Asupra unor probleme O.I.M 2009

Neculai **STANCIU**[1]

„Man muss immer generalisieren”
(Trebuie întotdeauna să generalizăm)
Carl Jacobi (1804 – 1851)

Abstract. The purpose of this article is to presents solutions for three problems from the IMO 2009 and some generalizations.Also, some comments will be made.
Keywords: art of problem solving, IMO problems and solutions.
MSC 2000: MSC 51M04, MSC 11A07

În această notă vom da alte soluţii(decât cele publicate) şi vom generaliza trei probleme date la O.I.M. 2009.

Problema 1(problema 1**,** IMO 2009: autor, *Ross Atkins* (Australia)).
Fie n un n umăr natural nenul şi fie $a_1,...,a_k$ $(k \geq 2)$ numere naturale nenule distincte din mulţimea $\{1,...,n\}$ astfel încât n divide $a_i(a_{i+1}-1)$ pentru $i=1,...,k-1$.Arătaţi că n nu divide $a_k(a_1-1)$.

*Soluţie.*Presupunem prin reducere la absurd că $n \mid a_k a_1 - a_k \Rightarrow (*)\ a_k \equiv a_k a_1 (\bmod n)$.

Din ipoteză avem congruenţele
$$\begin{cases} a_1 \equiv a_1 a_2 (\bmod n) & (1) \\ a_2 \equiv a_2 a_3 (\bmod n) & (2) \\ a_3 \equiv a_3 a_4 (\bmod n) & (3) \\ \dots\dots\dots\dots & \\ a_{k-1} \equiv a_{k-1} a_k (\bmod n) & (k-1) \end{cases}$$

Rezultă :
$$a_1 \overset{(1)}{\equiv} a_1 a_2 (\bmod n) \overset{(2)}{\equiv} a_1 a_2 a_3 (\bmod n) \overset{(3)}{\equiv} \dots \overset{(k-1)}{\equiv} a_1 a_2 \dots a_k (\bmod n) \qquad (1')$$
Apoi :
$$a_2 \overset{(2)}{\equiv} a_2 a_3 (\bmod n) \overset{(3)}{\equiv} \dots \overset{(k-1)}{\equiv} a_2 a_3 \dots a_k (\bmod n) \overset{(*)}{\equiv} a_2 a_3 \dots a_k a_1 (\bmod n) \equiv a_1 a_2 \dots a_k (\bmod n) \qquad (2')$$

$$a_3 \overset{(3)}{\equiv} a_3 a_4 (\bmod n) \equiv \dots \overset{(k-1)}{\equiv} a_3 a_4 \dots a_k (\bmod n) \overset{(*)}{\equiv} a_3 a_4 \dots a_k a_1 (\bmod n) \overset{(1)}{\equiv}$$
$$\equiv a_3 a_4 \dots a_k a_1 a_2 (\bmod n) \equiv a_1 a_2 \dots a_k (\bmod n) \qquad (3')$$
....

[1] Prof., Şcoala “George Emil Palade”, Buzău
stanciuneculai@yahoo.com

$$a_{k-1} \overset{(k-1)}{\equiv} a_{k-1}a_k \pmod n \overset{(*)}{\equiv} a_{k-1}a_k a_1 \pmod n \overset{(1)}{\equiv} a_{k-1}a_k a_1 a_2 \pmod k \equiv \ldots \overset{(k-2)}{\equiv} \qquad ((k-1)')$$

$$\overset{(k-2)}{\equiv} a_{k-1}a_k a_1 a_2 \ldots a_{k-2} \equiv a_1 a_2 \ldots a_k \pmod n$$

$$a_k \overset{(*)}{\equiv} a_k a_1 \pmod n \overset{(1)}{\equiv} a_k a_1 a_2 \pmod n \overset{(2)}{\equiv} \ldots \overset{(k-1)}{\equiv} a_k a_1 a_2 \ldots a_{k-1} \pmod n \equiv \qquad (*')$$

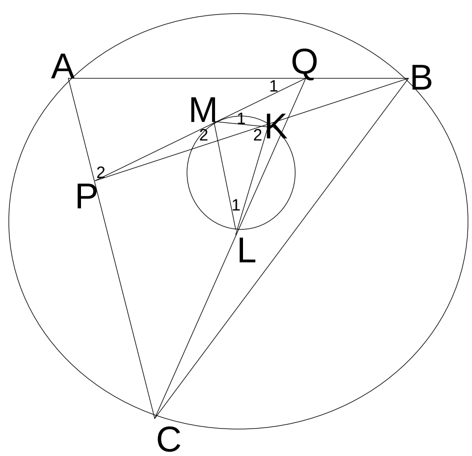
$$\equiv a_1 a_2 \ldots a_k \pmod n$$

Acum din relaţiile $(1')$, $(2')$, $(3')$,..., $((k-1)')$ şi $(*')$ rezultă $a_1 \equiv a_2 \pmod n \equiv a_3 \pmod n \equiv \ldots \equiv a_{k-1} \pmod n \equiv a_k \pmod n$, ceea ce reprezintă o contradicţie.

Remarcă. Contradicţia rezultă pentru că din $a_1 \equiv a_2 \pmod n$, avem $n | a_1 - a_2$, ceea ce este imposibil deoarece $a_1 \neq a_2$ şi $|a_1 - a_2| < n$. Contradicţiile $a_1 \equiv a_2 \pmod n \equiv a_3 \pmod n \equiv \ldots \equiv a_{k-1} \pmod n \equiv a_k \pmod n$ generalizează contradicţia $a_1 \equiv a_2 \pmod n$ obţinută de mai mulţi participanţi la O.I.M. 2009.

Problema 2(problema 2, IMO 2009 : autor, *Serghei Berlov* (Rusia)).
Fie ABC un triunghi în care centrul cercului circumscris este O. Punctele P şi Q se află pe laturile CA, respectiv AB, în interiorul acestora. Fie K, L şi M mijloacele segmentelor BP, CQ, respectiv PQ, şi fie Γ cercul circumscris triunghiului KLM. Arătaţi că dacă dreapta PQ este tangentă cercului Γ, atunci $OP = OQ$.

Soluţie.



$$ML \| PC \Rightarrow \begin{cases} \angle LMP = \angle APM \\ \angle PML = \angle MKL \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1)\ \angle APM = \angle MKL;$$

$$KM \| BQ \Rightarrow \begin{cases} \angle AQP = \angle QMK \\ \angle QMK = \angle KLM \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2) \angle AQP = \angle KLM.$$

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă că $\Delta APQ \approx \Delta MKL$. Prin urmare $\Rightarrow \frac{AP}{MK} = \frac{AQ}{ML} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AP}{AQ} = \frac{AQ}{ML} = \frac{2 \cdot MK}{2 \cdot ML} \underset{(2\cdot ML = PC)}{\overset{(2\cdot MK = BQ)}{\Longrightarrow}} \frac{AP}{AQ} = \frac{BQ}{CP} \Rightarrow (3)\ AP \cdot PC = AQ \cdot QB.$$

Puterea punctului P faţă de cercul circumscris ΔABC este (4) $AP \cdot PC = R^2 - OP^2$.
Puterea punctului Q faţă de cercul circumscris ΔABC este (5) $AQ \cdot QB = R^2 - OQ^2$.
Din relaţiile (3), (4) şi (5) $\Rightarrow OP^2 = OQ^2 \Rightarrow OP = OQ$.

O generalizare[2]*(Virgil Nicula).*

Fie ABC un triunghi cu $C(O;R)$ cercul circumscris.

Considerăm punctele $P \in (AC), Q \in (AB)$ şi $M \in (PQ)$ cu $MQ = m \cdot MP, m \neq 0$.

Fie $K \in PB, MK \| AB$ şi $L \in QC, ML \| AC$ .Arătaţi că dacă PQ este tangentă cercului circumscris triunghiului MKL atunci $OQ^2 - m \cdot OP^2 = R^2(1-m)$.

