

MODEL DE TEST ÎNȚIAL PENTRU GIMNAZIU SEMESTRUL I 2011-2012

NECULAI STANCIU¹ și ROXANA MIHAELA STANCIU²

TEST DE EVALUARE ÎNȚIALĂ

Disciplina Matematică

Anul școlar 2011-2012

Clasa a V-a

- Pentru rezolvarea corectă a tuturor cerințelor din Partea I și din Partea a II-a se acordă 90 de puncte. Din oficiu se acordă 10 puncte.
- Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru efectiv este de 45 minute.

PARTEA I La exercițiile 1. și 2. scrieți numai rezultatele. La exercițiul 3. scrieți (A) dacă propoziția este adevărată și (F) dacă propoziția este falsă. (45 de puncte)

(20p) 1. Efectuați: a) $3589+579$; b) $17001-238$; c) 321×48 ; d) $14580:3$.

(5p) 2. Desenați un dreptunghi.

3. Precizați, pentru fiecare propoziție, dacă este adevărată sau falsă

(5p) a) Cel mai mare număr impar de două cifre est 98.

(5p) b) Numărul 9901 este mai mare decât numărul 9109.

(5p) c) Numărul 782 este de 218 mai mare decât numărul 1000.

(5p) d) Restul împărțirii numărului 20112011 la 2 este 1.

PARTEA a II-a La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

(45 de puncte)

(15p) 4. Efectuați: $100 + [100 : (55 - 10 : 2) + 48 : 8 \times 6]$.

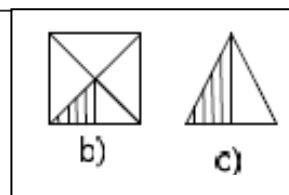
5. Determinați:

(7p) a) numărul x știind că este jumătatea numărului 984.

(6p) b) fracția din pătrat care reprezintă partea nehașurată.

(7p) c) fracția din triunghi care reprezintă partea nehașurată

(10p) 6. Determinați două numere naturale care au suma 103, câtul 4 și restul 3.



¹ Profesor, Școala cu clasele I-VIII „George Emil Palade”, Buzău

² Profesor, Liceul cu Progam Sportiv Iolanda Balas Sotter, Buzău

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**PARTEA I****(45 de puncte)**

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie punctajul maxim prevăzut în dreptul fiecărei cerințe, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

Nr. item	1.a)	1.b)	1.c)	1.d)	2.	3.a)	3.b)	3.c)	3.d)
Rezultate	4168	16763	15408	4860	desen	F	A	F	A
Punctaj	5p	5p	5p	5p	5p	5p	5p	5p	5p

PARTEA a II-a**(45 de puncte)**

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

4.	$100 + [100 : (55 - 5) + 48 : 8 \times 6] =$ $= 100 + (100 : 50 + 6 \times 6) =$ $= 100 + 2 + 36 = 138.$	5p 5p 5p
5.a)	$984 \times 2 =$ $= 1968.$	3p 4p
b)	Șapte optimi	6p
c)	O doime	7p
6.	$a + b = 103$	3p
	$a = 4b + 3$	3p
	$a = 83, b = 20.$	4p

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

MATRICEA DE SPECIFICAȚII - TEST DE EVALUARE ÎNȚIALĂ

CLASA a V-a

Competențe de evaluat Conținuturi	C1	C2	C3	C4	C5	C6	Total
Scrierea în forme echivalente a unor numerelor naturale	I3a.(5p)						5p
Introducerea intuitivă (prin desene: decupare, hașurare, colorare) a noțiunii de fracție; figuri geometrice		I2.(5p) II5b.(4p) II5c.(3p)	II5b.(3p) II5c.(3p)				18p
Exerciții de calcul cu numere naturale, urmărind respectarea ordinii efectuării operațiilor și folosirea corectă a parantezelor				II4.(15p)			15p
Operații cu numere naturale				II.(20p)			20p
Operații de adunare, scădere, înmulțire, împărțire care derivă din: "cu atât mai mult", "cu atât mai puțin", "de atâtea ori mai mult", "de atâtea ori mai puțin"	I3b.(3p) I3c.(3p) I3d.(3p)					I3b.(2p) I3c.(2p) I3d.(2p)	15p
Transpunerea unei situații problemă, în limbaj matematic					II6.(4p)		4p
Stabilirea datelor, a necunoscutelor și a operațiilor prin care se ajunge la rezolvarea unei probleme					II5a.(7p) II6.(1p)	II6.(2p)	10p
Scheme simple pentru a figura pe scurt datele și pașii de rezolvare a unei probleme.					II6.(1p)	II6.(2p)	3p
Total	14p	12p	6p	35p	13p	10p	90p

COMPETENȚELE DE EVALUAT ASOCIATE TESTULUI DE EVALUARE ÎNȚIALĂ PENTRU

CLASA a V- a

- C1. Identificarea, în contexte variate, a unor corespondențe simple după reguli date
 C2. Recunoașterea unor figuri geometrice
 C3. Utilizarea numerelor fracționare pentru a exprima subdiviziuni ale întregului
 C4. Aplicarea regulilor de calcul și folosirea parantezelor în efectuarea operațiilor cu numere naturale
 C5. Analizarea, pe baza unui plan simplu de idei, a demersului parcurs în rezolvarea unei ecuații sau a unei probleme
 C6. Interpretarea semnificației operațiilor aritmetice în rezolvarea unor situații problemă

TEST DE EVALUARE ÎNȚIALĂ**Disciplina Matematică****Anul școlar 2011-2012****Clasa a VI-a**

- Pentru rezolvarea corectă a tuturor cerințelor din Partea I și din Partea a II-a se acordă 90 de puncte. Din oficiu se acordă 10 puncte.
- Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru efectiv este de 45 minute.

PARTEA I Scrieți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.**(45 de puncte)****(5p) 1.** Rezultatul calculului $(2 - 1) : 4$ este:

- A. 4 B. 1 C. 0,25 D. 0,5

(5p) 2. Se dau mulțimile $A = \{1,5,13,35\}$ și $B = \{1,5,35,2011,2012\}$. Cea mai mare cifră care aparține mulțimii $A \cap B$ este:

- A. 35 B. 2012 C. 2011 D. 5

(5p) 3. Cifra x pentru care numărul $\overline{729x}$ este divizibil cu 9 poate fi:

- A. 0 B. 2 C. 4 D. 6

(5p) 4. Rezultatul calculului $11111111 : 9$ este:

- A. 12345678 B. 123679 C. 12345679 D. 123579

(5p) 5. Numărul 1,05 transformat într-o fracție ordinară este egal cu:

- A.
- $\frac{21}{10}$
- B.
- $\frac{21}{20}$
- C.
- $\frac{105}{10}$
- D.
- $\frac{105}{900}$

(5p) 6. Media aritmetică a numerelor 1,01 și 9,01 este egală cu:

- A. 5 B. 6,01 C. 5,01 D. 10,02

(5p) 7. Perimetrul unui pătrat cu aria 81 cm^2 este:

- A. 36 m B. 81 cm C.
- $\frac{81}{4} \text{ cm}$
- D. 36 cm

(5p) 8. Transformând un litru în cm^3 se obține:

- A.
- 1 cm^3
- B.
- 100 cm^3
- C.
- 1000 cm^3
- D.
- 10000 cm^3

(5p) 9. Rezultatul calculului $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ este:

- A.
- $\frac{2}{6}$
- B.
- $\frac{1}{8}$
- C.
- $\frac{1}{6}$
- D.
- $\frac{3}{4}$

PARTEA a II-a La următoarele probleme se cer rezolvări complete.**(45 de puncte)****(9p) 10.** Scrieți ca putere $4^8 \cdot 64^3 \cdot 2^5 \cdot 8^2$.**(9p) 11.** Rezolvați în mulțimea numerelor naturale, ecuația $0,3x - 2,2 = 3,2 - 0,6x$.**(9p) 12.** O persoană cumpără 2 kg de mere cu 3 lei/kg și 4 kg de prune cu 1,5 lei/kg. Cât costă în medie un kilogram de fructe cumpărate?**(9p) 13.** Bunicul oferă nepotului 180 de timbre și rămâne astfel cu 60% din numărul total de timbre pe care le avea. Câte timbre a avut bunicul inițial?**(9p) 14.** Ana și Dan au rezolvat probleme de matematică. În timp ce Dan rezolvă 4 probleme, Ana rezolvă 5 probleme. Câte probleme a rezolvat fiecare dacă împreună au rezolvat 108 probleme?

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**PARTEA I****(45 de puncte)**

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie punctajul maxim prevăzut în dreptul fiecărei cerințe, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

Nr. item	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Rezultate	C.	D.	A.	C.	B.	C.	D.	C.	D.
Punctaj	5p	5p	5p	5p	5p	5p	5p	5p	5p

PARTEA a II-a**(45 de puncte)**

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

10.	$4^8 = (2^2)^8 = 2^{16}$	2p
	$64^3 = (2^6)^3 = 2^{18}$	2p
	$2^5 = 2^5$	2p
	$8^2 = (2^3)^2 = 2^6$	2p
	Finalizare: 2^{45}	1p
11.	$0,3x + 0,6x = 3,2 + 2,2$	3p
	$0,9x = 5,4$	3p
	$x = 5,4 : 0,9 = 6$	3p
12.	$2 \times 3 = 6$ lei merele	2p
	$4 \times 1,5 = 6$ lei prunele	2p
	$(6+6):6=2$ lei/kg.	5p
13.	$x - 180 = \frac{60}{100} \cdot x$	3p
	$100x - 18000 = 60x$	3p
	$40x = 18000 \Rightarrow x = 450$ de timbre	3p
14.	Ana și Dan rezolvă □mpreună, □n același timp, 9 probleme	3p
	$108:9=12$	3p
	Ana rezolvă $5 \cdot 12 = 60$ probleme □n timp ce Dan rezolvă $4 \cdot 12 = 48$ probleme	3p

MATRICEA DE SPECIFICAȚII - TEST DE EVALUARE ÎNȚĂLĂ**CLASA a VI-a**

Competențe de evaluat Conținuturi	C1	C2	C3	C4	C5	C6	Total
Operații cu numere naturale. Ordinea efectuării operațiilor.	II.(5p) III0.(9p) III3.(3p)						17p
Împărțirea cu rest a numerelor naturale. Împărțirea unui număr natural la o fracție zecimală finită.	I4.(5p) III4.(3p)			III4.(6p)	III1.(3p)		17p
Noțiunea de divizor; noțiunea de multiplu. Divizibilitatea cu 10, 2, 5		I3.(5p)					5p
Mulțimi: descriere și notații; element, relația dintre element și mulțime; operații cu mulțimi			I2.(5p)				5p
Aflarea unei fracții dintr-un număr natural; procent				III2.(9p)			9p
Adunarea și scăderea unor fracții ordinare care au același numitor	I9.(5p)						5p
Transformarea unei fracții zecimale într-o fracție ordinară					I5.(5p)		5p
Media aritmetică a două fracții zecimale finite					I6.(5p)		5p
Ecuatii și inecuații; probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor				III1.(6p)			6p
Unități de măsură pentru lungime; perimetre; transformări						I7.(5p) III3.(3p)	8p
Unități de măsură pentru arie, volum, capacitate, masă, timp; transformări						I8.(5p) III3.(3p)	8p
Total	30p	5p	5p	21p	13p	16p	90p

**COMPETENȚELE DE EVALUAT ASOCIATE TESTULUI DE EVALUARE ÎNȚĂLĂ
PENTRU CLASA a VI-a**

C1. Utilizarea operațiilor și a proprietăților acestora în calcule cu numere naturale/ raționale pozitive

C2. Utilizarea de algoritmi pentru divizibilitatea cu 10, 2 și 5

C3. Identificarea și utilizarea noțiunilor specifice teoriei mulțimilor

C4. Transpunerea unei situații-problemă în limbaj matematic/ limbajul ecuațiilor, rezolvarea problemei obținute și interpretarea rezultatului

C5. Alegerea formei de reprezentare a unui număr rațional pozitiv și utilizarea de algoritmi pentru optimizarea calculului cu fracții zecimale

C6. Transpunerea în limbaj specific geometriei a unor probleme practice referitoare la perimetre, arii, volume, utilizând transformarea convenabilă a unităților de măsură

TEST DE EVALUARE ÎNȚIALĂ

Disciplina Matematică

Anul școlar 2011-2012

Clasa a VII-a

- Pentru rezolvarea corectă a tuturor cerințelor din Partea I și din Partea a II-a se acordă 90 de puncte. Din oficiu se acordă 10 puncte.
- Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru efectiv este de 50 minute.

PARTEA I Scrieți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(45 de puncte)

(5p) 1. Rezultatul calculului $(-1)^{2011} - (-1)^{2012}$ este:

A. 0 B. -2 C. 0 D. 1

(5p) 2. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 2011 și 2012 este:

A. 2011 B. 2012 C. 1 D. 40461323

(5p) 3. Dacă $\frac{x+y}{x-y} = 1$, atunci:A. $\frac{x}{y} = 1$ B. $x = 1$ C. $y = 1$ D. $y = 0$ (5p) 4. Dan rezolvă 70% din cele 20 de exerciții ale testului. Exercițiile pe care Dan le mai are de rezolvat sunt $\square$ n număr de:

A. 6 B. 14 C. 10 D. 2

(5p) 5. Media aritmetică a numerelor 1,1;2,2;3,3 și 4,4 este:

A. 10 B. 11 C. 2,75 D. 2

(5p) 6. Suma a două numere este 15 și diferența lor este 5. Suma pătratelor lor este:

A. 15 B. 100 C. 25 D. 125

(5p) 7. Măsurile unghiurilor unui triunghi sunt direct proporționale cu numerele 1, 2 și 3. Cel mai mare dintre unghiuri măsoară:

A. 90° B. 180° C. 60° D. 360°

(5p) 8. Perimetrul unui triunghi isoscel este 10 dm. Dacă laturile congruente au lungimea de 30 cm, atunci lungimea bazei este egală cu:

A. 40 cm B. 30 cm C. 3 cm D. 4 cm

(5p) 9. Dacă măsura unui unghi al unui triunghi isoscel ascuțitunghic este de 30° , atunci măsura unui alt unghi poate fi:A. 120° B. 150° C. 75° D. 30°

PARTEA a II-a La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

(45 de puncte)

(9p) 10. Rezolvați, $\square$ n mulțimea numerelor raționale ecuația $\left(\frac{1}{2} - 1\right)^3 + \frac{1}{2} = \frac{3x}{2}$.(9p) 11. Determinați toate valorile $\square$ ntregi ale lui x , astfel $\square$ ncât $\frac{2011}{2010 - x}$ să fie număr $\square$ ntreg.

(9p) 12. Determinați două numere naturale care au suma 103, câtul 4 și restul 3.

(9p) 13. Fie triunghiul ABC , dreptunghic $\square$ n A , cu $m(\angle ACB) = 15^{\circ}$. Dacă $BC = 8$ cm, atunci calculați lungimea $\square$ nălțimii duse din vârful A .(9p) 14. Dacă $\square$ ntr-un triunghi isoscel lungimile a două dintre laturi sunt 2 cm și respective 3 cm, atunci aflați perimetrul acestui triunghi.

