arccos x)=64x^7-112x^5+56x^3-7x$

Rezolvare

Notăm a=arccosx, de unde cosa=x, deci avem de calculat cos7a

Aplicând formula de mai sus, avem succesiv :

$\cos 7a=\cos^7 a-C_7^2\cos^5 a\sin^2 a+C_7^4\cos^3 a\sin^4 a-C_7^6\cos a\sin^6 a$
$=x^7-21x^5(1-x^2)+35x^3(1-x^2)^2-7x(1-x^2)^3= 64x^7-112x^5+56x^3-7x$

A8.Să se rezolve în numere naturale ecuaţia

$\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+\operatorname{arctg}\frac{2}{y}=\operatorname{arctg}\frac{6}{x+y}$

Rezolvare

Aplicând tangenta în ambii membrii, obţinem :

$(\frac{1}{x}+\frac{2}{y})/(1-\frac{2}{xy}) = \frac{6}{x+y}$,sau, după efecturarea calculelor $y^2-3xy+2x^2+12=0$, $y=\frac{3x\pm\sqrt{x*x-48}}{2}$
Trebuie ca $x^2-48=a^2$
Unde a este un intreg pozitiv , ecuaţia se poate scrie
(x-a)(x+a)=48, după rezolvarea sistemelor obţinem următoarele valori :

1)x=13, a=11, y=14, y=25
2)x=8, a=4, y=14, y=10
3)x=7, a=1, y=11, y=10

Probleme propuse spre rezolvare

Să se calculeze

P1. sin(arccos0.8)
R:0.6

P2. sin(3arctgx)

P3. Să se arate că :

arctg1/2+arctg1/3=$\frac{\pi}{4}$

P4.Să se afle valoarea lui x pentru care

arctg$\frac{1}{3}$+2arctg$\frac{1}{7}$+arctg$\frac{1}{x}$=$\frac{\pi}{4}$

R:x=$\frac{11}{2}$

P5. Să se afle valorile lui x pentru care exista funcţia : f(x)=arccos$\frac{1-x}{1+x}$

P6. Sa se calculeze cos(5arccosx)

Bibliografie

1 ,Liviu Parsan, Lazanu Cristina - Probleme de Algebra si Trigonometrie, clasele a IX, X - a, Editura Facla, 1984;

2 Cosnita C, Turtoiu F, Culegere de problem de matematica, Editura Tehnica, Bucuresti, 1968

3.Calugarita G, Mangu –Probleme de matematica, Editura, Lyceum, 1977

Profesor Nicusor Zlota grd. I - Colegiul Tehnic Auto „ Traian Vuia" Focsani
e-mail : nicuzlota@yahoo.com
adresa de internet : www.colegiulautofocsani.xhost.ro

SUFLETUL MOROMETIAN SI LOGICA MATEMATICA

1.Marin Preda reuşeşte în acelaşi an să scoată prima ediție a romanului „Delirul" şi să publice şi ediția definitivă a romanului „***Morometții***",***I-II***. Aflați acest an ştiind că este divizibil cu 25 şi că cifra zecilor este media aritmetică a cifrelor sutelor şi unităților.

2. ***Marin Preda*** s-a născut pe 5 august 1922 în Siliştea Gumeşti. Aflați la ce vârsta a debutat cu proza „Pârlitu' " dacă aceasta a apărut în „Timpul" în primăvara anului 19xy, unde x şi y îndeplinesc următoarea relație: x/y=x - y .

3.Era legată la gură, dar câinele trebuie să fi dârdâit de flamand ce era, că a desfăcut-o cu botul şi a mâncat tot ce era înăuntru, mămăliga, brânza, un ou, numai sarea şi ceapa nu le-a înghițit."(*Morometții vol.II pag 63*)".

Sa presupunem că acest câine a venit şi altă dată si atunci a găsit o traista mult mai consistentă: pentru fiecare ou din traista existau cate 2 cepe; suma tuturor cepelor şi ouălor din plasă era egală cu numărul total de bucăți de mămăligă; erau de 2 ori mai puține bucăți de mămăligă decât felii de brânză; pentru fiecare felie de brânză s-au pus 100g de sare; în plasă erau 3,6 kg de sare. Ştiind că el a putut mânca 10 bucăți de mămăligă, 25 de felii de brânză şi un ou, câte alimente au rămas in traista după plecarea câinelui?