Demonstraţie.

Observăm

că $\left\| \begin{array}{l} \dfrac{MK}{QB} = \dfrac{PM}{PQ} = \dfrac{1}{m+1} \Rightarrow MK = \dfrac{1}{m+1} \cdot QB \\ \dfrac{ML}{PC} = \dfrac{QM}{QP} = \dfrac{m}{m+1} \Rightarrow ML = \dfrac{m}{m+1} \cdot PC \end{array} \right\|$ şi $\left\| \begin{array}{l} \angle KLM = \angle QMK = \angle PQA \\ \angle LKM = \angle PML = \angle QPA \end{array} \right\| \Rightarrow$

$$\Delta KLM \approx \Delta PQA \Rightarrow \frac{MK}{AP} = \frac{ML}{AQ} \Rightarrow \frac{1}{m+1} \cdot \frac{QB}{PA} = \frac{m}{m+1} \cdot \frac{PC}{QA} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow QB \cdot QA = m \cdot PA \cdot PC \Rightarrow OQ^2 - R^2 = m(OP^2 - R^2) \Rightarrow OQ^2 - m \cdot OP^2 = R^2(1-m).$$

Remarcă. Pentru $m = 1$, se obţine problema 1.

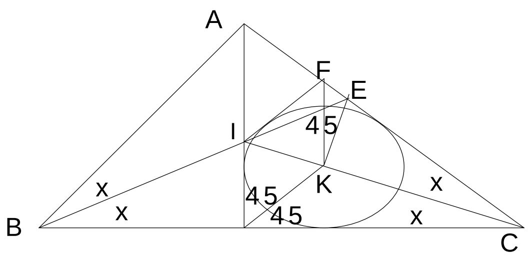
Problema3(problema 4, IMO 2009:autori, *Jan Vonk*(Belgia), *Peter Vandendriessche*(Belgia), *Hojoo Lee*(Corea)).

Fie ABC un triunghi cu $AB = AC$.

Bisectoarele unghiurilor $\angle CAB$ şi $\angle ABC$ taie laturile BC, respectiv CA în punctele D, respectiv E .Fie K centrul cercului înscris în triunghiul ADC .Se ştie că $\angle BEK = 45^0$ .Determinaţi toate valorile posibile pentru $\angle CAB$.

Soluţie 1.(sintetică)

[2] credem că în limbajul matematic se justifică utilizarea termenului **"o generalizare"** în loc de **"generalizarea"** problemei.În acest sens, considerăm că una dintre cele mai inspirate forme de clarificare a afirmaţiei "o generalizare" rămâne următorul exemplu clasic:"Dacă vârfurile unui hexagon sunt pe un cerc, cele trei puncte în care se întâlnesc perechile de laturi opuse sunt coliniare"(*Teorema lui Pascal*).Şi această teoremă s-a tot generalizat, în cazul în care vârfurile hexagonului se află pe o elipsă sau hiperbolă sau parabolă sau pe o conică dată analitic printr-o ecuaţie de gradul al doilea(conică "oarecare").Problema generalizării s-a încheiat arătându-se că dacă şase puncte nu sunt pe aceeaşi conică, atunci cele trei puncte nu mai sunt coliniare.



Fie $I = AD \cap BE$.
Din ipoteză avem
$I = AD \cap BE \cap CK$
(deoarece CK este bisectoarea unghiului C şi $\angle ABC = \angle ACB$).
Fie $IF \perp AC$.
Avem două cazuri.

<u>*Cazul 1.*</u> $F \neq F$. Rezultă $\Delta IDC \equiv \Delta IFC$ (deoarece triunghiurile sunt dreptunghice, cazul C.I : $IF = ID, IC =$ latură comună), de unde $\angle IFK = \angle IDK = 45^0$.Din ipoteză $\angle IEK = \angle BEK = 45^0$.Prin urmare patrulaterul $IFEK$ este inscriptibil (cu diametru IE).De aici $\angle IKE = 90^0$ şi mai departe $\angle KIE = 45^0$.În continuare notăm $\angle IBA = \angle IBC = \angle ICB = \angle ICA = x$ şi avem :
$\angle BIC = 180^0 - \angle KIE = 135^0$, $2x = 45^0$ de unde rezultă $\angle CAB = 180^0 - 4x = 90^0$.
<u>*Cazul 2.*</u> $F = E$.Rezultă că BF este şi bisectoarea şi înălţimea din B, deci $BC = AB$, apoi din ipoteză avem că triunghiul ABC este echilateral .Prin urmare $\angle CAB = 60^0$.
Soluţie 2.(trigonometrică, autor,Virgil Nicula). Notăm $A = 4x$.

$$\left\| \begin{array}{l} \Delta IDC : \dfrac{KI}{KC} = \dfrac{DI}{DC} = tg\angle DCI = tg(45^0 - x) \\ \Delta IEC : \dfrac{KI}{KC} = \dfrac{\sin\angle ECI}{\sin\angle EIC} \cdot \dfrac{\sin\angle KEI}{\sin\angle KEC} = \dfrac{\sin(45^0 - x)}{\sin(90^0 - 2x)} \cdot \dfrac{\sin 45^0}{\sin 3x} \end{array} \right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(45^0 - x)\sin 45^0 = \sin 3x \cos 2x \Leftrightarrow \cos x + \sin x = 2\sin 3x \cos 2x = \sin 5x + \sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos(90^0 - 5x) \Leftrightarrow (x = 90^0 - 5x) \text{ sau } (x + 90^0 - 5x = 0) \overset{(A=4x)}{\Longrightarrow} A \in \{60^0, 90^0\}.$$

O generalizare*(Virgil Nicula).*
Fie ΔABC cu I centrul cercului înscris.Notăm $D = AI \cap BC, E = BI \cap AC$ şi K centrul cercului înscris ΔADC .Arătaţi că dacă $\angle BEK = \angle ADK$ atuci $A \in \{B, 2C\}$.
Demonstraţie.

$$\left\| \begin{array}{l} \Delta IDC : \dfrac{KI}{KC} = \dfrac{DI}{DC} = \dfrac{\sin\angle DCI}{\sin\angle DIC} = \dfrac{\sin\dfrac{C}{2}}{\sin(90^0 - \dfrac{B}{2})} \\ \Delta IEC : \dfrac{KI}{KC} = \dfrac{\sin\angle ECI}{\sin\angle EIC} \cdot \dfrac{\sin\angle KEI}{\sin\angle KEC} = \dfrac{\sin\dfrac{C}{2}}{\sin\dfrac{B+C}{2}} \cdot \dfrac{\sin\dfrac{A+2B}{4}}{\sin\dfrac{3A}{4}} \end{array} \right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\frac{B}{2}\sin\left(\frac{A}{4} + \frac{B}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}\sin\frac{3A}{4} \Leftrightarrow \cos(\frac{A}{4} + B) + \sin\frac{A}{4} = \sin\frac{5A}{4} + \sin\frac{A}{4} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \cos(\frac{A}{4}+B)=\sin\frac{5A}{4} \Leftrightarrow (\frac{A}{4}+B=\frac{5A}{4})$, sau $(\frac{A}{4}+B+\frac{5A}{4}=180^0) \Leftrightarrow A\in\{B,2C\}$.

Remarcă. Pentru $B=60^0$ obţinem $A=60^0$ (triunghiul ABC este echilateral) iar pentru $C=45^0$ obţinem $A=90^0$ (triunghiul ABC este dreptunghic).

Specificul aptitudinilor matematice se reflectă în primul rând în privinţa capacităţii de a generaliza. Aşadar, gândirea generalizată în sfera simbolisticii numerale şi literale, a relaţiilor cantitative şi spaţiale, a obiectelor şi acţiunilor matematice este un privilegiu al matematicienilor (vezi [1]).

Prin urmare, *Carl Jacobi* avea perfectă dreptate!(vezi motto[3]).