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

PARTEA I

(45 de puncte)

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie punctajul maxim prevăzut în dreptul fiecărei cerințe, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

Nr. item	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Rezultate	B.	D.	D.	A.	C.	D.	A.	A.	C.
Punctaj	5p	5p	5p	5p	5p	5p	5p	5p	5p

PARTEA a II-a

(45 de puncte)

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

10.	$-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3x}{2}$ $-1 + 4 = 12x$ $x = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$	4p 3p 2p
11.	$2010 - x \in D_{2011}$ $2010 - x \in \{\pm 1; \pm 2011\}$ $x \in \{-1; 2009; 2011; 4021\}$	3p 3p 3p
12.	$a + b = 103$ $a = 4b + 3$ $a = 83, b = 20$	2p 2p 5p
13.	Ducem mediana din A și găsim $AM = \frac{BC}{2} = 4cm$ $\Delta AMC = isoscel$ cu $m(\angle AMC) = 150^\circ$ $\Delta ADM = dreptunghic$ în D cu $m(\angle AMD) = 30^\circ$ Conform teoremei unghiului de 30° $AD = \frac{AM}{2} = 2cm$	2p 2p 3p 2p
14.	Cazul 1. laturile au lungimile 2 cm, 2 cm și respectiv 3 cm Cazul 2. laturile au lungimile 3 cm, 3 cm și respectiv 2 cm Deci, perimetrul triunghiului dat poate fi 7 cm sau 8 cm.	3p 3p 3p

MATRICEA DE SPECIFICAȚII - TEST DE EVALUARE ÎNȚĂLĂ
CLASA a VII-a

Competențe de evaluat Conținuturi	C1	C2	C3	C4	C5	C6	Total
Divizor. Divizori comuni a două sau mai multor numere naturale; c.m.m.d.c. Multiplu. Multipli comuni a două sau mai multor numere naturale; c.m.m.m.c		I2.(5p) III0.(3p) III1.(4p)					12p
Ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale pozitive	III0.(3p) III2.(5p)						8p
Rapoarte; procente; probleme în care intervin procente			I6.(1p)	I5.(5p)			6p
Proportii; proprietatea fundamentală a proporțiilor. Mărimi direct proporționale			I3.(5p)		I7.(3p)		8p
Mulțimea $\mathbb{Z}$. Ecuatii în $\mathbb{Z}$	II.(5p) III2.(2p)			III1.(2p) III0.(3p) III2.(2p)			14p
Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor				I6.(4p) III1.(3p)			7p
Media aritmetică ponderată a unor numere raționale pozitive				I4.(5p)	I9.(1p)		6p
Triunghi: definiție, elemente; clasificarea triunghiurilor; perimetrul triunghiului. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi					I7.(2p) I8.(2p) I9.(3p)	III4.(3p)	10p
Proprietăți ale triunghiului isoscel și echilateral					I8.(2p) III4.(3p)	I8.(1p) I9.(1p) III4.(3p)	10
Proprietăți ale triunghiului dreptunghic					III3.(4p)	III3.(5p)	9p
Total	15p	12p	6p	24p	20p	13p	90p

COMPETENȚELE DE EVALUAT ASOCIATE TESTULUI DE EVALUARE ÎNȚĂLĂ
PENTRU CLASA a VII- a

C1. Aplicarea regulilor de calcul și folosirea parantezelor în efectuarea operațiilor cu numere întregi/ raționale pozitive

C2. Utilizarea algoritmilor pentru determinarea c.m.m.d.c, c.m.m.m.c a două sau a mai multor numere naturale

C3. Alegerea metodei adecvate de rezolvare a problemelor în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale

C4. Transpunerea unei situații-problemă în limbaj algebric, rezolvarea problemei obținute și interpretarea rezultatului

C5. Interpretarea informațiilor conținute în reprezentări geometrice în corelație cu determinarea unor lungimi de segmente și a unor măsuri de unghiuri

C6. Exprimarea caracteristicilor matematice ale triunghiurilor și ale liniilor importante în triunghi prin definiții, notații și desen

TEST DE EVALUARE ÎNȚIALĂ

Disciplina Matematică

Anul școlar 2011-2012

Clasa a VIII-a

• Pentru rezolvarea corectă a tuturor cerințelor din Partea I și din Partea a II-a se acordă 90 de puncte. Din oficiu se acordă 10 puncte.

• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru efectiv este de 50 minute.

PARTEA I Scrieți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(45 de puncte)

(5p) 1. Rezultatul calculului $2\sqrt{8} + 4\sqrt{2} + 3\sqrt{64}$ este:

A. 24

B. $8\sqrt{2}$ C. $8(3 + \sqrt{2})$ D. $9\sqrt{74}$

(5p) 2. Elementul irațional din mulțimea $M = \{-\sqrt{90}; -\sqrt{40}; 0; \sqrt{400}; \sqrt{900}\}$ sunt $\square$ n număr de

A. 0

B. 1

C. 2

D. 4

(5p) 3. Expresia $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$ este egală cu:

A. $x^3 + xy + y^3$ B. $x^2 - y^2$ C. $x^2 + 2xy + y^2$ D. $x^3 - y^3$

(5p) 4. După ce a cheltuit 10% din suma pe care o avea, Maria a rămas cu 90 de lei. Suma pe care a avut-o Maria la $\square$ nceput este de:

A. 80 lei

B. 100 lei

C. 190 lei

D. 10 lei

(5p) 5. Dacă $ax = 0$ și $a = 0$ atunci ecuația are:

A. o soluție

B. nicio soluție

C. două soluții

D. o infinitate de soluții

(5p) 6. Dacă aria unui triunghi echilateral este $\sqrt{3} \text{ cm}^2$, atunci lungimea laturii este:

A. 4 cm

B. 1 cm

C. 2 cm

D. 3 cm

(5p) 7. Dacă lungimea diagonalei unui pătrat este 1 cm, atunci aria pătratului este egală cu:

A. 1 cm^2 B. $0,5 \text{ cm}^2$ C. 4 cm^2 D. $\sqrt{2} \text{ cm}^2$

(5p) 8. Dacă ABC este un triunghi dreptunghic $\square$ n A și $\sin B = \frac{1}{2}$, atunci $\tan C$ este egal cu:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. 1

D. $\sqrt{3}$

(5p) 9. Dacă triunghiul ABC are aria 1 cm^2 și centrul de greutate $\square$ n punctul G , atunci aria triunghiului GAB este egală cu:

A. $0,3 \text{ cm}^2$ B. 3 cm^2 C. $0, (3) \text{ cm}^2$ D. $\frac{1}{3} \text{ m}^2$

PARTEA a II-a La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

(45 de puncte)

(10p) 1. Rezolvați $\square$ n mulțimea numerelor reale, ecuația $\frac{x-1}{4} - \frac{1-x}{2} = 4$.

2. Se consideră numerele reale $a = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ și $b = 1 + \sqrt{3}$.

(10p) a) Arătați că $a = \sqrt{3} - 1$.

(5p) b) Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b .

3. $\square$ n triunghiul ABC dreptunghic $\square$ n A , AD este $\square$ nălțime și $m(\angle BAD) = 45^\circ$. Știind că $AD = 2 \text{ cm}$, determinați:

(7p) a) măsurile unghiurilor ascuțite ale triunghiului ABC ;

(7p) b) perimetrul triunghiului ABC ;

(6p) c) aria triunghiului ABC , rotunjită la cel mai apropiat $\square$ ntreg.

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

PARTEA I

(45 de puncte)

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie punctajul maxim prevăzut în dreptul fiecărei cerințe, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

Nr. item	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Rezultate	C.	C.	D.	B.	D.	C.	B.	D.	C.
Punctaj	5p	5p	5p	5p	5p	5p	5p	5p	5p

PARTEA a II-a

(45 de puncte)

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

1.	$x - 1 - 2 + 2x = 16$ $3x = 19$ $x = \frac{19}{3}$	5p 2p 3p
2a.	$a = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} =$ $= \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} =$ $= 1 - \sqrt{3} =$ $= \sqrt{3} - 1$	4p 2p 2p 2p
2b.	$M_a = \sqrt{3}$ $M_g = \sqrt{2}$	2p 3p
3a.	$\triangle BAD = \text{dreptunghic}$ $\triangle BAD = \text{isoscel}$ $m(\angle ABC) = m(\angle ABD) = 45^\circ$ $m(\angle ACB) = 45^\circ$	1p 2p 2p 2p
3b.	$AD = \text{mediana}$ $BD = DC = AD = 2\text{cm}$ $AB = AC = 2\sqrt{2}$ $P(ABC) = 4(1 + \sqrt{2})\text{cm}$	1p 2p 2p 2p
3c.	$A(ABC) = \frac{BC \cdot AD}{2} =$ $= \frac{2 \cdot 4}{2}$ $= 4\text{cm}^2$	2p 2p 2p

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

MATRICEA DE SPECIFICAȚII - TEST DE EVALUARE ÎNȚIALĂ

CLASA a VIII-a

Competențe de evaluat Conținuturi	C1	C2	C3	C4	C5	C6	Total
Operații cu numere raționale	II.(3p)			II.(2p)			5 p
Exemple de numere iraționale; mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$	I2.(1p)	I2.(3p)		I2.(1p)			5 p
Formule de calcul prescurtat			I3.(5p)				5 p
Ecuatii de forma $ax+b=0$, $a, b \in \mathbb{R}$	I5.(1p)			I4.(3p)	I5.(4p)		8 p
Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor		I4.(1p)	I4.(1p)				2 p
Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic	I8.(1p)			I8.(2p)		I8.(2p)	5 p
Paralelograme particulare: pătrat, dreptunghi, romb; proprietăți			I6.(2p)			I6.(2p) I7.(1p)	5 p
Arii (triunghiuri, patrulatere)	I7.(2p)					I6.(1p) I7.(2p)	5 p
Asemănarea triunghiurilor				I9.(2p)		I9.(3p)	5 p
Proprietăți ale relației de egalitate în mulțimea numerelor reale	III.(2p)		III.(3p)		III.(5p)		10p
Modulul unui număr real, aproximări		II2a.(2p)	II2a.(8p)			II3c.(2p)	12p
Media geometrică a două numere reale pozitive			II2b.(5p)				5p
Rezolvarea triunghiului dreptunghic	II3a.(2p)	II3a.(2p) II3b.(2p) II3c.(2p)	II3b.(2p)			II3a.(3p) II3b.(3p) II3c.(2p)	18p
Total	12 p	12 p	26 p	10 p	9 p	21 p	90p

COMPETENȚELE DE EVALUAT ASOCIATE TESTULUI DE EVALUARE ÎNȚIALĂ
PENTRU CLASA a VIII- a

C1. Determinarea regulilor de calcul eficiente în efectuarea operațiilor cu numere raționale

C2. Caracterizarea mulțimilor de numere și a relațiilor dintre acestea utilizând limbajul logicii matematice și teoria mulțimilor

C3. Aplicarea regulilor de calcul și folosirea parantezelor în efectuarea operațiilor cu numere reale

C4. Transpunerea unei situații-problemă în limbajul ecuațiilor, rezolvarea problemei obținute și interpretarea rezultatului

C5. Redactarea rezolvării ecuațiilor și a inecuațiilor studiate în mulțimea numerelor reale

C6. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea calculului de lungimi de segmente, de măsuri de unghiuri și de arii

METODE ȘI STRATEGII DE REZOLVARE A PROBLEMELOR PENTRU CONCURSURI

CORNELIU MĂNESCU-AVRAM

The future is not a result of choices among alternative paths offered by the present, but a place that is created—created first in the mind and will, created next in activity. The future is not some place we are going to, but one we are creating. The paths are not be found, but made, and the activity of making them, changes both the maker and the destination.

John Schaar

Mai există o mulțime de probleme aritmetice nerezolvate. Numărul lor crește mereu, cu timpul. Aceasta pentru că noile probleme apar mai repede decât sunt rezolvate cele deja enunțate, iar multe dintre ele au rămas nerezolvate timp de secole. Însă progresul cunoștințelor noastre asupra numerelor s-a realizat nu numai prin ceea ce cunoaștem până acum despre ele, ci și prin faptul că ne dăm seama și de ceea ce nu știm încă.

Waclaw Sierpiński

Rezolvarea de probleme este o activitate specific umană, cu care suntem confrunțați permanent. Dacă plecăm în vacanță pentru a scăpa de problemele de acasă, constatăm repede apariția unor probleme noi. Matematica este la rândul ei orientată spre rezolvarea de probleme specifice, iar activitatea consacrată acestei științe constă atât în dobândirea de cunoștințe noi, cât și în însușirea unor deprinderi, abilități, priceperi de a rezolva probleme din ce în ce mai complexe.

Există o literatură vastă consacrată principiilor generale de realizare și standardizării acestei activități, de aceea nu vom insista asupra aspectelor teoretice, întrucât scopul nostru este unul practic, de ilustrare a celor mai importante metode și strategii prin exemple relevante. Rezolvarea unei probleme presupune îndeplinirea unei proceduri de lucru în patru pași: înțelegerea problemei (identificarea datelor, a necunoscutelor și a condițiilor), descrierea

unui plan (recunoașterea unor probleme asemănătoare și căutarea unor strategii și instrumente de rezolvare), realizarea planului (clarificarea fiecărui pas și demonstrarea corectitudinii rezultatelor), revizuirea (verificarea rezultatului, căutarea unor soluții alternative și a unor generalizări).

Strategiile de rezolvare a problemelor de matematică sunt extrem de numeroase, de la determinarea cuvintelor-cheie și identificarea unor probleme similare până la crearea unei căi proprii de rezolvare, prin adaptarea la noua situație. Unele lucrări clasifică problemele după metode, altele sunt structurate după domeniu : *algebră, analiză matematică, geometrie, teoria numerelor, combinatorică și probabilități*. Am preferat această din urmă ierarhizare, dar ea este una relativă, deoarece problemele alese sunt din zone de interferență, ceea ce corespunde și spiritului olimpiadelor. Se ilustrează astfel ideea că matematica este o știință unitară, chiar dacă ea a fost însușită fragmentar, pe discipline, din rațiuni didactice. Unele dintre problemele următoare sunt originale, la altele sunt originale doar soluțiile, iar cele din a treia categorie au fost preluate din bibliografie, pentru a asigura materialului o anumită coerență. Alegerea problemelor nu este întâmplătoare, ele admit în general mai multe soluții (chiar dacă a fost prezentată una singură) și evidențiază, prin conținut sau soluții, aspecte inedite. Rezultatele sunt semnificative, în sensul asigurării tranziției de la matematica elementară la matematica superioară. O atenție deosebită a fost acordată geometriei, capabilă să furnizeze rezultate noi, prin asimilarea unor metode și tehnici moderne.

Sper ca acest material să fie util elevilor orientați către performanță.

1. Să se demonstreze că numărul $\sqrt{5}$ este irațional.

Prima soluție : Vom demonstra că numărul $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ este irațional. Presupunem că φ este

rațional, $\varphi = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$. Din egalitatea $\varphi = \frac{1}{\varphi-1}$ rezultă $\varphi = \frac{m}{n} = \frac{n}{m-n}$. Numărul φ este

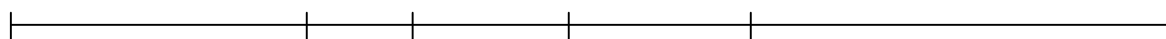
reprezentat astfel ca o fracție cu numitorul mai mic, dar acest proces poate fi continuat indefinit, ceea ce este imposibil.

A doua soluție (după Zeuthen) : Vom da o demonstrație geometrică bazată pe forma particulară a reprezentării numărului $\sqrt{5}$ ca fracție continuă.

Dacă $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, atunci $x^2 = 1-x$.

Geometric, dacă $AB = 1$, $AC = x$, atunci $AC^2 = AB \cdot CB$ și $[AB]$ este divizat în “raportul de aur” de punctul C .

$AC_1C_3C_2CB$



Dacă împărțim pe 1 la x și scădem partea întreagă, adică 1, obținem $1 - x = x^2$. Împărțim acum x la x^2 , scădem partea întreagă, adică 1 și obținem $x - x^2 = x^3$. Împărțim apoi x^2 la x^3 și continuăm procesul nedefinit.

Geometric, dacă luăm $[CC_1]$ congruent și de sens contrar cu $[CB]$, atunci $[CA]$ este divizat de C_1 în “raportul de aur”. Luăm $[C_1C_2]$ congruent și de sens contrar cu $[C_1A]$, atunci $[C_1C]$ este divizat de C_2 în “raportul de aur”, ș.a.m.d. Presupunem că x este rațional, atunci AB și AC sunt multipli întregi ai aceleiași lungimi l și același lucru este adevărat pentru

$$C_1C = CB = AB - AC, C_1C_2 = AC = AC_1 - C_1C, \dots$$

adică pentru toate lungimile segmentelor construite. Am obținut astfel un șir strict descrescător de multipli întregi ai lui l , ceea ce este imposibil.

2. Fie a, b, c numere reale nenule astfel încât $a + b + c = 0$ și $a^3 + b^3 + c^3 = a^5 + b^5 + c^5$. Să se arate că

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{6}{5}.$$

Soluție : Din $a + b + c = 0$ se obține $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ și $a^5 + b^5 + c^5 =$

$= 5abc(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)$. A doua egalitate din enunț devine

$$3abc = 5abc(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca),$$

de unde

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = \frac{3}{5},$$

așadar,

$$\frac{(a + b + c)^2 + a^2 + b^2 + c^2}{2} = \frac{3}{5}.$$

Folosind din nou prima egalitate din enunț, se obține

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{6}{5}.$$

Observație. Există astfel de numere, de exemplu $a = b = \frac{\sqrt{5}}{5}, c = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$.

Generalizare. Fie $k, n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}^*$ și $s_k = a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k$. Dacă $s_k = 0, 1 \leq k \leq n-2$ și

$$s_n = s_{2n-1}, \text{ atunci } s_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2n-1}.$$

Notăm cu P polinomul unitar care are rădăcinile $a_1, a_2, \dots, a_n$. Atunci $P = X^n + uX + v$, cu $u, v \in \mathbb{C}$. Într-adevăr, dacă $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ sunt polinoamele simetrice fundamentale de $a_1, a_2, \dots, a_n$, atunci

$$\sigma_k = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 & \vdots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & \vdots & 0 \\ s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \dots & s_1 \end{vmatrix}$$

(a se vedea, de ex., Faddeev, D. K., Sominski, I. S., *Sbornik zadač po vysšej algebre*, Mir, Moskva, 1976), iar din relațiile lui Viète rezultă că polinomul P are forma prescrisă. Se scrie că polinomul P are rădăcinile $a_1, a_2, \dots, a_n$, se însumează cele n egalități obținute și se deduce egalitatea $s_n + us_1 + nv = 0$, de unde $s_n = -nv$, deoarece $s_1 = 0$.

