Revista Electronică MateInfo.ro
MARTIE

ISSN 2065 – 6432

ARTICOLE :

1. **Condiția necesară și suficientă pentru ca un triunghi să fie asemenea cu triunghiul său median .....pag. 2**

   prof. Neculai Stanciu

2. **Tangente perpendiculare dintr-un punct exterior la o conică……..…pag. 3**

   prof. Gabriela Gogan

3. **Funcții cu punct fix.....pag.8**

   prof. Ungureanu Angelica

4. **Convexitate și Gâteux- Diferențiabilitate……..…...pag. 16**

   prof. Petrache Adriana

5. **Problema lunii februarie (www.mateinfo.ro) …….pag.24**

Așteptăm materale pentru revistă în fiecare lună pe revistaelectronica@mateinfo.ro

Revista Electronică MateInfo.ro este una dintre cele mai citite reviste online de profil având peste 3000 de vizitatori zilnic.

1.Condiția necesară și suficientă pentru ca un triunghi să fie asemenea cu triunghiul său median

NECULAI STANCIU[1]

''A fi om însemnă să nu fii mâhnit,
să nu judeci pe nimeni,
să nu superi pe nimeni şi să ai
respect faţă de toţi''
(Stareţul Ambrozie de la Optina)

Dedic acestă notă domnului profesor ***Constantin Rusu*** *cu prilejul împlinirii vârstei de 70 de ani la data de 10 aprilie 2012 . Îi urăm domnului profesor viaţă lungă şi să iubească în continuare matematica, pentru că aşa cum chiar el o spune mereu – ''această iubire ne vindecă de foarte multe boli''.*

În articolul , *Observaţii asupra unor noţiuni din geometria triunghiului*, SM, VIII , 2011, 4-5, se demonstrează că "în general, un triunghi median, al unui triunghi dat, nu este asemenea cu triunghiul dat ''.

Nota de față își propune să demonstreze altfel decât în SM nr. 9, următoarea:

Propoziție. Un triunghi oarecare este asemenea cu triunghiul format de medianele sale dacă şi numai dacă raportul de asemănare este $k=\frac{m_a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$(notațiile sunt cele obișnuite).

Demonstrație.

''$\Rightarrow$"Dacă triunghiul oarecare are lungimile laturilor $b<a<c$, atunci avem $m_b>m_a>m_c$.

Din asemănarea celor două triunghiuri avem:

$$\frac{m_b}{c}=\frac{m_c}{b}=\frac{m_a}{a}=k\Rightarrow\frac{m_b^2}{c^2}=\frac{m_c^2}{b^2}=\frac{m_a^2}{a^2}=\frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{a^2+b^2+c^2}=k^2\Rightarrow \quad (1)$$

$$\Rightarrow m_a^2+m_b^2+m_c^2=k^2(a^2+b^2+c^2)$$

Din formulele medianelor avem:

$$\begin{cases}4m_a^2=2b^2+2c^2-a^2\\4m_b^2=2c^2+2a^2-b^2\\4m_c^2=2a^2+2b^2-c^2\end{cases},$$

care adunate membru cu membru dau relaţia:

$$3(a^2+b^2+c^2)=4(m_a^2+m_b^2+m_c^2) \quad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă raportul de asemănare: $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

"$\Leftarrow$"Reciproc fie $k=\frac{m_a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

[1] Şc. Gen. ''George Emil Palade'', Buzău

Din $m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$ rezultă uşor că:

$$b^2 + c^2 = 2 \cdot a^2 \qquad (3)$$

Din $\begin{cases} 4m_b^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2 \\ 4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 \end{cases}$, şi (3) se obţine $m_b = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c$, respectiv, $m_c = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b$.

Deci triunghiul este asemenea cu triunghiul său median.

Remarcă. Propoziţia dă răspuns la întrebarea: Este posibil ca un triunghi dat să fie asemenea cu triunghiul format de medianele sale?

6. Tangente perpendiculare dintr-un punct exterior la o conică

Prof. Gabriela Gogan

Şcoala cu clasele I-VIII Nr. 1 "Nicolae Labiş" Mălini, jud. Suceava

Să se găsească locul geometric al punctelor din plan, din care se pot duce două tangente perpendiculare la o conică.

1. Cercul

Fie cerculde ecuaţie (1)$x^2+y^2=r^2$ şi dreapta de ecuaţie (2)$y=mx+n$. Înlocuind pe ydin ecuaţia (2) în ecuaţia (1), se obţine ecuaţia de gradul al doilea cu necunoscuta x: (3)$(1+m^2)x^2+2mnx+n^2-r^2=0$. Dacă discriminantul ecuaţiei (3),$\Delta=4[r^2(1+m^2)-n^2]=0$, atunci rădăcinile sunt confundate şi dreapta este tangentă cercului. Aşadar, $n=\pm r\sqrt{1+m^2}$, iar ecuaţiile tangentelor de direcţie m la cercul dat sunt:$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$.

Pentru determinarea locului geometric căutat, se rezolvă ecuaţia $y=mx+r\sqrt{1+m^2}$ în necunoscuta m. Se obţin soluţiile m_1şi m_2, apoi punem condiţia ca $m_1m_2=-1$ (tangentele să fie perpendiculare).

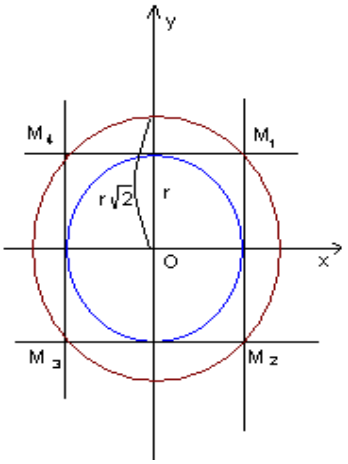
Din $y=mx+r\sqrt{1+m^2} \Rightarrow y-mx=r\sqrt{1+m^2} \Rightarrow (y-mx)^2=r^2(1+m^2) \Rightarrow m^2(x^2-r^2)-2xym+(y^2-r^2)=0$, cu discriminantul $\Delta_1=4x^2y^2-4(x^2-r^2)(y^2-r^2)=4r^2(x^2+y^2-r^2)$.

Dacă $x^2-r^2=0 \Rightarrow x=\pm r \Rightarrow y=\pm r \Rightarrow M_1(r,r), M_2(r,-r), M_3(-r,-r), M_4(-r,r)$ sunt punctele din care se pot duce tangente perpendiculare la cerc.

Dacă $x^2-r^2\neq 0 \Rightarrow$soluţiile ecuaţiei (4) sunt $m_{1,2}=\frac{xy \pm r\sqrt{x^2+y^2-r^2}}{x^2-r^2}$.

Din condiţia $m_1m_2=-1 \Rightarrow \frac{(xy+r\sqrt{x^2+y^2-r^2})(xy-r\sqrt{x^2+y^2-r^2})}{(x^2-r^2)^2}=-1$

$\Rightarrow (x^2+y^2-2r^2)(x^2-r^2)=0$ şi cum $x^2-r^2\neq 0 \Rightarrow x^2+y^2-2r^2=0 \Rightarrow x^2+y^2-(\sqrt{2}\,r)^2=0 \Rightarrow$locul geometric al punctelor M(x,y) din care se pot duce două tangente perpendiculare la cercul C(O;r) de ecuaţie $x^2+y^2=r^2$ este cercul $\bar{C}\,(O;\sqrt{2}\,r)$ de ecuaţie $x^2+y^2-(\sqrt{2}\,r)^2=0$. Analog pentru$y=mx-r\sqrt{1+m^2}$.



2. Elipsa

Fie elipsa de ecuaţie (1)$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ şi dreapta de ecuaţie (2)$y=mx+n$. Înlocuind pe y din ecuaţia (2) în ecuaţia (1), se obţine ecuaţia de gradul al doilea (3)$(a^2m^2+b^2)x^2+2mna^2x+a^2n^2-a^2b^2=0$. Dacă discriminantul ecuaţiei (3), $\Delta=4[a^2b^2(a^2m^2+b^2)-a^2b^2n^2]=0$, atunci rădăcinile sunt confundate şi dreapta este tangentă cercului. Aşadar, $n=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ iar ecuaţiile tangentelor de direcţie m la cercul dat sunt :$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$.

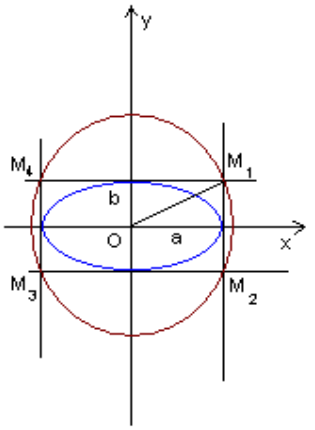
Pentru determinarea locului geometric căutat, se rezolvă ecuaţia $y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$ în necunoscuta m. Se obţin soluţiile m_1şi m_2, apoi punem condiţia ca $m_1m_2=-1$ (tangentele să fie perpendiculare).

Din $y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2} \Rightarrow y-mx=\sqrt{a^2m^2+b^2} \Rightarrow (y-mx)^2=a^2m^2+b^2 \Rightarrow m^2(x^2-a^2)-2xym+(y^2-b^2)=0$, cu discriminantul $\Delta_1=4x^2y^2-4(x^2-a^2)(y^2-b^2)=4(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)$.

Dacă $x^2-a^2=0 \Rightarrow x=\pm a \Rightarrow y=\pm b \Rightarrow M_1(a,b)$, $M_2(a,-b)$, $M_3(-a,-b)$, $M_4(-a,b)$ sunt punctele din care se pot duce tangente perpendiculare la elipsă.

Dacă $x^2-a^2\neq 0 \Rightarrow$soluţiile ecuaţiei (4) sunt $m_{1,2}=\frac{xy\pm\sqrt{b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2}}{x^2-a^2}$.