Bibliografie

[1] **M. Postolache** - *Metodica predării matematicii în liceu*, Editura Fair Partners, Bucureşti, 2008

[3] De altfel Dan Barbilian spunea că „*Dimulescu pretinde că devenise un tic al meu generalizarea.Are dreptate!*”.

Subiecte propuse în vederea pregătirii concursurilor şcolare

Prof. Ionescu Nicoleta Agenna,
Colegiul Naţional de Arte „Dinu Lipatti”, Bucureşti

1. Să se determine numărul $\overline{mate}$ ştiind că $\overline{mate}$ nu este divizibil cu 3, câtul împărţirii cu 10 al lui $\overline{ma}+\overline{et}$ este m+e şi $m^3 + 1=e$. (cls. a V-a)

2. Să se stabilească dacă $2^{2009} \in [\, 7^{2006}, \infty)$. (cls a VIII-a)

3. Dacă a este număr real să se ordoneze numerele :

$$\frac{1}{2009+|\ a\ |}, \frac{2}{a^2+4019}, \frac{3}{2a^2-a+6029}$$

(cls a VIII-a)

4. Să se determine câte cifre distincte x şi y există astfel încât numărul $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{x+y})$ să fie cub perfect.

(cls. a VII-a)

Posibile soluţii :

1. $\overline{ma}+\overline{et}$ = 10m+a+10e+t
Din T. Î obţin : 10m+a+10e+t = 10(m+e) => a+t=0 ⇔ a=t=o
Cum e cifră => m $\in$ { 1,2 } deci e $\in$ { 2, 9 } Numerele sunt : 1002 care nu convine fiind divizibil cu 3 şi 2009, numărul $\overline{mate}$.

2. $2^5 < 7^2$ şi $2^{2004} < 7^{2004}$
Folosim proprietatea : $\left.\begin{matrix} a < b \\ c < d \end{matrix}\right\}$ => ac <bd , cu a, b, c, d reale strict pozitive

$2^{2009} < 7^{2006}$ deci $2^{2009} \notin [\, 7^{2006}, \infty)$

3. Relaţia dintre primele două fracţii este inversă relaţiei dintre :

2009+$|a\ |$ şi $\frac{a^2+4019}{2}$. Evaluăm diferenţa lor:

$$\frac{a^2+4019}{2} - (2009+|a|) = \frac{a^2+4019-4018-2a}{2} = \frac{a^2-2|a|+1}{2} = (|a|-1)^2 \geq 0$$

De unde prima fracţie este mai mare decât a doua.
În mod similar :

$$\frac{a^2+4019}{2} - \frac{2a^2-a+6029}{3} = \frac{3a^2+12057-4a^2+2a-12058}{6} = \frac{-a^2+2a-1}{6} = -\frac{(a-1)^2}{6} \leq 0$$

ceea ce conduce la următoarea ordine :

$$\frac{1}{2009+|a|} > \frac{2}{a^2+4019} > \frac{3}{2a^2-a+6029}.$$

4. Din calcule simple obţinem :

$2\sqrt{xy}$ cub perfect. Cum x, y cifre => $\sqrt{xy}=2^2$, deci xy=16, astfel

(x, y) $\in$ { (2, 8) , (8, 2) } cu x $\neq$ y.

INELE EUCLIDIENE

Prof. Duţă Liviu- Petruţ
Şcoala Mogoşani, jud. Dâmboviţa

Elementele de aritmetică utilizate încă din antichitate sunt: teorema împărţirii cu rest, algoritmul lui Euclid, noţiunile de elemente prime / ireductibile, *c.m.m.d.c.* şi *c.m.m.m.c.*

S-a pus adeseori întrebarea: *Există şi alte mulţimi de numere sau de altă natură, pentru care se pot da teoreme de împărţire cu rest, ce ne permit să construim şi pentru ele o anumită aritmetică?*

Răspunsul la această întrebare este afirmativ, conceptul matematic justificativ fiind cel de ***inel euclidian*.**

Inelele **Z**, **Q**[x], **R**[x], **C**[x], $\mathbf{Z}_{\mathbf{p}}$[x], sunt euclidiene, elementele prime din aceste inele coincid cu cele ireductibile.

În studiul algebrei superioare, în domeniile de integritate orice element prim este ireductibil, reciproca nefiind întotdeauna adevărată. Spre exemplu, în inelul $\mathbf{Z}[i\sqrt{5}]$ elementul 3 este ireductibil, şi, totuşi, nu este prim.

Există însă şi alte domenii de integritate, ale căror proprietăţi aritmetice se studiază. Astfel întâlnim proprietăţi aritmetice ale mulţimilor de polinoame cu coeficienţi întregi în *n* nedeterminate $\mathbf{Z}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$, $n \geq 1$, polinoame cu coeficienţi într-un corp **K** în *n* nedeterminate $\mathbf{K}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$, $n \geq 2$. Aceste inele de polinoame sunt mai sărace în proprietăţi aritmetice. Ele nu sunt inele euclidiene, deci pentru ele nu există teorema de împărţire cu rest, nici algoritmul lui Euclid, având în schimb proprietatea că elementele lor nenule şi neinversabile au o descompunere în factori primi cu tot ce derivă din această proprietate devenind astfel inele factoriale.

Două dintre cele mai importante teoreme din algebră sunt:

- Teorema de împărţire cu rest pentru numere întregi şi
- Teorema de împărţire cu rest pentru polinoame.

Pe baza acestora se construieşte aritmetica numerelor şi a polinoamelor.

Conceptul matematic care ne ajută să răspundem la întrebarea de mai sus este cel de **INEL EUCLIDIAN.**

- Un **inel euclidian** este un domeniu de integritate *R* pentru care există o funcţie $\varphi : R-\{0\} \to \mathbf{N}$ având proprietatea următoare:
  - Oricare ar fi $a, b \in R, b \neq 0,$ există $q, r \in R$ astfel încât $a = bq+r$ unde $r = 0$ sau $\varphi(a) \leq \varphi(b)$.

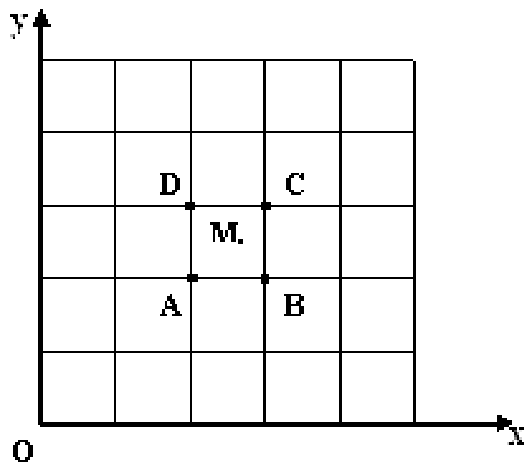
Egalitatea de mai sus se numeşte <u>formula împărţirii cu rest</u> în inelul euclidian *R* iar elementele *q* şi *r* se numesc <u>câtul</u>, respectiv <u>restul</u> împărţirii.

Inelele $Z[i]$, $Z[\sqrt{2}]$, $Z[i\sqrt{2}]$, $Z\left[\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right]$, $Z\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ sunt euclidiene.

Un rezultat remarcabil este inelul $\boldsymbol{Z}[i]=\{m+ni\,/\,m,n\in \boldsymbol{Z}\}$, numit **inelul întregilor lui Gauss** care, împreună cu funcţia $\varphi\ :\ \boldsymbol{Z}[i]\to \boldsymbol{N}$, $\varphi(m+ni)=m^2+n^2$, este un **inel euclidian**.

➢ Pentru a demonstra această proprietate a inelului întregilor lui Gauss vom folosi reprezentarea geometrică a numerelor complexe în plan.

Numărului complex $z=a+bi$, cu $a,b\in \boldsymbol{R}$ i se asociază în plan, punctul M de coordonate (a,b). Numerele complexe din mulţimea $\boldsymbol{Z}[i]$ sunt reprezentate în plan prin puncte ale căror coordonate sunt numere întregi. În felul acesta obţinem o reţea în plan, ca în figura următoare:



Fie $z,z'\in \boldsymbol{Z}[i]$ cu $z'\neq 0$. Fie M un punct în plan asociat numărului complex $\frac{z}{z'}$.