Se înmulțește fiecare dintre egalitățile precedente cu a_i^{n-1} , se însumează cele n egalități obținute și se deduce egalitatea $s_{2n-1} + us_n + vs_{n-1} = 0$. Folosind și $s_n = -nv = s_{2n-1}$, se deduce

$$s_{n-1} = n(1+u), \text{ deoarece } v = (-1)^n a_1 a_2 \dots a_n \neq 0. \text{ Avem și}$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{(-1)^{n-1} u}{(-1)^n v} = \frac{-u}{v}.$$

Se împarte egalitatea $a_i^n + ua_i + v = 0$ cu a_i , se însumează pentru $i = 1, 2, \dots, n$ și se obține

$$s_{n-1} + nu + v \left(\frac{-u}{v} \right) = 0, \text{ de unde } s_{n-1} = -(n-1)u. \text{ Ținând cont și de } s_{n-1} = n(1+u), \text{ se deduce}$$

$$u = \frac{-n}{2n-1}, \text{ de unde rezultă } s_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2n-1}.$$

Comentariu. Un polinom $P = X^n + uX + v \in \mathbb{R}[X]$ are cel mult trei rădăcini reale, de aceea în cazul general mulțimea $\mathbb{R}$ se înlocuiește cu $\mathbb{C}$.

3. Să se găsească o soluție a sistemului de ecuații

$$\begin{cases} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = 1 \\ 4x^3y - 4xy^3 = 1 \end{cases}.$$

Soluție : Dacă $z = x + iy$, atunci $z^4 = (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + (4x^3y - 4xy^3)i = 1 + i$.

Se reprezintă numărul $1 + i$ sub formă trigonometrică

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

și se obțin soluțiile

$$z_k = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{(2k+1)\pi}{16} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{16} \right), 0 \leq k \leq 3.$$

Pentru $k = 0$ se obține soluția reală a sistemului

$$x = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{\sqrt[8]{2^7}}, y = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{\sqrt[8]{2^7}}.$$

Comentariu. Se poate încerca rezolvarea sistemului cu substituția $xy = u, x^2 - y^2 = v$, ceea ce conduce la sistemul $v^2 - 4u^2 = 1, 4uv = 1$, dar metoda este mult mai laborioasă.

4. Să se demonstreze egalitatea

$$\sin 9^\circ + \cos 9^\circ = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}}}{2}.$$

Soluție : Fie $E = \sin 9^\circ + \cos 9^\circ$. Din $\frac{\sqrt{2}}{2} E = \sin 45^\circ \sin 9^\circ + \cos 45^\circ \cos 9^\circ = \cos 36^\circ$, rezultă că este suficient să calculăm ultima valoare. Dacă $z = \cos 36^\circ + i \sin 36^\circ$, atunci $z^5 = -1$, deci z este soluție a ecuației $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, așadar $x = 2 \cos 36^\circ = z + \bar{z}$ este soluție a ecuației

$x^2 - x - 1 = 0$. Din $\cos 36^\circ > 0$ rezultă $\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$, deci

$$E = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} + 1)}{4} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2}}{4} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}}}{2}.$$

5. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Să se demonstreze egalitatea $\text{tr}((AB - BA)^3) = 3\det(AB - BA)$.

Soluție : Din teorema Cayley-Hamilton se obține

$$(AB - BA)^3 - c_1(AB - BA)^2 + c_2(AB - BA) - c_3I_3 = O_3,$$

unde $c_1 = \text{tr}(AB - BA)$, $c_3 = \det(AB - BA)$. Se aplică urma și se folosește faptul că urma matricei $AB - BA$ este zero. Se obține $\text{tr}((AB - BA)^3) - 3\det(AB - BA) = 0$.

Observație. Se poate evita folosirea teoremei Cayley-Hamilton dând o demonstrație directă.

6. Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât polinomul $X^7 - X + 280$ să fie divizibil cu polinomul $X^2 - X + a$.

Soluție : Fie $f = X^7 - X + 280$, $g = X^2 - X + a$. Din $g \mid f$ în $\mathbb{Z}[X]$ deducem că $g(x) \mid f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$. În particular, $g(1) \mid f(1)$, $g(-1) \mid f(-1)$, deci $a \mid 280$ și $a + 2 \mid 280$ (*).

Fie ε o rădăcină cubică complexă nereală a lui -1 , deci $\varepsilon^3 = -1$, $\varepsilon \neq -1$, astfel că $\varepsilon^2 - \varepsilon = -1$ și $\varepsilon^7 - \varepsilon = 0$. Rezultă $g(\varepsilon) \mid f(\varepsilon)$ în $\mathbb{Z}[\varepsilon]$, deci și în $\mathbb{Z}$, deoarece ε este întreg algebric, iar numerele $f(1)$ și $g(1)$ sunt întregi raționali. Obținem că $a - 1 \mid 280$ (**).

Mulțimea divizorilor întregi ai numărului 280 este

$$D_{280} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 7, \pm 8, \pm 10, \pm 14, \pm 20, \pm 28, \pm 35, \pm 40, \pm 56, \pm 70, \pm 140, \pm 280\}.$$

Din condițiile (*) și (**) rezultă că trebuie să căutăm divizori consecutivi $a - 1$, $a \in D_{280}$ astfel încât $a + 2 \in D_{280}$. Deducem că $a \in \{-7, -4, -1, 2, 5, 8\}$. Avem și $g(2) \mid f(2)$, deci

$a + 2 \mid 2^7 - 2 + 280$, așadar $a + 2 \mid 2^7 - 2$. Cel mai mare divizor comun al numerelor $2^7 - 2 = 126$ și 280 este egal cu 14, astfel că $a + 2 \in D_{14}$, de unde $a \in \{-16, -9, -4, -3, -1, 0, 5, 12\}$. Obținem că $a \in \{-4, -1, 5\}$.

Se verifică prin calcul că singura valoare convenabilă este $a = 5$, pentru care există descompunerea

$$X^7 - X + 280 = (X^2 - X + 5)(X^5 + X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 11X + 56).$$

7. Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât polinomul $X^{13} + X + 90$ să fie divizibil cu polinomul $X^2 - X + a$.

Soluție : Fie $f = X^{13} + X + 90$, $g = X^2 - X + a$. Din $g \mid f$ în $\mathbb{Z}[X]$ deducem că $g(x) \mid f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$. În particular, $g(0) \mid f(0)$, $g(1) \mid f(1)$, deci $a \mid 90$ și $a \mid 92$. Rezultă că

$a \mid (90, 92)$. Avem însă $(90, 92) = 2$, deci $a \in \{-2, -1, 1, 2\}$. Din $g(-1) \mid f(-1)$ deducem că $a + 2 \mid 88$, deci $a \in \{-1, 2\}$. Se verifică prin calcul că $a = 2$ este singura valoare convenabilă :

$$X^{13} + X + 90 = (X^2 - X + 2) \times$$

$$\times (X^{11} + X^{10} - X^9 - 3X^8 - X^7 + 5X^6 + 7X^5 - 3X^4 - 17X^3 - 11X^2 + 23X + 45).$$

Comentarii. Există alte exemple asemănătoare : polinoamele $X^3 + X + 2$ și $X^5 + X - 6$ se divid cu $X^2 - X + 2$, polinomul $X^5 - X - 15$ se divide cu $X^2 - X + 3$.

8. Fie a, b, c numere reale astfel încât $a < 3$ și toate rădăcinile polinomului $X^3 + aX^2 + bX + c$ sunt numere reale strict negative. Să se demonstreze că $b + c \neq 4$.

Prima soluție : Fie p, q, r valorile absolute ale rădăcinilor polinomului. Relațiile lui Viète sunt

$$p + q + r = a, \quad pq + qr + rp = b, \quad pqr = c.$$

Din inegalitatea mediilor se obține

$$\frac{a}{3} \geq \left(\frac{b}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \geq c^{\frac{1}{3}},$$

deci $a < 3$ implică $b < 3$ și $c < 1$, de unde $b + c < 4$.

A doua soluție : Funcția polinomială $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ are trei zerouri reale negative, deci, conform teoremei lui Rolle, derivata $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ are două zerouri reale negative. În particular, discriminantul ei este pozitiv, astfel că $3b \leq a^2 < 9$, de unde $b < 3$. Din inegalitatea mediilor se obține ca mai sus

$$c \leq \left(\frac{a}{3} \right)^3 < 1,$$

Din $c < 1$ și $b < 3$ se deduce $b + c < 4$.

9. Fie n un număr natural nenul, $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ numere reale pozitive. Presupunem că

$z_2, \dots, z_{2n}$ sunt numere reale pozitive astfel încât $z_{i+j}^2 \geq x_i y_j$, pentru toți $1 \leq i, j \leq n$. Fie $M =$

$= \max\{z_2, \dots, z_{2n}\}$. Să se demonstreze inegalitatea

$$\left(\frac{M + z_2 + \dots + z_{2n}}{2n} \right)^2 \geq \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right) \left(\frac{y_1 + \dots + y_n}{n} \right).$$

Soluție : Fie $X = \max\{x_1, \dots, x_n\}, Y = \max\{y_1, \dots, y_n\}$. Înlocuind x_i, y_i, z_i respectiv prin

$x'_i = \frac{x_i}{X}, y'_i = \frac{y_i}{Y}, z'_i = \frac{z_i}{\sqrt{XY}}$, putem presupune că $X = Y = 1$. Este suficient să demonstrăm că

$$M + z_1 + \dots + z_{2n} \geq x_1 + \dots + x_n + y_1 + \dots + y_n, \quad (1)$$

deoarece inegalitatea din enunț rezultă din (1) și inegalitatea mediilor.

Pentru a demonstra (1) este suficient să arătăm că pentru orice r , numărul termenilor mari decât r în partea stângă din (1) este cel puțin egal cu același număr referitor la partea dreaptă din (1). Dacă $r \geq 1$, atunci nu există termeni în partea din (1) mai mari decât r .

Presupunem că $r < 1$ și considerăm mulțimile $A = \{i \mid 1 \leq i \leq n, x_i > r\}$, $B = \{i \mid 1 \leq i \leq n, y_i > r\}$,

$C = \{i \mid 1 \leq i \leq 2n, z_i > r\}$. Fie $a = \text{Card } A$ și $b = \text{Card } B$. Dacă $x_i, y_i > r$, atunci $z_{i+j} \geq \sqrt{x_i y_j} > r$,

deci $C \supseteq A + B = \{\alpha + \beta \mid \alpha \in A, \beta \in B\}$. Se verifică simplu inegalitatea $\text{Card } (A + B) \geq$

$\geq \text{Card } A + \text{Card } B - 1$. Rezultă că numărul acelor z_k mai mari decât r este $\geq a + b - 1$. Dar atunci $M > r$, deci cel puțin $a + b$ elemente din partea stângă din (1) sunt mai mari decât r , ceea ce încheie demonstrația.

Note și comentarii. O analiză interesantă a acestei inegalități face Ameya Velingker, [13], Vol. 2, No. 2. Varianta integrală este inegalitatea Prékopa-Leindler:

Dacă $0 < \lambda < 1$ și $f, g, h: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ sunt funcții măsurabile astfel încât

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

atunci

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x) dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx \right)^{1-\lambda}.$$

O consecință a acestei inegalități este inegalitatea Brunn-Minkowski, de unde rezultă și inegalitatea izoperimetrică: dintre toate corpurile simple închise cu același volum din $\mathbb{R}^n$, sfera euclidiană are suprafața de arie minimă.

10. Un număr real se numește număr Cantor dacă reprezentarea lui în baza 3 nu conține cifra 1. Să se demonstreze că orice număr real este suma a două numere Cantor.

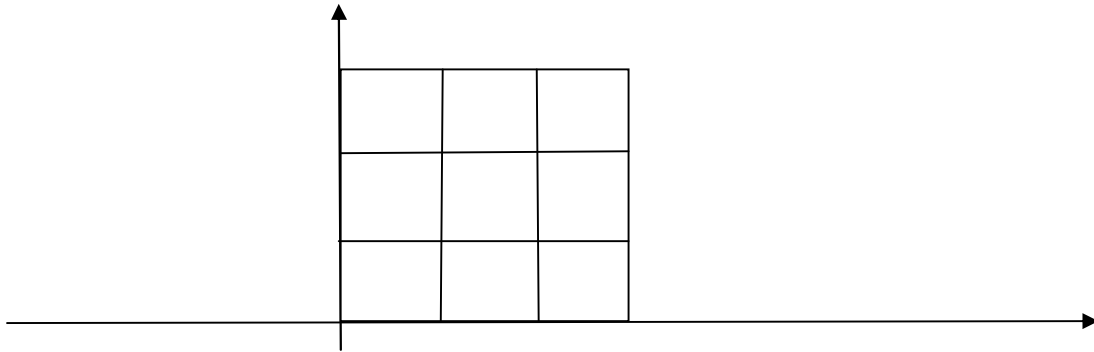
Soluție : Mulțimea C_1 a numerelor Cantor din intervalul $[0, 1]$ se construiește astfel : Dacă

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right],$$

$$I_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right], \dots,$$

atunci $C_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Este suficient să demonstrăm egalitatea

$$C_1 + C_1 = \{x + y \mid x, y \in C_1\} = [0, 2].$$



Fie funcția $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$. Se vede pe figură că orice paralelă la a doua bisectoare intersectează cele patru pătrate din colțuri în cel puțin un punct, deci $f(I_1 \times I_1) = [0, 2]$. Prin inducție se demonstrează asemănător că $f(I_n \times I_n) = [0, 2]$, oricare ar fi numărul natural nenul n . Se deduce

$$\begin{aligned} [0, 2] \supseteq C_1 + C_1 &= f(C_1 \times C_1) = f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \times \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n\right) \supseteq f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (I_n \times I_n)\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(I_n \times I_n) = \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} [0, 2] = [0, 2]. \end{aligned}$$

11. Se consideră șirul $(u_n)_n$ definit prin $u_0 = u_1 = u_2$ și $u_{n+3}u_n - u_{n+2}u_{n+1} = n!$, $n \geq 0$. Să se demonstreze că u_n este un întreg pentru orice n .

Soluție : Calculăm primii termeni

$$u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 4 \cdot 2, u_6 = 5 \cdot 3, u_7 = 6 \cdot 4 \cdot 2, u_8 = 7 \cdot 5 \cdot 3.$$

Presupunem că $u_n = (n-1)(n-3)(n-5)\dots$, pentru $n \geq 3$ și demonstrăm egalitatea prin inducție. Dacă formula este adevărată pentru n , $n+1$ și $n+2$, atunci

$$\begin{aligned} u_{n+3} &= \frac{u_{n+2}u_{n+1} + n!}{u_n} = \frac{(n+1)(n-1)(n-3)\dots n(n-2)(n-4)\dots + n!}{(n-1)(n-3)(n-5)\dots} = \\ &= \frac{(n+1)n! + n!}{(n-1)(n-3)(n-5)\dots} = \frac{(n+2)n!}{(n-1)(n-3)(n-5)\dots} = (n+2)n(n-2)(n-4)\dots, \end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstrația prin inducție.

12. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și $d \in \{1, 2, 3\}$, există $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ astfel încât $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ și

$$\frac{\pi}{4d} = \operatorname{arctg} \frac{1}{x_1} + \operatorname{arctg} \frac{1}{x_2} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{x_n}.$$

Soluție : Folosim egalitățile $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ (1) și identitatea

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{a} = \operatorname{arctg} \frac{1}{a+1} + \operatorname{arctg} \frac{1}{a^2+a+1}, a \in \mathbb{R} - \{-1, 0\} \quad (2).$$

Demonstrăm afirmația prin inducție matematică.

Dacă $d = 1$, atunci $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \mathbb{Z}$. Pentru $n = 1$ se ia $x_1 = 1$ și afirmația rezultă din prima egalitate din (1) : $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{1}$. Presupunem că există numerele naturale $x_1, \dots, x_n$ astfel încât $0 < x_1 < \dots < x_n$ și $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{x_1} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{x_n}$, înlocuim în (1) $a = x_n$, substituim în egalitatea precedentă și obținem o sumă de același tip, dar cu $n + 1$ termeni,

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{x_1} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{x_{n-1}} + \operatorname{arctg} \frac{1}{x_n+1} + \operatorname{arctg} \frac{1}{x_n^2+x_n+1}.$$

Avem $0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n+1 < x_n^2+x_n+1$ și $x_n+1, x_n^2+x_n+1 \in \mathbb{Z}$, deoarece $\mathbb{Z}$ este un inel. Rezultă că proprietatea din enunț este adevărată pentru orice n natural nenul.

Dacă $d = 2$, $n = 1$, se ia $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, iar dacă $d = 3$, $n = 1$, atunci $x_1 = 2 + \sqrt{3}$. Restul demonstrației se face la fel, folosind structura de inel a lui $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ pentru $d = 2, 3$.

13. Să se demonstreze egalitatea (Ramanujan) :

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\dots}}}} = 3.$$

Soluție : Se consideră funcția $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+\dots}}}}$.