Din condiţia $m_1m_2=-1 \Rightarrow \frac{(xy+\sqrt{bx^2+a^2y^2-a^2b^2})(xy-\sqrt{b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2})}{(x^2-a^2)^2}=-1 \Rightarrow (x^2+y^2-a^2-b^2)(x^2-a^2)=0$ şi cum $x^2-a^2\neq 0 \Rightarrow x^2+y^2-a^2-b^2=0 \Rightarrow x^2+y^2-(\sqrt{a^2+b^2})^2=0 \Rightarrow$locul geometric al punctelor M(x,y) din care se pot duce două tangente perpendiculare la elipsade ecuaţie (1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ este cercul $\bar{C}(O;\sqrt{a^2+b^2})$ de ecuaţie $x^2+y^2-(\sqrt{a^2+b^2})^2=0$.Analog pentru$y=mx-\sqrt{a^2m^2+b^2}$.



3. Hiperbola

Fie hiperbola de ecuaţie (1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$şi dreapta de ecuaţie (2)$y=mx+n$. Înlocuind pe y din ecuaţia (2) în ecuaţia (1), se obţine ecuaţia de gradul al doilea (3)$(a^2m^2-b^2)x^2+2mna^2x+a^2n^2+a^2b^2=0$. Dacă discriminantul ecuaţiei (3), $\Delta=4[a^2b^2(-a^2m^2+b^2)+a^2b^2n^2]=0$, atunci rădăcinile sunt confundate şi dreapta este tangentă cercului. Aşadar, $n=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ iar ecuaţiile tangentelor de direcţie m la cercul dat sunt:$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$.

Pentru determinarea locului geometric căutat, se rezolvă ecuaţia $y=mx+\sqrt{a^2m^2-b^2}$ în necunoscuta m. Se obţin soluţiile m_1şi m_2, apoi punem condiţia ca $m_1m_2=-1$ (tangentele să fie perpendiculare).

Din $y=mx+\sqrt{a^2m^2-b^2} \Rightarrow y-mx=\sqrt{a^2m^2-b^2} \Rightarrow (y-mx)^2=a^2m^2-b^2 \Rightarrow (4)m^2(x^2-a^2)-2xym+(y^2+b^2)=0$, cu discriminantul $\Delta_1=4x^2y^2-4(x^2-a^2)(y^2+b^2)=4(-b^2x^2+a^2y^2+a^2b^2)$.

Dacă $x^2-a^2=0 \Rightarrow x=\pm a \Rightarrow$nuse pot duce tangente perpendiculare la hiperbolă.

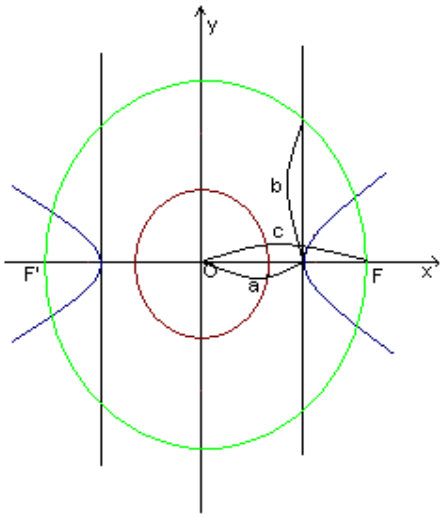
Dacă $x^2-a^2\neq 0 \Rightarrow$soluţiile ecuaţiei (4) sunt $m_{1,2}=\dfrac{xy\pm\sqrt{-b^2x^2+a^2y^2+a^2b^2}}{x^2-a^2}$.

Din condiţia $m_1m_2=-1 \Rightarrow \dfrac{(xy+\sqrt{-b^2x^2+a^2y^2+a^2b^2})(xy-\sqrt{-b^2x^2+a^2y^2+a^2b^2})}{(x^2-a^2)^2}=-1 \Rightarrow (x^2+y^2-a^2+b^2)(x^2-a^2)=0$

şi cum $x^2-a^2\neq 0 \Rightarrow x^2+y^2-a^2+b^2=0$.

- dacă$b^2-a^2>0 \Rightarrow$ locul geometric este mulţimea vidă;
- dacă$b^2-a^2=0 \Rightarrow$ locul geometric este punctul O(0;0);
- dacă $b^2-a^2<0 \Rightarrow x^2+y^2-(\sqrt{a^2-b^2})^2=0 \Rightarrow$locul geometric al punctelor M(x,y) din care se pot duce două tangente perpendiculare la hiperbola de ecuaţie (1)$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$ este cercul $\bar{C}(O;\sqrt{a^2-b^2})$ de ecuaţie $x^2+y^2-(\sqrt{a^2-b^2})^2=0$.

  Analog pentru $y=mx-\sqrt{a^2m^2-b^2}$.



4. Parabola

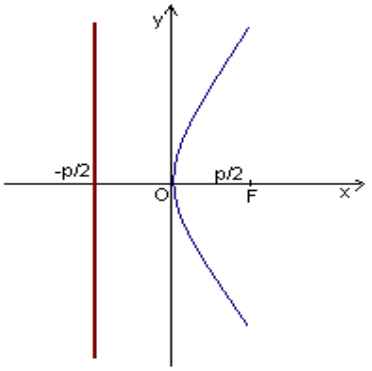
Fie parabola de ecuaţie(1)$y^2=2px$, cu p>0 şi dreapta de ecuaţie (2)$y=mx+n$. Înlocuind pe y din ecuaţia (2) în prima ecuaţie, se obţine ecuaţia de gradul al doilea cu necunoscuta x: (3)$m^2x^2+2(mn-p)x+n^2=0$. Dacă discriminantul ecuaţiei (3)$\Delta=4[(mn-p)^2-m^2n^2]=0$, atunci

rădăcinile sunt confundate şi dreapta este tangentă cercului. Aşadar, $n=\frac{p}{2m}$, iar ecuaţiile tangenteide direcţie m la cercul dat este:$y=mx+\frac{p}{2m}$.

Pentru determinarea locului geometric căutat, se rezolvă ecuaţia $y=mx+\frac{p}{2m}$.în necunoscuta m. Se obţin soluţiile m_1şi m_2, apoi punem condiţia ca $m_1m_2=-1$ (tangentele să fie perpendiculare).

Din $y=mx+\frac{p}{2m} \Rightarrow 2m^2x-2ym+p=0,$ cu discriminantul $\Delta_1=4y^2-8m^2px=4(y^2-2px)$.Soluţiile ecuaţiei sunt$m_{1,2}=\frac{y\pm\sqrt{y^2-2px}}{2x}$.

Din condiţia $m_1m_2=-1 \Rightarrow \frac{(y+\sqrt{y^2-2px})(y-\sqrt{y^2-2px})}{4x^2}=-1 \Rightarrow x=-\frac{p}{2} \Rightarrow$locul geometric al punctelor M(x,y) din care se pot duce două tangente perpendiculare la cercul hiperbolade ecuaţie $y^2=2px$este directoarea parabolei.



Bibliografie

1. Anastasiei, M., Geometrie superirioară şi aplicaţii – suport de curs, Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" Iaşi, 2005;

2. Simionescu, Gh., Geometrie analitică, Editura didacică şi pedagogică Bucureşti, 1973.

7. Funcții cu punct fix

PROFESOR UNGUREANU ANGELICA
G R U P U L S C O L A R “ A L E X A N D R U C E L B U N “ B O T O S A N I

Problema 1.(Teorema lui Knaster de punct fix)
Fie $f:[a,b]\to[a,b]$ o functie crescatoare. Atunci *f*contine un punct fix.
Solutie
Fie multimea $A=\{x\in[a,b]/\ f(x)\leq x\}$.
Deoarece $f(b)\leq b$, rezulta ca $A\neq\emptyset$.
Notez :$c=inf A$.Atunci $c\leq x,(\forall)x\in A$; *f* fiind crescatoare se obtine
$f(c)\leq f(x)\leq x,(\forall)x\in A$
$\Rightarrow f(c)$este minorant al multimii $A\Rightarrow f(c)\leq c\ \ (1)$.
Din $f(c)\leq c$ si f crescatoare $\Rightarrow f\left(f(c)\right)\leq f(c)\Rightarrow f(c)\in A$ si cum
$c=inf A\ \Rightarrow f(c)\geq c\ \ (2)$.
Din (1) si (2)$\Rightarrow f(c)=c$,adica functia *f*contine un punct fix.

Problema 2.(criteriu ca o functie continua sa aiba un punct fix)
Fie $f:[a,b]\to[a,b]$ o functie continua. Atunci *f*contine cel putin un punct fix.

Solutie
Fie functia auxiliara $g:[a,b]\to[a,b]\ \ ,\ \ g(x)=f(x)-x,\ (\forall)x\in[a,b]$.
Din $g(a)=a-f(a)\leq 0$ si $g(b)=b-f(b)\geq 0$ rezulta: $g(a)\cdot g(b)\leq 0$.
Cum *g* este functie continua $\Rightarrow(\exists)c\in[a,b]$
a.i. $g(c)=0\ \Rightarrow c-f(c)=0\Rightarrow f(c)=c$,adica functia *f*contine un punct fix.

Problema 3.
Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o functie continua. Daca $f\circ f$ are puncte fixe, atunci si functia *f*contine cel putin un punct fix.

Solutie
Presupunem prin reducere la absurd ca *f* nu are puncte fixe pe $\mathbb{R}$, adica
$f(x)-x\neq 0,(\forall)x\in\mathbb{R}$.

Dar functia $f-1_{\mathbb{R}}$ este continua$\Rightarrow$ are proprietatea lui Darboux, deci pastreaza semn constant pe $\mathbb{R}$.

Daca $f-1_{\mathbb{R}}>0$, adica $f(x)-x>0,(\forall)x\in\mathbb{R},\Rightarrow f\big(f(x)\big)-f(x)>0$, din care obtinem $f\big(f(x)\big)>f(x)>x,(\forall)x\in\mathbb{R}$, adica $f\circ f$ nu are puncte fixe, ceea ce contrazice ipoteza.

Pentru $f-1_{\mathbb{R}}<0$ se procedeaza analog.

In concluzie, functiaare puncte fixe.

Problema 4.

Fie $f:I\to\mathbb{R}$, cu I interval,o functie cu proprietatea lui Darboux, astfel incat $(f\circ f)(x)=x,(\forall)x\in I$.Sa se demonstreze ca *f*are un punct fix.