Există un pătrat $ABCD$ din reţea, în care se găseşte punctul M.

Dacă $A(a,b)$, atunci $a,b\in \boldsymbol{Z}$ şi A este asociat numărului complex $q=a+bi$.

Pe de altă parte, cum latura pătratului $ABCD$ este unitatea şi cum A a fost ales cel mai apropiat de M, obţinem că distanţa MA este mai mică decât jumătate din diagonala pătratului $ABCD$.

Deci: $|MA|<\frac{\sqrt{2}}{2}<1$.Dar $|MA|$ este egal cu modulul numărului complex $\frac{z}{z'}-q$.

Deci avem: $\left|\frac{z}{z'}-q\right|<1$

Notăm cu $r=z-qz'$. Avem atunci că $|z-qz'|<|z'|$ sau $|r|<|z'|$ sau $|r|^2<|z'|^2$ şi deci $\varphi(r)<\varphi(z')$.

În concluzie, avem: $z = qz' + r$ cu $\varphi(r) < \varphi(z')$,
ceea ce ne arată şi pe această cale că $\mathbf{Z}[i]$ este euclidian.

Din această demonstraţie rezultă că restul şi câtul împărţirii sunt unic determinate.

Într-adevăr, dacă M este centrul pătratului $ABCD$, atunci putem alege câtul q numărul complex $q=a+bi$, cu $a,b \in \mathbf{Z}$ pentru care (a,b) să fie coordonatele oricăruia din vârfurile pătratului $ABCD$.

BIBLIOGRAFIE:

1. C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Editura Academiei, Bucureşti, 1984.
2. C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Aritmetică şi algebră*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993.
3. C. Năstăsescu, C. Niţă, Ion D. Ion, *Complemente de algebră*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
4. C. Niţă, Ion D. Ion , *Probleme de algebră*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1984.

Inegalităţi

Prof. Mariana Draga-Tătucu şi eleva Nistor Adriana Mihaela

Există o mare gamă de probleme în a căror rezolvare se dovede şte deosebit de importantă folosirea unor inegalită ţi.Trebuie menţionat că majoritatea problemelor admit o rezolvare prin folosirea unor inegalită ţi elementare. În cele ce urmează vom face o scurtă prezentare a unor astfel de probleme.

Problema 1. Să se demonstreze că pentru $\forall a,b,c\in(0,+\infty)$ are loc inegalitatea:
$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$.

Soluţie: Pornim de la inegalitatea evidentă $(a-b)^2\geq 0$,deci $a^2-ab+b^2\geq ab$,de unde se obţine,prin înmulţire cu $a+b$,relaţia:

$$a^3+b^3\geq ab(a+b)\Rightarrow a^3\geq ab(a+b)-b^3\Rightarrow\frac{a^3}{b^2}\geq\frac{a^2}{b}+a-b\ (1)$$

Prin analogie se obţin şi relaţiile: $\frac{b^3}{c^2}\geq\frac{b^2}{c}+b-c\,(2)$ si $\frac{c^3}{a^2}\geq\frac{c^2}{a}+c-a\ (3)$

Adunând relaţiile (1),(2) şi (3) se obţine că:

$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$,adică exact inegalitatea ce trebuia demonstrată.

Problema 2. Să se arate că din oricare şapte numere reale se pot alege două x şi y astfel încât: $0\leq\frac{x-y}{1+xy}\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Soluţie: Cerinţa aminteşte de cunoscuta identitate : $tg(a-b)=\frac{tga-tgb}{1+tga\cdot tgb},\forall a,b\in\mathbb{R}$.

Funcţia tangentă definită pe $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ cu valori in $\mathbb{R}$ este bijectivă. Vom împărţi intervalul $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ in şase părţi egale,deci în intervalele:

$(\frac{-\pi}{2},\frac{-\pi}{3});[\frac{-\pi}{3},\frac{-\pi}{6});[\frac{-\pi}{6},0);[0,\frac{\pi}{6});[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3});[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$,fiecare dintre intervale având lungimea $\frac{\pi}{6}$. Conform principiului lui Dirichlet este clar că măcar două dintre cele şapte numere se află în acelaşi interval de lungime $\frac{\pi}{6}$.Fie aceste două numere a şi b.Este evident că $0 \le |a-b| \le \frac{\pi}{6}$ (1). Tangenta este o funcţie strict crescătoare deoarece $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$.Conform cu relaţia (1),trecând la tangentă avem:

$tg0 \le tg(a-b) \le tg(\frac{\pi}{6})$,deci $0 \le \frac{tga - tgb}{1 + tga \cdot tgb} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$.Să notăm acum $x = tga, y = tgb$.Prin înlocuire obţinem că printre cele 7 numere există două numere x şi y astfel încât $0 \le \frac{x-y}{1+xy} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$,adică ceea ce trebuia demonstrat.

Problema 3: Fie x, y numere reale,nu simultan nule. Să se demonstreze că :
$\frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} \le \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Soluţie: Observăm că cei doi numitori sunt întotdeauna strict pozitivi.Dacă $x + y < 0$ atunci inegalitatea este evidentă (si strictă). Dacă $x + y > 0$, se demonstrează imediat că $x + y \le \sqrt{2(x^2+y^2)}$ (1) şi că $x^2 - xy + y^2 \ge \frac{x^2+y^2}{2}$ (2). Să demonstrăm inegalitatea (1):

$x + y \le \sqrt{2(x^2+y^2)} \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \le 2x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow 2xy \le x^2 + y^2 \Leftrightarrow 0 \le (x-y)^2$,care e evidentă. Să demonstrăm şi inegalitatea (2):

$x^2 - xy + y^2 \ge \frac{x^2+y^2}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 2xy + 2y^2 \ge x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$, inegalitate cunoscută.

Deci din (2) $\Rightarrow \frac{1}{x^2 - xy + y^2} \le \frac{2}{x^2+y^2}$ şi prin înmulţire membru cu membru cu inegalitatea (1): $x + y \le \sqrt{2(x^2+y^2)}$ se obţine că: $\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \le \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.Egalitatea se atinge pentru $x = y > 0$.

Problema 4. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi ascuţitunghic ABC, iar m_a, m_b, m_c lungimile medianelor sale. Să se demonstreze că:
$\frac{m_a^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{m_b^2}{c^2 + a^2 - b^2} + \frac{m_c^2}{a^2 + b^2 - c^2} \ge \frac{9}{4}$.

Soluţie: Amintim teorema medianei:
$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2, 4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2, 4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$. Vom face următoarele notaţii: $x = b^2 + c^2 - a^2, y = a^2 + c^2 - b^2, z = a^2 + b^2 - c^2$; cum $\triangle ABC$ este ascuţitunghic, rezultă că $x > 0, y > 0, z > 0$.Inegalitatea de demonstrat devine succesiv:

$\frac{4x+y+z}{x}+\frac{x+4y+z}{y}+\frac{x+y+4z}{z}\geq 18 \Leftrightarrow 12+(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})+(\frac{y}{z}+\frac{z}{y})+(\frac{z}{x}+\frac{x}{z})\geq 18$,ceea ce e evident adevărat (folosim inegalitatea dintre media aritmetică şi cea geometrică pentru a arăta că $(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})+(\frac{y}{z}+\frac{z}{y})+(\frac{z}{x}+\frac{x}{z})\geq 6$, deoarece ştim că $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2, \forall a,b\in(0,+\infty)$).
Egalitatea se atinge pentru $x=y=z$, adică atunci când triunghiul este echilateral.

Problema 5. Dacă $a,b,c>0$ şi $a+b+c=1$, demonstraţi că:
$\frac{\sqrt{ab}}{1-c}+\frac{\sqrt{bc}}{1-a}+\frac{\sqrt{ca}}{1-b}\leq\frac{1}{8}(3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$.