Această funcție este bine definită : se fixează x , se trunchiază la n radicali și se obține un șir strict crescător mărginit superior. Într-adevăr,

$$f(x) \leq \sqrt{(x+1)\sqrt{(x+2)\sqrt{(x+3)\dots}}} \leq \sqrt{2x\sqrt{3x\sqrt{4x\dots}}} \leq \sqrt{2x\sqrt{4x\sqrt{8x\dots}}} \leq 2x.$$

Se observă că $f(x) \geq \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\dots}}} = x$. Se folosește însă inegalitatea mai slabă $f(x) \geq \frac{x+1}{2}$.

Se ridică la pătrat relația de definiție și se obține ecuația funcțională

$$(f(x))^2 = xf(x) + 1.$$

Folosind $\frac{x+1}{2} \leq f(x+1) \leq 2(x+1)$ se obțin inegalitățile

$$x \cdot \frac{x+1}{2} + 1 \leq (f(x))^2 \leq 2x(x+1) + 1,$$

ceea ce duce la $\frac{1}{\sqrt{2}}(x+1) \leq f(x) \leq \sqrt{2}(x+1)$. Se repetă acest argument și se deduce

$$2^{-\frac{1}{2^n}}(x+1) \leq f(x) \leq 2^{\frac{1}{2^n}}(x+1), \quad n \geq 1.$$

Pentru $n \rightarrow \infty$ se obține $x+1 \leq f(x) \leq x+1$, de unde rezultă $f(x) = x+1$, pentru orice $x \geq 1$. Cazul particular $x = 2$ este egalitatea lui *Ramanujan*.

14. Să se demonstreze inegalitatea $\frac{\ln x - \ln y}{x - y} > \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} \right)^3$, unde x, y sunt numere reale strict pozitive, $x \neq y$.

Soluție : Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, $x > y > 0$. Cu substituția $x = t^3 y$, inegalitatea devine

$$\frac{\ln t^3}{t^3 - 1} > \left(\frac{2}{t + 1} \right)^3, \quad \text{pentru } t > 1. \quad (1)$$

Considerăm funcția $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = 3 \ln t - \frac{8(t^3 - 1)}{(t + 1)^3}$. Funcția f este derivabilă,

derivata $f'(t) = \frac{3(t-1)^4}{t(t+1)^4}$ este strict pozitivă pe $(1, +\infty)$, astfel că f este strict crescătoare pe

$[1, +\infty)$, de unde rezultă $f(t) > f(1) = 0$, pentru orice $t > 1$, ceea ce demonstrează inegalitatea (1), deci și inegalitatea din enunț.

15. Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1,$$

unde $0 \leq a, b, c \leq 1$.

Soluție : Se notează membrul stâng al inegalității cu $f(a,b,c)$. Această funcție este definită pe un cub convex închis și este strict convexă în fiecare variabilă, deoarece derivata a doua a funcției în raport cu fiecare variabilă este strict pozitivă. Conform teoremei lui *Weierstrass* această funcție ia valoarea maximă 1 în cele 8 vârfuri ale cubului : $(0,0,0), \dots, (1,1,1)$, care sunt puncte de extrem.

16. Se consideră funcția $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln(1-x)}$. Să se arate că :

a) $\frac{1}{2} < f(x) < 1$, pentru orice $x \in (0,1)$;

b) funcția f poate fi prelungită prin continuitate la intervalul $[0, 1]$.

Soluție : a) Inegalitățile $\frac{1}{2} < \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln(1-x)} < 1$, $x \in (0,1)$, sunt echivalente cu

$$\frac{x}{x-1} < \ln(1-x) < \frac{2x}{x-2}, \quad x \in (0,1).$$

Considerăm funcțiile $u, v : [0,1) \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = \ln(1-x) - \frac{x}{x-1}$, $v(x) = \frac{2x}{x-2} - \ln(1-x)$. Aceste funcții sunt derivabile, $u'(x) = \frac{x}{(1-x)^2} > 0$, $v'(x) = \frac{x^2}{(x-2)^2(1-x)} > 0$, $x \in (0,1)$, deci funcțiile sunt strict crescătoare, astfel că $u(x) > u(0) = 0$, $v(x) > v(0) = 0$, $\forall x \in (0,1)$, ceea ce demonstrează inegalitățile de mai sus, deci și inegalitățile din enunț.

b) Calculăm limitele funcției f la extremitățile intervalului, folosind regula lui *l'Hospital* :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)+x}{\ln(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1-x)+2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1-x)+x}{x\ln(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)-x} = 1$$

(aici am folosit faptul că $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$).

$$\text{Se deduce că funcția } \tilde{f} : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x=0 \\ f(x), & x \in (0,1) \\ 1, & x=1 \end{cases} \text{ este prelungirea prin}$$

continuitate a funcției f .

17. Să se calculeze $\int_0^1 \ln x dx$.

Soluție : Datorită simetriei graficelor față de prima bisectoare, avem

$$\int_0^1 \ln x dx = - \int_{-\infty}^0 e^x dx.$$

Acum calculele pot fi efectuate cu ușurință :

$$\int_0^1 \ln x dx = - \int_{-\infty}^0 e^x dx = -e^x \Big|_{-\infty}^0 = -(1-0) = -1.$$

18. Să se demonstreze că $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} x^{x+1} dx = \frac{1}{2}$.

Soluție : Se știe că $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$. Dăm o scurtă demonstrație a acestei egalități folosind regula lui *l'Hospital* :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0,$$

deci

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^0 = 1.$$

Demonstrăm acum egalitatea din enunț. Fixăm $\varepsilon > 0$ și alegem $\delta > 0$ astfel încât $0 < x < \delta$ și $|x^x - 1| < \varepsilon$. Atunci pentru $n \geq \frac{1}{\delta}$ avem

$$\left| n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} (x^{x+1} - x) dx \right| \leq n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} |x^{x+1} - x| dx = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} x |x^x - 1| dx < \varepsilon n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} x dx = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} (x^{x+1} - x) dx = 0$$

și deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} x^{x+1} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} x dx = \frac{1}{2}.$$

19. Să se calculeze $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx$.

Prima soluție : Cu substituția $x = \operatorname{tg} t$ integrala devine $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\operatorname{tg} t + 1) dt$. Se scrie

$$\ln(\operatorname{tg} t + 1) = \ln(\sin t + \cos t) - \ln \cos t$$

și se observă că $\sin t + \cos t = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)$. Rescriem funcția de integrat sub forma

$$\frac{\ln 2}{2} + \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) - \ln \cos t.$$

Dar pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ integralele funcțiilor $\ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)$ și $\ln \cos t$ sunt egale, deci

integrala cerută este de fapt integrala funcției $\frac{\ln 2}{2}$ pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, adică este egală cu

$$\frac{\pi \ln 2}{8}.$$

A doua soluție : Fie I integrala cerută. Cu substituția $x = \frac{1-u}{1+u}$

integrala devine

$$I = \int_0^1 \frac{(1+u)^2 \ln\left(\frac{2}{1+u}\right)}{2(1+u^2)} \cdot \frac{2du}{(1+u)^2} = \int_0^1 \frac{\ln 2 - \ln(1+u)}{1+u^2} du = \ln 2 \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} - I,$$

de unde

$$I = \frac{\ln 2}{2} \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi \ln 2}{8}.$$

A treia soluție : Fie funcția

$$f(t) = \int_0^1 \frac{\ln(xt+1)}{x^2+1} dx,$$

astfel că $f(0) = 0$, iar integrala cerută este $f(1)$. Derivând sub semnul integrală, se obține

$$f'(t) = \int_0^1 \frac{x}{(xt+1)(x^2+1)} dx.$$

Descompunând în fracții simple, se obține

$$f'(t) = \frac{2t \cdot \arctgt - 2 \ln(tx+1) + \ln(x^2+1)}{2(t^2+1)} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi t + 2 \ln 2 - 4 \ln(t+1)}{4(t^2+1)},$$

de unde

$$f(t) = \frac{(\ln 2) \arctgt}{2} + \frac{\pi \ln(t^2+1)}{8} - \int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{t^2+1} dt,$$

așadar

$$f(1) = \frac{\pi \ln 2}{4} - \int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{t^2+1} dt.$$

Dar integrala din dreapta este din nou $f(1)$, deci

$$f(1) = \frac{\pi \ln 2}{8}.$$

Comentarii. Valoarea 0,272198 ... a integralei a fost calculată de *Mathematica*, dar nu se știe prin ce metodă. Se poate demonstra asemănător că

$$\int_0^a \frac{\ln(a+x)}{a^2+x^2} dx = \frac{\pi \ln(2a^2)}{8a}, \quad a \in (0, \infty).$$

20. Să se demonstreze egalitatea

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{14}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{3\pi}{14}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{5\pi}{14}} = 24.$$

Soluție : Soluțiile ecuației $z^7 = 1$ sunt $z_k = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$, $0 \leq k \leq 6$. Soluțiile ecuației

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

sunt deci z_k , $1 \leq k \leq 6$. E clar că $z_1 = \bar{z}_6$, $z_2 = \bar{z}_5$, $z_3 = \bar{z}_4$, deci cu substituția $z + \bar{z} = y$ deducem că soluțiile ecuației $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$ sunt

$$y_1 = 2 \cos \frac{2\pi}{7}, y_2 = 2 \cos \frac{4\pi}{7}, y_3 = 2 \cos \frac{8\pi}{7}.$$

Avem de calculat

$$E = \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{14}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{3\pi}{14}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{5\pi}{14}} = 2 \left(\frac{1}{1 + \cos \frac{8\pi}{7}} + \frac{1}{1 + \cos \frac{4\pi}{7}} + \frac{1}{1 + \cos \frac{2\pi}{7}} \right) =$$

$$= 4 \left(\frac{1}{2 + y_1} + \frac{1}{2 + y_2} + \frac{1}{2 + y_3} \right) = \frac{-4f'(-2)}{f(-2)},$$

unde $f(y) = y^3 + y^2 - 2y - 1$. Din $f'(y) = 3y^2 + 2y - 2$, $f(-2) = -1$, rezultă

$$E = \frac{-4 \cdot 6}{-1} = 24.$$

Generalizare. Calculând derivate de ordin superior ale raportului $\frac{f'}{f}$, deducem asemănător că

expresia $E_n = \frac{1}{\sin^{2n} \frac{\pi}{14}} + \frac{1}{\sin^{2n} \frac{3\pi}{14}} + \frac{1}{\sin^{2n} \frac{5\pi}{14}}$ este un număr natural divizibil cu 2^{2n} . Într-

adevăr, $\left(\frac{f'}{f}\right)^{(n-1)} = \frac{g}{f^n}$, unde g este o funcție polinomială cu coeficienți întregi, deci pentru y

$= 2$ acest raport este număr întreg. Rezultă că $E_n = \frac{(-1)^n 2^{2n} g(-2)}{f^n(-2)}$ este un număr natural divizibil cu 2^{2n} .

21. Fie P un punct interior triunghiului echilateral ABC astfel încât $PA = 4$, $PB = 3$ și $PC = 5$. Să se calculeze lungimea laturii triunghiului.

Soluție : Fie x lungimea laturii triunghiului echilateral. Se rotește $\triangle ABC$ în sensul acelor de ceas în jurul lui B cu un unghi de 60° . Fie P' și C' transformatele punctelor P și C respectiv. Triunghiul $PP'B$ este echilateral, deci $PP' = 3$. Cum $\triangle PP'C$ are lungimile laturilor egale cu 3, 4, 5, rezultă că unghiul $\angle PP'C$ este drept, deci $m(\angle BP'C) = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$. Din teorema cosinusului se obține

$$x^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos 150^\circ = 25 + 12\sqrt{3},$$

$$\text{deci } x = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}.$$

Comentarii. Dacă distanțele punctului P la vârfurile triunghiului sunt a, b, c respectiv, atunci

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 \pm \sqrt{3} \cdot \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{2}}.$$

Semnul + dă soluția problemei, iar semnul –corespunde situației în care punctul P este exterior triunghiului.

Există valori întregi ale numerelor a, b, c pentru care x este întreg, de exemplu $a=57, b=65, c=73, x=112$.

22. Se dau $n^2 + 1$ intervale închise pe dreaptă. Să se arate că $n + 1$ dintre ele au un punct comun sau $n + 1$ dintre ele sunt disjuncte două câte două.

Soluție : Definim o relație de ordine pe mulțimea intervalor închise. Spunem că intervalul $[a, b]$ este *mai mic* decât intervalul $[c, d]$ dacă și numai dacă $b < c$. Se observă că două intervale sunt comparabile dacă și numai dacă ele sunt disjuncte. Un lanț este un șir de intervale astfel încât fiecare este mai mic decât următorul. Se asociază fiecărui interval lungimea cea mai mare a unui lanț care începe cu intervalul respectiv. Dacă unul dintre aceste numere este mai mare sau egal cu $n + 1$, atunci intervalele din lanțul corespunzător sunt disjuncte două câte două și proprietatea este demonstrată.

Presupunem că toate aceste numere sunt mai mici sau cel mult egale cu n . Conform *principiului lui Dirichlet*, unul dintre aceste numere apare de cel puțin $n + 1$ ori. Dar intervalele care au asociat același număr nu se pot afla în același lanț (intervalele din stânga au asociat un număr mai mare decât cele din dreapta). Rezultă că oricare două dintre aceste $n + 1$ intervale au un punct comun. Extremitatea din stânga de valoare maximă (sau extremitatea din dreapta de valoare minimă) este un punct comun celor $n + 1$ intervale.

Notă. O generalizare a rezultatului din problema precedentă este

LEMA LUI DILWORTH. Fie P o relație de ordine pe o mulțime cu $mn + 1$ elemente. Atunci P conține un lanț de lungime $m + 1$ sau un antilanț cu $n + 1$ elemente.

(Un *antilanț* este o mulțime cu proprietatea că oricare două elemente ale ei nu sunt comparabile).

23. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n, n \in \mathbb{N}^*,$ numere reale strict pozitive. Să se demonstreze următoarele afirmații :

a) dacă $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4), n \geq 3,$ atunci oricare trei dintre aceste numere sunt lungimile laturilor unui triunghi.

b) dacă $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^2 > (n-2)(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4), n \geq 4,$ atunci oricare patru dintre aceste numere sunt lungimile laturilor unui patrulater inscriptibil.

Soluție : a) Demonstrăm mai întâi

Lema 1. Fie $a, b, c \in (0, \infty).$ Următoarele afirmații sunt echivalente :

1) există un triunghi cu laturile de lungimi a, b, c ;

$$2) \ 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) > a^4 + b^4 + c^4;$$

$$3) \ |a-b| < c < a+b.$$

DEMONSTRAȚIE : 1) $\Rightarrow$ 2) : Dacă există un triunghi cu laturile de lungimi a, b, c și aria S , atunci

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4) = 16S^2 > 0.$$

2) $\Rightarrow$ 3) : Este adevărată descompunerea

$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4).$$

Dacă membrul drept este pozitiv, atunci și membrul stâng este pozitiv, deci doi dintre factori sunt pozitivi, iar ceilalți doi au același semn. Dacă, de exemplu, $a-b+c < 0$ și $a+b-c < 0$,

atunci prin adunare se obține $2a < 0$, deci $a < 0$, ceea ce contrazice ipoteza. Se deduce că toți factorii sunt pozitivi, deci $c < a+b, c > a-b, c > -a+b$, de unde $c > |a-b|$.

3) $\Rightarrow$ 1) : Dacă aceste inegalități sunt adevărate, atunci cercurile cu razele de lungimi a și b , având distanța dintre centrele lor egală cu c , se intersectează în două puncte. Într-adevăr, dacă cercurile sunt exterioare, atunci distanța dintre centrele lor este mai mare decât suma lungimilor razelor, iar dacă un cerc se află în interiorul celuilalt, atunci distanța dintre centrele lor este mai mică decât modulul diferenței lungimilor razelor.

Unul dintre punctele de intersecție și centrele cercurilor sunt vârfurile triunghiului căutat.