Solutie

Deoarece*f* are proprietatea lui Darboux si $f\circ f=1_I$,atunci *f* este continua si strict monotona.

Presupunem ca $f(x)\neq x,(\forall)x\in I$.

Atunci $f(x)<x,(\forall)x\in I$ sau $f(x)>x,(\forall)x\in I$.

Daca $f(x)>x,(\forall)x\in I\Rightarrow f(f(x))>f(x),(\forall)x\in I\Rightarrow x>f(x)$-contradictie

Analog se ajunge la contradictie daca $f(x)<x,(\forall)x\in I$.

In concluzie $(\exists)c\in I$ asa incat $f(c)=c$,adica functia *f* are cel putin un punct fix.

Problema 5.

Se considera functia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continua si marginita. Atunci *f*are cel putin un punct fix.

Solutie

Functia *f* fiind marginita$\Rightarrow$

$\to(\exists)M>0$ astfel incat $-M\leq f(x)\leq M,(\forall)x\in\mathbb{R}$.

Consideram functia auxiliara $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-x,(\forall)x\in\mathbb{R}$.

Din:$g(-M)=f(-M)+M\geq 0$ si $g(M)=f(M)-M\leq 0$ obtinem $g(-M)\cdot g(M)\leq 0$ si cum functia *g*este continua$\Rightarrow$

$\Rightarrow(\exists)c\in[-M,M]$ asa incat $g(c)=0\Rightarrow f(c)-c=0\Rightarrow f(c)=c$,

adica functia *f* are cel putin un punct fix.

Problema 6.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o functie continua si periodica.Atunci *f* este marginita si contine cel putin un punct fix.

Solutie

Cum *f* este periodica,$(\exists)T>0$ astfel incat $f(x+T)=f(x),(\forall)x\in\mathbb{R}$.

Deoarece f este continua pe $\mathbb{R}$, este continua pe $[0,T]$, deci , conform teoremei lui Weierstrass, este marginita si isi atinge marginile
$\Rightarrow f(\mathbb{R}) = f([0,T])$ de unde rezulta ca f este marginita pe $\mathbb{R}$.
$f(\mathbb{R})$ fiind marginita, $(\exists) n \in \mathbb{N}^*$ asa incat $f(\mathbb{R}) \subset [-nT, nT]$.
Notam $I = [-nT, nT]$ si observam : $f(I) \subset f(\mathbb{R}) \subset I$.
Rezulta ca functia $f: I \to I$ are cel putin un punct fix.

Problema 7.
Fie $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ si $g: \mathbb{R} \to (-\infty, 0)$ doua functii continue.Daca f si g au puncte fixe ,atunci si functia f+$g$are cel putin un punct fix.

Solutie
Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ puncte fixe pentru f,respectiv g, adica:
$f(x_1) = x_1$ si $g(x_2) = x_2$.
Din $(x_2) > 0, g(x_1) < 0$, obtinem:
$f(x_1) + g(x_1) < f(x_1)$ si $f(x_2) + g(x_2) > f(x_2)$, de unde
$f(x_1) + g(x_1) < x_1$ si $f(x_2) + g(x_2) > x_2$.
Deoarece $x_1 = f(x_1) > 0$ si $x_2 = g(x_2) < 0$ rezulta $x_1 \neq x_2$.
Consideram functia $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + g(x) - x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$,.
Avem : $h(x_1) = f(x_1) + g(x_1) - x_1 < 0$ si
$h(x_2) = f(x_2) + g(x_2) - x_2 > 0$.
Cum $h$este functie continua $\Rightarrow (\exists) x_3 \in (x_1, x_2)$ asa incat $h(x_3) = 0$
$\Rightarrow f(x_3) + g(x_3) = x_3$, adica functia f+$g$are cel putin un punct fix.

Problema 8.
Fie $f: \mathbb{R} \to (-\infty, 1)$ si $g: \mathbb{R} \to (1, +\infty)$ doua functii continue.Sa se demonstreze ca daca exista $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 < x_2$, astfel incat
$f(x_1) = x_1$ si $g(x_2) = x_2$, atunci exista cel putin un punct $x_3 \in (x_1, x_2)$ astfel incat
$f(x_3)g(x_3) = x_3$.

Solutie
Consideram functia auxiliara $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x)g(x) - x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
Din $g(x_1) > 1, f(x_2) < 1$ si $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ obtinem:
$h(x_1) = f(x_1)g(x_1) - x_1 = x_1 g(x_1) - x_1 = x_1(g(x_1) - 1) > 0$
$h(x_2) = f(x_2)g(x_2) - x_2 = f(x_2)x_2 - x_2 = x_2(f(x_2) - 1) < 0$
Cum h este functie continua $\Rightarrow (\exists) x_3 \in (x_1, x_2)$ asa incat
$h(x_3) = 0 \Rightarrow f(x_3)g(x_3) = x_3$ adica functia fg$are cel putin un punct fix.

Problema 9.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o functie continua astfel incat $f(a)\geq a$ si $f(b)\leq b$.Sa se arate ca f admite cel putin un punct fix.

Solutie

Consideram functia auxiliara $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-x$.

Din: $g(a)=f(a)-a\geq 0$, $g(b)=f(b)-b\leq 0$ se obtine $g(a)\cdot g(b)\leq 0$.

Cum *g* este functie continua $\Rightarrow(\exists)c\in[a,b]$ asa incat $g(c)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow f(c)-c=0\Rightarrow f(c)=c$, adica *f* are cel putin un punct fix.

Problema 10.

Se considera functiile continue $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ astfel incat

$f(x)\leq g(x),\ (\forall)x\in[a,b]$. Daca *f* si *g* au cel putin cate un punct fix,atunci si functia $h:[a,b]\to\mathbb{R}$, $h(x)=\lambda f(x)+(1-\lambda)g(x),(\forall)x\in[a,b],(\forall)\lambda\in[0,1]$ admite cel putin un punct fix.

Solutie

Din $f(x)\leq g(x),\ (\forall)x\in[a,b]$ si $\lambda\in[0,1]$ obtinem:

$\lambda f(x)\leq\lambda g(x)$, $(\forall)x\in[a,b]$ si

$(1-\lambda)f(x)\leq(1-\lambda)g(x)$,$(\forall)x\in[a,b]$.

Atunci : $f(x)=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(x)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)g(x)\leq$

$<\lambda g(x)+(1-\lambda)g(x)=g(x),(\forall)x\in[a,b]\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)\leq h(x)\leq g(x),(\forall)x\in[a,b]\Rightarrow$

$\to f(x)-x\leq h(x)-x\leq g(x)-x,(\forall)x\in[a,b]$

Fie $x_1,x_2\in[a,b]$, x_1 un punct fix al lui *f* si x_2 un punct fix al lui *g*.

Atunci: $0=f(x_1)-x_1\leq h(x_1)-x_1\leq g(x_1)-x_1$ si

$f(x_2)-x_2\leq h(x_2)-x_2\leq g(x_2)-x_2=0$ de unde se obtine:

$[h(x_1)-x_1]\cdot[h(x_2)-x_2]\leq 0$

Deoarece *h* este functie continua pe $[a,b]\Rightarrow$

$\Rightarrow(\exists)x_3\in[x_1,x_2]\subseteq[a,b]$(sau $x_3\in[x_2,x_1]\subseteq[a,b]$) asa incat

$h(x_3)-x_3=0\Rightarrow h(x_3)=x_3$

adica *h* are cel putin un punct fix.

Problema 11.

Daca $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este o functie continua si $2\int_0^1 f(x)dx=1$, atunci $(\exists)c\in(0,1)$ astfel incat $f(c)=c$.

Solutie

$2\int_0^1 f(x)dx=1\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}$.

Dar $\frac{1}{2}=\int_0^1 xdx$, atunci $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xdx\Rightarrow$

$$\Rightarrow\int_0^1 (f(x)-x)dx=0$$

Fie functia continua $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $(x)=f(x)-x$,$(\forall)x\in[0,1]$

Aplicand teorema de medie functiei $g\Rightarrow$

$\Rightarrow(\exists)c\in(0,1)$ asa incat $\int_0^1 g(x)dx=g(c)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\int_0^1 (f(x)-x)dx=f(c)-c$$

Dar $\int_0^1(f(x)-x)dx-0\to$

$\Rightarrow f(c)-c=0\Rightarrow\ f(c)=c$, adica functia f are cel putin un punct fix.

Observatie

Problema poate fi generalizata astfel:

Problema 12.

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o functie continua ,cu proprietatea ca $\int_a^b f(x)dx=\frac{b^2-a^2}{2}$. Sa se arate ca exista $c\in(a,b)$ astfel incat $f(c)=c$.

Solutie

Deoarece $\frac{b^2-a^2}{2}=\int_a^b xdx$, atunci $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b xdx\Rightarrow$

$$\Rightarrow\int_a^b (f(x)-x)dx=0$$

Fie functia continua $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $(x)=f(x)-x$,$(\forall)x\in[a,b]$

Aplicand teorema de medie functiei $g\Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists)c \in (a,b)$ asa incat $\int_a^b g(x)dx - (b-a)g(c) \rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^b (f(x) \quad x)dx = (b \quad a)(f(c) \quad c)$

Dar $\int_a^b (f(x)-x)dx = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(c)-c=0 \Rightarrow \ f(c)=c$, adica functia *f* are cel putin un punct fix.

Problema 13.

Fie $f:[-a,a] \to \mathbb{R}$ o functie continua pe $[-a,a]$ si $|f(x)| \leq a, (\forall)x \in [-a,a]$.
Sa se arate ca f are un punct fix.

Solutie

Fie functia $g:[-a,a] \to \mathbb{R}$, $(x) = f(x)-x$,$(\forall)x \in [-a,a]$.
Deoarece $|f(x)| \leq a, (\forall)x \in [-a,a] \Rightarrow$

$g(a) = f(a)-a \leq 0$ si : $g(-a) = f(-a)+a \geq 0$ de unde se obtine:
$g(a)g(-a) \leq 0$.
Daca $g(a)=0$ sau $g(-a)=0$, atunci punctual fix este $x=a$ sau $x=-a$.
Presupunem ca $g(a)g(-a) < 0$.
Cum geste continua pe $[-a,a] \Rightarrow (\exists)c \in (-a,a)$ asa incat $g(c)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(c)-c=0 \Rightarrow \ f(c)=c$, adica *f* are cel putin un punct fix.