4.''Casa lui ***Vasile Botoghina*** era asezata la trei-patru case de fieraria lui ***Iocan***. Avea o curte mititica in mijlocul careia statea caruta omului; nu avea nici sopron,nici vreun salcim mai umbros sub care s-o vire.In fundul curtii se vedea un fel de gard mic din nuiele care despartea casa si batatura de o gradina la fel de mica in care ***Vasile Botoghina*** avea citeva straturi de ceapa si usturoi. Intre gradina si curte omul facuse un grajd pentru cai ''.(*Morometii* vol.I pag 126)

Deasupra grajdului era fînarul ,sub forma unei prisme triunghiulare ,cu fundul triunghi echilateral de latura 12m si coama acoperisului de 15m.

Citi m^3 de fin putea sa puna el in finar umplându-l ochi ?

5.Frații vitregi" ai familiei ***Moromete*** sunt ordonați în funcție de vârste astfel: ***Paraschiv***-„cel mai mare dintre copii", ***Nilă***-„al doilea fiu", ***Achim***-„al treilea băiat". Câți ani aveau fiecare dintre ei ştiind că: Nilă şi Achim aveau împreună 35 de ani, Achim şi Paraschiv aveau împreună 40 de ani, iar Nilă şi Paraschiv aveau împreună 43 de ani?

6." Mosia de care pomenise ***Achim*** si in ovazul careia vroia sa-si bage caii se afla chiar in capatul lotului lor . Erau vreo patru sute de pogoane , ceea ce mai ramasese din vestita mosie a lui ***Guma*** din 1924,dupa reforma" (*Morometii* vol.I pag79)

In anul1937 suprafata fostei mosii Guma cuprindea:4787ha teren arabil ,14ha gradini de zarzavat ,215ha pasiune,284ha islaz ,5ha pomi fructiferi si 320ha vatra de sat.Cit la suta din intraga mosie reprezenta vatra de sat ?

7. '' Vazuta din drum gospodaria lui ***Țugurlan*** parea sa fie a unui om cu stare. Avea un finar cu patru rinduri ,frumos facut,inalt, cu acoperis de sita,care de departe parca era un acaret .Casa,de asemenea,invelita cu sita ,parea aratoasa ,cu doua odai,cu prispa si parmalic.Linga gardul curtii ,in coltul pe care il facea cu drumul ,se afla o fintina cu ghizdurile de ciment,cu doua galeti cu lant pe scripete ,cu un jgheab mare de tot de ciment ,intins linga sant.''(*Morometii* vol.I pag 111)

Jgheabul avea forma unei prisme drepte cu capetele trapeze isoscele cu baza mare 80cm, baza mica 60cm si un unghi de 45 grade .Citi litri de apa incapea in el stiind ca lungimea lui era 2m ? (Presupunem grosimea lui neglijabila)

8.''-Vezi , fii atent, continua al ***lu'Parizianu*** **,**sa nu ajungi sa semeni cu ***Cirstache al lui Dumitrache*** care are un cufar naiv de carti din care nu da la orcine… Sa nu ajungi adica si tu ,ca el , un biet taran posesor al unui biet cufar de carti…''(*Delirul* –pag 15)
Cufarul reprezenta un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile :lungimea-1,50m latimea -0,50m iar inaltimea media armonica a lor . Care era volumul lui ?

9.''***Paraschiv*** n-o lua pe ***Manda lui Bodirlache***,dar el nu-i spuse ca n-o mai ia.Fata il intreba citeodata ce are de gand,dar Paraschiv raspundea mereu ca la toamna,acum a trecut vremea;toamna se insoara lumea! Manda avea nouasprezece ani,abia iesise in lume si se ferea de asa-zisul ei viitor sot''(*Morometii* vol.I pag 369)
Daca semisuma varstelor lor este un numar natural format din doua cifre,iar cifra zecilor este numar prim par si sucesoarea cifrei unitatilor,ce varsta avea Paraschiv?

Prof. Anghel Mihaita Giorgica
Scoala cu cls.I-VIII ,,Marin Preda''Silistea Gumesti.