Revenim la problemă și observăm că proprietatea din enunț pentru $n = 3$ rezultă din lema 1. O demonstrăm pentru $n \geq 4$:

$$\begin{aligned} (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4) &< (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^2 = \\ &= \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2} + \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2} + a_4^2 + \dots + a_n^2 \right)^2 \leq \\ &\leq (n-1) \left(\left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2} \right)^2 + \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2} \right)^2 + a_4^4 + \dots + a_n^4 \right), \end{aligned}$$

unde a doua inegalitate rezultă din inegalitatea *Cauchy – Schwarz*. Simplificăm, reducem termenii asemenea și obținem

$$2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4) < (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2,$$

deci se poate construi un triunghi cu laturile de lungimi a_1, a_2, a_3 . Cum expresiile din enunț sunt simetrice, rezultă că proprietatea este adevărată pentru oricare trei dintre numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$. (O demonstrație prin inducție a dat *Silvia Mușătoiu*^[1], problema săptămânii 6 – 13 septembrie 2010).

b) Demonstrăm mai întâi

Lema 2. Fie $a_1, a_2, a_3, a_4 \in (0, \infty)$. Următoarele afirmații sunt echivalente :

1) există un patrulater inscriptibil cu laturile de lungimi a_1, a_2, a_3, a_4 ;

$$2) (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2 + 8a_1a_2a_3a_4 > 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4);$$

$$3) a_1 + a_2 > |a_3 - a_4|, a_3 + a_4 > |a_1 - a_2|.$$

DEMONSTRAȚIE : 1) $\Rightarrow$ 2) Fie S aria patrulaterului inscriptibil cu laturile de lungimi

a_1, a_2, a_3, a_4 și $2p = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ perimetrul său. Din formula lui *Brahmagupta*

$$S = \sqrt{(p-a_1)(p-a_2)(p-a_3)(p-a_4)}$$

rezultă

$$16S^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2 + 8a_1a_2a_3a_4 - 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4) > 0.$$

$$\begin{aligned} 2) \Rightarrow 3) \text{ Avem } & (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2 + 8a_1a_2a_3a_4 - 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4) = \\ & = (-a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_1 - a_2 + a_3 + a_4)(a_1 + a_2 - a_3 + a_4)(a_1 + a_2 + a_3 - a_4) > 0. \end{aligned}$$

Presupunem că toți factorii sunt negativi și obținem prin adunarea lor $4p < 0$, ceea ce contrazice ipoteza. Presupunem că doi factori sunt negativi, de exemplu primii doi și obținem prin adunarea lor $2(a_3 + a_4) < 0$, contradicție. Rezultă că toți factorii sunt pozitivi, deci $a_1 + a_2 > a_3 - a_4$, $a_1 + a_2 > -a_3 + a_4$, de unde $a_1 + a_2 > |a_3 - a_4|$ și similar se obține cealaltă inegalitate.

3) $\Rightarrow$ 1) Construim un cerc cu lungimea razei

$$R = \sqrt{\frac{(a_1a_2 + a_3a_4)(a_1a_3 + a_2a_4)(a_1a_4 + a_2a_3)}{(-a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_1 - a_2 + a_3 + a_4)(a_1 + a_2 - a_3 + a_4)(a_1 + a_2 + a_3 - a_4)}}$$

și demonstrăm că există un patrulater înscris în acest cerc având laturile de lungimi a_1, a_2, a_3, a_4 . Există un patrulater articulat (cu lungimile laturilor constante, dar cu măsurile unghiurilor variabile) cu vârfurile în punctele A, B, C, D , cu lungimile laturilor $AB = a_1, BC = a_2,$

$CD = a_3, DA = a_4$ și cu lungimea diagonalei $AC = e \in (0, \min(a_1 + a_2, a_3 + a_4))$, conform ipotezei. Deformăm acest patrulater modificând măsurile unghiurilor, dar păstrând lungimile laturilor, până când obținem

$$e^2 = \frac{(a_1a_3 + a_2a_4)(a_1a_4 + a_2a_3)}{a_1a_2 + a_3a_4},$$

deci

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 - e^2}{2a_1a_2} + \frac{a_3^2 + a_4^2 - e^2}{2a_3a_4} = 0,$$

de unde $\cos B + \cos D = 0$, astfel că patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil, având două unghiuri opuse suplementare. Din $\cos B + \cos D = 0$ se obține

$$\cos B = \frac{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2}{2(a_1a_2 + a_3a_4)},$$

iar din $e = 2R \sin B$ se obține valoarea prescrisă a lui R .

Notă. Ultima implicație este un caz particular al unui rezultat clasic: *Dacă există poligoane cu laturile de lungimi date $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 3$), atunci există printre ele un poligon inscriptibil și acesta are aria maximă* (Gabriel Cramer, 1704 – 1752).

Revenim la problemă și observăm că proprietatea din enunț pentru $n = 4$ rezultă din lema 2. Pentru $n \geq 5$ demonstrăm afirmația folosind inegalitatea dintre media geometrică și media pătratică :

$$\begin{aligned} (n-2)(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4) &< (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^2 = \\ &= \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{2} + \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{2} + a_5^2 + \dots + a_n^2 \right)^2 \leq \\ &\leq (n-2) \left(\left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{2} \right)^2 + \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{2} \right) + a_5^4 + \dots + a_n^4 \right). \end{aligned}$$

Simplificăm, reducem termenii asemenea și obținem

$$2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4) < (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2.$$

Avem însă

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2 < (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2 + 8a_1a_2a_3a_4,$$

deci există, conform lemei precedente, un patrulater inscriptibil cu laturile de lungimi a_1, a_2, a_3, a_4 . Cum expresiile din enunț sunt simetrice, rezultă că proprietatea rămâne adevărată pentru oricare patru dintre numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$.

24. Fie ABC un triunghi, I centrul cercului înscris, O centrul cercului circumscris și M mijlocul laturii $[BC]$. Bisectoarea unghiului $\angle A$ intersectează drepte BC și OM în L și Q respectiv. Să se demonstreze că $AI \cdot LQ = IL \cdot IQ$.

Soluție : Se știe că bisectoarea unghiului $\angle A$ și mediatoarea OM a laturii $[BC]$ se intersectează pe cercul circumscris triunghiului ABC . Cu alte cuvinte, Q este mijlocul arcului

BC care nu conține punctul A . Din $\angle QBI \equiv \angle QIB = \frac{\pi - \angle BCA}{2}$ rezultă $BQ = IQ$ (de fapt, punctul Q este centrul cercului circumscris triunghiului BIC).

Triunghiurile BLQ și ALC sunt asemenea, deci $\frac{BQ}{LQ} = \frac{AC}{LC}$. Aplicarea repetată a teoremei bisectoarei în triunghiurile ABC și ABL conduce la egalitățile

$$\frac{IQ}{LQ} = \frac{BQ}{LQ} = \frac{AC}{LC} = \frac{AB}{BL} = \frac{AI}{IL},$$

de unde se deduce $AI \cdot LQ = IL \cdot IQ$.

25. Fie O, I, H, D centrul cercului circumscris, centrul cercului înscris, ortocentrul, respectiv un punct din interiorul triunghiului ABC , astfel încât $BC \cdot DA = CA \cdot DB = AB \cdot DC$. Să se arate că punctele A, B, D, O, I, H sunt conciclice dacă și numai dacă $m(\angle C) = 60^\circ$.

Soluție : Se observă că punctul D este situat pe cercul *Apoloniu* al laturii $[BC]$, deoarece

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

La fel, punctul D este situat pe cercul *Apoloniu* al laturii $[AC]$. Rezultă că punctul D este primul punct izodinamic, fiind interior triunghiului ABC .

Fie $\triangle LMN$ triunghiul podar al punctului D și R raza cercului circumscris triunghiului $\triangle ABC$. Se știe (Mihăileanu, N. N., *Complemente de geometrie sintetică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1965) că triunghiul $\triangle LMN$ este echilateral. Avem așadar

$$\begin{aligned}\angle ADB &= 360^\circ - \angle MDA - \angle LDM - \angle BDL = 360^\circ - \angle MNA - (180^\circ - \angle C) - \angle BNL = \\ &= 180^\circ + \angle C - (180^\circ - \angle MNL) = 180^\circ + \angle C - 120^\circ = 60^\circ + \angle C.\end{aligned}$$

Dacă punctele A, B, D, O, I, H sunt conciclice, atunci

$$\angle AIB = \angle ADB \Rightarrow 90^\circ + \frac{C}{2} = 60^\circ + C \Rightarrow C = 60^\circ.$$

Invers, dacă $C = 60^\circ$, atunci

$$\angle ADB = 60^\circ + C = 120^\circ, \angle AOB = 2C = 120^\circ, \angle AIB = 90^\circ + \frac{C}{2} = 120^\circ,$$

$$\angle AHB = A + B = 180^\circ - C = 120^\circ,$$

astfel că punctele A, B, D, O, I, H sunt conciclice.

26. Fie p, R, r și r_a, r_b, r_c semiperimetrul, raza cercului circumscris, raza cercului înscris și razele cercurilor exînscrise unui triunghi ABC . Să se demonstreze inegalitățile

$$\frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{R}} \leq \sqrt{r_a} + \sqrt{r_b} + \sqrt{r_c} \leq \frac{p}{\sqrt{r}}.$$

Soluție : Dacă S este aria triunghiului, atunci din $S = r_a(p-a), S = rp$ și formula lui Heron, se deduce $r_a r = (p-b)(p-c)$. Inegalitatea mediilor ne dă

$$\sqrt{r_a r} \leq \frac{(p-b) + (p-c)}{2} = \frac{a}{2}.$$

Asemănător deducem inegalități pentru r_b, r_c , iar prin adunare se obține a doua inegalitate din enunț. Demonstrăm acum prima inegalitate din enunț, care este echivalentă cu

$$a + b + c \leq \sqrt{2r_a R} + \sqrt{2r_b R} + \sqrt{2r_c R}.$$

Avem însă $S = r_a(p-a) = \frac{abc}{4R}$, deci rămâne să demonstrăm inegalitatea

$$a + b + c \leq \sqrt{\frac{abc}{-a+b+c}} + \sqrt{\frac{abc}{a-b+c}} + \sqrt{\frac{abc}{a+b-c}},$$

care rezultă simplu din inegalitatea mediilor sau inegalitatea lui Hölder.

27. Să se găsească toate perechile de numere reale (p, q) astfel încât inegalitatea

$$\left| \sqrt{1-x^2} - px - q \right| \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

să fie adevărată pentru orice $x \in [0, 1]$.

Soluție : Inegalitatea din enunț se scrie

$$\sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{2}-1}{2} \leq px + q \leq \sqrt{1-x^2} + \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Geometric, se cere să fie inclus un segment $y = px + q, 0 \leq x \leq 1$, între două arce de cerc.

Arcele sunt părți ale unor cercuri de rază 1 și centre $O_1\left(0, \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right), O_2\left(0, -\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$. Se arată

că există un singur astfel de segment. Pe primul cerc se consideră punctele $A\left(1, \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$ și

$B\left(0, \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$. Avem $BO_2 = AB = \sqrt{2}$. În triunghiul isoscel BO_2A înălțimile din O_2 și A sunt congruente. Înălțimea din A are lungimea egală cu distanța de la A la axa Oy , deci egală cu 1. Rezultă că distanța de la O_2 la AB este egală cu 1, astfel că segmentul AB este tangent la cercul cu centrul în O_2 . Acest segment este cuprins între cele două arce și deasupra intervalului $[0,1]$. Fiind înscris într-un arc și tangent la celălalt, rezultă că este singurul segment cu această proprietate.

Se obține astfel soluția unică $p = -1, q = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

28. Se consideră patru puncte cu abscisele x_1, x_2, x_3, x_4 pe hiperbola $xy = 1$. Să se arate că dacă aceste puncte aparțin unui cerc, atunci $x_1x_2x_3x_4 = 1$.

Soluție : Punctele sunt conciclice dacă și numai dacă există numerele reale A, B, C astfel ca

$$x_i^2 + \frac{1}{x_i^2} + 2Ax_i + 2B \cdot \frac{1}{x_i} + C = 0, \text{ pentru } i = 1, 2, 3, 4.$$

Considerăm aceste egalități ca un sistem de ecuații cu necunoscutele $2A, 2B, C$. Acest sistem este compatibil numai dacă determinantul matricei extinse este nul :

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} & x_1 & \frac{1}{x_1} & 1 \\ x_2^2 + \frac{1}{x_2^2} & x_2 & \frac{1}{x_2} & 1 \\ x_3^2 + \frac{1}{x_3^2} & x_3 & \frac{1}{x_3} & 1 \\ x_4^2 + \frac{1}{x_4^2} & x_4 & \frac{1}{x_4} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & \frac{1}{x_1} & 1 \\ x_2^2 & x_2 & \frac{1}{x_2} & 1 \\ x_3^2 & x_3 & \frac{1}{x_3} & 1 \\ x_4^2 & x_4 & \frac{1}{x_4} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1^2} & x_1 & \frac{1}{x_1} & 1 \\ \frac{1}{x_2^2} & x_2 & \frac{1}{x_2} & 1 \\ \frac{1}{x_3^2} & x_3 & \frac{1}{x_3} & 1 \\ \frac{1}{x_4^2} & x_4 & \frac{1}{x_4} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{1}{x_1x_2x_3x_4} + \frac{1}{x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2} \right) \begin{vmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \\ x_4^3 & x_4^2 & x_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Al doilea factor este un determinant *Vandermonde*, deci este nenul. Rezultă că primul factor este nul, așadar $x_1x_2x_3x_4 = 1$.

29. Un poliedru cu $m + n$ fețe are m fețe patrulaterare și n fețe triunghiuri. Se știe că în fiecare vârf se întâlnesc exact patru fețe. Să se arate că $n = 8$.

Soluție : Fie V numărul de vârfuri, M numărul de muchii și F numărul de fețe ale poliedrului. Formula lui *Euler* ne dă $V - M + F = 2$. Condițiile problemei implică $4V = 2M = 4m + 3n$,

$$F = m + n, \text{ de unde } 4(V - M + F) = -(4m + 3n) + 4(m + n) = n = 4 \cdot 2 = 8.$$

Comentariu. Dacă poliedrul are și p fețe pentagonale, iar în fiecare vârf se întâlnesc exact patru fețe, atunci $n - p = 8$. Dacă poliedrul are fețele triunghiuri sau patrulatere și în fiecare vârf se întâlnesc exact trei fețe, atunci $m = 3, n = 2$, iar dacă în fiecare vârf se întâlnesc exact cinci fețe, atunci $n - 2m = 20$.

30. Într-un tetraedru $OABC$ cu muchiile de lungimi $OA = BC = a, OB = AC = b, OC = AB = c$, fie A_1 și C_1 centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și AOC , respectiv. Să se demonstreze că dacă $OA_1 \perp BC_1$, atunci $a^2 + c^2 = 3b^2$.

Soluție : Alegem originea în O și identificăm, pentru simplitatea scrierii, vectorii de poziție cu punctele corespunzătoare. Avem $A_1 = \frac{A+B+C}{3}, C_1 = \frac{A+C}{3}, A_1 \cdot (C_1 - B) = 0$. Rezultă

$$(A+B+C) \cdot (A+C-3B) = 0,$$

care este echivalentă cu

$$a^2 + c^2 - 3b^2 + 2ac \cos B - 2ab \cos C - 2bc \cos A = 0.$$

Se aplică teorema cosinusului în $\triangle ABC$ și se obține

$$2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2, 2ac \cos B = a^2 + c^2 - b^2, 2ab \cos C = a^2 + b^2 - c^2.$$

Prin eliminarea funcțiilor trigonometrice se deduce $a^2 + c^2 = 3b^2$.

31. Să se arate că niciun număr Fibonacci f_n cu n impar nu are factori primi de forma $4k + 3$.

Soluție : Congruența $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ are soluții dacă și numai dacă $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Numerele lui *Fibonacci* f_n satisfac identitatea lui *Cassini*

$$f_n^2 - f_{n-1}f_{n+1} = (-1)^{n+1}, n \geq 1.$$

Această formulă poate fi demonstrată prin inducție sau se pot folosi determinanții. Numerele lui *Fibonacci* sunt generate de ecuația matricială

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n, n \geq 1.$$

Calculând determinanții se obține identitatea lui *Cassini*.

Presupunem că există un număr prim $p \equiv 3 \pmod{4}$ astfel încât $p \mid f_{n-1}$, n par. Atunci din identitatea lui Cassini se obține

$$f_n^2 \equiv -1 \pmod{p},$$

ceea ce este imposibil.

32. Să se arate că există o infinitate de numere mai mari decât 1 care se repetă de cel puțin șase ori în triunghiul lui Pascal.

Soluție : Se consideră ecuația

$$t = C_n^{m-1} = C_{n-1}^m, 3 \leq m < \frac{n-1}{2}.$$

Dacă ecuația are o soluție, atunci numărul t apare de cel puțin șase ori în triunghiul lui Pascal de două ori în linia t , de două ori în linia n (coloanele $m-1$ și $n-m+1$) și de două ori în linia $n-1$ (coloanele m și $n-m-1$).

Ecuația are soluțiile : $m = f_{2k-1} f_{2k}$, $n = f_{2k} f_{2k+1}$, $k \geq 2$. Într-adevăr, din $C_n^{m-1} = C_{n-1}^m$ rezultă

$$\frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} = \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!},$$

$$mn = (n-m+1)(n-m).$$

Această egalitate este verificată de perechea (m, n) de mai sus :

$$\begin{aligned} f_{2k-1} f_{2k} f_{2k} f_{2k+1} &= (f_{2k} f_{2k+1} - f_{2k-1} f_{2k} + 1)(f_{2k} f_{2k+1} - f_{2k-1} f_{2k}) = \\ &= (f_{2k} (f_{2k+1} - f_{2k-1}) + 1)(f_{2k} (f_{2k+1} - f_{2k-1})) = (f_{2k}^2 + 1) f_{2k}^2, \end{aligned}$$

de unde $f_{2k-1} f_{2k+1} = f_{2k}^2 + 1$, care este identitatea lui Cassini din problema precedentă.