Problema 14.

Fie *f,g* doua functii $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si $g:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$.Daca *f* si *g* indeplinesc conditiile:

1. *g* este crescatoare ,$g(0)=0$, *g* continua in $x=0$;
2. $|f(x)-f(y| \leq g(|x-y|), (\forall)x,y \in \mathbb{R}$;
3. $\lim_{x \to \infty}(x-g(x)) > |f(0)|$

Atunci functia *f* are un punct fix.

Solutie

Functia *f* este uniform continua pe $\mathbb{R}$.
Intr-adevar,$(\forall)\varepsilon > 0, (\exists)\delta_\varepsilon > 0$ asa incat $(\forall)x,y \in \mathbb{R}, |x-y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Deoarece *g* este continua la dreapta in $x = 0$ si $(0) = 0$, obtinem ca
$(\forall)\varepsilon > 0, (\exists)\delta_\varepsilon > 0$ asa incat $(\forall)t, 0 \le t \le \delta_\varepsilon \Rightarrow |g(t)| < \varepsilon.$

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar si fie $x, y \in \mathbb{R}$ cu $|x - y| < \delta_\varepsilon$
Tinand seama de inegalitatea:

$$\big||f(x)| - |f(y)|\big| \le |f(x) - f(y)| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \big||f(x)| - |f(y)|\big| \le g(|x - y|)$, de unde, pentru $y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \big||f(x)| - |f(0)|\big| \le g(|x|)$,adica $|f(x)| \le |f(0)| + g(|x|).$

Deoarece: ,$\lim_{x\to\infty}(x - g(x)) > |f(0)|, (\exists)a \in \mathbb{R}, a > 0$ asa incat
$a - g(a) > |f(0)|$ sau $g(a) + |f(0)| < a$
Functia *g* este crescatoare, deci pentru orice $|x| \le a$, avem $g(|x|) + |f(0)| \le a$
Atunci rezulta ca: $|f(x)| \le g(|x|) + |f(0)| \le |x| \le a, (\forall)|x| \le a$
Din faptul ca functia f este continua pe $\mathbb{R}$ si $|f(x)| \le a$, $(\forall)|x| \le a$, conform problemei anterioare se obtine ca f are un punct fix.

Problema 15.

Se considera o functie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asa incat

$$|f(x) - f(y)| \le \sqrt{|x - y|}, (\forall)x, y \in \mathbb{R}.$$

Sa se arate ca:

1. $(\exists)a \in \mathbb{R}$ asa incat $|x| \le a$ implica $|f(x)| \le a$,
2. f are cel putin un punct fix.

Solutie
Aceasta problema reprezinta un caz particular al problemei anterioare.
Astfel, drept functie $g: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, *g* crescatoare ,$g(0) = 0$,
g continua la dreapta in $x = 0$ vom lua functia $g(x) = \sqrt{x}$.
Ipoteza problemei coincide cu punctul "2", iar conditia
$\lim_{x\to\infty}(x - g(x)) > |f(0)|$
este indeplinita.

Problema 16.

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea ca $(\exists)\lambda \in [0,1)$ asa incat

$$|f(x) - f(y)| \le \lambda|x - y|, (\forall)x, y \in \mathbb{R}.$$

Sa se demonstreze ca *f* are un singur punct fix.

Solutie
Din ipoteza rezulta ca *f* este continua.
Relatia din ipoteza: $|f(x) - f(y)| \le \lambda|x - y|, (\forall)x, y \in \mathbb{R}$, devine pentru $y = 0$:

$$|f(x)-f(0)|\leq \lambda|x|,(\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow$$
$$-\lambda|x|\leq f(x)-f(0)\leq \lambda|x|,(\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\lambda|x|-x+f(0)\leq f(x)-x\leq \lambda|x|-x+f(0),(\forall)x\in\mathbb{R}$$

Trecand la limita in dubla inegalitate, se obtine:

$$[\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)][\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)]<0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\exists)c\in\mathbb{R}\text{ asa incat } f(c)-c=0\Rightarrow f(c)=c,$$

adica f are cel putin un punct fix.

Presupunem ca $(\exists)c_1,c_2\in\mathbb{R}$, $c_1\neq c_2$, asa incat $f(c_1)=c_1$, $f(c_2)=c_2$.

Atunci:

$$|c_1-c_2|=|f(c_1)-f(c_2)|\leq\lambda|c_1-c_2|\Rightarrow\lambda\geq 1,$$

ceea ce contrazice ipoteza.Se obtine astfel ca punctual fix este unic.

Problema 17.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o functie cu urmatoarele proprietati:

1. $f\circ f=1_{\mathbb{R}}$;
2. f nu contine puncte fixe.

Atunci functia f are cel putin un punct de discontinuitate intre a si $f(a)$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

Solutie

Fie $a\in\mathbb{R}$, arbitrar, fixat.

Deoarece f nu contine puncte fixe, avem $f(a)\neq a$, si deci $f(a)<a$ sau $f(a)>a$.

Fixam $f(a)<a$.

Presupunem prin reducere la absurd ca f este continua pe $[f(a),a]$.

Consideram functia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-x,(\forall)x\in\mathbb{R}$.

Avem: $g(f(a))=f(f(a))-f(a)=a-f(a)>0$ si
$g(a)=f(a)-a<0$.

Cum $g$este functie continua pe $[f(a),a]\Rightarrow(\exists)c\in(f(a),a)$ asa incat $g(c)=0\Rightarrow f(c)-c=0\Rightarrow f(c)=c$.

Concluzia la care s-a ajuns contrazice ipoteza "2", deci functia f are cel putin un punct de discontinuitate intre $f(a)$ si a.

Problema 18.

Sa se arate ca nu exista functii continue $f:[a,b]\to[a,b]$ astfel incat:
$f(\mathbb{Q}\cap[a,b])\subseteq\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ si $f((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[a,b]))\subseteq\mathbb{Q}$.

Solutie

Presupunem prin reducere la absurd ca exista o functie f ce indeplineste cerintele problemei . Atunci functia are cel putin un punct fix, adica

$(\exists)c \in [a,b]$ asa incat $f(c) = c$.
Daca $c \in \mathbb{Q} \cap [a,b] \Rightarrow f(c) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,contradictie;

Daca $c \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [a,b]) \Rightarrow f(c) = c \in \mathbb{Q}$, contradictie.

Atunci presupunerea facuta este falsa$\Rightarrow (\nexists)$ functii cu cerintele date.

BIBLIOGRAFIE

- Dinulescu,C.,Dinulescu,I.,Lungoci,G.,Matei,I.-*Elemente (complemente de)analiza matematica pentru clasa a XI-a,*Ed. Ager ,Bucuresti,2002
- Ganga,M.-*Elemente de analiza matematica pentru clasa a XI-a si a XII-a,* Ed.Mathpress,Ploiesti,1999
- Batinetu,M.,Maftei,I.,Minasian-Stancu,I.-*Exercitii si probleme de analiza matematica pentru clasele a XI-a si a XII-a,*Ed.Didactica si Pedagogica,Bucuresti,1981
- Burtea,M.,Burtea,G.-Matematica-clasa a XI-a si clasa a XII-a,Editura Carminis,Pitesti,2006

4.CONVEXITATE ŞI GÂTEAUX- DIFERENŢIABILITATE

PETRACHE ADRIANA*

1. Convexitate

Fie V şi W două spaţii vectoriale.
O mulţime V(mulţimea vectorilor), împreună cu o mulţime K(corpul de scalari), o operaţie notată $"+"$ (adunarea vectorilor) şi cu două operaţii $"\cdot"$(înmulţirea cu scalari a vectorilor şi înmultirea scalarilor între ei), este spaţiuvectorial dacă îndeplineşte următoarele condiţii:

1. $(V,+)$este grupcomutativ
2. $(K,+,\cdot)$este corp comutativ
3. înmulţirea cu scalari are urmatoarele proprietăţi:

- $\forall \alpha, \beta \in K$şi $u \in V$, avem: $(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$(asociativitatea)
- $\forall u \in V$,avem $1 \cdot u = u$, unde 1 este elementul neutru la înmulţire din K
- $\forall \alpha \in K, \forall u, v \in V$, avem $\alpha \cdot (u+v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ (distributivitatea 1)
- $\forall \alpha, \beta \in K, \forall u \in V$, avem$(\alpha + \beta) \cdot u$. (distributivitatea 2)

Definiţie 1.1: (i) Aplicaţia $f: V \to W$ se numeşte aplicaţie liniară dacă şi numai dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

(1) aplicaţia f este aditivă, adică:

$$\forall u, v \in V, f(u+v) = f(u) + f(v);$$

(2) aplicaţia f este omogenă, adică:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in V, f(\alpha u) = \alpha f(u).$$

(ii) Aplicaţia $s: V \to \mathbb{R}$ se numeşte subaditivă (respectiv supraaditivă) dacă şi numai dacă:
$\forall u, v \in V, s(u+v) \leq s(u) + s(v)$,
(respectiv $\forall u, v \in V, s(u+v) \geq s(u) + s(v)$).

(iii) Aplicaţia $s: V \to \mathbb{R}$ se numeşte pozitiv omogenă dacă:

$$\forall \alpha \in (0, \infty), \forall u \in V, s(\alpha u) - \alpha s(u).$$

Aplicaţie 1.1: Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(u) = u + 2, \forall u \in \mathbb{R}$. Să se arate că f verifică relaţia:
$f(\alpha u + (1-\alpha)v) = \alpha f(u) + (1-\alpha) f(v), \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
Rezolvare: Folosind enunţul dat, avem:
$f(\alpha u + (1-\alpha)v) = \alpha u + (1-\alpha)v + 2 = \alpha(u+2) - 2\alpha + (1-\alpha)(v+2) - 2(1-\alpha) + 2 = \alpha(u+2) - 2\alpha + (1-\alpha)(v+2) - 2 + 2\alpha + 2 = \alpha(u+2) + (1-\alpha)(v+2) = \alpha f(u) + (1-\alpha) f(v)$
,
adică ceea ce trebuia arătat.