Soluţie: Din $\frac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$ putem scrie $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$ şi $\frac{4}{a+b}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, care prin înmulţire dau $\frac{4\sqrt{ab}}{a+b}\leq\frac{a+b}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$ .Ultima relaţie este echivalentă cu
$\frac{\sqrt{ab}}{1-c}\leq\frac{1}{8}(2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a})$.
Analog obţinem $\frac{\sqrt{bc}}{1-a}\leq\frac{1}{8}(2+\frac{b}{c}+\frac{c}{b})$ şi $\frac{\sqrt{ca}}{1-b}\leq\frac{1}{8}(2+\frac{a}{c}+\frac{c}{a})$.
Adunând cele trei relaţii şi având în vedere că $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}=\frac{1-b}{b}=\frac{1}{b}-1$ şi analoagele, se obţine inegalitatea din enunţ.Egalitatea are loc pentru $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Problema 6. a)Să se arate că în orice triunghi are loc identitatea:
$(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})\cos A+(\frac{a}{c}+\frac{c}{a})\cos B+(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})\cos C=3$.
b)Să se arate că într-un triunghi ascuţitunghic au loc relaţiile:
$8\leq(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})(\frac{c}{a}+\frac{a}{c})\leq\frac{4R^2}{S^2-(2R+r)^2}$.

Soluţie: a) Avem: $\sum\frac{b^2+c^2}{bc}\cos A=\frac{1}{2a^2b^2c^2}\sum a^2(b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)=$
$=\frac{1}{2a^2b^2c^2}\sum\left[a^2(b^4+c^4+2b^2c^2)-a^4b^2-a^4c^2\right]=\frac{6a^2b^2c^2}{2a^2b^2c^2}=3.$

b) Avem $3=\sum(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})\cos A\geq 3\sqrt[3]{\prod(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})\cos A}\Rightarrow 1\geq\prod(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})\cdot\prod\cos A=$
$\prod(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})\cdot\frac{S^2-(2R+r)^2}{4R^2}\Rightarrow\prod(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})\leq\frac{4R^2}{S^2-(2R+r)^2}$.

Prima inegalitate rezultă din $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2$ şi analoagele.

Rezolvarea următoarelor probleme este lăsată cititorului:

1) Fie x, y, z numere reale astfel încât $x+2y+3z=\frac{11}{12}$. Să se arate că

$$6(3xy+4xz+2yz)+6x+3y+4z+72xyz\leq\frac{107}{18}$$. Când se atinge egalitatea?

2) Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghi, atunci

$$ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2\leq 2(ab+bc+ca)$$

3) Fie $a, b, c>0$. Arătaţi că: $\frac{a+b+c}{abc}\leq\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

4) Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi,atunci demonstraţi că:

$$\frac{3}{2}\leq\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$$

5) Dacă $a, b, c>0$, demonstraţi că $abc(a+b+c)\leq a^3b+b^3c+c^3a$

6) Fie a, b, c numere reale pozitive cu $abc=1$. Să se arate că:

$$1+\frac{3}{a+b+c}\geq\frac{6}{ab+bc+ca}$$

7) Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, demonstraţi că:

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{c(c+a)}\geq\frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

<u>BIBLIOGRAFIE:</u>

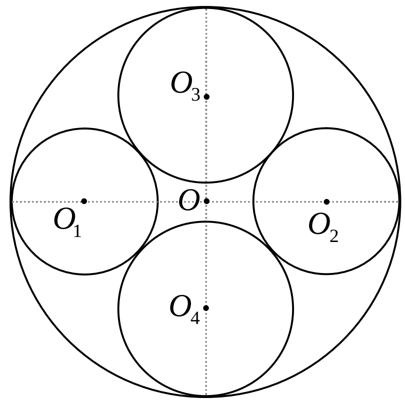
1.”10 ani de olimpiade balcanice ale juniorilor” , editura Paralela 45
2.”Gazeta Matematică,nr.3/2008”

APLICAŢII ALE **ANALIZEI MATEMATICE** ÎN **GEOMETRIA PLANĂ (6)**

Prof. Poenaru Dan , Colegiul Economic „I.Pop" Cluj - Napoca

Aplicaţia nr.1

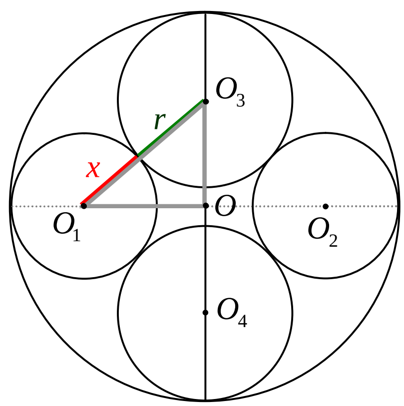
În cercul $C(O)$ de rază $R=1$ se consideră cercurile $C(O_1)$ şi $C(O_2)$ congruente ,nesecante, tangente interior la cercul $C(O)$ având centrele O_1 şi O_2 situate pe un diametru al cercului $C(O)$. Se construiesc deasemenea cercurile nesecante $C(O_3)$ şi $C(O_4)$ tangente exterior cu cercurile $C(O_1)$ respectiv $C(O_2)$ şi tangente interior cercului $C(O)$. Se cere să se studieze variaţia sumei de arii a celor patru cercuri din interiorul cercului $C(O)$.



SOLUŢIE: Notăm cu x lungimea razei cercurilor $C(O_1)$ şi $C(O_2)$ iar cu r lungimea razei cercurilor $C(O_3)$ şi $C(O_4)$. Lungimea x este variabilă determinând variaţia lungimii r. Se observă că, în condiţiile problemei, atât variabilele x şi r respectă relaţiile: $0 \le x \le \frac{1}{2}$ şi $0 \le r \le \frac{1}{2}$ (*) . Se caută în continuare o exprimare a razei r în funcţie de variabila x.

În triunghiul dreptunghic ΔO_1OO_3 avem: $O_1O_3 = x+r$, $OO_1 = 1-x$ iar $OO_3 = 1-r$; aplicând teorema lui Pitagora obţinem: $(x+r)^2 = (1-r)^2 + (1-x)^2$. Efectuând calculele se ajunge la relaţiile:

$$x = \frac{1-r}{1+r} \quad \text{şi} \quad r = \frac{1-x}{1+x} \quad (**)$$



Din (*) şi (**) obţinem $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$

Suma ariilor celor patru cercuri este

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi r^2 = 2\pi(x^2 + r^2) = 2\pi\left(x^2 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right).$$

Construim funcţia : $f:\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]\to R,\quad f(x)=2\pi\left(x^2+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right)$

Valorile funcţiei la capetele intervalului sunt $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{13\pi}{18}=f\left(\frac{1}{2}\right)$

Derivata funcţiei este $f'(x)=2\pi\left(x^2+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right)'=2\pi\left(2x+2\frac{x-1}{x+1}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'\right)$

Se ajunge la $f'(x)=4\pi\left(x+\frac{2(x-1)}{(x+1)^3}\right)$; urmează ecuaţia derivatei :

$$f'(x)=0\Leftrightarrow$$
$$x+\frac{2(x-1)}{(x+1)^3}=0\Leftrightarrow x(x+1)^3+2(x-1)=0\Leftrightarrow x^4+3x^3+3x^2+3x-2=0\Leftrightarrow$$
$$x^4+2x^3-x^2+x^3+2x^2-x+2x^2+4x-2=0\Leftrightarrow$$
$$x^2(x^2+2x-1)+x(x^2+2x-1)+2(x^2+2x-1)=0\Leftrightarrow$$
$$(x^2+2x-1)\underbrace{(x^2+x+2)}_{\neq 0}=0\Rightarrow x^2+2x-1=0$$