Comentariu .Pentru $k = 2$, se obține $t = 3003$, valoare care apare de opt ori în triunghiul lui Pascal, după cum rezultă din egalitățile

$$C_{14}^6 = C_{14}^8 = C_{15}^5 = C_{15}^{10} = C_{78}^2 = C_{78}^{76} = C_{3003}^1 = C_{3003}^{3002}.$$

33. Să se arate că numărul $3^{4^5} + 4^{5^6}$ este produsul a două numere întregi, fiecare dintre ele mai mari decât 10^{2002} .

Soluție : Numărul dat este de forma $m^4 + \frac{1}{4}n^4$, unde $m = 3^{4^4}$ și $n = 4^{\frac{5^6+1}{4}} = 2^{\frac{5^6+1}{2}}$.

Concluzia rezultă din identitatea

$$m^4 + \frac{n^4}{4} = \left(m^2 + mn + \frac{n^2}{2}\right) \left(m^2 - mn + \frac{n^2}{2}\right)$$

și din inegalitățile

$$\begin{aligned} m^2 - mn + \frac{n^2}{2} &> n \left(\frac{n}{2} - m\right) = 2^{\frac{5^6+1}{2}} \left(2^{\frac{5^6-1}{2}} - 3^{4^4}\right) > 2^{\frac{5^6+1}{2}} \left(2^{\frac{5^6-1}{2}} - 2^{2 \cdot 4^4}\right) = \\ &= 2^{\frac{5^6+1}{2}} \cdot 2^{512} \left(2^{\frac{5^6-1}{2}-512} - 1\right) > 2^{10 \cdot \frac{5^6+1}{20}} \cdot 2^{512} > 2^{10 \cdot 5^4} \cdot 2^{10 \cdot 50} > 10^{3 \cdot 5^4} \cdot 10^{3 \cdot 50} > 10^{2002}. \end{aligned}$$

34. Să se arate că numărul $5^{5^{n+1}} + 5^{5^n} + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, nu este prim.

Soluție : Dacă $m = 5^{5^n}$, atunci $5^{5^{n+1}} + 5^{5^n} + 1 = m^5 + m + 1 = (m^2 + m + 1)(m^3 - m^2 + 1)$

este produsul a două numere naturale mai mari decât 1, deci nu este prim.

35. Să se arate că pentru orice număr natural n nenul, numărul $3^{3^n} + 1$ are cel puțin $2n + 1$ factori primi, nu neapărat diferiți.

Soluție : Inducție după n . Afirmatia este evidentă pentru $n = 1$. Din identitatea

$$3^{3^{n+1}} + 1 = (3^{3^n} + 1)(3^{2 \cdot 3^n} - 3^{3^n} + 1)$$

rezultă că este suficient să demonstrăm că numărul $3^{2 \cdot 3^n} - 3^{3^n} + 1$ este compus pentru orice $n \geq 1$. Acest fapt rezultă din descompunerea

$$3^{2 \cdot 3^n} - 3^{3^n} + 1 = (3^{3^n} + 1)^2 - 3 \cdot 3^{3^n} = \left(3^{3^n} + 1 - 3^{\frac{3^n+1}{2}}\right) \left(3^{3^n} + 1 + 3^{\frac{3^n+1}{2}}\right),$$

ceea ce încheie demonstrația prin inducție.

36. Numărul 2^{29} are nouă cifre distincte. Să se găsească cifra lipsă, fără a calcula efectiv numărul.

Soluție : Orice număr este congruent modulo 9 cu suma cifrelor lui. Observăm că

$$0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45 \equiv 0 \pmod{9}.$$

Pe de altă parte,

$$2^{29} \equiv 2^2 \cdot (-1)^9 \equiv -4 \pmod{9},$$

de unde rezultă că cifra lipsă este 4.

Observație. Avem într-adevăr $2^{29} = 536870912$.

37. Să se demonstreze că pentru orice număr prim $p > 17$, numărul $p^{32} - 1$ se divide cu 16320.

Soluție : Avem factorizarea $16320 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$. Să observăm că $p^{ab} - 1 = (p^a)^b - 1$ este divizibil cu $p^a - 1$. Rezultă că $p^{32} - 1$ este divizibil cu $p^2 - 1$, $p^4 - 1$ și $p^{16} - 1$. Din teorema lui *Fermat* rezultă că $p^2 - 1 = p^{3-1} - 1$ se divide cu 3, $p^4 - 1 = p^{5-1} - 1$ se divide cu 5 și $p^{16} - 1 = p^{17-1} - 1$ se divide cu 17. Aici am folosit faptul că p , fiind prim și mai mare decât 17, este prim cu 3, 5 și 17.

Mai rămâne să arătăm că $p^{32} - 1$ este divizibil cu 2^6 . Evident, p este impar, $p = 2m + 1$, cu m întreg. Atunci $p^{32} - 1 = (2m + 1)^{32} - 1$. Dezvoltând cu binomul lui *Newton*, se obține

$$(2m)^{32} + C_{32}^1 (2m)^{31} + \dots + C_{32}^2 (2m)^2 + C_{32}^1 (2m).$$

În această sumă toți termenii, cu excepția ultimilor cinci, conțin o putere a lui 2 mai mare sau egală cu 6. Pe de altă parte, este simplu să verificăm că în suma

$$C_{32}^5 (2m)^5 + C_{32}^4 (2m)^4 + C_{32}^3 (2m)^3 + C_{32}^2 (2m)^2 + C_{32}^1 (2m)$$

Primul coeficient binomial este divizibil cu 2, al doilea cu 2^2 , al treilea cu 2^3 , al patrulea cu 2^4 și al cincilea 2^5 . Rezultă că această sumă se divide cu 2^6 și deci $p^{32} - 1 =$

$= (2m + 1)^{32} - 1$ se divide cu 2^6 , ceea ce încheie demonstrația.

38. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n \geq 2$, există o mulțime S de n numere întregi astfel încât $(a - b)^2$ divide ab pentru oricare două numere distincte $a, b \in S$.

Soluție : Se demonstrează afirmația prin inducție după n .

Dacă $n = 2$, se ia $S = \{0, 1\}$.

Presupunem că pentru un $n \geq 2$ există o mulțime S_n cu proprietatea dată. Fie L cel mai mic multiplu comun al numerelor $(a - b)^2$ și ab , pentru toate perechile (a, b) de numere distincte din S_n . Definim

$$S_{n+1} = \{L + a \mid a \in S_n\} \cup \{0\}.$$

Mulțimea S_{n+1} conține $n + 1$ întregi nenegativi, deoarece $L > 0$. Fie $a, b \in S_{n+1}$ distincte. Dacă unul dintre aceste numere este 0, atunci $(a - b)^2$ divide ab . Dacă $ab \neq 0$, atunci

$$(L + a)(L + b) \equiv ab \equiv 0 \pmod{(a - b)^2},$$

astfel că $((L + a) - (L + b))^2$ divide $(L + a)(L + b)$, ceea ce încheie demonstrația prin inducție.

39. Să se arate că pentru orice număr natural nenul n , numărul soluțiilor întregi ale ecuației $x^2 + xy + y^2 = n$ este finit și multiplu de 6.

Soluție ; Din

$$2n = 2x^2 + 2xy + 2y^2 = x^2 + y^2 + (x + y)^2 \geq x^2 + y^2$$

rezultă că orice soluție a ecuației se reprezintă în plan printr-un punct de coordonate întregi din interiorul cercului cu centrul în origine și raza $\sqrt{2n}$, deci numărul acestor soluții este finit.

Se observă că

$$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 + (x + y)(-x) + (-x)^2,$$

deci din orice soluție (x, y) a ecuației date se obține o nouă soluție $(x + y, -x)$. Repetând procedeul, se obține un ciclu de lungime 6

$$(x, y), (x + y, -x), (y, -x - y), (-x, -y), (-x - y, x), (-y, x + y).$$

Toate aceste soluții sunt distincte, deoarece x și y nu pot fi ambele nule. Mulțimea soluțiilor ecuației date poate fi partiționată în cicluri de lungime 6, deci cardinalul acestei mulțimi este multiplu de 6.

Comentarii. 1) Putem folosi algebra liniară pentru a demonstra că soluțiile dintr-un ciclu sunt distincte. Într-adevăr, avem

$$\begin{pmatrix} x + y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

deci soluțiile dintr-un ciclu pot fi scrise ca vectori coloană

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, k = 0, 1, \dots, 5.$$

Valorile proprii ale matricei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sunt $e^{\frac{2\pi i}{6}}$ și $e^{-\frac{2\pi i}{6}}$, deci pentru $k = 1, 2, \dots, 5$, matricea A^k nu poate avea valoarea proprie 1, deci

$$A^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

2) Factorizăm în mulțimea de întregi algebrici $\mathbb{Z}[\omega]$, unde ω este o rădăcină cubică primitivă a unității

$$x^2 + xy + y^2 = (x - \omega)(x - \omega^2 y) = ((x + y) - \omega(-y))((x + y) - \omega^2(-y)).$$

Ecuția din enunț este simetrică, deci dintr-o soluție (x, y) se obține o nouă soluție $(-y, x + y)$. Se obține astfel un nou ciclu de lungime 6 :

$$(x, y), (-y, x + y), (-x - y, x), (-x, -y), (y, -x - y), (x + y, -x),$$

care este ciclul anterior, dar în ordine inversă.

3) Simetria $(x, y) \leftrightarrow (y, x)$ poate fi folosită pentru a demonstra că în anumite cazuri numărul soluțiilor întregi ale ecuației este divizibil cu 12. Acest fapt nu este însă totdeauna adevărat, de exemplu pentru $n = 1$ există exact 6 soluții.

40. Să se găsească toate soluțiile întregi ale ecuației $x^2 + 615 = 2^n$.

Soluție : Avem factorizarea $615 = 3 \cdot 5 \cdot 41$. Numărul 2 nu este pătrat modulo 3 (sau mod 5), deci n trebuie să fie par, $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Atunci $615 = (2^m - x)(2^m + x)$. Numărul 615 poate fi scris în patru moduri ca produs de două numere naturale :

$$615 = 1 \cdot 615 = 3 \cdot 205 = 5 \cdot 123 = 15 \cdot 41.$$

Cum $(2^m - x) + (2^m + x) = 2^{m+1}$, suma celor doi factori trebuie să fie o putere a lui 2, ceea ce are loc numai pentru descompunerea $615 = 5 \cdot 123$. Se obțin soluțiile $x = \pm 59$, $n = 12$.

41. Să se arate că numărul $5^{32} + 1$ se divide cu 641.

Soluție : Avem $5^{32} - 2^{32} = (5 - 2)(5 + 2)(5^2 + 2^2)(5^4 + 2^4)(5^8 + 2^8)(5^{16} + 2^{16})$ se divide cu 641 $= 5^4 + 2^4$. Numărul $2^{32} + 1 = 2^{28} \cdot 2^4 + 1 = 2^{28}(2^7 \cdot 5 + 1 - 5^4) + 1 =$

$= 2^{28}(2^7 \cdot 5 + 1) - [(2^7 \cdot 5)^4 - 1] = (2^7 \cdot 5 + 1)[2^{28} - (2^7 \cdot 5 - 1)(2^{14} \cdot 5^2 + 1)]$ se divide cu 641 $= 2^7 \cdot 5 + 1$. Rezultă că și numărul $5^{32} + 1 = (5^{32} - 2^{32}) + (2^{32} + 1)$ se divide cu 641.

42. Se consideră numerele $p = 2^8 \cdot 1071 + 1$, $x = 2^9 + 2^2$, $y = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 1$, $u = 2^6 - 2^3 + 1$, $v = 2^{11} + 2^7 + 2^2$.

a) Să se verifice egalitățile : $-xu + yv = 2^{16}$, $xv + yu = 1071^2$ și $p = x^2 + y^2$

b) Să se deducă faptul că $F_6 = 2^{64} + 1$ se divide cu p .

Soluție : a) Folosim reprezentarea $1071 = 2^{10} + 2^5 + 2^4 - 1$, ceea ce reduce verificarea egalităților la compararea unor sume algebrice de puteri ale lui 2. Să verificăm, de exemplu, ultima egalitate :

$$x^2 + y^2 = (2^9 + 2^2)^2 + (2^6 + 2^4 + 2^3 + 1)^2 = 2^{18} + 2^{12} + 2^4 + 2^{12} + 2^8 + 2^6 + 1 + 2^{11} + 2^{10} + 2^7 + 2^8 + 2^5 + 2^4 = 2^{18} + 2^{13} + 2^{12} - 2^6 + 1 = p.$$

b) Din $2^{32} + 1071^4 = (-xu + yv)^2 + (xv + yu)^2 = (x^2 + y^2)(u^2 + v^2)$ rezultă $1071^4 \equiv -2^{32} \pmod{p}$. Dar $2^8 \cdot 1071 \equiv -1 \pmod{p}$, deci $2^{32} \cdot 1071^4 \equiv 1 \pmod{p}$, de unde $2^{32} \cdot (-2^{32}) \equiv -2^{64} \equiv 1 \pmod{p}$.

Note. Factorul p al numărului F_6 a fost găsit de *Fortuné Landry* (12 iulie 1880), la vârsta de 82 de ani. Metoda de factorizare nu a fost descrisă de către autor. O reconstrucție a tehnicilor de factorizare folosite de *Landry* se face în articolul Williams, H. C., *How was F_6 Factored*, *Mathematics of Computation*, Vol. 61, No. 203, July 1993, pp. 463-474.

43. Câte triunghiuri necongruente au lungimile laturilor numere naturale și perimetrul de lungime $n \in \mathbb{N}^*$?

Soluție : Fie $t(n)$ numărul triunghiurilor necongruente cu lungimile laturilor numere naturale și perimetrul de lungime n . Șirul $\{t(n)\}$ este șirul lui *Alcuin* :

$$\begin{array}{cccccccccc} n & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}$$

$$t(n) \quad 000101121$$

Se construiește un triunghi oarecare cu laturile de lungimi (a, b, c) plecând de la triunghiul cu laturile de lungimi $(1, 1, 1)$:

$$(a, b, c) = (1, 1, 1) + \alpha(0, 1, 1) + \beta(1, 1, 1) + \gamma(1, 1, 2),$$

unde $\alpha = b - a$, $\beta = a + b - c - 1$, $\gamma = c - b$. Din $2\alpha + 3\beta + 4\gamma = a + b + c - 3 = n - 3$, se vede că $t(n)$ este egal cu numărul de reprezentări ale lui n ca sumă de 2, 3 și 4, abstracție făcând de ordinea termenilor. Funcția generatoare a acestui șir este

$$\frac{x^3}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} = t(0) + t(1)x + t(2)x^2 + \dots$$

Într-adevăr, fiecare factor $\frac{1}{1-x^k}$, $k \in \{2, 3, 4\}$, este suma unei serii geometrice infinite, iar produsul acestor serii este o serie cu termenul general căutat, factorul x^3 de la numărător având rolul de deplasare, întrucât nu se caută reprezentările lui n , ci ale lui $n-3$.

Se descompune funcția generatoare în fracții simple

$$-\frac{1}{24(x-1)^3} + \frac{13}{288(x-1)} - \frac{1}{16(x+1)^2} - \frac{1}{32(x+1)} - \frac{x+1}{8(x^2+1)} + \frac{x+2}{9(x^2+x+1)}.$$

Cu formula binomului pentru exponenți arbitrari, primii patru termeni pot fi scriși

$$\frac{1}{24} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3}{n} (-1)^n x^n - \frac{13}{288} \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} x^n - \frac{1}{32} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Folosind identitatea $\binom{-k}{n} (-1)^n = \binom{n+k-1}{n}$, coeficientul lui x^n devine

$$\frac{1}{24} \binom{n+2}{n} - \frac{13}{288} - \frac{1}{16} (-1)^n (n+1) - \frac{1}{32} (-1)^n = \frac{6n^2 + 18n - 1 - 18n(-1)^n - 27(-1)^n}{288}.$$

Înmulțind ultimii doi termeni cu $1-x^2$, respectiv $1-x$, se observă că se poate exprima coeficientul lui x^n modulo 12 folosind o constantă $\frac{c}{72}$, unde c este dat de tabelul

$n \bmod 12$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
c	7	-17	1	25	-17	-17	25	1	-17	7	1	1

Se obține astfel formula

$$t(n) = \begin{cases} \frac{n^2}{48} + \frac{c-7}{72}, & n \text{ par} \\ \frac{(n+3)^2}{48} + \frac{c-7}{72}, & n \text{ impar} \end{cases}.$$

44. Se consideră $2n$ numere naturale nenule distincte mai mici sau egale cu n^2 ($n > 2$). Să se demonstreze că există trei diferențe $a_i - a_j$ care sunt egale.

Soluție : Presupunem că $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n}$ și considerăm diferențele $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots,$

$a_{2n} - a_{2n-1}$. Dacă printre ele nu există trei egale, atunci

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{2n} - a_{2n-1}) \geq 1 + 1 + 2 + 2 + \dots + (n-1) + (n-1) + n = n^2.$$

Pe de altă parte, această sumă este egală cu $a_{2n} - a_1$, deci este cel mult egală cu $n^2 - 1$, contradicție.