Exerciţiu propus: Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(u) = \frac{1}{2}u - 1, \forall u \in \mathbb{R}$. Să se arate că f verifică relaţia:
$f(\alpha u + (1-\alpha)v) = \alpha f(u) + (1-\alpha) f(v), \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Definiţie 1.2: O funcţie $f: V \to (-\infty, +\infty]$ se numeşte convexă dacă:
$f(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha f(u) + (1-\alpha) f(v), \forall u, v \in V, \forall \alpha \in (0,1)$.

*Definiţie 1.3:*O mulţime nevidă $A \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$ se numeşte convexă dacă:
$\forall u, v \in A, [u, v] := \{\alpha u + (1-\alpha)v : \alpha \in [0,1]\} \subset A$.

Observaţie1.1: Mulţimea vidă este convexă.

Fie, în continuare, A_1 şi A_2 două mulţimi convexe, $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{R}$.

Propoziţie 1.1: În ipotezele stabilite mai sus, următoarele afirmaţii sunt adevărate:
(i). $A_1 + A_2 := \{u + v : u \in A_1, v \in A_2\}$este mulţime convexă;
(ii). $\alpha A := \{\alpha u : u \in A\}$ este mulţime convexă.

Proprietăţi elementare ale funcţiilor convexe

a). Dacă f este o funcţie convexă, atunci $epif$ este o mulţime convexă în $V \times \mathbb{R}$, unde
$epif = \{(v, a) \in V \times \mathbb{R}; f(v) \leq a\}, \forall a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Observaţie1.2: Reciproca afirmaţiei anterioare este adevărată.

b). Dacă f este o funcţie convexă, atunci $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, mulţimea $[f \leq \alpha]$ este convexă, unde
$[f \leq \alpha] = \{u \in V; f(u) \leq \alpha\}$,
iar V este spaţiu topologic (adică o mulţime pe care s- a definit o structură pe baza căreia se definesc noţiunile de vecinătate, convergenţă si limită).

Observatie1.3: Reciproca afirmaţiei anterioare nu este adevărată.

c). Dacă f şi g sunt funcţii convexe, atunci $f + g$ este funcţie convexă.

d). Dacă $(f_i)_{i \in I}$ este o familie de funcţii convexe, atunci funcţia

$f(u) = sup_{i \in I} f_i(u)$
este convexă, unde I este o mulţime arbitrară.

Definiţie 1.4: Spaţiul V se numeşte con convex de funcţii dacă $\forall f, g \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, avem $f + g \in V$ şi $\alpha f \in V$.

2. Gâteaux- diferenţiabilitate

Fie $f = (f_1, \dots, f_m): A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ şi $u \in IntA$ (unde $IntA$ reprezintă interiorul mulţimii $A \subset \mathbb{R}^n$, adică mulţimea punctelor interioare ale lui A; un punct $u \in \mathbb{R}^n$ este punct interior al mulţimii $A \subset \mathbb{R}^n$ dacă există un interval deschis (a, b) astfel încât $u \in (a, b) \subset A$).

Fie $v \in \mathbb{R}^n$ un vector pe care îl vom numi direcţie.

Considerăm funcţia

$$g_v: A_v \to \mathbb{R}^m, g_v(t) \stackrel{def}{=} f(u + tv),$$

unde $A_v \stackrel{def}{=} \{t \in \mathbb{R}: u + tv \in A\}$.

Definiţie 2.1: Spunem că funcţia f este derivabilă după direcţia v în punctul u, dacă g_v este derivabilă în $t_0 = 0$.

Vectorul (număr real în cazul $m = 1$)

$$g_v'(0) = \lim_{\to 0} \frac{g_v(t) - g_v(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(u + tv) - f(u)}{t}$$

se notează cu $\frac{\partial f(u)}{\partial v}$ şi se numeşte derivata după direcţia v a funcţiei f în punctul u.

Definiţie 2.2: Spunem că funcţia $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferenţiabilă Gâteaux în $u \in A$, dacă f este derivabilă după orice direcţie $v \in \mathbb{R}^n$ în u.

Aplicaţia $\partial_u f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \partial_u f(v) = \frac{\partial f(u)}{\partial v}$ se numeşte diferenţiala Gâteaux a funcţiei f în punctul u.

Dacă $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferenţiabilă Gâteaux în $u \in A$, atunci f este continuă Gâteaux în u.

O aplicaţie $f = (f_1, \dots, f_m): A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferenţiabilă Gâteaux în $u \in A$ dacă şi numai dacă toate componentele sale $(f_i)_{i=\overline{1,m}}$ sunt diferenţiabile Gâteaux în u. Are loc relaţia:

$\partial_u f(v) = (\partial_u f_1(v), \dots, \partial_u f_m(v))$.

Exemplu 2.1: Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$. Să se calculeze diferenţiala Gâteaux a funcţiei f în punctul $u = (2,3,1)$ după direcţia $v = (1,2,1)$.

Soluţie: Derivata după direcţia v a funcţiei f in punctul u este:

$\frac{\partial f(u)}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{f(u+tv) - f(u)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(2+t, 3+2t, 1+t) - f(2,3,1)}{t} =$

$\lim_{t \to 0} \frac{(2+t)\cdot(3+2t)\cdot(1+t) - 2\cdot 3\cdot 1}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{2t^3 + 9t^2 + 13t}{t} = \lim_{t \to 0} (2t^2 + 9t + 13) =$

13

.

Pentru a determina diferenţiala Gâteaux a funcţiei f într- un punct$u=(u_1,u_2,u_3)$, se consideră un vector arbitrar$v=(v_1,v_2,v_3)$ şi se calculează derivata după direcţia v a funcţiei f în punctul u.
Atunci avem:
$\frac{\partial f(u)}{\partial v}=\lim_{t\to 0}\frac{f(u+tv)-f(u)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(u_1+tv_1,u_2+tv_2,u_3+tv_3)-f(u_1,u_2,u_3)}{t}=$
$\lim_{t\to 0}\frac{(u_1+tv_1)\cdot(u_2+tv_2)\cdot(u_3+tv_3)-u_1\cdot u_2\cdot u_3}{t}=u_1\cdot u_2\cdot v_3+u_1\cdot u_3\cdot v_2+u_2\cdot u_3\cdot v_1$
.
Rezultă că$\partial_u f(v)=u_1\cdot u_2\cdot v_3+u_1\cdot u_3\cdot v_2+u_2\cdot u_3\cdot v_1$.
Diferenţiala Gâteaux a funcţiei f înpunctul$u=(2,3,1)$ este:
$\partial_{(2,3,1)}f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\partial_{(2,3,1)}f(v)=6v_3+2v_2+3v_1,\forall v=(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3$.
În cazul nostru, dacă luăm $v=(1,2,1)$, atunci obţinem:
$\partial_{(2,3,1)}f(1,2,1)=6\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 1=13$.
*Exerciţii propuse:*Să se calculeze diferenţiala Gâteaux a următoarelor funcţii în punctul u după direcţia v:
a).
$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},f(x,y)=2\cdot x^3+3\cdot x\cdot y^2+5\cdot x-2\cdot y,u=(1,2)\in\mathbb{R}^2,v=(3,3);$

b).$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},f(x,y)=x\cdot y^3,u=(1,2)\in\mathbb{R}^2,v=(2,2);$
c).
$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},f(x,y,z)=3\cdot x^2\cdot y+x\cdot y\cdot z+x\cdot(1-z),u=(3,1,1),v=(1,2,1);$

d).
$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,f(x,y)=(x\cdot y,x^2+y,3\cdot x-2\cdot y),u=(2,5)\in\mathbb{R}^2,v=(3,4).$
Răspuns: a). $\partial_{(1,2)}f(3,3)=99$;
b). $\partial_{(1,2)}f(2,2)=40$;
c). $\partial_{(3,1,1)}f(1,2,1)=79$;
d). $\partial_{(2,5)}f(3,4)=(23,16,1)$.

Operaţii cu funcţii Gâteaux- diferenţiabile
Dacă$f,g:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ sunt Gâteaux- diferenţiabile în $u\in A^0$, atunci $f+g$ şi αf sunt Gâteaux- diferenţiabile în u cu:
$\partial_u(f+g)(v)=\partial_u f(v)+\partial_u g(v),$
$\partial_u(\alpha f)(v)=\alpha\partial_u f(v),\forall\alpha\in\mathbb{R},\forall v\in\mathbb{R}^n.$
Observaţie 2.1: În cazul $m=1$ şi $g(u)\neq 0$, funcţia $\frac{f}{g}$ este Gâteaux- diferenţiabila în u şi
$\partial_u\left(\frac{f}{g}\right)(v)=\frac{1}{g^2(u)}[g(u)\partial_u f(v)-f(u)\partial_u g(v)].$
Exemplu2.2:
Fie

$f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=x\cdot y-1, g(x,y)=(x+1)\cdot(y+1), u=(3,5), v=(2,1)$

. Să se calculeze diferenţiala Gâteaux a următoarelor funcţiilor în punctul u după direcţia v:

a). f şi g;

b). $f+g$;

c). $\alpha f, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Soluţie: a). Derivata după direcţia v a funcţiei f în punctul u este:

$$\frac{\partial f(u)}{\partial v}=\lim_{t\to 0}\frac{f(u+tv)-f(u)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(3+2t,5+t)-f(3,5)}{t}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{(3+2t)\cdot(5+t)-1-3\cdot 5+1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{2t^2+13t}{t}=\lim_{t\to 0}(2t+13)=13$$

.

Pentru a determina diferenţiala Gâteaux a funcţiei f într- un punct$u=(u_1,u_2)$, se consideră un vector arbitrar$v=(v_1,v_2)$ şi se calculează derivata după direcţia v a funcţiei f în punctul u.

Atunci avem:

$$\frac{\partial f(u)}{\partial v}=\lim_{t\to 0}\frac{f(u+tv)-f(u)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(u_1+tv_1,u_2+tv_2)-f(u_1,u_2)}{t}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{(u_1+tv_1)\cdot(u_2+tv_2)-1-u_1\cdot u_2+1}{t}=u_1\cdot v_2+u_2\cdot v_1$$

.