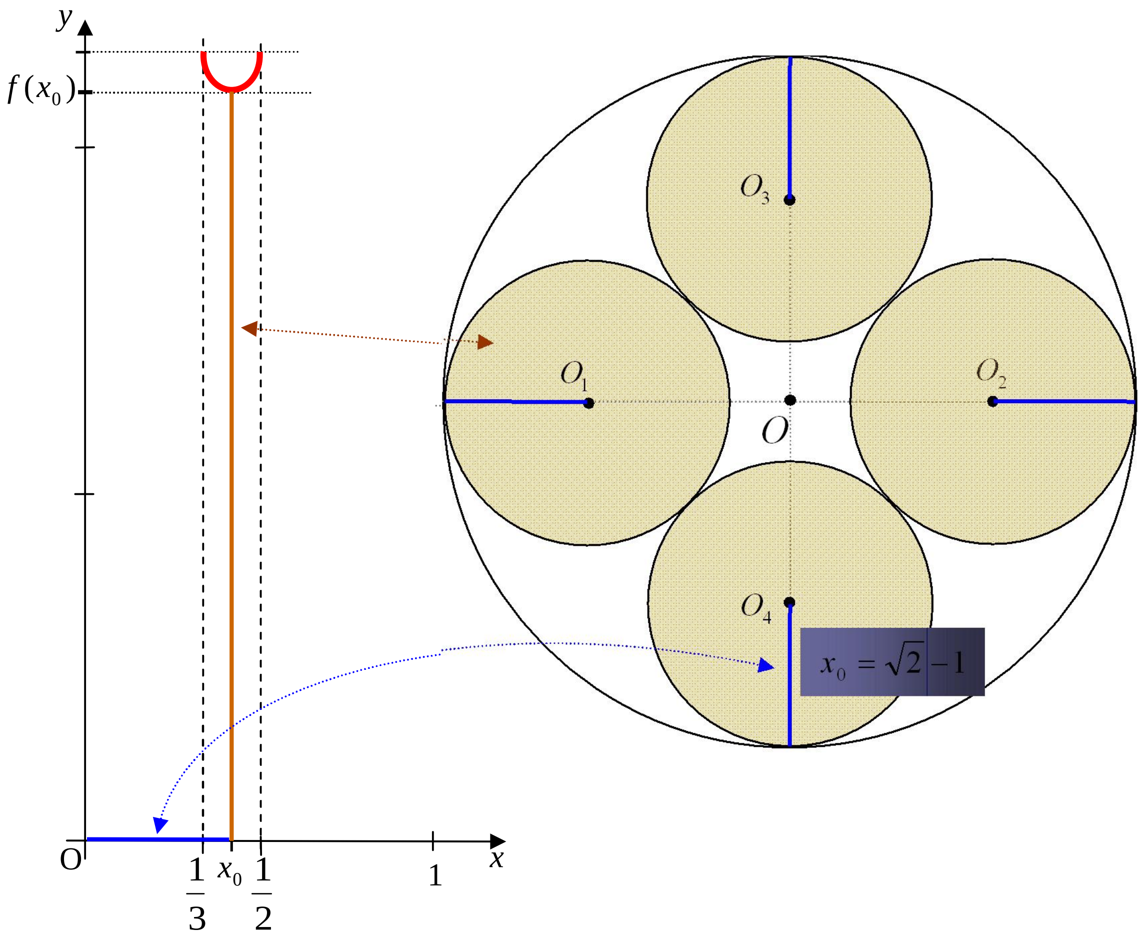
Soluţia ecuaţiei este $x_0=\sqrt{2}-1\in\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$ iar $f(\sqrt{2}-1)=4\pi(\sqrt{2}-1)^2$

Derivata funcţiei se mai poate scrie astfel:

$f'(x)=4\pi\cdot\frac{(x^2+2x-1)(x^2+x+2)}{(x+1)^3}$ de unde deducem că semnul derivatei este determinat de semnul trinomului x^2+2x-1 ceilalţi factori fiind pozitivi.

Se prezintă în continuare tabloul de variaţie şi grafi cul funcţiei punându-se în evidenţă conexiunile dintre aria invocată de problema de geometrie plană şi elementele de analiză matematică ce permite studiul corect al variaţiei ariei.

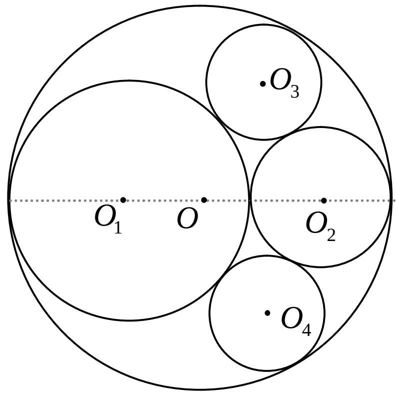
x	$1/3$		$\sqrt{2}-1$		$1/2$
$f'(x)$		- - - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + + +	
$f(x)$	$13\pi/18$	$\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow$	$4\pi(\sqrt{2}-1)^2$	$\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$	$13\pi/18$



COMENTARIU:Aşa cum numărul $\sqrt{2}$ este lungimea diagonalei pătratului de latură 1, numărul iraţional $\sqrt{2}-1$ poate avea următoarea interpretare geometrică: este lung imea razei a patru cercuri egale înscrise într-un cerc de rază 1.

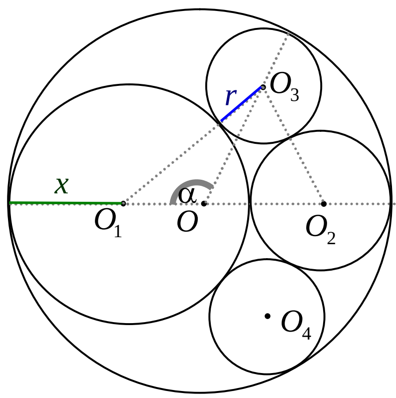
Aplicaţia nr.2

În cercul $C(O)$ de rază $R=1$ se înscriu două cercuri tangente exterior $C(O_1)$ şi $C(O_2)$. Se consideră de asemenea cercurile $C(O_3)$ şi $C(O_4)$ tangente interior cercului $C(O)$ şi tangente exterior cu cercurile $C(O_1)$ şi $C(O_2)$. Să se studieze variaţia sumei perimetrelor cercurilor $C(O_1)$, $C(O_2)$, $C(O_3)$ şi $C(O_4)$.



SOLUŢIE: Notăm cu x lungimea razei cercului $C(O_1)$. Remarcăm faptul că variaţia lui x determină variaţia atât a cercurilor $C(O_1)$ şi $C(O_2)$ cât şi a cercurilor congruente $C(O_3)$ şi $C(O_4)$. În cele ce urmează se caută o exprimare a lungimii razelor cercurilor $C(O_2)$ şi $C(O_3)$ în funcţie de x.

Obţinem uşor raza cercului $C(O_2)$ aceasta fiind dată de $\dfrac{2-2x}{2}=1-x$. Notăm cu r lungimea razei cercului $C(O_3)$ şi ne fixăm atenţia asupra triunghiurilor OO_1O_3 şi OO_2O_3; notăm deasemenea cu $\alpha=m(O_1OO_3)$. Laturile acestor triunghiuri au lungimile:



ΔOO_1O_3: $OO_1=1-x$, $OO_3=1-r$ şi $O_1O_3=x+r$

ΔOO_2O_3: $OO_2=x$, $OO_3=1-r$ şi $O_2O_3=1-x+r$

Aplicăm convenabil teorema cosinusurilor în cele două triunghiuri .

În ΔOO_1O_3: $\cos\alpha=\dfrac{(1-x)^2+(1-r)^2-(x+r)^2}{2(1-x)(1-r)}=\dfrac{1-x-r-xr}{(1-x)(1-r)}$ (*)

În ΔOO_2O_3: $\cos(\pi-\alpha)=\dfrac{x^2+(1-r)^2-(1-x+r)^2}{2x(1-r)}=\dfrac{-2r+x+xr}{x(1-r)}=-\cos\alpha \Rightarrow$

$\cos\alpha=\dfrac{2r-x-rx}{x(1-r)}$ (**). Din (*) şi (**) $\Rightarrow \dfrac{1-x-r-xr}{(1-x)(1-r)}=\dfrac{2r-x-rx}{x(1-r)}\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1-x-r-xr}{(1-x)}=\dfrac{2r-x-rx}{x}\Rightarrow r=\dfrac{x-x^2}{x^2-x+1}$.