45. O piesă este mutată în planul de coordonate plecând din punctul $(1, 1)$ după următoarele reguli :

(a) din orice punct (a, b) piesa poate muta în punctul $(2a, b)$ sau $(a, 2b)$;

(b) din orice punct (a, b) piesa poate muta în punctul $(a-b, b)$, dacă $a > b$ sau în punctul

$(a, b-a)$, dacă $a < b$.

Să se determine toate punctele de coordonate întregi pozitive (x, y) care sunt accesibile pentru piesă.

Soluție : Se demonstrează că punctul (x, y) este accesibil pentru piesă dacă și numai dacă $\text{cmmdc}(x, y) = 2^s$ pentru un număr natural s .

Condiția este necesară : într-adevăr, din $\text{cmmdc}(p, q) = \text{cmmdc}(p, q-p)$ se vede că numărul divizorilor comuni impari este invariant la cele două transformări. Cum acest număr este egal inițial cu 1, rezultă $\text{cmmdc}(x, y) = 2^s$ pentru un număr natural s .

Condiția este suficientă : presupunem că $\text{cmmdc}(x, y) = 2^s$ și alegem dintre toate perechile (p, q) din care punctul (x, y) este accesibil, pereche care minimizează $p+q$. Numerele p, q sunt impare, altfel $(p/2, q)$ sau $(p, q/2)$ ar contrazice minimalitatea. Dacă $p > q$, atunci (p, q) este accesibil din $((p+q)/2, q)$, din nou contradicție. Similar, $p < q$ este imposibil. Se deduce $p = q$, dar p, q sunt impare și $\text{cmmdc}(p, q)$ este o putere a lui 2, deci $p = q = 1$, astfel că punctul (x, y) este accesibil.

46. Dacă $1 \leq x \leq 4$ și $2 \leq y \leq 6$, care este probabilitatea ca $x + y \geq 5$?

Soluție : Avem aici un exemplu de probabilitate geometrică. Regiunea posibilă este dreptunghiul cu vârfurile în punctele $(1, 2), (1, 6), (4, 2), (4, 6)$ și aria $(4-1)(6-2) = 12$. Din acest dreptunghi dreapta $x + y = 5$ "taie" triunghiul cu vârfurile în punctele $(1, 2), (1, 4), (3, 2)$ și aria $\frac{(3-1)(4-2)}{2} = 2$ (regiunea nefavorabilă). Rezultă că probabilitatea căutată este egală cu $\frac{12-2}{12} = \frac{5}{6}$.

47. Fie v, w două rădăcini ale ecuației $z^n = 1$, alese arbitrar. Să se găsească probabilitatea ca

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \leq |v+w|.$$

Soluție : Cele n rădăcini sunt distribuite simetric în planul complex, deci putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $v = 1$. Trebuie să determinăm probabilitatea ca

$$|1+w|^2 = |1+\cos\theta + i\sin\theta|^2 = 2+2\cos\theta \geq 2+\sqrt{3}.$$

Acest fapt este echivalent cu $\cos\theta \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $|\theta| \leq \frac{\pi}{6}$. Cum $w \neq 1$, avem

$\theta = \pm \frac{2k\pi}{n}, 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor$. Există $2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor$ astfel de unghiuri, deci probabilitatea este egală cu

$$\frac{2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor}{n-1}.$$

48. Se aleg două numere reale, aleator, uniform și independent din intervalul $[-a, a]$, $a \in \mathbb{R}_+^*$. Care este probabilitatea ca produsul lor să fie strict mai mare decât suma lor?

Soluție : Ecuația $xy = x + y$, echivalentă cu $(x-1)(y-1) = 1$, este ecuația unei hiperbole, care împarte pătratul $-a < x < a, -a < y < a$ în două sau trei părți.

Prima parte conține vârful $(-a, -a)$, în care $xy - x - y = a^2 + 2a > 0$. În această parte $xy > x + y$. Această parte este limitată de dreptele $x = -a, y = -a$ și de curba $y = 1 + \frac{1}{x-1}$ pe intervalul $-a < x < \frac{a}{a+1}$, deoarece $y > -a$. Ea are aria

$$\int_{-a}^{\frac{a}{a+1}} \left(a+1 + \frac{1}{x-1} \right) dx = a^2 + 2a - 2 \ln(a+1).$$

A doua parte conține vârfurile $(-a, a)$ și $(a, -a)$ în care $xy - x - y = -a^2 < 0$. În această parte, $xy < x + y$.

A treia parte nu există, dacă $x \leq 2$. Dacă $a > 2$, ea conține vârful (a, a) , în care $xy - x - y = a^2 - 2a > 0$. În această parte $xy > x + y$. Această parte este limitată de dreptele $x = a, y = a$ și de curba $y = 1 + \frac{1}{x-1}$ pe intervalul $\frac{a}{a-1} < x < a$, deoarece $y < a$. Ea are aria

$$\int_{\frac{a}{a-1}}^a \left(a-1 - \frac{1}{x-1} \right) dx = a^2 - 2a - 2 \ln(a-1).$$

Regiunea pătratului în care $xy > x + y$ are aria

$$a^2 + 2a - 2 \ln(a+1), \text{ dacă } 0 < a \leq 2,$$

$$2a^2 - 2 \ln(a^2 - 1), \text{ dacă } a > 2.$$

Aria pătratului este egală cu $4a^2$, deci probabilitatea ca $xy > x + y$, cu x, y uniform distribuiți în interiorul pătratului, este egală cu

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2a} - \frac{\ln(a+1)}{2a^2}, \text{ dacă } 0 < a \leq 2,$$

$$\frac{1}{2} - \frac{\ln(a^2-1)}{2a^2}, \text{ dacă } a > 2.$$

49. O podea dreptunghiulară este acoperită cu dale de gresie de dimensiuni 2×2 și 1×4 . O dală se sparge, dar există alta disponibilă din celălalt sortiment. Să se demonstreze că podeaua nu poate fi acoperită prin rearanjarea dalelor.

Soluție : Se marchează pătratele podelei începând cu colțul din sud-vest ca în figură. O gresie

4×1 acoperă totdeauna 0 sau 2 pătrate marcate, iar o gresie 2×2 acoperă totdeauna un singur pătrat marcat. De aici rezultă că nicio dală de gresie nu poate fi înlocuită cu o dală de celălalt fel.

	X		X		X
	X		X		X
	X		X		X

50. Există 10000 de numere de 10 cifre astfel încât toate numerele sunt divizibile cu 7 și orice număr poate fi obținut din alt număr schimbând ordinea cifrelor?

Soluție : Să numim *echivalente* două numere care pot fi obținute unul din altul prin permutarea cifrelor. Toate numerele echivalente între ele alcătuiesc o *clasă*. Există clase cu un singur element, de exemplu 1111111111, există și o clasă cu $10!$ elemente, clasa numărului 1234567890. Fiecare clasă este unic determinată de cele 10 cifre ale unui element oarecare al ei, unde repetarea cifrelor este permisă. Numărul de moduri în care putem alege 10 cifre este egal cu numărul de moduri în care putem pune 10 bile în 10 urne etichetate 0, 1, 2, ..., 9, deci

este egal cu $C_{19}^9 = 92378$. Există $\left[\frac{10^{10}}{7} \right] = 1428571428$ multipli de 7, deci există, conform

principiului lui *Dirichlet*, o clasă care conține cel puțin $\left[\frac{1428571428}{92378} \right] = 15465$ multipli de 7.

Răspunsul la întrebarea din enunț este deci afirmativ.

Sursa problemelor :

[1] : 3, 40; [2] : 30, 49; [3] : 2, 33, 34, 35, 44, 45; [4] : 5, 16, 27, 28, 36, 37, 47; [5] : 34; [6] : 50; [7] : 1; [8] : 1, 15, 21, 22, 31, 32, 43; [9] : 9; [10] : 4; [11] : 8, 13, 30; [12] : 29; [14] : 6, 23, 41, 42; [15] : 20; [16] : 47, 48.

Bibliografie

- [1] Gilbert, George T., Krusemeyer, Mark I., Larson, Loren C., *The Wohascum County Problem Book*, Mathematical Association of America, 1993
- [2] Engel, Arthur, *Problem-Solving Strategies*, Springer, 1998
- [3] Andreescu, Titu, Andrica, Dorin, *360 Problems for Mathematical Contests*, GIL Publishing House, Zalău, 2003
- [4] Gelca, Răzvan, Andreescu, Titu, *Putnam and Beyond*, Springer, 2007
- [5] Andreescu, Titu, Andrica, Dorin, Feng, Zuming, *104 Number Theory Problems*, Birkhäuser, 2007
- [6] Zeitz, Paul, *The Art and Craft of Problem Solving, Second Edition*, John Wiley & Sons, Inc., 2007
- [7] Hardy, G. H., Wright, E. M., Heath-Brown, D. R., Silverman, J. H., *An Introduction to the Theory of Numbers, Sixth Edition*, Oxford University Press, 2008
- [8] Erickson, Martin, *Aha! Solutions*, Mathematical Association of America, 2009
- [9] Djukić, Dušan, Janković, Vladimir, Matić, Ivan, Petrović, Nikola, *The IMO Compendium, Second Edition*, Springer, 2011
- [10] *Pi Mu Epsilon Journal*
- [11] *Mathematical Reflections*
- [12] *Crux Mathematicorum*
- [13] *The Harvard College Mathematics Review*
- [14] www.mateinfo.ro
- [15] *Kömal*
- [16] *Missouri State University Problem Corner*

CATEDRA DE MATEMATICĂ, GRUPUL ȘCOLAR DE TRANSPORTURI – PLOIEȘTI

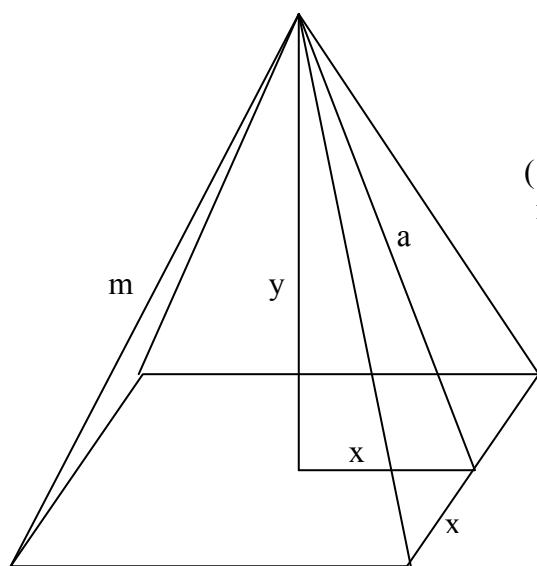
E-mail : avram050652@yahoo.com

În căutarea piramidei perfecte

De regulă percepem o problemă ca fiind frumoasă dacă fracțiile se simplifică, radicalii se extrag exact, rezultatele sunt numere întregi, etc. De aceea dăm următoarea definiție:

O piramidă patrulateră regulată se numește piramidă perfectă dacă latura bazei, apotema piramidei, înălțimea ei și muchia laterală sunt numere naturale.

În cele ce urmează vom nota lungimea laturii bazei cu $2x$, înălțimea piramidei cu y și apotema piramidei cu a și muchia laterală cu m , ca în figura de mai jos:



PIRAMIDA
PATRULATERA
REGULATA
PERFECTA
(dacă x, y, a, m sunt
numere naturale)

Presupunem că există numerele naturale x, y, a, m adică există o piramidă patrulateră regulată perfectă.

·Cu teorema lui Pitagora putem scrie relațiile :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + a^2 = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow (a - y) \cdot (a + y) = (m - a) \cdot (m + a) = x^2 \quad (R1)$$

·Deoarece m și y sunt numere naturale și $y < m$, există un număr natural k astfel încât :

$$m = k + y \quad (R2)$$

·Înlocuind (R2) în (R1) obținem :

$$(a - y) \cdot (a + y) = (k + y - a) \cdot (k + y + a) = x^2 \quad (R3)$$

·Numerele $a - y$ și $a + y$ sunt de asemenea naturale ; le vom nota astfel :

$$\begin{cases} a - y = r \\ a + y = s \end{cases} \quad (R4)$$

·Cu notațiile (R4) relația (R3) se scrie astfel :

$$r \cdot s = (k - r) \cdot (k + s) = x^2 \quad (R5)$$

·Din (R5) rezultă ecuația de gradul II cu necunoscuta k

$$k^2 + (s - r) \cdot k - 2rs = 0 \quad (R6)$$

care are discriminantul

$$\Delta = (s - r)^2 + 8rs = (s + r)^2 + 4rs = j^2 \quad (R7)$$

unde j este un număr natural deoarece în caz contrar soluția k nu ar putea fi nr.natural.

·Pentru a analiza relația (R7) avem nevoie de soluțiile ecuației diofantice

$$X \cdot Y = A \cdot B \quad (\text{o soluție este un sistem de 4 numere } (A, B, X, Y)).$$

■Teorema 1 :

Dacă $A = u \cdot v$ și $B = u' \cdot v'$ atunci o soluție a ecuației $X \cdot Y = A \cdot B$ este

$$\begin{cases} X = u \cdot u' \\ Y = v \cdot v' \end{cases}$$

Orice soluție a ecuației este generată de o factorizare potrivită a numerelor A și B ■

·Începem analiza relației (R7) observând că ea este echivalentă cu :

$$(j + s + r) \cdot (j - s - r) = 4rs \quad (R8)$$

·Deoarece numerele $j + s + r$ și $j - s - r$ au aceeași paritate și anume paritate pară soluția ecuației (R8) se scrie :

$$\begin{cases} r = u \cdot v \\ s = u' \cdot v' \\ j + s + r = 2u \cdot u' \\ j - s - r = 2v \cdot v' \end{cases} \quad (R9)$$

·Adunând ultimele 2 relații de la (R9) rezultă:

$$j = u \cdot u' + v \cdot v' \quad (R10)$$

·Folosind (R9) și (R10) în relația (R7) : $(s+r)^2 + 4rs = j^2$ obținem:

$$(u' \cdot v' + u \cdot v)^2 + 4uvu'v' = (u \cdot u' + v \cdot v')^2$$

care se poate scrie în mod echivalent :

$$(uv + u'v')^2 - (uu' - vv')^2 = 0 \quad (R11)$$

·Relația (R11) implică

$$I \quad uv + u'v' + uu' - vv' = 0 \quad \text{sau}$$

$$II \quad uv + u'v' - uu' + vv' = 0$$

·Ecuația I se scrie sub forma $u \cdot (u' + v) = v' \cdot (v - u')$ cu soluțiile (conform teoremei 1) date de formulele :

$$\begin{cases} v' = h i' \\ v - u' = h i \\ \dots\dots\dots \\ u = h h' \\ u' + v = i i' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = h h' \\ v = \frac{i \cdot (i' + h)}{2} \\ \dots\dots\dots \\ u' = \frac{i \cdot (i' - h)}{2} \\ v' = h i' \end{cases} \quad (R12)$$

·Ecuația II se obține din ecuația I prin înlocuirea lui u cu v și a lui u' cu v' și invers ; de aceea soluțiile ecuației II sunt :

$$\begin{cases} v = h h' \\ u = \frac{i \cdot (i' + h)}{2} \\ \dots\dots\dots \\ v' = \frac{i \cdot (i' - h)}{2} \\ u' = h i' \end{cases} \quad (R12)'$$

·În ambele cazuri I și II conform primelor două relații din (R9) și folosind (R12) și (R12)' rezultă :

$$\begin{cases} r = u v = \frac{h h' i \cdot (i' + h)}{2} \\ s = u' v' = \frac{i i' h' \cdot (i' - h)}{2} \end{cases}$$

·Din (R5) rezultă $rs = x^2$ adică:

$$i^2 h'^2 \cdot i' h \cdot (i'^2 - h^2) = (2x)^2 \quad (R13)$$

·Notăm $(2x)^2 : (i^2 h'^2) = n^2$; din considerațiile făcute până acum, putem formula următoarea teoremă:

■Teorema 2:

Dacă există o piramidă patrulateră regulată perfectă atunci ecuația diofantică

$$i' h \cdot (i'^2 - h^2) = n^2 \quad (R14)$$

are o soluție nebanală ($n \neq 0$) în mulțimea numerelor naturale ■

·Notând necunoscutele ecuației (R14) cu x, y, z trecem la ultima parte a acestui studiu.

Studiul ecuației diofantice $i' h \cdot (i'^2 - h^2) = n^2$

·Notăm cu $H = \{(x, y, z) \mid x y (x^2 - y^2) = z^2 ; x, y, z \text{ numere naturale nenule}\}$ mulțimea soluțiilor nebanale ($z \neq 0$) ale ecuației diofantice

$$x y (x^2 - y^2) = z^2 \quad (R15)$$

·Fie (x, y, z) o soluție nebanală (adică $H \neq \emptyset$) care există conform teoremei 2.

(A) Putem presupune că **x și y au parități diferite;**

· Dacă x și y au aceeași paritate considerăm tripletul (x_1, y_1, z_1) definit cu formulele de mai jos :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x+y}{2} \in \mathbb{N} \\ y_1 = \frac{x-y}{2} \in \mathbb{N} \\ z_1 = \frac{z}{2} \end{cases} ;$$

acest triplet este o altă soluție nebanală a ecuației $xy(x^2 - y^2) = z^2$.