Rezultă că$\partial_u f(v)=u_1\cdot v_2+u_2\cdot v_1$.

Diferenţiala Gâteaux a funcţiei f în punctul$u=(3,5)$ este:

$\partial_{(3,5)}f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \partial_{(3,5)}f(v)=3v_2+5v_1, \forall v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$.

În cazul nostru, dacă luăm $v=(2,1)$, atunci obţinem:

$\partial_{(3,5)}f(2,1)-5\cdot 2+3\cdot 1-13$.

Derivata după direcţia v a funcţiei g în punctul u este:

$$\frac{\partial g(u)}{\partial v}=\lim_{t\to 0}\frac{g(u+tv)-g(u)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{g(3+2t,5+t)-g(3,5)}{t}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{(3+2t+1)\cdot(5+t+1)-(3+1)\cdot(5+1)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{2t^2+16t}{t}=\lim_{t\to 0}(2t+16)=16$$

.

Pentru a determina diferenţiala Gâteaux a funcţiei g într- un punct$u=(u_1,u_2)$, se consideră un vector arbitrar$v=(v_1,v_2)$ şi se calculează derivata după direcţia v a funcţiei g în punctul u.

Atunci avem:

$$\frac{\partial g(u)}{\partial v}=\lim_{t\to 0}\frac{g(u+tv)-g(u)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{g(u_1+tv_1,u_2+tv_2)-g(u_1,u_2)}{t}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{(u_1+tv_1+1)\cdot(u_2+tv_2+1)-(u_1+1)\cdot(u_2+1)}{t}=u_1\cdot v_2+u_2\cdot v_1+v_1+v_2$$

.

Rezultă că$\partial_u g(v)=u_1\cdot v_2+u_2\cdot v_1+v_1+v_2$.

Diferenţiala Gâteaux a funcţiei g în punctul$u=(3,5)$ este:

$\partial_{(3,5)}g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \partial_{(3,5)}g(v)-3v_2+5v_1+v_1+v_2-6v_1+4v_2, \forall v-(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$.

În cazul nostru, dacă luăm $v=(2,1)$, atunci obţinem:
$\partial_{(3,5)}g(2,1)=6\cdot 2+4\cdot 1=16$.

b).Derivata după direcţia v a funcţiei $f+g$ în punctul u, unde $(f+g)(x,y)=f(x,y)+g(x,y)=x\cdot y-1+(x+1)\cdot(y+1)=2\cdot x\cdot y+x+y$, este:

$\frac{\partial(f+g)(u)}{\partial v}=\lim_{t\to 0}\frac{(f+g)(u+tv)-(f+g)(u)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(f+g)(3+2t,5+t)-(f+g)(3,5)}{t}=$
$\lim_{t\to 0}\frac{2\cdot(3+2t)\cdot(5+t)+3+2t+5+t-2\cdot 3\cdot 5-3-5}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{4t^2+29t}{t}=\lim_{t\to 0}(4t+29)=$
$29=13+16=\frac{\partial f(u)}{\partial v}+\frac{\partial g(u)}{\partial v}$

.

Pentru a determina diferenţiala Gâteaux a funcţiei $f+g$ într- un punct $u=(u_1,u_2)$, se consideră un vector arbitrar $v=(v_1,v_2)$ şi se calculează derivata după direcţia v a funcţiei $f+g$ în punctul u.

Atunci avem:

$\frac{\partial(f+g)(u)}{\partial v}=\lim_{t\to 0}\frac{(f+g)(u+tv)-(f+g)(u)}{t}=$
$\lim_{t\to 0}\frac{(f+g)(u_1+tv_1,u_2+tv_2)-(f+g)(u_1,u_2)}{t}=$
$\lim_{t\to 0}\frac{2\cdot(u_1+tv_1)\cdot(u_2+tv_2)+u_1+tv_1+u_2+tv_2-2\cdot u_1\cdot u_2-u_1-u_2}{t}=2\cdot u_1\cdot v_2+2\cdot u_2\cdot v_1+v_1+v_2$

.

Rezultă că $\partial_u(f+g)(v)=2\cdot u_1\cdot v_2+2\cdot u_2\cdot v_1+v_1+v_2$.

Diferenţiala Gâteaux a funcţiei $f+g$ în punctul $u=(3,5)$ este:

$\partial_{(3,5)}(f+g):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\partial_{(3,5)}(f+g)(v)=6v_2+10v_1+v_1+v_2=11v_1+7v_2=\partial_{(3,5)}f(v)+\partial_{(3,5)}g(v),\forall v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$.

În cazul nostru, dacă luăm $v=(2,1)$, atunci obţinem:

$\partial_{(3,5)}(f+g)(2,1)=11\cdot 2+7\cdot 1=29=13+16=\partial_{(3,5)}f(2,1)+\partial_{(3,5)}g(2,1)$

.

c). Derivata după direcţia v a funcţiei αf în punctul u, unde $\alpha f(x)=\alpha\cdot f(x)=\alpha(x\cdot y-1)$, este:

$\frac{\partial(\alpha f)(u)}{\partial v}=\lim_{t\to 0}\frac{(\alpha f)(u+tv)-(\alpha f)(u)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(\alpha f)(3+2t,5+t)-(\alpha f)(3,5)}{t}=$
$\lim_{t\to 0}\frac{\alpha\cdot(3+2t)\cdot(5+t)-\alpha-\alpha\cdot 3\cdot 5+\alpha}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{2\alpha t^2+13\alpha t}{t}=\lim_{t\to 0}(2\alpha t+13\alpha)=$
$13\alpha=\alpha\cdot\frac{\partial f(u)}{\partial v}$

.

Pentru a determina diferenţiala Gâteaux a funcţiei αf într- un punct$u = (u_1, u_2)$, se consideră un vector arbitrar$v = (v_1, v_2)$ şi se calculează derivata după direcţia v a funcţiei f în punctul u.

Atunci avem:

$$\frac{\partial(\alpha f)(u)}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{(\alpha f)(u+tv)-(\alpha f)(u)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(\alpha f)(u_1+tv_1, u_2+tv_2)-(\alpha f)(u_1,u_2)}{t} =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\alpha \cdot (u_1+tv_1)\cdot(u_2+tv_2)-\alpha-\alpha \cdot u_1 \cdot u_2+\alpha}{t} = \alpha \cdot u_1 \cdot v_2 + \alpha \cdot u_2 \cdot v_1$$

.

Rezultă că$\partial_u(\alpha f)(v) = \alpha \cdot u_1 \cdot v_2 + \alpha \cdot u_2 \cdot v_1$.

Diferenţiala Gâteaux a funcţiei αf în punctul$u = (3,5)$ este:

$\partial_{(3,5)}(\alpha f): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \partial_{(3,5)}(\alpha f)(v) = \alpha \cdot (3v_2 + 5v_1) = \alpha \cdot \partial_{(3,5)} f(v), \forall v = (v_1, v_2$
$) \in \mathbb{R}^2$.

În cazul nostru, dacă luăm $v = (2,1)$, atunci obţinem:

$\partial_{(3,5)}(\alpha f)(2,1) = \alpha \cdot (5 \cdot 2 + 3 \cdot 1) = 13\alpha = \alpha \cdot \partial_{(3,5)} f(2,1)$.

Exemple de funcţii Gâteaux- diferenţiabile în $(0,0)$

a). $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, \text{ dacă} (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ dacă} (x,y) = (0,0), \end{cases}$

cu derivata:

$g(a,b) - \begin{cases} \frac{a^3}{a^2+b^2}, \text{ dacă} (a,b) \neq (0,0) \\ 0, \text{dacă} (a,b) = (0,0), \end{cases}$

unde funcţia g nu este aplicaţie liniară.

Observaţie 3.2: Funcţia f este continuă în $(0,0)$.

b). $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0), \end{cases}$

cu derivata$g(a,b) = 0$ pentru toţi (a,b), care este o aplicaţie liniară.

Observaţie 3.3: Funcţia f nu este continuă în $(0,0)$.

c). $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}, \text{ dacă} (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ dacă} (x,y) = (0,0), \end{cases}$

cu derivata$g(a,b) = 0$ pentru toţi (a,b), care este o aplicaţie liniară.

Observaţe 3.4: Funcţia f este continuă în $(0,0)$.

Acknowledgements:This work was partially supported by the strategic grant POSDRU/88/1.5/S/52826, Project ID52826 (2009), co- financed by the European Social Fund- Investing in People, within the Sectoral Operational Programme Human Resources Development 2007- 2013.

*** Petrache Adriana**
Universitatea din Piteşti
Departamentul de Matematică
Domeniul fundamental: Matematică Aplicată
Piteşti, Argeş, Romania
Adresă de e- mail: *adrianapetrache2010@yahoo.com*

Bibliografie

[1]. M. Burtea, G. Burtea, Matematică. Manual pentru clasa a XI- a, Editura Carminis, Piteşti, 2001
[2]. C. Udrea, Calcul Integral şi Elemente de Teoria Măsurii, Editura Expert, Bucureşti, 2003
[3]. C. Udrea, Funcţii convexe. Elemente de teorie neliniară a potenţialului, Editura Tehnică, Bucureşti, 2002
[4]. H. Brezis, Analiză funcţională. Teorie şi aplicaţii, Editura Academiei, Bucureşti, 2002 (traducere din limba franceză de V. Rădulescu)

[5]. N. Boboc, Analiză matematică, vol. II şi III, Univ. Bucureşti, 1992

[6]. T. Rockafellar, Convex analysis, Princeton University Press, Princeton, 1970

[7]. I. Colojoara, Analiză matematică, Editura didactică şi pedagogic, Bucureşti, 1983

[8]. K. Yosida, Functional Analysis, Springer- Verlag, Berlin, 1966

[9]. A. Precupeanu, Analiză matematică. Funcţii reale, Editura didactică şi pedagogic, Bucureşti, 1976

[10]. V. Barbu, T. Precupeanu, Convexity and optimization in Banach spaces, Noordhoff, 1978

[11]. C. Meghea, Bazele analizei matematice, Editura şt. şi encicl., Bucureşti, 1977

[12]. C. Meghea, Introducere în analiză matematică, Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1968

[13]. I. Ekeland, R. Temam, Analyse convexe et problems variationnels, Dunod- Gauthier, Paris, 1974

[14]. C. Devito, Functional Analysis, Acad. Press, 1978

[15]. N. Dunford, J. T. Schwartz, Linear operators, Interscience, 1972

[16]. W. Rudin, Functional Analysis, McGraw Hill Book Company, New York, 1973

5. PROBLEMA LUNII FEBRUARIE 2012

WWW.MATEINFO.RO

Fie *P* un punct interior triunghiului *ABC*. Dreptele *AP, BP, CP* intersectează laturile opuse respectiv în A_1, B_1, C_1. Se notează

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{p}{n}, \qquad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{m}{p}, \qquad \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{n}{m},$$

unde *m, n, p* sunt numere reale strict pozitive. Prin punctul *P* se duc dreptele A_2B_3, B_2C_3, C_2A_3 paralele respectiv la laturile *AB, BC, CA,* cu $A_2, A_3 \in [BC]$, $B_2, B_3 \in [CA]$, $C_2, C_3 \in [AB]$.