Suma perimetrelor celor patru cercuri este

$$P=2\pi\,x+2\pi(1-x)+4\pi\,r=2\pi\left(x+1-x+2r\right)=2\pi(1+2r)=$$

$=2\pi\left(1+2\cdot\dfrac{x-x^2}{x^2-x+1}\right)$. Condiţiile problemei impun $0\le x\le 1$; construim funcţia:

Construim funcţia $f:[0,1]\to R$, $f(x)=2\pi\left(1+2\cdot\dfrac{x-x^2}{x^2-x+1}\right)$

Funcţia este continuă şi derivabilă pe $[0,1]$ iar $f(0)=f(1)=2\pi$. Ne încadrăm astfel în condiţiile teoremei lui Rolle $\Rightarrow \exists c\in(0,1)$ astfel încât $f'(c)=0$. Derivata funcţiei este $f'(x)=\dfrac{4\pi}{(x^2-x+1)}(-2x+1)$ şi $f'(x)=0$ conduce la soluţia $x_0=\dfrac{1}{2}\Rightarrow f(x_0)=\dfrac{10\pi}{3}$

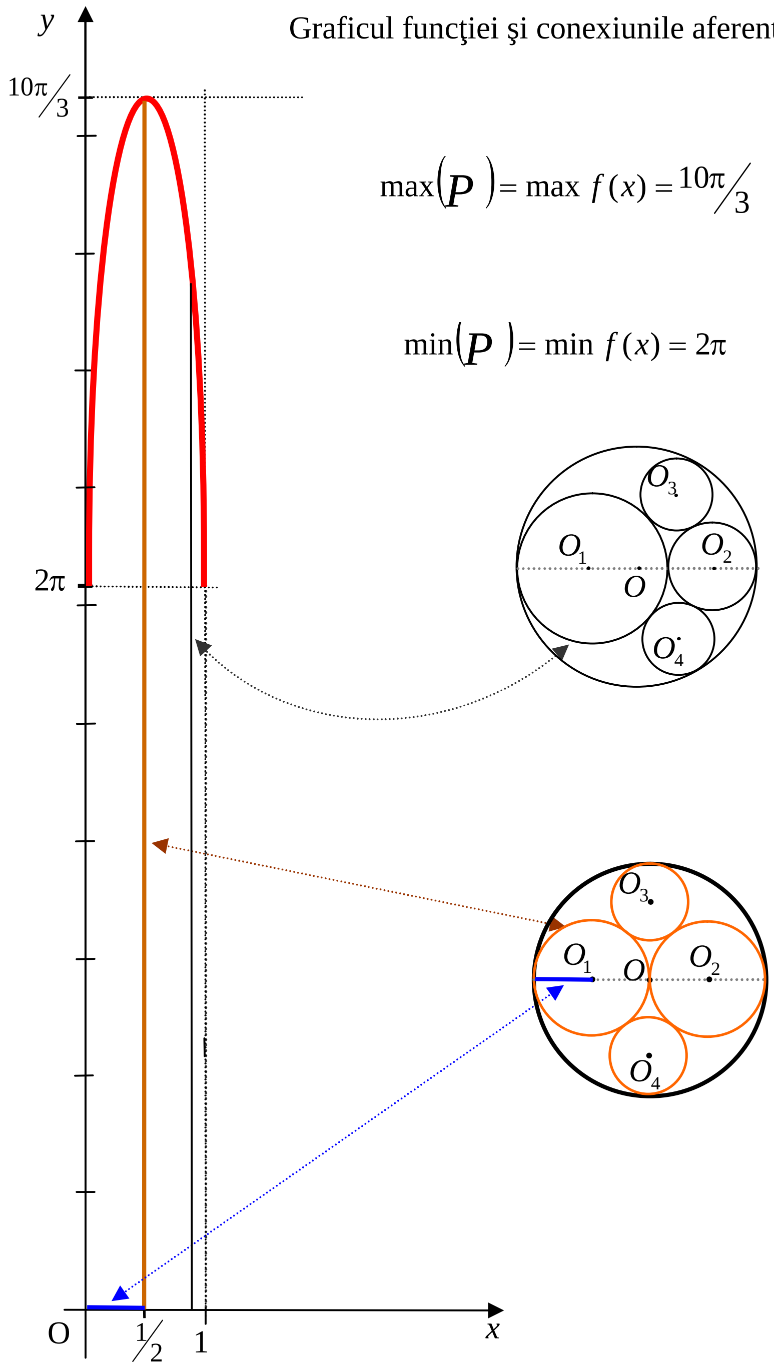
Tabloul de variaţie:

x	0		$1/2$		1
$f'(x)$		+ + + + + + + + +	0	- - - - - - - - - - -	
$f(x)$	2π	↗↗↗↗↗↗	$10\pi/3$	↘↘↘↘↘↘	2π

Graficul funcţiei şi conexiunile aferente

$$\max(P) = \max f(x) = 10\pi/3$$

$$\min(P) = \min f(x) = 2\pi$$



O CLASĂ DE IRAŢIONALE PĂTRATICE CU PERIOADA FRACŢIEI CONTINUE DE LUNGIME 4

CORNELIU MĂNESCU-AVRAM

Abstract. We investigate the dependence of the length of periods of some quadratic irrationals from the corresponding discriminant. We describe a class of quadratic irrationals with the length of the period equal to 4.

Keywords :periodic continued fraction, quadratic irrational

Mathematics Subject Classification (2010) 11A55, 11D09, 11R11

Orice $x \in \mathbb{R}$ se poate reprezenta ca o fracţie continuă

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}} = [a_0; a_1, a_2, \dots],$$

unde $a_0 \in \mathbb{Z}$ şi $a_i \in \mathbb{N}$ pentru orice $i \geq 1$. Numerele raţionale se reprezintă ca fracţii continue finite, folosind algoritmul lui *Euclid*. O fracţie continuă infinită se numeşte *periodică* dacă există numerele naturale nenule k, m astfel ca $a_{k+i+j} = a_{k+j}$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$, $\forall\, j \in \{1, 2, \dots, m\}$. În acest caz, fracţia continuă se reprezintă sub forma $\left[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k, \overline{a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+m}}\right]$.

O rădăcină reală iraţională a unui polinom de gradul doi din $\mathbb{Z}[X]$ se numeşte *iraţională pătratică*. Un număr real se reprezintă printr-o fracţie continuă periodică dacă şi numai dacă este o iraţională pătratică (*Euler*, *Lagrange*). Dacă $r \in \mathbb{Q}$, $r > 1$, nu este pătrat perfect, atunci

$$\sqrt{r} = \left[a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 2a_0}\right],$$

(*Lagrange, Galois*). În particular, dacă $D \in \mathbb{N}^*$ este liber de pătrate, atunci $\sqrt{D}$ se reprezintă printr-o fracţie continuă periodică, având perioada de lungime m, astfel încât primele $m - 1$ câturi parţiale formează un şir palindromic.

Lungimea $l\left(\sqrt{D}\right)$ a perioadei fracţiei continue care reprezintă pe $\sqrt{D}$ este mai mică decât $2D$, iar câturile parţiale sunt mai mici decât $2\sqrt{D}$ (*Lagrange*). Mai recent [1] [2] s-a arătat că $l\left(\sqrt{D}\right) =$

$= O\left(\sqrt{D}\ln D\right)$, unde simbolul O înseamnă "asimptotic proporţional cu".