· Verificarea faptului că tripletul (x_1, y_1, z_1) este soluție :

Tripletul (x, y, z) verifică ecuația $xy(x^2 - y^2) = z^2$ deoarece (x, y, z) este soluție .

Dar $x = x_1 + y_1$ și $y = x_1 - y_1$.

Înlocuind x și y în ecuația $xy(x^2 - y^2) = z^2$ obținem

$$(x_1 + y_1)(x_1 - y_1)(4x_1y_1) = z^2.$$

Deoarece x_1 și y_1 sunt numere naturale nenule diferite rezultă $z = 2z_1 \neq 0$ și $z_1 \in \mathbb{N}$

Mai rezultă relația $x_1 y_1 (x_1^2 - y_1^2) = z_1^2$ și deci ecuația e verificată de tripletul de numere naturale nenule (x_1, y_1, z_1) .

· Dacă noul triplet (x_1, y_1, z_1) are x_1 și y_1 de parități diferite ne oprim ;
dacă x_1 și y_1 au aceeași paritate, considerăm un nou triplet

$$\begin{cases} x_2 = \frac{x_1 + y_1}{2} \\ y_2 = \frac{x_1 - y_1}{2} \\ z_2 = \frac{z_1}{2} \end{cases} \quad \text{care de asemenea este o altă soluție nebanală a ecuației (R15)}$$

· Deoarece șirul de numere $z, z_1, z_2, \dots$ este un șir strict descrescător de numere naturale, rezultă că el este finit și deci în mod sigur obținem la un moment dat o

soluție (x_n, y_n, z_n) cu x_n și y_n de parități diferite (pentru că în caz contrar construim un șir infinit de soluții cu z natural strict descrescător ceea ce e imposibil).

·Am stabilit că dacă avem o soluție (x, y, z) nebanală a ecuației (R15) adică $H \neq \emptyset$ atunci putem presupune că **x și y au parități diferite**.

(B) Construcția unei noi piramide patrulateră regulate perfecte .

·Deoarece $H \neq \emptyset$ alegem acea soluție (construită anterior) $(x_0, y_0, z_0) \in H$ astfel încât x_0 și y_0 să aibă parități diferite ; dacă x_0 și y_0 au factori primi comuni , construim o soluție (x', y', z') astfel încât x' și y' să fie numere relativ prime și în același timp să aibă parități diferite.

·Fie p un factor prim comun ; atunci : $x_0 = p \cdot x'$ și $y_0 = p \cdot y'$; înlocuind în ecuația (R15) obținem :

$$p x' p y' (p^2 x'^2 - p^2 y'^2) = z_0^2 \Leftrightarrow x' y' (x'^2 - y'^2) = z'^2 \text{ unde } z' = \frac{z_0}{p^2}$$

·Procedând astfel putem elimina toți factorii primi comuni ai lui x_0 și y_0 păstrând paritatea lor deoarece numerele prime eliminate sunt toate impare.

·Fie deci (x', y', z') o soluție a ecuației (R15) cu x' și y' de parități diferite iar x' și y' numere relativ prime ; atunci x' și $x'^2 - y'^2$ sunt de asemenea relativ prime ; dacă un factor prim comun p divide pe x' și $x'^2 - y'^2$ atunci el divide și pe y' ceea ce nu este posibil . Analog rezultă că y' și $x'^2 - y'^2$ sunt relativ prime.

·Deoarece

$$x' y' (x'^2 - y'^2) = z'^2 \quad (R16)$$

și cei trei factori x' , y' și $x'^2 - y'^2$ sunt numere relativ prime (oricare două), rezultă că cei trei factori sunt pătrate perfecte .

·Rezultă $x' = X^2$, $y' = Y^2$ și $x'^2 - y'^2 = X^4 - Y^4$ iar ecuația (R16) devine :

$$X^2 Y^2 (X^4 - Y^4) = z'^2 \quad (R17)$$

unde avem în continuare faptul că X și Y sunt relativ prime și de parități diferite.

·Notăm $Z^2 = \frac{z'^2}{X^2 Y^2}$; ecuația (R17) devine :

$$X^4 - Y^4 = Z^2 \Leftrightarrow (X^2 - Y^2)(X^2 + Y^2) = Z^2 \quad (R18)$$

·Avem în continuare faptul că X , Y și Z sunt relativ prime (oricare două) iar X și Y sunt de parități diferite

·Z este impar deoarece X și Y sunt de parități diferite.

Din (R18) rezultă :

·Deoarece Z este impar , un factor prim p al lui Z nu poate să dividă simultan ambele paranteze $X^2 - Y^2$ și $X^2 + Y^2$ deoarece atunci ar divide suma și diferența parantezelor adică pe $2X^2$ și pe $2Y^2$ adică pe X și pe Y (factorul prim p este impar deoarece Z este impar) ;

·Rezultă că există două numere relativ prime impare Z_1 și Z_2 astfel încât :

$$Z_1 \cdot Z_2 = Z \quad (R19)$$

$$\begin{cases} X^2 - Y^2 = Z_1^2 \\ X^2 + Y^2 = Z_2^2 \end{cases} \quad (R20)$$

·Pare că ne-am întors la relațiile (R1) de la începutul acestui studiu ; totuși nu este așa ; scriem relațiile din nou și le comparăm cu (R20)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + a^2 = m^2 \end{cases} \quad (R1) \quad \text{și} \quad \begin{cases} X^2 - Y^2 = Z_1^2 \\ X^2 + Y^2 = Z_2^2 \end{cases} \quad (R20)$$

·Relațiile (R20) se mai pot scrie :

$$\begin{cases} Y^2 + Z_1^2 = X^2 \\ Y^2 + X^2 = Z_2^2 \end{cases} \quad (R21)$$

·Comparând (R1) cu (R21) schimbăm notațiile astfel:

$$\begin{cases} Y = x \text{ " jumătatea laturii bazei noii piramide} \\ X = a \text{ " apotema noii piramide} \\ Z_1 = y \text{ " înălțimea noii piramide} \\ Z_2 = m \text{ " muchia laterală a noii piramide} \end{cases} \quad (R22)$$

·Analizând membrul drept al relației (R13)

$$i^2 h'^2 \cdot i' h \cdot (i'^2 - h^2) = (2x)^2 \quad \text{din acest studiu}$$

observăm că dea lungul raționamentelor el a fost transformat prin împărțiri succesive în numărul impar Z^2 ; deci Z^2 divide $4x^2$ de unde rezulta ca Z^2 divide pe x^2 .

·De aici rezultă faptul că Z divide x ; rezultă în continuare că:

$$Z \leq x \quad (R23)$$

·Folosind (R22) , (R20) , (R19) și (R23) (în această ordine) putem scrie următoarele inegalități:

$$2x''^2 = 2Y^2 = Z_2^2 - Z_1^2 \leq Z^2 - 1 \leq x^2 - 1 < 2x^2$$

·**De aici rezultă că noua piramidă perfectă construită are latura bazei $2x''$ strict mai mică decât latura bazei piramidei inițiale $2x$.**

·Aplicând noii piramide procedeul de construcție descris în acest studiu obținem a treia piramidă perfectă care are latura bazei și mai mică decât $2x''$;continuând construcția descrisă obținem un șir infinit de piramide perfecte.

·**Astfel obținem un șir infinit de piramide perfecte cu laturile bazelor un șir infinit strict descrescător de numere naturale ;dar aceasta este imposibil .**

Deci presupunerea că există piramide patrulatere regulate perfecte este falsă .

Consecințe:

Cu toate că avem o concluzie negativă și anume că nu există piramide patrulatere regulate perfecte totuși putem determina pe baza raționamentelor efectuate, piramide în care înălțimea y , apotema a și muchia laterală m sunt naturale.

·Astfel din ecuația $k^2 + (s - r) \cdot k - 2rs = 0$ putem calcula k folosind și relațiile (R12) , (R9) , (R7) și (R10):

$$k = \frac{r - s + j}{2} = \frac{uv - u'v' + uu' + vv'}{2} = \text{aplicam(R12)} = ii'h'h'$$

·Mai reținem relațiile:

$$\begin{cases} r = uv = \frac{hh'i \cdot (i' + h)}{2} \\ s = u'v' = \frac{ii'h' \cdot (i' - h)}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - y = r \\ a + y = s \end{cases}$$

$$m = k + y$$

$$rs = x^2$$

·Pe baza acestor relații putem calcula k, r, s, a, y, m și x dacă alegem numere naturale potrivite pentru i , i' , h , h'

·Rezultă următorul tabel:

Nr cr	i	i'	h	h'	k	r	s	a	y	m	x
1.	2	3	1	1	6	4	6	5	1	7	$2\sqrt{6}$
2.	2	5	1	1	10	6	20	13	7	17	$2\sqrt{30}$
3.	1	8	2	1	16	10	24	17	7	23	$4\sqrt{15}$
4.	2	7	1	1	14	8	42	25	17	31	$4\sqrt{21}$
5.	2	11	3	1	66	42	88	65	23	89	$4\sqrt{231}$

·Notăm

A_l =aria laterală

A_t =aria totală

V =volumul

·Rezultă un nou tabel:

Nr cr	a	y	m	x	A_l	A_t	V
1.	5	1	7	$2\sqrt{6}$	$40\sqrt{6}$	$96+40\sqrt{6}$	32
2.	13	7	17	$2\sqrt{30}$	$104\sqrt{30}$	$480+104\sqrt{30}$	1120
3.	17	7	23	$4\sqrt{15}$	$272\sqrt{15}$	$960+272\sqrt{15}$	2240
4.	25	17	31	$4\sqrt{21}$	$400\sqrt{21}$	$1344+400\sqrt{21}$	7616
5.	65	23	89	$4\sqrt{231}$	$1040\sqrt{231}$	$14784+1040\sqrt{231}$	113344

·Fiecare linie din tabelul al doilea este o sursă de probleme concrete.

Alegem ca ipoteză a problemei două elemente ale liniei și cerem să se calculeze celelalte elemente ale liniei respective.

Pentru fiecare linie avem $C_6^2 = 15$ probleme , adică în total 75 de probleme (am exclus volumul V din numărare).

Profesor matematica (grad didactic Def.) Velcov Gheorghe Ioan
la GRUP SCOLAR TEHNIC “TRAIAN GROZAVESCU”
localitatea NADRAG judetul TIMIS



Matematica la examenul de bacalaureat(Matura) din Slovenia

În urma obținerii unui grant Comenius de mobilitate individuală pentru formare continuă din partea [Agenției Naționale pentru Programe Comunitare în Domeniul Educației și Formării Profesionale](http://www.llp-ro.ro) (www.llp-ro.ro), între 22 – 26 august 2011 am participat la programul de formare continuă „**New ways of teaching mathematics and physics – practical and cross-curricular approach**” (SI-2011-034-002) organizat de Facultatea de Matematică și Fizică din cadrul Universității din Ljubljana, Slovenia.

Activitatea de formare a fost realizată cu sprijinul financiar primit în cadrul Programului de Învățare pe Parcursul Intregii Vieți și din fonduri FSE-POS DRU.

Conținutul acestei informări reprezintă punctul meu de vedere, iar Agenția Națională pentru Programe Comunitare în Domeniul Educației și Formării Profesionale și Comisia Europeană nu sunt responsabile pentru modul în care acest conținut este folosit.

Structura probei de matematică la examenul de matematică din Slovenia:

- **Fișa 1:** Elevilor le sunt prezentate aproximativ 12 sarcini separate, evaluând cunoștințe din domenii diferite în matematică. Această fișă reprezintă 53,3% -la univel superior și durează 90 minute, sau 80% -la un nivel de bază și durează 120 minute.
- **Fișa 2** (numai la un nivel superior): Elevilor li se dau încă trei sarcini dificile. Această fișă reprezintă 26.7%.
- **Examen oral** (20 minute): Unui student i se dau trei întrebări, testând capacitatea sa de a demonstra teoreme sau de a explica unele axiome matematice și definiții. Toate întrebările sunt publicate într-o broșură.

Mai jos sunt prezentate subiectele de matematică date la examenul de bacalaureat din 5 iunie 2010(enunțuri adaptate).

Fișa 1.

01.În sistemul de coordonate XOY se dau punctele $A(0,1)$ și $B(10,0)$. Să se scrie ecuația dreptei AB și să se calculeze măsura unghiului , unde O este originea axelor de coordonate. Rezultatele vor fi rotunjite la minute. (6 puncte)

02. Să se descompună în produs de factori expresiile în mulțimea numerelor reale, sau să se precizeze dacă este imposibil.

- a) $2x^3 + x^2$
 - b) $x^2 - 16$
 - c) $x^2 + 25$
 - d) $x^2 - 2x + 15$
 - e) $x^2 - 6x + 8$
 - f) $x^3 + 3x^2 - 9x - 27$
- (7 puncte)

03. Se dau funcțiile $f(x) = -2x^2 + 3x - 4$ și $g(x) = 2x - 4$. Calculați punctele de intersecție ale graficelor celor 2 funcții. (6 puncte).

04. În paralelogramul ABCD se dau lungimile laturilor: 6 respectiv 4 cm și unghiul ascuțit de 60° . Să se calculeze aria paralelogramului și lungimea celei mai mari diagonale. (6 puncte)

05. Se dă funcția $f(x) = 2\sin x - 1$. Să se găsească intersecțiile graficului funcției cu axa OX și să se traseze graficul funcției. (8 puncte)

06. Se dă hiperbola cu focarul $F_1(-\sqrt{20}, 0)$ și vârful $B(4, 0)$. Să se scrie ecuația hiperbolei și ecuațiile asimptotelor. (8 puncte).

07. Să se rezolve ecuația $\lg(x + 2) - \lg x = 1$. (5 puncte)

08. Se dau vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ în sistemul XOY, $\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{b} = 3\vec{j}$. Reprezentați în sistemul XOY vectorul $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$.

Să se calculeze modulele vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ și măsura unghiului format de cei doi vectori (rezultatul va fi rotunjit la minute). (8 puncte)

09. Calculați valoarea expresiei :

$$11 \cdot (-1)^{n-1} + (3 - 2 \cdot 2)^n - (-1)^{n+1} + 3 \cdot 1^0, \text{ pentru orice număr natural } n. (6 \text{ puncte})$$

10. La o petrecere sunt 16 persoane: 4 cupluri căsătorite, 5 bărbați singuri și 3 femei singure.

Pentru un anumit joc este nevoie să se aleaga 2 persoane la întâmplare. Să se calculeze probabilitatea evenimentelor A respectiv B unde:

A este evenimentul : cele 2 persoane sunt alese din cupluri căsătorite

B este evenimentul: persoanele alese sunt singure și de sexe diferite. (6 puncte).

11. Să se calculeze integrala nedefinită $\int \frac{x - 2\sqrt{x} + 5x^2}{x^2} dx$. (7 puncte)

12. Tangenta la graficul funcției $f(x) = a \ln x + x^2 - 2$ în punctul de abscisă $x_0 = 1$ este perpendiculară pe dreapta de ecuație $2x + 3y - 2 = 0$. Să se calculeze valoarea lui a .

(7 puncte).

Fișa 2.

01. Se dă funcția $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x}$.

- a) Să se găsească intersecția graficului funcției cu axa OX, (4 puncte)
- b) Să se traseze graficul funcției, (3 puncte)
- c) Să se rezolve inecuația $f(x) \leq 1$, (2 puncte)
- d) Să se evalueze aria delimitată de dreapta $y = 1$ și graficul funcției date. (5 puncte).

02. Se dau în plan punctele: A(2, 1), B(-1, 4), C(-2, -3) .

- a) Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic. Să se calculeze aria cercului circumscris triunghiului. (5 puncte)
- b) Să se calculeze coordonatele punctului A^* - proiecția punctului A pe BC. (3 puncte)
- c) Fie punctul M pe BC. Să se găsească coordonatele punctului M astfel încât aria $\triangle ABM$ să fie 11. (5 puncte).

03. Să se rezolve următoarele sarcini în mulțimea numerelor complexe $\mathbb{C}$.

- a) Să se reprezinte imaginea geometrică a numărului complex $z = 10(1 + 2i)^{-1}$. (2 puncte)
- b) Să se găsească toate numerele x , astfel încât numărul $z = 6x^3i^{2009} + 5x^2i^{2011} - 12xi^{2013} + 4i^{2007} + (x^2 + 1)i^{2008} + x + 5$, să fie real (5 puncte)
- c) Se dă numărul complex $w = 1 - i$. Să se găsească numărul complex $z = x + iy$, pentru care $Re(wz) = 0$ și $|z \cdot w| = 2$. (4 puncte).
- d) În planul complex să se reprezinte mulțimea punctelor care satisfac condiția: $|z - 1| = 2$. (2 puncte).

Observații

- 1. Problemele din Fișa 2 sunt considerate dificile,
- 2. Candidații primesc formulele necesare rezolvării sarcinilor.
- 3. După fiecare enunț candidatul editează soluția (în broșură este lăsat spațiu pentru asta).