Să se demonstreze că :

$$\frac{A_2A_3}{mBC} = \frac{B_2B_3}{nCA} = \frac{C_2C_3}{pAB}.$$

Prof. Mănescu Avram Corneliu

Soluţie autor: Triunghiurile *ABC* şi PA_2A_3 sunt asemenea, deoarece au laturile paralele, iar raportul lor de asemănare este egal cu $\frac{AA_1}{PA_1}$. Din relaţia lui *van Aubel* se obţine

$$\frac{AP}{PA_1} = \frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{n}{m} + \frac{p}{m} = \frac{n+p}{m}.$$

Se deduce

$$\frac{AA_1}{PA_1} = \frac{AP}{PA_1} + 1 = \frac{n+p}{m} + 1 = \frac{m+n+p}{m},$$

de unde

$$\frac{A_2A_3}{mBC} = \frac{1}{m+n+p}.$$

Din motive de simetrie, rezultă că şi celelalte două rapoarte au această valoare, ceea ce încheie demonstraţia.

Observaţie. Dacă $m = BC^2$, $n = CA^2$, $p = AB^2$, atunci $P \equiv K$ (punctul lui *Lemoine*), punctele $A_2, A_3, B_2, B_3, C_2, C_3$ sunt conciclice (primul cerc *Lemoine*), iar segmentele interceptate de acest cerc pe laturi sunt proporţionale cu BC^3, CA^3, AB^3.

ALTE SOLUȚII:

1. Prof. Codreanu Ioan Viorel, Șc. cu cls. I-VIII Satulung, Maramureș

Din $PA_2 \parallel AB$ rezultă $\angle PA_2A_3 \equiv \angle ABC$ (corespondente) (1).

Din $PA_3 \parallel AC$ rezultă $\angle PA_3A_2 \equiv \angle ACB$ (corespondente) (2).

Din (1) și (2) rezultă $\Delta PA_2A_3 \sim \Delta ABC$. Analog $\Delta B_3PB_2 \sim \Delta ABC$ și $\Delta C_2C_3P \sim \Delta ABC$. Atunci au loc egalitățile

$$\frac{PA_2}{AB} = \frac{A_2A_3}{BC} = \frac{PA_3}{AC} \quad (3)$$

$$\frac{B_3P}{AB} = \frac{PB_2}{BC} = \frac{B_2B_3}{AC} \quad (4)$$

$$\frac{C_2C_3}{AB} = \frac{PC_3}{BC} = \frac{PC_2}{AC} \quad (5)$$

Din $PC_3 \parallel BA_1$ aplicând teorema fundamentală a asemănării în ΔABA_1 rezultă $\Delta APC_3 \sim \Delta AA_1B$ de unde obținem $\frac{AP}{AA_1} = \frac{PC_3}{BA_1}$ (6). Analog $\frac{AP}{AA_1} = \frac{PB_2}{CA_1}$ (7).

Din (6) și (7) obținem $\frac{PC_3}{BA_1} = \frac{PB_2}{CA_1}$ și cum $\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{p}{n}$ rezultă $\frac{PC_3}{PB_2} = \frac{p}{n}$ (8). Analog $\frac{PB_3}{PA_2} = \frac{n}{m}$ (9).

Din (3) și (4) obținem $\frac{PB_3}{AB} \cdot \frac{AB}{PA_2} = \frac{B_2B_3}{AC} \cdot \frac{BC}{A_2A_3}$ și folosind (9) rezultă

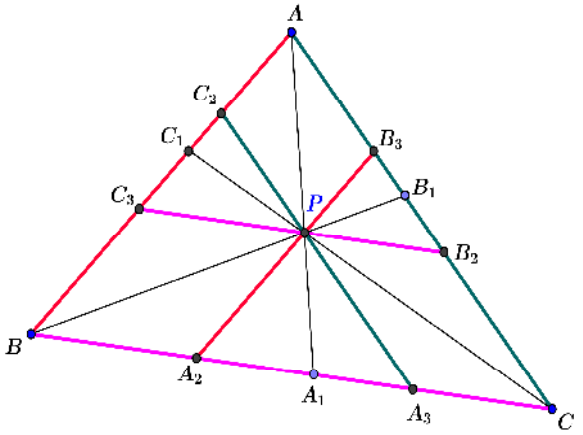
$$\frac{A_2A_3}{mBC} = \frac{B_2B_3}{nAC} \quad (10)$$

Din (4) și (5) obținem $\frac{PC_3}{BC} \cdot \frac{BC}{PB_2} = \frac{C_2C_3}{AB} \cdot \frac{AC}{B_2B_3}$ și folosind (8) rezultă

$$\frac{B_2B_3}{nAC} = \frac{C_2C_3}{pAB} \quad (11)$$

Din (10) și (11) obținem rezultatul problemei.

2. Prof. Gheorghe ROTARIU – Grupul Școlar „Al. Vlahuță” Șendriceni, jud. Botoșani



Paşii de parcurs în rezolvarea problemei sunt următorii:

1. **1**. Vom rescrie egalităţile din concluzie cu ajutorul teoremei lui *Thales* şi a teoremei lui *Gergonne.*
2. **2.** Vom aplica relaţiile lui *Van Aubel* pentru punctul P interior triunghiului ABC.

Vom considera primul raport din concluzie: $\frac{A_2A_3}{m_{BC}}$. Relaţii analoage vom avea, în mod similar, şi pentru celelalte două rapoarte ale concluziei.

$$\frac{A_2A_3}{m_{BC}}=\frac{BC-BA_2-CA_3}{m_{BC}} \qquad (1)$$

În triunghiul CC_1B avem $A_2P\|C_1B\Rightarrow\frac{BA_2}{BC}=\frac{C_1P}{C_1C}\Rightarrow BA_2=\frac{C_1P}{C_1C}\cdot BC$ (2)

În triunghiul BB_1C avem $A_3P\|CB_1\Rightarrow\frac{CA_3}{CB}=\frac{B_1P}{B_1B}\Rightarrow CA_3=\frac{B_1P}{B_1B}\cdot BC$ (3)

Înlocuim (2) şi (3) în (1) şi obţinem relaţia (4):

$$\frac{A_2A_3}{m_{BC}}=\frac{BC-BA_2-CA_3}{m_{BC}}=\frac{\cancel{BC}\left(1-\frac{C_1P}{C_1C}-\frac{B_1P}{B_1B}\right)}{m\,\cancel{BC}}\overset{Teorema\ Gergonne}{=}\frac{\frac{A_1P}{A_1A}}{m}=\frac{A_1P}{m\,A_1A}. \qquad (4)$$

Analog avem şi egalităţile:

$$\frac{B_2B_3}{n_{CA}}=\frac{B_1P}{n\,B_1B} \qquad (5)$$

$$\frac{C_2C_3}{p_{AB}}=\frac{C_1P}{p\,C_1C} \qquad (6)$$

Aşadar, concluzia problemei devine:

$$\frac{A_2A_3}{m_{BC}}=\frac{B_2B_3}{n_{CA}}=\frac{C_2C_3}{p_{AB}}\Leftrightarrow\frac{A_1P}{m\,A_1A}=\frac{B_1P}{n\,B_1B}=\frac{C_1P}{p\,C_1C}.$$

Vom aplica acum relaţiile lui *Van Aubel* pentru punctul P utilizând şi rapoartele din ipoteză.

$$\frac{AP}{PA_1}=\frac{AC_1}{C_1B}+\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{n}{m}+\frac{p}{m}=\frac{n+p}{m}\Rightarrow\frac{A_1P}{AP}=\frac{m}{n+p}\Rightarrow\frac{A_1P}{A_1A}=\frac{m}{m+n+p}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{A_1P}{m\,A_1A}=\frac{1}{\cancel{m}}\cdot\frac{\cancel{m}}{m+n+p}=\frac{1}{m+n+p}\qquad(7)$$

$$\frac{BP}{PB_1}=\frac{BC_1}{C_1A}+\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}\Rightarrow\frac{B_1P}{BP}=\frac{n}{m+p}\Rightarrow\frac{B_1P}{B_1B}=\frac{n}{n+m+p}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{B_1P}{n\,B_1B}=\frac{1}{\cancel{n}}\cdot\frac{\cancel{n}}{m+n+p}=\frac{1}{m+n+p}\qquad(8)$$

$$\frac{CP}{PC_1}=\frac{CA_1}{A_1B}+\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{n}{p}+\frac{m}{p}=\frac{n+m}{p}\Rightarrow\frac{C_1P}{CP}=\frac{p}{m+n}\Rightarrow\frac{C_1P}{C_1C}=\frac{p}{p+m+n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{C_1P}{p\,C_1C}=\frac{1}{\cancel{p}}\cdot\frac{\cancel{p}}{m+n+p}=\frac{1}{m+n+p}\qquad(9)$$

Relaţiile (7), (8) şi (9) rezolvă cerinţa.