Reprezentareaa lui $\sqrt{D}, D \in \mathbb{N}$ liber de pătrate, ca fracţie continuă este utilă în rezolvarea [3] [6] ecuaţiei lui *Pell*, în particular se poate determina astfel unitatea fundamentală din corpul pătratic real $\mathbb{Q}\left(\sqrt{D}\right)$. Determinarea lungimii perioadei fracţiei continue ca funcţie de D este însă o problemă dificilă. Exemplele următoare sugerează faptul că $l\left(\sqrt{D}\right)$ este relativ mic, dacă D este apropiat de un pătrat perfect :

$$\sqrt{a^2+1} = \left[a;\overline{2a}\right],$$

$$\sqrt{a^2-1} = \left[a-1;\overline{1,2a-1}\right],$$

$$\sqrt{a^2+2} = \left[a;\overline{a,2a}\right],$$

$$\sqrt{a^2-2} = \left[a-1;\overline{1,a-2,1,2a-2}\right],$$

$$\sqrt{a^2+3} = \left[a;\overline{\frac{2a}{3},2a}\right], 3|a,$$

$$\sqrt{a^2-3} = \left[a-1;\overline{1,\frac{2a-6}{3},1,2a-2}\right], 3|a,$$

$$\sqrt{a^2+4} = \left[a;\overline{\frac{a}{2},2a}\right], 2|a,$$

$$\sqrt{a^2+4} = \left[a;\overline{\frac{a-1}{2},1,1,\frac{a-1}{2},2a}\right], 2|a-1,$$

$$\sqrt{a^2-4} = \left[a-1;\overline{1,\frac{a-4}{2},1,2(a-1)}\right], a>4, 2|a,$$

$$\sqrt{a^2-4} = \left[a-1;\overline{1,\frac{a-3}{2},2,\frac{a-3}{2},1,2a-2}\right],\ a>3,\ 2|a-1.$$

Sierpiński [3] determină numerele naturale D pentru care $l\left(\sqrt{D}\right)$ este egal cu 1, 2 sau 3. În aceeaşi lucrare se arată că $l\left(\sqrt{991}\right) = 60$. Se observă că 991 = 31^2 + 30, deci se poate presupune că numerele $D = a^2 + a - 1$ au $l\left(\sqrt{D}\right)$ relativ mare. Avem însă următorul rezultat surprinzător :

Teorema 1. Dacă $D = (5k+2)^2 + 5k + 1$, atunci $\sqrt{D} = \left[5k+2;\overline{2,2k,2,10k+4}\right]$, deci $l\left(\sqrt{D}\right) =$

= 4.

DEMONSTRAŢIE : Există [3] un procedeu general de calcul pentru fracţiile continue ale iraţionalelor pătratice, noi vom folosi însă metoda direct ă. Este suficient să arătăm că ecuaţia

$$x = a + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{a+x}}}}, \text{ cu } b = \frac{2(a-2)}{5}, \tag{1}$$

are soluţia pozitivă $x = \sqrt{a^2 + a - 1}$. Avem succesiv

$2 + \frac{1}{x+a} = \frac{2x+2a+1}{x+a}$,

$\frac{2a-4}{5} + \frac{x+a}{2x+2a+1} = \frac{(4a-3)x + 4a^2 - a - 4}{5(2x+2a+1)}$,

$2 + \frac{5(2x+2a+1)}{(4a-3)x+4a^2-a-4} = \frac{(8a+4)x+8a^2+8a-3}{(4a-3)x+4a^2-a-4}$,

$x = a + \frac{(4a-3)x+4a^2-a-4}{(8a+4)x+8a^2+8a-3}$,

$(8a+4)x^2 = 8a^3 + 12a^2 - 4a - 4$, $(2a+1)x^2 = (2a+1)(a^2+a-1)$, deci $x^2 = a^2 + a - 1$, de unde

$x = \sqrt{a^2+a-1}$, deoarece am presupus $x > 0$. □

Observaţii. 1) Avem şi

$\sqrt{a^2+a} = \left[a; \overline{2, 2a}\right]$,

$\sqrt{a^2+a+1} = \left[a; \overline{1, 1, \frac{2(a-1)}{3}, 1, 1, 2a}\right], 3 \mid a-1$,

de unde rezultă că distanţa mare a lui D faţă de cel mai apropiat pătrat perfect este o condiţie necesară pentru ca $l\left(\sqrt{D}\right)$ să fie mare, dar această condiţie nu este şi suficientă.

2) Există alte exemple asemănătoare celui din teorema precedentă : dacă $a \equiv 4 \pmod 9$ şi $D = a^2 + a - 2$, atunci $\sqrt{D} = \left[a; \overline{2, \frac{2(a-4)}{9}, 2, 2a}\right]$.

Aceste numere D sunt "departe " de pătratele unor numere întregi, dar sunt "aproape" de pătratele unor numere raţionale :

$$a^2 + a - 1 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}, \qquad a^2 + a - 2 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4},$$

ceea ce explică şi influenţa asupra lui $l\left(\sqrt{D}\right)$ a clasei de resturi modulo 5, respectiv 9. Fracţiile continue ale iraţionalelor pătratice $\sqrt{rs}$ şi $\sqrt{\frac{r}{s}}$, $r, s \in \mathbb{N}^*$, $(r,s) = 1$, sunt în strânsă legătură [5].

Este utilă în anumite situaţii (problema liu *Eisenstein* [4]) compararea numerelor $l\left(\sqrt{D}\right)$ şi $l\left(\frac{1+\sqrt{D}}{2}\right)$. În condiţiile teoremei 1 are loc următorul rezultat

Teorema 2. Sunt adevărate egalităţile

$$l\left(\frac{1+\sqrt{D}}{2}\right)=\begin{cases}4, 2\mid k-1\\ 8, 2\mid k\end{cases}.$$

DEMONSTRAŢIE : Vom demonstra egalitaţile

$$\frac{1+\sqrt{D}}{2}=\begin{cases}\left[\frac{a+1}{2};\overline{4,\frac{a-2}{5},4,a}\right], 2\mid a-1,\\ \left[\frac{a}{2};\overline{1,2,1,\frac{a-7}{5},1,2,1,a-1}\right], 2\mid a,\end{cases}$$

dacă $D = a^2 + a - 1$, $a = 5k + 2$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Fie $x=\sqrt{D}, y=\frac{1+x}{2}$. Din (1) se obţine

$$y=\frac{1+x}{2}=\frac{a+1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{a+x}}}}=\frac{a+1}{2}+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\cdot\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{a+x}}}}=$$

$$=\frac{a+1}{2}+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\frac{b}{2}+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\frac{a-1}{2}+y}}}},$$

ceea ce demonstrază prima egalitate.

Pentru a demonstra a doua egalitate, trebuie să verificăm că ecuaţia

$$y=\frac{a}{2}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{a-7}{5}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{a}{2}-1+y}}}}}}}}$$

are soluţia $y = \frac{1+\sqrt{a^2+a-1}}{2}$.

Verificarea acestei afirmaţii se face la fel ca în demonstraţia teoremei precedente. □

Bibliografie

[1] Hickerson, Dean R. (1973), *Length of period of simple continued fraction expansion of* $\sqrt{d}$, Pacific J. Math. **46** : 429-432

[2] Podsypanin, E. V. (1982), *Length of the period of a quadratic irrational*, Journal of Soviet Mathematics **18** : 919-923

[3] Sierpiński, W., *Elementary Theory of Numbers*, Polish Scientific Publishers, 1988

[4] Williams, Kenneth S., Buck, Nicholas, *Comparison of the lengths of the continued fractions of* $\sqrt{D}$ *and* $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{D}\right)$, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 120, No. 4, April 1994

[5] van der Poorten, A. J., Walsh, P. G., *A Note on Jacobi Symbols and Continued Fractions*, The American Mathematical Monthly, Volume 106, Number 1, pp. 52 -56, January 1999

[6] Hardy, G. H., Wright, E. M., *An Introduction to the Theory of Numbers, Sixth Edition*, Oxford University Press, 2008