Observaţie. Teorema lui *Gergonne* şi Relaţiile lui *Van Aubel* au fost prezentate în cadrul rezolvării problemei lunii ianuarie.

3. Prof. Oprita Elena, Grupul Şcolar "Al. Vlahuţă" Şendriceni, Jud Botoşani

Din faptul că dreptele A_2B_3, B_2C_3, C_2A_3 paralele respectiv la laturile AB, BC, CA rezultă $PC_3BA_2, PB_2CA_3, AB_3PC_2$ sunt paralelograme, deci avem

$$[PC_2]\equiv[AB_3],[PB_3]\equiv[AC_2],[PB_2]\equiv[CA_3],[PA_3]\equiv[B_2C],\quad(1)$$
$$[PC_3]\equiv[BA_2],[PA_2]\equiv[BC_3].$$

În triunghiul $\triangle ABA_1$ cu $PC_3 \| BA_1$ aplicăm teorema lui Thales şi obţinem

$$\frac{AP}{AA_1}=\frac{AC_3}{AC}=\frac{PC_3}{BA_1}.$$

În triunghiul $\triangle ACA_1$ cu $PB_2 \| A_1C$ aplicăm teorema lui Thales şi obţinem

$$\frac{AP}{AA_1}=\frac{AB_2}{AC}=\frac{PB_2}{A_1C}.$$

Din cele două relaţii şi relaţia (1) obţinem

$\frac{A_1C}{BA_1}=\frac{PB_2}{PC_3}=\frac{n}{p}$, adică $\frac{CA_3}{BA_2}=\frac{n}{p}$ şi $\frac{AB_2}{AC_3}=\frac{AC}{AB}$ (2).

În $\triangle CAC_1$ cu $PB_3 \| AC_1$ aplicăm teorema lui Thales şi obţinem

$$\frac{CP}{CC_1}=\frac{CB_3}{CA}=\frac{PB_3}{AC_1}.$$

În $\triangle CBC_1$ cu $PA_2 \| BC_1$ aplicăm teorema lui Thales şi obţinem

$$\frac{CP}{CC_1} = \frac{CA_2}{CB} = \frac{PA_2}{BC_1}$$

Din cele două relaţii şi relaţia (1) obţinem

$\frac{BC_1}{AC_1} = \frac{PA_2}{PB_3} = \frac{m}{n}$, adică $\frac{BC_3}{AC_2} = \frac{m}{n}$ şi $\frac{CB_3}{CA_2} = \frac{CA}{CB}$ (3).

În mod analog, aplicăm teorema lui Thales în $\triangle BAB_1$ cu $PC_2 \| AB_1$ şi obţinem

$$\frac{BP}{BB_1} = \frac{BC_2}{BA} = \frac{PC_2}{AB_1}$$

şi în $\triangle BCB_1$ cu $PA_3 \| CB_1$ avem $\frac{BP}{BB_1} = \frac{BA_3}{BC} = \frac{PA_3}{CB_1}$.

Din cele două relaţii şi relaţia (1) obţinem

$\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{PA_3}{PC_2} = \frac{m}{p}$, adică $\frac{B_2C}{AB_3} = \frac{m}{p}$ şi $\frac{BC_2}{BA_3} = \frac{AB}{BC}$ (4).

Aplicăm teorema lui Thales în $\triangle C_2BA_3$ cu $PC_3 \| BA_3$ şi folosind relaţiile (1) obţinem

$$\frac{C_2C_3}{C_2B} = \frac{BA_2}{BA_3} (5)$$

În $\triangle A_2CB_3, PA_3 \| CB_3$ aplicăm teorema lui Thales şi obţinem

$$\frac{A_2A_3}{A_2C} = \frac{B_2C}{CB_3} (6).$$

În $\triangle C_2BA_3, PC_3 \| BA_3 \Rightarrow \frac{C_2C_3}{C_3B} = \frac{C_2P}{PA_3} \overset{(1)}{=} \frac{AB_3}{B_2C} (7)$

În $\triangle A_3BC_2, PA_2 \| BC_2 \Rightarrow \frac{A_3A_2}{A_2B} = \frac{A_3P}{PC_2} \overset{(1)}{=} \frac{CB_2}{AB_3} (8)$ şi în

$\triangle B_2AC_3, PB_3 \| AC_3 \Rightarrow \frac{B_2B_3}{B_3A} = \frac{B_2P}{PC_3} \overset{(1)}{=} \frac{CA_3}{BA_2} (9)$.

Din relaţiile (2)-(9) obţinem:

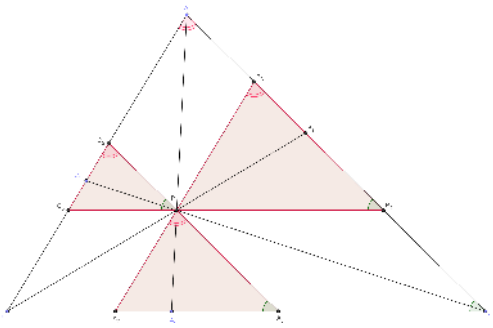
$$\frac{A_2A_3}{mBC} = \frac{B_2B_3}{nCA} = \frac{C_2C_3}{pAB}.$$

4. Prof. Biro Istvan, Sânnicolau Mare, jud. Timiş

Folosind proprietăţile triunghiurilor asemenea obţinem:

$$\left.\begin{array}{l} {}_{\Delta}CAC_1 \approx_{\Delta} CB_3P \Rightarrow \dfrac{AC_1}{PB_3}=\dfrac{CC_1}{CP} \\ {}_{\Delta}CBC_1 \approx_{\Delta} CA_2P \Rightarrow \dfrac{BC_1}{PA_2}=\dfrac{CC_1}{CP} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{PB_3}{PA_2}=\frac{AC_1}{BC_1}=\frac{n}{m},$$

$$\left.\begin{array}{l} {}_{\Delta}BCB_1 \approx_{\Delta} BA_3P \Rightarrow \dfrac{CB_1}{PA_3}=\dfrac{BB_1}{BP} \\ {}_{\Delta}BAB_1 \approx_{\Delta} BC_2P \Rightarrow \dfrac{AB_1}{PC_2}=\dfrac{BB_1}{BP} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{PA_3}{PC_2}=\frac{CB_1}{AB_1}=\frac{m}{p}.$$



Pe de altă parte din asemănarea triunghiurilor $PA_2A_3, PB_2B_3, PC_2C_3$ și ABC avem:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A_2A_3}{BC}=\dfrac{PA_2}{AB} \\ \dfrac{B_2B_3}{AC}=\dfrac{PB_3}{AB} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{A_2A_3}{B_2B_3}=\frac{BC}{AC}\cdot\frac{PA_2}{PB_3}=\frac{mBC}{nAC} \Leftrightarrow \frac{A_2A_3}{mBC}=\frac{B_2B_3}{nAC}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A_2A_3}{BC}=\dfrac{PA_3}{AC} \\ \dfrac{C_2C_3}{AB}=\dfrac{PC_2}{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{A_2A_3}{C_2C_3}=\frac{BC}{AB}\cdot\frac{PA_3}{PC_2}=\frac{mBC}{pAB} \Leftrightarrow \frac{A_2A_3}{mBC}=\frac{C_2C_3}{pAB}$$

$$\Rightarrow \frac{A_2A_3}{mBC}=\frac{B_2B_3}{nAC}=\frac{C_2C_3}{pAB}.$$

5. Prof. Păcurar Cornel-Cosmin,Blaj,județul Alba

Fie $k\in\mathbb{R}-\{-1\}$ astfel ca $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{PA_1}$,în ΔAA_1B, $PA_2\|AB$ aplicând teorema lui Thales obținem

$\overrightarrow{BA_2}=k\overrightarrow{A_2A_1}\Rightarrow\overrightarrow{r_{A_2}}=\frac{\overrightarrow{r_B}+k\overrightarrow{r_{A_1}}}{1+k}$.În ΔAA_1C , $PA_3\|AC$ aplicând teorema lui Thales obținem

$\overrightarrow{CA_3}=k\overrightarrow{A_3A_1}\Rightarrow\overrightarrow{r_{A_3}}=\frac{\overrightarrow{r_C}+k\overrightarrow{r_{A_1}}}{1+k}$.

Avem $\overrightarrow{A_2A_3}=\overrightarrow{r_{A_3}}-\overrightarrow{r_{A_2}}=\frac{\overrightarrow{r_C}-\overrightarrow{r_D}}{1+x}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{BC}\Rightarrow\frac{A_2A_3}{BC}=\frac{1}{1+k}$.

În ΔAA_1C,punctele B,P,E_1 sunt coliniare, aplicând teorema lui Menelaus obținem

$$\frac{AP}{PA_1}\cdot\frac{A_1B}{BC}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=1\Rightarrow k\cdot\frac{A_1B}{BC}\cdot\frac{m}{p}=1 \qquad (1).$$

Din $\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{p}{n}\Rightarrow\frac{A_1B}{BC}=\frac{p}{p+n}$ (2).

Din $(1),(2) \Rightarrow k\cdot\frac{m}{p+n}=1 \Rightarrow k=\frac{p+n}{m} \Rightarrow k+1=\frac{p+m+n}{m} \Rightarrow \frac{1}{k+1}=\frac{m}{p+m+n}$.

Din $\frac{A_2A_3}{EC}=\frac{1}{1+k}$ și $\frac{1}{k+1}=\frac{m}{p+m+n} \Rightarrow \frac{A_2A_3}{BC}=\frac{m}{p+m+n} \Rightarrow \frac{A_2A_3}{mBC}=\frac{1}{p+m+n}$ .Analog $\frac{B_2B_3}{nCA}=\frac{1}{p+m+n}$ și

$\frac{C_2C_3}{pAB}=\frac{1}{p+m+n}$.

Din $\frac{A_2A_3}{mBC}=\frac{1}{p+m+n}$, $\frac{B_2B_3}{nCA}=\frac{1}{p+m+n}$ și $\frac{C_2C_3}{pAB}=\frac{1}{p+m+n}$ deducem $\frac{A_2A_3}{mBC}=\frac{B_2B_3}{nCA}=\frac{C_2C_3}{pAB}$.